



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MOVIMIENTO GEODÉSICO EN SINGULARIDADES
DESNUDAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
FÍSICO

PRESENTA:
EDGAR GASPERÍN GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS



México DF

2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1.Datos del alumno	Gasperín García Edgar 5513337804 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 305764535
2.Datos del tutor	Dr Hernando Quevedo Cubillos
3.Datos del sinodal 1	Dr Darío Núñez Zúñiga
4.Datos del sinodal 2	Dr Jerónimo Alonso Cortez Quezada
5.Datos del sinodal 3	Dr Edmundo Moreno Díaz
6.Datos del sinodal 4	Dr Xavier Nicolás Hernández Doring
7.Datos del trabajo escrito	Movimiento geodésico en singularidades desnudas 69 pag 2012

Intellige ut credas; crede ut intelligas.
AGUSTÍN DE HIPONA

Once you have eliminated the impossible, whatever remains, however improbable, must be the truth.
SIR ARTHUR CONAN DOYLE

Agradecimientos

A mi familia por el cariño, paciencia y apoyo que me han brindado durante todo este tiempo. Gracias por todo.

A mis amigos y Corrector de Estilo por su apoyo, compañía y cariño durante estos años. Así como por sus comentarios sobre este trabajo.

Al Dr. Hernando Quevedo Cubillos que ha sido fundamental para la realización de esta tesis.

A todos los integrantes del grupo de GTD, por recibirme como otro elemento más de este equipo.

A los Sinodales por su tiempo y comentarios sobre este trabajo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por permitirme pertenecer a esta gran comunidad.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN106110-3 Geometrotermodinámica. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

1. Introducción	1
2. Singularidades Desnudas y Agujeros Negros	4
2.1. Las Singularidades en la Teoría de la Relatividad General	4
2.2. Agujeros Negros	7
2.3. Singularidades Desnudas y la Hipótesis de la Censura Cósmica	8
2.4. Singularidad Desnuda con Momento Cuadrupolar	13
2.5. Masa Efectiva	18
3. Movimiento Geodésico en el Plano Ecuatorial	22
3.1. Geodésicas y potencial efectivo	24
3.2. Potencial efectivo para partículas	26
3.3. Potencial efectivo para Fotones	35
3.4. Análisis Comparativo	40
4. Análisis perturbativo	45
4.1. Caso α	49
4.2. Caso β	51
4.3. Caso γ	52
4.4. Caso δ	54
4.5. Caso ϵ	54
5. Conclusiones	56

A. Corrimiento al rojo y geodésicas radiales	60
A.1. Corrimiento al rojo	60
A.1.1. Emisor y receptor con coordenadas espaciales fijas	60
A.1.2. Emisor en geodésica radial y receptor en reposo en infinito	63
A.2. Tiempo propio y tiempo coordenado	65

Capítulo 1

Introducción

Desde que Einstein publicó en 1915 sus ecuaciones de campo se han encontrado soluciones exactas a estas ecuaciones. Sin embargo, con el surgimiento de estas soluciones han aparecido nuevos problemas a resolver. En particular, se presentó por primera vez el problema de las singularidades en Relatividad General. La primera solución exacta que se halló fue la de Schwarzschild. Este espacio-tiempo esféricamente simétrico posee una singularidad de curvatura en el origen ($r = 0$) y una hipersuperficie nula $r = 2M$ que la rodea. Esta hipersuperficie es conocida como horizonte de eventos. Si una partícula o fotón alcanza la hipersuperficie $r = 2M$, terminarán irremediabilmente en la singularidad de curvatura. Asimismo, una vez que las partículas y fotones atraviesan el horizonte de eventos ya no pueden volver a acceder al resto de universo. Es decir, el horizonte de eventos aísla a la singularidad del espacio fuera de esta hipersuperficie. Un objeto que produce un espacio-tiempo con estas características es conocido como agujero negro.

Por otro lado, durante varias décadas se ha especulado con la existencia de singularidades que carecen de horizonte de eventos. Un objeto que produce un espacio-tiempo con una singularidad pero sin un horizonte de eventos, es conocido como singularidad desnuda. Ante este panorama, en 1969 Roger Penrose propone la hipótesis de la censura cósmica. Esta hipótesis afirma que no pueden existir singularidades desnudas en la naturaleza. Sin embargo, a la fecha no existe una demostración de esta hipótesis. Es más, algunos estudios han señalado que esta hipótesis puede ser incorrecta y que las singularidades desnudas pueden surgir como producto de un colapso gravitacional [3].

La solución de Schwarzschild es una buena aproximación al espacio-tiempo producido por los objetos en la naturaleza. Sin embargo, no todos los objetos en el universo son perfectamente esféricos; la Tierra por ejemplo es un esferoide oblato. En el artículo “Mass quadrupole as a source of naked singularities” [5] se propone una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío donde se generaliza el espacio-tiempo de Schwarzschild. Esta solución describe el espacio-tiempo generado por un objeto con momento cuadrupolar de masa distinto de cero. Es decir, un objeto con una geometría que se aleja un poco de la esférica. La deformación está determinada por el valor de un parámetro $q > -1$. Esta solución a diferencia de la de Schwarzschild, no representa un agujero negro, representa una singularidad desnuda. En realidad, en este espacio-tiempo existe más de una singularidad. Una de ellas se encuentra en el origen de coordenadas y otra en el radio de Schwarzschild (para valores específicos de q puede aparecer una tercera singularidad contenida entre estas dos). En ese mismo artículo se define además una función de masa efectiva, la cual adquiere valores negativos en ciertas regiones de su dominio. Esto puede ser interpretado como un fenómeno de repulsión gravitacional.

En el presente trabajo se analizan las geodésicas temporaloides y nulas, en el plano ecuatorial, de este espacio-tiempo. Para hacerlo, se aprovecha el hecho de que existen dos cantidades conservadas: la energía y el momento angular. Para estudiar el movimiento de fotones y partículas prueba, se analizan dos propuestas de potencial efectivo. Por otro lado, se halla otra forma de definir la masa efectiva, haciendo una analogía con la solución de Schwarzschild. Esta función de masa efectiva es diferente a la que se propone en [5]. Cabe destacar que no existe una definición precisa ni invariante de masa efectiva, por lo que puede existir otras propuestas distintas de masa efectiva.

En el capítulo 2 se encuentran las ecuaciones geodésicas, verificando que al tomar el límite $q \rightarrow 0$ se recuperan los resultados de Schwarzschild. En este capítulo también, se estudian las órbitas circulares de fotones y partículas mediante el análisis del potencial efectivo. Para fotones se hallaron dos radios críticos (para cualquiera de las dos elecciones de potencial efectivo Φ_{fot}^2 y $|\Phi_{fot}|$) $r_1 = 2M$ y $r_0 = (2q + 3)M$. El primero coincide con la singularidad más externa y el segundo es el análogo a la órbita circular para fotones $r = 3M$ en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Para la primera elección de potencial efectivo (Φ_{fot}^2), se encontró que r_1 es un radio crítico

únicamente para valores de q mayores a cero. Mientras que r_0 es un radio crítico para cualquier valor de q . Respecto a la estabilidad de estas órbitas, se determinó que r_0 es una órbita inestable y r_1 es un punto de inflexión del potencial efectivo si $q > 1/2$. Otra observación importante es que para $q = 1/2$ el potencial efectivo de fotones se vuelve idéntico al de Schwarzschild (para ambas definiciones de potencial efectivo).

Mediante la segunda elección de potencial efectivo para fotones ($|\Phi_{\text{fot}}|$) se encontró que r_1 es un radio crítico para valores de $q > 1/2$. Asimismo, se determinó que r_0 es un punto crítico para cualquier valor de q , correspondiendo a una órbita circular inestable. Por otro lado, r_1 nuevamente es un punto de inflexión, pero para valores de $q > 3/2$. Para el caso de partículas prueba, el análisis con cualquier elección de potencial efectivo arroja los mismos resultados. En el desarrollo de este análisis, nos percatamos que los radios de las órbitas circulares tienen como cota inferior el radio $r_0 = (2q+3)M$. Además se halló el valor de la última órbita estable, siendo este $r = M(3q+4) \pm M\sqrt{5q^2+10q+4}$. Por otro lado se encontró que $r = \frac{5+3\sqrt{5}}{5}M \approx 2.34M$, es el radio más pequeño del conjunto de los radios de la última órbita estable (para cualquier valor de q).

En el capítulo 3 también se hace un análisis comparativo entre las órbitas circulares del espacio-tiempo de Schwarzschild y la singularidad desnuda. En este análisis se obtuvo que si $q < 0$ las órbitas circulares tanto de partículas prueba como de fotones son más internas que las que se hubieran encontrado con Schwarzschild. Por el contrario si $q > 0$, las órbitas circulares de la singularidad desnuda son más externas que las de Schwarzschild.

Finalmente, en el capítulo 4 se hace un análisis perturbativo para encontrar la trayectoria que seguirían las partículas prueba vistas por observadores en infinito. Este análisis se realiza para valores de q en el intervalo $(-1, 0)$ y para partículas que poseen una baja energía $0 < \tilde{E} < 1/\sqrt{3}$ pero con momento angular $\tilde{\ell}^2 > 3M^2(q(3E^2-1)+2E^2)$. Se encontró que, con estas restricciones, las trayectorias de partículas muy alejadas de la singularidad son cualitativamente idénticas a las de Schwarzschild.

Capítulo 2

Singularidades Desnudas y Agujeros Negros

2.1. Las Singularidades en la Teoría de la Relatividad General

La teoría de la Relatividad General fue desarrollada por Albert Einstein a principios del siglo XX. En octubre de 1915, propuso sus primeras ecuaciones de campo que en notación de componentes se expresan como

$$R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu},$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento.

Después de haberlas publicado, Einstein se percató que estas ecuaciones eran inconsistentes con la conservación de energía momento, la cual se puede expresar de manera tensorial como $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$. Fue entonces que se dio a la tarea de hallar unas nuevas ecuaciones de campo que fueran compatibles con la conservación de energía-momento.

En noviembre del mismo año corrigió este error y publicó las ecuaciones de campo que hoy llevan su nombre. Estas ecuaciones son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \tag{2-1}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, R es el escalar de curvatura y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento.¹

Debido a que (2-1) representa un sistema muy complejo de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales, Einstein supuso que sus ecuaciones eran prácticamente irresolubles y se dedicó a buscar una solución aproximada. La solución aproximada que halló es una métrica que describe un espacio-tiempo esféricamente simétrico y estático, generado por la presencia de un objeto de masa M . El elemento de línea de esta solución aproximada es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2. \quad (2-2)$$

A partir de la expresión anterior, surge de manera natural una pregunta ¿Qué pasa con el espacio-tiempo cuando $r = 0$ o $r = 2M$?. Pareciera que existe un problema en esta región de espacio-tiempo, más adelante aclararemos este punto.

Podríamos pensar que se trata de un problema particular de la métrica (2-2) por ser esta una solución aproximada. Por lo que es válido suponer que el problema con estas hipersuperficies no regulares debe desaparecer al encontrar una solución exacta.

Sin embargo, un año después de que Einstein publicó las ecuaciones de campo, Karl Schwarzschild, un físico y astrónomo alemán las resuelve de manera exacta para un caso particular: un espacio-tiempo esféricamente simétrico, estático, en el vacío generado por la presencia de un objeto esférico.

El elemento de línea que representa el espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas esféricas es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2, \quad (2-3)$$

donde, nuevamente se presenta un problema en $r = 2M$ y $r = 0$, tal como sucedía en la solución aproximada derivada por Einstein.

El problema de puntos no regulares o singulares en un campo no era nuevo en la Física. Tomemos el ejemplo de una partícula cargada cuyo campo eléctrico es $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r$, donde el campo tiende a infinito cuando r tiende a cero. Sin embargo, en el caso de la Relatividad

¹Cabe mencionar que hemos optado por usar unidades geometrizadas, es decir la constante de gravitación universal G y el valor c de la velocidad de la luz las hemos igualado a 1.

General nos estamos enfrentando a una dificultad muy distinta ya que es el espacio-tiempo en sí mismo que es singular en una región.

David Hilbert fue uno de los primeros en proponer una definición general para lo que él mismo llamaría un espacio-tiempo regular o no singular. La propuesta de Hilbert es que, una métrica $g_{\mu\nu}$ es regular (o no singular) en un punto, si es posible hallar mediante una transformación uno a uno, un nuevo sistema de coordenadas, en el cual las correspondientes funciones coordenadas $\bar{g}_{\mu\nu}$ son regulares en el punto en cuestión, donde regular significa que $\bar{g}_{\mu\nu}$ son funciones continuas e infinitamente diferenciables en el punto y en una vecindad de éste.[2]

Bajo esta definición tanto $r = 0$ como $r = 2M$ tienen el mismo derecho de ser llamados puntos singulares. Sin embargo, ahora sabemos que la naturaleza de la singularidad en $r = 0$ y $r = 2M$, es distinta una de la otra. Mientras que la primera es una singularidad de curvatura, la segunda es simplemente una singularidad de coordenada; es decir, la aparente singularidad en $r = 2M$ se debe a una mala elección de cartas para cubrir a la variedad en la región cercana a $r = 2M$. Esto lo podemos hacer más claro haciendo un cambio de coordenadas apropiado

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right) &= X^2 - T^2, \\ \frac{t}{2M} &= \ln\left(\frac{T + X}{X - T}\right). \end{aligned} \quad (2-4)$$

Obteniendo las componentes g_{tt} y g_{rr} en el sistema coordenado definido con anterioridad, tenemos

$$\bar{g}_{XX} = -\bar{g}_{TT} = 32M^3 \exp(-r/2M) \quad (2-5)$$

De la expresión anterior vemos que la métrica tiene un comportamiento regular en $r = 2M$, pero con este cambio de coordenadas no es posible satisfacer la definición que propuso Hilbert, ya que esta transformación de coordenadas no es suave ni invertible en $r = 2M$. En realidad, la definición de Hilbert es demasiado estricta y no es necesario que los cambios de coordenadas cumplan tantas condiciones.

Esta idea tuvo que esperar varias décadas hasta que en 1960 Kruskal y Szekeres propusieran este cambio de coordenadas.

La primera demostración de que $r = 2M$ no es una singularidad del espacio-tiempo de Schwarzschild, la dio Georges Laimatre en 1932 [2]. Mostrando que, para el caso de Schwarzschild, al construir un escalar a partir del tensor de curvatura de Riemann podemos diferenciar una singularidad de curvatura de una singularidad de coordenadas. Este escalar se define de la siguiente manera

$$K = R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (2-6)$$

Se puede verificar que para el caso de Schwarzschild, este escalar tiende a infinito cuando r tiende a cero. Mostrando que $r = 0$ es una singularidad de curvatura para este caso. Este escalar es conocido como el invariante de curvatura de Kretschmann. Para el caso específico de la métrica de Schwarzschild este escalar es $K = \frac{48M^2}{r^6}$. Se puede destacar que $K(r = 2M)$ tiene un valor bien definido, descartando la posibilidad de que $r = 2M$ sea una singularidad de curvatura.

A pesar de que $r = 2M$ no es una singularidad de curvatura en el espacio-tiempo de Schwarzschild, sí tiene una gran importancia. La cual radica en que la hipersuperficie definida por este radio se le conoce como horizonte de eventos (en el caso en que el objeto sea suficientemente denso como para estar contenido dentro del volumen definido por este radio). Un objeto con tales características es llamado agujero negro.

2.2. Agujeros Negros

La idea de los agujeros negros no era nueva. Desde 1700, tanto John Michell como Pierre Laplace especularon sobre la posibilidad de que existiera una estrella cuya velocidad de escape fuera mayor a la velocidad de la luz y por ende, ni siquiera un fotón pudiera escapar de ella [4]. Desde un punto de vista newtoniano de la conservación de la energía, la velocidad de escape² de una partícula en un estrella de masa M y radio R es

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (2-7)$$

²Esta ecuación se deduce a partir de igualar la energía cinética de la partícula $\frac{m}{2}v^2$ con la energía potencial $\frac{GMm}{R}$

Si esta velocidad de escape es cercana a la velocidad de la luz ($v \approx c$), el radio máximo que puede poseer la estrella para que la partícula no pueda escapar, debe ser aproximadamente

$$R \approx \frac{2GM}{c^2}. \quad (2-8)$$

Si tomamos unidades geometrizadas $G = 1 = c$, este resultado coincide con el radio del horizonte de eventos de Schwarzschild $r = 2M$. Que este resultado sea el mismo no es casual, ya que al estudiar las curvas geodésicas en el espacio-tiempo de Schwarzschild se observa que ni partículas ni fotones pueden escapar si estos han alcanzado el horizonte de eventos.

Entonces, una singularidad en el espacio-tiempo que es rodeada por un horizonte de eventos es un agujero negro. Este horizonte de eventos mantiene aislada a la singularidad del resto del universo.

Por lo tanto, es válido preguntarse si pueden existir singularidades que no estén rodeadas por un horizonte de eventos.

2.3. Singularidades Desnudas y la Hipótesis de la Censura Cósmica

En 1969 Roger Penrose formula por primera vez la hipótesis de la censura cósmica [2], la cual afirma que una singularidad no puede existir en la naturaleza sin estar rodeada por un horizonte de eventos. A un objeto que viole lo anterior se le suele llamar singularidad desnuda.

Un ejemplo de singularidad desnuda es considerar al espacio-tiempo de Schwarzschild generado por una masa M negativa. Naturalmente esto no tiene sentido físico.

Durante varias décadas se ha pensado que la hipótesis de la censura cósmica es correcta y aunque pueden existir soluciones que corresponden a singularidades desnudas, ninguna de ellas puede surgir de escenarios realistas.

A la fecha no existe una demostración o una formulación matemática rigurosa de la hipótesis de la censura cósmica dentro del marco de la teoría de la Relatividad General. Si la hipótesis de la censura cósmica fuera incorrecta y las singularidades resultantes, por ejemplo del colapso gravitacional de una estrella masiva, fueran visibles para observadores externos en el universo se abriría la posibilidad de observar e investigar regiones ultra densas del universo, donde los

efectos cuánticos comienzan a ser importantes.

Cabe destacar que la Relatividad General predice la existencia de singularidades en el colapso gravitacional de una estrella masiva, sin embargo no dice que esta singularidad deba estar cubierta o no por un horizonte de eventos.

