



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**MAESTRÍA EN ECONOMÍA**

**EL PRODUCTO POTENCIAL EN MÉXICO 1993-2012:**

**FILTROS DE KALMAN Y HODRICK-PRESCOTT**

**TESIS**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN ECONOMÍA**

**PRESENTA:**

**JAIME EDUARDO LEÓN BOLAÑOS**

**TUTORES PRINCIPALES:**

**MTRA. VIOLETA MIREYA RODRÍGUEZ DEL VILLAR** **IIEC**

**MTRA. PATRICIA RODRÍGUEZ LÓPEZ** **IIEC**

**MÉXICO, D.F. MARZO 2013**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Dedicatoria

---

A Dios, por haberme dado tanto amor,

A mi familia, que cada vez se hace más grande,  
especialmente a mis padres porque gracias a  
ellos estoy aquí y soy quien soy.

A mis queridas hermanas que me han mostrado,  
al igual que mis padres, que el esfuerzo y el trabajo  
continuo producen resultados.

Por su amor y su apoyo incondicional:

Gracias.

Lalo

# Agradecimientos

---

A mi tutora y asesora de tesis, la Mtra. Violeta Mireya Rodríguez del Villar; así como a la Mtra. Patricia Rodríguez López. Gracias por su apoyo, por ayudarme a clarificar mis dudas; y sobretodo, gracias por motivarme para continuar pese a las dificultades que se presentaron en la realización de este documento. Siempre recordaré su paciencia y su amabilidad para conmigo.

A mis sinodales: el Dr. Felipe de Jesús Peredo y Rodríguez, la Dra. Noemi Ornah Levy Orlik y el Mtro. Mario Rojas Miranda, por tomarse el tiempo de revisar este manuscrito y por su asistencia a la presentación del mismo.

Finalmente, agradezco a Dios, a mis padres, a mis hermanas y amigos por su apoyo, motivación y paciencia que me impulsaron a completar esta etapa.



The day is not far off when the economic problem will take the back seat where it belongs, and the arena of the heart and the head will be occupied or reoccupied, by our real problems - the problems of life and of human relations, of creation and behavior and religion.

John Maynard Keynes

All truths are easy to understand once they are discovered; the point is to discover them.

Galileo Galilei

# Índice

---

<i>Introducción</i> .....	- 1 -
<i>Justificación</i> .....	- 5 -
<i>Objetivo general</i> .....	- 5 -
<i>Objetivos particulares</i> .....	- 5 -
<i>Hipótesis:</i> .....	- 6 -
I. <i>El PIB potencial</i> .....	- 8 -
II. <i>Filtros de Kalman y Hodrick-Prescott:</i> .....	- 17 -
<i>Hodrick-Prescott</i> .....	- 18 -
<i>El filtro HP multivariado</i> .....	- 23 -
<i>El filtro de Kalman</i> .....	- 25 -
III. <i>El caso de México</i> .....	- 30 -
IV. <i>Conclusiones:</i> .....	- 40 -
V. <i>Referencias</i> .....	- 45 -
VI. <i>Anexos</i> .....	- 51 -



---

# Introducción

---

¿Qué tanto puede producir una economía en condiciones de pleno empleo? El concepto de la medición del producto potencial se dirige a responder esta pregunta. Es una cuestión con significado político obvio ya que la búsqueda del pleno empleo es una meta de política. Es evidente que un objetivo de pleno empleo está ligado a la producción máxima al utilizar la capacidad instalada. La cuantificación del producto potencial ofrece una guía de política de estabilización y un indicador de su éxito (Okun, 1962).

La construcción de predicciones económicas y de conductas de política monetaria es complicada. El hecho de que el producto potencial no es observable y entonces debe ser estimado dificulta el proceso de construcción. Existen diversas metodologías para estimar la brecha del producto y también una falta de consenso sobre cuál es la mejor (Rennison, 2003).

De acuerdo con la teoría neoclásica, el planteamiento del desempleo como un fenómeno voluntario, implica que mientras el nivel de desocupación se encuentre por debajo de su tasa natural, las presiones inflacionarias podrán contenerse. Sin embargo, esto no significa que el objetivo de la política económica se concentre en mantener el desempleo por debajo de este nivel sólo con la finalidad expresa de contener la inflación. Okun (Op. Cit., 1962) describe cómo el problema de la desocupación se refleja en costos sociales y económicos intertemporales elevados, al derivar en efectos depresivos que se reproducen y forman un círculo vicioso dinámico.

En otras palabras, cuando el nivel de ocupación se ubica por debajo de la tasa natural de desempleo, el producto se encuentra por debajo de su nivel potencial. El costo de no ubicarse en este nivel, señala Okun, puede influir en el producto potencial futuro. En la medida que las tasas de utilización se mantengan bajas; y por ende existan bajos beneficios, se producirá una baja en la inversión en instalaciones, equipo, investigación, vivienda y educación. El crecimiento del producto potencial reflejará un retraso. Y dado que el nivel de producción actual influye la capacidad de producción futura, el éxito en alcanzar el nivel de producto potencial, como objetivo de estabilización, promueve un mayor crecimiento (Okun, 1962).

La aceptación de la existencia de la NAIRU<sup>1</sup> implica que la tasa de inflación está explicada por la dinámica de la población económicamente activa en relación con el empleo, que se manifiesta como un fenómeno del mercado de trabajo cuya magnitud es calculada por el grado que alcanza la variable laboral desempleo (Rodríguez, Ludlow, & Peredo, 2004).

Las consecuencias teóricas y empíricas de la existencia del concepto de la NAIRU, analizadas por Ball y Mankiw (Ball & Mankiw, 2002), consideran a la misma, como el sinónimo de la tasa natural de desempleo. Rodríguez et. al. (Rodríguez, Ludlow, & Peredo, 2004), precisan que la NAIRU es un pilar de la teoría de los negocios, dado que los cambios en la demanda agregada se ven reflejados en la relación inversa entre inflación y desempleo.

“La NAIRU es la noción de un nivel de empleo que no acelera la inflación. El concepto de la NAIRU es fundamental en la teoría económica, ya que acepta la idea de la existencia de un nivel de desempleo involuntario que puede prevalecer en la economía, sin que exista cambio en la inflación. Por lo tanto, esta tasa es considerada útil en el corto plazo y ha servido para fundamentar políticas monetarias o fiscales que sustentan la estabilidad de precios” (Rodríguez, Ludlow, & Peredo, 2004).

De manera general, un descenso en la tasa de crecimiento coincide con un desempleo creciente. Esta correlación negativa fue planteada por Arthur Okun, que documentó esta relación empírica a principios de los 60's, y es por eso que se le conoce como Ley de Okun. En realidad, la Ley de Okun es una relación estadística más que una característica estructural de la economía, y como tal, debe ser sujeta a una revisión bajo condiciones macroeconómicas distintas.

En el análisis de Okun, se observa que para incrementar el nivel de producto es necesario aumentar la utilización de trabajo, por ejemplo, mediante una reducción en el desempleo. De esta manera, de acuerdo con lo observado por Okun para la economía Estadounidense, una tasa de crecimiento real de 4% estaba asociada con una caída en el desempleo de .07% (Knotek, 2007).

---

<sup>1</sup> NAIRU: *Non-Accelerating Inflation Rate of Unemployment* (Tasa de desempleo no aceleradora de la inflación)

En el caso de México, las últimas tres décadas se han caracterizado por un escaso crecimiento. México no ha podido recuperar las altas tasas de crecimiento previas a los 80's. Esta problemática se debe a un sinnúmero de factores de diversa índole.

El desenvolvimiento del PIB mexicano durante las últimas tres décadas coincide con los resultados de Okun pues, en ese período, el país atestiguó un escaso crecimiento, que coincidió con el incremento de sus niveles de desempleo. En efecto, el crecimiento promedio del PIB de 3.75% logrado entre 1990 y 1994 cayó 6.5 puntos porcentuales en 1995 a raíz la crisis financiera de ese año, remontando nuevamente a un promedio de 3.5% en el periodo 1996-2003; no obstante, esa tasa no pudo sostenerse, pues entre 2000 y 2012 bajó a apenas 2%” (Alcalá, 2012).

Por ejemplo, la TCCO<sup>2</sup>, muestra que a raíz de la crisis financiera de 1995 la tasa incrementó de 13.5% en 1994, hasta un máximo de 16.9% en 1996, disminuyendo progresivamente conforme la economía recupera su modesto ritmo de crecimiento. Posteriormente, de 1996 a 2007 antes de la crisis mundial, la TCCO promedia un 12% para incrementar nuevamente hasta 14% a mediados de 2009 y lograr una recuperación escueta de apenas 11.7% para el periodo de 2010 a 2012.<sup>3</sup>

---

<sup>2</sup> La TCCO (Tasa de condiciones críticas de ocupación) es un indicador del INEGI construido con base en el ingreso y en la jornada laboral. Su construcción se centra en la población ocupada (la que labora al menos una hora a la semana). Este indicador resulta particularmente sensible en contextos donde el rezago social y el atraso son evidentes. Para mayor información vea (Negrete Prieto, 2001)

<sup>3</sup> Fuente: Estimación propia con base en datos de INEGI. Encuesta Nacional de Empleo Urbano.

## **Justificación**

El cálculo del producto potencial permite a los hacedores de política económica contar con una herramienta más para lograr ubicarse en el nivel de producción máximo teórico que considera el nivel objetivo de precios, tal como señala (Razzak, 1997):

“Un hacedor de política monetaria cuyo objetivo sea controlar la inflación puede usar un estimado de la brecha del producto para inferir presiones por exceso de demanda, predecir la inflación y consecuentemente, fijar los instrumentos de política monetaria.”

Existen varias técnicas para extraer los componentes cíclicos y de tendencia de una serie de tiempo. Este documento se enfoca en las técnicas diseñadas por Robert Hodrick y Edward Prescott (Hodrick & Prescott, 1997) y por Rudolf Kalman (Kalman, 1960).

## **Objetivo general**

El propósito del presente documento, es la estimación del producto potencial de México correspondiente al periodo 1993-2012, por medio de los filtros de Hodrick-Prescott y de Kalman.

## **Objetivos particulares**

Con la finalidad de cumplir el objetivo general, esta tesis contiene tres capítulos que responden a los objetivos particulares:

En el primer capítulo, a forma de introducción, se discute el tema del producto potencial, su utilización, sus formas de calcularlo y se plantea la discusión actual respecto al tema

En el segundo, se describen los métodos utilizados para realizar el cálculo de ambos filtros a manera general y en lo particular para el caso de México. En esta sección se discuten las ventajas y desventajas de los mismos, así como una crítica de los métodos alternativos de cálculo del producto potencial.

En el tercer capítulo se revisa la estimación del producto potencial para el caso de México, con base en la metodología presentada en el capítulo anterior, realizando posteriormente la interpretación de los resultados y la comparación de los mismos con otros estimados.

En seguida, se presentan las conclusiones de la investigación, las posibles líneas de investigación futura, así como las recomendaciones pertinentes basadas en los resultados para México.

### **Hipótesis:**

Es posible obtener una estimación adecuada del producto potencial, y por ende de la brecha del producto, mediante los filtros univariados de Hodrick-Prescott y Kalman.

All truths are easy to understand once they are discovered; the point is to discover them.

Galileo Galilei

---

# I. El PIB potencial

---



Si bien el Producto Interno Bruto (PIB) es el indicador económico más conocido, al menos por la mayoría de la población, y representa la medida más general del comportamiento y del tamaño de la economía en un periodo determinado; vale la pena ahondar un poco más en la información que encierra este indicador, el cual, de acuerdo con Heath se considera el “rey de los indicadores” (Heath, 2012).

Para el cálculo del PIB, se realizan encuestas y registros administrativos que se usan para inferir, mediante la aplicación de técnicas contables, el valor de la producción.

Específicamente, la medición de la producción del país se realiza usando la metodología de contabilidad nacional, cuya aplicación resulta en lo que formalmente se conoce como Sistema de Cuentas Nacionales. Los datos a utilizar en el presente trabajo tienen aquí su fuente y se obtuvieron del Banco de Información del INEGI.

En la mayoría de los países, el PIB presenta una tendencia de crecimiento estable positiva, así como una variación alrededor de dicha tendencia. En el caso de México, se puede observar este fenómeno, aunque las fluctuaciones alrededor de la tendencia en algunos periodos han sido demasiado pronunciadas, evidenciando la fragilidad del crecimiento económico. La oportuna identificación de las distorsiones que generan tal volatilidad es central en el diseño de un marco de políticas macroeconómicas apropiadas.

Es por ello que la mayoría de los modelos macroeconómicos actuales, utilizados para el análisis de la política económica, consideran al grado de utilización de la capacidad instalada. De hecho, la medición de la brecha del producto; es decir, la diferencia entre el producto observado y el producto potencial, juega entonces un rol fundamental en la determinación de la inflación (Ehrman & Smets, 2001).

Una forma de cuantificar la producción potencial, consiste en analizar los movimientos cíclicos del producto observado, que muestran cimas y valles a través del tiempo, los cuales suponen mayor o menor uso de los recursos productivos; por tanto, estudiar la tendencia y los ciclos del producto, abre la posibilidad de proponer una serie de cifras de la producción potencial.

El producto potencial es la cantidad de producto que se obtiene cuando la economía no se encuentra ni en una recesión ni en una expansión, con los acervos de capital y fuerza de trabajo existentes. En otras palabras, es el nivel óptimo de producción en el cual no existen presiones inflacionarias.

En su nivel más abstracto, el producto potencial, representa el nivel de producto de estado estable asociado con la curva de oferta agregada de largo plazo – el nivel al cual el producto vuelve, cuando los efectos transitorios de las perturbaciones macroeconómicas se disipan –.

