Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ALGUNAS PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DE LOS ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

JOSÉ ALBERTO MARTÍNEZ MORALES

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Ángel Tamariz Mascarúa

La fecha

Índice general

Bibliografía **111**

Introducción

Si X y Y son espacios topológicos, entonces con $\mathcal{C}(X,Y)$ denotamos al conjunto de todas las funciones continuas de X a Y; esto es $\mathcal{C}(X,Y)=\{f : X \to Y : f$ es una función continua$\}$. En lo que aquí concierne, nos concentraremos en $\mathcal{C}(X,Y)$ en el caso en el que X es un espacio de Tychonoff y Y es el conjunto de los números reales dotados de su topología usual. En este caso $\mathcal{C}(X,Y)$ será denotado por $\mathcal{C}(X)$. Estudiaremos tres tipos de topología para $\mathcal{C}(X)$, la topología de la norma del supremo , la topología compacto-abierta y la topología de la convergencia puntual.

En el capítulo 1 empezaremos dando algunas definiciones y algunos conceptos importantes que, o bien son muy conocidos o son fundamentales.

En el capítulo 2 se expondrán los Teoremas de Jameson que a grandes rasgos nos dan condiciones para que $\mathcal{C}^*(X)$ ($\mathcal{C}^*(X)$ es el subconjunto de $\mathcal{C}(X)$ que consiste de todas las funciones acotadas), dotado de la topología de la norma, sea un espacio separable, el Teorema de Stone-Weierstrass que garantiza cuándo un subconjunto de $\mathcal{C}^*(X)$ es denso y, por último, el Teorema de Ascoli, el cual nos da condiciones para que un subconjunto de $\mathcal{C}^*(X)$ sea compacto.

En el capítulo 3 se expondrán condiciones necesarias y suficientes a un espacio topológico X, para que $\mathcal{C}(X)$, dotado de la topología compacto-abierta, sea un espacio metrizable o completamente metrizable, además incluimos el Teorema de Arzelá-Ascoli que garantiza bajo que condiciones la cerradura de un subconjunto de $\mathcal{C}(X)$ es compacta.

Y por último, en el capítulo 4, estudiaremos las funciones cardinales topológicas (funciones que a cada espacio topológico X le asocian un cardinal infinito κ) de $\mathcal{C}(X)$ dotado de la topología de la convergencia puntual.

CAPÍTULO 1

Notación

Desde ahora en adelante (a menos que se especifique) todos los espacios topológicos X son espacios topológicos completamente regu-lares o de Tychonoff, entonces satisfacen las siguientes condiciones:

(1) X es un espacio T_1; y

(2) para cualquier subconjunto cerrado F de X y cualquier punto $x \notin \mathrm{F}$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f[\mathrm{F}] \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$.

Para un espacio X, con $\mathcal{C}(X)$ se denotará el conjunto de todas las funciones continuas de valores reales definidas en X; esto es $\mathcal{C}(X)$=$\{f : X \to \mathbb{R} : f$ es una función continua$\}$ y con $\mathcal{C}^*(X)$ al subconjunto de $\mathcal{C}(X)$ el cual consiste de todas las funciones acotadas; es decir $\mathcal{C}^*(X)$=$\{f : X \to \mathbb{R} : f$ es una función continua y acotada$\}$.

Para un espacio X, sea $\mathcal{P}(X)$=$\{A : A \subseteq X\}$ el conjunto potencia de X y con $\mathcal{K}(X)$ el subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ que consiste de todos los subconjuntos compactos de X. Para un subconjunto Z de los números reales acotado tanto inferiormente como superiormente, con $\sup Z$ e $\inf Z$ denotaremos el supremo y el ínfimo de Z respectivamente.

En un espacio métrico (X, d), para un subconjunto A de X y ε un número positivo, con $\mathrm{B}(\mathrm{A}, \varepsilon)$ denotamos el siguiente conjunto

$$\mathrm{B}(\mathrm{A}, \varepsilon)=\{x \in X : d(x, \mathrm{A}) < \varepsilon\},$$

donde $d(x, \mathrm{A}) = \text{ínf}\{d(x,a) : a \in \mathrm{A}\}$.

Definición 1.0.1. *Para un espacio topológico X, sea $f \in \mathcal{C}(X)$ y $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(X)$. Definimos el siguiente conjunto (en el caso que el conjunto este acotado)*

$$\|f\|_{\mathrm{A}} = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in \mathrm{A}\},$$

y para $\varepsilon > 0$ definimos

$$\mathcal{W}(f, \mathrm{A}, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{C}(X) : \|f - g\|_{\mathrm{A}} < \varepsilon\}.$$

Lema 1.0.2. *Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto no vacío de $\mathcal{P}(X)$ tal que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \in \mathcal{A}$ para todo $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}$. Entonces la familia*

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{W}(f, \mathrm{A}, \varepsilon) : f \in \mathcal{C}(X), \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \varepsilon > 0\}$$

forma una base para una topología en $\mathcal{C}(X)$.

Demostración. Sean $\mathcal{W}(f, \mathrm{A}, \varepsilon), \mathcal{W}(g, \mathrm{B}, \delta) \in \mathcal{B}$ tales que $\mathcal{W}(f, \mathrm{A}, \varepsilon) \cap \mathcal{W}(g, \mathrm{B}, \delta) \neq \emptyset$. Tomemos un elemento $h \in \mathcal{W}(f, \mathrm{A}, \varepsilon) \cap \mathcal{W}(g, \mathrm{B}, \delta)$ y definamos el siguiente conjunto $\mathcal{W}(h, \mathrm{A} \cup \mathrm{B}, r)$, donde $r = \min(\varepsilon - \|f - h\|_{\mathrm{A}}, \delta - \|g - h\|_{\mathrm{B}})$. Ahora, como $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}$, por hipótesis tenemos que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \in \mathcal{A}$ y claramente $\mathcal{W}(h, \mathrm{A} \cup \mathrm{B}, r)$ es un elemento de $\mathcal{B}$, solamente nos queda por justificar que $\mathcal{W}(h, \mathrm{A} \cup \mathrm{B}, r) \subseteq \mathcal{W}(f, \mathrm{A}, \varepsilon) \cap \mathcal{W}(g, \mathrm{B}, \delta)$. En efecto, tomemos un elemento j de $\mathcal{W}(h, \mathrm{A} \cup \mathrm{B}, r)$, entonces $\|h - j\|_{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} < r \leqslant \varepsilon + \|f - h\|_{\mathrm{A}}$, de donde

$$\|f - h\|_{\mathrm{A}} + \|h - j\|_{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Necesitamos hacer una pequeña observación, tomemos un elemento $x \in \mathrm{A}$ arbitrario, entonces se tiene que $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, de donde $|f(x) - j(x)| \leqslant |f(x) - h(x)| + |h(x) - j(x)| \leqslant \|f - h\|_{\mathrm{A}} + \|h - j\|_{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$, por lo tanto

$$\|f - j\|_{\mathrm{A}} \leqslant \|f - h\|_{\mathrm{A}} + \|h - j\|_{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}. \tag{1.2}$$

De (1.1) y (1.2) se tiene lo siguiente $\|f - j\|_{\mathrm{A}} < \varepsilon$. De donde $j \in \mathcal{W}(f, \mathrm{A}, \varepsilon)$. De manera análoga se tiene que $j \in \mathcal{W}(g, \mathrm{B}, \delta)$. Por lo tanto $j \in \mathcal{W}(f, \mathrm{A}, \varepsilon) \cap \mathcal{W}(g, \mathrm{B}, \delta)$ y entonces $\mathcal{W}(h, \mathrm{A} \cup \mathrm{B}, r) \subseteq \mathcal{W}(f, \mathrm{A}, \varepsilon) \cap \mathcal{W}(g, \mathrm{B}, \delta)$. Es decir, $\mathcal{B}$ forma una base para una topología en $\mathcal{C}(X)$. □

Usando este lema, podemos definir topologías en $\mathcal{C}(X)$ o en $\mathcal{C}^*(X)$ de acuerdo de la elección de $\mathcal{A}$.

Definición 1.0.3.

*(a) Para $\mathcal{A} = \{X\}$, sea $\mathcal{T}_n$ la topología de $\mathcal{C}^*(X)$ inducida por $\mathcal{A}$. Llamamos a $\mathcal{T}_n$ la **topología de la norma, del supremo o de la convergencia uniforme** y denotamos al espacio $(\mathcal{C}^*(X), \mathcal{T}_n)$ por $\mathcal{C}^*_n(X)$.*

*(b) Para $\mathcal{A} = \mathcal{K}(X)$, sea $\mathcal{T}_k$ la topología de $\mathcal{C}(X)$ inducida por $\mathcal{A}$. Llamamos a $\mathcal{T}_k$ la **topología compacto-abierta** y denotamos al espacio $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_k)$ por $\mathcal{C}_k(X)$.*

(c) *Para $\mathcal{A}$=$\{A \in \mathcal{P}(X) : A$ es un conjunto finito$\}$, sea $\mathcal{T}_p$ la topología de $\mathcal{C}(X)$, generada por $\mathcal{A}$. Llamamos a $\mathcal{T}_p$ la* ***topología de la convergencia puntual*** *y denotamos al espacio $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_p)$ por $\mathcal{C}_p(X)$.*

De las definiciones anteriores podemos fácilmente observar las siguientes relaciones entre las topologías anteriores.

Lema 1.0.4. *En $\mathcal{C}^*(X)$ se tiene que $\mathcal{T}_k \subseteq \mathcal{T}_n$ y en $\mathcal{C}(X)$ tenemos que $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_k$.*

Demostración. Sea $\mathcal{W}(f, \mathrm{A}, \varepsilon)$ un abierto básico no vacío de $\mathcal{T}_k$ en $\mathcal{C}^*(X)$. Sea $g \in \mathcal{W}(f, \mathrm{A}, \varepsilon)$. Entonces se tiene lo siguiente $\|f - g\|_{\mathrm{A}} < \varepsilon$. Definimos el siguiente conjunto $\mathcal{W}(g, X, \delta)$, donde $\delta = \varepsilon - \|f - g\|_{\mathrm{A}}$. Claramente $\mathcal{W}(g, X, \delta)$ es un abierto básico no vacío de la topología $\mathcal{T}_n$ en $\mathcal{C}^*(X)$ y $g \in \mathcal{W}(g, X, \delta)$. Sólo nos queda justificar que $\mathcal{W}(g, X, \delta) \subseteq \mathcal{W}(f, \mathrm{A}, \varepsilon)$. Sea $j \in \mathcal{W}(g, X, \delta)$, entonces $\|j - g\|_X < \delta$ de donde

$$\|g - j\|_X + \|f - g\|_{\mathrm{A}} < \varepsilon. \tag{1.3}$$

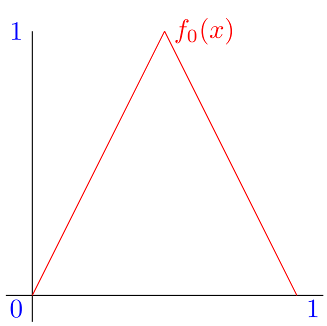
Como se tiene que $\|f - j\|_{\mathrm{A}} \leqslant \|g - j\|_X + \|f - g\|_{\mathrm{A}}$ de (1.3) podemos concluir que $\|f - j\|_{\mathrm{A}} < \varepsilon$. Por lo tanto $j \in \mathcal{W}(f, \mathrm{A}, \varepsilon)$; es decir $\mathcal{W}(g, X, \delta) \subseteq \mathcal{W}(f, A, \varepsilon)$.
Sea $\mathcal{W}(g, \mathrm{B}, \delta)$ un abierto básico no vacío de $\mathcal{T}_p$ en $\mathcal{C}(X)$. Por la definición de la topología en $\mathcal{T}_p$ se tiene que B=$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$; es decir $\mathrm{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$. Como cada $\{x_i\}$ es un subconjunto compacto de X y la unión finita de conjuntos compactos es compacta tenemos que B es un subconjunto compacto de X por lo que $\mathcal{W}(g, \mathrm{B}, \delta) \in \mathcal{T}_k$. Por lo tanto $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_k$ en $\mathcal{C}(X)$. □

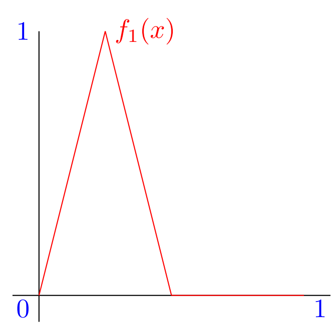
Los siguientes ejemplos muestran las diferencias que hay entre las topologías definidas en 1.0.3.

Ejemplo 1.0.5. *Sea I el intervalo unitario $[0, 1]$ y f_n la función en I definida por*

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1}x, & si \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2^{n+1} \\ -2^{n+1}x + 2, & si \quad 1/2^{n+1} \leqslant x \leqslant 1/2^n \\ 0, & si \quad 1/2^n \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Entonces la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge a 0 en $\mathcal{T}_p$, pero no converge a 0 en $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_n$; esto es, $\mathcal{T}_p$ es en realidad más debil que $\mathcal{T}_k$ en $\mathcal{C}(I)$. (Observe la Figura 1.)





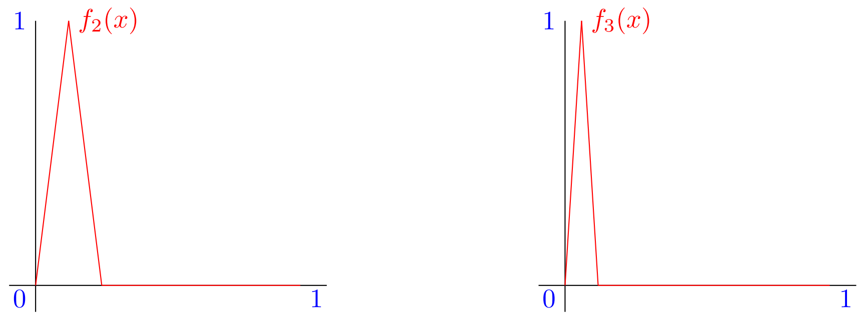


Figura 1. Esbozo del comportamiento de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{W}(0, \mathrm{A}, \varepsilon)$ un abierto básico de 0 en $\mathcal{T}_p$.

Caso 1. Si A=$\{0\}$, tomamos $n = 1$ y sucede que para toda $m \geqslant n$, $\|f_m\|_{\mathrm{A}}=$ $\sup\{|f_m(x)| : x \in \mathrm{A}\}=\sup\{|f_m(0)|\}=0 < \varepsilon$.

Caso 2. Supongamos que A=$\{x_1, ..., x_i\}$ con $0 < x_1 \leqslant, ..., \leqslant x_i$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^n} \leqslant x_1$. Sea $m \geqslant n$ se tiene que $\dfrac{1}{2^m} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, de donde

$$\begin{aligned}
\|f_m\|_{\mathrm{A}} &= \sup\{|f_m(x)| : x \in \mathrm{A}\} \\
&= \sup\{|f_m(x_j)| : j = 1, ..., i\} \\
&= \sup\{|0|\} \\
&= 0 \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

En cuaquier caso se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \geqslant n$ $f_m \in \mathcal{W}(0, \mathrm{A}, \varepsilon)$. Por lo tanto la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge a 0 en $\mathcal{T}_p$.

Falta justificar que la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ no converge a 0 en $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_n$. Consideremos una vecindad básica $\mathcal{W}(0, [0, 1], 1/2)$ del 0 y sea $n \in \mathbb{N}$. Como

$$\begin{aligned}
|f_n(1/2^{n+1})| &= |-2^{n+1}(1/2^{n+1}) + 2| \\
&= |-1 + 2| \\
&= |1| \\
&\leqslant \sup\{|f_n(x)| : x \in [0, 1]\} \\
&= \|f_n\|_{[0,1]},
\end{aligned}$$

se tiene que $1 \leqslant \|f_n\|_{[0,1]}$, de donde $f_n \notin \mathcal{W}(0, [0, 1], 1/2)$; es decir $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ no converge a 0 en $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_n$. Dicho en términos topológicos no tienen los mismos puntos de acumulación. Por lo tanto $\mathcal{T}_p([0, 1]) \subsetneq \mathcal{T}_k([0, 1])$.

Ejemplo 1.0.6. *Sea X el intervalo $[0, 1)$ y f_n la función en X definida por*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & si \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 - 1/2^n \\ \\ 2^n x + 1 - 2^n, & si \quad 1 - 1/2^n \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Entonces la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge a 0 en $\mathcal{T}_k$, pero no converge a 0 en $\mathcal{T}_n$; esto es, $\mathcal{T}_k$ es en realidad más debil que $\mathcal{T}_n$ en $\mathcal{C}([0,1))$. (Observe la Figura 2.)

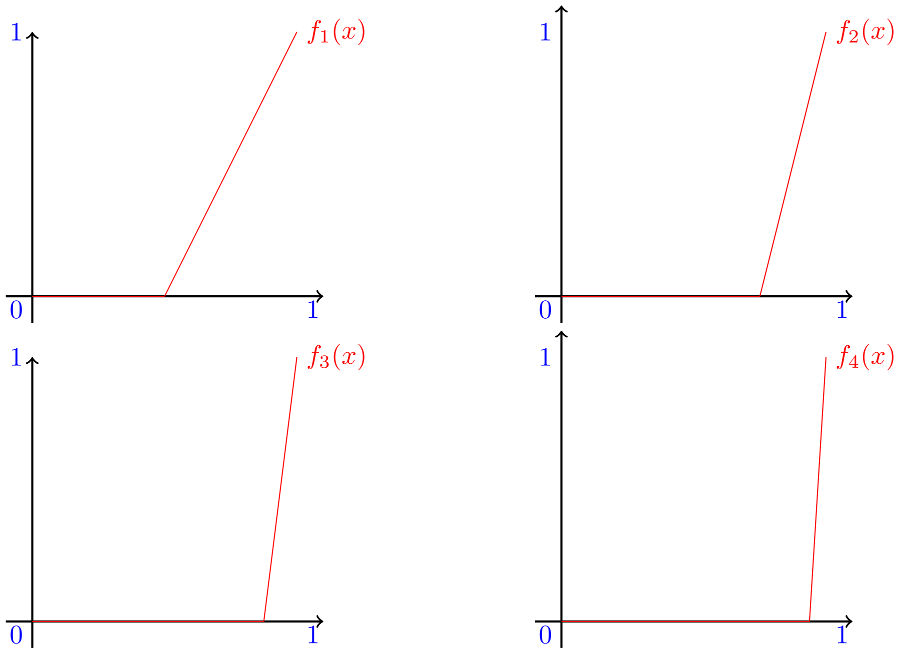


Figura 2. Esbozo del comportamiento de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

En efecto, tomemos un subconjunto compacto K de $[0,1)$, $\varepsilon > 0$ y una vecindad básica $\mathcal{W}(0, \mathrm{K}, \varepsilon)$ de la función 0. Sucede que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathrm{K} \subseteq [0, 1 - 1/2^n].$$

En efecto, se tiene que la familia $\mathcal{U} = \{\mathrm{U}_n = [0, 1 - 1/2^n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta del $[0,1)$ y por lo tanto una cubierta abierta de K, de la compacidad de K podemos encontrar un número finito de elementos de $\mathcal{U}$ que cubren a K y de ese número finito podemos encontra un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{K} \subseteq [0, 1 - 1/2^n]$.
Sea $j \geqslant n$, entonces

$$\mathrm{K} \subseteq [0, 1 - 1/2^n] \subseteq [0, 1 - 1/2^j].$$

De donde

$$\begin{aligned} \|f_j\|_{\mathrm{K}} &= \sup\{|f_j(x)| : x \in \mathrm{K}\} \\ &= \sup\{|0|\} \text{ pues } x \in [0, 1 - 1/2^j] \\ &= 0 \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto muestra que $f_j \in \mathcal{W}(0, \mathrm{K}, \varepsilon)$ para cada $j \geqslant n$ y por lo tanto la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge a 0 en $\mathcal{T}_k$.
Consideremos $\mathcal{W}(0, [0,1), 1/4)$ y $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que el punto $1 - 1/2^{n+1}$ cumple que $1 - 1/2^n < 1 - 1/2^{n+1} < 1$ por lo cual

$$f_n(1-1/2^{n+1}) = f_n(1-1/2^n 2) = 2^n(1-1/2^n 2) + 1 - 2^n = 1/2.$$

De donde

$$1/4 < 1/2 = |f_n(1-1/2^{n+1})| \leqslant \sup\{|f_n(x)| : x \in [0,1)\} = \|f_n\|_{[0,1)}.$$

Por lo tanto $f_n \notin \mathcal{W}(0,[0,1),1/4)$. Esto útimo muestra que la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ no converge a 0 en $\mathcal{T}_n$. Dicho en términos topológicos no tienen los mismos puntos de acumulación. Por lo tanto $\mathcal{T}_k([0,1) \subsetneq \mathcal{T}_k([0,1))$.
Los siguientes lemas nos muestran bases canónicas para $\mathcal{T}_k$ y $\mathcal{T}_p$, respectivamente, pero antes de demostrarlos empezaremos con una pequeña definición.

Definición 1.0.7. *Sea (Y,d) un espacio métrico y $A \subseteq Y$. Si A es un subconjunto no vacío y acotado, el **diámetro de A**, denotado por $diam(A)$ es el siguiente número*

$$diam(A) = \sup\{d(a_1,a_2) : a_1, a_2 \in A\}.$$

Si A no es acotado ó es el conjunto vacío, entonces

$$diam(A) = \infty \text{ y } diam(\emptyset) = 0.$$

Lema 1.0.8. *Para cualesquiera puntos $x_1,...,x_n$ en X y conjuntos abiertos $V_1,...,V_n$ en $\mathbb{R}$, definimos*

$$\mathcal{U}(x_1,...,x_n;V_1,...,V_n)=\{f \in \mathcal{C}(X) : f(x_i) \in V_i \text{ para } i=1,...,n\}.$$

Entonces la familia

$$\mathcal{B}_1=\{\mathcal{U}(x_1,...,x_n;V_1,...,V_n) : x_1,...,x_n \in X; V_1,...,V_n \text{ son abiertos en } \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}$$

forma una base para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1}$ en $\mathcal{C}(X)$ y además $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1}$ coincide con $\mathcal{T}_p$.