Se esperaba que a medida que los físicos teóricos siguieran desarrollando la física de agujeros negros, una derivación de la hipótesis de la censura cósmica surgiría de las leyes básicas de la Física. Según los teoremas de singularidades, éstas son inevitables pero, estos principios no son aplicables al horizonte de eventos.

Para decidir la validez de la hipótesis de la censura cósmica es importante estudiar la dinámica del colapso gravitacional de estrellas masivas. En los últimos años, análisis detallados han mostrado importantes avances al decidir cuándo se forma un agujero negro y cuándo no. Asimismo, algunos de estos modelos sugieren que singularidades desnudas pueden surgir del colapso gravitacional en ciertas circunstancias realistas.

Entre los varios modelos de colapso gravitacional que han surgido en los últimos años han aparecido soluciones que representan diferentes tipos de violaciones a la hipótesis de la censura cósmica. En algunos modelos solamente una parte de la singularidad es visible para observadores en infinito, todo depende de la forma y distribución de materia que se está estudiando, así como la ecuación de estado que se emplea. Típicamente las singularidades desnudas se desarrollan en el centro geométrico del colapso y luego se propagan a otras regiones o quedan cubiertas a medida que el colapso continúa [3].

Existen algunas soluciones a las ecuaciones de Einstein que pueden representar singularidades desnudas, como la ya antes mencionada solución de Schwarzschild con masa negativa, la cual no parece ser una solución físicamente aceptable. Una de las soluciones más famosas que no requiere suponer la existencia de masas negativas, es la solución de Kerr. Sin embargo, a la fecha aún no es claro si esta singularidad desnuda puede formarse en un escenario realista.

Otra de las grandes discusiones alrededor del tema de las singularidades desnudas es si éstas violan causalidad. De manera informal, las violaciones de causalidad ocurren en aquellos espacios-tiempo en los que existen curvas temporaloides cerradas. Si un observador inercial se encuentra en una de estas curvas cerradas eventualmente regresará al mismo punto del espacio-tiempo donde comenzó su viaje y se encontrará a sí mismo. Uno de los ejemplos más comunes

es el caso del espacio-tiempo de Kerr.

En el espacio-tiempo de Kerr, existen curvas temporaloides cerradas dentro del horizonte de sucesos; por ello, un observador que atravesara el horizonte de sucesos podría acceder a una de estas curvas. Sin embargo nunca podría regresar a la región de universo fuera del horizonte de eventos, evitando de cierta manera, una violación de causalidad. Si consideramos el caso en el cual el espacio-tiempo de Kerr es una singularidad desnuda, esto permitiría a un observador en una curva temporaloides cerrada acceder al resto del universo. Por casos como éste es que se cree que las singularidades desnudas pueden estar ligadas a problemas de causalidad; sin embargo, existen contraejemplos como el espacio-tiempo de Lemaitre-Tolman-Bondi que admiten singularidades desnudas y no poseen curvas temporaloides cerradas [3]. Por lo tanto no parece existir un nexo entre las singularidades desnudas y violaciones de causalidad y deben considerarse como fenómenos independientes. Esto no es algo inesperado, ya que a pesar de que los teoremas de singularidades de Penrose y Hawking muestran que las singularidades son inevitables, no dan pistas si las singularidades desnudas pueden estar ligadas o no a violaciones de causalidad.

Podemos clasificar en dos grandes grupos a las singularidades desnudas, las locales y las globales. Las primeras son aquellas en las cuales existen curvas ya sean temporaloides o nulas que lleguen a algún observador en el espacio-tiempo. Desde este punto de vista, los agujeros negros son singularidades desnudas locales ya que un observador que se encuentra dentro del horizonte de eventos puede “observar” a la singularidad, es decir hay curvas temporaloides o nulas que pueden alcanzarlo. Por otro lado, las globales son aquellas en las que existen curvas temporaloides o nulas que alcanzan a observadores en infinito, es decir carecen de horizonte de eventos.

Si las singularidades desnudas existen en la naturaleza, es importante preguntarse si es posible hallar evidencias observacionales de su existencia, o si es posible distinguirlos de agujeros negros. Para este punto hablaremos de un caso particular; el espacio-tiempo de Kerr.

La métrica de Kerr es una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío. Este espacio-tiempo es generado por la presencia de un objeto de masa M que posee cierto momento angular

J . Cabe destacar que a diferencia del espacio-tiempo de Schwarzschild, este espacio-tiempo no es isotrópico ya que el eje de rotación del objeto define una dirección especial.

Definiendo el parámetro $a = \frac{J}{M}$, el cual representa el momento angular específico, podemos escribir la métrica de Kerr como

$$ds^2 = \frac{r^2 - 2Mr + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} (dt - a \operatorname{sen}^2(\theta) d\phi)^2 - \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 - \left(\frac{r^2 + a \cos^2(\theta)}{r^2 - 2Mr + a^2} \right) dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2(\theta)) d\theta^2. \quad (2-9)$$

Si se calcula el invariante de curvatura de Kretschmann para esta espacio-tiempo, se obtiene que una singularidad de curvatura se encuentra en la región definida por la ecuación

$$r^2 + a^2 \cos^2(\theta) = 0. \quad (2-10)$$

La solución a esta ecuación representa el lugar geométrico donde se encuentra la singularidad. Esta solución es $r = 0$ y $\theta = \pi/2$. A pesar de su apariencia esta ecuación no representa un punto. Esto es claro si se conoce cómo se relacionan las coordenadas cartesianas con el sistema coordenado (r, θ, ϕ) en el cual está escrita la métrica (2-9).

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi), \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \\ z &= r \cos(\theta). \end{aligned}$$

Entonces la singularidad $r = 0$, $\theta = \pi/2$, representa en realidad un anillo de radio a situado en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$. Esta singularidad está cubierta por un horizonte de eventos definido por el radio $r = M + \sqrt{M^2 - a^2}$.

El valor del radio que define el horizonte de eventos es válido únicamente cuando $a^2 < M^2$. Esto significa que si el objeto tiene suficiente momento angular (es decir si $J > M^2$) entonces, el horizonte de eventos desaparece y la métrica de Kerr en este caso estaría representando a una singularidad desnuda.

Entonces, es el valor del parámetro a que determina el límite entre un agujero negro de Kerr y una singularidad desnuda.

Para el caso de la singularidad desnuda del espacio-tiempo de Kerr y otras soluciones axi-simétricas de las ecuaciones de Einstein en el vacío, aún no es claro si pueden originarse de colapsos gravitacionales.

Se ha especulado que una de las maneras en que singularidades desnudas de Kerr podrían existir en la naturaleza, es que un disco de acreción le imprimiera suficiente momento angular a un agujero negro de Kerr. Esta transferencia de momento angular haría que el objeto poseyera un momento angular específico a mayor a M , haciendo desaparecer el horizonte de eventos. Sin embargo, modelos numéricos han probado que en tal situación la configuración de agujero negro es mucho más estable que la de una singularidad desnuda[3].

Una problema importante para la medición del momento angular de objetos astrofísicos es que deben ser suficientemente precisas para poder llegar a conclusiones más definitivas. Afortunadamente algunos proyectos como el radiotelescopio SKA (Square-Kilometer Array) [3] ofrecen la posibilidad de realizar mediciones de alta precisión. Los astrónomos de estos proyectos afirman que la precisión de estas mediciones podrían ser suficientemente precisas para responder si la hipótesis de la censura cósmica es correcta o no.

A pesar de que no es claro si la singularidad desnuda de Kerr puede surgir de un colapso gravitacional, algunos estudios han indicado que para colapsos gravitacionales con un grado de inhomogeneidad alto pueden surgir otras singularidades desnudas.

Para las singularidades desnudas que nacen a partir de un colapso gravitacional y dejan un rastro observacional de su formación, no se sabe si estos rastros pueden ser distinguidos de los que deja un agujero negro.

Por otro lado, para singularidades desnudas como la de Kerr, existen tres propuestas para realizar observaciones que pueden distinguirlas de agujeros negros. La primera se basa en el estudio de sus discos de acreción. Se ha demostrado que las propiedades de los discos de acreción de partículas que caen en una singularidad desnuda pueden ser muy diferentes de las de un agujero negro de la misma masa[10]. Otra forma de diferenciarlos a partir de sus discos de acreción, es la presencia de un flujo de partículas que se alejan de la singularidad[11] [12]. El origen de este flujo es que las singularidades desnudas presentan zonas donde existen fuerzas repulsivas

que pueden ser interpretados como repulsión gravitacional. La segunda forma es mediante el estudio de lentes gravitacionales producidos por estos objetos [3]. En el caso de una singularidad desnuda de Kerr, sus propiedades de lente gravitacional son diferentes a las que produciría un agujero negro. La tercera posibilidad es distinguirlos a partir de colisiones de partículas en la cercanía de la singularidad. Nuevamente, debido a posibles efectos de repulsión generados por la singularidad desnuda, las partículas que caen a la singularidad podrían eventualmente desviarse y chocar con partículas que van cayendo. Este tipo de colisión sería similar al que se observa en un acelerador de partículas.[3]

La singularidad desnuda de Kerr no es la única posibilidad para ser la contraparte de un agujero negro. Además pueden considerarse singularidades desnudas con momentos multipolares.

2.4. Singularidad Desnuda con Momento Cuadrupolar

Realizar expansiones de una cierta función es muy útil y socorrido en la física, existen diversas formas de expandir en serie a una función, una de ellas es la expansión multipolar.

Cuando se realiza un expansión en serie, usualmente se tiene en mente truncar la serie hasta el término que permita tener la precisión deseada, ya que son los primeros términos los que mejor aproximan el comportamiento de la función. A cada coeficiente de esta expansión se le conoce como momento multipolar. Al de orden cero se le llama monopolo, al de orden dos dipolo, al de orden tres cuadrupolo, etc.

Un ejemplo muy conocido de expansión multipolar es la que se utiliza al encontrar el potencial eléctrico generado por una distribución de carga que se encuentra a distancias mucho mayores que el tamaño de la distribución

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (2-11)$$

donde q es la carga total, \vec{d} es el momento dipolar y \vec{r} es el vector que va del origen de coordenadas al punto de observación. La carga total y momento dipolar estan determinados por,

$$q = \sum q_j,$$

$$\vec{d} = \sum q_j \vec{r}_j,$$

donde \vec{r}_j es el vector que va del origen de coordenadas a las partículas que forman la distribución y q_j es la carga de la j -ésima partícula.

Si hacemos una traslación del origen \vec{R} , el momento dipolar se modifica de la siguiente manera

$$\vec{D} = \sum q_j (\vec{r}_j - \vec{R}) = \vec{d} - q\vec{R}. \quad (2-12)$$

Si la carga total es distinta de cero, entonces es posible anular el momento dipolar haciendo que el origen coincida con el centro de carga, es decir escogiendo \vec{R} de la siguiente manera.

$$\vec{R} = \frac{\sum q_j \vec{r}_j}{\sum q_j} = \frac{\vec{d}}{q}, \quad (2-13)$$

Existen muchos tipos de expansiones multipolares ya que estas dependen de las simetrías del sistema. Por ejemplo, para sistemas con simetría esférica se suelen usar armónicos esféricos y para sistemas con simetría axial es común usar polinomios de Legendre. Las funciones que forman la expansión multipolar forman una base ortonormal con la que es posible expresar una función cualquiera como combinación lineal de los elementos de la base.

Otro ejemplo de expansión multipolar se da en el caso de la mecánica clásica de Newton. Para este caso dada una distribución de materia, el potencial gravitacional es encontrado resolviendo la ecuación de Poisson y la ecuación de Laplace. La solución a estas ecuaciones se escribe como una serie infinita la cual corresponde a una expansión multipolar. En el caso del potencial gravitacional Newtoniano, el momento dipolar es siempre cero debido a que la masa a diferencia de la carga siempre tiene valores positivos, por lo tanto haciendo coincidir el origen de coordenadas con el centro de masa se anula el momento dipolar.

El equivalente relativista al potencial $\frac{-GM}{r}$ es la métrica de Schwarzschild, la cual es una buena aproximación al espacio-tiempo generado por objetos astrofísicos con simetría esférica. A pesar de ello, en el universo los objetos no siempre tienen una forma esféricamente perfecta.

Por ejemplo, la Tierra es aproximadamente un esferoide oblato, es decir, el eje polar tiene un tamaño menor al diámetro ecuatorial. En realidad, la Tierra poco se aleja de ser una esfera perfecta, el radio ecuatorial a es más grande que el radio polar c por una distancia de 21.4 km y su excentricidad es aproximadamente de $\epsilon = \frac{a-c}{a} \approx \frac{1}{297}$ [1].

Por esta razón, el potencial gravitacional Newtoniano de la Tierra no es exactamente $\frac{-GM}{r}$. La corrección más importante a este potencial es el término de cuadrupolo, que para el caso del potencial gravitacional newtoniano es

$$\phi_2(\vec{r}) = -\frac{GQ}{4r^3} (3 \cos^2(\theta) - 1). \quad (2-14)$$

Considerando la densidad terrestre constante podríamos calcular el valor de Q mediante ³

$$Q = -\frac{2}{5}M(a^2 - c^2) \approx -\frac{4}{5}Ma^2\epsilon. \quad (2-15)$$

Debido a que la Tierra tiene forma oblata, el momento cuadrupolar terrestre Q posee un valor negativo.

Por lo tanto, el potencial gravitacional newtoniano para la Tierra, o para cualquier masa elipsoidal, hasta el término cuadrupolar está dado por

$$\phi(\vec{r}) \approx -\frac{GM}{r} - \frac{GQ}{4r^3} (3 \cos^2(\theta) - 1). \quad (2-16)$$

En el caso de Relatividad General, la solución más sencilla que pertenece a la clase de métricas axisimétricas y estáticas es la de Schwarzschild, la cual corresponde al primer término de una expansión multipolar; es decir, el monopolo de masa. El siguiente caso más sencillo es el que representa la métrica producida por un cuadrupolo de masa y que pertenece a esta misma clase de soluciones axisimétricas y estáticas.

Los espacios-tiempo estáticos y axisimétricos están representados de manera general por el elemento de línea de Weyl

$$dS^2 = e^{2\psi} dt^2 - e^{-2\psi} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (2-17)$$

³Para realizar la aproximación se ha usado el hecho que $c = a(1 - \epsilon)$ y se han despreciados los términos cuadráticos de la excentricidad

donde las funciones ψ y γ son funciones de las coordenadas ρ y z .

Sustituyendo este elemento de línea en las ecuaciones de Einstein en el vacío, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales ⁴

$$\begin{aligned}\psi_{\rho\rho} + \psi_{zz} + \frac{\psi_{\rho}}{\rho} &= 0, \\ \gamma_{\rho\rho} &= \rho(\psi_{\rho}^2 - \psi_z^2), \\ \gamma_z &= 2\rho\psi_{\rho}\psi_z.\end{aligned}$$

En el artículo “Mass quadrupole as a source of Naked Singularities” [5] se presenta una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío, la cual permite estudiar singularidades desnudas con momentos cuadrupolares. Esta métrica representa la generalización más simple de la métrica de Schwarzschild que contiene una singularidad desnuda.

La solución derivada en dicho artículo tiene una particular característica que la diferencia de algunas soluciones con momentos cuadrupolares. Esta diferencia es que la expresión de la métrica resulta ser bastante compacta y muy similar a la métrica de Schwarzschild. Esta métrica tiene como elemento de línea en coordenadas esféricas la siguiente expresión

$$\begin{aligned}ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1+q} dt^2 \\ &- \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-q} \left\{ \left(1 + \frac{M^2 \sin^2 \theta}{r^2 - 2Mr}\right)^{-q(2+q)} \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\theta^2\right) + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\},\end{aligned}\quad (2-18)$$

donde q y M determinan la forma de la distribución de masa. Para conocer la relación entre los parámetros q , M y la masa del objeto, es necesario conocer los momentos multipolares de masa M_n , $n \in \{0, 1, \dots\}$ los cuales vienen determinados por las siguientes expresiones

$$M_0 = (1 + q)M, \quad (2-19)$$

$$M_2 = -\frac{M^3}{3}q(1 + q)(2 + q). \quad (2-20)$$

⁴En este caso el subíndice ρ y z representa la derivada parcial respecto a ρ y z

Los momentos multipolares de mayor orden pueden ser reescritos en términos del monopolo de masa M_0 y el cuadrupolo de masa M_2 . El cuadrupolo de masa M_2 es el parámetro que mide la deformación, el cual es positivo para un esferoide prolata y negativo para uno oblata ⁵.

Otra observación importante es que, si hacemos tender q a cero, la métrica anterior se reduce a

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2. \quad (2-21)$$

Entonces, la métrica (2-18) contiene a la métrica de Schwarzschild como caso particular. Donde podemos además apreciar que en el caso límite $q \rightarrow 0$, M representa el monopolo de masa. Los parámetros q y M_2 nos dan información de cuan alejada se encuentra la distribución de masa de la forma esférica, es decir, juegan el papel de ϵ y Q para el caso del potencial gravitacional newtoniano (2-16).

Este espacio-tiempo tiene la propiedad de ser asintóticamente plano para cualesquiera valores de los parámetros M y q . Esto quiere decir que, para valores suficientemente grandes de r , la curvatura disminuye y la métrica se aproxima a la de Minkowski. Por otro lado, tomando el caso límite, cuando el parámetro M tiende a cero, obtenemos nuevamente la métrica de Minkowski. Esto resulta natural ya que, de las relaciones (2-19) y (2-20) podemos ver que si $M \rightarrow 0$ los momentos multipolares de masa también tienden a cero, lo cual representa el espacio-tiempo en ausencia de materia.

Otra característica de este espacio-tiempo es que, además de ser axisimétrico, tiene una simetría adicional sobre el plano ecuatorial, lo cual hace que todos los momentos multipolares impares se anulen.

Algo importante a destacar es que la relación (2-19) obliga a que el parámetro q se encuentre en el intervalo $[-1, \infty)$, de no ser así se estarían considerando masas negativas.