Además de capturar la tendencia subyacente del producto real, el producto potencial es también un componente importante de los modelos de determinación de precios, construido con base en la curva de Phillips. De acuerdo con esta perspectiva, cuando el producto se sitúa por arriba del potencial conlleva a un incremento en la inflación; análogamente, la deflación requiere que el producto caiga por debajo de su nivel potencial. En Kuttner (1994), se hace la reflexión de que a pesar de que los mecanismos microeconómicos permanecen inciertos, la relación sistemática entre la tasa de cambio de precios y el nivel de producto real es una característica central del ciclo moderno de negocios.

El producto potencial representa el nivel máximo de producción sin presiones inflacionarias, o más precisamente, el punto de balance entre mayor producto y mayor estabilidad. En consecuencia, el producto potencial es un blanco natural de la política macroeconómica. Empero, el principal obstáculo para su utilización en la política, como lo señalan innumerables autores, es la incapacidad de observarlo directamente, forzando a los hacedores de política a actuar con base en estimados imperfectos. La reducción de la incertidumbre en el cálculo de la brecha del producto reduce el peso que los hacedores de política monetaria ponen en la estimación de la inflación esperada (Gosselin & Lalonde, 2006).

Existen diversas maneras de estimar el producto potencial, y asimismo, podemos encontrar un sinnúmero de artículos relacionados a su estimación mediante diversas técnicas. La exposición de las mismas va más allá del objetivo del presente documento. Sin embargo, se mencionan algunas de ellas señalando sus puntos más importantes.

La clasificación más general distingue entre los modelos univariados y multivariados. Como su nombre lo sugiere, los primeros modelos realizan el cálculo de una aproximación del producto potencial con base en una sola variable. Como ejemplo de estos métodos están el filtro de Hodrick-Prescott y el modelo de Watson.<sup>4</sup> No obstante, como señala Kuttner (1994), el principal problema de estos métodos, es que carecen de contenido económico substantivo – al ser univariados –.

El primer paso en el análisis del producto potencial es determinar una estructura apropiada para el componente subyacente<sup>5</sup> de la tendencia del producto real. Stock y Watson (1988) descomponen la serie estacionaria en diferencias<sup>6</sup>, en una serie con una tendencia integrada y un componente cíclico. Esta es una opción natural para la representación univariable del producto real.

El modelo de Stock y Watson, define al producto observado, como la suma de la tendencia y del componente cíclico antes citados, a los que adicionan un componente de ruido<sup>7</sup>. La tendencia sigue una caminata aleatoria con deriva; donde la deriva,  $\mu$ , captura la tasa de crecimiento

---

<sup>4</sup> El modelo de (Watson, 1986), es un modelo univariado de componentes no observados.

<sup>5</sup> El componente subyacente representa la tendencia general de la serie observada. Es decir, no absorbe los elementos que presentan estacionalidad o volatilidad.

<sup>6</sup> Una serie estacionaria en diferencias, es aquella que necesita ser diferenciada n número de veces para que se vuelva estacionaria. Puede expresarse de la siguiente manera:

$$\Delta^D y_t = \mu + \Psi(L)\varepsilon_t$$

$\Delta^D = (1 - L)^D$  es un operador en diferencias de orden D

$\Psi(L) = (1 + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \dots)$  es un operador polinomial de retraso

$\varepsilon_t$  es un proceso no correlacionado con media cero

Las series de tiempo que pueden convertirse en series de tiempo estacionarias al diferenciarlas se conocen como series integradas. Específicamente, cuando D diferencias son necesarias para convertir la serie en estacionaria, se dice que es una serie integrada de orden D; y se denota: I(D).

<sup>7</sup> El componente de ruido adicionado,  $\varepsilon_t \sim$  i.i.d.  $(0, \sigma^2)$  modela los choques permanentes y transitorios que ocurren en el tiempo.

promedio sobre la muestra, el ciclo se asume un proceso estacionario autoregresivo<sup>8</sup> de primer o segundo orden y el ruido representa los choques permanentes y transitorios al producto real.

Una característica atractiva de la especificación de la tendencia estocástica es su adaptabilidad a los métodos estadísticos lineales, al contrario del modelo no lineal de Hamilton (Hamilton, 1989). En cualquier caso, dado que el modelo de Hamilton de dos estados captura empíricamente la diferencia entre tasas de crecimiento de recesión y no recesión, resulta inapropiada para modelar fluctuaciones de baja frecuencia<sup>9</sup> en el producto potencial.

Por otra parte, la utilización de modelos multivariados enriquece el análisis al incorporar la teoría económica en la estimación del producto. Kuttner (1994) estima el producto potencial utilizando la inflación y el producto real. Kuttner modela el producto real como una tendencia estocástica retrasada, ligando las desviaciones de la tendencia y la inflación a través de una ecuación reducida de la curva de Phillips. La ventaja principal de esta estimación bivariada, es que le brinda un mayor contenido económico respecto a los métodos que utilizan una sola variable, debido a la explícita dependencia de la inflación. La tendencia estadística permite un ajuste suavizador continuo del producto estimado en tiempo real cuando nueva información está disponible, de ahí su habilidad para estimar la incertidumbre asociada con las series de producto potencial.

El problema con el producto potencial y con el pleno empleo, es que ninguno es una estadística macroeconómica observable directamente por lo que el investigador tiene un margen de interpretación de la información considerable. Para que un estimado de la brecha del producto sea útil para los hacedores de política, Van Norden argumenta que hay dos factores críticos. Primero, deben de ser capaces de producir un estimado de la brecha actual basándose en información pasada. En otras palabras, debemos enfocarnos más en sus propiedades como filtros que como estimadores. Segundo, la descomposición del producto actual en el potencial y la

---

<sup>8</sup> AR en adelante

<sup>9</sup> Las fluctuaciones representan las variaciones en la tendencia de la serie, en este caso el PIB potencial, que conducen a la economía a desviarse de su tendencia de crecimiento. Las fluctuaciones de alta frecuencia son capturadas en el componente cíclico, mientras que las de baja frecuencia representan justamente la tendencia de crecimiento.

brecha, para el caso multivariado, no debe de estar basada en supuestos arbitrarios del comportamiento de las variables en las series de tiempo (Van Norden, 1995).

Bajo ciertas condiciones, el uso de información histórica y contemporánea será de nula utilidad para estimar la brecha del producto. Esto limita la utilidad de los métodos de series de tiempo especialmente, su capacidad para mejorar la predicción de la brecha del producto basados en estimados estructurales (Van Norden, 1995).

Kuttner (1994) propone un método para estimar el producto potencial en el cual el producto real es modelado como una tendencia estocástica no observable, y las desviaciones del producto de su potencial afectan la inflación a través de una relación de oferta agregada. Las ecuaciones del producto y de la inflación juntas forman un modelo bivariado de componentes no observados que se estiman mediante el uso del algoritmo del filtro de Kalman. Este procedimiento produce una medida del producto potencial y de su error estándar así como un estimado de la respuesta cuantitativa de la inflación al crecimiento real y a la brecha del producto. Al incluir la estimación de la tasa de inflación con la del producto real, el modelo de producto potencial bivariado añade un componente económico ausente en los modelos univariados.

Los resultados muestran descubrimientos adicionales de interés económico. El proceso de estimación produce una medida relativamente precisa de la velocidad de respuesta de ajuste de las desviaciones de la inflación del potencial. Esencialmente, una versión dinámica de la llamada “razón de sacrificio”.<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup> La razón de sacrificio es la razón entre crecimiento económico e inflación. Se define como la cantidad de producto, en puntos porcentuales, que debe ser sacrificado para reducir la inflación en un punto porcentual.

We are what we repeatedly do. Excellence, then, is not an act, but a habit.

Aristóteles

---

## II. Filtros de Kalman y Hodrick-Prescott

---

Con base en la definición anterior, un filtro será aquel instrumento que nos permita discriminar la información deseada de un conjunto de datos.

Esta sección bosqueja la utilización de los filtros de Hodrick-Prescott y Kalman. Describe la forma en la que se aplican los filtros y cómo es que se obtienen los resultados de los análisis al utilizar los enfoques univariado y multivariado. Lo anterior, para aclarar el funcionamiento general de los filtros, así como su aplicación al cálculo de la brecha del producto.

## Hodrick-Prescott

El filtro de Hodrick-Prescott tiene dos justificaciones, una intuitiva y otra estadística. Canova, (1994) describe al filtro para el primer caso, como una herramienta flexible que puede ser de utilidad para los investigadores aplicados; mientras que, en el segundo, afirma que funciona como un extractor óptimo de la tendencia – la cual es estocástica – que se mueve suavemente en el tiempo y no está correlacionada con el componente cíclico.

El filtro HP descompone una serie de tiempo  $y_t$  en un componente aditivo cíclico  $c_t$  – la brecha del producto – y un componente de crecimiento  $\tau_t$  – el producto potencial –.

$$y_t = \tau_t + c_t$$

Y luego minimiza la varianza del componente cíclico  $c_t$  mediante una penalidad por la variación en la segunda diferencia del componente de crecimiento  $\tau_t$ .

$$\min_{\{\tau_t\}} \sum_{t=1}^T (\tau_t - c_t)^2 + \lambda * \sum_{t=2}^{T-1} (\Delta\tau_t - \Delta\tau_{t-1})^2$$

donde  $\lambda$  es el parámetro de suavizado, que penaliza la variabilidad del componente de crecimiento. Entre mayor es  $\lambda$ , mayor es el componente de suavizado. Cuando  $\lambda$  tiende a infinito, el crecimiento corresponde a una tendencia lineal. Para información trimestral (Prescott & Hodrick, 1997) proponen  $\lambda$  igual a 1,600.<sup>11</sup>

---

<sup>11</sup> Los valores de lambda sugeridos para datos mensuales y anuales son los siguientes:  $\lambda_m = 14,400$  &  $\lambda_y = 100$



Para comprender cómo definieron el valor de  $\lambda$ , hay que considerar que la propuesta desarrollada por James Hodrick & Edward Prescott parte de la idea de que el componente permanente del logaritmo natural de las series debe variar suavemente, de manera que la tasa de crecimiento cambie poco y además que la componente cíclica sea una desviación en torno a la componente permanente. Cuando el parámetro de “suavizado” crece (indefinidamente), el componente permanente se aproxima a una serie de la forma  $\tau_t = \tau_0 + a_t$  y cuando  $\lambda$  tiende a infinito, la tendencia crece a una tasa constante.

Cuando  $\lambda$  es cero, el componente permanente es la misma serie. Para resolver  $\lambda$ , Hodrick y Prescott partieron de que el componente cíclico ( $c_t$ ) y las segundas diferencias del componente permanente ( $\tau_t$ ) son dos procesos estocásticos de ruido blanco con varianzas  $\sigma_c^2$  y  $\sigma_\tau^2$  respectivamente, obteniendo que se minimiza el error cuadrático medio cuando el parámetro de suavizado  $\lambda$  es  $(\sigma_c^2 / \sigma_\tau^2)$ .

Cuando es aplicado a series de tiempo estacionarias, el filtro HP obtiene una aproximación adecuada de las frecuencias del ciclo de dichas series, porque se comporta como un filtro pasa-altas, caracterizado por remover los componentes de baja frecuencia o ciclo largo y permitir el paso a los de alta frecuencia o ciclo corto, lo que implica que recoge las frecuencias relevantes para las series estacionarias, que son, precisamente, las del ciclo corto.

Por ello es que resulta posible afirmar que el filtro de HP obtiene las frecuencias relevantes del ciclo de negocios<sup>12</sup>, a pesar de que no tiene condiciones espectrales suficientemente buenas para aislar correctamente los componentes de una serie cuyas fluctuaciones son como las del ciclo de negocios. Claro que el hecho de que el filtro HP no sea óptimo no quiere decir que no sea una buena aproximación del filtro óptimo<sup>13</sup>, por lo que puede confiablemente aislar el componente cíclico de una variedad de series de tiempo (Van Norden & St-Amand, 1997).

---

<sup>12</sup> La duración del ciclo de negocios de acuerdo con Burns y Mitchell del NBER es de no menos de 6 y no más de 32 trimestres.

<sup>13</sup> Es pertinente la aclaración de que en la realidad no existen los filtros óptimos. Un filtro óptimo es aquel que discrimina a la perfección los elementos no deseados. Así que la existencia del filtro óptimo es solamente un modelo más.

De hecho, el filtro HP, de acuerdo con Ozbek & Ozlale (2005), hace un buen trabajo en medir el producto potencial para economías industrializadas, donde un ciclo expansivo, con excesiva volatilidad en el producto, es raramente observado. Sin embargo, usualmente no puede capturar la alta volatilidad de las variables macroeconómicas en economías de mercado emergentes.