Demostración. Sean $\mathcal{U}(x_1,...,x_n;V_1,...,V_n)$, $\mathcal{U}(y_1,...,y_m;W_1,...,W_m)$ dos elementos de $\mathcal{B}_1$ tales que

$$\mathcal{U}(x_1,...,x_n;V_1,...,V_n) \cap \mathcal{U}(y_1,...,y_m;W_1,...,W_m) \neq \emptyset,$$

donde $n,m \in \mathbb{N}$, $x_1,...,x_n,y_1,...,y_n \in X$ y $V_1,...,V_n,W_1,....,W_m$ son subconjuntos abiertos de los números reales. Sea $f \in \mathcal{U}(x_1,...,x_n;V_1,...,V_n) \cap \mathcal{U}(y_1,...,y_m;W_1,...,W_m)$. Se tiene que el siguiente conjunto $\mathcal{U}(x_1,...,x_n,y_1,....,y_m;V_1,...,V_n,W_1,...,W_m)$ es un elemento de $\mathcal{B}_1$ tal que

$$f \in \mathcal{U}(x_1,...,x_n,y_1,....,y_m;V_1,...,V_n,W_1,...,W_m) \subseteq \mathcal{U}(x_1,...,x_n,y_1,....,y_m;V_1,...,V_n,W_1,...,W_m).$$

Esto muestra que $\mathcal{B}_1$ es base para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1}$.
Tomemos $\mathcal{U}(x_1,...,x_n;V_1,...,V_n)$ un abierto básico no vacío de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1}$, donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1,...,x_n \in X$ y $V_1,...,V_n$ son subconjuntos abiertos de los números reales. Sea $f \in \mathcal{U}(x_1,...,x_n;V_1,...,V_n)$. Entonces $f(x_i) \in V_i$ para $i=1,...,n$. Como V_i es un subconjunto abierto de los números reales, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $\mathrm{B}_{\varepsilon_i}(f(x_i)) \subseteq V_i$ para $i=1,...,n$. Sea $A=\{x_1,...,x_n\}$ y $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_i : \text{para } i=1,...,n\}$. Se tiene que $\mathcal{W}(f,A,\varepsilon)$ es un abierto básico de $\mathcal{T}_p$ tal que

$$f \in \mathcal{W}(f,A,\varepsilon) \subseteq \mathcal{U}(x_1,...,x_n;V_1,...,V_n).$$

Esto muestra que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1} \subseteq \mathcal{T}_p$.
Tomemos $\mathcal{W}(f, \{x_1, ..., x_n\}, \varepsilon\})$ un abierto básico de $\mathcal{T}_p$, donde $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}(X)$, $x_1, ..., x_n$ son elementos de X y $\varepsilon > 0$. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ existe un abierto V_{x_i} de x_i tal que $f(cl_X(V_{x_i}))$ está contenida en un abierto U_{x_i} cuyo diámetro es menor que ε. Entonces $\mathcal{U}(x_1, ..., x_n; U_{x_1}, ..., U_{x_n})$ es un elemento básico de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1}$ tal que

$$f \in \mathcal{U}(x_1, ..., x_n; U_{x_1}, ..., U_{x_n}) \subseteq \mathcal{W}(f, \{x_1, ..., x_n\}, \varepsilon\}).$$

Esto muestra que $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}_1}$. Por lo tanto $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_1}$.

□

Lema 1.0.9. *Para $K_1, ..., K_n \in \mathcal{K}(X)$ y conjuntos abiertos $V_1, ..., V_n$ en $\mathbb{R}$, definimos*

$$\mathcal{U}(K_1, ..., K_n; V_1, ..., V_n)=\{f \in \mathcal{C}(X) : f(K_i) \subseteq V_i \textit{ para } i = 1, ..., n\}.$$

Entonces la familia

$$\mathcal{B}_0=\{\mathcal{U}(K_1, ..., K_n; V_1, ..., V_n) : K_1, ..., K_n \in \mathcal{K}(X); V_1, ..., V_n \textit{ son abiertos en } \mathbb{R}, \\ n \in \mathbb{N}\}$$

forma una base para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_0}$ en $\mathcal{C}(X)$ y además $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_0}$ coincide con $\mathcal{T}_k$.

Demostración. Tomemos $\mathcal{U}(K_1, ..., K_n; V_1, ..., V_n)$, $\mathcal{U}(J_1, ..., J_m; W_1, ..., W_m)$ dos elementos cualesquiera de $\mathcal{B}_0$ tales que

$$\mathcal{U}(K_1, ..., K_n; V_1, ..., V_n) \cap \mathcal{U}(J_1, ..., J_m; W_1, ..., W_m) \neq \emptyset,$$

donde $n, m \in \mathbb{N}$, $K_1, ..., K_n, J_1, ..., J_m$ son subconjuntos compactos de X y $V_1, ..., V_n, W_1, ..., W_m$ son subconjuntos abiertos de los números reales.
Sea $f \in \mathcal{U}(K_1, ..., K_n; V_1, ..., V_n) \cap \mathcal{U}(J_1, ..., J_m; W_1, ..., W_m)$. Se tiene que el siguiente conjunto $\mathcal{U}(K_1, ..., K_n, J_1, ..., J_m; V_1, ..., V_n, W_1, ..., W_m)$ es un elemento de $\mathcal{B}_0$ tal que

$$f \in \mathcal{U}(K_1, ..., K_n, J_1, ..., J_m; V_1, ..., V_n, W_1, ..., W_m) \subseteq \\ \mathcal{U}(K_1, ..., K_n; V_1, ..., V_n) \cap \mathcal{U}(J_1, ..., J_m; W_1, ..., W_m).$$

Esto muestra que $\mathcal{B}_0$ es una base para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_0}$ en $C(X)$.

Antes de seguir con la demostración haremos una pequeña observación. Si tenemos un espacio métrico (Y, d), $A \subseteq Y$ compacto y V un subconjunto abierto de Y con $A \subseteq V$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathrm{B}(A, \varepsilon) \subseteq V$. En efecto, el mínimo valor de la función $d(a, X \setminus V)$ con $a \in A$ es el ε requerido.
Tomemos $\mathcal{U}(K_1, ..., K_n; V_1, ..., V_n)$ un elemento básico no vacío de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_0}$, donde $K_1, ..., K_n$ son subconjuntos compactos de X, $V_1, ..., V_n$ son subconjuntos abiertos de los números reales y $n \in \mathbb{N}$. Sea $f \in \mathcal{U}(K_1, ..., K_n; V_1, ..., V_n)$. Como f es continua se tiene que $f(K_i)$ es compacto para $i = 1, ..., n$. Por la observación, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $\mathrm{B}(f(K_i), \varepsilon_i) \subseteq V_i$ para $i = 1, ..., n$. Consideremos $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ y $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_i : \text{para } i = 1, ..., n\}$. Se tiene que

$$f \in \mathcal{W}(f, K, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}(K_1, ..., K_n; V_1, ..., V_n).$$

Pues tomemos $g \in \mathcal{W}(f, K, \varepsilon)$, $i \in \{1, ..., n\}$ y $x \in K_i$. Como $g \in \mathcal{W}(f, K, \varepsilon)$, entonces

$$||g - f||_K < \varepsilon. \tag{1.4}$$

De (1.4) tenemos que

$$d(g(x), f(K_i)) = \text{ínf}\{|g(x) - f(y)| : y \in K_i\} \leqslant |g(x) - f(x)| < \varepsilon \leqslant \varepsilon_i,$$

por lo cual $g(x) \in \mathrm{B}(f(K_i), \varepsilon_i) \subseteq V_i$. Esto muestra que $\mathcal{W}(f, K, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}(K_1, ..., K_n; V_1, ..., V_n)$ y por lo tanto $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_0} \subseteq \mathcal{T}_k$.
Tomemos $\mathcal{W}(f, K, \varepsilon)$ un abierto básico de $\mathcal{T}_k$, donde K es un subconjunto compacto de X y $\varepsilon > 0$. Para cada punto x de X existe un abierto V_x de x tal que $f(cl_X(V_x))$ está contenido en un abierto U_x de los números reales cuyo diámetro es menor que ε. Como K es compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, ...x_n \in X$ tales que $K \subseteq V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Los siguientes conjuntos $K_{x_i} = cl_X(V_{x_i}) \cap K$ son subconjuntos compactos de X para $i = 1, ..., n$ tales que

$$f \in \mathcal{U}(K_1, ..., K_n; U_{x_1}, ..., U_{x_n}) \subseteq \mathcal{W}(f, K, \varepsilon).$$

Esto muestra que $\mathcal{T}_k \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}_0}$ y por lo tanto $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_0}$. □

Los siguientes teoremas dan a conocer un poco más de información sobre las diferentes topologías en $\mathcal{C}(X)$. Pero antes de enunciarlos necesitamos de la ayuda de un lema.

Lema 1.0.10. *Sea X es un espacio de Tychonoff. Si C es un subconjunto cerrado y K es un subconjunto compacto en X, son tales que $\mathrm{C} \cap K = \emptyset$, entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(\mathrm{C}) = \{1\}$ y $f(K) = \{0\}$.*

Demostración. Para cada $x \in K$ existe una función continua $f_x : X \to [0, 1]$ tal que $f_x(\mathrm{C}) = \{1\}$ y $f_x(x) = \{0\}$. Sea $\mathrm{V}_x = f_x^{-1}([0, 1/2))$. Se tiene que $\mathrm{V}_x \cap C = \emptyset$. Como K es compacto, existen $x_1, ..., x_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{V}_{x_i}$. Definimos $g : X \to [0, 1]$ como

$$g(x) = \text{mín}\{f_{x_1}(x), ..., f_{x_n}(x)\}$$

La función g es continua, $g(C) = \{1\}$ y para todo $x \in K$ $g(x) < \frac{1}{2}$. Sea $h : [0, 1] \to [0, 1]$ continua tal que $h(\left[0, \frac{1}{2}\right]) = \{0\}$ y $h(1) = 1$. Si $f = h \circ g$, entonces se tiene que f es continua $f(\mathrm{C}) = \{1\}$ y $f(K) = \{0\}$. □

Teorema 1.0.11. *Sea X un espacio Tychonoff. Se tiene lo siguiente:*

(a) $\mathcal{C}_p(X)$ es un subespacio denso del espacio producto $\mathbb{R}^X$ y, además, $\mathcal{C}_p(X)$ es un espacio Tychonoff.

(b) $\mathcal{C}_k(X)$ es un espacio Tychonoff.

(c) $\mathcal{C}_n^*(X)$ es un espacio métrico completo.

Demostración.

(a) Recordemos que $\mathbb{R}^X$=$\{f : X \to \mathbb{R} : f$ es función$\}$ y que para cada $x \in X$ podemos definir la función $\pi_x : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ cuya regla es $\pi_x(f) = f(x)$, para cada $f \in \mathbb{R}^X$. Entonces se tiene que $\mathbb{R}^X$ está dotado de la topología debil ${}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ inducida por $\mathcal{P}$=$\{\pi_x : x \in X\}$ (${}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ es la menor topología que transforma a cada π_x en una función continua). Hay que justificar que $\mathcal{T}_p$ coincide con la topología ${}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ restringida a $\mathcal{C}(X)$. Se tiene que

$$\mathcal{S}=\{\pi_x^{-1}[\mathrm{B}] : x \in X \text{ y B es un abierto de los reales con su topología usual}\}$$

es una subbase para $(\mathbb{R}^X, {}_{\mathcal{P}}\mathcal{T})$. De donde

$$\mathcal{S}_{\mathcal{C}(X)}=\{\mathcal{C}(X) \cap \pi_x^{-1}[\mathrm{B}] : x \in X \text{ y B es un abierto de } \mathbb{R}\}$$

es una subbase de $(\mathcal{C}(X), {}_{\mathcal{P}}\mathcal{T} \restriction_{\mathcal{C}(X)})$ por lo que

$$\mathcal{B}_{\mathcal{C}(X)}=\{\bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{C}(X)} \text{ y } 0 < |\mathcal{A}| < \aleph_0\}$$

es una base de $(\mathcal{C}(X), {}_{\mathcal{P}}\mathcal{T} \restriction_{\mathcal{C}(X)})$. Si tomamos un elemento $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}(X)}$ es de la forma

$$A = \mathcal{C}(X) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}[V_i]),$$

en donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$ y V_i es un subconjunto abierto de números reales para cada $i = 1, ..., n$. Por el lema 1.0.8 se deduce que $\mathcal{T}_p = {}_{\mathcal{P}}\mathcal{T} \restriction_{\mathcal{C}(X)}$ y se concluye que $\mathcal{C}(X)$ es un subespacio del espacio producto $\mathbb{R}^X$.
Consideremos un abierto básico no vacío $\pi_{x_1}^{-1}[\mathrm{V}_1] \cap \cdots \cap \pi_{x_n}^{-1}[\mathrm{V}_n]$ de $\mathbb{R}^X$, con $x_1, ..., x_n \in X$ y $\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n$ abiertos no vacíos de $\mathbb{R}$.
Sea $g \in \pi_{x_1}^{-1}[\mathrm{V}_1] \cap \cdots \cap \pi_{x_n}^{-1}[\mathrm{V}_n]$, entonces se tiene que $g(x_i) \in \mathrm{V}_i$ para $i = 1, ..., n$. Como X es un espacio Tychonoff existe una función continua f_i tal que $f_i(\{x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n\}) \subseteq \{0\}$ y $f_i(x_i) = g(x_i)$ para cada $i = 1, ..., n$. Consideremos la función continua con valores reales $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$.
Sucede que $f(x_i) = g(x_i) \in \mathrm{V}_i$ y por lo cual

$$f \in \pi_{x_1}^{-1}[\mathrm{V}_1] \cap \cdots \cap \pi_{x_n}^{-1}[\mathrm{V}_n] \cap \mathcal{C}(X).$$

Por lo tanto $\mathcal{C}_p(X)$ es un subespacio denso del espacio producto $\mathbb{R}^X$. Como $\mathbb{R}$ es un espacio Tychonoff se tiene que $\mathbb{R}^X$ es un espacio Tychonoff de donde $\mathcal{C}_p(X)$ es un espacio Tychonoff pues la propiedad de ser un espacio Tychonoff es hereditaria.

(b) Sea F un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}_k(X)$, $f \in \mathcal{C}_k(X)$ tal que $f \notin \mathrm{F}$. Por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$, subconjuntos compactos $K_1, ..., K_n$ de X, y $\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n$ abiertos de $\mathbb{R}$ tales que $f \in \mathcal{U}(K_1, ..., K_n; V_1, ..., V_n) \subseteq \mathcal{C}_k(X) \setminus \mathrm{F}$. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $f(K_i)$ es un subconjunto compacto de los números reales tal que $f(K_i) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathrm{V}_i) = \emptyset$. Por el lema 1.0.10, tenemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$ existe una función continua $\varphi_i : \mathbb{R} \to [0, 1]$ tal que $\varphi_i(f(K_i)) = \{0\}$ y $\varphi_i(\mathbb{R} \setminus \mathrm{V}_i) = \{1\}$.
Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ se define

$$\psi_i : \mathcal{C}_k(X) \to [0,1]$$

como $\psi_i(g) = \text{máx}\{\varphi_i(y) : y \in g(K_i)\}$.
Se tiene que

(1) $\psi_i(f) = \text{máx}\{\varphi_i(y) : y \in f(K_i)\}$=0 para todo $i \in \{1,...,n\}$.

(2) Para todo $g \in \mathcal{C}_k(X) \setminus \{h : h(K_i) \subseteq \mathrm{V}_i\}$ y todo $i \in \{1,...,n\}$ se tiene que $\psi_i(g) = 1$.

(3) ψ_i es continua para todo $i \in \{1,...,n\}$. En efecto sea $i \in \{1,...,n\}$ y $g_0 \in \mathcal{C}_k(X)$. Como $g_0(K_i)$ es compacto existe $y_0 \in g_0(K_i)$ tal que $\psi_i(g_0) = \varphi_i(y_0)$.
Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de φ_i en y_0, existe una vecindad abierta V que contiene a y_0 tal que $|\varphi_i(y) - \varphi_i(y_0)| < \varepsilon$ para toda $y \in \mathrm{V}$. Sea $x_0 \in K_i$ tal que $g_0(x_0) = y_0$. Consideremos el siguiente abierto de los reales:

$$\begin{aligned}\mathrm{W}=&\{y \in \mathbb{R} : \varphi_i(y) < \varphi_i(y_0) + \varepsilon\}\\ =&\varphi_i^{-1}([0, \varphi_i(y_0) + \varepsilon) \cap [0,1]).\end{aligned}$$

Para todo $x \in K_i$, $g_0(x) \in g_0(K_i)$ y por lo tanto $\varphi_i(g_0(x)) \leqslant \varphi_i(y_0) < \varphi_i(y_0) + \varepsilon$. Es decir $g_0(K_i) \subseteq \mathrm{W}$.
De esta forma $\mathcal{U}(x_0, K_i; \mathrm{V}, \mathrm{W})$ es un abierto en $\mathcal{C}_k(X)$ que contiene a g_0.
Para todo $g \in \mathcal{U}(x_0, K_i; \mathrm{V}, \mathrm{W})$, $g(x_0) \in \mathrm{V}$. Por lo tanto

$$\psi_i(g)=\text{máx}\{\varphi_i(y) : y \in g(K_i)\} > \varphi_i(y_0) - \varepsilon.$$

Además, se tiene las siguiente relaciones

$$\psi_i(g)=\text{máx}\{\varphi_i(y) : y \in g(K_i)\} \leqslant \varphi_i(y_0) + \tfrac{\varepsilon}{2} < \varphi_i(y_0) + \varepsilon,$$

y entonces para todo $g \in \mathcal{U}(x_0, K_i; \mathrm{V}, \mathrm{W})$, se tiene que
$|\psi_i(g) - \psi_i(g_0)| < \varepsilon$. Por lo tanto ψ_i es continua en g_0. De esta forma la función

$$\psi : \mathcal{C}_k(X) \to [0,1]$$

definida como $\psi = \text{máx}\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ es continua.
De (1) se deduce que $\psi(f) = 0$. Por otra parte, para todo $g \notin \mathrm{F}$ existe $i \in \{1,...,n\}$ tal que $g \notin \{h : h(K_i) \subseteq \mathrm{V}_i\}$; por (2), $\psi(g) = 1$ de donde $\psi(\mathrm{F}) = \{1\}$ y por lo tanto $\mathcal{C}_k(X)$ es un espacio Tychonoff.

(c) En efecto, consideremos la función $d : \mathcal{C}^*(X) \times \mathcal{C}^*(X) \to \mathbb{R}$ como $d(f,g) = \|f - g\|_X$. Hay que justificar los siguiente:

(a) Para todo $f, g \in \mathcal{C}^*(X)$, entonces $d(f,g) = 0$ si y sólo si $f = g$.

(b) Para todo $f, g \in \mathcal{C}^*(X)$ se tiene que $d(f,g) = d(g,f)$.

(c) Para todo $f, g, h \in \mathcal{C}^*(X)$ tenemos que $d(f,g) \leqslant d(f,h) + d(h,g)$.

(a) Sean $f, g \in \mathcal{C}^*(X)$, entonces $d(f,g) = 0$ si y sólo si $||f - g||_X = 0$ si y sólo si $\sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$=0 si y sólo si $|f(x) - g(x)| = 0$ para todo $x \in X$ si y sólo si $f = g$.

(b) Sean $f, g \in \mathcal{C}^*(X)$. Se tiene que $d(f,g)$ $=\sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$=$\sup\{|g(x) - f(x)| : x \in X\}$=$d(g,f)$, por lo tanto $d(f,g) = d(g,f)$.

(c) Sean $f, g, h \in \mathcal{C}^*(X)$ y $x \in X$, entonces $|f(x)-g(x)| \leqslant |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)| \leqslant \|f-h\|_X+\|h-g\|_X$, por lo tanto $\|f-g\|_X \leqslant \|f-h\|_X+\|h-g\|_X$; es decir $d(f,g) \leqslant d(f,h)+d(h,g)$.

Por la definición de la métrica en $\mathcal{C}^*(X)$ se tiene que la topología generada por la métrica $\mathcal{T}_d$ coincide con la topología de la norma $\mathcal{T}_n$. Ocupando el Colorario A.3.3 de la parte de análisis matemático en la sección de espacios completos de funciones podemos concluir que $(\mathcal{C}^*(X), \mathcal{T}_d)$ es completo.

Por lo tanto $\mathcal{C}^*_n(X)$ es un espacio métrico completo. □

Teorema 1.0.12. *Cualquier espacio X está encajado en $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$.*

Demostración. Para cualquier punto $x \in X$, sea $\varphi(x)$ la función en $\mathcal{C}_p(X)$ definida por $\varphi(x)(f) = f(x)$ para cada $f \in \mathcal{C}_p(X)$. Ahora hay que justificar que $\varphi(x) : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ es una función continua, para cada $x \in X$. Sean $x \in X$, $f \in \mathcal{C}_p(X)$ y $\varepsilon > 0$. Se tiene que $\mathcal{W}(f, \{x\}, \varepsilon)$ es una abierto de $\mathcal{C}_p(X)$ que tiene a f tal que

$$\varphi(x)(\mathcal{W}(f, \{x\}, \varepsilon)) \subseteq B(f(x), \varepsilon).$$

Esto muestra que $\varphi(x) : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ es continua y por lo tanto φ esta bien definida, además se tiene que φ es un encaje. En efecto sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como X es un espacio Tychonoff y $x \notin \{y\}$ existe $f : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Por lo tanto $f \in \mathcal{C}(X)$ y $\varphi(x)(f) = f(x) = 0 \neq 1 = f(y) = \varphi(y)(f)$, de donde $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, es decir φ es inyectiva.
Sean $x \in X$, una vecindad abierta básica $\mathcal{W}(\varphi(x), \{f_1, ..., f_n\}, \varepsilon)$ de $\varphi(x)$ con $1, ., , n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Como cada $f_i : X \to \mathbb{R}$ es una función continua, se tiene que existe una vecindad abierta U_i de x tal que $f_i(\mathrm{U}_i) \subseteq \mathrm{B}(f_i(x), \varepsilon)$ para cada $i = 1, ..., n$. Sea $\mathrm{U} = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{U}_i$, tenemos que $f_i(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{B}(f_i(x), \varepsilon)$ para cada $i = 1, ..., n$. Hay que justificar que $\varphi(\mathrm{U}) \subseteq \mathcal{W}(\varphi(x), \{f_1, ..., f_n\}, \varepsilon)$. Sean $y \in \mathrm{U}$, $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $|\varphi(y)(f_i) - \varphi(x)(f_i)| = |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon$, pues $f_i(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{B}(f_i(x), \varepsilon)$. Por lo tanto $\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_{\{f_1,...,f_n\}} < \varepsilon$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, de donde φ es una función continua.
Sea $\mathrm{G} \subseteq X$ un conjunto abierto no vacío de X y sea $\varphi(x) \in \varphi(\mathrm{G})$, con $x \in \mathrm{G}$. Como X es un espacio Tychonoff, existe $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X \setminus \mathrm{G}) \subseteq \{0\}$. Consideremos en conjunto $\mathcal{W}(\varphi(x), \{f\}, \frac{1}{2}) \cap \varphi(X)$.
Aseguramos que $\mathcal{W}(\varphi(x), \{f\}, \frac{1}{2}) \cap \varphi(X) \subseteq \varphi(\mathrm{G})$. Sea $\varphi(y) \in \mathcal{W}(\varphi(x), \{f\}, \frac{1}{2}) \cap \varphi(X)$, para algún $y \in X$. Si $y \in X \setminus \mathrm{G}$ entonces

$$1 = |1| = |f(y) - f(x)| = |\varphi(y)(f) - \varphi(x)(f)| = \|\varphi(y) - \varphi(x)\|_{\{f\}} < \frac{1}{2}$$

pues $\varphi(y) \in \mathcal{W}(\varphi(x), \{f\}, \frac{1}{2})$, con lo cual tendriamos una contradicción. Por lo tanto $y \in \mathrm{G}$ de donde

$$\mathcal{W}(\varphi(x), \{f\}, \tfrac{1}{2}) \cap \varphi(X) \subseteq \varphi(\mathrm{G}),$$

es decir φ es abierta sobre su imagen.
Por lo tanto φ es un encaje. □

Para diversos subconjuntos de $\mathcal{C}(X)$, el siguiente concepto es de uso frecuente.