Al observar el elemento de línea (2-18), nos percatamos que al igual que en el caso de Schwarzschild hay un problema en $r = 0$ y en $r = 2M$. Para aclarar este punto y conocer la naturaleza de este espacio-tiempo, es necesario investigar dónde existen singularidades y con ello determinar si se trata de un agujero negro o de una singularidad desnuda. Para hacer eso basta con calcular el invariante de curvatura de Kretschmann (2-6)

⁵Esto significa que $q > 0$ para un esferoide oblato y $q < 0$ para un prolato.

$$K = \frac{16M^2(1+q)^2(r^2 - 2Mr + M^2 \text{sen}^2(\theta))^{2(2q+q^2)-1}}{r^{4(2+2q+q^2)}(1 - 2M/r)^{2(q^2+q+1)}} L(r, \theta), \quad (2-22)$$

donde $L(r, \theta)$ está definido por la siguiente expresión

$$L(r, \theta) = 3(r - 2M - qM)^2(r^2 - 2Mr + M^2 \text{sen}^2(\theta)) \\ + q(2+q)M^2 \text{sen}^2(\theta) [q(2+q)M^2 + 3(r - M)(r - 2M - qM)]. \quad (2-23)$$

A partir de esta expresión se puede mostrar que existen, para cualquier valor de q , dos singularidades, una en $r = 0$, tal como en el caso de Schwarzschild, y otra en la región definida por el radio $r = 2M$. Para la región fuera de este radio no existen más singularidades o un horizonte de eventos. Por lo tanto, la métrica (2-18) representa una singularidad desnuda.

Por otro lado, para valores de q en el intervalo $(-1, -1 + \sqrt{\frac{3}{2}}) \setminus \{0\}$ dos singularidades adicionales (internas a $2M$) aparecen. Éstas se encuentran dentro de la región comprendida por la singularidad más externa $r = 2M$.

Estas dos hipersuperficies singulares están definidas por la ecuación

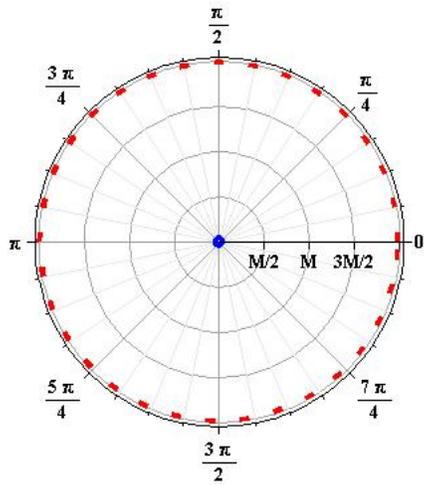
$$r_{\pm} = M(1 \pm \cos(\theta)). \quad (2-24)$$

Tomando el límite cuando q tiende a cero en K , obtenemos $\frac{48M^2}{r^6}$. Por lo tanto para $q = 0$, la única singularidad que permanece está en el origen y se encuentra rodeada por un horizonte de eventos en $r = 2M_0$, recuperando así la solución de agujero negro de Schwarzschild. Este análisis lo ilustramos en la figura 2-1

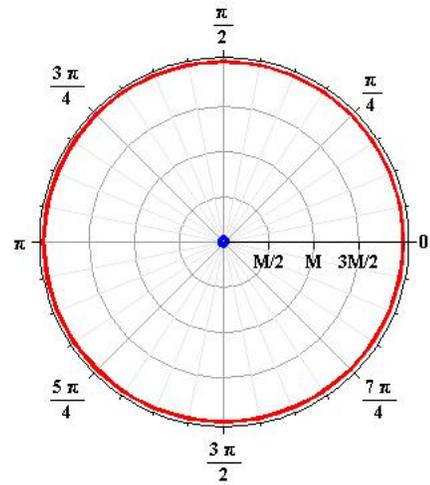
2.5. Masa Efectiva

Se ha mencionado en las secciones anteriores que a raíz del estudio del movimiento de partículas en espacios-tiempo generados por singularidades desnudas se ha especulado sobre la presencia de efectos, que podrían considerarse como gravedad repulsiva. Sin embargo, no existe una definición formal de repulsión gravitacional.

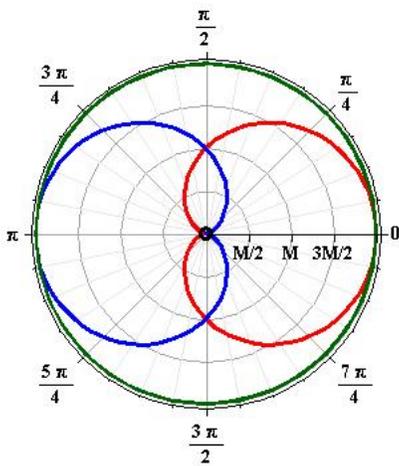
Por otro lado, debido a la sencillez de algunas métricas, como la de Schwarzschild, el movi-



Agujero negro de Schwarzschild



Singularidad desnuda (a)



Singularidad desnuda (b)

Figura 2-1: En la primera gráfica se ilustra la estructura del agujero negro de Schwarzschild ($q = 0$). Esto es, una singularidad en el origen rodeada de un horizonte de eventos, el cual está representado por una línea punteada. En la gráfica (a) se muestra la estructura de la singularidad desnuda para un valor de $q \neq 0$. Puede apreciarse que tanto en $r = 2M$ como en $r = 0$ se encuentra una singularidad. En la gráfica (b) se puede observar que, cuando q está dentro del intervalo $(-1, -1 + \sqrt{\frac{3}{2}}) \setminus \{0\}$, aparecen otras dos singularidades contenidas dentro de la región definida por el radio $r = 2M$, el cual representa la singularidad más externa.

miento geodésico de partículas puede ser analizado por medio de un potencial efectivo. Además de un potencial efectivo, puede hallarse también una masa efectiva. Desafortunadamente no existe una forma única de elegir el potencial efectivo ni la masa efectiva.

Es posible hacer una analogía entre el potencial efectivo y el potencial gravitacional Newtoniano y a partir de ello encontrar la masa efectiva. Por ejemplo en la componente g_{tt} de la métrica del campo débil, podemos hacer la siguiente identificación,

$$g_{tt} = 1 - 2V_N = 1 - 2\frac{M_{ef}(r)}{r}. \quad (2-25)$$

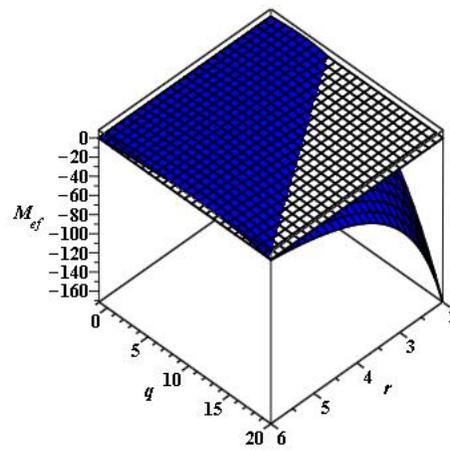
Es decir, identificamos el potencial gravitacional Newtoniano de la componente g_{tt} . Por lo que, en lugar de sustituir $V_N = \frac{M_0}{r}$, suponemos que la masa puede ser sustituida por una función $M_{ef}(r)$ que llamaremos masa efectiva.

Ahora, consideraremos un potencial más general, en este caso dado por $V_N = \frac{M_0}{r} + \frac{M_2(1-3\cos^2(\theta))}{4r^3}$. Este es el potencial gravitacional newtoniano generado por la presencia de un objeto con masa M_0 y momento cuadrupolar M_2 . Haciendo esta identificación y sustituyendo los momentos de masa (2-19) y (2-20) encontramos, para el caso de la métrica de la singularidad desnuda, que la masa efectiva está descrita por la siguiente función

$$M_{ef} = M(1 + q) \left[1 - \frac{M^2}{12r^2} q(2 + q)(1 - 3\cos^2(\theta)) \right] \quad (2-26)$$

Si graficamos esta función, se observa que para ciertas regiones en el plano $r-q$ los valores de la masa efectiva se vuelven negativos. Esto puede ser interpretado de manera intuitiva diciendo que para ciertos valores del parámetro q y a cierta distancia radial, la singularidad desnuda genera una repulsión gravitacional sobre las partículas que se encuentren en dicha región.

De hecho, es posible que en ciertas regiones muy específicas, la atracción gravitacional pueda ser igualada por esta repulsión gravitacional y que por ende, las partículas se hallen en reposo en tales zonas.



Masa efectiva en el plano ecuatorial

Figura 2-2: Se muestra la gráfica de la masa efectiva (2-26) para el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, en esta gráfica se puede observa que existen regiones en el plano $r - q$ donde la masa efectiva adquiere valores negarivos, en esta gráfica se ha tomado $M = 1$, así como se ha considerado $r > 2$ y $q > -1$

Capítulo 3

Movimiento Geodésico en el Plano Ecuatorial

De manera intuitiva, una geodésica es una curva de aceleración cero. Esta curva es de cierta forma, una generalización de una línea recta en un espacio Euclideo.

De manera un poco más formal, una curva $\gamma : I \rightarrow M$, donde $I = (a, b) \in R$ y M es una variedad de dimensión n , es una geodésica si la derivada covariante del vector tangente a esta curva es cero. Es por esta razón que es válido pensar a una geodésica como una curva de aceleración cero. Bajo esta definición, si la curva γ tiene como componentes $\gamma(\sigma) = (x^1(\sigma), x^2(\sigma), \dots, x^n(\sigma))$ en cierto sistema de coordenadas, entonces para que γ sea geodésica sus componentes deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0, \quad (3-1)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ son los coeficientes de la conexión o símbolos de Christoffel. Estos coeficientes pueden ser hallados a partir la métrica mediante la siguiente identidad

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} [\partial_\nu g_{\kappa\mu} + \partial_\mu g_{\kappa\nu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}]. \quad (3-2)$$

Por otro lado, siguiendo la idea intuitiva de que una geodésica es una generalización de una línea recta, podríamos definir a una geodésica como aquella curva en la cual, el vector tangente

a la curva apunta en la misma dirección cuando es transportado paralelamente a lo largo de la curva. Es decir si T^μ son las componentes del vector tangente a la curva geodésica γ , entonces se debe satisfacer la siguiente ecuación

$$T^\mu \nabla_\mu T^\nu = \alpha T^\nu, \quad (3-3)$$

donde α es una función definida sobre la curva γ . Sin embargo, haciendo una reparametrización adecuada de la curva γ , es posible hacer que las componentes del vector tangente satisfagan [7]

$$T^\mu \nabla_\mu T^\nu = 0. \quad (3-4)$$

Si ahora consideramos un sistema de coordenadas, $\gamma(\sigma) = (x^1(\sigma), \dots, x^n(\sigma))$, el vector tangente tiene como expresión $T^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}$. Sustituyendo esto, la ecuación de las geodésicas queda reescrita como en (3-1).

A los parámetros que hacen que la ecuación (3-3) se transforme en la ecuación (3-4) se les llama parámetros afines. Estos poseen la siguiente propiedad: si σ es un parámetro afín entonces ρ , con $\rho = A\sigma + B$ donde A y B son constantes, también es un parámetro afín.

Debido a que las curvas geodésicas poseen vectores tangentes de longitud fija, una buena elección de parámetro es la longitud de arco

$$S(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left\| \frac{d\gamma}{d\sigma} \right\| d\sigma = K(\sigma - \sigma_0) \quad (3-5)$$

Si hacemos que la constante K sea uno, se dice que se está trabajando con geodésicas normalizadas.

Para el caso de relatividad general, es el tiempo propio el parámetro afín que se utiliza para parametrizar las curvas geodésicas que siguen las partículas. Mientras que en el caso de fotones es cualquier otro parámetro afín σ el que parametriza las geodésicas.

3.1. Geodésicas y potencial efectivo

Usando la ecuación (3-2) y la métrica (2-18) es posible hallar las ecuaciones de las geodésicas del espacio-tiempo generado por una singularidad desnuda con momento cuadrupolar. Sin embargo, este procedimiento no siempre es el más económico en lo que respecta a los cálculos. Una manera en la que muchas veces resulta más eficiente hallar las ecuaciones de las geodésicas consiste en tomar a la métrica como Lagrangiano y obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Tomando como Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1+q} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-q} \left[\left(1 + \frac{M^2 \sin^2 \theta}{r^2 - 2mr}\right)^{-q(2+q)} \left(\frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right]$$

donde el punto representa la derivada respecto al parámetro afín, hallamos que la ecuación para la coordenada t es

$$\ddot{t} + 2(1+q) \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r} \dot{t} = 0. \quad (3-6)$$

De esta última expresión identificamos uno de los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{rt}^t = (1+q) \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (3-7)$$

Por medio del mismo método, hallamos que la ecuación para la coordenada azimutal ϕ es

$$\ddot{\phi} + 2 \left(\frac{1}{r} - \frac{qM}{r-2M} \right) \dot{r} \dot{\phi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\phi} = 0. \quad (3-8)$$

Nuevamente identificamos dos de los símbolos de Christoffel que se encuentran en esta ecuación

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \left(\frac{1}{r} - \frac{qM}{r-2M} \right), \quad (3-9)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot \theta. \quad (3-10)$$

Procediendo de la misma manera, de la ecuación para la coordenada angular θ se obtienen los siguientes símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = -q(2+q) \frac{M^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{(r^2 - 2Mr)} \left(1 + \frac{M^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 - 2Mr}\right)^{-1}, \quad (3-11)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = - \left(1 + \frac{M^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 - 2Mr}\right)^{q(2+q)} \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \quad (3-12)$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{r} - \frac{qM}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + q(q+2) \left(1 + \frac{M^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 - 2Mr}\right)^{-1} \frac{M^2 r \operatorname{sen}^2 \theta}{(r^2 - 2Mr)^2}, \quad (3-13)$$

$$\Gamma_{rr}^{\theta} = \frac{q(2+q)}{r^2} \left(1 + \frac{M^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 - 2Mr}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{M^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{(r^2 - 2Mr)}\right). \quad (3-14)$$

De la ecuación para la coordenada radial r se obtienen los siguientes símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{rr}^r = q(q+2) \frac{M^2 r \operatorname{sen}^2 \theta}{(r^2 - 2Mr)^2} \left(1 + \frac{M^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 - 2Mr}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{q(q+1)}{r^2}, \quad (3-15)$$

$$\Gamma_{r\theta}^r = -q(2+q) \frac{M^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{(r^2 - 2Mr)} \left(1 + \frac{M^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 - 2Mr}\right)^{-1}, \quad (3-16)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + qM - \frac{q(2+q)M^2 r^3 \operatorname{sen}^2 \theta}{(r^2 - 2Mr)^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{M^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 - 2Mr}\right)^{-1}, \quad (3-17)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{2q+1} \left(1 + \frac{M^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 - 2Mr}\right)^{q(2+q)} r \operatorname{sen}^2 \theta \left(Mq \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - 1\right), \quad (3-18)$$

$$\Gamma_{tt}^r = (1+q) \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{2q+1} \left(1 + \frac{M^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 - 2Mr}\right)^{q(2+q)}. \quad (3-19)$$

Es importante verificar qué pasa con estos símbolos de Christoffel cuando tomamos el límite $q \rightarrow 0$. Al hacer esto con cada uno de los 12 símbolos de Christoffel antes enliastados obtenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rt}^t &= \left(\frac{M}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot \theta, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\text{sen } \theta \cos \theta, \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{rr}^r &= -\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right), & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \text{sen}^2 \theta, \\
\Gamma_{tt}^r &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right).
\end{aligned}$$

Estos símbolos de Christoffel son los mismos que se obtienen para la métrica de Schwarzschild. Con esto verificamos que al tomar $q \rightarrow 0$ recuperamos las geodésicas del espacio-tiempo de Schwarzschild.

3.2. Potencial efectivo para partículas

Para estudiar el movimiento de partículas en el espacio-tiempo definido por la métrica (2-18), es necesario resolver las 4 ecuaciones geodésicas determinadas por los 12 símbolos de Christoffel hallados anteriormente. Estas ecuaciones son

$$\frac{d^2 t}{d\sigma^2} + 2\Gamma_{rt}^t \frac{dr}{d\sigma} \frac{dt}{d\sigma} = 0 \quad (3-20)$$

$$\frac{d^2 r}{d\sigma^2} + \Gamma_{rr}^r \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + 2\Gamma_{r\theta}^r \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\theta}{d\sigma} + \Gamma_{\theta\theta}^r \left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 + \Gamma_{\phi\phi}^r \left(\frac{d\phi}{d\sigma}\right)^2 + \Gamma_{tt}^r \left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 = 0 \quad (3-21)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\sigma^2} + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \left(\frac{d\phi}{d\sigma}\right)^2 + 2\Gamma_{r\theta}^\theta \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\theta}{d\sigma} + \Gamma_{rr}^\theta \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 = 0 \quad (3-22)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\sigma^2} + 2\Gamma_{r\phi}^\phi \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\phi}{d\sigma} + 2\Gamma_{\theta\phi}^\phi \frac{d\theta}{d\sigma} \frac{d\phi}{d\sigma} = 0 \quad (3-23)$$

Podemos simplificar el análisis del movimiento geodésico restringiendo el movimiento al plano ecuatorial, es decir fijar $\theta = \frac{\pi}{2}$, hacer esto es válido ya que $\theta = \frac{\pi}{2}$ es solución a la ecuación geodésica para la coordenada θ . Esto simplificaría algunos de los símbolos de Christoffel. Sin

embargo, tratar de hallar directamente una solución al sistema de ecuaciones antes mostrado sería muy complicado. Afortunadamente, de manera general las ecuaciones de las geodésicas pueden ser reescritas en términos del vector tangente de la siguiente manera

$$\frac{dT_\alpha}{d\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\kappa\lambda})T^\kappa T^\lambda. \quad (3-24)$$

En esta expresión podemos observar que, si la métrica no depende de alguna de las coordenadas, el término entre paréntesis es cero anulando alguno de los componentes covariantes del vector tangente. Por otro lado, recordando que el vector 4-momento es un vector paralelo al vector tangente, podemos reescribir la ecuación (3-24) en términos del 4-momento de la siguiente manera

$$m \frac{dp_\alpha}{d\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\kappa\lambda})p^\kappa p^\lambda, \quad (3-25)$$

donde m , es la masa en reposo de la partícula y p es su 4-momento.

Esto nos permite interpretar la ecuación (3-24), percatándonos que cuando la métrica no depende de la coordenada α -ésima, la componente correspondiente del 4-momento es constante. Esta constante representa una cantidad que es conservada en el movimiento de partículas.