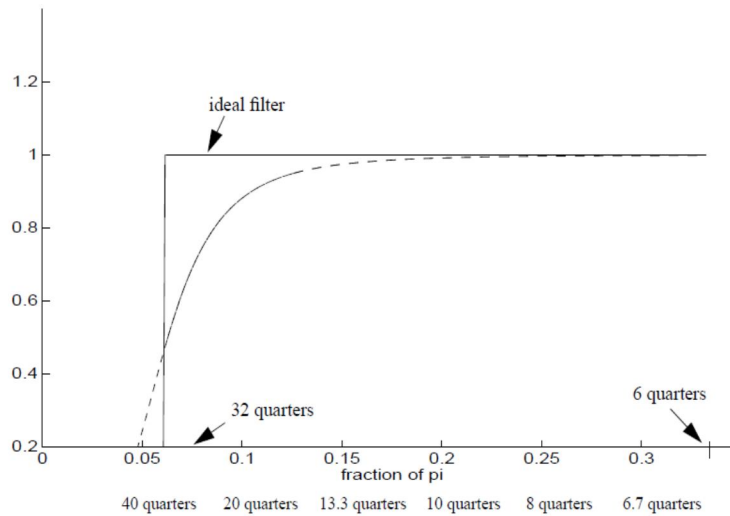


Figura 2.1 Filtro ideal, tomado de (Van Norden & St-Amand, 1997)

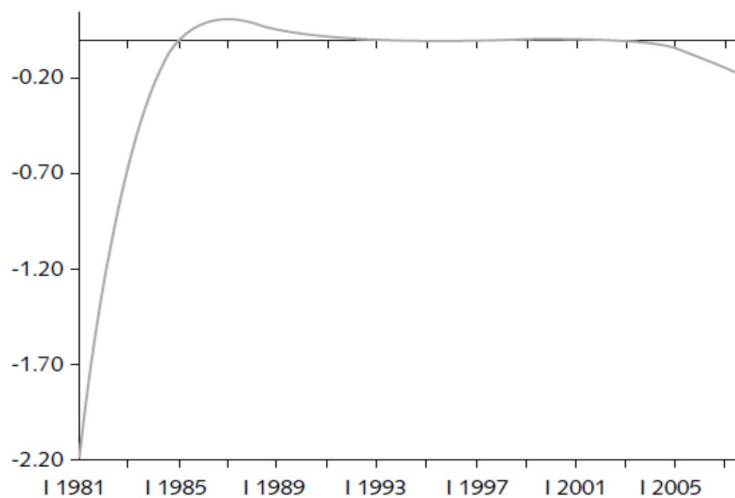


Figura 2.2 Filtro de HP sesgado al principio y al final de la muestra, tomado de (Acevedo, 2009)

Otro problema del filtro HP se nota al examinar su desempeño, pues se vuelve claro entonces el problema de sesgo de estimación que presenta al final de la muestra, el cual tiene la consecuencia de dificultar la predicción del comportamiento del producto. Sin embargo, es útil recordar que el objetivo principal para la conducción de política monetaria es estimar la brecha actual y no la futura, por lo que una forma de solucionar este problema, es mediante la incorporación de *backcastings* y *forecastings*<sup>14</sup> a la serie de tiempo, al principio y al final de la muestra respectivamente.<sup>15</sup>

El filtro HP univariado es un estimador simple. Su empleo se ha extendido a pesar de que sus detractores señalan el hecho de su pobre funcionamiento al final de la muestra, que es justamente donde la precisión importa más, dada su aplicación a la predicción.

El filtro puede ser óptimo a mitad de la muestra, sin embargo, al final de las series de tiempo es sub-óptimo. Esta carencia se atribuye al hecho de que no existe suficiente información al final de la muestra para poder realizar la estimación. Cosa que evidentemente no puede ocurrir a la mitad. Por lo tanto, el peso del filtro en las observaciones contemporáneas incrementa, conforme se aproxima al final de la muestra.

De acuerdo con (Razzak, 1997), el filtro HP se comporta como un filtro al final de la muestra y como un suavizador en el resto. El filtro HP es un filtro de dos lados que es simétrico a la mitad de la muestra. Por esta razón, el filtro es un suavizador en toda la muestra, excepto en los extremos, donde se comporta como un verdadero filtro, dado que no contamos con más información. Al final de la muestra el filtro HP está truncado, por tanto, se convierte en asimétrico, donde un mayor peso es dado a las observaciones recientes.

Usando los conceptos de suavizador sobre la muestra y filtro verdadero al final, la brecha del producto resultante del filtro verdadero es consistente con la interpretación del componente cíclico del producto real y provee mejores predicciones de la inflación (Razzak, 1997).

---

<sup>14</sup> Los *backcastings* y *forecasting* son mediciones que se obtienen al predecir el pasado y el futuro, respectivamente, en un análisis de tendencia.

<sup>15</sup> (Acevedo, 2009) recomienda que la muestra se extienda en al menos doce trimestres.

Para entender el comportamiento del filtro al final de la muestra, hay que recordar que el problema de optimización resuelve el intercambio en el tamaño de las desviaciones de la tendencia y de la suavidad de la misma. Frente a un choque transitorio el filtro es entonces renuente a cambiar la tendencia, dado que esto implica incrementar la tendencia antes del choque y disminuirla después. Al final de la muestra, sin embargo, la penalidad anterior está ausente, por lo que la tendencia óptima responderá más a los choques transitorios al final de la muestra (Van Norden & St-Amand, 1997).

Rennison (2003) menciona que a pesar de que el filtro HP es generalmente visto como un método no propiamente teórico para desestacionalizar la información, su calibración puede proporcionar una interpretación económica. Específicamente, el ajuste de  $\lambda$ , que controla la suavidad del estimado de la salida del producto, puede ser interpretado a priori como un estimador de la varianza relativa de los choques de demanda y oferta.

En resumen, el filtro de Hodrick-Prescott considera cada serie de tiempo como la suma de un componente de variación lenta y un componente de variación rápida. Con este método sólo las fluctuaciones rápidas o de alta frecuencia están incluidas en el componente cíclico (Schwartz & Pérez, 2000).

## El filtro HP multivariado

Los filtros muti-variados, tienen como ventaja principal la incorporación de elementos teóricos al análisis estadístico. De esta manera, se puede lograr una estimación que involucre las relaciones entre las variables descritas por la teoría económica. No obstante, cabe enfatizar que la descomposición del producto, en el potencial y la brecha, para el caso multivariado, no debe de estar basada en supuestos arbitrarios del comportamiento de las variables en las series de tiempo.

La clave para implementar un filtro HP multivariado para estimar el PIB potencial es capturar la relación estructural que depende de la brecha o del producto potencial. Por ejemplo, se puede especificar una curva de Phillips que relacione la inflación observada con una medida de la expectativa de inflación, la brecha del producto y tal vez variables adicionales con gran incidencia en el producto, como por ejemplo el precio del petróleo. De esta manera, los residuos de la curva de Phillips podrían utilizarse en parte para proveer poder explicatorio a la brecha del producto. Otro ejemplo, es la relación de la Ley de Okun con el desempleo, con la brecha del producto y otras variables estructurales determinando la NAIRU. La tendencia del producto podría entonces estar influenciada por la evolución de la tasa de desempleo y de sus determinantes estructurales.

El filtro Hodrick-Prescott (HP) multivariado estima una la tendencia como la solución de:

$$\{\tau_t\}_{t=0}^{T+1} = \underset{argmin}{\sum_{t=1}^T} (\tau_t - c_t)^2 + \lambda_\tau * (\Delta^2 \tau_{t+1})^2 + \lambda_\varepsilon * \varepsilon_t^2$$
$$\varepsilon_t = z_t - f(\tau_t, x_t)$$

El caso de esta tesis el interés se concentra en  $z_t$  y en  $f(*)$  como función de las variables explicatorias  $\tau_t$  y  $x_t$ . La clave para estimar el filtro multivariado es especificar  $z_t$  tal que capture alguna relación estructural que dependa de la brecha del producto o del producto potencial. Alternativamente se puede utilizar la Ley de Okun para ligar la tasa de desocupación con la brecha del producto y con variables estructurales al determinar la NAIRU. De esta manera, la tendencia del producto estaría influenciada por la evolución de la tasa de desempleo y sus determinantes estructurales (Van Norden & St-Amand, 1997).

Gosselin y Lalonde (2006) presentan un análisis multivariado del filtro de HP y exponen la instrumentación del mismo. Siguiendo la misma línea de investigación, exponen lo que ellos llaman el enfoque ecléctico en el cual combinan las ventajas de la utilización de un filtro y de los SVARS<sup>16</sup>. Este enfoque permite al filtro enriquecerse con información de naturaleza estructural. Y, conjuntamente extraer la información de las variables cuya tendencia de largo plazo está potencialmente ligada a la de la variable de interés.

Los SVARS generan una salida de producto potencial consistente con el comportamiento de las variables macroeconómicas incluidas en el modelo. Por tanto, pueden ayudar a entender las fuentes de fluctuaciones en la tendencia estimada. Empero, los SVARS no están bien diseñados para capturar los cambios estructurales y generan un camino volátil para el potencial, lo cual los hace difícil de reconciliar con los supuestos económicos.

El uso de filtros multivariados y vectores estructurales autoregresivos posee una estructura teórica apropiada y proporciona estimados relativamente confiables del producto. Sin embargo, se ha mostrado que los filtros tienden a generar estimaciones sesgadas al final de la muestra y las estimaciones de los VARS describen volatilidad indebida (Gosselin & Lalonde, 2006).

El filtro HP multivariado combina el filtro HP con al menos una fuente adicional de información, por ejemplo, en Rennison (2003) se ejemplifica el uso del HP con una ecuación de la curva de Phillips y con un modelo que endurece la tendencia al final de la muestra.

El enfoque de HP combinado con la metodología de SVAR's provee, de acuerdo con Rennison (2003)<sup>17</sup>, el estimado más útil de la brecha en el sentido los residuos de mínimos cuadrados y en términos de correlación entre la brecha actual y la estimada.

---

<sup>16</sup> SVAR: *Structural Vector Auto-regression*; Vectores estructurales auto-regresivos. El análisis de vectores estructurales autoregresivos SVARS se basa en la descomposición de Blanchard and Quah (1989). Para un análisis más detallado consulte el apéndice de SVARS en (Gosselin & Lalonde, 2006).

<sup>17</sup> (Rennison, 2003) presenta evidencia, para la economía canadiense, que muestra que el uso conjunto de filtros multivariados y vectores autoregresivos es óptimo para estimar el producto potencial.

## El filtro de Kalman

Esta herramienta para el análisis de señales introducida por Rudolf Kalman (Kalman, 1960), se convirtió rápidamente en un componente integral en los sistemas de navegación civiles y militares. Se trata de un sencillo algoritmo que provee estimados de estados actuales de la información de las variables de un sistema. El filtro utiliza modelos estadísticos para ponderar apropiadamente cada nueva información obtenida del estado anterior.

Cuando Rudolf Kalman introdujo su algoritmo para el filtro de Kalman, el procesamiento digital de información estaba listo para poderse implementar en diversos campos de aplicación especialmente por la simplicidad del mismo. El filtro de Kalman es un filtro digital de múltiple-entrada, múltiple-salida, que en tiempo real estima los estados de un sistema basado en sus salidas ante la presencia de ruido. Estas salidas se pueden modelar como una señal multi-dimensional mezclada con ruido, donde la señal multi-dimensional contiene los estados deseados del sistema.

El filtro de Kalman se difundió rápidamente en diversas áreas de conocimiento, especialmente tecnológicas. Entre ellas se encuentran los sistemas de navegación GPS<sup>18</sup>, control de vehículos tales como aeronaves e incluso sistemas de navegación para misiles, control de altitud, estimación de estado de carga de una batería, posicionamiento dinámico, rastreo por radar, sistemas de navegación satelital, sismología, oceanografía, dinámica de fluidos, estimación demográfica, modelado 3-D, etc. Sin embargo, el filtro de Kalman se ha convertido en una herramienta estadística ampliamente usada en el análisis de series de tiempo en econometría.<sup>19</sup>

El filtro de Kalman utiliza una serie conocida  $y_t$  para determinar una serie no observada  $X_t$  por un procedimiento que opera por medio de predicción y corrección, en esencia este algoritmo pronostica el nuevo estado a partir de su estimación previa, añadiendo una corrección proporcional al error de predicción, de tal forma que éste es minimizado estadísticamente (Rodríguez & Peredo, 2007).

---

<sup>18</sup> GPS *Global Positioning System* (Sistema de posicionamiento global)

<sup>19</sup> Para una sencilla referencia sobre el funcionamiento del filtro de Kalman consulte: (Levy, 2002)

Las ecuaciones que componen el filtro de Kalman son dos grupos, uno que utiliza el tiempo (llamadas ecuaciones de predicción) y el grupo de ecuaciones que actualiza los datos observados (ecuaciones de actualización). Es decir, ecuaciones de pronóstico del estado y de matriz de dispersión del error de pronóstico.

Especificación de espacio estado:

$$\bar{x}_t = A\bar{x}_{t-1} + w_t \text{ donde } w_t \sim N(0, Q) \dots [1]$$

$\bar{x}_t$ : Variable aleatoria observada

$$\bar{z}_t = H\bar{x}_t + v_t \text{ donde } v_t \sim N(0, R)^{20} \dots [2]$$

$\bar{z}_t$ : Variable aleatoria no observada

$w_t$  y  $v_t$  modelan procesos de ruido blanco

Ecuaciones de predicción:

$$\tilde{x}_{\bar{t}} = A\tilde{x}_{\bar{t}-1} \dots [3]$$

A: Modela la transición del estado en el tiempo:  $x_{t-1}$

$$P_{\bar{t}} = AP_{\bar{t}-1}A' + Q \dots [4]$$

H: Modela la relación entre el estado y las mediciones

$$K = P_{\bar{t}}H'(HP_{\bar{t}}H' + R)^{-1} \dots [5]$$

$\tilde{x}_{\bar{t}}$ : Estado a priori de  $\bar{x}_t$

Ecuaciones de actualización:

$P_{\bar{t}}$  es la covarianza del error

$$\hat{x}_t = \tilde{x}_{\bar{t}} + K(\bar{z}_t - H\tilde{x}_{\bar{t}}) \dots [6]$$

Q es la covarianza esperada de  $\bar{w}_t$

$$P_t = (I - KH)P_{\bar{t}} \dots [7]$$

K es la matriz de ganancia  $\in R^{n \times m}$

Estos estados, son todas las variables necesarias para describir completamente el comportamiento del sistema como función del tiempo. El filtro de Kalman utiliza estas ecuaciones para estimar de manera recursiva el estado y el error de la covarianza de un proceso, en una forma que minimice la media del error cuadrado de la covarianza. Como señala Welch (2009), específicamente el filtro de Kalman resuelve el problema de generar una estimación del estado  $\bar{x}_t \in R^n$  y de la covarianza del error  $P \in R^{n \times n}$  de un proceso temporal discreto gobernado

---

<sup>20</sup>  $w_t$  y  $v_t$  son independientes.



por una ecuación lineal en diferencias [1] y observada a través de mediciones de  $\bar{x}_t \in R^n$  modelada por [2].