Definición 1.0.13. *Para un subconjunto* F *de* $\mathcal{C}(X)$ *y un punto* x *de* X*, decimos que* F ***es equicontinuo en*** x*, si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe una vecindad* U *de* x *tal que* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ *para cada* $y \in \mathrm{U}$ *y para toda* $f \in \mathrm{F}$*. Si* F *es equicontinuo en cada punto de* X*, decimos que* F ***es equicontinuo****.*

Lema 1.0.14. *Sea* F *un subconjunto de* $\mathcal{C}(X)$*. Si* F *es equicontinuo, entonces* $cl_p(\mathrm{F})$ *es también equicontinuo, donde* $cl_p(\mathrm{F})$ *denota la cerradura de* F *en* $\mathcal{C}_p(X)$*.*

Demostración. Sea x un elemento de X y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existe una vecindad U de x en X tal que $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ para cada $y \in \mathrm{U}$ y cada $f \in F$.
La vencidad de x que estamos buscando es U. En efecto, sea $y \in \mathrm{U}$ y $g \in cl_p(\mathrm{F})$. Como $g \in cl_p(\mathrm{F})$ se tiene que $\mathcal{W}\left(g, \{x, y\}, \dfrac{\varepsilon}{3}\right) \cap \mathrm{F} \neq \emptyset$. Tomemos $h \in \mathcal{W}\left(g, \{x, y\}, \dfrac{\varepsilon}{3}\right) \cap \mathrm{F}$, por lo que $|g(x) - h(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ y $|g(y) - h(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Ahora

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |g(x) - h(x)| + |h(x) - h(y)| + |h(y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, para cada $y \in \mathrm{U}$ y $g \in cl_p(\mathrm{F})$ tenemos que $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$, es decir $cl_p(\mathrm{F})$ es equicontinuo. □

Observación 1.0.15. *Sea* $\mathrm{F} \subseteq \mathcal{C}^*(X)$*. Con* $cl_k(\mathrm{F})$ *y* $cl_n(\mathrm{F})$ *denotamos la cerradura de* F *en* $\mathcal{C}_k(X)$ *y* $\mathcal{C}^*_n(X)$*, respectivamente. Como se tienen las siguientes contenciones* $cl_n(\mathrm{F}) \subseteq cl_k(\mathrm{F})$ *y* $cl_k(\mathrm{F}) \subseteq cl_p(\mathrm{F})$*, y subconjuntos de conjuntos equicontinuos son a su vez conjuntos equicontinuos, por el lema 1.0.14, podemos observar que, si* F *es equicontinuo, entonces* $cl_k(\mathrm{F})$ *y* $cl_n(\mathrm{F})$ *son también equicontinuos.*

Teorema 1.0.16. *Si* F *es un subconjunto equicontinuo de* $\mathcal{C}(X)$*, entonces la topología relativa* $\mathcal{T}_k \restriction_{\mathrm{F}}$ *de* $\mathcal{T}_k$ *en* F *coincide con la topología relativa* $\mathcal{T}_p \restriction_{\mathrm{F}}$ *de* $\mathcal{T}_p$ *en* F*.*

Demostración. Como $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_k$, es suficiente mostrar que $\mathcal{T}_k \restriction_{\mathrm{F}} \subseteq \mathcal{T}_p \restriction_{\mathrm{F}}$. Para esto, mostraremos que, si $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una red que converge a f en $(\mathrm{F}, \mathcal{T}_p \restriction_{\mathrm{F}})$, entonces $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ también converge a f en $(\mathrm{F}, \mathcal{T}_k \restriction_{\mathrm{F}})$ (Observe el apéndice B en la sección Algo de redes).

Sea $\mathcal{W}(f, K, \varepsilon)$ una vecindad básica de f en $(\mathrm{F}, \mathcal{T}_k \restriction_{\mathrm{F}})$, con $K \subseteq X$ compacto y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis para cada punto $x \in K$ existe un abierto U_x de x con la propiedad de que $|g(x) - g(y)| < \dfrac{\varepsilon}{6}$, para cada $y \in \mathrm{U}_x$ y $g \in \mathrm{F}$.
Como K es compacto, existe una subcolección finita $\{\mathrm{U}_{x_i} | i = 1, ..., n\}$ de $\{\mathrm{U}_x | x \in X\}$ que cubre a K. Por hipótesis, tenemos que $\{f_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ converge a f en $(\mathrm{F}, \mathcal{T}_p \restriction_{\mathrm{F}})$, por lo cual existe $\lambda_i \in \Lambda$ tal que $f_\lambda \in \mathcal{W}\left(f, \{x_i\}, \dfrac{\varepsilon}{6}\right)$ para toda $\lambda \geqslant \lambda_i$, $i = 1, ..., n$. Tomamos $\mu \in \Lambda$ con la propiedad de que $\mu \geqslant \lambda_i$ para $i = 1, ..., n$. Sean $\lambda \geqslant \mu$ y $x \in K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathrm{U}_{x_i}$. Existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in \mathrm{U}_{x_j}$, de donde

$$|f_\lambda(x) - f(x)| \leqslant |f_\lambda(x) - f_\lambda(x_j)| + |f_\lambda(x_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto, $\sup\{|f_\lambda(x)-f(x)| x \in K\} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, de donde para cada $\lambda \geqslant \mu$ se tiene que $f_\lambda \in \mathcal{W}(f, K, \varepsilon)$. Esto muestra que $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ converge a f en $(\mathrm{F}, \mathcal{T}_k \restriction_{\mathrm{F}})$. $\square$

Definición 1.0.17. *Para un subconjunto* F *de* $\mathcal{C}(X)$, *decimos que* F ***separa puntos de*** X *si, para cualesquiera puntos* $x, y \in X$ *con* $x \neq y$, *existe* $f \in \mathrm{F}$ *tal que* $f(x) \neq f(y)$.

Una caracterización de que un subconjunto F de $\mathcal{C}(X)$ separa puntos de X está enunciada en el siguiente Teorema.

Proposición 1.0.18. *Sea* F *un subconjunto de* $\mathcal{C}(X)$ *y* φ *la función de* X *en* $\mathcal{C}(\mathrm{F})$ *cuya regla es* $\varphi(x)(f) = f(x)$ *para cada* $x \in X$ *y para cada* $f \in \mathrm{F}$. *Entonces* F *separa puntos de* X *si y sólo si la función* φ *es inyectiva.*

Demostración.

$\Rightarrow$] Supongamos que F separa puntos de X. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$ como F separa punto de X entonces existe $f \in \mathrm{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$, de donde $\psi(x)(f) = f(x) \neq f(y) = \psi(y)(f)$. Esto último muestra que ψ es inyectiva.

$\Leftarrow$] Supongamos que ψ en inyectiva. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. De la inyectividad de ψ tenemos que $\psi(x) \neq \psi(y)$, de donde existe $f \in \mathrm{F}$ tal que $\psi(x)(f) \neq \psi(y)(f)$, es decir $f(x) \neq f(y)$. Por lo tanto F separa puntos de X.

$\square$

CAPÍTULO 2

Algunas propiedades de $\mathcal{C}_n^*(X)$

2.1. Los Teoremas de Jameson

Teorema 2.1.1. ***(Jameson [1974])*** *Si $\mathcal{C}_n^*(X)$ es separable entonces X es un espacio segundo numerable.*

Demostración. Sea $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable de $\mathcal{C}_n^*(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el siguiente conjunto $\mathrm{U}_n = \left\{x \in X : |f_n(x)| < \dfrac{2}{3}\right\}$. Mostraremos que la colección $\{\mathrm{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ forma una base para X.
Sea x un punto arbitrario de X y U una vecindad abierta de x. Como X es un espacio Tychonoff existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus \mathrm{U}) \subseteq \{1\}$. Como $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathcal{C}_n^*(X)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_{n_0}\|_X < \dfrac{1}{3}$, de donde $|f_{n_0}(x)| = |0 - f_{n_0}(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x)| < \dfrac{1}{3} < \dfrac{2}{3}$ y por lo cual $x \in \mathrm{U}_{n_0}$.
Sólo nos falta justificar que $\mathrm{U}_{n_0} \subseteq \mathrm{U}$. Sea $y \in \mathrm{U}_{n_0}$.
Por otra parte como $\|f - f_{n_0}\|_X < \dfrac{1}{3}$ tenemos que $|f(y) - f_{n_0}(y)| < \dfrac{1}{3}$, y puesto que $y \in \mathrm{U}_{n_0}$ entonces $|f_{n_0}(y)| < \dfrac{2}{3}$ de donde

$$f(y) = |f(y)| \leqslant |f(y) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y)| < \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Por la definición de f tenemos que $y \notin X \setminus \mathrm{U}$ y entonces $y \in \mathrm{U}$. Por lo tanto X es un espacio segundo numerable. $\square$

Proposición 2.1.2. ***(Jameson [1974])*** *Sea E un subespacio lineal de $\mathcal{C}_n^*(X)$ tal que para cualesquiera subconjuntos disjuntos cerrados* A, B *de X existe un elemento f de E tal que $f : X \to [0,1]$ y toma el valor 0 en* A *y 1 en* B. *Entonces E es denso en $\mathcal{C}_n^*(X)$.*

Demostración. Aplicando la hipótesis al par de conjuntos $\emptyset$ y X, se observa que E contiene la función constante 1. Sean $\varepsilon > 0$ y g elemento arbitrario de $\mathcal{C}_n^*(X)$. Hay que justificar que existe un elemento f de E con la propiedad de que $\|g - f\|_X \leqslant \varepsilon$. Sea $\alpha = \inf g(X)$. Por la propiedad arquimediana de los reales existe un entero positivo n tal que $g(x) < \alpha + n\varepsilon$ para todo $x \in X$. Para $1 \leqslant r \leqslant n$, definimos

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_r &= \{x \in X : g(x) \leqslant \alpha + (r-1)\varepsilon\}, \\ \mathrm{B}_r &= \{x \in X : g(x) \geqslant \alpha + r\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Entonces $\mathrm{A}_r, \mathrm{B}_r$ son cerrados disjuntos de X. En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_r &= \{x \in X : g(x) \leqslant \alpha + (r-1)\varepsilon\} = g^{-1}[(-\infty, \alpha + (r-1)\varepsilon]], \\ \mathrm{B}_r &= \{x \in X : g(x) \geqslant \alpha + r\varepsilon\} = g^{-1}[[\alpha + r\varepsilon, \infty)]. \end{aligned}$$

De donde se puede concluir que A_r y B_r son cerrados disjuntos de X. Por hipótesis, existe un elemento f_r de E tal que
$f_r : X \to [0,1]$ y toma el valor 0, 1 en A_r, B_r respectivamente.
Definimos la siguiente función

$$f = \alpha \cdot 1 + \varepsilon(f_1 + ... + f_n).$$

Como E es un subespacio lineal de $\mathcal{C}_n^*(X)$ entonces f en un elemento de E. Sea x un punto arbitrario de X. Existe $p \in \{1, ..., n\}$ tal que

$$\alpha + (p-1)\varepsilon \leqslant g(x) \leqslant \alpha + p\varepsilon.$$

Ahora si $r \leqslant p-1$, entonces $\alpha + r\varepsilon \leqslant \alpha + (p-1)\varepsilon$, de donde x está en B_r, entonces $f_r(x) = 1$. Si $p+1 \leqslant r$, se tiene que $\alpha + p\varepsilon \leqslant \alpha + (r-1)\varepsilon$, de donde x está en A_r y, además $f_r(x) = 0$. Dado que $0 \leqslant f_p(x) \leqslant 1$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \varepsilon f_p(x), \\ \alpha + (p-1)\varepsilon &\leqslant \alpha + (p-1)\varepsilon + \varepsilon f_p(x), \\ \alpha + (p-1)\varepsilon &\leqslant \alpha + \varepsilon((p-1) + f_p(x)), \\ \alpha + (p-1)\varepsilon &\leqslant \alpha + \varepsilon(\underbrace{1 + ... + 1}_{(p-1) veces} + f_p(x) + \underbrace{0 + ... + 0}_{(n-p) veces}), \\ \alpha + (p-1)\varepsilon &\leqslant \alpha \cdot 1 + \varepsilon(f_1(x) + ... + f_{p-1}(x) + f_p(x) + f_{p+1}(x) + ... + f_n(x)), \\ \alpha + (p-1)\varepsilon &\leqslant f(x). \end{aligned}$$

Por otro lado, como $f_p(x) \leqslant 1$, tenemos

$$\begin{array}{rcl} -1 + f_p(x) & \leqslant & 0, \\ p - 1 + f_p(x) & \leqslant & p, \\ \varepsilon((p-1) + f_p(x)) & \leqslant & \varepsilon \cdot p, \\ \alpha + \varepsilon((p-1) + f_p(x)) & \leqslant & \alpha + \varepsilon \cdot p, \\ \alpha + \varepsilon(\underbrace{1 + ... + 1}_{(p-1)veces} + f_p(x) + \underbrace{0 + ... + 0}_{(n-p)veces}) & \leqslant & \alpha + \varepsilon \cdot p, \\ \alpha \cdot 1(x) + \varepsilon(f_1(x) + ... + f_{p-1}(x) + f_p(x) + f_{p+1}(x) + ... + f_n(x)) & \leqslant & \alpha + \varepsilon \cdot p, \\ f(x) & \leqslant & \alpha + p \cdot \varepsilon. \end{array}$$

De las desigualdades anteriores podemos concluir lo siguiente

$$\alpha + (p-1)\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \alpha + p \cdot \varepsilon.$$

De donde

$$\begin{gathered} \alpha + (p-1)\varepsilon \leqslant g(x) \leqslant \alpha + p\varepsilon, \text{ y} \\ -(\alpha + p \cdot \varepsilon) \leqslant -f(x) \leqslant -(\alpha + (p-1)\varepsilon). \end{gathered}$$

Sumando las dos desigualdades tenemos que $-\varepsilon \leqslant g(x) - f(x) \leqslant \varepsilon$, y entonces $|g(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Tomando el supremo sobre todas las x en X, se tiene que $\|f - g\|_X \leqslant \varepsilon$. Por lo tanto E es un subespacio denso de X. □

Daremos un criterio muy útil para saber cuando $\mathcal{C}_n^*(X)$ es un espacio separable.

Teorema 2.1.3. *Sea X un espacio compacto. Entonces $\mathcal{C}_n^*(X)$ es separable si y sólo si X es un espacio segundo numerable.*

Demostración.

- $\Rightarrow$] Lo tenemos ya justificado debido al Teorema 2.1.1.

- $\Leftarrow$] Recordemos que como X es un espacio de Tychonoff compacto entonces X es un espacio normal, es decir, para cualesquiera subconjuntos cerrados A y B de X tales que $A \cap B = \emptyset$, existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(B) \subseteq \{1\}$. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X la cual es cerrada bajo uniones finitas. Esto último lo podemos hacer pues como X es un espacio segundo numerable existe $\mathcal{B}_0$ una base numerable para X y consideremos el siguiente conjunto $\mathcal{B} = \{U_1 \cup \cdots \cup U_n : n \in \mathbb{N}$ y $U_i \in \mathcal{B}_0$ para cada $i = 1,,,, n\}$. No es muy difícil justificar que $\mathcal{B}$ es la base numerable de X la cual es cerrada bajo uniones finitas. Para cada pareja (U, V) cuyas entradas son elementos de $\mathcal{B}$ con $cl_X(U) \subseteq V$, sea $f_{(U,V)}$ una función continua de X en $[0,1]$ tal que toma el valor 0 en U y 1 en $X \setminus V$. Ponemos E el subespacio lineal de $\mathcal{C}_n^*(X)$ generado por $\{1\} \cup \{f_{(U,V)} : U, V \in \mathcal{B}, cl_X(U) \subseteq V\}$. Entonces se tiene que E satisface la suposición de la Proposición 2.1.2.
  Antes de justificar que satisface las hipótesis de la Proposición 2.1.2, haremos una pequeña observación. Sucede que para cualquier elemento U de $\mathcal{B}$ y para todo abierto M de X tal que $cl(U) \subseteq M$ entonces existe U' un elemento de $\mathcal{B}$ tal que $cl(U) \subseteq U' \subseteq M$. Tomemos U un elemento de $\mathcal{B}$ y M un abierto

tal que $cl(U) \subseteq M$. Como el espacio X es compacto se tiene que $cl(U)$ es un subconjunto compacto, de donde para cada $b \in cl(U)$, existe un abierto básico U_b de $\mathcal{B}$ tal que

$$b \in U_b \subseteq M.$$

De la compacidad de $cl(U)$ existe $b_1, ..., b_n$ elementos de $cl(U)$ tal que

$$cl(U) \subseteq U_{b_1} \cup \cdots \cup U_{b_n} \subseteq M.$$

Como $\mathcal{B}$ es cerrada bajo uniones finitas se tiene que $U' = U_{b_1} \cup \cdots \cup U_{b_n}$ es el elemento de $\mathcal{B}$ que estamos buscando.
Tomemos A y B subconjuntos cerrados ajenos de X. Como X es un espacio normal, para cada $a \in A$ existe $U_a \in \mathcal{B}$ tal que $a \in U_a \subseteq cl_X(U_a) \subseteq X \setminus B$. Para cada $a \in A$ elegimos $f_a : X \to [0,1]$ continua tal que $f_a(cl_X(U_a)) \subseteq \{0\}$ y $f_a(B) \subseteq \{1\}$. Como A es cerrado y X es un espacio compacto, entonces A es un subconjunto compacto de X, de donde existe $a_1, ..., a_n$ tales que

$$A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n} \subseteq cl_X(U_{a_1}) \cup \cdots \cup cl_X(U_{a_n}) = cl(U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}) \subseteq X \setminus B.$$

Como $\mathcal{B}$ es cerrada bajo uniones finitas, entonces $U = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}$ es un elemento de $\mathcal{B}$ tal que

$$A \subseteq U \subseteq cl(U) \subseteq X \setminus B.$$

De la observación, elegimos V un elemento de $\mathcal{B}$ tal que

$$A \subseteq U \subseteq cl(U) \subseteq V \subseteq X \setminus B.$$

Se tiene que la siguiente función

$$f_{(U,V)} = \frac{f_{a_1} + ... + f_{a_n}}{n},$$

es un elemento de E tal que toma el valor 0 en A y el valor 1 en B. Por la Proposición 2.1.2 E es denso en $\mathcal{C}_n^*(X)$. Ahora si consideramos el generado del siguiente conjunto $E' = \{r_1 f_1 + ... + r_n f_n : r_1, ..., r_n \in \mathbb{Q}, f_1, ..., f_n \in E, n \in \mathbb{N}\}$, se tiene que es un subconjunto numerable de tal que $E \subseteq E'$. Como E es denso en $\mathcal{C}_n^*(X)$ tenemos que E' denso en $\mathcal{C}_n^*(X)$ Por lo tanto $\mathcal{C}^*(X)$ es separable.

□

2.2. El Teorema de Stone-Weierstrass

A continuación enunciaremos uno de los más importantes Teoremas de este capítulo.

Teorema 2.2.1. ***(Teorema de Stone-Weierstrass)*** *Sea X un espacio compacto y P un subconjunto de $\mathcal{C}(X)$ que cumple lo siguiente:*

(a) $\lambda\varphi + \mu\psi \in P$, *para toda* $\varphi, \psi \in P$ *y para todo* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(b) $\varphi\psi \in P$, *para toda* $\varphi, \psi \in P$.

(c) $1 \in P$.

Si P separa puntos de X. Entonces P es denso en $\mathcal{C}_n^*(X) = \mathcal{C}_n(X)$.

Las tres condiciones equivalen a decir que P es una $\mathbb{R}$-subálgebra con unidad de la $\mathbb{R}$-álgebra de funciones continuas $\mathcal{C}(X)$.

Para demostrar el Teorema de Stone-Weierstrass usaremos los siguientes cuatro lemas.

Lema 2.2.2. *Consideremos las mismas hipótesis del Teorema 2.2.1. Dados $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, entonces existe un elemento ψ en P tal que $\psi(x_1) = c_1$ y $\psi(x_2) = c_2$.*

Demostración. Como P separa puntos de X existe $\varphi \in P$ tal que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Entonces se cumple que

$$det \begin{pmatrix} \varphi(x_1) & 1 \\ \varphi(x_2) & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Por tanto, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{gathered} \lambda\varphi(x_1) + \mu = c_1 \\ \lambda\varphi(x_2) + \mu = c_2. \end{gathered}$$

De las propiedades (a) y (c) se sigue que la función $\psi = \lambda\varphi + \mu \cdot 1 \in P$. De las anteriores igualdades podemos concluir que $\psi(x_1) = c_1$ y $\psi(x_2) = c_2$. □

Lema 2.2.3. *Consideremos las mismas hipótesis del Teorema 2.2.1. La cerradura $cl(P)$ de P en $\mathcal{C}_n(X)$ también tiene las propiedades (a), (b) y (c).*

Demostración.

(a) Sean $\varphi, \psi \in cl(P)$, por lo tanto existen (φ_k), (ψ_k) sucesiones de P tales que (φ_k), (ψ_k) convergen a φ, ψ respectivemente en $\mathcal{C}_n^*(X)$. Definamos para cada $k \in \mathbb{N}$ la función $(\varphi+\psi)_k$, cuya regla es $(\varphi+\psi)_k = \varphi_k + \psi_k$. Por la propiedad (a) de P tenemos que $(\varphi + \psi)_k \in P$ para toda $k \in \mathbb{N}$. y Mostraremos que la sucesión $((\varphi + \psi)_k)$ converge a $\varphi + \psi$ en $\mathcal{C}_n^*(X)$. Sea $\varepsilon > 0$ entonces existen $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{gathered} \|\varphi_k - \varphi\|_X < \frac{\varepsilon}{2}, \forall k \geqslant k_0 \\ \|\psi_j - \psi\|_X < \frac{\varepsilon}{2}, \forall j \geqslant k_1. \end{gathered}$$

Definimos $k = \text{máx}\{k_0, k_1\}$ y tomamos $n \geqslant k$, entonces

$$\begin{aligned} \|(\varphi+\psi)_n - (\varphi+\psi)\|_X &= \|\varphi_n + \psi_n - \varphi - \psi\|_X \\ &\leqslant \|\varphi_n - \varphi\|_X + \|\psi_n - \psi\|_X \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces la sucesión $((\varphi+\psi)_k)$ converge a $\varphi+\psi$ en $\mathcal{C}_n^*(X)$ y de donde $cl(P)$ cumple (a).