Los componentes de la métrica (2-18) no dependen ni de la coordenada temporal t ni de la coordenada azimutal ϕ . Esto significa que hay dos cantidades conservadas¹: la energía y el momento angular. La componente temporal del 4-momento, está asociada a la energía y la componente ϕ al momento angular. Las componentes temporal y azimutal del vector 4-momento son

$$p_t = g_{\mu t} m \dot{x}^\mu = m \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1+q} \dot{t} = m \tilde{E} \quad (3-26)$$

$$p_\phi = g_{\mu\phi} m \dot{x}^\mu = -m \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-q} r^2 \dot{\phi} = -m \tilde{\ell} \quad (3-27)$$

donde m es la masa en reposo de la partícula, $\tilde{E} = E/m$ es la energía por unidad de masa y $\tilde{\ell} = \ell/m$ el momento angular por unidad de masa.

¹En general las simetrías de un sistema físico están asociadas con leyes de conservación. Este resultado general es llamado teorema de Noether

A partir de estas expresiones obtenemos que las ecuaciones para la coordenada temporal t y azimutal ϕ son

$$\dot{t} = \tilde{E} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-(1+q)}, \quad (3-28)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\tilde{\ell}}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^q. \quad (3-29)$$

Por otro lado, sabemos que las partículas siguen geodésicas temporaloides. Esto significa que la norma del vector velocidad es una constante positiva. La ecuación (3-5) muestra que el valor de esta constante depende de la parametrización. Si elegimos como parámetro el tiempo propio estamos, en términos geométricos, parametrizando con la longitud de arco. Eligiendo el tiempo propio como parámetro afin, la norma del vector velocidad se vuelve 1.² Esto se traduce en términos de componentes en que

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1. \quad (3-30)$$

Sustituyendo los componentes de la métrica (2-18) en la ecuación anterior obtenemos la siguiente relación

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-q} \left[\left(1 + \frac{M^2 \sin^2 \theta}{r^2 - 2Mr}\right)^{-q(2+q)} \left(\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + r^2 \dot{\phi}^2 \right] = 1. \quad (3-31)$$

Restringiéndonos al plano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$ y sustituyendo las expresiones para \dot{t} y $\dot{\phi}$ de (3-26) y (3-27) obtenemos

$$\left(1 + \frac{M^2}{r^2 - 2Mr}\right)^{-q(2+q)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{q+1} \left[\frac{\tilde{\ell}^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^q + 1 \right], \quad (3-32)$$

donde τ es el tiempo propio.

De esta manera, hemos encontrado una ecuación diferencial para la coordenada radial que

²El valor de esta constante sería -1 en lugar de 1 si usáramos la signatura - + + + para la métrica

posee la ventaja de ser mucho más sencilla que la ecuación (3-21).

Otra de las ventajas de esta ecuación es que nos permite definir un potencial efectivo para partículas

$$\Phi_{part}^2(r, q) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{q+1} \left[\frac{\tilde{\ell}^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^q + 1 \right]. \quad (3-33)$$

Esta identificación puede ser realizada observando que cuando $\frac{dr}{dt} = 0$ entonces $E^2 = \Phi^2$

Ahora, tomando el límite $q \rightarrow 0$ obtenemos

$$\Phi_{part}^2(r, q = 0) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{\tilde{\ell}^2}{r^2} + 1\right). \quad (3-34)$$

El cual coincide con el potencial efectivo para el caso de el espacio-tiempo de Schwarzschild que definen algunos autores [4].

En la métrica de Schwarzschild, la componente g_{tt} es $\left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)$, donde M_0 es la masa del objeto. En el caso de la singularidad desnuda, esta misma componente es $\left(1 - 2M/r\right)^{1+q}$. Reescribiendo la componente g_{tt} del métrica (2-18) es posible definir una función de masa efectiva $M_{ef}(q, M, r)$ que cumpla que la componente g_{tt} de la métrica (2-18) se exprese como $\left(1 - \frac{2M_{ef}}{r}\right)$. Haciendo esta identificación obtenemos la siguiente función de masa efectiva ³.

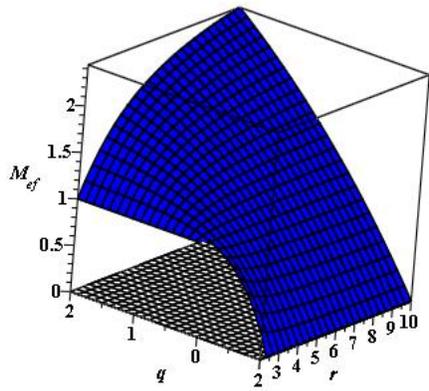
$$M_{ef}(r) = M - \frac{1}{2}(r - 2M) \left(\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^q - 1 \right) \quad (3-35)$$

Esta función expresada como una serie de potencias es

$$M_{ef}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{q+1}{k} \left(\frac{-2M}{r}\right)^k. \quad (3-36)$$

Donde $\binom{q+1}{k} = \frac{(q+1)!}{k!(k-q-1)!}$ representa el coeficiente binomial de esta expansión. Cabe destacar, que esta función cumple que al considerar $q = 0$ obtenemos $M_{ef} = M(q = 0) = M_0$. Es decir la función de masa efectiva representa la masa real del objeto cuando tomamos el límite $q \rightarrow 0$.

³Esta expresión fue obtenida haciendo la siguiente manipulación $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1+q} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^q - 1\right] = 1 - \frac{2}{r} \left[M - \frac{1}{2}(r - 2M) \left(\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^q - 1\right)\right]$.



Masa efectiva

Figura 3-1: Se muestra la gráfica de la función de masa efectiva según se ha definido en (3-35) tomando el valor de la constante $M = 1$. Se grafica para valores de r en el intervalo $[2,10]$ y q en $[-1,2]$. Puede observarse que esta definición de masa efectiva muestra otro tipo de comportamiento distinto al definido por la función (2-26)

Si graficamos esta función de masa efectiva observamos que a diferencia de la masa efectiva definida en (2-26) esta no adquiere valores negativos ni depende de la coordenada θ (ver figura 3-1). Esta diferencia con la definición de masa efectiva (2-26) se debe a que no existe una definición invariante de masa efectiva ni de potencial efectivo.

Poseer una expresión que sirva de potencial efectivo es muy útil para el estudio de geodésicas, en particular el estudio de geodésicas circulares. La gráfica del potencial efectivo nos permite determinar las regiones donde aumenta o disminuye la velocidad $\frac{dr}{dt}$, así como determinar las zonas donde esta velocidad es cero. Otra de las ventajas que ofrece el analizar el potencial efectivo es determinar donde pueden existir órbitas circulares. Éstas son determinadas por los puntos críticos del potencial efectivo. Las órbitas circulares pueden ser de dos tipos, estables o inestables. Las primeras corresponden a los mínimos y las segundas a los máximos del potencial efectivo. Existe una órbita en particular que posee gran importancia: la última órbita estable, ésta corresponde al punto de inflexión del potencial efectivo. Esta órbita nos dice cuán cerca de la singularidad es posible mantener una órbita circular sin caer en la singularidad.

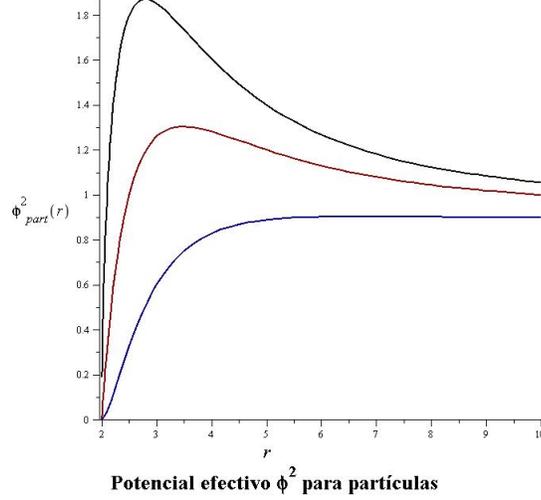


Figura 3-2: En esta gráfica se muestra la función de potencial efectivo para partículas Φ_{part}^2 , para diferentes valores del parámetro q . En rojo se muestra para $q = 0$ (es decir el caso de Schwarzschild), en azul para $q = 0.4$ (es decir para un esferoide oblató) y en negro para $q = -0.2$ (es decir para un esferoide prolato). En todos los casos se ha tomado $\tilde{\ell} = 5$ y $M = 1$

En realidad es posible elegir como potencial efectivo V_{part} tanto a Φ_{part}^2 como a $|\Phi_{part}|$ y calcular los puntos críticos de cualquiera de los dos para hallar los radios de las órbitas circulares. Para el caso de partículas se obtienen los mismos resultados para cualquier elección de potencial efectivo (Φ_{part}^2 o $|\Phi_{part}|$). La única diferencia radica en que al analizar $|\Phi_{part}|$ los cálculos se vuelven más complicados que al analizar Φ_{part}^2 .

Haciendo la elección de potencial efectivo $V_{part} = \Phi_{part}^2$ y resolviendo la ecuación $\frac{dV_{ef-part}}{dr} = 0$, obtenemos que los radios de las órbitas circulares están determinados por la ecuación

$$\left[2(q+1)M \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^q \right] r^2 - 2\tilde{\ell}^2 r + 2M\tilde{\ell}^2(2q+3) = 0. \quad (3-37)$$

Al derivar esta ecuación hemos eliminado la solución $r \neq 2M$ ya que en este radio se encuentra la singularidad. No es posible expresar analíticamente r como función de M y del momento angular específico $\tilde{\ell}$. Para verificar la validez de esta ecuación tomamos el límite cuando $q \rightarrow 0$, obteniendo la siguiente igualdad

$$2Mr^2 - 2\tilde{\ell}^2 r + 6M\tilde{\ell}^2 = 0. \quad (3-38)$$

Las soluciones a esta ecuación son $r = \frac{\tilde{\ell}^2}{2M} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{\ell}^2}}\right)$, las cuales corresponden a los radios de las órbitas circulares de Schwarzschild.

Aunque no es posible hallar una solución analítica a la ecuación (3-37) podemos extraer información de ella. Por ejemplo, podemos encontrar que el momento angular y la energía por unidad de masa que posee una partícula en una órbita circular están determinados por las siguientes expresiones ⁴

$$\tilde{\ell}^2 = \frac{M(q+1) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-q} r^2}{r - (2q+3)M}, \quad (3-39)$$

$$\tilde{E}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{q+1} \left[\frac{M(q+1)}{r - M(2q+3)} + 1 \right]. \quad (3-40)$$

Como $\tilde{\ell}^2$ y \tilde{E}^2 deben ser cantidades positivas entonces los radios de las órbitas circulares para partículas deben encontrarse en la región $r > M(2q+3)$. Esto quiere decir que existe una órbita mínima para partículas, la cual es $r = M(2q+3)$. Ésta es la órbita mínima ya que para que una partícula llegase a este radio, requeriría una energía infinita y poseería un momento angular infinito (ver figura 3-3). Más adelante veremos que este radio coincide con una órbita circular para fotones.

Con estos resultados podemos también hallar la velocidad angular Ω y el periodo T de las órbitas circulares, calculándolas por medio de $\Omega = \dot{\phi}(r)$ y $T = \int \frac{dt}{d\phi} d\phi = 2\pi \frac{dt}{d\phi}(r)$. Así obtenemos

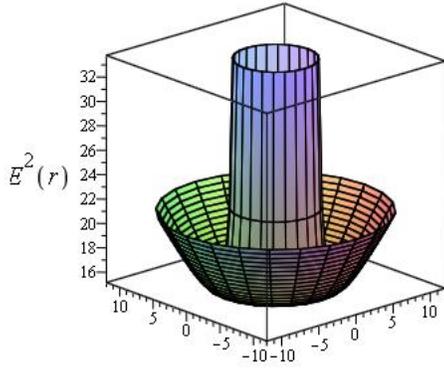
$$\Omega(r) = \frac{1}{r} \left[\frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^q M(q+1)}{r - M(2q+3)} \right]^{1/2}, \quad (3-41)$$

$$T(r) = 2\pi r \left(\frac{r - M(q+2)}{M(q+1)} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-q}. \quad (3-42)$$

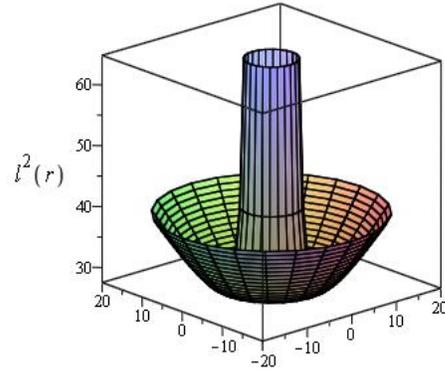
Podemos observar que para $r = M(2q+3)$ la velocidad angular de las partículas es infinita.

Para hallar la última órbita estable basta con hallar los puntos de inflexión del potencial efectivo, la ecuación a resolver es

⁴La expresión para la energía se obtuvo a partir de considerar que en una órbita circular $V_{part} = \tilde{E}$ y sustituir el valor del momento angular específico que posee una partícula en una órbita circular.



Energía específica



Momento angular específico

Figura 3-3: En la figura de la izquierda se ha graficado el cuadrado de energía específica \tilde{E}^2 de las partículas en función del radio de la órbita circular en la que se encuentran. En la gráfica de la derecha se muestra el cuadrado del momento angular específico \tilde{l}^2 de partículas que se encuentran en una órbita circular de radio r . Se puede observar un máximo sobre la circunferencia de radio $r = M(2q + 3)$ tanto en la gráfica de la energía como del momento angular específico. En ambas gráficas se ha tomado $M = 1$ y $q = 0.5$.

$$\frac{d^2 V_{ef-part}^2}{dr^2} = \frac{-2}{(2M-r)r^5} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^q \left\{ \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^q \tilde{l}^2 K(r, M, q) + \Xi(r, M, q) \right\} = 0 \quad (3-43)$$

Donde

$$K(r, M, q) = 24M^2 + 28M^2q + 8M^2q^2 - 18Mr - 12Mqr + 3r^2$$

$$\Xi(r, M, q) = 4M^2r^2 + 6M^2qr + 2M^2q^2r^2 - 2Mr^3 - 2Mqr^3.$$

A partir de esta ecuación obtenemos que el momento angular de la última órbita estable (si $r \neq 2M$) está dado por

$$\tilde{l}_{lso}^2 = \frac{2M(q+1)r^2(r - M(q+2))\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-q}}{3r^2 - 6M(2q+3)r + 4M^2(q+2)(2q+3)} \quad (3-44)$$

Las partículas en la última órbita estable deben poseer un momento angular que también

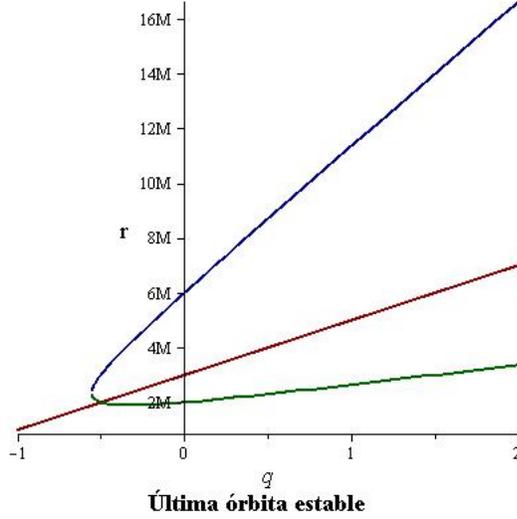


Figura 3-4: En esta gráfica se muestra la curva que describe los posibles radios de la última órbita estable. En azul se grafica la solución $r = M(3q + 4) + M\sqrt{5q^2 + 10q + 4}$ y en verde la solución $r = M(3q + 4) - M\sqrt{5q^2 + 10q + 4}$. En rojo se muestra el valor límite para los radios de órbitas circulares de las partículas $r = (2q + 3)M$. Se puede observar que todos los puntos de la curva azul y algunos de la verde se encuentran dentro de la región permitida para órbitas circulares $r > (2q + 3)M$. Se puede observar además que estas curvas se intersectan en un valor $r > 2M$ definiendo así el valor mínimo para la última órbita estable. La intersección se da en el punto $(r, q) = (\frac{5+3\sqrt{5}}{5}M, -1 + \frac{\sqrt{5}}{5})$ quedando este punto dentro de la región $r > (2q + 3)M$.

satisfaga a la ecuación (3-39), ya que se encuentran en una órbita circular .

Haciendo $\tilde{\ell} = \tilde{\ell}_{lso}$ y suponiendo que $r \neq 2M$ y $q \neq -1$ (ya que en $r = 2M$ se encuentra la singularidad y $q > -1$ por la ecuación (2-19)), obtenemos que el radio de la última órbita estable está determinado por la ecuación

$$r_{lso}^2 - 2M(3q + 4)r_{lso} + 2M^2(2q + 3)(q + 2) = 0 \quad (3-45)$$

Cuyas soluciones son

$$r_{lso} = \begin{cases} M(3q + 4) + M\sqrt{5q^2 + 10q + 4} \\ M(3q + 4) - M\sqrt{5q^2 + 10q + 4} \end{cases} \quad (3-46)$$

Tomando el límite cuando $q \rightarrow 0$ obtenemos

$$r_{lso} = \begin{cases} 6M & \text{eligiendo el signo +} \\ 2M & \text{eligiendo el signo -} \end{cases} \quad (3-47)$$

Estos dos radios son los que se obtienen al analizar el potencial efectivo en el caso de Schwarzschild. En el caso de Schwarzschild se descarta la solución $r = 2M$ ya que ésta coincide con el horizonte de eventos, quedando $r = 6M$ como la última órbita estable. Por lo tanto, $r = M(3q + 4) \pm M\sqrt{5q^2 + 10q + 4}$ describe bien los posibles valores de la última órbita estable para el caso de la singularidad desnuda con momento cuadrupolar.

Al graficar estas dos funciones se observa que (ver figura 3-4), tomando ambas soluciones para cada valor de q , existen dos candidatos para la última órbita estable siendo uno de ellos mas cercano a la singularidad $r = 2M$ que el otro. Por otro lado, ya tenemos una cota para el radio mínimo de órbitas circulares de partículas, $r = M(2q + 3)$. Por lo tanto, los valores posibles para la última órbita estable son aquellos que están comprendidos dentro de la región $r > M(2q + 3)$. Sin embargo, existe un punto donde las dos soluciones se intersectan (quedando este punto dentro de la región $r > M(2q + 3)$). Este punto corresponde al valor de q donde el polinomio $5q^2 + 10q + 4$ se anula. El valor de q para el cual sucede esto es $-1 + \frac{\sqrt{5}}{5}$. Para este valor de q , el radio de la última órbita estable es $r = \frac{5+3\sqrt{5}}{5}M \approx 2.34M$. El cual es mayor a $2M$, y por ende está fuera de la singularidad. Por lo tanto, el valor mínimo que puede poseer el radio de la última órbita estable para el espacio-tiempo descrito por la métrica (2-18) es $r = \frac{5+3\sqrt{5}}{5}M \approx 2.34M$ ⁵.