La operación recursiva del filtro involucra el uso de un ciclo iterativo de predicción y corrección utilizando las ecuaciones [1] y [2]. De manera específica, cuando una medición  $\bar{z}_t$  está disponible en el tiempo  $t$ , predecimos el estado a priori  $\tilde{x}_t$  y la covarianza del error  $P_t$  utilizando las ecuaciones [3] y [4] y posteriormente calculamos la ganancia del filtro con la ecuación [5] y corregimos la covarianza del estado y del error para obtener las estimaciones a posteriori utilizando [6] y [7].

Welch (2009) puntualiza el poder de análisis del filtro al soportar la estimación de estados presentes, pasados y futuros de  $\bar{x}$  haciéndolo inclusive cuando los elementos de dicho estado se encuentran ocultos – no observables directamente – en  $\bar{z}$ . En la Figura 3.1 podemos visualizar el ciclo explicado anteriormente.

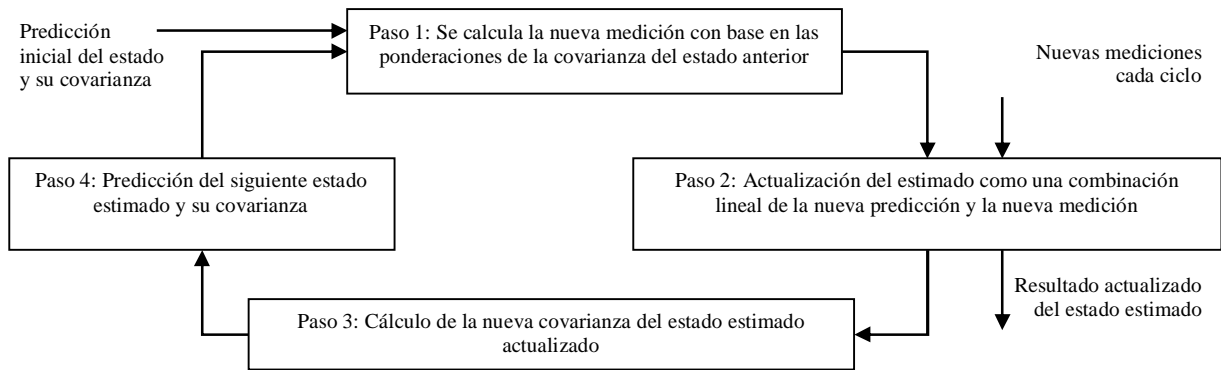


Figura 3.1: El algoritmo recursivo de Kalman. En cada ciclo, el estado estimado es actualizado al combinar nuevas mediciones con las predicciones del estado estimado de previas mediciones.<sup>21</sup>

El filtro de Kalman, resuelve el problema de estimar los estados instantáneos de un sistema dinámico lineal perturbado por un ruido blanco gaussiano, utilizando mediciones que son

<sup>21</sup> El algoritmo del filtro de Kalman involucra cuatro pasos: Computo de la ganancia, actualización del estado estimado, actualización de la covarianza y predicción.

funciones lineales del estado sistema pero corruptas por ruido blanco adicionado. Su objetivo es obtener un estimador óptimo del sistema dinámico<sup>22</sup> (Ozbek & Ozlale, 2005).

Los algoritmos en sí consisten en la aplicación de promedios móviles para suavizar la serie original. Esto significa que por diseño, el método nunca va a anticipar un punto de inflexión. Si la serie original empieza a crecer, el último dato de la serie ajustada siempre va a estar subestimado y viceversa. Por diseño, la cifra del último mes siempre va a ser la más endeble y a estar sujeta a revisión. No obstante, dado que se utiliza para analizar la coyuntura, ésta va a ser la cifra que más atención debe recibir.

Este capítulo, ha descrito algunos métodos para calcular el producto potencial, clasificándolos como: enfoques univariados (ateóricos) y estructurales o multivariados. La desventaja de los ateóricos es que solo actúan como un ejercicio estadístico y no consideran otra información como la inflación, desempleo o capacidad de utilización, mientras que por otro lado, los enfoques estructurales explotan la teoría económica para estimar el producto potencial.

Sin embargo, hay que tener presente el famoso dicho de George E. P. Box<sup>23</sup>: “Esencialmente todos los modelos son incorrectos, empero, acaso algunos son útiles.” De manera que inclusive la aproximación univariada puede resultar útil para ubicar rápidamente el nivel de producto potencial, y acaso, con base en un análisis más elaborado, precisar con mayor exactitud la estimación.

---

<sup>22</sup> El filtro de Kalman es óptimo en el sentido que minimiza la traza de la covarianza de  $P_t$ .

<sup>23</sup> “Essentially, all models are wrong, but some are useful” Box, George E. P.; Norman R. Draper (1987). *Empirical Model-Building and Response Surfaces*, p. 424, Wiley. ISBN 0471810339.

A person who never made a mistake, never tried anything new

Albert Einstein

---

## III. El caso de México

---

El producto potencial es un concepto de oferta, una medida de capacidad productiva. México podría probablemente ser más productivo en el corto plazo con presiones inflacionarias impulsando la demanda agregada. Sin embargo, el objetivo de lograr una producción máxima y empleo está restringido por el deseo social de la estabilidad de precios.

Es generalmente aceptado que la brecha del producto – la diferencia entre el producto estimado y su nivel potencial – es un indicador clave de las presiones inflacionarias, como tal, es una variable de referencia importante para la política monetaria (Rennison, 2003).

En los modelos descritos en el capítulo anterior, se asume que la relación entre la brecha del producto y la inflación es estable, lo cual es debatible para economías como la mexicana que ha experimentado agudos procesos inflacionarios.

En efecto, la inflación en México ha pasado por periodos donde se ha disparado de manera abrupta. Sin embargo, es posible apreciar en el gráfico A2, en la sección de anexos, que a partir de 2000 se ha controlado y se ha reducido.<sup>24</sup> Ello indica que para la época reciente, hay mayor probabilidad que los filtros descritos en el capítulo anterior, conduzcan a un pronóstico adecuado del producto potencial de México

Considerando lo anterior, los datos utilizados en esta investigación utilizan las series trimestrales para el periodo 1993:1-2012:2 del valor absoluto del PIB. Asimismo, se utilizan datos de Banco de México para la inflación correspondiente al lapso mencionado.

Para el procesamiento de la información, se utilizaron Excel, Stata 12 y R. Para realizar el análisis de Hodrick-Prescott en Excel, se utilizó el código diseñado por Kurt Annen<sup>25</sup>; en el caso de R, se empleó parte del código diseñado por Shumway y Stoffer (2006)<sup>26</sup> y en Stata 12 ya se encuentran incorporadas las herramientas para el análisis de HP y de componentes no observados.

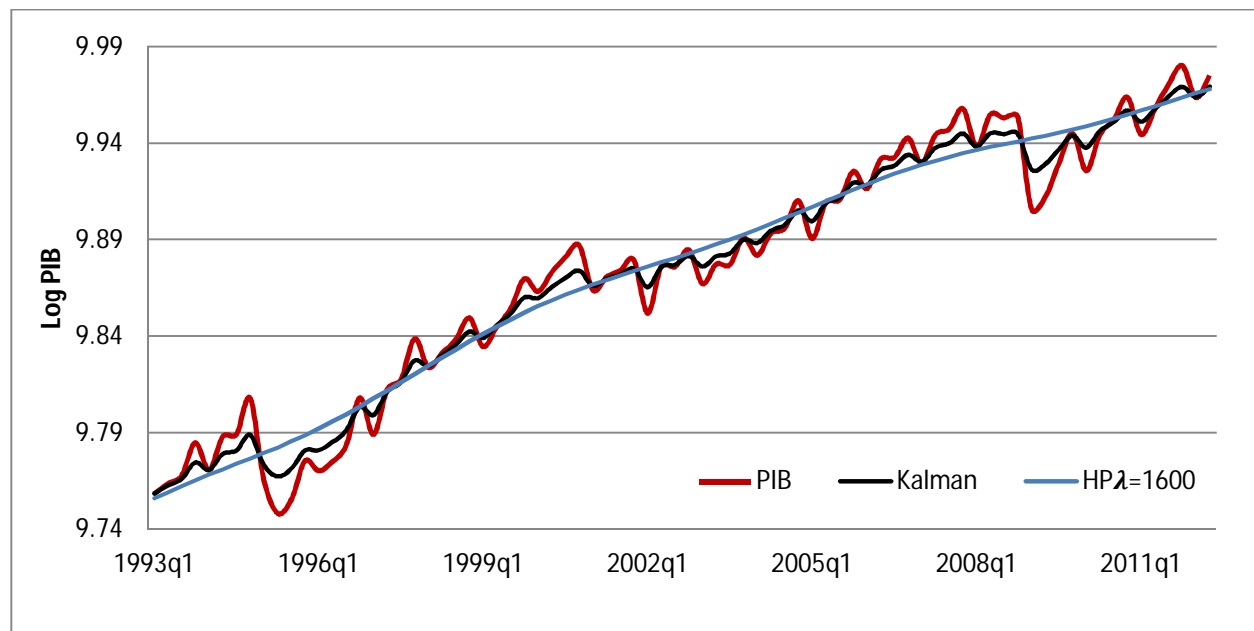
---

<sup>24</sup> Véanse las gráficas A1 y A2 en la sección de anexos

<sup>25</sup> El código diseñado por Kurt Annen es gratuito y puede descargarse libremente del sitio de internet del autor: [http://www.web-reg.de/hp\\_addin.html](http://www.web-reg.de/hp_addin.html)

<sup>26</sup> El código empleado en esta tesis se encuentra en la sección de anexos. El código en el cual se basa, se encuentra en la siguiente URL: <http://www.stat.pitt.edu/stoffer/tsa2/chap6.htm>

A continuación se muestra la gráfica 3.1 del PIB en México para el periodo de análisis. En la misma gráfica se aprecian los resultados de la descomposición univariada del PIB. Se presentan los estimados del producto potencial según Kalman y Hodrick-Prescott.<sup>27</sup>

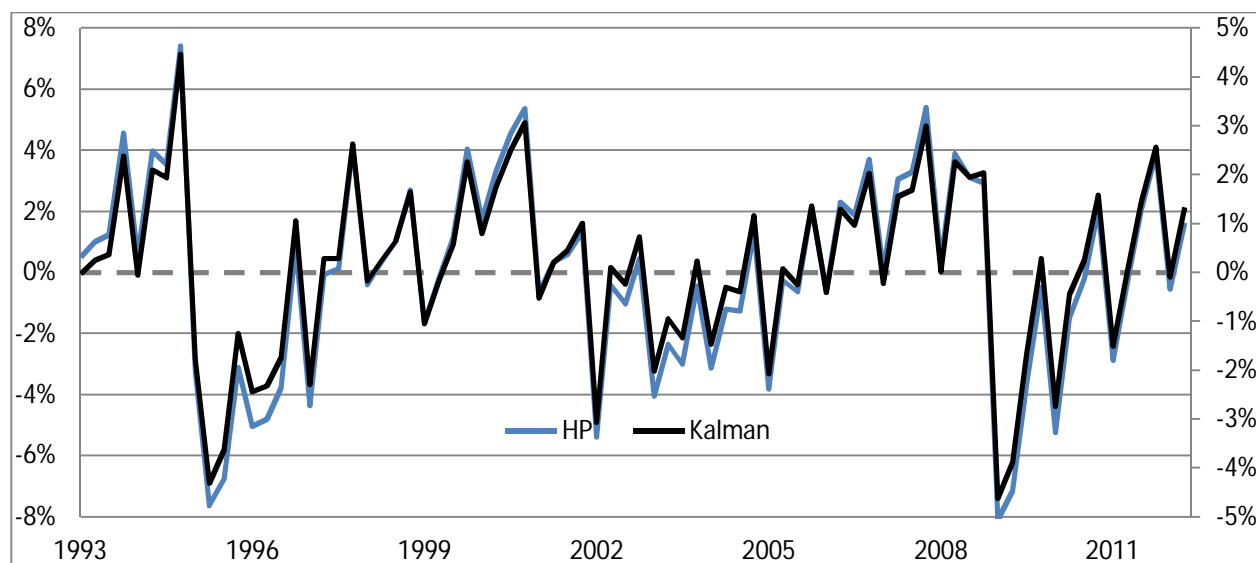


Gráfica 3.1: Descomposición univariada del PIB obtenida con el filtro de HP y el filtro de Kalman

Se puede apreciar que el comportamiento del PIB potencial para ambas series es muy similar. Es decir, la tendencia que presentan ambas es prácticamente la misma y sólo se aprecia un cambio en la magnitud del componente cíclico, cuyas fluctuaciones tienen mayor amplitud en el caso de la estimación obtenida con el filtro de HP. Esto se puede observar con mucha mayor claridad en la gráfica 3.2<sup>28</sup>, la cual muestra que si se omite la diferencia de escala, que refleja la diferencia en la magnitud del componente cíclico, la tendencia de la estimación con el filtro HP es idéntica a la que resulta del filtro de Kalman

<sup>27</sup> Para el caso de Kalman, se describe en seguida la forma en la que se plantea el modelo de estado espacio. Para Hodrick-Prescott, se utiliza el *add-in* creado por Kurt Annen con una lambda de 1600.