(b) Sean $\varphi, \psi \in cl(P)$ funciones no cero (Si alguna de ellas es cero, la afirmación es inmediata). Entonces existen (φ_k), (ψ_k) sucesiones de P tales que (φ_k), (ψ_k) convergen a φ, ψ respectivamente en $\mathcal{C}_n^*(X)$. Definimos para cada $k \in \mathbb{N}$ la función $(\varphi \cdot \psi)_k$, cuya regla es $(\varphi \cdot \psi)_k = \varphi_k \cdot \psi_k$. Por la propiedad (b) de P se tiene que $(\varphi \cdot \psi)_k \in P$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y consideremos la sucesión $((\varphi \cdot \psi)_k)$. Mostraremos que la suceción $((\varphi \cdot \psi)_k)$ converge a $\varphi \cdot \psi$ en $\mathcal{C}_n^*(X)$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Como toda sucesión convergente está acotada, existe $C > 0$ tal que $\|\psi_k\|_X \leqslant C$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Además existen $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} \|\varphi_k - \varphi\|_X &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot C}, \quad \forall k \geqslant k_0 \\ \|\psi_j - \psi\|_X &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot \|\varphi\|_X}, \forall j \geqslant k_1. \end{aligned}$$

Antes de continuar no es muy difícil justificar que $\|f \cdot g\|_X = \|f\|_X \|g\|_X$ para toda $f, g \in \mathcal{C}^*(X)$.
Definimos $k = \text{máx}\{k_0, k_1\}$ y sea $n \geqslant k$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|\varphi \cdot \psi - (\varphi \cdot \psi)_n\|_X &= \|\varphi \cdot \psi - \varphi_n \cdot \psi_n\|_X \\ &= \|\varphi \cdot \psi - \varphi \cdot \psi_n + \varphi \cdot \psi_n - \varphi_n \cdot \psi_n\|_X \\ &= \|\varphi(\psi - \psi_n) + (\varphi - \varphi_n)\psi_n\|_X \\ &\leqslant \|\varphi(\psi - \psi_n)\|_X + \|(\varphi - \varphi_n)\psi_n\|_X \\ &\leqslant \|\varphi\|_X \|\psi - \psi_n\|_X + \|\varphi - \varphi_n\|_X \|\psi_n\|_X \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces la sucesión $((\varphi \cdot \psi)_k)$ converge a $\varphi \cdot \psi$ en $\mathcal{C}_n^*(X)$ y de donde $cl(P)$ cumple (b).

(c) Esto se tiene obtiene fácilmente debido a que $P \subseteq cl(P)$.

$\square$

Lema 2.2.4. *Consideremos las mismas hipótesis del Teorema 2.2.1. Si $\varphi \in cl(P)$, entonces $|\varphi| \in cl(P)$.*

Demostración. Como φ es continua y X es compacto, se tiene que $\varphi(X)$ es compacto en $\mathbb{R}$. Por tanto, $\varphi(X)$ está contenido en algún intervalo $[a,b]$. Por el Colorario A.5.3 existe una sucesión de polinomios p_k que converge uniformemente a la función valor absoluto $|\cdot|$ en el intervalo $[a,b]$, es decir, dada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|p_k(t) - |t|| < \varepsilon \quad \forall k \geqslant k_0 \quad \forall t \in [a,b].$$

Esta desigualdad se cumple, en particular, para $t = \varphi(x)$ con $x \in X$. Por tanto,

$$\|p_k \circ \varphi - |\varphi|\|_\infty = \max_{x\in X} |p_k(\varphi(x)) - |\varphi(x)|| < \varepsilon \quad \forall k \geqslant k_0,$$

es decir, $p_k \circ \varphi \to |\varphi|$ en $\mathcal{C}(X)$.
Finalmente, el Lema 2.2.3 implica que, para cualquier polinomio $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m$, se cumple que

$$p \circ \varphi = \alpha_0 + \alpha_1 \varphi + \cdots + \alpha_m \varphi^m \in cl(P).$$

Por tanto, $|\varphi| \in cl(P)$. □

Lema 2.2.5. *Consideremos las mismas hipótesis del Teorema 2.2.1. Si $\varphi, \psi \in cl(P)$, entonces $\max\{\varphi,\psi\}, \min\{\varphi,\psi\} \in cl(P)$.*

Demostración. Basta observar que

$$\begin{aligned} \max\{\varphi,\psi\} &= \frac{1}{2}(\varphi + \psi + |\varphi - \psi|) \\ \min\{\varphi,\psi\} &= \frac{1}{2}(\varphi + \psi - |\varphi - \psi|). \end{aligned}$$

Como $cl(P)$ satisface la propiedad (a) y debido al lema anterior tenemos que $\max\{\varphi,\psi\}, \min\{\varphi,\psi\} \in cl(P)$. □

Ahora sí, ya tenemos todo lo necesario para demostrar el Teorema de Stone-Weierstrass.

Demostración. (Teorema de Stone-Weierstrass) Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $\varepsilon > 0$. Por el lema 2.2.2 para cada par de puntos $x, y \in X$, podemos escoger $\varphi_{x,y} \in P$ tal que $\varphi_{x,y}(x) = f(x)$ y $\varphi_{x,y}(y) = f(y)$.
Fijemos $x \in X$. Como $\varphi_{x,y} - f$ es una función continua y $\varphi_{x,y}(y) - f(y) = 0$, existe un subconjunto abierto U_y en X tal que $y \in \mathrm{U}_y$ y

$$|\varphi_{x,y}(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in \mathrm{U}_y \tag{2.1}$$

y, como X es compacto, existen $y_1, y_2 \ldots, y_m \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{U}_{y_i}.$$

Sea $\varphi_x =$máx$\{\varphi_{x,y_1}, \varphi_{x,y_2}, ..., \varphi_{x,y_m}\}$. El lema 2.2.5 asegura que $\varphi_x \in cl(P)$. Puesto que cada $z \in X$ pertenece a alguna U_{y_i}, la desigualdad (2.1) implica que

$$\varphi_x(z) - f(z) > -\varepsilon \qquad \forall z \in X. \tag{2.2}$$

Por otra parte, dado que $\varphi_{x,y}(x) = f(x)$ para todo $y \in X$, se tiene que $\varphi_x(x) = f(x)$ y, como $\varphi_x - f$ es una función continua, existe un subconjunto abierto V_x de X tal que $x \in \mathrm{V}_x$ y

$$|\varphi_x(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in \mathrm{V}_x. \tag{2.3}$$

De la compacidad de X se sigue que existen $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{V}_{x_i}.$$

Sea $\varphi =$ mín$\{\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, ..., \varphi_{x_n}\}$. El lema 2.2.5 asegura que $\varphi \in cl(P)$. Puesto que cada $z \in X$ pertenece a alguna V_{x_i}, usando la desigualdad (2.3) obtenemos que

$$\varphi(z) - f(z) < \varepsilon \qquad \forall z \in X. \tag{2.4}$$

Y, como la desigualdad (2.2) vale para toda $x \in X$, se tiene además que

$$\varphi(z) - f(z) > -\varepsilon \qquad \forall z \in X. \tag{2.5}$$

Las desigualdades (2.4) y (2.5) implican que $\|\varphi - f\|_X \leqslant \varepsilon$. Por consiguiente, dado que $\varphi \in cl(P)$, concluímos que $f \in cl(P)$.

□

2.3. El Teorema de Ascoli

Teorema 2.3.1. ***(Teorema de Ascoli)*** *Sea X un espacio compacto y sea F un subconjunto de $\mathcal{C}_n(X)$ tal que $cl(F(x))$ es compacto para cada $x \in X$, donde $F(x)$ denota el subconjunto $\{f(x) : f \in F\}$ de $\mathbb{R}$. Entonces F es compacto si y sólo si F es equicontinuo y cerrado en $\mathcal{C}_n^*(X)$.*

Demostración.

$\Rightarrow$] Sea x un elemento de X. Supongamos que F es compacto en $\mathcal{C}_n^*(X)$. En consecuencia, dada $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ y $g_1, g_2, ..., g_m \in F$ tales que

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{B}\left(g_i, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

En consecuencia, como cada g_i es una función continua existe una vecindad abierta U_i de x en X tal que

$$|g_i(y) - g_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in \mathrm{U}_i. \tag{2.6}$$

Definimos $U = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{U}_i$ el cual es diferente del vacío pues x es un elemento de U. Dada $f \in F$ existe $i \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que $\|f - g_i\|_X < \frac{\varepsilon}{3}$. Usando (2.6) obtenemos que

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leqslant |f(y) - g_i(y)| + |g_i(y) - g_i(x)| + |g_i(x) - f(x)| \\ &< \varepsilon \ \ si \ \ y \in U. \end{aligned}$$

Esto prueba que F es equicontinuo en X.
Recordemos que si tenemos un espacio topológico Hausdorff Z y un subespacio compacto K de Z, entonces K es cerrado en Z. Debido a este recordatorio y a que $\mathcal{C}_n^*(X)$ es un espacio topológico Hausdorff tenemos que F es cerrado en $\mathcal{C}_n^*(X)$.

$\Leftarrow$] Supongamos que F es equicontinuo y cerrado en $\mathcal{C}_n^*(X)$. Vamos a probar que F es totalmente acotado y completo, y por el Teorema A.4.4, tendriamos que F es compacto. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Para cada $z \in X$ existe U_z subconjunto abierto de X tal que

$$|f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \forall y \in \mathrm{U}_z, \ \ \forall f \in F. \tag{2.7}$$

Como X es compacto, existe $m \in \mathbb{N}$ y $z_1, z_2, ..., z_m \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{U}_{z_i}. \tag{2.8}$$

Por hipótesis, $cl(F[z_i])$ son compactos para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Entonces $cl(F[z_i])$ son relativamente compactos para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$ (observe la definición A.4.5 y el Colorario A.4.6 y la Proposición A.4.3 en el Apéndice A), de donde $F[z_i]$ son subconjuntos relativamente compactos de $\mathbb{R}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Por lo tanto, existen $x_1, x_2, ..., x_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\bigcup_{i=1}^{m} F[z_i] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{B}\left(x_i, \frac{\varepsilon}{4}\right). \tag{2.9}$$

Consideremos el conjunto (finito) S de todas las funciones $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., k\}$. Para cada $\sigma \in S$ consideremos el conjunto

$$F_\sigma = \left\{ f \in F : f(z_i) \in \mathrm{B}\left(x_{\sigma(i)}, \frac{\varepsilon}{4}\right), \text{para toda } i \in \{1, ..., m\} \right\}.$$

Se sigue de (2.9) que, existe $\sigma \in S$ tal que $f \in F_\sigma$, para cada $f \in F$. En consecuencia,

$$F \subseteq \bigcup_{\sigma \in S} F_\sigma. \tag{2.10}$$

Ahora, para cada $\sigma \in S$ elegimos $g_\sigma \in F_\sigma$, fija. Sean $f, g \in F_\sigma$ y sea $z \in X$. Se sigue de (2.8) que existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $z \in \mathrm{U}_{z_i}$ y, en consecuencia, (2.7) implica que $|h(z) - h(z_i)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ para toda $h \in F$. Por tanto, dado que $f, g \in F_\sigma$ entonces

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &\leqslant |f(z) - f(z_i)| + |f(z_i) - x_{\sigma(i)}| + \\ & \quad\ |x_{\sigma(i)} - g(z_i)| + |g(z_i) - g(z)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando el máximo sobre toda $z \in X$ concluimos que $\|f - g\|_X \leqslant \varepsilon$ para todas $f, g \in F_\sigma$. En consecuencia, para cualquier elección $g_\sigma \in F_\sigma$, se cumple que

$$F_\sigma \subseteq \mathrm{B}(g_\sigma, \varepsilon). \tag{2.11}$$

De (2.10) y (2.11) se sigue que

$$F \subseteq \bigcup_{\sigma \in S} \mathrm{B}(g_\sigma, \varepsilon).$$

Por lo tanto, F es totalmente acotado. Como F es cerrado en $\mathcal{C}_n^*(X)$ el cual es completo, se tiene que F es completo. Por lo tanto F es totalmente acotado y completo, por el Teorema A.4.4 tenemos que F es compacto.

□

Otra forma de presentar el Teorema de Arzelá-Ascoli es:

Teorema 2.3.2. ***(Arzelá-Ascoli)*** *Sea X un espacio topológico compacto. Un subconjunto F de $\mathcal{C}_n(X)$ es relativamente compacto si y sólo si F es equicontinuo y los conjuntos*

$$F(x) = \{f(x) : f \in F\}$$

son relativamente compactos en $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$.

Veamos que en efecto los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2 son equivalentes.

Proposición 2.3.3. *Sea X un espacio topológico compacto y F un subconjunto de $\mathcal{C}_n(X)$. Son equivalentes:*

(1) F es relativamente compacto si y sólo si F es equicontinuo y los conjuntos

$$F(x) = \{f(x) : f \in F\}$$

son relativamente compactos en $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$.

(2) F es compacto si y sólo si F es equicontinuo y cerrado en $\mathcal{C}_n(X)$ y los conjuntos

$$F(x) = \{f(x) : f \in F\}$$

son relativamente compactos en $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2)

$\Rightarrow$) Supongamos que F es un subconjunto compacto de $\mathcal{C}_n(X)$. Por la compacidad de F tenemos que es cerrado y totalmente acotado en $\mathcal{C}_n(X)$. Por el Colorario A.4.6 (pues $\mathcal{C}_n(X)$ es un espacio métrico completo), F es relativamente compacto, por hipótesis F es equicontinuo y los conjuntos

$$F(x) = \{f(x) : f \in F\}$$

son relativamente compactos en $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$.

$\Leftarrow$) Supongamos que F es equicontinuo y cerrado en $\mathcal{C}_n(X)$ y los conjuntos

$$F(x) = \{f(x) : f \in F\}$$

son relativamente compactos en $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$. Por hipótesis F es relativamente compacto, de donde F es totalmente acotado. Como F es cerrado en $\mathcal{C}_n(X)$ el cual es completo, se tiene que F es completo y por el Teorema A.4.4, F es compacto.

(2) $\Rightarrow$ (1)

$\Rightarrow$) Supongamos que F es relativamente compacto. Entonces $cl(\mathrm{F})$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{C}_n(X)$ y por hipótesis $cl(\mathrm{F})$ es equicontinuo y los conjuntos

$$cl(\mathrm{F})(x) = \{f(x) : f \in cl(\mathrm{F})\}$$

son relativamente compactos en $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$.
Como $F \subseteq cl(\mathrm{F})$, podemos concluir que F es un subconjunto equicontinuo de $\mathcal{C}_n(X)$. Para cada $x \in X$ se tiene que $cl(\mathrm{F})(x)$ es totalmente acotado y como $F(x) \subseteq cl(\mathrm{F})(x)$, entonces $F(x)$ es un subconjunto totalmente acotado de $\mathbb{R}$, de donde $F(x)$ es relativamente compacto.

$\Leftarrow$) Supongamos que F es equicontinuo y los conjuntos

$$F(x) = \{f(x) : f \in F\}$$

son relativamente compactos en $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$.
De manera análoga a como se demostro el regreso del Teorema 2.3.1, tenemos que F es totalmente acotado. Por lo tanto F es relativamente compacto.

$\square$

CAPÍTULO 3

Algunas propiedades de $\mathcal{C}_k(X)$

3.1. Un criterio para saber cuando $\mathcal{C}_k(X)$ es métrico

Para analizar las propiedades topológicas de $\mathcal{C}_k(X)$, utilizaremos los siguientes conceptos de X, que de alguna manera nos dan información de como se relaciona $\mathcal{C}_k(X)$ con el espacio X.

Definición 3.1.1. *Sea X es un espacio topológico y* $\mathrm{A} \subseteq X$. $\mathrm{B} \subseteq X$ *es **vecindad de A** si para todo x en* A *se tiene que* B *es vecindad de x (esto último quiere decir que existe C un abierto de X tal que $x \in C \subseteq B$).*

Definición 3.1.2. *Una familia* $\mathcal{B}(\mathrm{A})$ *de vecindades en X es llamada **base de vecindades para el espacio X en el conjunto $\mathrm{A} \subseteq X$** si para todo* S *en* $\mathcal{B}(\mathrm{A})$ *se tiene que* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{S}$ *y para toda vecindad* V *de* A *existe* B *en* $\mathcal{B}(\mathrm{A})$ *tal que* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{V}$.

Definición 3.1.3. *Un espacio X es un espacio de **tipo punto-numerable** si cada punto de X está contenido en algún subconjunto compacto de X el cual tiene una base numerable de vecindades.*

Definición 3.1.4. *Sea X un espacio y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X. Un elemento x de X es un **punto de acumulación** de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si para cada vecindad U de x y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $j \geqslant n$ tal que $x_j \in U$.*

Definición 3.1.5. *Un espacio X es llamado un **q-espacio** si, para todo punto x de X, existe una sucesión $\{\mathrm{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de vecindades de $\{x\}$ tal que cada sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $x_n \in \mathrm{U}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tiene un punto de acumulación en X.*

Definición 3.1.6. *Un espacio X es* ***hemi-compacto*** *si existe una subcolección numerable $\{\mathrm{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{K}(X)$ tal que para cualquier $\mathrm{K} \in \mathcal{K}(X)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}_m$.*

Definición 3.1.7. *Sean X, Y espacios topológicos y sea $h : X \to Y$ una función continua. Decimos que h es un* ***encaje*** *topológico y que X está encajado en Y si $h : X \to h[X]$ es un homeomorfismo (es decir, X es esencialmente un subespacio de Y).*

Lema 3.1.8. *Todo espacio primero numerable es un espacio de tipo punto-numerable.*

Demostración. Sea X un espacio primero numerable y tomemos x en X. Entonces existe una base de vencindades $\mathcal{B}(x) = \{\mathrm{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de x. Claramente la familia $\mathcal{B}(x) = \{\mathrm{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base de vecindades para el espacio X del conjunto $\{x\}$, el cual es compacto. □

Lema 3.1.9. *Todo espacio de tipo punto-numerable es un q-espacio.*

Demostración. Sea X un espacio de tipo punto-numerable. Sea x_0 un elemento de X. Entonces existen un subconjunto compacto K de X y una base de vecindades $\mathcal{B}_0(K) = \{\mathrm{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ en X para el conjunto K. Afirmación: existe una base de vecindades $\mathcal{B}(\mathrm{K}) = \{\mathrm{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X en el conjunto K tal que si $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leqslant m$ entonces $\mathrm{U}_m \subseteq \mathrm{U}_n$. En efecto, definamos $\mathrm{U}_1 = \mathrm{V}_1$ y $\mathrm{U}_n = \mathrm{V}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{V}_n$ si $n \geqslant 2$ y consideremos $\mathcal{B}(\mathrm{K}) = \{\mathrm{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por construcción satisface que si $n, m \in \mathbb{N}$ son tales que $n \leqslant m$ entonces $\mathrm{U}_m \subseteq \mathrm{U}_n$, solamente hay que justificar que $\mathcal{B}(\mathrm{K})$ es base de vecindades de K. Tomemos A una vecindad de K, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{V}_m \subseteq \mathrm{A}$, de donde

$$\mathrm{K} \subseteq \mathrm{V}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{V}_m = \mathrm{U}_m \subseteq \mathrm{V}_m \subseteq \mathrm{A}.$$

Esto muestra que $\mathcal{B}(\mathrm{K}) = \{\mathrm{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades para el conjunto K. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con $x_n \in \mathrm{U}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación en X, además dicho punto de acumulación es un elemento de K. Argumentando por contradicción, supogamos que para un punto $k \in \mathrm{K}$ existe un abierto W_k con $k \in \mathrm{W}_k$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geqslant n$ entonces $x_j \notin \mathrm{W}_k$. Como K es compacto existe $n \in \mathbb{N}$ y existen $k_1, ..., k_n \in \mathrm{K}$ tales que

$$\mathrm{K} \subseteq \mathrm{W}_{k_1} \cup \cdots \cup \mathrm{W}_{k_n}.$$

Existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que para cada $j \geqslant n_i$ se tiene que $x_j \notin \mathrm{W}_{k_i}$ para cada $i = 1, ..., n$. Sea $m = \text{máx}\{n_i : \text{para } i = 1, ..., n\}$ entonces para cada $j \geqslant m$ se tiene que $x_j \notin \mathrm{W}_{k_i}$ para $i = 1, ..., n$, es decir $x_j \notin \mathrm{W}_{k_1} \cup \cdots \cup \mathrm{W}_{k_n}$ si $j \geqslant m$. Como $\mathcal{B}(\mathrm{K})$ es una base de vecindades para K existe $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathrm{K} \subseteq \mathrm{U}_s \subseteq \mathrm{W}_{k_1} \cup \cdots \cup \mathrm{W}_{k_n}.$$

Sea $j = \text{máx}\{s, m\}$, entonces

$$\mathrm{K} \subseteq \mathrm{U}_j \subseteq \mathrm{U}_s \subseteq \mathrm{W}_{k_1} \cup \cdots \cup \mathrm{W}_{k_n}.$$

Pero como $x_j \in \mathrm{U}_j$ entonces $x_j \in \mathrm{W}_{k_1} \cup \cdots \cup \mathrm{W}_{k_n}$ lo cual no puede suceder pues $j \geqslant m$. Esto muestra que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación en X. Por lo tanto X es un q-espacio. $\square$

Lema 3.1.10. *Sean X, Y espacios topológicos de Tychonoff, $\psi : X \to Y$ una función continua. Definimos la función $\psi^* : \mathcal{C}_k(Y) \to \mathcal{C}_k(X)$, cuya regla es $\psi^*(g) = g \circ \psi$ para cada $g \in \mathcal{C}_k(Y)$. Entonces ψ^* es una función continua.*

Demostración. Debido al lema 1.0.9, tomemos un abierto básico $\mathcal{U}(\mathrm{K}_1, ..., \mathrm{K}_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n)$ de $\mathcal{C}_k(X)$, donde $\mathrm{K}_1, ..., \mathrm{K}_n$ son subconjuntos compactos de X, $\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Sea $g \in {\psi^*}^{-1}[\mathcal{U}(\mathrm{K}_1, ..., \mathrm{K}_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n)]$. Entonces $g \circ \psi \in \mathcal{U}(\mathrm{K}_1, ..., \mathrm{K}_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n)$, de donde $g(\psi(\mathrm{K}_i)) \subseteq \mathrm{V}_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Como la función $\psi : X \to Y$ es continua y cada K_i es un subconjunto compacto de X, entonces $\psi(\mathrm{K}_i)$ es un subconjunto compacto de Y para cada $i = 1, ..., n$. Por lo cual $\mathcal{U}(\psi(\mathrm{K}_1), ..., \psi(\mathrm{K}_i); \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n)$ es un abierto básico de $\mathcal{C}_k(Y)$ tal que

$$g \in \mathcal{U}(\psi(\mathrm{K}_1), ..., \psi(\mathrm{K}_n); \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n) \subseteq {\psi^*}^{-1}[\mathcal{U}(\mathrm{K}_1, ..., \mathrm{K}_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n)].$$

Por lo tanto ψ^* es una función continua. $\square$

Lema 3.1.11. *Sea X un espacio hemi-compacto. Sea $\{\mathrm{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión que satisface la condición de hemi-compacidad de X. Definamos $\mathrm{S} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n$ (la suma topológica libre). Entonces los espacios topológicos $\mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ y $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k(\mathrm{K}_n)$ son homeomorfos.*