3.3. Potencial efectivo para Fotones

De manera análoga al potencial efectivo para partículas, también podemos encontrar un potencial efectivo para fotones, sin embargo existen algunas diferencias. Los fotones a diferencia de las partículas siguen geodésicas nulas. Esto se traduce en que la constante K de la ecuación (3-5) es cero y que el parámetro con el que están parametrizadas las geodésicas ya no es el tiempo propio sino otro parametro afín σ . Esto quiere decir que la norma del vector 4-velocidad es cero, lo cual significa en términos de las componentes que

⁵En realidad las soluciones a la ecuación $q^2 + 10q + 4 = 0$ son $-1 + \frac{\sqrt{5}}{5}$ y $-1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$. Sin embargo, esta última solución queda descartada ya que se requiere que la masa M_0 sea positiva, y eso se tiene siempre que $q > -1$.

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (3-48)$$

Sustituyendo las componentes de la métrica (2-18) obtenemos

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1+q} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-q} \left[\left(1 + \frac{M^2 \sin^2 \theta}{r^2 - 2Mr}\right)^{-q(2+q)} \left(\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 \right] = 0. \quad (3-49)$$

Usando la ecuación (3-24) en vista de que los componentes de la métrica no dependen de ϕ ni de t podemos obtener dos ecuaciones para las coordenadas temporal t y azimutal ϕ

$$\dot{t} = A \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-(1+q)}, \quad (3-50)$$

$$\dot{\phi} = \frac{B}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^q, \quad (3-51)$$

donde A y B son dos constantes de integración. Para determinar el significado físico de estas constantes hay que considerar la definición del 4-momento de fotones. El 4-momento de fotones se define como $p = \alpha \vec{v}$, donde α es una constante escogida de tal manera que las componentes de este vector sean $[p^\mu] = (E, \underline{p})$, donde \underline{p} es el 3-momento. Otra forma común de definirlo es mediante el 4-vector de onda \vec{k} . De esta manera se define el 4-momento como $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, donde este vector de onda tiene como componentes $[k^\mu] = \frac{2\pi}{\lambda}(1, \underline{n})$ siendo \underline{n} el 3-vector unitario en la dirección de propagación de la onda [6]. Por lo tanto de manera análoga al caso de partículas, se determina que A es la energía E del fotón y B es el momento angular ℓ ⁶.

Sustituyendo las expresiones (3-50) y (3-51) en (3-49), obtenemos una ecuación para la coordenada radial

$$\left(1 + \frac{M^2}{r^2 - 2Mr}\right)^{-q(2+q)} \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 = E^2 - \frac{\ell^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{2q+1} \quad (3-52)$$

⁶Nótese que a diferencia del caso de partículas ni E ni ℓ llevan tilde, ya que éstas representaban la energía y momento angular específicos.

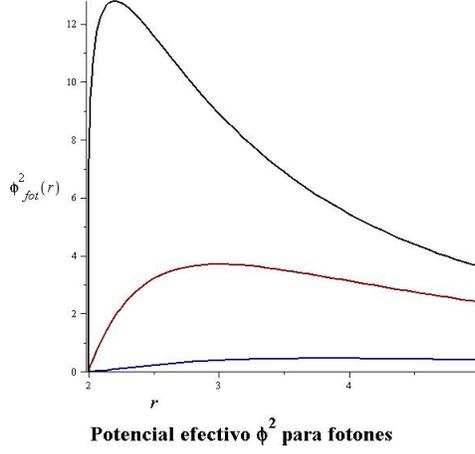


Figura 3-5: En esta gráfica se muestra la función de potencial efectivo para fotones Φ_{fot}^2 , para diferentes valores del parámetro q . En rojo se muestra para $q = 0$ (es decir el caso de Schwarzschild), en azul para $q = 0.4$ (es decir para un esferoide oblat) y en negro para $q = -0.2$ (es decir para un esferoide prolato). En todos los casos se ha tomado $\tilde{\ell} = 5$ y $M = 1$

De esta última expresión identificamos el potencial efectivo para fotones

$$\Phi_{fot}^2(r, q) = \frac{\ell^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{2q+1} \quad (3-53)$$

Al considerar el límite cuando $q \rightarrow 0$ obtenemos

$$\Phi_{fot}^2(r, q = 0) = \frac{\ell^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (3-54)$$

Esta función coincide con potencial efectivo de fotones para el caso de Schwarzschild.

Ahora aplicaremos el mismo método de análisis que se usó para partículas para las dos elecciones de potencial efectivo Φ_{fot}^2 y $|\Phi_{fot}|$.

Primera elección de potencial efectivo Φ_{fot}^2

Primero consideraremos como potencial efectivo $V_{fot} = \Phi_{fot}^2$.

De calcular $\frac{dV_{fot}}{dr}$, obtenemos

$$\frac{dV_{fot}}{dr} = \frac{2\ell^2(1 - 2M/r)^{2q}(-r + 3M + 2Mq)}{r^4} \quad (3-55)$$

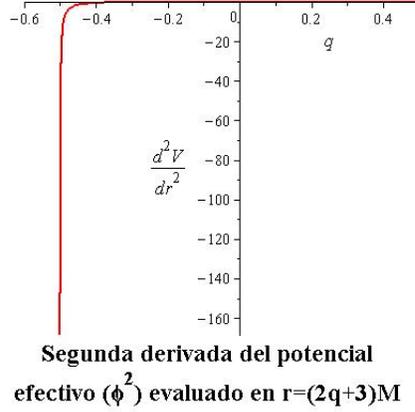


Figura 3-6: Se muestra la gráfica de $\frac{d^2 V_{fot}}{dr^2}$ evaluada en $r = M(2q + 3)$ con la elección de potencial $V_{fot} = \Phi_{fot}^2$. Se puede observar que todos los valores se encuentran por debajo del eje horizontal, mostrando que $r = M(2q + 3)$ es el radio de una órbita circular inestable. Se ha tomado la constante $M = 1$ para ésta gráfica.

De la expresión anterior deducimos que los únicos puntos críticos son

$$r_0 = M(2q + 3)$$

$$r_1 = 2M$$

De este resultado podemos destacar que el primer punto crítico r_0 está siempre presente, independientemente del valor del parámetro q . El radio de esta órbita circular para fotones coincide con el radio límite que poseen las órbitas circulares de partículas en el espacio-tiempo generado por la singularidad desnuda. Asimismo, si tomamos $q = 0$ reproducimos el resultado de Schwarzschild, el cual es $r = 3M$, siendo esta la única órbita circular para fotones en el espacio-tiempo Schwarzschild. La aparición del radio $r = 2M$ como posible punto crítico del potencial, existe sólo para valores de $q > 0$. Cabe recordar que este radio representa la singularidad más exterior de este espacio-tiempo.

Para conocer la estabilidad de estas órbitas circulares es necesario conocer si se tratan de máximos o mínimos. Para saber esto, basta calcular la segunda derivada del potencial efectivo y evaluar en cada punto.

Al calcular la segunda derivada del potencial efectivo se obtiene

$$\frac{d^2V_{\text{fot}}}{dr^2} = \frac{2\ell^2(1 - 2M/r)^{2q-1} (3r^2 - 18Mr + 24M^2 - 12Mqr + 28M^2q + 8M^2q^2)}{r^6} \quad (3-56)$$

Cuando se evalúa esta función en $r_0 = M(2q + 3)$ se obtiene un valor negativo (ver figura 3-6), indicando que se trata de un máximo del potencial efectivo y por lo tanto, $r_0 = M(2q + 3)$ representa una órbita inestable. Por otro lado, se observa que $\frac{d^2V_{\text{fot}}}{dr^2}$ se anula en $r = 2M$ si $q > \frac{1}{2}$ y tiende a infinito si $q < \frac{1}{2}$. Para el valor $q = \frac{1}{2}$, el potencial efectivo para fotones de la singularidad desnuda se vuelve idéntico al potencial efectivo para fotones del espacio-tiempo de Schwarzschild, es decir $\Phi_{\text{fot}}(r, q = \frac{1}{2}) = \Phi_{\text{fot}}(r, q = 0)$.

Segunda elección de potencial efectivo $|\Phi_{\text{fot}}|$

Ahora consideramos la otra elección de potencial efectivo $V_{\text{fot}} = |\Phi_{\text{fot}}|$. Derivando esta expresión respecto a r se obtiene

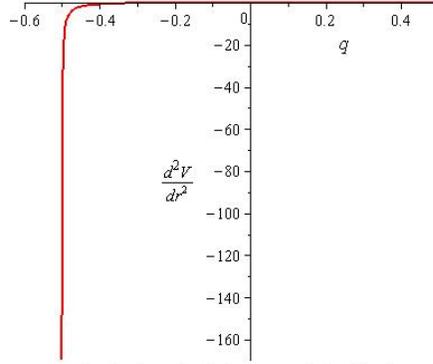
$$\frac{dV_{\text{fot}}}{dr} = \frac{|\ell| \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{q-\frac{1}{2}} (-r + 3M + 2Mq)}{r^3} \quad (3-57)$$

De la expresión anterior podemos observar $r_0 = M(2q + 3)$ es un punto crítico para cualquier valor del parámetro q . Asimismo, $r_1 = 2M$ es un posible punto crítico cuando $q > \frac{1}{2}$ y tiende a infinito cuando $q < \frac{1}{2}$. Por otro lado, como se mencionó en el párrafo anterior, el potencial efectivo en $q = \frac{1}{2}$ es idéntico al de Schwarzschild.

Para conocer la estabilidad de estas órbitas hallamos la segunda derivada del potencial efectivo

$$\frac{d^2V_{\text{fot}}}{dr^2} = \frac{|\ell| \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{q-\frac{3}{2}} (2r^2 - 12Mr + 15M^2 - 8Mqr + 16M^2q + 4M^2q^2)}{r^5} \quad (3-58)$$

Evaluando $r_0 = M(2q + 3)$ en $\frac{d^2V_{\text{fot}}}{dr^2}$ se obtiene una expresión que es negativa, entonces, esta órbita corresponde a un máximo del potencial efectivo y por lo tanto es una órbita circular inestable. Por otro lado, $\frac{d^2V_{\text{fot}}}{dr^2}$ se anula en $r_1 = 2M$ si $q > \frac{3}{2}$ y tiende a ∞ si $q < \frac{3}{2}$. Para saber qué sucede en $q = \frac{3}{2}$ sustituimos este valor en el potencial efectivo, obtenemos su segunda



Segunda derivada del potencial efectivo
 $|\phi|$ en $r = M(2q+3)$

Figura 3-7: Se muestra la gráfica de $\frac{d^2 V_{\text{tot}}}{dr^2}$ evaluada en $r = M(2q + 3)$, con la elección de potencial $V_{\text{tot}} = |\Phi_{\text{tot}}|$. En la gráfica de la izquierda se ha tomado $\ell = 1$. Esto muestra que la órbita circular $r = M(2q + 3)$ es inestable.

derivada y la evaluamos en $r = 2M$, al hacer esto se obtiene $\frac{|\ell|}{4M^3}$. Esto significa que para $q = \frac{3}{2}$ el radio $r = 2M$ es otro máximo del potencial efectivo. A pesar de que el radio $r = 2M$ es un punto crítico, este queda descartado como órbita circular ya que en este radio se encuentra la singularidad.

3.4. Análisis Comparativo

Ahora, analizaremos el potencial efectivo para partículas desde otra perspectiva. Haciendo un cambio de variable $u = 1/r$ la ecuación (3-32) se reescribe como

$$\left(1 + \frac{M^2 u^2}{1 - 2Mu}\right)^{-q(2+q)} \left(\frac{1}{u^4}\right) \left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - (1 - 2Mu)^{q+1} \left[\tilde{\ell}^2 u^2 (1 - 2Mu)^q + 1\right]. \quad (3-59)$$

Usando la regla de la cadena de la ecuación (3-29), obtenemos

$$\frac{du}{d\tau} = \left(\frac{\tilde{\ell}}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^q \frac{du}{d\phi}.$$

Haciendo este cambio de variable, obtenemos una ecuación que describe el cambio en el radio con la coordenada azimutal

$$\frac{(1 - 2Mu)^{q(q+4)}}{(1 - Mu)^{2q(2+q)}} \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = F(u, q) \quad (3-60)$$

Donde

$$F(u, q) = \frac{1}{\tilde{\ell}^2} \left\{ \tilde{E}^2 - (1 - 2Mu)^{q+1} \left[\tilde{\ell}^2 u^2 (1 - 2Mu)^q + 1 \right] \right\}$$

Ahora bien, definimos otra función $f(u)$ como

$$f(u) = F(u, q = 0)$$

La función $f(u)$ es la que se obtiene en el caso de Schwarzschild al hacer este mismo cambio de variable (en lugar de la función $F(u, q)$ que hemos obtenido para la singularidad desnuda). Lo que haremos es comparar estas dos funciones para dar una relación entre las órbitas (no necesariamente circulares) en el espacio-tiempo de Schwarzschild y las órbitas en el espacio-tiempo de la singularidad desnuda.

Si consideremos que $q < 0$, entonces

$$F(u, q) < f(u) \quad (3-61)$$

Esta desigualdad es válida para toda u en el intervalo $(0, \frac{1}{2M})$, es decir, para órbitas más externas que el radio de Schwarzschild. Ver figura 3-8

$$f(u = 0) = \frac{\tilde{E}^2 - 1}{\tilde{\ell}^2} = \begin{cases} < 0 & \text{si } \tilde{E}^2 < 1, \text{ órbitas ligadas} \\ > 0 & \text{if } \tilde{E}^2 > 1, \text{ órbitas no ligadas} \end{cases}$$

Supongamos que la ecuación $F(u) = 0$ tiene n raíces: $u_{d1} < u_{d2} < \dots < u_{dn}$. La raíz u_{d1} es la raíz más cercana al origen $u = 0$, es decir, u_{d1} corresponde a la órbita más externa con radio $r_{d1} = 1/u_{d1}$. Por la desigualdad (3-61) sabemos que $F(u_{d1}) < f(u_{d1})$ y por lo tanto $f(u_{d1}) > 0$. Entonces, f es positiva en u_{d1} y negativa en el origen $u = 0$. Como la función f es continua, por el teorema del valor intermedio existe $u_s \in (0, u_{d1})$, tal que $f(u_s) = 0$, entonces $u_s < u_{d1}$ (ver figura 3-9), lo cual en términos de los radios significa que

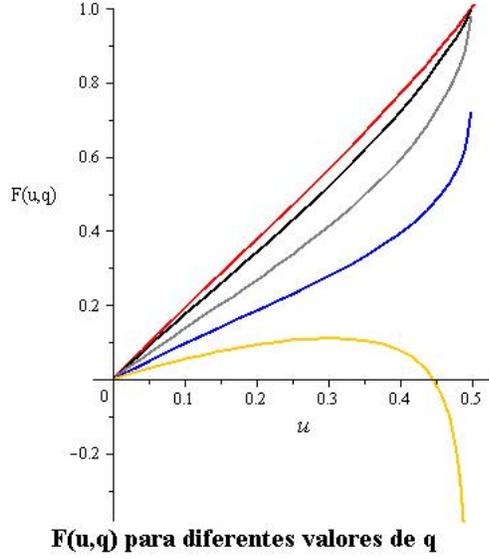


Figura 3-8: En esta gráfica se muestra $F(u, q)$ para distintos valores de q en el intervalo $(-1, 0]$. A partir de esta gráfica se puede verificar la desigualdad (3-61). La línea roja representa la función $f(u) = F(u, q = 0)$ y las demás curvas representan la función $F(u, q)$ para los valores $q = -0.1, -0.3, -0.5, -0.7$

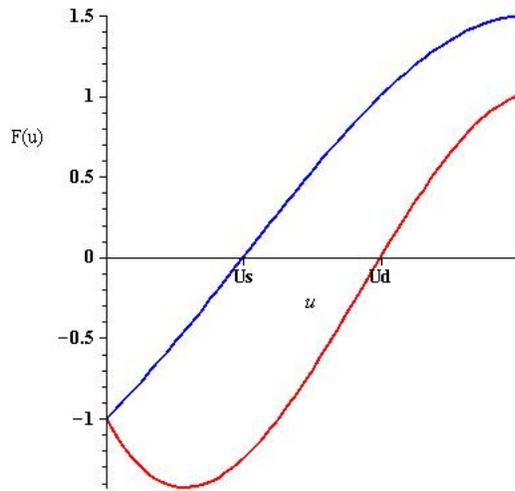
$$r_{d1} < r_s. \quad (3-62)$$

Por otro lado, si nos fijamos en los valores de estas funciones en el radio de Schwarzschild encontramos que ambas adquieren valores positivos, $f(\frac{1}{2M}) = F(\frac{1}{2M}) = \frac{E^2}{\ell^2} > 0$.

Supongamos que u_{s*} es una raíz de $f(u)$. Por la desigualdad (3-61) sabemos que $F(u_{s*}) < f(u_{s*}) = 0$. De esta manera, hemos hallado un punto donde la función $F(u)$ es positiva y otro donde es negativa. Como esta función es continua, por el teorema del valor intermedio existe $u_{d*} \in (u_{s*}, \frac{1}{2M})$ tal que $F(u_{d*}) = 0$. Entonces $u_{d*} > u_{s*}$ (Ver figura 3-10) que en términos de los radios, esto significa

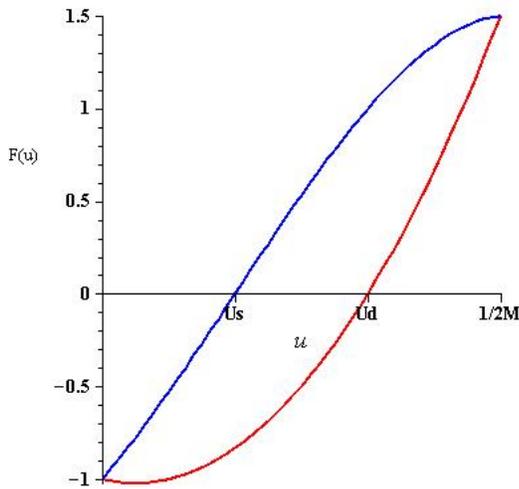
$$r_{d*} < r_{s*}. \quad (3-63)$$

Las desigualdades (3-62) y (3-63) nos indican que para $q < 0$, los radios de las órbitas del espacio-tiempo de la singularidad desnuda son más pequeños que los radios de las órbitas



Relación entre las raíces de $F(u,q)$ y $f(u)$

Figura 3-9: La función $F(u)$ está representada por la curva en rojo y $f(u)$ por la curva en azul. Se puede observar que $F(u)$ tiene una raíz en u_d y que $F(u)$ está siempre por debajo de $f(u)$. Con esto hemos encontrado un punto de la función f que es mayor a cero y otro que es menor a cero, esto significa que existe un valor u_s para el cual f se anula.