<sup>28</sup> La escala de la izquierda corresponde a la brecha con HP, y la escala de la derecha, a Kalman.



Gráfica 3.2: Brecha del producto para HP y Kalman

El modelo univariado propuesto es el siguiente:

$$y_t = y_t^p + c_t \quad (1)$$

$$y_t = \textit{Producto real}$$

$$y_t^p = \mu_t + y_{t-1}^p + \varepsilon_t \quad (2)$$

$$y_t^p = \textit{Componente permanente}$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \epsilon_t \quad (3)$$

$$c_t = \textit{Componente transitorio}$$

$$c_t = \phi c_{t-1} + \delta_t \quad (4)$$

$$\varepsilon_t, \epsilon_t, \delta_t \sim i.i.d. N(0, \sigma_{\varepsilon_t, \epsilon_t, \delta_t}^2)$$

En el modelo propuesto, la ecuación (1), representa al producto como la suma del potencial más un componente transitorio. El componente permanente, o potencial, se modela como una caminata aleatoria con deriva  $\mu_t$ , donde el coeficiente  $\mu_t$  se modela, a su vez, como una caminata aleatoria, dado que las condiciones macroeconómicas son cambiantes. El componente cíclico quedó representado como un proceso autoregresivo de primer orden<sup>29</sup>. Finalmente, se asumió que todos los componentes de error son ruido blanco.

<sup>29</sup> El modelo propuesto es una variante de (Clark, 1987) y de (Faal, 2005). Se supone que las perturbaciones del componente cíclico y del componente permanente no se encuentran correlacionados.

Representando las ecuaciones propuestas en su forma de estado espacio, la notación matricial es:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ c_t \\ c_{t-1} \\ \mu_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \emptyset & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ c_{t-1} \\ 0 \\ \mu_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_t \\ 0 \\ \delta_t \end{bmatrix}$$

Nuestra matriz  $Q$  de varianzas y covarianzas se representa por:

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_t}^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_{\varepsilon_t}^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \sigma_{\delta_t}^2 \end{bmatrix}$$

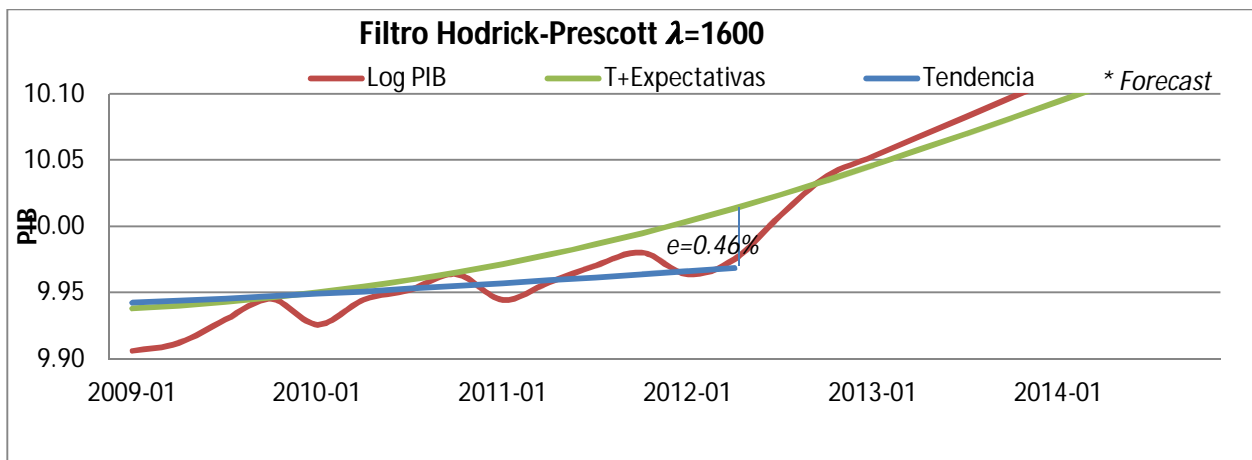
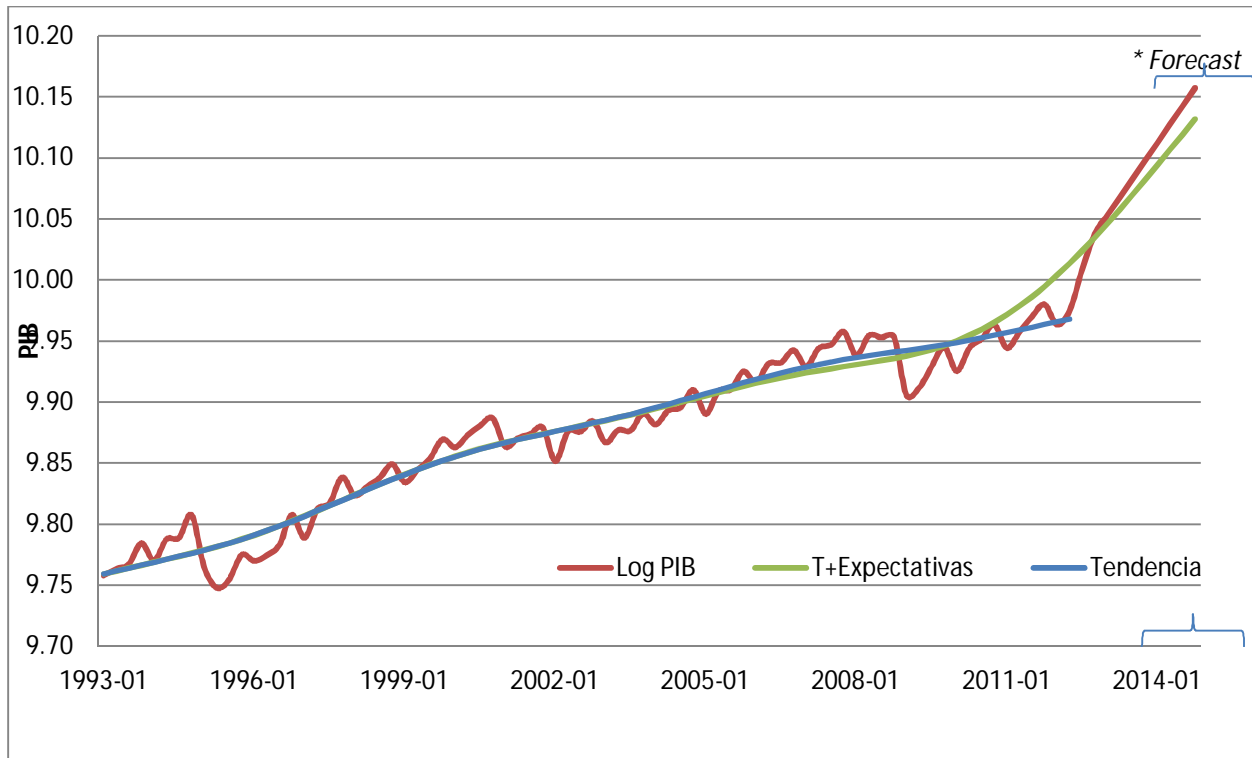
Acevedo (2009) realiza una estimación del producto potencial en México en la cual incluye en sus *forecastings* las expectativas de los analistas y las compara con los resultados de predicciones obtenidas mediante un ARIMA<sup>30</sup>. Acevedo afirma que los resultados de ambos modelos son muy similares; sin embargo, también reitera la importancia del empleo de las expectativas de los analistas como mejor método de aproximación al incluir la información procesada por los participantes del mercado.

Con base en el análisis propuesto por Acevedo (2009), en la estimación que aquí se presenta, fue aplicado el filtro de HP a la serie de datos del PIB ajustando el resultado a la proyección del Fondo Monetario Internacional para México en 2012 que es 3.8% y 2013 de 3.5%. Con este ajuste, fue posible corregir la cola derecha del filtro de Kalman. De igual manera, fue posible calcular el error de predicción del filtro con los datos a la fecha, comparado con la posible tendencia del filtro para los siguientes trimestres. Los resultados se muestran de manera clara en los gráficos 3.3 y 3.4, a continuación, en donde se muestra lo que ocurre al incorporar nueva información al análisis. En color verde, se aprecia el comportamiento del filtro HP al incluir las expectativas de crecimiento futuras. En el gráfico 3.4, se aprecia la diferencia entre la estimación original y la ajustada con base en las expectativas en la cola derecha de la serie.

---

<sup>30</sup> ARIMA: *Autoregressive integrated moving average*. Acevedo utiliza el ARIMA-X12

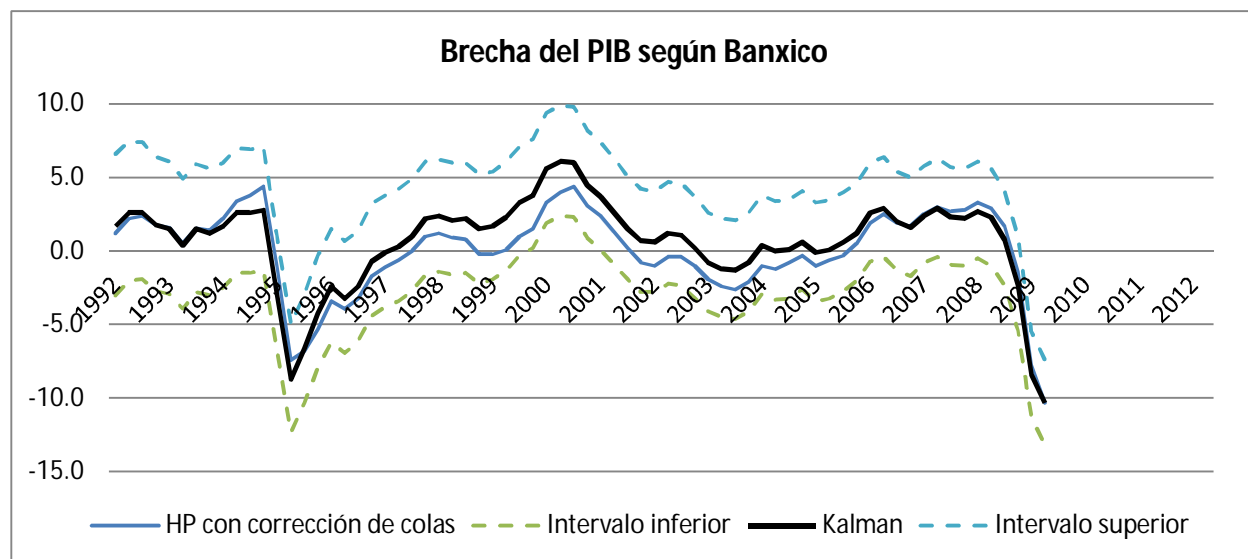




<sup>31</sup> El cambio proyectado del IMF para México en 2012 es 3.8% y 2013 3.5%. Fuente: *World Economic Outlook (October 2012)*.

Con respecto al filtro de Kalman, se puede observar en la gráficas 3.1 y 3.2 cómo la tendencia resultante del modelo propuesto sigue las variaciones del producto más de cerca que la tendencia estimada con el filtro de HP. Los resultados no deberían extrañar, debido a que el filtro de Kalman se comporta como un filtro óptimo cuando los componentes de error se distribuyen como ruido blanco Gaussiano. Para el caso de los errores distribuidos como ruido blanco no Gaussiano, aun se comprueba que el filtro de Kalman es el mejor filtro lineal para estimar el estado del sistema, con base en toda la información disponible al momento.

Comparando los resultados del modelo aquí propuesto con las estimaciones de Acevedo E. (2009), Faal (2005) y Ortíz (2009) resulta evidente que, a grandes rasgos, el comportamiento de ambos filtros es muy similar. No obstante, hay ciertas discrepancias con respecto a las magnitudes de la brecha del producto. Por ejemplo, durante la crisis financiera de 1994, la estimación aquí presentada, es coincidente en una brecha negativa.<sup>32</sup> Sin embargo, de acuerdo con el Informe sobre la Inflación Abril-Junio 2011, la brecha durante la crisis, según Banxico, para el segundo trimestre de 2009 fue del orden de seis por ciento, mientras que en el análisis que aquí se presenta la caída fue aún mayor, esto es, del orden de ocho por ciento.