Demostración. En efecto, definamos $\phi : \mathcal{C}_k(\mathrm{S}) \to \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k(\mathrm{K}_n)$ tal que a cada f en $\mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ ($f : \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{K}_n \times \{n\}) \to \mathbb{R}$ es continua), le asociamos la función $\phi(f) : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k(\mathrm{K}_n)$ tal que a cada $i \in \mathbb{N}$ le corresponde la función $\phi(f)(i) : \mathrm{K}_i \to \mathbb{R}$ cuya regla es $\phi(f)(i)(k) = f(k, i)$ para cada $k \in \mathrm{K}_i$.
Hay que ver que la función $\phi(f)(i) : \mathrm{K}_i \to \mathbb{R}$ es continua para cada $i \in \mathbb{N}$. Sean $i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathrm{K}_i$ y $\varepsilon > 0$. Como la función $f : \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{K}_n \times \{n\}) \to \mathbb{R}$ es continua, existe un abierto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{A}_n \times \{n\})$ de S tal que $(k, i) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{A}_n \times \{n\})$ y

$$f[\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{A}_n \times \{n\})] \subseteq \mathrm{B}(f(k, i), \varepsilon),$$

donde A_j son abiertos de K_j para toda $j \in \mathbb{N}$. Entonces $(k, i) \in \mathrm{A}_i \times \{i\}$, de donde A_i es un abierto de K_i tal que $k \in \mathrm{A}_i$ y

$$\phi(f)(i)[\mathrm{A}_i] \subseteq \mathrm{B}(\phi(f)(i)(k), \varepsilon).$$

Por lo tanto $\phi(f)(i) : \mathrm{K}_i \to \mathbb{R}$ es continua para cada $i \in \mathbb{N}$. Tomamos $f, g \in \mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ tales que $f \neq g$, entonces existe $(k, i) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{K}_n \times \{n\})$ tal que $f(k, i) \neq g(k, i)$, es decir $\phi(f)(i)(k) = f(k, i) \neq g(k, i) = \phi(g)(i)(k)$, de donde $\phi(f)(i)(k) \neq \phi(g)(i)(k)$, entonces $\phi(f)(i) \neq \phi(g)(i)$ y por lo tanto $\phi(f) \neq \phi(g)$, es decir ϕ es inyectiva.
Sea $g : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k(\mathrm{K}_n)$. Definimos $h : \mathrm{S} \to \mathbb{R}$ cuya regla es $h(k, i) = g(i)(k)$. Se tiene que h es una función continua. En efecto, sean $(k, i) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{K}_n \times \{n\})$ y $\varepsilon > 0$. Como la función $g(i) : \mathrm{K}_i \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe un abierto A_i de K_i tal que $k \in \mathrm{A}_i$ y

$$g(i)[\mathrm{A}_i] \subseteq \mathrm{B}(g(i)(k), \varepsilon),$$

de donde, $\mathrm{A}_i \times \{i\}$ es un abierto de S tal que $(k, i) \in \mathrm{A}_i \times \{i\}$ y

$$h[\mathrm{A}_i \times \{i\}] \subseteq \mathrm{B}(h(k,i),\varepsilon).$$

Por lo tanto $h : \mathrm{S} \to \mathbb{R}$ es una función continua. Además no es muy díficil justificar que $\phi(h) = g$. Por lo tanto ϕ es una función sobreyectiva.
Sea $i \in \mathbb{N}$, se tiene que la función $\pi_i \circ \phi : \mathcal{C}_k(\mathrm{S}) \to \mathcal{C}_k(\mathrm{K}_i)$ es continua. Sea $\mathrm{B} = \mathcal{U}(\mathrm{K}_1, ..., \mathrm{K}_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n)$ un abierto canónico de $\mathcal{C}_k(\mathrm{K}_i)$, donde $\mathrm{K}_1, ..., \mathrm{K}_n$ son subconjuntos compactos de K_i y $\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Tomemos $g \in (\pi_i \circ \phi)^{-1}[\mathrm{B}]$, entonces $\phi(g)(i)[\mathrm{K}_j] \subseteq \mathrm{V}_j$ para cada $j = 1, ..., n$. Definamos $\mathrm{C} = \mathcal{U}(\mathrm{K}_1 \times \{1\}, ..., \mathrm{K}_n \times \{n\}; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n)$ el cual es un abierto canónico de $\mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ tal que

$$g \in \mathrm{C} \subseteq (\pi_i \circ \phi)^{-1}[\mathrm{B}].$$

Entonces la función $\pi_i \circ \phi : \mathcal{C}_k(\mathrm{S}) \to \mathcal{C}_k(\mathrm{K}_i)$ es continua para cada $i \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\phi : \mathcal{C}_k(\mathrm{S}) \to \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k(\mathrm{K}_n)$ es continua.
Sea $\mathrm{B} = \mathcal{U}(\mathrm{K}_1 \times \{1\}, ..., \mathrm{K}_m \times \{m\}; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_m)$ un abierto canónico $\mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ donde $\mathrm{K}_1 \times \{1\}, ..., \mathrm{K}_m \times \{m\}$ son subconjuntos compactos de S y $\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_m$ son subconjuntos abiertos de los números reales. Sea $\phi(g) \in \phi[\mathrm{B}]$. Se tiene que $g \in \mathrm{B}$ de donde $g[\mathrm{K}_j \times \{j\}] \subseteq \mathrm{V}_j$ para cada $j = 1, ..., m$. Por definición de la suma topológica se tiene que existe un único $j_i \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{K}_i \times \{i\} \subseteq \mathrm{K}_{j_i} \times \{j_i\}$ para cada $i = 1, ..., m$. Definamos $\mathrm{B}_j = \mathcal{U}(\mathrm{K}_j; \mathrm{V}_j)$ para cada $j = 1, ..., m$. Entonces $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{m} \pi_j^{-1}[\mathrm{B}_j]$ es un abierto canónico de $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k(\mathrm{K}_n)$ tal que

$$\phi(g) \in \bigcap_{j=1}^{m} \pi_j^{-1}[\mathrm{B}_j] \subseteq \phi[\mathrm{B}].$$

En efecto, sea $j \in \{1, ..., m\}$ entonces $\pi_j[\phi(g)] \in \mathrm{B}_j$ si y sólo si $\phi(g)(j) \in \mathrm{B}_j$ si y sólo si $\phi(g)(j)[\mathrm{K}_j] \subseteq \mathrm{V}_j$ lo cual se cumple pues $g[\mathrm{K}_j \times \{j\}] \subseteq \mathrm{V}_j$. Por lo tanto $\phi(g) \in \displaystyle\bigcap_{j=1}^{m} \pi_j^{-1}[\mathrm{B}_j]$. Sea $h \in \displaystyle\bigcap_{j=1}^{m} \pi_j^{-1}[\mathrm{B}_j]$, sucede que $\pi_j(h) \in \mathrm{B}_j$ para cada $j \in \{1, ..., m\}$, si y sólo si $h(j)[\mathrm{K}_j] \subseteq \mathrm{V}_j$ para cada $j \in \{1, ..., m\}$. Dado que ϕ es una función biyectiva existe una única $g \in \mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ tal que $\phi(g) = h$ y por ende $\phi(g)(j)[\mathrm{K}_j] \subseteq \mathrm{V}_j$ para cada $j \in \{1, ..., m\}$. De la última contención podemos concluir que $g \in \mathrm{B}$ y por lo tanto $h \in \phi[\mathrm{B}]$.
Tenemos que ϕ es una función abierta. Entonces $\phi^{-1} : \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k(\mathrm{K}_n) \to \mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ es una función continua. Por lo tanto los espacios topológicos $\mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ y $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k(\mathrm{K}_n)$ son homeomorfos.

$\square$

A continuación enunciaremos un Teorema cuya demostración la pueden consultar en [Eng89].

Teorema 3.1.12. *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de espacios metrizables y sea d_i una métrica en el espacio X_i acotada por 1 (es decir $d_i(x,y) \leqslant 1$ para todo $x, y \in X_i$) la cual define la topología de X_i para $i = 1, 2, ...$ Consideremos $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ y* *para cada par $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$ de puntos de X sea*

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i). \tag{3.1}$$

Entonces d es una métrica en X. Además la topología inducida en el conjunto $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ por la métrica d definida en (3.1) coincide con la topología Tychonoff en el producto de los espacios $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Teorema 3.1.13. ***(McCoy y Ntantu [1986]).*** *Para un espacio topológico X, son equivalentes:*

(1) $\mathcal{C}_k(X)$ *es un espacio metrizable.*

(2) $\mathcal{C}_k(X)$ *es un espacio primero numerable.*

(3) $\mathcal{C}_k(X)$ *es un espacio de tipo punto-numerable.*

(4) $\mathcal{C}_k(X)$ *es un q-espacio.*

(5) X *es un espacio hemi-compacto.*

Demostración.

(1) ⇒ (2) Se tiene justificado, pues los espacios métricos son primero numerables.

(2) ⇒ (3) Esto es debido al lema 3.1.8.

(3) ⇒ (4) Esto es debido al lema 3.1.9.

(4) ⇒ (5) Aplicando la hipótesis a la función $0 \in \mathcal{C}_k(X)$, existe una sucesión $\{\mathcal{W}(0, \mathrm{K}_n, \varepsilon_n) : n \in \mathbb{N}\}$ de vecindades del 0 que satisfacen la condición de q-espacio, donde podemos suponer que $\mathrm{K}_n \subseteq \mathrm{K}_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, con $\mathrm{K}_n \subseteq X$ compactos para toda $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que para cada $\mathrm{K} \in \mathcal{K}(X)$, K está contenida en algún K_n, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe $\mathrm{K} \in \mathcal{K}(X)$ tal que K no esta contenido en ningún K_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Elegimos un punto $x_n \in \mathrm{K} \setminus \mathrm{K}_n$. Como X es un espacio de Tychonoff, sea $g_n : X \to [0, n]$ una función continua tal que $g_n(x_n) = n$ y $g = 0$ en K_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por construcción se tiene que $g_n \in \mathcal{W}(0, \mathrm{K}_n, \varepsilon_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado la sucesión $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene un punto de acumulación en $\mathcal{C}_k(X)$. En efecto, sea $g \in \mathcal{C}_k(X)$. Como g es continua y K es compacto, existe un número natural r tal que $g(\mathrm{K}) \subseteq [-r, r]$. Por lo tanto, para cualquier $m > r + 1$ se tiene que $|g_m(x_m) - g(x_m)| > 1$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que X es un espacio hemi-compacto.

(5) ⇒ (1) Sea $\{\mathrm{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión que satisface la condición de hemi-compacidad de X y ponemos $\mathrm{S} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n$. Consideremos el mapeo natural $\psi : \mathrm{S} \to X$ cuya regla es $\psi(k, i) = k$ para cada $(k, i) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{K}_n \times \{n\})$. El mapeo ψ es continuo, pues si A es un subconjunto de X abierto y si $(k, i) \in \psi^{-1}[\mathrm{A}]$ para alguna $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $(k, i) \in \mathrm{K}_i \times \{i\}$ de donde $(\mathrm{A} \cap \mathrm{K}_i) \times \{i\}$ es una abierto de S tal que

$$(k, i) \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{K}_i) \times \{i\} \subseteq \psi^{-1}[\mathrm{A}].$$

Por lo tanto el mapeo ψ es continuo. Consideremos el mapeo $\psi^* : \mathcal{C}_k(X) \to \mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ como $\psi^*(g) = g \circ \psi$. Debido al lema 3.1.10 tenemos que ψ^* es un mapeo continuo. Además ψ^* es un mapeo inyectivo y abierto sobre su imagen. En efecto, sean $f, g \in \mathcal{C}_k(X)$ tales que $f \neq g$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Por las propiedades de la sucesión $\{\mathrm{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\{x\} \subseteq \mathrm{K}_m$, por lo cual $(g \circ \psi)(x, m) = g(\psi(x, m)) = g(x) \neq f(x) = f(\psi(x, m)) = (f \circ \psi)(x, m)$. Por lo tanto $\psi^*(g) \neq \psi^*(f)$, es decir ψ^* es inyectivo.
Sea $\mathrm{B} = \mathcal{U}(\overline{\mathrm{K}}_1, ..., \overline{\mathrm{K}}_m; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_m)$ un abierto canónico de $\mathcal{C}_k(X)$, donde $\overline{\mathrm{K}}_1, ..., \overline{\mathrm{K}}_m$ son subconjuntos compactos de X, $\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_m$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$. Tomemos $\psi^*(g) \in \psi^*[\mathrm{B}]$, entonces $g \in \mathrm{B}$ por lo cual $g[\overline{\mathrm{K}}_i] \subseteq \mathrm{V}_i$ para $i = 1, ..., m$. Debido a las propiedades de la familia $\{\mathrm{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe $j_i \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\mathrm{K}}_i \subseteq \mathrm{K}_{j_i}$ para cada $i = 1, ..., m$. Se tiene que $\mathrm{C} = \mathcal{U}(\overline{\mathrm{K}}_1 \times \{j_1\}, ..., \overline{\mathrm{K}}_m \times \{j_m\}; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_m)$ es un abierto canónico de $\mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ con

$$\psi^*(g) \in \mathrm{C} \cap \psi^*[\mathcal{C}_k(X)] \subseteq \psi^*[\mathrm{B}].$$

Por lo tanto ψ^* es una función abierta sobre su imagen. Por el lema 3.1.11 los espacios topológicos $\mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ y $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k(\mathrm{K}_n)$ son homeomorfos y debido al Teorema 3.1.12 se tiene que el espacio $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k(\mathrm{K}_n)$ es metrizable de donde $\mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ también es metrizable y como $\mathcal{C}_k(X)$ es homeomorfo a un subespacio de $\mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ el cual es metrizable (obsérvese la definición 3.1.7), por ende $\mathcal{C}_k(X)$ es metrizable.

□

3.2. Un criterio para saber cuando $\mathcal{C}_k(X)$ es métrico completo

Definición 3.2.1. *Sea X un espacio topológico. Una pareja (h, K) se llama **compactación** de X si K es un espacio compacto y $h : X \to K$ es un encaje topológico tal que $h[X]$ es un subespacio denso en K. Una compactación (h, K) de X es una **compactación T_2** si el espacio compacto K es Hausdorff.*

Así que vale la pena preguntarnos cuáles espacios topológicos tienen una compactación T_2. El siguiente Teorema contesta esta pregunta.

Teorema 3.2.2. *Un espacio X tiene una compactación T_2 si y sólo si X es de Tychonoff.*

Demostración. Puede consultarse en [TC11]. □

Definición 3.2.3. *Sea X un espacio de Tychonoff,*

$$\beta = \triangle_{f\in\mathcal{C}(X,[0,1])} f : X \to [0, 1]^{\mathcal{C}(X,[0,1])}$$

la función diagonal definida por la colección $\mathcal{C}(X,[0,1]) = \{f : X \to [0,1] : f$ *es una función continua*$\}$ *(observese en el Apéndice de Topología en el capítulo Los espacios completamente regulares o de Tychonoff), y* βX *la cerradura de* $\beta[X]$ *en* $[0,1]^{\mathcal{C}(X,[0,1])}$*. La compactación* $(\beta, \beta X)$ *recibe el nombre de* ***compactación de Stone-Čech*** *de* X*.*

Se sigue de la Proposición B.9.7 (checar en el Apéndice de Topología) que β es un encaje de X en $[0,1]^{\mathcal{C}(X,[0,1])}$, y la compactación de Stone-Čech es una compactación T_2 de X.

Definiciones 3.2.4. *Sea* X *un espacio topológico.*

(1) Un subconjunto G *de* X *es un conjunto* G_δ *si existe una sucesión* $\{\mathrm{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de conjuntos abiertos en* X *tal que* $\mathrm{G} = \bigcap\{\mathrm{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$*.*

(2) Un subconjunto F *de* X *es un conjunto* F_σ *si existe una suseción* $\{\mathrm{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de conjuntos cerrados de* X *tal que* $\mathrm{F} = \bigcup\{\mathrm{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$*.*

Observación 3.2.5. *Sea* F *un subconjunto cerrado no vacío en un espacio métrico* (X,d)*. Sea* $\mathrm{A}_n = \{x \in X : d(x,\mathrm{F}) < 1/n\}$*, donde* $d(x,\mathrm{F}) = \text{ínf}\{d(x,y) : y \in \mathrm{F}\}$*. Entonces cada* A_n *es un subconjunto abierto de* $(X,\mathcal{T}_d)$ *tal que* $\mathrm{F} = \bigcap\{\mathrm{A}_n : n \in N\}$*. Por lo tanto cualquier subconjunto cerrado de un espacio métrico es un conjunto* G_δ*, y cualquier subconjunto abierto de* $(X,\mathcal{T}_d)$ *es un conjunto* F_σ*.*

Teorema 3.2.6. *Para todo espacio Tychonoff* X *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *Para toda compactación* (c, cX) *del espacio* X *se tiene que* $cX \setminus c[X]$ *es un conjunto* F_σ *en* cX*.*

(b) *Para la compactación de Stone-Čech* $(\beta, \beta X)$*, se tiene que* $\beta X \setminus \beta[X]$ *es un conjunto* F_σ *en* βX*.*

(c) *Existe una compactación* (c, cX) *del espacio* X *tal que* $cX \setminus c[X]$ *es un conjunto* F_σ *en* cX*.*

Demostración. Puede consultarse en [Eng89]. □

Definición 3.2.7. *Un espacio topológico* X *es* ***Čech-completo*** *si* X *es un espacio Tychonoff y satisface alguna de las condiciones del Teorema 3.2.6.*

En lo que sigue, si X es un espacio Tychonoff vamos a estar pensando que $X \subseteq cX$, donde (c, cX) es una compactación de X (pues X es homeomorfo al subespacio $c(X)$ de cX).

Observación 3.2.8. *Sea* X *un espacio Čech completo. Directamente de la definición podemos concluir que* X *es un conjunto* G_δ*.*

Definición 3.2.9. *Decimos que el diámetro de un subconjunto* A *de un espacio topológico* X *es menor que una cubierta abierta* $\mathcal{A} = \{\mathrm{A}_s\}_{s\in S}$ *del espacio* X*, lo cual denotamos por* $\delta(\mathrm{A}) < \mathcal{A}$*, si existe* $s \in S$ *tal que* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}_s$*.*

Teorema 3.2.10. *Un espacio Tychonoff X es Čech-completo si y sólo si existe una familia contable $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ de cubiertas abiertas del espacio X con la propiedad de que cualquier familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de X, que tiene la propiedad de la intersección finita y contiene subconjuntos de diámetro menor que $\mathcal{A}_i$ para $i = 1, 2...$, tiene intersección no vacía.*

Demostración.

$\Rightarrow$] Supongamos que X es un espacio Čech-completo con $X \subseteq \beta X$. Existe una familia $\{\mathrm{G}_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos de βX tal que $X = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\mathrm{G}_i$. Por la regularidad de βX para cada $x \in X$ y cada $i = 1, 2, ..$, elegimos un conjunto abierto $\mathrm{V}_{x,i}$ de βX tal que $x \in \mathrm{V}_{x,i} \subseteq cl_{\beta X}(\mathrm{V}_{x,i}) \subseteq \mathrm{G}_i$. Sea $\mathcal{A}_i = \{X \cap \mathrm{V}_{x,i}\}_{x\in X}$. Mostraremos que la familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ de cubiertas abiertas del espacio X cumple con la propiedad del enunciado.
Sea $\{\mathrm{F}_s\}_{s\in S}$ una familia de subconjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de la intersección finita y contiene subconjuntos de diámetro menor que $\mathcal{A}_i$ para $i = 1, 2....$ Como la familia $\{cl_{\beta X}(\mathrm{F}_s)\}_{s\in S}$ de subconjuntos cerrados de βX tiene la propiedad de la intersección finita y βX es un espacio compacto, entonces existe un punto $x \in \bigcap\{cl_{\beta X}(\mathrm{F}_s)\}_{s\in S}$; para probar que $x \in \bigcap\{\mathrm{F}_s\}_{s\in S}$ es suficiente con mostrar que $x \in X$.
Para cada $i \in \mathbb{N}$ elegimos $s_i \in S$ tal que $\delta(\mathrm{F}_{s_i}) < \mathcal{A}_i$ y un punto $x_i \in X$ tal que $\mathrm{F}_{s_i} \subseteq X \cap \mathrm{V}_{x_i,i}$. Puesto que

$$x \in cl_{\beta X}(\mathrm{F}_{s_i}) \subseteq cl_{\beta X}(X \cap \mathrm{V}_{x_i,i}) \subseteq cl_{\beta X}(\mathrm{V}_{x_i,i}) \subseteq \mathrm{G}_i$$

para $i = 1, 2, ...$, se tiene que $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\mathrm{G}_i = X$.

$\Leftarrow$] Sea X un espacio Tychonoff con $X \subseteq \beta X$. Vamos a mostrar que X en un conjunto G_δ en βX (condición (b) del Teorema 3.2.6). Tomemos una familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ que cumple la propiedad. Sea $\mathcal{A}_i = \{\mathrm{U}_{s,i}\}_{s\in S_i}$ para $i = 1, 2, ...$ y sea $\mathrm{V}_{s,i}$ un conjunto abierto de βX tal que $\mathrm{U}_{s,i} = X \cap \mathrm{V}_{s,i}$ para $s \in S_i$ y $i = 1, 2, ...$ Como cada $\mathcal{A}_i$ es una cubierta abierta de X se tiene que

$$X \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{s\in S_i}\mathrm{V}_{s,i}\right).$$

Para probar que X es Čech-completo es suficiente mostrar que la contención inversa se cumple.
Sea $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{s\in S_i}\mathrm{V}_{s,i}\right)$ y sea $\mathcal{B}(x)$ el conjunto de vecindades de x en βX. Consideremos $\mathcal{F} = \{X \cap cl_{\beta X}(\mathrm{V}) : \mathrm{V} \in \mathcal{B}(x)\}$. Como el espacio X es denso en βX se tiene que esta familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de X tiene la propiedad de la intersección finita. Para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $s \in S_i$ tal que $x \in \mathrm{V}_{s,i}$. Por la regularidad de βX existen abiertos ajenos $\mathrm{M}_{s,i}$, $\mathrm{N}_{s,i}$ de βX tales que $x \in \mathrm{M}_{s,i}$ y $\beta X \setminus \mathrm{V}_{s,i} \subseteq \mathrm{N}_{s,i}$, por lo cual $X \cap cl_{\beta X}(\mathrm{M}_{s,i}) \subseteq \mathrm{V}_{s,i}$.

Entonces la familia $\mathcal{F}$ tiene subconjuntos de diámetro menor que $\mathcal{A}_i$ para $i = 1, 2, ...$ Por nuestra suposición tenemos que

$$X \cap \bigcap \{cl_{\beta X}(\mathrm{V}) : \mathrm{V} \in \mathcal{B}(x)\} \neq \emptyset.$$

Como $\bigcap \{cl_{\beta X}(\mathrm{V}) : \mathrm{V} \in \mathcal{B}(x)\} = \{x\}$ se tiene que $x \in X$.