Relación entre las raíces de $F(u,q)$ y $f(u)$

Figura 3-10: La función $F(u)$ está representada por la curva en rojo y $f(u)$ por la curva en azul. Se observa que ambas curvas se intersectan en $u = \frac{1}{2M}$ por encima del eje horizontal. Puede observarse en esta gráfica que si u_s es una raíz de f , entonces $F(u_s) < 0$. Por lo tanto, $F(\frac{1}{2M}) > 0$ es positiva $F(u_s) < 0$, esto significa que existe un punto u_d en el intervalo $(0, \frac{1}{2M})$ donde la gráfica de F corta al eje horizontal.

circulares del espacio-tiempo de Schwarzschild.

Si hubiéramos supuesto que $q > 0$, el signo de las desigualdades anteriores se hubiera invertido haciendo que los radios de las órbitas (no necesariamente circulares) de Schwarzschild fueran más grandes que los radios de las órbitas de la singularidad desnuda.

Esto es consistente con lo que habíamos obtenido para la órbita circular mínima.

$$r_{lo-desn} = M(2q + 3) < 3M = r_{lo-Schwarz} \quad \text{si } q < 0 \quad (3-64)$$

$$r_{lo-desn} = M(2q + 3) > 3M = r_{lo-Schwarz} \quad \text{si } q > 0 \quad (3-65)$$

Esta desigualdad también se verifica para la última órbita estable ⁷.

$$r_{lso-desn} = M(3q + 4) + M\sqrt{5q^2 + 10q + 4} < 6M = r_{lso-Schwarz} \quad \text{si } q < 0 \quad (3-66)$$

$$r_{lso-desn} = M(3q + 4) + M\sqrt{5q^2 + 10q + 4} > 6M = r_{lso-Schwarz} \quad \text{si } q > 0 \quad (3-67)$$

⁷No hemos incluido la solución $r = M(3q + 4) - M\sqrt{5q^2 + 10q + 4}$, ya que casi todos los valores de esta función quedan descartados por la condición $r > r_0 = M(2q + 3)$ ver la gráfica 3-4.

Capítulo 4

Análisis perturbativo

Para analizar el comportamiento cualitativo de las partículas en el espacio-tiempo descrito por la métrica (2-18) reescribimos la ecuación (3-60) de la siguiente manera

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = G(u), \quad (4-1)$$

donde

$$G(u) = \frac{(1 - Mu)^{2q(2+q)}}{(1 - 2Mu)^{q(4+q)}} \frac{1}{\tilde{\ell}^2} \left\{ \tilde{E}^2 - (1 - 2Mu)^{q+1} \left[\tilde{\ell}^2 u^2 (1 - 2Mu)^q + 1 \right] \right\} \quad (4-2)$$

Haciendo una expansión en serie de Taylor de $G(u)$ alrededor $u = 0$ hasta orden tres, obtenemos

$$G(u) \approx g(u) = \frac{\tilde{E}^2 - 1}{\tilde{\ell}^2} + A(M, q)u + B(M, q)u^2 + C(M, q)u^3, \quad (4-3)$$

donde $A, B,$ y C están dados por las siguientes expresiones

$$A = \frac{2M}{\tilde{\ell}^2} ((2\tilde{E}^2 - 1)q + 1), \quad (4-4)$$

$$B = \frac{3M^2}{\tilde{\ell}^2} (\tilde{E}^2(3q + 2) - q) - 1, \quad (4-5)$$

$$C = \frac{2M^3q}{\tilde{\ell}^2}(\tilde{E}^2(22q^2 + 39q + 14) - 5q^2 - 6q + 2) + 2M. \quad (4-6)$$

Al tomar $q = 0$, tanto el polinomio $g(u)$ como en la función $G(u)$, se obtiene

$$G_{sch}(u) = \frac{\tilde{E}^2 - 1}{\tilde{\ell}^2} + \frac{2M}{\tilde{\ell}^2}u - u^2 + 2Mu^3. \quad (4-7)$$

Este polinomio cúbico es lo que hubiéramos obtenido para función $G(u)$ en el caso de Schwarzschild ¹.

Cabe mencionar que al estudiar el polinomio (4-3), estamos en realidad estudiando geodésicas temporaloides para valores de r muy grandes, debido a que la expansión se realizó alrededor de $u = 0$. Por lo tanto, las conclusiones que se obtengan a partir de este análisis describirán solamente de manera aproximada la trayectoria de partículas que se encuentran muy alejadas de la singularidad. Otro punto importante de señalar es que, como veremos más adelante, existen órbitas que se aproximan al origen de coordenadas $r = 0$. Sin embargo, las partículas no pueden terminar en el origen $r = 0$ ya que en el radio $r = 2M$ existe una singularidad. Si nos situamos en infinito, el radio $r = 2M$ es muy pequeño y prácticamente indistinguible de $r = 0$. Por lo tanto, en las siguientes soluciones, una partícula que se aproxima a la singularidad desnuda $r = 2M$ se verá como una partícula que se aproxima al origen de coordenadas $r = 0$.

Por razones que más adelante serán explicadas, acotaremos el rango de valores que pueden poseer q , E y ℓ de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones

$$A(\tilde{E}, \tilde{\ell}, q) > 0, \quad B(\tilde{E}, \tilde{\ell}, q) < 0, \quad C(\tilde{E}, \tilde{\ell}, q) > 0. \quad (4-8)$$

Debido a la complejidad del polinomio $C(\tilde{E}, q)$ realizamos una expansión en serie alrededor del punto $q = 0$, obteniendo

$$C \approx 2M + \frac{4M^3}{\tilde{\ell}^2}(7\tilde{E}^2 + 1)q. \quad (4-9)$$

Imponiendo la condición $C(\tilde{E}, q) > 0$, obtenemos que q debe ser menor a un número positivo

¹Para el caso de Schwarzschild, la función $G(u)$ es un polinomio cúbico. No se obtiene, a diferencia de (4-3), de una expansión en serie. Por lo tanto, el polinomio (4-7) describe de manera exacta la trayectoria de partículas en el espacio-tiempo de Schwarzschild. En el caso de la singularidad desnuda, el polinomio (4-3) sólo describe las trayectorias de las partículas de manera aproximada.

$$q < \frac{\tilde{\ell}^2}{2M^2(7\tilde{E}^2 + 1)}. \quad (4-10)$$

De imponer la condición $B(\tilde{E}, q) < 0$ se obtiene la siguiente inecuación

$$\tilde{\ell}^2 > 3M^2(q(3E^2 - 1) + 2E^2). \quad (4-11)$$

Es necesario que la cantidad a la derecha de la expresión anterior sea positiva, una posibilidad es considerar $q < 0$ y $E < 1/\sqrt{3}$

Finalmente de imponer la condición $A(\tilde{E}, q) > 0$ se obtienen dos posibilidades

$$i) q > 0 \text{ y } \tilde{E} > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ii) q < 0 \text{ y } \tilde{E} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4-12)$$

De estas dos opciones solamente *ii)* es compatible con lo anteriormente descrito.

Por lo tanto, para que se cumplan las condiciones (4-8), los valores de q , \tilde{E} y ℓ deben estar en los intervalos

$$q \in (-1, 0) \quad E \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \tilde{\ell}^2 > 3M^2(q(3E^2 - 1) + 2E^2) \quad (4-13)$$

El polinomio $g(u)$, como cualquier otro polinomio cúbico, posee tres raíces reales o bien, una raíz real y dos raíces complejas conjugadas.

Usando las fórmulas de Vieta, obtenemos las siguientes relaciones entre las raíces

$$u_1 + u_2 + u_3 = -\frac{B}{C}, \quad (4-14)$$

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = \frac{A}{C}, \quad (4-15)$$

$$u_1u_2u_3 = -\frac{\tilde{E}^2 - 1}{C\tilde{\ell}^2}. \quad (4-16)$$

Si consideramos órbitas ligadas entonces $\tilde{E} < 1$ y por lo tanto $u_1u_2u_3 > 0$. En este análisis distinguiremos dos tipos de órbitas, las de primer tipo que son análogas a las órbitas Keplerianas y las de segundo tipo que son aquellas que terminan en la singularidad.

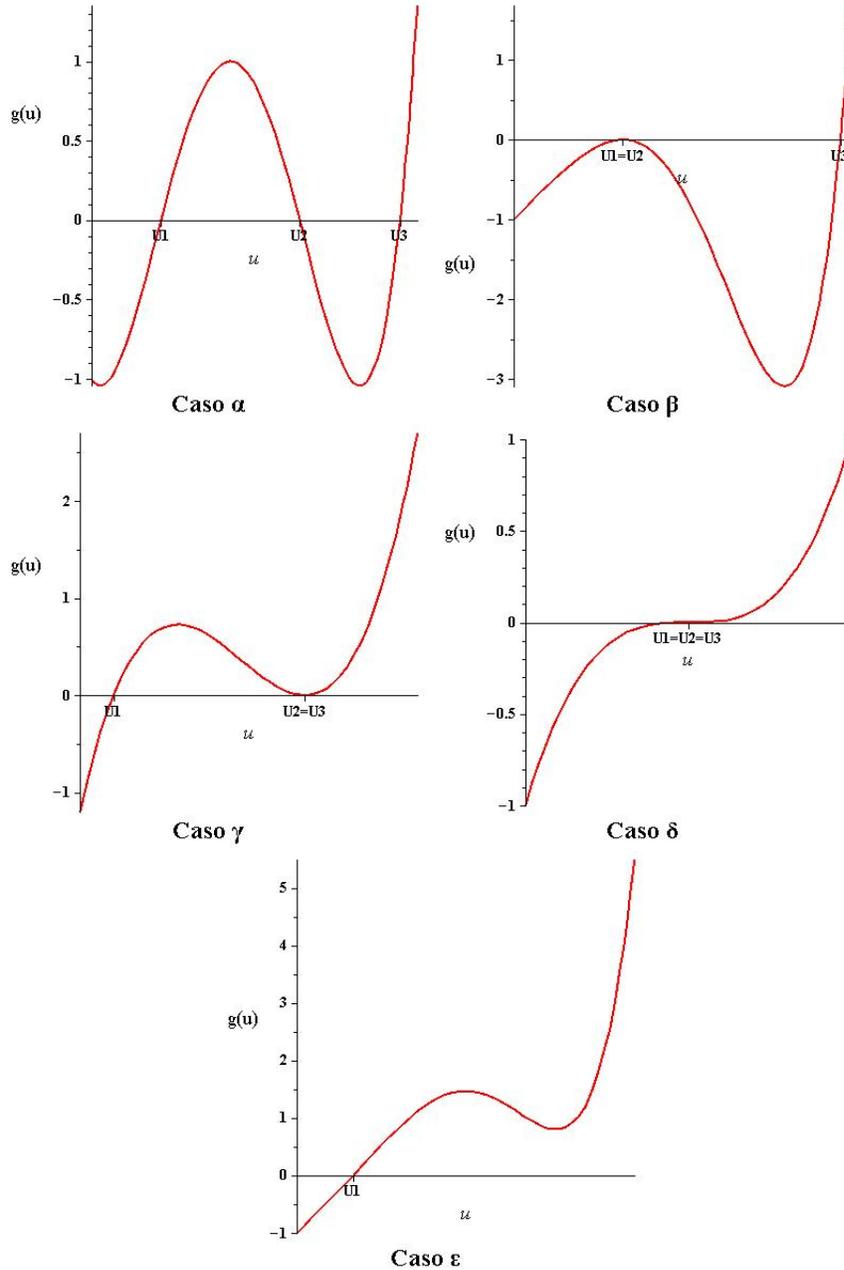


Figura 4-1: Estos son los 5 casos que se analizarán. En estas gráficas se muestran las posibles distribuciones de las raíces del polinomio $g(u)$. En el caso α , se considera que el polinomio $g(u)$ posee tres raíces reales positivas distintas $U_1 \neq U_2 \neq U_3$. En el caso β , se considera que dos raíces coinciden en un máximo de la función $U_1 = U_2 \neq U_3$. En el caso γ , se tienen dos raíces reales repetidas que coinciden con un mínimo de la función $U_2 = U_3 \neq U_1$. En el caso δ , las tres raíces coinciden, esto pasa cuando se tiene un punto de inflexión correspondiendo así al caso de la última órbita estable $U_1 = U_2 = U_3$. En caso ϵ , el polinomio $g(u)$ posee únicamente una raíz real positiva y dos complejas conjugadas $U_1 \in \mathbb{R}$, $U_2 = \overline{U_3} \in \mathbb{C}$

Observamos que $g(u = 0) = \frac{\tilde{E}^2 - 1}{\tilde{\ell}^2} < 0$ y que $g(u) \rightarrow \infty$ cuando $u \rightarrow \infty$ (al acercarnos al origen $r = 0$). Usando el hecho de que $u = 1/r$ y la regla de la cadena tenemos

$$\frac{dg(u)}{du} = -\frac{1}{r^2} \frac{dg}{dr}.$$

Esto significa que $g(u)$ crece (decrece) cuando $g(r)$ decrece (crece), es decir, los máximos de $g(u)$ corresponden a mínimos locales de $g(r)$ y los mínimos locales de $g(u)$ corresponden a los máximos locales de $g(r)$.

La zona de inestabilidad se hallaba donde el potencial efectivo como función del radio tenía un máximo local. Entonces, por lo anteriormente descrito sobre la relación entre los máximos y mínimos de $g(u)$ y $g(r)$, la zona de inestabilidad se encontrará donde se hallen los mínimos locales de $g(u)$. Análogamente, la zona de estabilidad se encontrará donde se hallen máximos locales de $g(u)$.

Estas observaciones nos permiten interpretar y dividir el problema en cada uno de los siguientes casos. Los primeros cuatro corresponden a la posibilidad de tener tres raíces reales positivas (se puede mostrar usando la Regla de los signos de Descartes que debido a las condiciones (4-8) las raíces reales de este polinomio no pueden ser negativas). El último caso corresponde a la posibilidad de tener una raíz real (positiva) y dos raíces complejas conjugadas (las cuales representan órbitas que poseen una excentricidad imaginaria y que irremediamente terminan en la singularidad).

4.1. Caso α

En este caso consideramos que la disposición de las raíces del polinomio $g(u)$ es $0 < u_1 < u_2 < u_3$.

Para resolver la ecuación $\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = g(u)$, reescribiremos las raíces u_1, u_2 y u_3 en términos de dos parámetros: la excentricidad e y el lado recto R_o . Sea $u_1 = \frac{1+e}{R_o}$ y $u_2 = \frac{1-e}{R_o}$, usando la ecuación (4-14) se deduce que $u_3 = -\frac{B}{C} - \frac{2}{R_o}$.

Bajo estas definiciones el polinomio $g(u)$ queda reescrito como

$$g(u) = C \left(u - \frac{1-e}{R_o} \right) \left(u - \frac{1+e}{R_o} \right) \left(u + \frac{B}{C} + \frac{2}{R_o} \right). \quad (4-17)$$

Para conocer cómo se relacionan los parámetros e y R_o con los coeficientes del polinomio $g(u)$, basta con desarrollar la expresión anterior e igualar cada coeficiente de este polinomio con los coeficientes de $g(u)$ definidos en (4-3). Haciendo esto se obtiene que el lado recto R_o es una solución real de la ecuación

$$[C(E^2 - 1) - AB\ell^2]R_o^3 + 2\ell^2(B^2 - AC)R_o^2 - 8C^2\ell^2 = 0.$$

La excentricidad e queda determinada por la siguiente expresión

$$e^2 = 1 - \frac{R_o^2(E^2 - 1)}{\ell^2(BR_o + 2C)}. \quad (4-18)$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{1}{R_o}(1 + e \cos(\chi))$ es posible escribir de manera paramétrica la trayectoria de las partículas.

En resumen, las órbitas de primer tipo están confinadas al intervalo (u_1, u_2) , el cual corresponde a la zona de estabilidad. Las órbitas de primer tipo oscilarán entre los radios $r_1 = 1/u_1$ (el afelio) y $r_2 = 1/u_2$ (el perihelio). Las órbitas de segundo tipo que se encuentran en el intervalo (u_3, ∞) tienen su afelio en $r_3 = 1/u_3$ y terminan en la singularidad. Ver figura 4-2.

La trayectoria de las órbitas de primer tipo están dadas paraméricamente por

$$u = \frac{1}{R_o}(1 + e \cos(\chi)), \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{f}}F\left(\frac{1}{2}(\pi - \chi), k\right),$$

donde

$$F(\psi, k) = \int_0^\psi \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \gamma}}.$$

Los valores de f y k , son funciones de la excentricidad y del lado recto, dados por

$$\lambda = -\frac{C}{R_o}, \quad f = \frac{1}{(3+e)\lambda - B}, \quad k^2 = \frac{2\lambda e}{f},$$

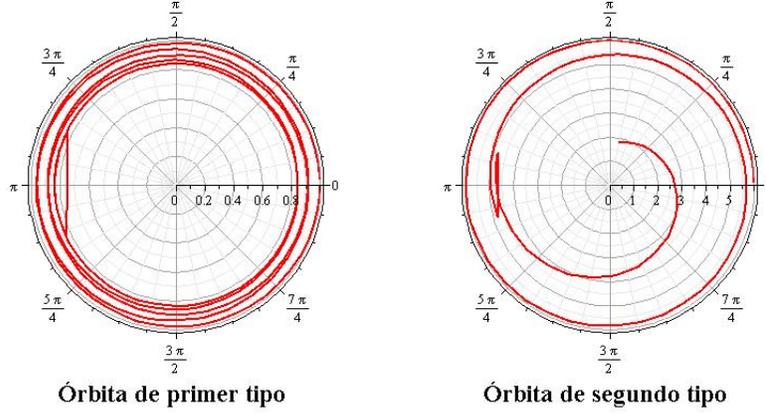


Figura 4-2: Gráficas de las órbitas para el caso α : En la gráfica de la izquierda se muestra una órbita de primer tipo con parámetros $e = 0.2$, $R_0 = 1$, $1/\sqrt{f} = 15$ y $k = 3$. En la gráfica de la derecha se muestra una órbita de segundo tipo con parámetros $r_3 = 6$, $r_1 = 8$ y $1/\sqrt{f} = 9$.

donde f es una constante positiva debido a la condición $B < \lambda(3 + e)$, que es consecuencia de haber supuesto que $0 < u_1 < u_3$.