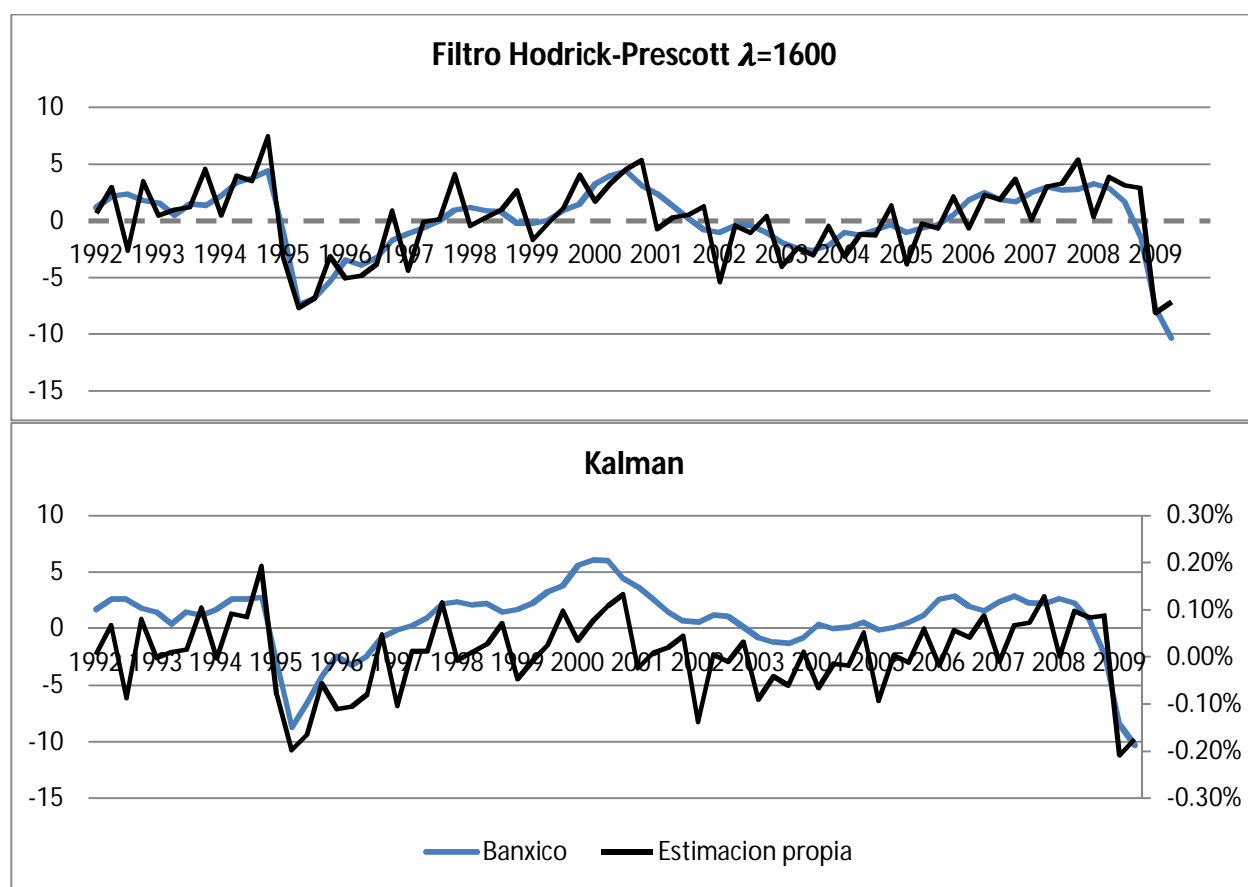


Gráfica 3.5: Brecha del PIB según Banxico.<sup>33</sup>

<sup>32</sup> Es coincidente en la dirección y en la magnitud de alrededor de 8%

<sup>33</sup> Gráfica realizada con base en datos de Banxico presentada en (Ortíz, 2009).

A continuación, en la gráfica 3.6, se presentan los resultados del análisis descrito anteriormente. Con respecto a la brecha según Banxico, para el filtro de HP, la magnitud y dirección coinciden a lo largo de la serie. Sin embargo se puede apreciar que en el análisis aquí presentado persiste el elemento estacional asociado a la serie original de los datos del PIB tomada del INEGI. Para el caso del filtro de Kalman, la dirección en los cambios es de igual manera coincidente. Sin embargo, la magnitud de la brecha es menor, de manera análoga al modelo propuesto por Faal (2005) del FMI. Nuevamente, esto se observa en primera instancia en la gráfica 3.1, en la cual se aprecia que la diferencia entre el PIB real y su potencial es menor cuando se utiliza el filtro de Kalman.



Gráfica 3.6: Brecha del PIB HP y Kalman.<sup>34</sup>

<sup>34</sup> Fuente: Estimación propia y datos de Banxico

En la sección de anexos se encuentran algunas gráficas complementarias obtenidas con los mismos datos empleados anteriormente. No obstante, estas gráficas las realicé en Stata y en R. A pesar de que ambos programas resultan sumamente útiles para realizar el análisis de series de tiempo, aún no cuentan con la versatilidad que tiene Excel para realizar las gráficas. Si bien los dos paquetes cuentan con algunas opciones para personalizar las gráficas, no pueden competir con Excel, desde mi punto de vista como usuario, en cuanto a facilidad y diversidad en la presentación de los datos. Es por esta razón que las gráficas presentadas anteriormente fueron realizadas en Excel.

If everybody is thinking alike, then somebody isn't thinking.

George S. Patton

---

## IV. Conclusiones

---

Acevedo et. al., subrayan el hecho de que al utilizar las técnicas econométricas presentadas en este documento, Kalman y HP, se asumen ciertas propiedades teóricas que es posible no existan plenamente en la economía mexicana (Acevedo, Aguilar, Conesa, & Young, 2001). No obstante los resultados obtenidos en esta investigación contribuyen a un mejor entendimiento del producto potencial.

A pesar de la considerable incertidumbre que rodea la medición del producto potencial, obtener su estimación es un ejercicio útil como parte de la estrategia de estimar las presiones inflacionarias. Al evaluar tales presiones, los bancos centrales enfocan su atención a las expectativas de inflación, a los movimientos de precio de las importaciones, a las tasas de utilización de capacidad, a la productividad, a los salarios, y a los agregados monetarios (Gosselin & Lalonde, 2006).

El costo de información imperfecta es mayor cuando el peso de la estabilización de la brecha del producto es mayor. Es útil analizar las reglas simples de política monetaria por tres razones. La primera es que hay diversos documentos que muestran que las reglas simples proporcionan rendimientos macroeconómicos similares a las reglas óptimas. Segundo, las reglas simples han mostrado ser más robustas para modelar la incertidumbre que las reglas óptimas. Finalmente, las reglas simples de política monetaria son una aproximación razonable de cómo se comportan en realidad los hacedores de política monetaria (Ehrman & Smets, 2001). Sin embargo, las grandes fluctuaciones cíclicas en productividad y oferta de trabajo, hacen esta estrategia difícil de implementar empíricamente.

A pesar de que algunas herramientas como la Ley de Okun y la brecha del producto presenten complicaciones en su estimación debida a la variabilidad de sus parámetros a lo largo del ciclo de negocio; si se consideran en su estimación estos inconvenientes, la relación contemporánea de los cambios en el desempleo y en el producto aún pueden ser de ayuda para la formulación de política monetaria. Si bien no se pueden considerar como parte estructural de la economía, si pueden servir acaso como reglas de dedo.

Se desea identificar el componente cíclico del producto, hay que tener alguna metodología rigurosa de escoger entre un número infinito de definiciones distintas. Si también se quiere que el componente cíclico tenga una interpretación económica útil para los hacedores de política, es

necesario asegurar que la definición elegida este basada en principios económicos. El argumento de capturar la tendencia de largo plazo del producto no es suficiente. Imponer supuestos arbitrarios en la dinámica del componente de tendencia nos llevara a definiciones arbitrarias del componente cíclico (Van Norden, 1995).

Jevons (1879) plantea la importancia de la utilización de las matemáticas en la ciencia económica. Menciona que la información está al alcance del investigador en diversas formas y que sólo espera que éste pueda medir correctamente aquello que sea de su interés. Sin embargo, también menciona que la falta de un método apropiado; y que la exhaustividad de la vasta masa de información desperdigada, previene de emplearla en la investigación científica de las leyes naturales de la economía. De la misma manera, menciona la importancia del análisis estadístico; asegura que:

*“...en la ausencia de estadísticas completas, la ciencia económica no sería menos matemática, a pesar de que sería inmensamente menos útil que si fuera, comparativamente hablando, exacta.”*

Quiero destacar el hecho de que a pesar que la brecha del producto y el producto potencial son conceptos trascendentes para explicar la capacidad económica por el lado de la oferta agregada y la amplitud en la cual la demanda agregada puede expandirse sin inflación acelerada. Su estimación por los métodos expuestos en esta tesis no es ninguna panacea. Asimismo, es necesario mejorar los métodos actuales para llegar a mediciones que sean más precisas. Es evidente que las dificultades para desarrollar medidas adecuadas para estas variables, limitan su utilización en trabajos empíricos.

A pesar de que, como se ha descrito en esta investigación, existen diversas metodologías para realizar el cálculo del producto potencial; no existen muchas estimaciones para México, o acaso son obscuras en su procedimiento, como es el caso del Banco de México que sólo publica que su estimación se basa en una metodología de “corrección de colas” en la cual, de acuerdo con la fuente principal, se realiza simplemente una estimación del valor apropiado de lambda para la



economía mexicana. No obstante, utilizar el valor de lambda sugerido por Hodrick y Prescott, resulta en la misma estimación.<sup>35</sup>

James Surowiecki<sup>36</sup>, en su libro de “La sabiduría de los grupos”, con base en ejemplos de economía experimental modela la forma en la que la diversidad de opinión – traducida en un mayor número de opciones – conduce a un agregado de información que en su conjunto produce mejores resultados que una estimación individual; sobretodo, cuando existe un grado de diversidad en el grupo.

Con base en lo anterior, quiero enfatizar la importancia de desarrollar diversos métodos para realizar la aproximación de un problema cualquiera, en el caso de esta tesis el producto potencial. Entre más y mejores métodos existan y se utilicen, los resultados en conjunto serán mejores. Al lograr una medición correcta, como menciona Jevons, será posible esclarecer las leyes naturales de la economía. De esta manera, como dice Walras<sup>37</sup>, será posible también explicar, en el lenguaje matemático, en menos palabras y de una manera más exacta y clara, la economía.

---

<sup>35</sup> Banxico señala solamente que el resultado calculado proviene de la aplicación del filtro de Hodrick-Prescott con corrección de colas y hace referencia a Van Norden & St-Amand (Measurement of the Output Gap: A Discussion of Recent Research at the Bank of Canada., 1997) y a Marcet, Albert & Ravn, Morten O., 2004. "The HP-Filter in Cross-Country Comparisons," CEPR Discussion Papers 4244, C.E.P.R. Discussion Papers. Estos documentos precisan la importancia del ajuste de lambda, para diversas economías, a un valor distinto de 1600. Sin embargo no hacen alusión a ningún método de corrección de colas.

<sup>36</sup> (Surowiecki J., 2004). *The Wisdom of the Crowds: Why the Many Are Smarter Than the Few and How Collective Wisdom Shapes Business, Economies, Societies and Nations*. Doubleday. New York

<sup>37</sup> (Walras León, 1898). “Elementos de economía política pura (o Teoría de la riqueza social)”. Alianza Editorial. Madrid. 1987. Traducción de Julio Segura.

All life is an experiment. The more experiments you make the better.

Ralph Waldo Emerson

---

## V. Referencias

---

- Abel, A., & Bernanke, B. (2004). *Macroeconomía* (4ta ed.). (E. Rabasco, Trad.) Madrid: Pearson Educación.
- Acevedo, E. (2006). Inflación y crecimiento económico en México: una relación no lineal. *Economía mexicana NUEVA ÉPOCA*, XV(002), 199-249.
- Acevedo, E. (2009). PIB potencial y productividad total de los factores: Recesiones y expansiones en México. *economía mexicana NUEVA ÉPOCA*, XVIII(2), 175-219.
- Acevedo, E., Aguilar, M., Conesa, A., & Young, P. (2001). *Mexico: Selected Issues*. International Monetary Fund. Washington, D.C.: IMF Publication Services.
- Alcalá, A. (Mayo de 2012). La Economía de los gobiernos de la alternancia democrática. *Letras Libres*(161), 30-43.
- Ball, L., & Mankiw, G. (2002). The NAIRU in Theory and Practice. *Journal of Economic Perspectives*, 16(4), 115-136.
- Basistha, A., & Nelson, C. (2007). New measures of the output gap based on the forward-looking new Keynesian Phillips curve. *Journal of Monetary Economics*, 34, 498-511.
- Baxter, M., & King, E. (1999). Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series. *University of Virginia*.
- Bergoeing, R., Kehoe, P., Kehoe, T., & Soto, R. (2002). A Decade Lost and Found: Mexico and Chile in the 1980s. *Review of Economic Dynamics*, 5(1), 166-205.
- Camargo, A. (2010). Revisión de ley de Okun para México, un análisis de la componente transitoria y permanente del desempleo y el producto. *ITAM*.
- Canova, F. (1994). Detrending and turning points. *European Economic Review*, 38, 614-623.
- Chamberlin, G. (2011). Okun's Law Revisited. *Economic & Labor Market Review*, 104-132.
- Chavarín, R. (Abril-Junio de 2001). El costo del desempleo medido en producto. Una revision empirica de la ley de Okun para México. *El trimestre económico*, LXVIII (2)(270), 209-232.
- Clark, P. (1987). The Cyclical Component of U.S. Economic Activity. *Quarterly Journal of Economics*, 102, 797-814.
- Ehrman, M., & Smets, F. (2001). *Uncertain Potential Output: Implications for Monetary Policy*. Working paper No. 59., European Central Bank.
- Enders, W. (1948). *Applied Econometric Time Series* (2nd ed.). Castleton: Wiley.