□

Observación 3.2.11. *Si tenemos un subconjunto no vacío* A *de un espacio métrico* (X, d) *se tiene que* $diam(\mathrm{A}) = diam(cl(\mathrm{A}))$ *(Observe la Definición 1.0.7).*

Teorema 3.2.12. ***(de Cantor)*** *Un espacio métrico* (X, d) *es completo si y sólo si para toda sucesión decreciente* $\mathrm{F}_1 \supseteq \mathrm{F}_2 \supseteq ...$ *de subconjuntos cerrados no vacíos de* X*, tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} diam(\mathrm{F}_i) = 0$*, entonces* $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{F}_i \neq \emptyset$.

Demostración.

$\Rightarrow$] Sea $\{\mathrm{F}_i : i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} diam(\mathrm{F}_i) = 0$. Elegimos $x_i \in \mathrm{F}_i$ para $i = 1, 2, ...$ Se tiene que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geqslant k$ se tiene que

$$diam(\mathrm{F}_i) < \varepsilon.$$

Sean $i, j \geqslant k$. Como la sucesión $\{\mathrm{F}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es decreciente entonces $\mathrm{F}_j, \mathrm{F}_i \subseteq \mathrm{F}_k$, de donde $x_i, x_j \in \mathrm{F}_k$. Por lo cual

$$d(x_i, x_j) \leqslant \sup\{d(x, y) : x, y \in \mathrm{F}_k\} = \delta(\mathrm{F}_k) < \varepsilon.$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X el cual es completo. Entonces existe $x \in X$ tal que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x en X. Afirmamos que $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{F}_i$. En efecto, sea $j \in \mathbb{N}$ fija y sea $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_i, x) < \varepsilon \;\; \forall i \geqslant k.$$

Si $k \leqslant j$ entonces $d(x_j, x) < \varepsilon$ y por lo tanto $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap \mathrm{F}_j \neq \emptyset$.
Si $j \leqslant k$ entonces $\mathrm{F}_k \subseteq \mathrm{F}_j$ de modo que $x_k \in \mathrm{F}_j$ y como $d(x_k, x) < \varepsilon$, entonces $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap \mathrm{F}_j \neq \emptyset$.
En cualquier caso se cumple que

$$\mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap \mathrm{F}_j \neq \emptyset.$$

Es decir $x \in cl(\mathrm{F}_j) = \mathrm{F}_j$ para toda $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{F}_i \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$] Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Consideremos $\mathrm{F}_i = cl(\{x_i, x_{i+1}, ...\})$. Por construcción $\{\mathrm{F}_i\}$ es una sucesión decreciente de cerrados no vacíos de X. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_i, x_j) < \frac{\varepsilon}{6} \ \ \forall i, j \geqslant k.$$

Consideremos $j \geqslant k$ y $x, y \in \mathrm{F}_j$. Tenemos que

$$\mathrm{B}\left(x, \frac{\varepsilon}{6}\right) \cap \{x_j, x_{j+1}, ...\} \neq \emptyset$$
$$\mathrm{B}\left(y, \frac{\varepsilon}{6}\right) \cap \{x_j, x_{j+1}, ...\} \neq \emptyset.$$

De donde existen $i, m \geqslant j$ tales que

$$x_i \in \mathrm{B}\left(x, \frac{\varepsilon}{6}\right) \cap \{x_j, x_{j+1}, ...\}$$
$$x_m \in \mathrm{B}\left(y, \frac{\varepsilon}{6}\right) \cap \{x_j, x_{j+1}, ...\}.$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leqslant d(x,x_i) + d(x_i,x_m) + d(x_m,y) \\ &< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $diam(\mathrm{F}_j) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ y entonces $\lim\limits_{n\to\infty} diam(\mathrm{F}_i) = 0$. Por hipótesis existe $x \in X$ tal que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{F}_i.$$

Se tiene que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x en X. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$diam(\mathrm{F}_i) < \varepsilon \ \ \forall i \geqslant k.$$

Sea $j \geqslant k$ se tiene que $x, x_j \in \mathrm{F}_k$ de donde

$$d(x_j, x) \leqslant diam(\mathrm{F}_k) < \varepsilon.$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x en X.

□

Teorema 3.2.13. *Un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si para cualquier familia de subconjuntos cerrados $\mathcal{F} = \{\mathrm{F}_s\}_{s\in S}$ de X que cumple la propiedad de la intersección finita y para toda $\varepsilon > 0$ existe $s_\varepsilon \in S$ tal que $diam(\mathrm{F}_{s_\varepsilon}) < \varepsilon$, entonces $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

Demostración.

$\Rightarrow$] Consideremos una familia de subconjuntos cerrados $\mathcal{F} = \{\mathrm{F}_s\}_{s\in S}$ de X que cumple la propiedad de la intersección finita y tal que para toda $\varepsilon > 0$, $\mathcal{F}$ contiene un conjunto de diámetro menor que ε. Sucede que para cada $j \in \mathbb{N}$, existe F_{s_j} tal que

$$diam(\mathrm{F}_{s_j}) < \frac{1}{j}.$$

Sea $\mathrm{F}_i = \bigcap_{j\leqslant i} \mathrm{F}_{s_j}$. Como la familia $\{\mathrm{F}_s\}_{s\in S}$ cumple la propiedad de la intersección finita sucede que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{F}_i \neq \emptyset$. Sea $\varepsilon > 0$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{j} < \varepsilon$. Tomamos $i \geqslant j$, entonces

$$\begin{aligned} diam(\mathrm{F}_i) &= diam(\bigcap_{j\leqslant i} \mathrm{F}_{s_j}) \\ &\leqslant diam(\mathrm{F}_{s_j}) \\ &< \frac{1}{j} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{\mathrm{F}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X tal que, $\lim_{n\to\infty} diam(\mathrm{F}_i) = 0$. Por el Teorema 3.2.12, existe $x \in X$ tal que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{F}_i.$$

Además $\{x\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{F}_i$. Pues si $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{F}_i$ es tal que $x \neq y$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{j} < d(x, y)$. Como $x, y \in \mathrm{F}_j$ se tiene que $x, y \in \mathrm{F}_{s_j}$ de donde

$$d(x, y) \leqslant diam(\mathrm{F}_{s_j}) < \frac{1}{j} < d(x, y).$$

Así tendríamos una contradicción. Por lo tanto $y = x$ y por ende $\{x\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{F}_i$.

Sea $s_0 \in S$ arbitrario. Consideremos $\mathrm{F}'_i = \mathrm{F}_{s_0} \cap \mathrm{F}_i$ para $i = 1, 2, ...$ No es muy díficil justificar que $\{\mathrm{F}'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X tal que, $\lim_{n\to\infty} diam(\mathrm{F}'_i) = 0$. Por el Teorema 3.2.12 se tiene lo siguiente

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{F}'_i = \mathrm{F}_{s_0} \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{F}_i = \mathrm{F}_{s_0} \cap \{x\}.$$

Entonces $x \in \mathrm{F}_s$ para toda $s \in S$. Por lo tanto $\bigcap_{s\in S} \mathrm{F}_s \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$] Esto es inmediato debido al Teorema 3.2.12.

$\square$

Teorema 3.2.14. *Sea X un espacio métrico. El espacio X es completo si y sólo si es un espacio Čech-completo.*

Demostración.

$\Rightarrow$] Definamos $\mathcal{A}_i = \left\{\mathrm{B}\left(x, \frac{1}{i}\right)\right\}_{x\in X}$ para cada $i = 1, 2, ...$ Sea $\{\mathrm{F}_s\}_{s\in S}$ una familia de subconjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de la intersección finita tal que para toda $i \in \mathbb{N}$ existe $s_i \in S$ tal que $diam(\mathrm{F}_{s_i}) < \mathcal{A}_i$. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{i} < \varepsilon$, entonces existe $x_{2i} \in X$ tal que

$$\mathrm{F}_{s_{2i}} \subseteq \mathrm{B}\left(x_{2i}, \frac{1}{2i}\right).$$

Por lo cual

$$diam(\mathrm{F}_{s_{2i}}) \leqslant diam\left(\mathrm{B}\left(x_{2i}, \frac{1}{2i}\right)\right) \leqslant \frac{1}{i} < \varepsilon.$$

Por el Teorema 3.2.13 tenemos que $\bigcap_{s\in S} \mathrm{F}_s \neq \emptyset$ y debido al Teorema 3.2.10 tenemos que X es un espacio Čech completo.

$\Leftarrow$] Puede consultarse en [Eng89].

$\square$

Teorema 3.2.15. *Sea $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ una familia no vacía de espacios métricos tal que la metrica d_i es acotada para $i = 1, 2, ...$ El producto cartesiano $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ con la métrica d definida por la formula (3.1) en el Teorema 3.1.12 es completo si y sólo si (X_i, d_i) es completo para $i = 1, 2, ...$*

Demostración. Puede consultarse en [Eng89]. $\square$

Ahora sí, tenemos el suficiente material para enunciar uno de los Teoremas más importantes de esta sección, pero antes de eso enunciaremos una pequeña definición.

Definición 3.2.16. *Un espacio topológico de Hausdorff X es un* ***k-espacio*** *si para cada subconjunto* A *de X, que cumple que la intersección de* A *con cualquier subespacio compacto Z de X es cerrado en Z, entonces el conjunto* A *es cerrado en X.*

Proposición 3.2.17. *Todo espacio Čech completo es un q-espacio.*

Teorema 3.2.18. ***(McCoy and Ntantu [1986])***. *Para cualquier espacio topológico X las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathcal{C}_k(X)$ *es un espacio Čech-completo.*

(2) $\mathcal{C}_k(X)$ *es un espacio métrico completo.*

(3) X *es un k-espacio y hemi-compacto.*

Demostración.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Esto lo tenemos justificado debido a la Proposición 3.2.17 y a una de las equivalencias del Teorema 3.2.14.

(2) $\Rightarrow$ (3) Por el Teorema 3.1.13 se tiene que X es un espacio hemi-compacto. Como una consecuencia existe una sucesión $\{\mathrm{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$ que satisface la condición de hemi-compacidad de X con $\mathrm{K}_n \subseteq \mathrm{K}_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, mostraremos que X es un k-espacio. Supongamos que X no es un k-espacio. Entonces existe un subconjunto A de X tal que $\mathrm{A}\cap\mathrm{K}_n$ es cerrado en K_n para cada $n \in \mathbb{N}$, pero A no es cerrado en X. Tomemos un punto $x \in cl_X(\mathrm{A}) \setminus \mathrm{A}$. Como X es un hemi-compacto, sin perdida de generalidad, podemos suponer que $x \in \mathrm{K}_1$. Sea $f_1 \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f_1(x) = 1$ y $f_1 = 0$ en $\mathrm{A} \cap \mathrm{K}_1$. Tomemos $f_2 \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f_2 \restriction_{\mathrm{K}_2}$ es una extensión de $f_1 \restriction_{\mathrm{K}_1}$ sobre K_2 tal que $f_2 = 0$ en $\mathrm{A}\cap\mathrm{K}_2$. Continuando con este proceso, se define $f_n \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f_n \restriction_{\mathrm{K}_{n-1}} = f_{n-1} \restriction_{\mathrm{K}_{n-1}}$ y $f_n = 0$ en $\mathrm{A}\cap\mathrm{K}_n$. Entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}_k(X)$ y, puesto que $\mathcal{C}_k(X)$ es completamente metrizable, esta sucesión converge a algún elemento g de $\mathcal{C}_k(X)$. Como $g(x) = 1$ y $g = 0$ en A entonces g no es continua en el punto x de X. Pues si tomamos $\mathrm{B}(g(x), 1)$ (la bola abierta centrada en $g(x)$ y de radio 1) y tomamos V un abierto de X con $x \in \mathrm{V}$, como $x \in cl_X(\mathrm{A})$ entonces $\mathrm{A} \cap \mathrm{V} \neq \emptyset$. Sea $y \in \mathrm{A} \cap \mathrm{V}$, entonces $g(y) = 0$ con lo cual $g(y) \in g(\mathrm{V})$ y $g(y) \notin \mathrm{B}(g(x), 1)$, es decir $g(\mathrm{V}) \nsubseteq \mathrm{B}(g(x), 1)$. Por lo tanto g no es continua lo cual no puede suceder. Esto muestra que X es un k-espacio.

(3) $\Rightarrow$ (2) Sea $\{\mathrm{K}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{K}(X)$ que satisface la condición de hemi-compacidad de X y $\mathrm{S} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n$, y sea ψ el mapeo natural de S en X ($\psi(k, i) = k$ para cada $(k, i) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{K}_n \times \{n\})$). Entonces ψ es un mapeo cociente, por que X es un k-espacio. Entonces se tiene que el mapeo $\psi^* : \mathcal{C}_k(X) \to \mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ cuya regla es $\psi^*(g) = g\circ\psi$ para cada $g \in \mathcal{C}_k(X)$ es un mapeo continuo, inyectivo y abierto sobre su imagen. De manera análoga a como se demostró el Teorema 3.1.13, la parte (5) $\Rightarrow$ (1), $\mathcal{C}_k(X)$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}_k(\mathrm{S})$, el cual es completamente metrizable. Esto muestra que $\mathcal{C}_k(X)$ es completamente metrizable.

□

3.3. Un criterio para saber cuando $\mathcal{C}_k(X)$ es submetrizable

Definición 3.3.1. *Un espacio topológico X es un* ***espacio submetrizable*** *si existe un espacio metrizable M y una función $\psi : X \to M$ continua e inyectiva. En tal* *situación algunas veces decimos que X está* ***condensado*** *en un espacio métrico.*

Definición 3.3.2. *Un espacio X es* ***σ-compacto*** *si es la unión numerable de subconjuntos compactos de X. Decimos que X es* ***casi σ-compacto*** *si contiene un subespacio denso, σ-compacto.*

Teorema 3.3.3. *Para un espacio X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *$\mathcal{C}_k(X)$ es un espacio submetrizable.*

(2) *Cualquier subconjunto compacto de $\mathcal{C}_k(X)$ es un conjunto G_δ.*

(3) *Cualquier elemento de $\mathcal{C}_k(X)$ es un conjunto G_δ.*

(4) *La diagonal de $\mathcal{C}_k(X) \times \mathcal{C}_k(X)$ es un conjunto G_δ.*

(5) *X es un espacio casi σ-compacto.*

Demostración.

(1) ⇒ (2) Sea $\psi : \mathcal{C}_k(X) \to M$ un mapeo continuo e inyectivo, donde M es un espacio metrizable. Consideremos un subconjunto compacto F de $\mathcal{C}_k(X)$, entonces $\psi[\mathrm{F}]$ es un subconjunto compacto de M el cual es Hausdorff. Por el Colorario B.12.7, $\psi[\mathrm{F}]$ es un subconjunto cerrado de M. Por la Observación 3.2.5 se tiene que $\psi[\mathrm{F}]$ es un conjunto G_δ en M. Entonces existe una sucesión $\{\mathrm{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos en M tal que

$$\psi[\mathrm{F}] = \bigcap\{\mathrm{A}_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

De donde

$$\psi^{-1}(\psi[\mathrm{F}]) = \psi^{-1}(\bigcap\{\mathrm{A}_n : n \in \mathbb{N}\}) = \bigcap\{\psi^{-1}(\mathrm{A}_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Como la función ψ es inyectiva se tiene que $\psi^{-1}(\psi[\mathrm{F}]) = \mathrm{F}$. Además como la función ψ es continua se tiene que $\psi^{-1}(\mathrm{A}_n)$ es un abierto de $\mathcal{C}_k(X)$ tal que

$$\mathrm{F} = \bigcap\{\psi^{-1}(\mathrm{A}_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Por lo tanto F es un conjunto G_δ en $\mathcal{C}_k(X)$.

(2) ⇒ (3) Como para cualquier $g \in \mathcal{C}_k(X)$ se tiene que $\{g\}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{C}_k(X)$, entonces cualquier elemento de $\mathcal{C}_k(X)$ es un conjunto G_δ.

(3) ⇒ (5) Por hipótesis, la función $0 \in \mathcal{C}_k(X)$ es un conjunto G_δ; esto es, $\{0\} = \bigcap\{\mathcal{W}(0, \mathrm{K}_n, \varepsilon_n) : n \in \mathbb{N}\}$, donde $\mathrm{K}_n \in \mathcal{K}(X)$ y $\varepsilon_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $Y = \bigcup\{\mathrm{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X. En efecto, si existe $x \in X \setminus cl_X(Y)$, como X es de Tychonoff existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(y) = 0$ para cada $y \in cl_X(Y)$. Como la función f es diferente de la función constante cero, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $f \notin \mathcal{W}(0, \mathrm{K}_i, \varepsilon_i)$. Además

$$\mathrm{K}_i \subseteq \bigcup\{\mathrm{K}_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq cl_X(\bigcup\{\mathrm{K}_n : n \in \mathbb{N}\}) \subseteq cl_X(Y),$$

por lo cual se tiene que $f = 0$ en K_i lo que es una contradicción. Entonces Y es denso en X y por lo tanto X es un espacio casi σ-compacto.

(5) $\Rightarrow$ (1) Sea $Y = \bigcup\{\mathrm{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subespacio denso, σ-compacto de X, donde cada K_n es un subconjunto compacto de X para cada $n \in \mathbb{N}$. Ponemos $\mathrm{S} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n$. Consideremos el mapeo natural $\psi : \mathrm{S} \to X$ cuya regla es $\psi(k,i) = k$ para cada $(k,i) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{K}_n \times \{n\})$. Por una de las implicaciones del Teorema 3.1.13 se tiene que ψ es continuo. Debido al lema 3.1.10 tenemos que el mapeo $\psi^* : \mathcal{C}_k(X) \to \mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ cuya regla es $\psi^*(g) = g \circ \psi$ para cada $g \in \mathcal{C}_k(X)$ es continuo. Además ψ^* es inyectivo: en efecto sean $f, g \in \mathcal{C}_k(X)$ tales que $f \neq g$; como los valores de funciones continuas estas determinados por lo valores en subconjuntos densos, entonces existe $k \in Y$ tal que $f(k) \neq g(k)$; entonces $(f \circ \psi)(k) = f(\psi(k)) = f(k) \neq g(k) = g(\psi(k)) = (g \circ \psi)(x)$, por lo cual $\psi^*(f) \neq \psi^*(g)$. Por lo tanto ψ^* es inyectiva. Por el lema 3.1.11 y el Teorema 3.1.12, se tiene que $\mathcal{C}_k(\mathrm{S})$ es metrizable, y por ende $\mathcal{C}_k(X)$ es un espacio submetrizable.

(1) $\Rightarrow$ (4) Sea $\psi : \mathcal{C}_k(X) \to M$ un mapeo continuo e inyectivo, donde M es un espacio metrizable. Se tiene que el mapeo $\psi\times\psi : \mathcal{C}_k(X)\times\mathcal{C}_k(X) \to M\times M$ cuya regla es $(\psi\times\psi)(f,g) = (\psi(f), \psi(g))$ para todo $f, g \in \mathcal{C}_k(X)$ es continuo e inyectivo. Por el Teorema 3.1.12 el espacio $M \times M$ es métrico y por ende $M \times M$ es un espacio Hausdorff. Entonces la diagonal de M, $\triangle_M = \{(x,x) : x \in M\}$ es un subconjunto cerrado de $M \times M$ el cual es métrico, por lo tanto existe una sucesión $\{\mathrm{A}_n \times \mathrm{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos en $M \times M$ tales que

$$\triangle_M = \bigcap\{\mathrm{A}_n \times \mathrm{B}_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Se tiene que $(\psi\times\psi)^{-1}(\mathrm{A}_n\times\mathrm{B}_n)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{C}_k(X)\times\mathcal{C}_k(X)$ tal que

$$\triangle_{\mathcal{C}_k(X)} = \bigcap\{(\psi \times \psi)^{-1}(\mathrm{A}_n \times \mathrm{B}_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Por lo tanto la diagonal de $\mathcal{C}_k(X) \times \mathcal{C}_k(X)$ es un conjunto G_δ.

(4) $\Rightarrow$ (3) Tomemos $f \in \mathcal{C}_k(X)$ arbitraria. Por hipótesis, existe una sucesión $\{\mathrm{A}_n\times\mathrm{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos de $\mathcal{C}_k(X) \times \mathcal{C}_k(X)$ tal que

$$\triangle_{\mathcal{C}_k(X)} = \bigcap\{\mathrm{A}_n \times \mathrm{B}_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces existe un abierto V_n de $\mathcal{C}_k(X)$ que cumple lo siguiente

$$(f,f) \in \mathrm{V}_n \times \mathrm{V}_n \subseteq \mathrm{A}_n \times \mathrm{B}_n.$$

Por lo cual

$$\{f\} = \bigcap\{\mathrm{V}_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Por lo tanto todo elemento de $\mathcal{C}_k(X)$ es un conjunto G_δ.

□

3.4. El Teorema de Arzelá-Ascoli en $\mathcal{C}_k(X)$

Teorema 3.4.1. ***(Arzelá-Ascoli)*** *Si* F *es un subconjunto de* $\mathcal{C}(X)$ *que satisface las siguientes dos condiciones:*

(1) F *es equi-continuo.*

(2) $cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{F}(x))$ *es un subconjunto compacto de los números reales, donde* $\mathrm{F}(x) = \{f(x) : f \in \mathrm{F}\}$ *para cada* $x \in X$.

Entonces $cl_k(\mathrm{F})$ *es un subconjunto compacto de* $\mathcal{C}_k(X)$.