Todos los parámetros (R_0 , e , f , y k) que aparecen en estas soluciones dependen del valor de la energía, momento angular específico de la partícula y de los parámetros q y M .

Las trayectorias de segundo tipo están dadas paramétricamente por

$$u = u_3 + (u_3 - u_1)\tan^2\left(\frac{1}{2}\xi\right), \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{f}}F\left(\frac{1}{2}\xi, k\right).$$

De esta última ecuación se puede observar que $u \rightarrow \infty$ (equivalentemente $r \rightarrow 0$, es decir las partículas se aproximan a la singularidad ²) cuando $\xi \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

4.2. Caso β

En este caso, dos raíces coinciden en un máximo $u_1 = u_2$. Las órbitas de primer tipo son órbitas circulares (estables) de radio $r = 1/u_1 = 1/u_2$ y tienen excentricidad $e = 0$. Las de

²En realidad las partículas no pueden terminar en el origen $r = 0$ ya que en el radio $r = 2M$ existe una singularidad. Sin embargo, si nos situamos en infinito, el radio $r = 2M$ es muy pequeño y prácticamente indistinguible de $r = 0$. Entonces, este resultado nos dice que las partículas se aproximan a la singularidad más externa $r = 2M$. Esto se aplica para todas las órbitas de segundo tipo

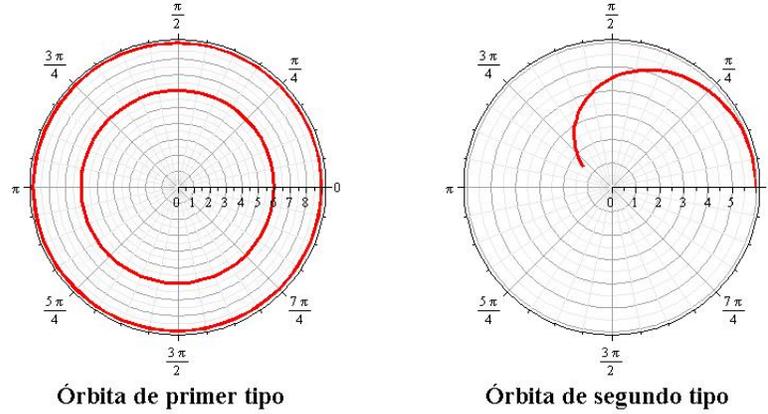


Figura 4-3: Gráficas de las órbitas para el caso β : En la gráfica de la izquierda se muestra una órbita de primer tipo con parámetros $r_3 = 6$ y $r_2 = r_1 = 9$. En la gráfica de la derecha se muestra una órbita de segundo tipo con parámetros $r_3 = 6$, $R_o = 9$ y $\lambda = 10, B = -6$.

segundo tipo también están etiquetadas como órbitas de excentricidad cero, sin embargo no son circunferencias. En realidad son espirales que inician en el afelio $r_3 = 1/u_3$ y terminan en la singularidad después de dar un número finito de vueltas. Ver figura 4-3.

Las órbitas de segundo tipo están dadas por

$$u = u_3 + \left(u_3 - \frac{1}{R_o}\right) \tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda - B}(\phi - \phi_o)\right).$$

De la expresión anterior podemos observar que estas órbitas inician en u_3 (el afelio) en $\phi = \phi_o$ y terminan en la singularidad después de dar un número finito de vueltas. Es decir, $u \rightarrow \infty$ cuando $\phi = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - B}} + \phi_o$.

4.3. Caso γ

En este caso nuevamente tenemos dos raíces repetidas, $u_2 = u_3$, sólo que a diferencia del caso anterior, éstas corresponden a un mínimo de $g(u)$. Las órbitas de primer tipo comienzan en un radio $r_1 = 1/u_1$ (el afelio) y se aproximan asintóticamente la órbita circular de radio $r_3 = 1/u_3$ (el perihelio). Es decir, las partículas se acercan a una órbita inestable describiendo una espiral que da un número infinito de vueltas antes de llegar a la órbita inestable de radio $r = 1/u_2 = 1/u_3$. Las órbitas de segundo tipo son espirales que se alejan del radio $r = 1/u_2 =$

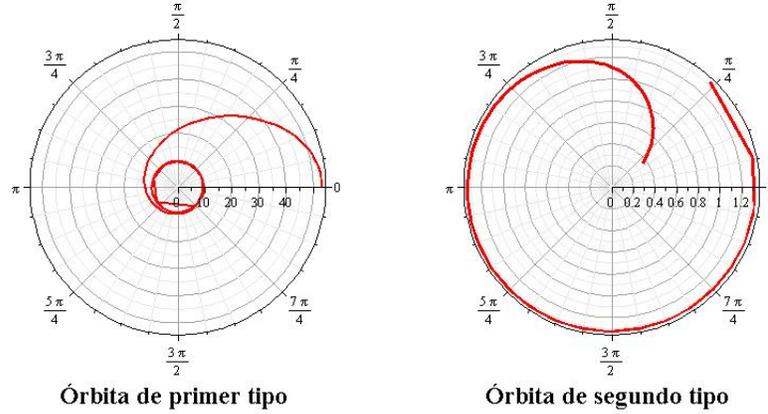


Figura 4-4: Gráfica de las órbitas para el caso γ : En la gráfica de la izquierda se muestra una órbita de primer tipo con parámetros $e = 0.7$, $R_o = 16$ y $C = 2$. En la gráfica de la derecha se muestra una órbita de segundo tipo con parámetros $e = 6.5$, $R_o = 10$ y $C = 1$.

$1/u_3$ (la órbita inestable) dando un número infinito de vueltas para finalmente terminar en la singularidad. Ver figura 4-4.

Las trayectorias de primer tipo son descritas paraméricamente por

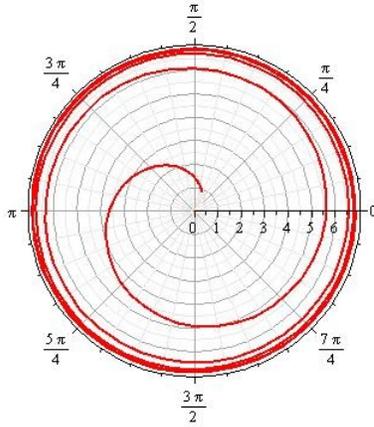
$$u = \frac{1}{R_o}(1 + e \cos(\chi)), \quad \phi = -\sqrt{\frac{R_o}{2Ce}} \ln \left(\tan \frac{1}{4}\chi \right).$$

De esta expresión vemos que la partícula alcanza el radio $r = r_3$ (el perihelio) cuando $\chi \rightarrow 0$, o equivalentemente cuando $\phi \rightarrow \infty$.

Las trayectorias de segundo tipo están parametrizadas de la siguiente manera

$$u = \frac{1}{R_o} \left(1 + e + 2e \tan^2 \left(\frac{1}{2}\xi \right) \right), \quad \phi = -\sqrt{\frac{R_o}{2Ce}} \ln \left(\tan \frac{1}{4}\xi \right).$$

En este caso, la partícula se encuentra en la órbita $r = r_2 = r_3$ (la órbita inestable) cuando $\xi \rightarrow 0$ y termina en la singularidad cuando $\xi \rightarrow \infty$. Por otro lado, ϕ tiende a infinito cuando ξ se aproxima a cero, e inversamente ϕ tiende a cero cuando ξ tiende a infinito .



Órbita de primer y segundo tipo

Figura 4-5: gráficas de las órbitas para el caso δ , se ha tomado $\phi_0 = 0$, $r_{lso} = 7$ y $C = 3$

4.4. Caso δ

Este es el caso que describe el comportamiento de las partículas cuando alcanzan el radio de la última órbita estable. En este caso las tres raíces coinciden y corresponden a un punto de inflexión de $g(u)$. Aquí las órbitas de primer tipo y de segundo tipo son las mismas. Éstas son órbitas que describen espirales que se aproximan asintóticamente a la última órbita estable $r_{lso} = 1/u_1 = 1/u_2 = 1/u_3$ dando un número infinito de vueltas. Ver figura 4-5.

Las trayectorias de las órbitas están descritas paramétricamente por

$$u = \frac{4}{C(\phi - \phi_0)^2} + \frac{1}{r_{lso}}.$$

A partir de esta solución vemos que, la partícula se aproxima a la última órbita estable ($u \rightarrow \frac{1}{r_{lso}}$) cuando $\phi \rightarrow \infty$. Asimismo, termina en la singularidad (es decir $u \rightarrow \infty$) cuando $\phi \rightarrow \phi_0$.

4.5. Caso ϵ

En este caso consideramos que $g(u)$, tiene solamente una raíz real positiva y las otras dos raíces son complejas conjugadas. A diferencia de los casos anteriores, sólo hay órbitas de

segundo tipo que, iniciando en el afelio $r_1 = 1/u_1$ terminan en la singularidad . Estas órbitas se caracterizan por tener un excentricidad imaginaria.

Las órbitas están descritas paramétricamente por

$$u = \frac{1}{R_o} \left(1 + e \tan \left(\frac{1}{2} \xi \right) \right), \quad \text{con } \xi \in (\xi_o, \pi).$$

Se puede observar que la partícula se encuentra en el afelio $r_1 = 1/u_1$ cuando $\xi = \xi_o$, y termina en la singularidad cuando $\xi = \pi$. La coordenada angular está parametrizada de la siguiente manera

$$\phi = \frac{R_o}{e} \frac{1}{\Delta} (K(k) - F(\psi, k)), \quad (4-19)$$

donde

$$\Delta^2 = (B - 3\lambda)^2 + e^2 \lambda^2,$$

$$\text{sen}^2 \psi = \frac{1}{\Delta + (B - 3\lambda)} [\Delta + e \lambda \text{sen}(\xi) - (B - 3\lambda) \text{cos}(\xi)],$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \theta}},$$

donde $K(k)$ es la integral elíptica completa y $F(\psi, k)$ es la integral elíptica incompleta, tal como se define en el caso α .

Capítulo 5

Conclusiones

Finalmente, en este capítulo haremos un resumen de nuestros resultados, así como de su posible interpretación.

En primer lugar se discutió un poco sobre la controversia alrededor del tema de las singularidades desnudas y sobre su importancia en la Física. Posteriormente, hablamos sobre la importancia que tiene estudiar soluciones que describan el espacio-tiempo de objetos cuya simetría no es estrictamente esférica. Con esta motivación, se habló sobre una solución axisimétrica a las ecuaciones de Einstein en el vacío presentada en el artículo “Mass quadrupole as a source of naked singularities” [5].

Durante el capítulo 2, pudimos observar reiteradas veces que, al tomar el límite $q \rightarrow 0$, se obtienen los resultados de la métrica de Schwarzschild. Al tomar este límite la métrica, los símbolos de Christoffel y por lo tanto, las ecuaciones geodésicas son las mismas que las de Schwarzschild. Esto significa que este espacio-tiempo es una buena generalización del Schwarzschild, con la diferencia fundamental que para $q \neq 0$ se trata de una singularidad desnuda. Además, se puede observar que, independientemente del valor de q , para valores de r suficientemente grandes, se recupera la métrica de Minkowski.

Se encontró otra definición diferente a la propuesta en [5] para la función de masa efectiva. Esta función de masa efectiva, fue encontrada a partir de expresar el término g_{tt} de la métrica de la singularidad desnuda de manera similar a la de la métrica de Schwarzschild. Esta función, a diferencia de la masa efectiva definida en [5] es positiva para en todo su dominio. Asimismo, pueden existir otras formas de definir la masa efectiva diferentes a la presentada en este trabajo

y a la presentada en [5]. Esto muestra la importancia de hallar una definición invariante de masa efectiva y, como veremos más adelante, de potencial efectivo.

Por otro lado, se encontró que en este espacio-tiempo para el movimiento geodésico de partículas y fotones existen dos cantidades conservadas: la energía y el momento angular. Esto permitió, al restringir el movimiento al plano ecuatorial, encontrar una ecuación radial muy sencilla (3-32). A partir de esta ecuación se definieron dos posibles potenciales efectivos (Φ^2 y $|\Phi|$) para partículas y para fotones.

Usando estos potenciales efectivos, hallamos las órbitas circulares para fotones y la última órbita estable para partículas.

Para fotones obtuvimos (con ambos potenciales) que los únicos radios que son candidatos a ser los radios de las órbitas circulares son $r_1 = 2M$ y $r_0 = (2q + 3)M$. De éstos, el primero coincide con la singularidad más externa del espacio-tiempo de la singularidad desnuda y el segundo es una generalización de la órbita circular para fotones del espacio-tiempo de Schwarzschild. Bajo la primera elección de potencial efectivo Φ_{fot}^2 , el radio $r_1 = 2M$ es un punto crítico solamente para valores de q mayores a cero, es decir cuando el objeto que genera el espacio-tiempo posee una forma de esferoide oblató. Asimismo, al calcular la segunda derivada del potencial efectivo, observamos que r_1 es un posible punto de inflexión si $q > 1/2$. Para el radio $r_0 = (2q + 3)M$ se determinó que bajo esta definición de potencial efectivo es una órbita circular inestable, para cualquier valor de q .

Para la segunda elección de potencial efectivo ($|\Phi_{\text{fot}}|$), obtuvimos algo similar para ambos radios, con la única diferencia de que el radio r_1 es un punto crítico del potencial efectivo para $q > 1/2$. Lo cual, corresponde nuevamente a considerar el espacio-tiempo generado por la presencia de un objeto con forma de esferoide oblató. Al calcular la segunda derivada, se observa que ésta se anula en r_1 para valores de q mayores a $3/2$. A pesar de que realizamos este análisis para $r_1 = 2M$, éste queda descartado como una órbita circular ya que en esta región de espacio-tiempo se presenta una singularidad de curvatura. Por otro lado, para r_0 se determinó que se trata de el radio de una órbita circular inestable para fotones.

De estos resultados para órbitas circulares se destaca el valor $q = 1/2$. Al analizar este valor particular de q , se observa que el potencial efectivo para fotones es el mismo que el de Schwarzschild (para cualquier elección de potencial). Esto significa que, a pesar de que el

espacio-tiempo generado por un esferoide oblató con $q = 1/2$ es distinto al de uno esférico, el comportamiento cualitativo de los fotones alrededor de ellos es el mismo.

A pesar de las diferencias entre los resultados al elegir cada potencial efectivo, podemos concluir que el radio $r_0 = (2q + 3)M$, que se encuentra fuera de la singularidad más externa $r = 2M$, es el mejor candidato a ser la órbita circular (inestable) para fotones. Esto es debido a que es un punto crítico para cualquiera de las dos definiciones de potencial efectivo y para cualquier valor de q .

Para partículas, se obtiene el mismo resultado para cualquier elección de potencial, la única diferencia radica en la complejidad de los cálculos. En este caso, no obtuvimos una expresión para todas las órbitas circulares. Sin embargo, se obtuvo la expresión (3-37) de la cual, los radios de las órbitas circulares pueden ser obtenidos numéricamente fijando los valores del parámetro q y la masa M_0 del objeto. A pesar de no poder escribir una expresión analítica para los radios, es posible saber cual es la última órbita estable. Esta órbita es importante ya que nos indica cuánto se puede acercar una partícula a la singularidad y mantenerse en órbita. Primero se determinó el momento angular específico y la energía específica que poseen las partículas en cierta órbita circular (ver expresiones (3-39) y (3-40)). De dichas expresiones pudimos observar que los radios de las órbitas circulares para partículas poseen una cota inferior que coincide con r_0 . Las partículas no pueden estar en órbita circular en el radio r_0 , ya que esto requeriría que poseyeran una energía infinita y un momento angular infinito. Por otro lado, se halló el momento angular que deben poseer las partículas en la última órbita estable(3-44). A partir de estas expresiones se encontró que la última órbita circular se encuentra determinada por $r = M(3q + 4) \pm M\sqrt{5q^2 + 10q + 4}$. Gracias a que solamente pueden existir órbitas circulares en la región $r > (2q + 3)M$ casi todos las órbitas con radio $r = M(3q + 4) - M\sqrt{5q^2 + 10q + 4}$ quedan descartadas (excepto algunas muy cercanos a la singularidad). Asimismo se encontró que de todos los posibles radios para la última órbita estable (para cualquier valor de q), el radio $r = \frac{5+3\sqrt{5}}{5}M \approx 2.34M$ es el más pequeño de ellos, el cual corresponde al valor de $q = -1 + \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Esto significa que el radio mínimo del conjunto de posibles órbitas estables para la singularidad desnuda se encuentra fuera de la singularidad $r = 2M$.

Estos resultados fueron corroborados en el análisis comparativo. Con este análisis mostramos que, en general, para espacios-tiempo generados por la presencia de una masa en forma de

esferoide prolato, las órbitas de partículas son más internas que las de Schwarzschild. Análogamente para espacios-tiempo generados por la presencia de un esferoide oblato, las órbitas circulares de partículas son más externas que las de Schwarzschild. Esto nos da indicios de cómo diferenciar con partículas de prueba, el espacio-tiempo generado por agujero negro de Schwarzschild y el de una singularidad desnuda.

Finalmente, en el análisis perturbativo, encontramos que el comportamiento de partículas prueba en la singularidad desnuda con momento cuadrupolar es el mismo cualitativamente (las trayectorias de las partículas son idénticas en forma) que el de Schwarzschild (para partículas muy alejadas de la singularidad). Cabe destacar que este análisis es válido para valores del parámetro q en el intervalo $(-1, 0)$, es decir para esferoides prolatos, donde las partículas consideradas son de baja energía $\tilde{E} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ y momento angular $\tilde{\ell}^2 > 3M^2(q(3E^2 - 1) + 2E^2)$.

Apéndice A

Corrimiento al rojo y geodésicas radiales

En la primera sección de este apéndice (A.1) estudiaremos el corrimiento al rojo en el espacio-tiempo de la singularidad desnuda para dos casos. En el primer caso (A.1.1) consideraremos que tanto el emisor como el receptor tienen coordenadas espaciales fijas (r, θ, ϕ) , y en el segundo caso (A.1.2) estudiaremos el corrimiento al rojo cuando el receptor se encuentra en reposo en infinito y el emisor se aproxima a la singularidad moviéndose sobre una geodésica radial.