- Faal, E. (2005). *GDP Growth, Potential Output, and Output Gaps in Mexico*. Washington, D.C.: International Monetary Fund.
- Gomez, F., Rebollo, S., & Usabiaga, C. (2002). Nuevas estimaciones de la NAIRU de la economía española: métodos directos. *Estudios de Economía Aplicada*, 20(III), 509-530.
- Gosselin, M., & Lalonde, R. (2006). An eclectic approach to estimating U.S potential GDP. *Empirical Economics*.
- Gujarati, D. (2006). *Econometría Básica* (4th ed.). (M. J. Cyhlar, Trad.) Rio de Janeiro: Elsevier.
- Hamilton, J. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*, 57(2), 357-384.
- Harvey, A. (1989). *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Heath, J. (2012). *Lo que indican los indicadores. Cómo utilizar la información estadística para entender la realidad económica de México*. México: INEGI.
- Hodrick, R. J., & Prescott, E. C. (1997). Postwar U. S. Business Cycles: An Empirical Investigation. *Journal of Money Credit, and Banking*, 29, 1-16.
- Jevons, W. (1879). *The theory of Political Economy*. London: Kessinger Legacy Reprints.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1), 35-45.
- Kim, C., & C, N. (1999). *State-Space Models with Regime Switching*. Cambridge: The MIT Press.
- Knotek, E. (2007). How useful is Okun's Law? *Economic Review, Fourth Quarter 2007*(92,4).
- Kuttner, K. (1994). Estimating Potential Output as a Latent Variable. *Journal of Business & Economic Statistics*, 12(3), 361-368.
- Levy, J. (2002). The Kalman Filter: Navigation's Integration Workhorse. *INNOVATION*, The Johns Hopkins University.
- Liquitaya, B., & Lizarazu, E. (2010). La Ley de Okun en la economía mexicana. *Denarius revista de economía y administración*, 19(5), 47-71.
- Loayza, N., & Palacios, L. (1997). Economic Reform and Progress in Latin America and the Caribbean. *World Bank Policy Research Working Paper*, No. 1829.
- Loria, E., & Ramírez, J. (2009). Determinantes del crecimiento del producto y del desempleo en México, 1985.1-2008.4. *Un enfoque econométrico multivariado*. México: Facultad de Economía.

- Loria, E., & Ramos, M. (2006). La Ley de Okun: Una relectura para México, 1970-2004. *Estudios Económicos*, 22(1), 19-55.
- Lucas, R. (1973). Some International Evidence on Output-Inflation Tradeoffs. *American Economic Review*, 63(3), 326-334.
- Marcet, A., & Ravn, M. (2004). *The HP-Filter in Cross-Country Comparisons*. CEPR Discussion Papers 4244.
- Montero, R. (2007). Variables no estacionarias y cointegración. *Universidad de Granada*.
- Mourougane, A., & Furceri, D. (2012). The effect of financial crises on potential output: New empirical evidence from OECD countries. *Journal of Macroeconomics*, 34, 822-832.
- Murillo, I., & Usabiaga, C. (2003). Estimaciones de la tasa de paro de equilibrio de la economía española a partir de la Ley de Okun. *Papeles de trabajo del Instituto de Estudios Fiscales*(15), 7-20.
- Negrete Prieto, R. (2001). ¿Porqué han sido bajas las tasas de desempleo en México? Una guía básica ilustrada. *Notas. Revista de información y análisis*. (14 y 15), 1-19.
- Okun, A. (1962). *Potential GNP: It's measurement and significance*. Cowles Foundation: Yale University.
- Ortiz, G. (2009). *Informe sobre la inflación Abril-Junio 2009*. México: Banco de México.
- Ozbek, L., & Ozlale, U. (2005). Employing the extended Kalman filter in measuring the output gap. *Journal of Economics & Control*, 29, 1611-1622.
- Perron, P. (November de 1989). The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis. *Econometrica*, 57(6), 1361-1403.
- Prescott, E., & Hodrick, R. (1997). Postwar U.S. Business Cycles: A Descriptive Empirical Investigation. *Journal of Money, Credit and Banking*, 29(1).
- Razzak, W. (1997). The Hodrick-Prescott technique: A smoother versus a filter. An application to New Zealand GDP. *Economics Letters*, 57, 163-168.
- Rennison, A. (2003). *Comparing Alternative Output-Gap Estimators: A Monte Carlo Approach*. Bank of Canada, Working Paper 2003-8.
- Rodríguez, P., & Peredo, F. (2007). Estimación de la Ley de Okun para la economía mexicana. *Análisis Económico*, XXII(51), 59-79.
- Rodríguez, P., Ludlow, J., & Peredo, F. (2004). La curva de Phillips y la NAIRU en Mexico. *Economía Teoría y Práctica*, 83-102.

- Rodríguez, P., Ludlow, J., & Peredo, F. (2006). La relación inflación desempleo en América Latina: Un análisis empírico. *Reforma Financiera en América Latina*, 83-99.
- Romer, D. (2006). *Macroeconomía Avanzada* (3ra ed.). (G. Trinidad, Trad.) Madrid: McGraw-Hill.
- Sala-i-Martin, X. (1999). *Apuntes de crecimiento económico* (2da ed.). Barcelona: Antoni Bosch.
- Samuelson, P., & Nordhaus, W. (2005). *Economía* (18va ed.). (A. Cevallos, V. Hernández, M. E. Hano, & M. Lara, Trads.) Mexico: McGraw-Hill.
- Schwartz, M., & Pérez, A. (2000). Crecimiento económico e inflación: el caso de México. *economía mexicana NUEVA ÉPOCA*, IX(2), 165-188.
- Shumway, R., & Stoffer, D. (2006). *Time Series Analysis and Its Applications With R Examples*. New York: Springer.
- Stock, J., & Watson, M. (1988). A probability model of the coincident economic indicators. *National Bureau of Economic Research, NBER Working Paper*(#2772).
- Tapia, E. (2009). La ley de Okun: Un enfoque regional para México, 1987-2006. México, D.F., México: Facultad de Economía.
- Van der Ploeg, F. (2009). Prudent monetary policy and prediction of the output gap. *Journal of Macroeconomics*, 31, 217-230.
- Van Norden, S. (1995). Why is it so hard to measure the current output gap? *International Department, Bank of Canada*.
- Van Norden, S., & St-Amand, P. (1997). *Measurement of the Output Gap: A Discussion of Recent Research at the Bank of Canada*.
- Watson, M. (1986). Univariate Detrending Methods With Stochastic Trends. *Journal of Monetary Economics*, 18, 49-75.
- Welch, G. (2009). History: The Use of the Kalman Filter for Human Motion Tracking in Virtual Reality. *PRESENCE*, 18(1), 72-91.

Winners never quit, and quitters never win.

Vince Lombardi

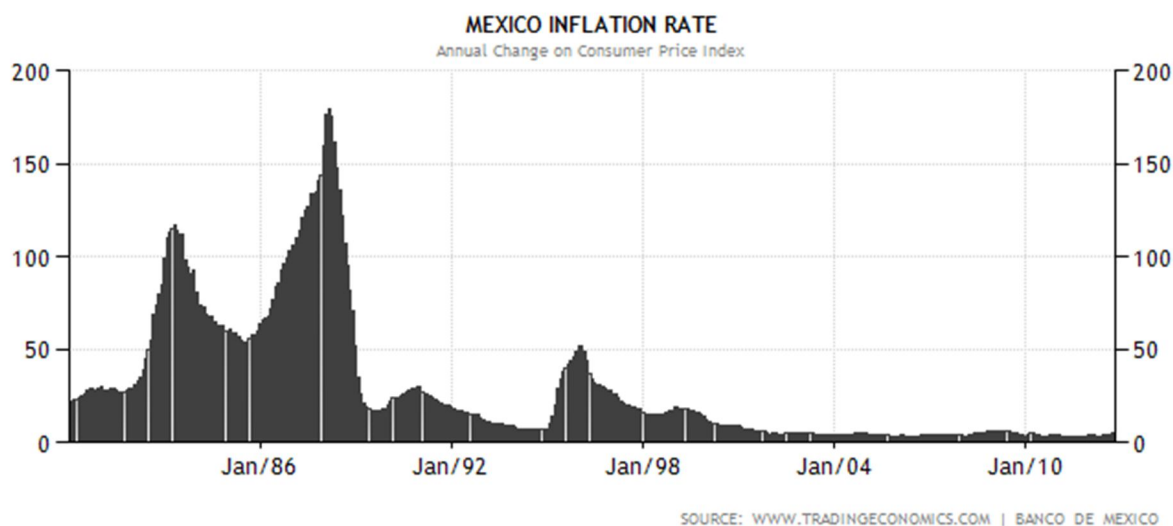


---

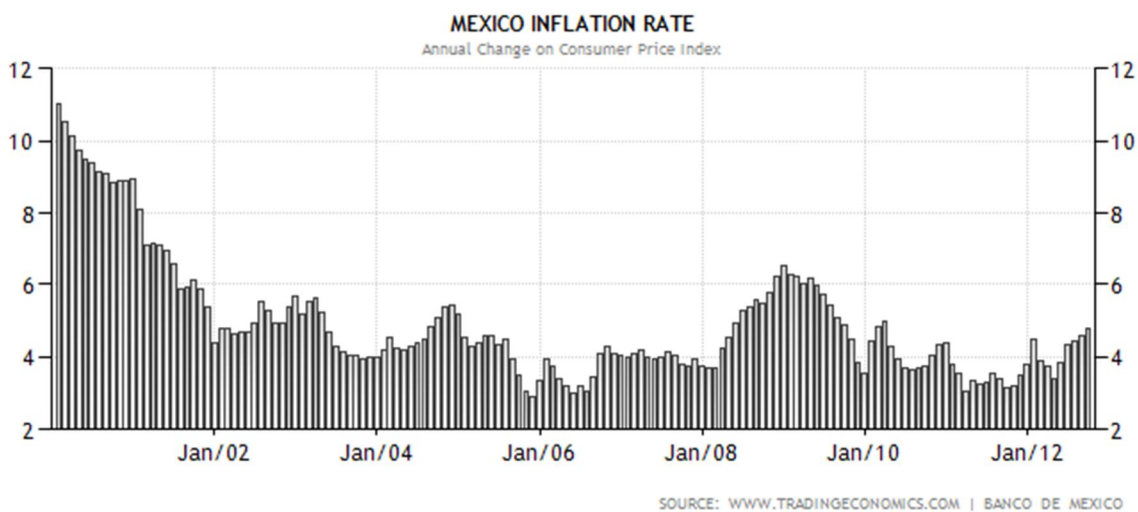
## VI. Anexos

---

## Gráficas



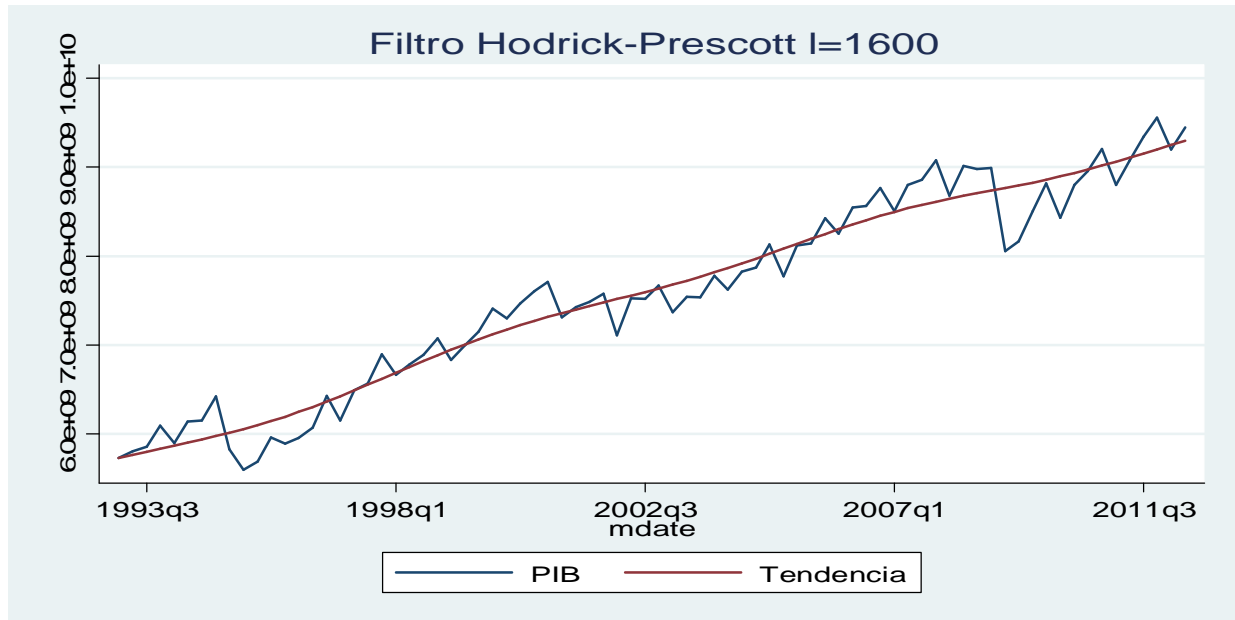
Gráfica A1: Tasa de inflación en México desde 1980.<sup>38</sup>



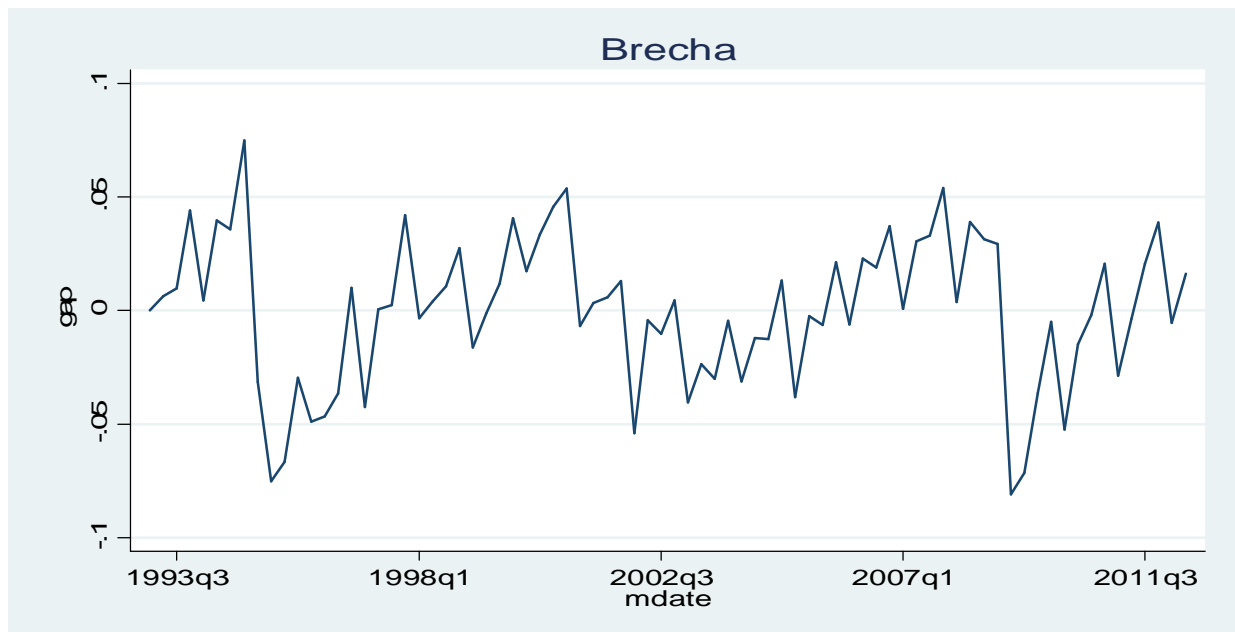
Gráfica A2: Tasa de inflación en México desde 2000.<sup>39</sup>

<sup>38</sup> Fuente: Banxico, utilizando la herramienta de Trading Economics

<sup>39</sup> *Ibid.*



Gráfica A3: Filtro de Hodrick-Prescott realizado en Stata 12.<sup>40</sup>



Gráfica A4: Brecha del PIB en Stata 12.