Demostración. Sea $\mathrm{H} = cl_k(\mathrm{F})$. Tomemos un ultrafiltro $\mathcal{M}$ en H. Entonces $\mathrm{H}(x) \subseteq cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{F}(x))$ para cada $x \in X$, pues si $x \in X$, $\varepsilon > 0$ y $f \in \mathrm{H}$, como $f \in cl_k(\mathrm{F})$, se tiene que $\mathcal{W}(f, \{x\}, \varepsilon) \cap \mathrm{F} \neq \emptyset$. Entonces existe $g \in \mathrm{F}$ tal que

$$\|f - g\|_x < \varepsilon,$$

de donde

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Entonces $g(x) \in \mathrm{B}(f(x), \varepsilon) \cap \mathrm{F}(x)$, y por lo cual $f(x) \in cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{F}(x))$. Por lo tanto $\mathrm{H}(x) \subseteq cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{F}(x))$ para cada $x \in X$. Tomemos $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$, se tiene que $\mathrm{M} \subseteq cl_k(\mathrm{F})$, además, $cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}(x)) \subseteq cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{F}(x))$ para cada $x \in X$. Sean $x \in X$, $y \in cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}(x))$ y $\varepsilon > 0$. Como $y \in cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}(x))$ se tiene que

$$\mathrm{B}(y, \varepsilon/2) \cap \mathrm{M}(x) \neq \emptyset.$$

Sea $h \in \mathrm{M} \subseteq cl_k(\mathrm{F})$ tal que

$$h(x) \in \mathrm{B}(y, \varepsilon/2) \cap \mathrm{M}(x). \tag{3.2}$$

Como $h \in cl_k(\mathrm{F})$, entonces

$$\mathcal{W}(h, \{x\}, \varepsilon/2) \cap \mathrm{F} \neq \emptyset.$$

Sea $g \in \mathrm{F}$ tal que

$$|g(x) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3}$$

De las desigualdades (3.2) y (3.3) se tiene lo siguiente

$$\begin{array}{rcl} |g(x) - y| & \leqslant & |h(x) - g(x)| + |y - h(x)| \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ & = & \varepsilon. \end{array}$$

Entonces $g(x) \in \mathrm{B}(y, \varepsilon) \cap \mathrm{F}(x)$, y por ende $y \in cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{F}(x))$. Por lo tanto $cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}(x)) \subseteq cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{F}(x))$ para cada $x \in X$. Como los elementos de $\mathcal{M}$ son subconjuntos no vacíos de $cl_k(\mathrm{F})$, se tiene que $cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}(x)) \neq \emptyset$ para cada $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$ y cada $x \in X$. Tomemos $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2 \in \mathcal{M}$, entonces $\emptyset \neq \mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2$. Sea $g \in \mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2$. Por lo tanto $g(x) \in \mathrm{M}_1(x) \cap \mathrm{M}_2(x) \subseteq cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}_1(x)) \cap cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}_2(x))$ para cada $x \in X$. Sea $x \in X$, entonces $\{cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}(\mathrm{x})) : \mathrm{M} \in \mathcal{M}\}$ es una familia de subconjuntos cerrados no vacíos con la propiedad de la intersección finita de $cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{F}(x))$ el cual es compacto, por lo cual

$\bigcap\{cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{M(x)}) : \mathrm{M} \in \mathcal{M}\}$ no es vacío. Elegimos un punto $\psi(x)$ en la intersección. Por lo cual ψ esta bien definida como función de X, además ψ es una función continua tal que $\psi \in \mathrm{H}$ y $\mathcal{M} \to \psi$. Por la Observación 1.0.15, H es equi-continuo. Se tiene que $\psi \in cl_p(\mathrm{F})$ ($cl_p(\mathrm{F})$ denota la cerradura de F en $\mathcal{C}_p(X)$). Sean $x_1, ..., x_n \in X$ y $\varepsilon > 0$. Sea $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$. Como $\psi(x_i) \in cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}(x_i))$, se tiene que

$$\mathrm{B}(\psi(x_i), \varepsilon) \cap \mathrm{M}(x_i) \neq \emptyset.$$

Tomemos $g \in \mathrm{M}$ tal que

$$g(x_i) \in \mathrm{B}(\psi(x_i), \varepsilon) \cap \mathrm{M}(x_i). \tag{3.4}$$

De (3.4) se cumple que

$$g \in \mathcal{W}(\psi, \{x_i\}, \varepsilon) \cap \mathrm{M}.$$

Por lo tanto $\mathcal{W}(\psi, \{x_i\}, \varepsilon) \cap \mathrm{M} \neq \emptyset$ para cada $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$. Por el Teorema B.11.10 se tiene que $\mathcal{W}(\psi, \{x_i\}, \varepsilon) \in \mathcal{M}$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ y como $\mathcal{M}$ es un ultrafiltro en H, entonces $\mathcal{W}(\psi, \{x_i\}, \varepsilon) \cap \mathrm{H} \in \mathcal{M}$ para cada $i = 1, 2, ..., n$, de donde

$$\mathcal{W}(\psi, \{x_1, ..., x_n\}, \varepsilon) \cap \mathrm{H} = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathcal{W}(\psi, \{x_i\}, \varepsilon) \cap \mathrm{H}) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto $\psi \in cl_p(H)$. Por el Teorema 1.0.16 se tiene que $cl_p(\mathrm{H}) = cl_k(\mathrm{H}) =$ H. Entonces $\psi \in \mathrm{H}$ el cual es equi-continuo, por lo tanto ψ es continua en X. Finalmente, para cada $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$ se tiene que $\psi \in cl_p(\mathrm{M})$, y como $cl_p(\mathrm{M}) = cl_k(\mathrm{M})$, $\mathcal{M}$ converge a ψ en H. Por el Teorema B.13.1 se tiene que H es un subconjunto compacto de $\mathcal{C}_k(X)$. □

3.5. Un criterio para saber cuando $\mathcal{C}_k(X)$ es un espacio σ-compacto

Definición 3.5.1. *Una familia $\{\mathrm{A}_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es **localmente finita** si para cada punto x de X existe una vecindad U de x tal que el conjunto $\{s \in S : \mathrm{A}_s \cap \mathrm{U} \neq \emptyset\}$ es finito.*

Definición 3.5.2. *Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es **σ-localmente finita** si $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ y cada $\mathcal{U}_n$ es localmente finita.*

Definición 3.5.3. *Un **refinamiento** $\mathcal{D}$ de una cubierta $\mathcal{C}$ de un espacio X, es una cubierta de X que satisface: para cada $D \in \mathcal{D}$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $D \subseteq C$.*

Definición 3.5.4. *Una familia $\{f_s\}_{s \in S}$ de funciones continuas de un espacio X a $I = [0, 1]$ es llamada una **partición de la unidad** en el espacio X si $\sum_{s \in S} f_s(x) = 1$ para cada x en X. La última igualdad significa que para cada x_0 en X a lo más una cantidad numerable de funciones f_s no toman el valor cero en x_0, y la serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_{s_i}(x_0)$, donde $\{s_1, s_2, ...\} \subseteq \{s \in S : f_s(x_0) \neq 0\}$, converge a 1.*

Definición 3.5.5. *Una partición de la unidad* $\{f_s\}_{s\in S}$ *en un espacio* X *es **localmente finita** si la cubierta* $\{f_s^{-1}[(0,1]]\}_{s\in S}$ *del espacio* X *es localmente finita. Esto significa que para cada* x_0 *en* X *existe una vecinda* U_0 *de* x_0 *y un subconjunto finito* $S_0 = \{s_1, ..., s_k\} \subseteq S$ *tal que para cada* x *en* U_0 *se tiene que* $f_s(x) = 0$, *donde* $s \in S \setminus S_0$, *y* $f_{s_1}(x) + ... + f_{s_k}(x) = 1$.

Definición 3.5.6. *Una partición de la unidad* $\{f_s\}_{s\in S}$ *en un espacio* X ***está subordinada a una cubierta*** $\mathcal{A}$ *de* X *si la cubierta* $\{f_s^{-1}[(0,1]]\}_{s\in S}$ *del espacio* X *es un refinamiento de* $\mathcal{A}$.

Teorema 3.5.7. *Un espacio topológico* X *es metrizable entonces* X *posee una base* $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ *para su topología tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_n$ *es una colección localmente finita que refina a la cubierta formada por las bolas abiertas de radio* $1/n$. *Además, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe una partición de la unidad* $\mathrm{F}_n = \{f_s^n : s \in S\}$ *que está subordinada a* $\mathcal{B}_n$. *Más aún, podemos elegir a cada* $\mathcal{B}_n$ *como la colección* $\{(f_s^n)^{-1}((0,1]) : s \in S\}$.

Demostración. Puede consultarse en [Eng89]. □

Lema 3.5.8. *Sea* X *un espacio metrizable. Consideremos* $\bigcup\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una base* σ*-localmente finita, donde cada* $\mathcal{B}_n$ *es una cubierta abierta localmente finita de* X *que refina a las cubiertas de las bolas de radio* $1/n$. *Sea* F_n *una partición de la unidad del espacio* X *que está subordinada a* $\mathcal{B}_n$. *Definamos los siguientes conjuntos* $\mathrm{F}_n^* = \mathrm{F}_n \cup \{1\}$, $\mathrm{F}'_n = \{rf_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_k : k \leqslant n, |r| \leqslant 1, f_1, ..., f_k \in \mathrm{F}_1^* \cup \cdots \cup \mathrm{F}_n^*\}$, $\mathrm{F}''_n = \{g_1 + ... + g_n : k \leqslant n, g_1, ..., g_n \in \mathrm{F}'_n\}$ *y* $\mathrm{F} = \bigcup\{\mathrm{F}''_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Entonces* F *es un subanillo de* $\mathcal{C}(X)$.

Demostración.

(a) Tomemos $n \leqslant m$, entonces $\mathrm{F}'_n \subseteq \mathrm{F}'_m$. Sea $g \in \mathrm{F}'_n$, por definición de F'_n, $g = rg_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_k$, donde $k \leqslant n$, $|r| \leqslant 1$ y $g_1, ..., g_k \in \mathrm{F}_1^* \cup \cdots \cup \mathrm{F}_n^*$, tenemos que $k \leqslant n \leqslant m$, $|r| \leqslant 1$ y $g_1, ..., g_k \in \mathrm{F}_1^* \cup \cdots \cup \mathrm{F}_n^* \cup \mathrm{F}_{n+1}^* \cdots \cup \mathrm{F}_m^*$. Por lo tanto $g \in \mathrm{F}'_m$.

(b) Si $n \leqslant m$ entonces $\mathrm{F}''_n \subseteq \mathrm{F}''_m$. Sea $g \in \mathrm{F}''_n$, entonces $g = g_1 + ... + g_k$, donde $k \leqslant n$ y $g_1, ..., g_k \in \mathrm{F}'_n$, por el inciso ($a$) se tiene que $k \leqslant n \leqslant m$ y $g_1, ..., g_k \in \mathrm{F}'_m$. Por lo tanto $g \in \mathrm{F}'_m$.

(c) Sea $|s| \leqslant 1$ y $f \in \mathrm{F}$ entonces $s \cdot f \in \mathrm{F}$. Como $f \in \mathrm{F}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f \in \mathrm{F}''_m$ y por lo cual $f = g_1 + g_2 + ... + g_k$, donde $k \leqslant m$ y $g_1, ..., g_k \in \mathrm{F}'_m$. Como $|s| \leqslant 1$ y $g_1, ..., g_k \in \mathrm{F}'_m$, por definición de F'_m tenemos que $s \cdot g_1, ..., s \cdot g_k \in \mathrm{F}'_m$ y $s \cdot f = s \cdot g_1 + \cdot g_2 + ... + s \cdot \cdot g_k$, con $k \leqslant m$ y $s \cdot g_1, ..., s \cdot g_k \in \mathrm{F}'_m$. Por lo tanto $s \cdot f \in \mathrm{F}''_m$ y por ende $s \cdot f \in \mathrm{F}$.

Por el inciso (a) y (b) podemos concluir que si $f, g \in \mathrm{F}$ entonces $f + g$ y $f \cdot g$ son elementos de F. Ahora tomemos a un número real y $h \in \mathrm{F}$. Sea n_0 un natural tal que $|a| \leqslant n_0$. Como $n_0 \cdot f$ es un elemento de F y $\left|\dfrac{a}{n_0}\right| \leqslant 1$, por el inciso ($c$) tenemos que $\dfrac{a}{n_0} \cdot (n_0 \cdot f) = a \cdot f$ es un elemento de F. Por lo tanto F es un subanillo de $\mathcal{C}_k(X)$.

□

Teorema 3.5.9. ***(McCoy [1978])*** *Si X es un espacio submetrizable, entonces $\mathcal{C}_k(X)$ es un espacio casi σ-compacto.*

Demostración. Sea $\psi : X \to M$ una función continua e inyectiva del espacio X al espacio metrizable M, y $\psi^* : \mathcal{C}_k(M) \to \mathcal{C}_k(X)$, cuya regla es $\psi^*(g) = g \circ \psi$ para cada g en $\mathcal{C}_k(M)$. El Lema 3.1.10 garantiza que ψ^* es una función continua que además cumple lo siguiente

$$cl_{\mathcal{C}_k(X)}[\psi^*[\mathcal{C}_k(M)]] = \mathcal{C}_k(X).$$

En efecto, sean $f \in \mathcal{C}_k(X)$ y $\mathcal{W}(f, \mathrm{K}, \varepsilon)$ una vecindad básica de f, donde $\varepsilon > 0$ y K es un subconjunto compacto de X. Consideremos el siguiente conjunto $P = \{g \circ \psi \restriction_{\mathrm{K}} : g \in \mathcal{C}(\psi(\mathrm{K}))\}$. No es muy difícil observar que P es un subanillo de $\mathcal{C}(\mathrm{K})$ que contiene a todas las funciones constantes de K que además separa puntos de K, por el Teorema 2.2.1, P es denso en $\mathcal{C}^*_n(\mathrm{K}) = \mathcal{C}_k(\mathrm{K})$. Entonces existe g_0 en $\mathcal{C}[\psi(\mathrm{K})]$ tal que

$$\|f \restriction_{\mathrm{K}} - g_0 \circ \psi \restriction_{\mathrm{K}}\|_{\mathrm{K}} < \varepsilon. \tag{3.5}$$

Como K es compacto tenemos que $\psi(\mathrm{K})$ es un subconjunto compacto de M , por ende $\psi(\mathrm{K})$ es un cerrado de M el cual es normal, por el Teorema de extensión de Tietze existe $g : M \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $g \restriction_{\psi(\mathrm{K})} = g_0$. De la desigualdad (3.5) podemos concluir que

$$\|\psi^*(g) - f\|_{\mathrm{K}} < \varepsilon.$$

Entonces $\psi^*(g) \in \mathcal{W}(f, \mathrm{K}, \varepsilon)$ y por lo tanto $cl_{\mathcal{C}_k(X)}[\psi^*[\mathcal{C}_k(M)]] = \mathcal{C}_k(X)$. Sea $\bigcup\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base σ-localmente finita, donde cada $\mathcal{B}_n$ es una cubierta abierta localmente finita de M, que refina a las cubiertas de las bolas de radio $1/n$ y sea F_n es una partición de la unidad del espacio X que está subordinada a $\mathcal{B}_n$. Definamos los siguientes conjuntos $\mathrm{F}^*_n = \mathrm{F}_n \cup \{1\}$, $\mathrm{F}'_n = \{rf_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_k : k \leqslant n, |r| \leqslant 1, f_1, ..., f_k \in \mathrm{F}^*_1 \cup \cdots \cup \mathrm{F}^*_n\}$, $\mathrm{F}''_n = \{g_1 + ... + g_n : k \leqslant n, g_1, ..., g_n \in \mathrm{F}'_n\}$ y $\mathrm{F} = \bigcup\{\mathrm{F}''_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(1) El lema 3.5.8 garantiza que F es un subanillo de $\mathcal{C}_k(M)$.

(2) F separa puntos de M.
Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Existe un número natural n tal que $2/n < d_M(x, y)$. Tenemos que $\mathrm{B}(x, 1/n)$, $\mathrm{B}(y, 1/n)$ son dos abiertos ajenos de M tales que $x \in \mathrm{B}(x, 1/n)$ y $y \in \mathrm{B}(y, 1/n)$. Como $\bigcup\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base σ-localmente finita, existe $m \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathrm{F}_m$ tal que $x \in f^{-1}[(0, 1]] \subseteq \mathrm{B}(x, 1/n)$. Si $y \in f^{-1}[(0, 1]]$ se tendría que $y \in \mathrm{B}(x, 1/n)$ lo cual no puede suceder. Entonces $y \notin f^{-1}[(0, 1]]$ y, además $f(y) = 0 \neq f(x)$. Como cada elemento de F_m es también un elemento de F, por lo tanto F separa puntos de M.

(3) F''_n es un subconjunto equi-continuo para nada $n \in \mathbb{N}$.
Sean $n \in \mathbb{N}$, x un punto arbitrario de M y ε un número positivo. Para cada $i \leqslant n$, $\mathcal{B}_i$ es una familia localmente finita de M, por lo cual, existe una vecindad U_i de x tal que la subcolección $\{\mathrm{B} \in \mathcal{B}_i : \mathrm{U}_i \cap \mathrm{B} \neq \emptyset\}$ es finita. A tal colección la denotaremos por $\{\mathrm{B}_{i1}, ..., \mathrm{B}_{ik_i}\}$. Como F_i está subordinada a $\mathcal{B}_i$, cada B_{ij} se corresponde con alguna $f_{ij} \in \mathrm{F}_i$ para $j = 1, ..., k_i$. De la continuidad de f_{ij}

en x, existe un número positivo δ_{ij} tal que $\mathrm{B}(x,\delta_{ij}) \subseteq \mathrm{U}_i$ y $f_{ij}[\mathrm{B}(x,\delta_{ij})] \subseteq \mathrm{B}(f_{ij}(x),\varepsilon^2/n)$. Definamos $\delta = \text{mín}\{\delta_{ij} : 1 \leqslant j \leqslant k_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
Para cualquier $g \in \mathrm{F}''_n$ ponemos $g = g_1 + ... + g_k$ con $g_i \in \mathrm{F}'_n$ para $i = 1, ..., k$ y $k \leqslant n$, y, para cada $i \leqslant k$, sea $g_i = r_i \cdot g_{i1} \cdots g_{il_i}$ con $g_{ij} \in \mathrm{F}^*_1 \cup \cdots \cup \mathrm{F}^*_n$, $|r_j| \leqslant 1$ para $j = 1, ..., l_i$ y $l_i \leqslant n$. Por el inciso (1) podemos suponer que cada g_{ij} es no constante en $\mathrm{B}(x,\delta)$. Entonces, cada g_{ij} es un elemento de $\{f_{pq} : 1 \leqslant q \leqslant k_i, 1 \leqslant p \leqslant n\}$, de donde $g_{ij}[\mathrm{B}(x,\delta)] \subseteq \mathrm{B}(g_{ij}(x),\varepsilon^2/n)$ para $1 \leqslant j \leqslant l_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$ y por un fácil cálculo podemos concluir que $g_i[\mathrm{B}(x,\delta)] \subseteq \mathrm{B}(g_i(x),\varepsilon/n)$ para $1 \leqslant i \leqslant k$, y por lo cual $g[\mathrm{B}(x,\delta)] \subseteq \mathrm{B}(g(x),\varepsilon)$. Por lo tanto F''_n es un subconjunto equi-continuo de M para cada $n \in \mathbb{N}$.

(4) Para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, $cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{F}''_n(x))$ es compacto.
Sean $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si f es un elemento arbitrario de F''_n, entonces $|f(x)| \leqslant n$ pues cada F_n es una partición de la unidad. Entonces el conjunto $cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{F}''_n(x))$ es un subconjunto de $[-n, n]$ el cual es compacto. Por lo tanto $cl_{\mathbb{R}}(\mathrm{F}''_n(x))$ es compacto para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$.

Por los inciso (1) y (2) y el Teorema 2.2.1, tenemos que F es un subconjunto denso de $\mathcal{C}_k(M)$ y usando los incisos (3) y (4), por el Teorema 3.4.1, $cl_k(\mathrm{F}''_n)$ es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $cl_k(\mathrm{F}''_n)$ denota la cerradura de $\mathcal{C}_k(M)$.

En resumen:

(a) $cl_{\mathcal{C}_k(X)}[\psi^*[\mathcal{C}_k(M)]] = \mathcal{C}_k(X)$;

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ $cl_k(\mathrm{F}''_n)$ es compacta en $\mathcal{C}_k(M)$;

(c) $cl_k(\mathrm{F}) = \mathcal{C}_k(M)$.

Por el inciso (b), $\psi^*[cl_k(\mathrm{F}''_n)]$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{C}_k(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, además cumple lo siguiente

$$cl_{\mathcal{C}_k(X)}[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \psi^*[cl_k(\mathrm{F}''_n)]] = \mathcal{C}_k(X).$$

En efecto, sea $f \in \mathcal{C}_k(X)$ y $\mathcal{W}(f,\mathrm{K},\varepsilon)$ una vecindad básica de f, donde K es un subconjunto compacto de X y ε es un número positivo. Por el inciso (a) tenemos que

$$\mathcal{W}(f,\mathrm{K},\varepsilon/2) \cap (\psi^*[\mathcal{C}_k(M)]) \neq \emptyset.$$

Tomemos $g \in \mathcal{C}_k(M)$ tal que

$$\|f - \psi^*(g)\|_{\mathrm{K}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.6}$$

Por el inciso (c) tenemos que

$$\mathcal{W}(f,\psi(\mathrm{K}),\varepsilon/2) \cap \mathrm{F} \neq \emptyset.$$

Tomemos un elemento en $h \in \bigcup_{n\in N} \mathrm{F}''_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} cl_k\mathrm{F}''_n$ tal que

$$\|h - g\|_{\psi(\mathrm{K})} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.7}$$

No es muy díficil justificar que

$$\|h-g\|_{\psi(\mathrm{K})} = \|h\circ\psi - g\circ\psi\|_{\mathrm{K}}. \tag{3.8}$$

De las desigualdades (3.6), (3.7) y la igualdad (3.8) se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \|f-\psi^*(h)\|_k & \leqslant & \|f-\psi^*(g)\|_{\mathrm{K}} + \|\psi^*(g)-\psi^*(h)\|_{\mathrm{K}} \\ & < & \frac{\varepsilon}{2} + \|g\circ\psi - h\circ\psi\|_{\mathrm{K}} \\ & = & \frac{\varepsilon}{2} + \|g-h\|_{\psi(\mathrm{K})} \\ & < & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ & = & \varepsilon. \end{array}$$

Entonces

$$\mathcal{W}(f,\mathrm{K},\varepsilon)\cap(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\psi^*[cl_k(\mathrm{F}''_n)]) = \mathcal{W}(f,\mathrm{K},\varepsilon)\cap(\psi^*[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}cl_k(\mathrm{F}''_n)]) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto $cl_{\mathcal{C}_k(X)}[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\psi^*[cl_k(\mathrm{F}''_n)]] = \mathcal{C}_k(X)$ y por ende $\mathcal{C}_k(X)$ es un espacio casi σ-compacto.

$\square$

CAPÍTULO 4

Algunas propiedades de $\mathcal{C}_p(X)$

4.1. Los Teoremas de Dijkstra, Grilliot, Lutzer y van Mill

En esta sección explicaremos al espacio $\mathcal{C}(X)$ con la topología de la convergencia puntual y las relaciones que hay entre $\mathcal{C}_p(X)$ y X.

Definición 4.1.1. *Un espacio topológico X es llamado un* ***espacio de Baire*** *si, para cualquier sucesión $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos y densos de X, la intersección $\bigcap\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ es también densa en X.*

Lema 4.1.2. *Un espacio X es de Baire si y sólo si para toda familia numerable $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos densos que son conjuntos G_δ en X, se tiene que $\bigcap\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto denso en X.*

Demostración.

- $\Rightarrow$] Sea $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de subconjuntos densos que son conjuntos G_δ en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ $G_n = \bigcap\{V_{i,n} : i \in \mathbb{N}\}$, donde cada $V_{i,n}$ es un subconjunto abierto de X para cada $i \in \mathbb{N}$. Tomemos n, i numeros naturales. Entonces $V_{i,n}$ es denso en X, pues contiene al subconjunto denso G_n. Como el espacio X es de Baire se tiene que $\bigcap\{V_{i,n} : i, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X pero $\bigcap\{V_{i,n} : i, n \in \mathbb{N}\} = \bigcap\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$.

- $\Leftarrow$] Sea $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de subconjuntos abiertos y densos de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que G_n es un conjunto G_δ en X (pues todo abierto de X es un G_δ) de donde $\bigcap\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X.