En la segunda sección de este apéndice (A.2) estimaremos el tiempo propio y coordenado que le tomaría a una partícula viajar en geodésica radial desde infinito hasta la singularidad.

A.1. Corrimiento al rojo

A.1.1. Emisor y receptor con coordenadas espaciales fijas

Supongamos que tanto el emisor \mathcal{E} como el receptor \mathcal{R} se encuentran fijos en el espacio, es decir con coordenadas espaciales constantes $(r_{\mathcal{E}}, \theta_{\mathcal{E}}, \phi_{\mathcal{E}})$ y $(r_{\mathcal{R}}, \theta_{\mathcal{R}}, \phi_{\mathcal{R}})$, respectivamente. En el evento A con coordenadas $(t_{\mathcal{E}}, r_{\mathcal{E}}, \theta_{\mathcal{E}}, \phi_{\mathcal{E}})$, \mathcal{E} lanza un fotón que es alcanzado por \mathcal{R} en el evento C con coordenadas $(t_{\mathcal{R}}, r_{\mathcal{R}}, \theta_{\mathcal{R}}, \phi_{\mathcal{R}})$. Después de cierto tiempo coordenado $\Delta t_{\mathcal{E}}$ el emisor vuelve a lanzar un fotón en el evento B con coordenadas $(t_{\mathcal{E}} + \Delta t_{\mathcal{E}}, r_{\mathcal{E}}, \theta_{\mathcal{E}}, \phi_{\mathcal{E}})$, que es alcanzado por el receptor en el evento D con coordenadas $(t_{\mathcal{R}} + \Delta t_{\mathcal{R}}, r_{\mathcal{R}}, \theta_{\mathcal{R}}, \phi_{\mathcal{R}})$. Ver figura A-1.

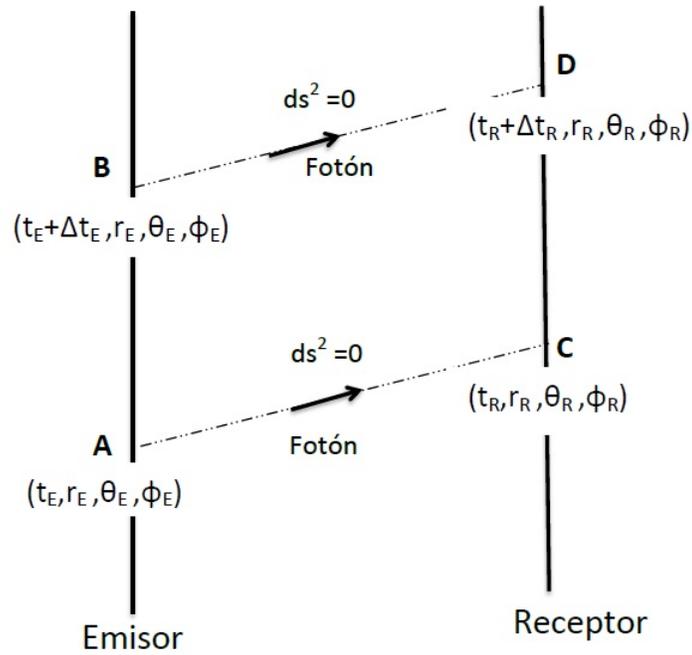


Figura A-1: Se muestra la línea de mundo del emisor y del receptor, donde puede observarse que ambos tienen coordenadas espaciales fijas. En el evento A el emisor lanza un fotón que es alcanzado por el receptor en el evento C . Después de un tiempo coordinado Δt_E el emisor vuelve a lanzar un fotón (representado en el evento B) que es alcanzado por el receptor en el evento D . Este proceso se repite indefinidamente a lo largo de sus líneas de mundo.

Sabemos que los fotones siguen geodésicas nulas, es decir $ds^2 = 0$, por lo tanto $-g_{tt} dt^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ donde $\{i, j\} \in \{r, \theta, \phi\}$. Si el parámetro afín es σ se tiene,

$$\int_{t_E}^{t_R} dt = \int_{\sigma_E}^{\sigma_R} \left(-\frac{g_{ij} dx^i dx^j}{g_{tt} d\sigma d\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} d\sigma. \quad (\text{A-1})$$

Como las coordenadas espaciales tanto del emisor como del receptor están fijas, la diferencia $t_R - t_E = \Delta\sigma$, tiene el mismo valor para todas las señales emitidas, es decir $\Delta t_R + t_R - (\Delta t_E + t_E) = \Delta\sigma$, por lo tanto $\Delta t_E = \Delta t_R$.

Por otro lado, tanto en la línea de mundo del emisor como en la del receptor $dr = d\theta = d\phi = 0$, por lo cual $d\tau^2 = ds^2 = g_{tt} dt^2$. Esto nos permite calcular el tiempo propio que mide cada observador de la siguiente manera,

$$\Delta\tau_E = (g_{tt}(r_E, \theta_E, \phi_E))^{1/2} \Delta t_E, \quad \Delta\tau_R = (g_{tt}(r_R, \theta_R, \phi_R))^{1/2} \Delta t_R. \quad (\text{A-2})$$

Con estos elementos podemos calcular el cociente entre la frecuencia con la que el emisor lanza los fotones ν_E y la frecuencia con la que estos fotones alcanzan al receptor ν_R ,

$$\frac{\nu_E}{\nu_R} = \frac{\Delta\tau_R}{\Delta\tau_E} = \left(\frac{g_{tt}(r_R, \theta_R, \phi_R)}{g_{tt}(r_E, \theta_E, \phi_E)} \right)^{1/2}. \quad (\text{A-3})$$

Asimismo, se define el corrimiento al rojo z como,

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}, \quad (\text{A-4})$$

donde λ es la longitud de onda del fotón.

Este parámetro se relaciona con el cociente entre el tiempo propio del emisor y receptor mediante la ecuación,

$$z + 1 = \frac{\Delta\tau_R}{\Delta\tau_E} = \frac{\nu_E}{\nu_R}. \quad (\text{A-5})$$

Para el caso de la métrica de Schwarzschild este parámetro está determinado por la siguiente relación,

$$z^{sch} + 1 = \left(\frac{1 - 2M/r_{\mathcal{R}}}{1 - 2M/r_{\mathcal{E}}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A-6})$$

Para el caso de la métrica de la singularidad desnuda con momento cuadrupolar el corrimiento al rojo posee la siguiente expresión,

$$z^{sd} + 1 = \left(\frac{1 - 2M/r_{\mathcal{R}}}{1 - 2M/r_{\mathcal{E}}} \right)^{\frac{1}{2}(q+1)}. \quad (\text{A-7})$$

En ambos casos se cumple que si el receptor se encuentra en un radio más externo que el emisor $r_{\mathcal{R}} > r_{\mathcal{E}}$, entonces $\nu_{\mathcal{R}} < \nu_{\mathcal{E}}$ (o equivalentemente $\Delta\tau_{\mathcal{R}} > \Delta\tau_{\mathcal{E}}$). Análogamente si el receptor se encuentra en un radio más interno que el emisor $r_{\mathcal{R}} < r_{\mathcal{E}}$, entonces $\nu_{\mathcal{R}} > \nu_{\mathcal{E}}$ (o equivalentemente $\Delta\tau_{\mathcal{R}} < \Delta\tau_{\mathcal{E}}$).

Por otro lado, si consideramos que el emisor se encuentra muy cercano al radio $2M$ (es decir $r_{\mathcal{E}} \rightarrow 2M$), entonces $z \rightarrow \infty$.

La diferencia en lo que respecta al corrimiento al rojo entre el caso de Schwarzschild y el de la singularidad desnuda es que el corrimiento al rojo en el caso de la singularidad desnuda es mayor que el de Schwarzschild si $q > 0$ y menor si $q < 0$.

Si consideramos $q \rightarrow -1$, el corrimiento al rojo tiende a cero. Esto es consistente con las ecuaciones (2-19) y (2-20), ya que cuando $q \rightarrow -1$ la masa del objeto tiende a cero, $M_0 \rightarrow 0$. Por lo tanto, tomar $q \rightarrow -1$ es equivalente a considerar el espacio-tiempo en ausencia de materia, en el cual el corrimiento al rojo es cero si el emisor y receptor se encuentran en posiciones espaciales fijas.

A.1.2. Emisor en geodésica radial y receptor en reposo en infinito

Supongamos ahora que el emisor se encuentra moviéndose sobre una geodésica radial (en el plano ecuatorial) y el receptor se encuentra en reposo infinitamente alejado de la fuente. Ver figura A-2.

Podemos calcular la energía $E_{\mathcal{R}}$ que el receptor mide del fotón que recibe mediante la siguiente expresión,

$$E_{\mathcal{R}} = \vec{p} \cdot \vec{u}_{\mathcal{R}}, \quad (\text{A-8})$$

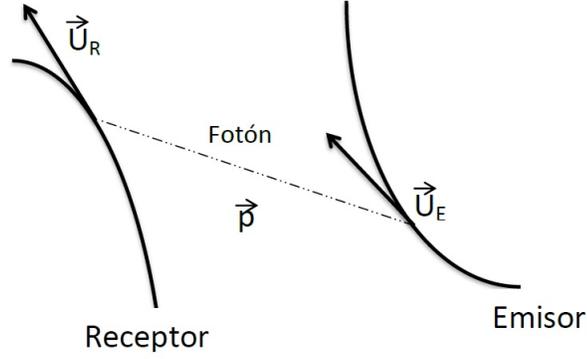


Figura A-2: En esta figura se observan las líneas de mundo del emisor y del receptor, además se muestra el vector 4-velocidad de cada uno en el instante en que el emisor lanza el fotón y en el instante en que este fotón es alcanzado por el receptor. La trayectoria del fotón está representada por una línea punteada. Aunque en esta figura sólo se muestra que el emisor lanza el fotón una vez, en realidad el emisor lanza fotones a intervalos regulares.

donde \vec{p} es el 4-momento del fotón y $u_{\mathcal{R}}$ es la 4-velocidad del receptor.

Análogamente podemos encontrar que la energía que posee el fotón según el sistema de referencia del emisor es, $E_{\mathcal{E}} = \vec{p} \cdot u_{\mathcal{E}}$.

Como $E = h\nu$, entonces el cociente de frecuencias $\nu_{\mathcal{R}}/\nu_{\mathcal{E}}$ está determinado por,

$$\frac{\nu_{\mathcal{R}}}{\nu_{\mathcal{E}}} = \frac{\vec{p} \cdot u_{\mathcal{R}}}{\vec{p} \cdot u_{\mathcal{E}}}. \quad (\text{A-9})$$

Si el receptor se encuentra en reposo en infinito, posee un vector 4-velocidad dado por,

$$u_{\mathcal{R}} = (1, 0, 0, 0). \quad (\text{A-10})$$

Como hemos supuesto que el emisor se mueve por una geodésica radial, $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ y $\tilde{\ell} = 0$. Usando las ecuaciones (3-28) y (3-29) obtenemos las otras dos componentes del vector 4-velocidad,

$$\dot{t}_{\mathcal{E}} = \tilde{E}_{\mathcal{E}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-(1+q)}, \quad (\text{A-11})$$

$$\dot{r}_{\mathcal{E}} = \left(\tilde{E}_{\mathcal{E}}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1+q}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{M^2}{r^2 - 2Mr}\right)^{\frac{1}{2}q(2+q)}, \quad (\text{A-12})$$

donde $\tilde{E}_{\mathcal{E}}$ es la energía específica del emisor.

Con estos elementos calculamos el cociente de frecuencias,

$$\frac{\nu_{\mathcal{E}}}{\nu_{\mathcal{R}}} = \frac{p_t \dot{t}_{\mathcal{E}} + p_r \dot{r}_{\mathcal{E}}}{p_t}. \quad (\text{A-13})$$

Para determinar completamente este cociente es necesario conocer las expresiones para p_t y p_r , estas componentes las obtenemos de la ecuación geodésica para fotones como se muestra a continuación.

Sabemos que el fotón debe seguir una geodésica nula, lo cual en términos del vector 4-momento significa, $p_{\mu}p^{\mu} = 0$. Si consideramos geodésicas radiales se tiene que $\ell = 0$, entonces $p_{\theta} = p_{\phi} = 0$. Haciendo esto, la ecuación geodésica para fotones resulta,

$$g^{tt}(p_t)^2 + g^{rr}(p_r)^2 = 0. \quad (\text{A-14})$$

De esta última ecuación obtenemos,

$$\frac{p_r}{p_t} = \sqrt{-\frac{g^{tt}}{g^{rr}}}. \quad (\text{A-15})$$

Con este último cálculo y la ecuación (A-13) determinamos que el valor del cociente $\frac{\nu_{\mathcal{E}}}{\nu_{\mathcal{R}}} = z + 1$, esta dado por,

$$z + 1 = \frac{\tilde{E}_{\mathcal{E}} + \left(\tilde{E}_{\mathcal{E}}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{q+1} \right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1+q}}. \quad (\text{A-16})$$

De esta última expresión podemos observar que si $r \rightarrow 2M$ entonces $z \rightarrow \infty$ (equivalentemente $\nu_{\mathcal{R}} \rightarrow 0$ ó $\Delta\tau_{\mathcal{R}} \rightarrow \infty$).

A.2. Tiempo propio y tiempo coordinado

En el caso de Schwarzschild el tiempo propio que le toma a una partícula alcanzar tanto al horizonte de eventos como a la singularidad es finito, mientras que el tiempo coordinado que le toma a la partícula alcanzar el horizonte de eventos es infinito. Esto significa que observadores en infinito ven que las partículas que se mueven en una geodésica radial nunca alcanzan el

horizonte de eventos y por lo tanto tampoco la singularidad. En esta sección haremos este mismo análisis pero ahora en el espacio-tiempo de la singularidad desnuda.

Nuevamente consideraremos geodésicas radiales para partículas en el plano ecuatorial, es decir $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\dot{\phi} = 0$. Sustituyendo $\tilde{\ell} = 0$ en la ecuación (3-32) obtenemos,

$$\left(1 + \frac{M^2}{r^2 - 2Mr}\right)^{-q(2+q)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{q+1}. \quad (\text{A-17})$$

A partir de esta ecuación diferencial podemos determinar que el tiempo propio que le toma a una partícula viajar de un radio r_b a uno r_a es

$$\Delta\tau = \int_{r_a}^{r_b} \left(\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{q+1}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{M^2}{r^2 - 2Mr}\right)^{-\frac{1}{2}q(2+q)} dr. \quad (\text{A-18})$$

Es interesante calcular el tiempo propio que le toma a una partícula viajar desde una región muy alejada de la fuente $r \rightarrow \infty$, hasta la singularidad de curvatura $r = 2M$.

La integral a evaluar es ¹

$$\tau_{2M} = \int_{\infty}^{2M} \left(\frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}(q+1)} \left(1 + \frac{M^2}{r^2 - 2Mr}\right)^{-\frac{1}{2}q(2+q)} dr. \quad (\text{A-19})$$

No es posible resolver analíticamente esta integral, sin embargo si hacemos una expansión en serie de Taylor del integrando alrededor de $q = 0$, determinamos que τ_{2M} es una cantidad finita tal como sucede en el caso de Schwarzschild.

Ahora estudiaremos que sucede con el tiempo coordenado t .

Usando la regla de la cadena de las ecuaciones (A-18) y (3-28) obtenemos,

$$\Delta t = \int_{r_a}^{r_b} \tilde{E} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-(1+q)} \left(\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{q+1}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{M^2}{r^2 - 2Mr}\right)^{-\frac{1}{2}q(2+q)} dr. \quad (\text{A-20})$$

Esta última expresión nos da el tiempo coordenado t que le toma a una partícula viajar en geodésica radial desde un radio r_b hasta un radio r_a . Por lo que, según el reloj de un observador en infinito, una partícula tarda un tiempo t_{2M} en llegar a la singularidad, donde t_{2M} está dado

¹Si $r \rightarrow \infty$ entonces $\tilde{E} \rightarrow 1$, Asimismo hemos considerado $\tau(r \rightarrow \infty) = \tau_0 = 0$.

por

$$t_{2M} = \int_{\infty}^{2M} \tilde{E} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-(1+q)} \left(\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{q+1}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{M^2}{r^2 - 2Mr}\right)^{-\frac{1}{2}q(2+q)} dr. \quad (\text{A-21})$$

Haciendo una expansión alrededor de $q = 0$ y $r = 2M$, se determina que t_{2M} es una cantidad finita si $q < 0$ y tiende a infinito si $q > 0$. Esto significa que si $q < 0$, a diferencia del caso de Schwarzschild, un observador en infinito vería a las partículas prueba alcanzar la singularidad de curvatura.

Bibliografía

- [1] Tom W. B. Kibble, Frank H. Berkshire *Classical Mechanics*. Imperial College Press, 2004.
- [2] John Earman *Bangs, crunches, whimpers, and shrieks: singularities and acausalities in relativistic spacetimes*. Oxford University Press, 1995.
- [3] Pankaj S. Joshi and Daniele Malafarina *Recent developments in gravitational collapse and spacetime singularities* International Journal of Modern Physics (2012)
- [4] B. F. Schutz *A first course in general relativity*. Cambridge University Press, 1984.
- [5] H. Quevedo, *Mass quadrupole as a source of naked singularities*. Int. J. Mod. Phys. D (2011), arXiv:gr-qc/arXiv:1012.403
- [6] M. P. Hobson, G Efstathiou and A. N. Lasenby *General Relativity An introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [7] Robert M. Wald *General Relativity* . University of Chicago Press, 1984.
- [8] S. Chandrasekhar *The mathematical theory of black holes*. Oxford University Press, 1998
- [9] H. Quevedo *Pioneer's Anomaly and the Solar Quadrupole Moment* . General Relativity and Quantum Cosmology, arXiv:gr-qc/0501006v2
- [10] D. Pugliese, H. Quevedo and R. Ruffini *Equatorial circular motion in Kerr spacetime* . Phys. Rev. D (2011), arXiv:1105.2959v2
- [11] C. Bambi and N. Yoshida *Disk Accretion in Kerr Space-Time with Arbitrary Spin Parameter* . Phys. Rev. D (2011).

- [12] C. Bambi, T. Harada, R. Takahashi. *Outflows from Accreting Super-Spinars* . Phys. Rev. D (2010).