<sup>40</sup> Las gráficas realizadas en Stata se obtienen utilizando los datos hasta el segundo trimestre de 2012; mientras que las presentadas en Excel 2007 incluyen las expectativas de los agentes económicos. De ahí la diferencia en la cola derecha al incluir datos hasta finales de 2014.

## Código en R

```
Kfilter0 = function(num,y,A,mu0,Sigma0,Phi,cQ,cR){
  #
  # NOTE: must give cholesky decomp: cQ=chol(Q), cR=chol(R)
  Q=t(cQ)%*%cQ
  R=t(cR)%*%cR
  # y is num by q (time=row series=col)
  # A is a q by p matrix
  # R is q by q
  # mu0 is p by 1
  # Sigma0, Phi, Q are p by p
  Phi=as.matrix(Phi)
  pdim=nrow(Phi)
  y=as.matrix(y)
  qdim=ncol(y)
  xp=array(NA, dim=c(pdim,1,num)) # xp=x_t^{t-1}
  Pp=array(NA, dim=c(pdim,pdim,num)) # Pp=P_t^{t-1}
  xf=array(NA, dim=c(pdim,1,num)) # xf=x_t^t
  Pf=array(NA, dim=c(pdim,pdim,num)) # Pf=x_t^t
  innov=array(NA, dim=c(qdim,1,num)) # innovations
  sig=array(NA, dim=c(qdim,qdim,num)) # innov var-cov matrix
  # initialize (because R can't count from zero)
  x00=as.matrix(mu0, nrow=pdim, ncol=1)
  P00=as.matrix(Sigma0, nrow=pdim, ncol=pdim)
  xp[,1]=Phi%*%x00
  Pp[,1]=Phi%*%P00%*%t(Phi)+Q
  sigtemp=A%*%Pp[,1]%*%t(A)+R
  sig[,1]=(t(sigtemp)+sigtemp)/2 # innov var - make sure it's symmetric
  signv=solve(sig[,1])
  K=Pp[,1]%*%t(A)%*%signv
  innov[,1]=y[1,]-A%*%xp[,1]
  xf[,1]=xp[,1]+K%*%innov[,1]
  Pf[,1]=Pp[,1]-K%*%A%*%Pp[,1]
  sigmat=as.matrix(sig[,1], nrow=qdim, ncol=qdim)
  like = log(det(sigmat)) + t(innov[,1])%*%signv%*%innov[,1] # -
  log(likelihood)
  ##### start filter iterations #####
}
```

```
for (i in 2:num){
  xp[,i]=Phi%*%xf[,i-1]
  Pp[,i]=Phi%*%Pf[,i-1]%*%t(Phi)+Q
  sigtemp=A%*%Pp[,i]%*%t(A)+R
  sig[,i]=(t(sigtemp)+sigtemp)/2 # innov var - make sure it's symmetric
  signv=solve(sig[,i])
  K=Pp[,i]%*%t(A)%*%signv
  innov[,i]=y[i,]-A%*%xp[,i]
  xf[,i]=xp[,i]+K%*%innov[,i]
  Pf[,i]=Pp[,i]-K%*%A%*%Pp[,i]
  sigmat=as.matrix(sig[,i], nrow=qdim, ncol=qdim)
  like= like + log(det(sigmat)) + t(innov[,i])%*%signv%*%innov[,i]
}
like=0.5*like
list(xp=xp,Pp=Pp,xf=xf,Pf=Pf,like=like,innov=innov,sig=sig,Kn=K)
}
Ksmooth0 = function(num,y,A,mu0,Sigma0,Phi,cQ,cR){
  #
  # Note: Q and R are given as Cholesky decomps
  # cQ=chol(Q), cR=chol(R)
  #
  kf=Kfilter0(num,y,A,mu0,Sigma0,Phi,cQ,cR)
  pdim=nrow(as.matrix(Phi))
  xs=array(NA, dim=c(pdim,1,num)) # xs=x_t^n
  Ps=array(NA, dim=c(pdim,pdim,num)) # Ps=P_t^n
  J=array(NA, dim=c(pdim,pdim,num)) # J=J_t
  xs[,num]=kf$xf[,num]
  Ps[,num]=kf$Pf[,num]
  for(k in num:2) {
    J[,k-1]=(kf$Pf[,k-1])%*%t(Phi)%*%solve(kf$Pp[,k])
    xs[,k-1]=kf$xf[,k-1]+J[,k-1]%*%(xs[,k]-kf$xp[,k])
    Ps[,k-1]=kf$Pf[,k-1]+J[,k-1]%*%(Ps[,k]-kf$Pp[,k])%*%t(J[,k-1])
  }
  # and now for the initial values because R can't count backward to zero
  x00=mu0
  P00=Sigma0
  J0=as.matrix((P00%*%t(Phi))%*%solve(kf$Pp[,1]), nrow=pdim,
  ncol=pdim)
  x0n=as.matrix(x00+J0%*%(xs[,1]-kf$xp[,1]), nrow=pdim, ncol=1)
}
```

```

P0n= P00 + J0%*(Ps[.,k]-kf$Pp[.,k])%*t(J0)
list(xs=xs,Ps=Ps,x0n=x0n,P0n=P0n,J0=J0,J=J,xf=kf$xf,Pp=kf$Pp,xf=kf$xf,
Pf=kf$Pf,like=kf$like,Kn=kf$K)
}

y=ts(scan("piblt.dat"),start=1993,freq=4)
num=length(y)
A=cbind(1,1,0,0)
# -- Function to Calculate Likelihood --
Linn=function(para){
  phi=para[2]
  Phi=diag(0,4); # Phi is 4x4 but only one element is a parameter
  Phi[1,]=c(1,0,0,1); Phi[2,]=c(0,phi,0,0)
  Phi[3,]=c(0,1,0,0); Phi[4,]=c(0,0,0,1)
  cQ1=para[2] # sqrt q1 1
  cQ2=para[3] # sqrt q22
  cQ3=para[4] # sqrt q44
  cQ=diag(0,4); cQ[1,1]=cQ1; cQ[2,2]=cQ2; cQ[4,4]=cQ3
  cR=para[4] # sqrt r11
  kf=Kfilter0(num,y,A,mu0,Sigma0,Phi,cQ,cR)
  return(kf$like)
}
# -- Initial Parameters --
mu0=c(9.7,0,0,0)
Sigma0=diag(.5,4)
initpar=c(1.35,.5,.5,.5) # initial parameters for Phi[1,1], the 2 Q's and R
# -- Estimation --
# the iteration number is printed to the screen but you have to manually
scroll to see it

est=optim(initpar,Linn,NULL,method="BFGS",hessian=TRUE,control=list
(trace=1,REPORT=1))

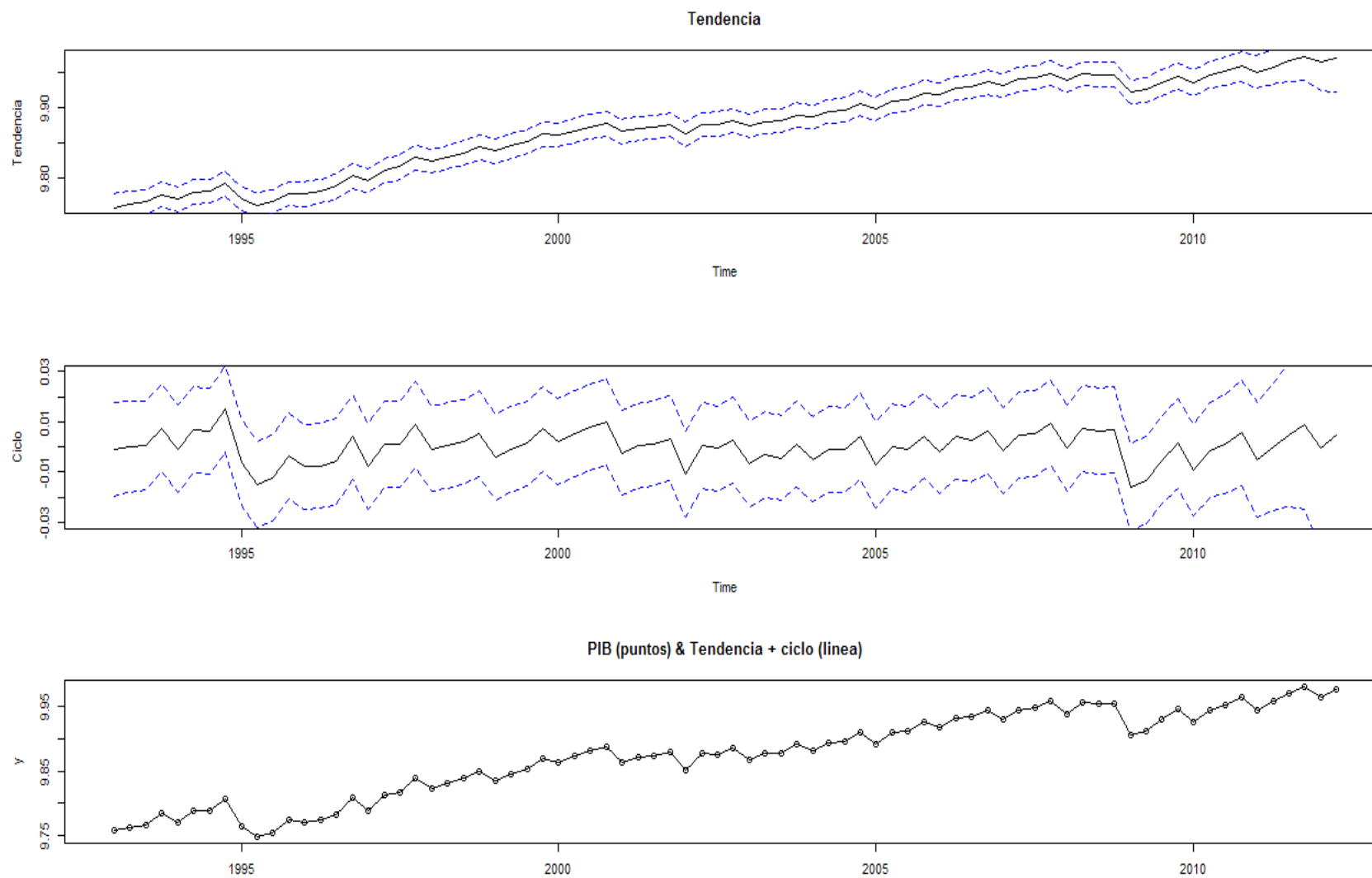
```

```

stderr=sqrt(diag(solve(est$hessian)))
#-- display summary of estimation
estimate=est$par
#-- Smooth--
phi=est$par[1]
Phi=diag(0,4); # Phi is 4x4 but only one element is a parameter
Phi[1,]=c(1,0,0,1); Phi[2,]=c(0,phi,0,0)
Phi[3,]=c(0,1,0,0); Phi[4,]=c(0,0,0,1)
cQ1=est$par[2] # sqrt q1 1
cQ2=est$par[3] # sqrt q22
cQ3=est$par[4] # sqrt q44
cQ=diag(0,4); cQ[1,1]=cQ1; cQ[2,2]=cQ2; cQ[4,4]=cQ3
cR=est$par[4]
ks=Ksmooth0(num,y,A,mu0,Sigma0,Phi,cQ,cR)

#-- Plot --
Tsm=ts(ks$xs[1,],start=1993,freq=4)
Ssm=ts(ks$xs[2,],start=1993,freq=4)
p1=2*sqrt(ks$Ps[1,1])
p2=2*sqrt(ks$Ps[2,2])
par(mfrow=c(3,1))
plot(Tsm, main="Tendencia", ylab="Tendencia")
lines(Tsm+p1,lty="dashed", col="blue")
lines(Tsm-p1,lty="dashed", col="blue")
plot(Ssm, main="", ylab="Ciclo", ylim=c(-.03,.03))
lines(Ssm+p2,lty="dashed", col="blue")
lines(Ssm-p2,lty="dashed", col="blue")
plot(y, type="p", main="PIB (puntos) & Tendencia + ciclo (linea)")
lines(Ssm+Tsm)

```



Gráfica A9: Filtro de Kalman en R.