□

Teorema 4.1.3. *Sea X un conjunto. Entonces $\mathbb{R}^X$ dotado con la topología de Tychonoff es un espacio de Baire.*

Demostración. Puede consultarse en [Eng89]. □

Los siguientes Teoremas muestran que la situación de $\mathcal{C}_p(X)$ en $\mathbb{R}^X$ reflejan las propiedades del espacio X.

Teorema 4.1.4. ***(Dijkstra, Grilliot, Lutzer y van Mill [1985]).*** *Si $\mathcal{C}_p(X)$ es un conjunto G_δ en $\mathbb{R}^X$, entonces X es un espacio discreto.*

Demostración. Por el contraría, supongamos que X no es un espacio discreto. Entonces existe un punto x_0 en X tal que $x_0 \in cl(X \setminus \{x_0\})$. Definimos $g : X \to \mathbb{R}$ cuya regla es $g(x_0) = 1$ y $g(x) = 0$ para cada $x \in X \setminus x_0$ y sea ψ el mapeo de $\mathbb{R}^X$ en $\mathbb{R}^X$ definido por $\psi(f) = f + g$ para cada $f \in \mathbb{R}^X$. Entonces ψ es un homeomorfismo tal que $\psi(\mathcal{C}_p(X)) \subseteq \mathbb{R}^X \setminus \mathcal{C}_p(X)$, pues la función g no es continua. Por nuestra suposición y el Teorema 1.0.11, $\mathcal{C}_p(X)$ es un conjunto denso G_δ en $\mathbb{R}^X$, entonces $\psi(\mathcal{C}_p(X))$ es un conjunto denso G_δ en $\mathbb{R}^X$. Por el Lema 4.1.2 se tendría que $\mathcal{C}_p(X) \cap \psi(\mathcal{C}_p(X))$ es denso en $\mathbb{R}^X$, lo cual no puede suceder pues $\mathcal{C}_p(X) \cap \psi(\mathcal{C}_p(X)) = \emptyset$. □

Teorema 4.1.5. ***(Dijkstra, Grilliot, Lutzer y van Mill [1985]).*** *Si $\mathcal{C}_p(X)$ es un conjunto F_σ en $\mathbb{R}^X$, entonces X es un espacio discreto.*

Demostración. Puede consultarse en [JDM85]. □

4.2. Celularidad, densidad y número de Lindelöf en $\mathcal{C}_p(X)$

Los siguientes números cardinales estarán relacionados con $\mathcal{C}_p(X)$. Especialmente, veremos que los números cardinales correspondientes a $\mathcal{C}_p(X)$ estan completamente determinados sobre los números cardinales a los espacios producto X^n ó X^ω.

Definición 4.2.1. *Una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos no vacíos de un espacio topológico X es **celular** si cada dos elementos diferentes A y B de $\mathcal{C}$ tienen intersección vacía. La **celularidad** o **número de Souslin** de X, que denotaremos por $c(X)$, es igual a*

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \textit{ es una familia celular de subconjuntos abiertos de } X\} + \aleph_0.$$

Definición 4.2.2. *Para un espacio topológico X, el **número de Lindëlof**, denotado por $l(X)$, se define como el cardinal infinito más pequeño κ tal que cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta de X de cardinal menor o igual a κ.*

Definición 4.2.3. *La **densidad** de un espacio topológico X, denotada por $d(X)$, es el siguiente cardinal*

$$d(X) = \text{mín}\{|\mathrm{S}| : \mathrm{S} \textit{ es denso en } X\} + \aleph_0.$$

Lema 4.2.4. *Sea T un conjunto con $|T| \leqslant 2^\kappa$ para algún cardinal κ. Entonces existe una cubierta $\mathcal{A}$ de T que cumple lo siguiente:*

1. $|\mathcal{A}| \leqslant \kappa$.
2. *Si $t_1, ..., t_n$ son elementos distintos de T, entonces existe una subcolección disjunta a pares $\{\mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_n\}$ de $\mathcal{A}$ tal que $t_i \in \mathrm{A}_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Demostración. Es suficiente construir tal cubierta para $D(2)^\kappa$, el espacio producto de κ copias de $\{0,1\}$. Sea $\mathcal{B}$ una base de $D(2)^\kappa$. Tomemos $f_1, ..., f_n$ elementos distintos de $D(2)^\kappa$, entonces para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$ existe $\kappa_{ij} \in \kappa$ tal que $f_i(\kappa_{ij}) \neq f_j(\kappa_{ij})$. Como $\mathbb{R}$ es de Hausdorff, para cada $i \neq j$ existen abiertos ajenos V_i, V_j de $\mathbb{R}$ tales que $f_i(\kappa_{ij}) \in \mathrm{V}_i$, $f_j(\kappa_{ij}) \in \mathrm{V}_j$. De donde $\pi^{-1}_{\kappa_{ij}}(\mathrm{V}_i)$, $\pi^{-1}_{\kappa_{ij}}(\mathrm{V}_j)$ son abiertos ajenos de $D(2)^\kappa$ tales que $f_i \in \pi^{-1}_{\kappa_{ij}}(\mathrm{V}_i)$, $f_j \in \pi^{-1}_{\kappa_{ij}}(\mathrm{V}_j)$ para cada $i \neq j$. Como $\mathcal{B}$ es base de $D(2)^\kappa$, existen elementos ajenos $\mathrm{B}_i, \mathrm{B}_j$ de $\mathcal{B}$ tales que $f_i \in \mathrm{B}_i \subseteq \pi^{-1}_{\kappa_{ij}}(\mathrm{V}_i)$, $f_i \in \mathrm{B}_j \subseteq \pi^{-1}_{\kappa_{ij}}(\mathrm{V}_j)$ para cada $i \neq j$. Por lo anterior cualquier base de $D(2)^\kappa$ cumple la condición 2 del lema y como el espacio $D(2)^\kappa$ tiene una base $\mathcal{A}$ de cardinal menor o igual a κ (esto último lo puede consultar en [KV84]), por lo tanto $\mathcal{A}$ es una cubierta de $D(2)^\kappa$ que cumple 1 y 2 del lema. □

Teorema 4.2.5. ***(Hewitt, Marczewski, Pondiczery.)*** *Si $X = \prod_{t \in T} X_t$, donde $|T| \leqslant 2^\kappa$ y $d(X_t) \leqslant \kappa$ para cada $t \in T$, entonces $d(X) \leqslant \kappa$. En particular, el producto de no más que 2^ω espacios separables es separable.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una cubierta del conjunto de indices T que satisface las condiciones 1 y 2 del Lema 4.2.4. Para cada $t \in T$, sea $\{x(t, \alpha) : 0 \leqslant \alpha < \kappa\}$ un conjunto denso de X_t. Para $n < \omega$, para cada n-ada ordenada $\Gamma = (\mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_n)$ de elementos disjuntos a pares de $\mathcal{A}$ y para cada n-ada ordenada $\Delta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ de ordinales menores que κ, definamos un elemento f de X como sigue

$$f(n, \Gamma, \Delta)(t) = \begin{cases} x(t, \beta_i) & \text{si} \quad t \in \mathrm{A}_i \\ \\ x(t, 0) & \text{si} \quad t \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i. \end{cases}$$

Sea S el conjunto de todos los elementos de X definidos de esta manera. Entonces S es un subconjunto denso de cardinal menor o igual a κ de X. En efecto, sea $\bigcap_{i=1}^{n} \pi^{-1}_{t_i}(\mathrm{V}_i)$ un abierto canónico no vacío de X, donde $t_1, ..., t_n$ son elementos distinto de T y V_i es un subconjunto abierto de X_{t_i} para cada $i = 1, ..., n$, sea $\Gamma(\mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_n)$, donde $\{\mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_n\}$ es una subcolección disjunta a pares de $\mathcal{A}$ tal que $t_i \in \mathrm{A}_i$ para cada $1 \leqslant i \leqslant n$. Como $\{x(t, \alpha) : 0 \leqslant \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto denso de X_t, sea $x(t_i, \beta_i) \in \mathrm{V}_i$ para cada $i = 1, ..., n$ y definamos $\Delta(\beta_1, ..., \beta_n)$. Entonces se tiene que

$$f(n, \Gamma, \Delta) \in S \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \pi^{-1}_{t_i}(\mathrm{V}_i)).$$

Por lo tanto S es un subconjunto denso de cardinal menor o igual que κ de X y por ende $d(X) \leqslant \kappa$. □

Corolario 4.2.6. *Sea $\{(X_t, \mathcal{T}_t) : t \in T\}$ una familia de espacios topologicos. Si $X = \prod_{t\in T} X_t$ y $d(X_t) \leqslant \kappa$ para cada $t \in T$, entonces $c(X) \leqslant \kappa$.*

Demostración. Argumentando por contradicción, sea $\{\mathrm{V}_\alpha : 0 \leqslant \alpha < \kappa^+\}$ una familia celular en X, donde cada V_α es un subconjunto abierto canónico de X. Ahora para cada $0 \leqslant \alpha < \kappa^+$ existe, $n_\alpha \in \mathbb{N}$, $t_1, ..., t_{n_\alpha}$ y $\mathrm{V}_i \in \mathcal{T}_{t_i}$ con $1 \leqslant i \leqslant n$ tal que

$$\mathrm{V}_\alpha = \pi_{t_1}^{-1}[\mathrm{V}_1] \cap \cdots \cap \pi_{t_n}^{-1}[\mathrm{V}_n].$$

Consideremos $\mathrm{F}_\alpha = \{t_1, ..., t_{n_\alpha}\}$ para cada $0 \leqslant \alpha < \kappa^+$, $A = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} \mathrm{F}_\alpha$ y $Y = \prod_{t\in A} X_t$. Por hipótesis se tiene que $|A| \leqslant 2^\kappa$ y $d(Y) \leqslant \kappa$. Si $\mathrm{V}^*_\alpha = \mathrm{V}_\alpha \cap Y$ para cada $0 \leqslant \alpha < \kappa^+$. Se tiene que $\{\mathrm{V}^*_\alpha : 0 \leqslant \alpha < \kappa^+\}$ es una familia celular en Y de cardinal κ^+, lo cual no puede suceder por el Teorema 4.2.5. □

Lema 4.2.7. ***(Arhangel'skiĭ [1985])*** *Sea X un espacio topológico, entonces $c(C_p(X)) \leqslant \aleph_0$.*

Demostración. Por el Colorario 4.2.6 tenemos que $c(\mathbb{R}^X) \leqslant \aleph_0$. Como $C_p(X)$ es un subespacio denso de $\mathbb{R}^X$, entonces $c(C_p(X)) \leqslant \aleph_0$. □

Definición 4.2.8. *Un espacio X es **paracompacto** si es regular y cada cubierta abierta de X posee un refinamiento abierto localmente finito (Observe la definición 3.5.3).*

A continuación enunciaremos un Lema cuya demostración la pueden consultar en [TC11].

Lema 4.2.9. *Todo espacio Lindëlof regular es paracompacto.*

Teorema 4.2.10. ***(Arhangel'skiĭ [1985])*** *Para un espacio X, $C_p(X)$ es paracompacto si y sólo si $C_p(X)$ es un espacio de Lindëlof.*

Demostración.

$\Rightarrow$]Como estamos suponiendo que $C_p(X)$ es paracompacto, es sufiente mostrarlo con cubiertas abiertas localmente finitas γ de $C_p(X)$. Sea γ una cubierta abierta localmente finita de $C_p(X)$. Por el Lema de Zorn, sea μ una familia maximal disjunta de subconjuntos abiertos de $C_p(X)$ tal que para cada $\mathrm{H} \in \mu$ la colección $\{\mathrm{G} \in \gamma : \mathrm{G} \cap \mathrm{H} \neq \emptyset\}$ es finita. Por el Lema 4.2.7 tenemos que $|\mu| \leqslant \aleph_0$ y, como μ es localmente finita se tiene que $|\gamma| \leqslant \aleph_0$. Por lo tanto $C_p(X)$ es un espacio Lindëlof.

$\Leftarrow$] Debido al Teorema 1.0.11, tenemos que $C_p(X)$ es un espacio regular y por el Lema 4.2.9 podemos concluir que $C_p(X)$ es un espacio paracompacto.

□

4.3. La estrechez en $\mathcal{C}_p(X)$

Definición 4.3.1. *Para un espacio X y un cardinal infinito τ, decimos que X es tan estrecho como τ y lo denotamos por* $\boldsymbol{t(X) \leqslant \tau}$ *si, para cualquier subconjunto* A *de X y un punto $x \in cl(\mathrm{A})$,* A *contiene un subconjunto* B *tal que el cardinal de* B*, $|\mathrm{B}|$, no es más grande que τ y $x \in cl(\mathrm{B})$. El mínimo cardinal τ tal que $t(X) \leqslant \tau$ es llamado la* ***estrechez*** *de X.*

Teorema 4.3.2. ***(Arhangel'skiĭ [1985]).*** *Para un espacio X, $t(C_p(X)) \leqslant \tau$ si y sólo si $l(X^n) \leqslant \tau$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

$\Rightarrow$] (Necesidad, Pytkeev): Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y fijo y γ una cubierta abierta de X^n. Una familia finita μ de subconjuntos abiertos de X es **$\boldsymbol{\gamma}$-pequeña** si, para cualesquiera $\mathrm{H}_1, ..., \mathrm{H}_n \in \mu$, el conjunto $\mathrm{H}_1 \times \cdots \times \mathrm{H}_n$ está contenido en algún G de γ. Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de todas las familias γ-pequeñas y para cada $\mu \in \mathcal{E}$ definimos los siguientes conjuntos

$$\mathrm{A}_\mu = \{f \in C_p(X) : f = 0 \ \text{ en } \ X \setminus \bigcup\{\mathrm{H} : \mathrm{H} \in \mu\}\} \text{ y}$$
$$\mathrm{A} = \bigcup\{\mathrm{A}_\mu : \mu \in \mathcal{E}\}.$$

Mostraremos que $cl_p(\mathrm{A}) = C_p(X)$. En efecto, sea $f \in C_p(X)$, y sea $\mathrm{K} = \{x_1, ..., x_m\}$ $(n \leqslant m)$ un subconjunto finito de X, y sea $\varepsilon > 0$. Sea θ_{K} una familia finita de subconjuntos abiertos de X tal que para cualquier $(r_1, ..., r_n) \in \mathrm{K}^n$ existen $\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n$ en θ_{K} y G en γ que satisfacen $r_i \in \mathrm{V}_i$ para $i = 1, ..., n$ y $\mathrm{V}_1 \times \cdots \times \mathrm{V}_n \subseteq \mathrm{G}$. Por construcción podemos concluir que $\mathrm{K} \subseteq \bigcup\{\mathrm{V} : \mathrm{V} \in \theta_{\mathrm{K}}\}$. Para cada $x \in \mathrm{K}$ definimos $\mathrm{W}_x = \bigcap\{\mathrm{V} \in \theta_{\mathrm{K}} : x \in \mathrm{V}\}$ y $\mathcal{M}_{\mathrm{K}} = \{\mathrm{W}_x : x \in \mathrm{K}\}$. No es muy díficil justificar que $\mathrm{K} \subseteq \bigcup\{\mathrm{W} : \mathrm{W} \in \mathcal{M}_{\mathrm{K}}\}$. Observemos además que

1. $\mathcal{M}_{\mathrm{K}}$ es un conjunto finito pues K lo es.
2. Como θ_{K} es una familia finita de subconjuntos abiertos de X, entonces para cada $x \in \mathrm{K}$ se tiene que W_x es un abierto de X, y por ende $\mathcal{M}_{\mathrm{K}}$ es una familia finita de subconjuntos abiertos de X.
3. Tomemos $\mathrm{W}_{x_1}, ..., \mathrm{W}_{x_n} \in \mathcal{M}_{\mathrm{K}}$ y consideremos $(x_1, ..., x_n) \in \mathrm{K}^n$. Por definición de θ_{K} existen $\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n$ en θ_{K} y G en γ tal que $x_i \in \mathrm{V}_i$ para $i = 1, ..., n$ y $\mathrm{V}_1 \times \cdots \times \mathrm{V}_n \subseteq \mathrm{G}$. De donde $\mathrm{W}_{x_1} \times \cdots \times \mathrm{W}_{x_n} \subseteq \mathrm{V}_1 \times \cdots \times \mathrm{V}_n \subseteq \mathrm{G}$.

De la observación anterior podemos concluir que $\mathcal{M}_{\mathrm{K}}$ es γ-pequeña. Como X es un espacio de Tychonoff, podemos tomar $g \in C_p(X)$ tal que $g = f$ en K y $g = 0$ en $X \setminus \bigcup\{\mathrm{W} : \mathrm{W} \in \mathcal{M}_{\mathrm{K}}\}$. Entonces $g \in \mathrm{A}_{\mathcal{M}_{\mathrm{K}}} \subseteq \mathrm{A}$ y $g \in \mathcal{W}(f, \mathrm{K}, \varepsilon)$; esto es $\mathrm{A} \cap \mathcal{W}(f, \mathrm{K}, \varepsilon) \neq \emptyset$. Esto muestra que $cl_p(\mathrm{A}) = C_p(X)$. Como $1 \in cl_p(\mathrm{A})$, por hipótesis, existe un subconjunto B de A tal que $|\mathrm{B}| \leqslant \tau$ y $1 \in cl_p(\mathrm{B})$, por definición de A, existe un subconjunto $\mathcal{E}_0$ de $\mathcal{E}$ tal que $|\mathcal{E}_0| \leqslant \tau$ y B está contenido en $\bigcup\{\mathrm{A}_\mu : \mu \in \mathcal{E}_0\}$.
Para cada $\mu \in \mathcal{E}_0$ y cada $\xi = (\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n) \in \mu^n$, elegimos un elemento G_ξ de γ tal que $\mathrm{V}_1 \times \cdots \times \mathrm{V}_n \subseteq \mathrm{G}_\xi$ y definimos los siguientes conjuntos

$$\gamma_\mu = \{\mathrm{G}_\xi : \xi \in \mu^n\} \text{ y}$$
$$\widetilde{\gamma} = \{\gamma_\mu : \mu \in \mathcal{E}_0\}.$$

Entonces $\widetilde{\gamma}$ es una subcolección de γ de cardinal menor o igual que τ, solamente hay que ver que $\widetilde{\gamma}$ cubre a X^n. Sea $(x_1, ..., x_n)$ un punto de X^n, entonces $\mathrm{U} = \{f \in C_p(X) : f(x_i) > 0 \ \text{ para } i = 1, ..., n\}$ es una vecindad abierta del 1 en $C_p(X)$, de donde, existe $\mu_0 \in \mathcal{E}_0$ tal que $\mathrm{U} \cap \mathrm{A}_{\mu_0} \neq \emptyset$. Sea $g \in \mathrm{U} \cap \mathrm{A}_{\mu_0}$ entonces $g(x_i) > 0$ para $i = 1, ..., n$ y $g = 0$ en $X \setminus \bigcup\{\mathrm{H} : \mathrm{H} \in \mu_0\}$. Por lo tanto, $x_i \in \bigcup\{\mathrm{H} : \mathrm{H} \in \mu_0\}$ para cada $i = 1, ..., n$. Elegimos H_i tal que $x_i \in \mathrm{H}_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Entonces el punto $(x_1, .., x_n)$ es un elemento de $\mathrm{H}_1 \times \cdots \times \mathrm{H}_n$, el cual está contenido en algún miembro de γ_{μ_0}, el cual es también miembro de $\widetilde{\gamma}$. Esto muestra que $\widetilde{\gamma}$ cubre a X^n. Por lo tanto $l(X^n) \leqslant \tau$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$](Suficiencia, Arhangel'skiĭ): Sea F un subconjunto arbitrario de $C_p(X)$ y $f \in C_p(X)$ con $f \in cl_p(\mathrm{F})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y un punto $x = (x_1, ..., x_n) \in X^n$, existe $g_x \in \mathrm{F}$, tal que $|f(x_i) - g_x(x_i)| < 1/n$ para $i = 1, ..., n$. Sea, para cada i, O_{x_i} una vecindad abierta de x_i en X tal que $|f(y) - g_x(y)| < 1/n$ para cada $y \in \mathrm{O}_{x_i}$ y tomamos $\mathrm{U}_x = \mathrm{O}_{x_1} \times \cdots \times \mathrm{O}_{x_n}$. Entonces, la familia $\mathcal{U}_n = \{\mathrm{U}_x : x \in X^n\}$ es una cubierta abierta de X^n. Por hipótesis, $\mathcal{U}_n$ contiene una subcubierta $\mathcal{U}_n^*$ de $\mathcal{U}_n$ tal que su cardinal no excede a τ. Ponemos $\mathrm{E}_n = \{g_x : \mathrm{U}_x \in \mathcal{U}_n^*\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\mathrm{E} = \bigcup\{\mathrm{E}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces E es un subconjunto de F cuyo cardinal no excede a τ. Es suficiente mostrar que $f \in cl_p(\mathrm{E})$.
Sea $\mathcal{W}(f, \{y_1, ..., y_n\}, \varepsilon)$ una vecindad abierta básica de f en $C_p(X)$ donde $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq X$ y $\varepsilon > 0$. Podemos suponer que n es lo suficientemente grande para que $1/n < \varepsilon$. Como $y = (y_1, ..., y_n)$ es un punto de X^n y $\mathcal{U}_n^*$ cubre a X^n, entonces existe $\mathrm{U}_x \in \mathcal{U}_n^*$ tal que $y \in \mathrm{U}_x$. Por definición de U_x se tiene que $|f(y_i) - g_x(y_i)| < 1/n$ para $i = 1, ..., n$ y entonces $|f(y_i) - g_x(y_i)| < \varepsilon$ para $i = 1, ..., n$. Esto muestra que g_x está en la intersección $\mathcal{W}(f, \{y_1, ..., y_n\}, \varepsilon) \cap \mathrm{E}$, por lo cual $f \in cl_p(\mathrm{E})$. Por lo tanto $t(C_p(X)) \leqslant \tau$.

□

Corolario 4.3.3. *Si X es un espacio σ-compacto; es decir, si es la unión numerable de subconjuntos compactos de X, entonces $t(C_p(X)) \leqslant \aleph_0$.*

Demostración. Si X es un espacio σ-compacto, entonces para $n \in \mathbb{N}$, X^n también es un espacio σ-compacto, por ende X^n es un espacio Lindëlof para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 4.3.2 se tiene que $t(C_p(X)) \leqslant \aleph_0$. □

Teorema 4.3.4. ***(Asanov [1979]).*** *Para un espacio X, se tiene la desigualdad $t(X^n) \leqslant l(C_p(X))$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $l(C_p(X)) \leqslant \tau$ y $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos que $t(X^n) \leqslant \tau$. Sea A un subconjunto de X^n y $x = (x_1, ..., x_n)$ un punto de X^n con $x \in cl(A)$, y sea $\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 \times \cdots \times \mathrm{U}_n$ un abierto básico de x en X^n tal que, si $x_i = x_j$, entonces $\mathrm{U}_i = \mathrm{U}_j$ y, si $x_i \neq x_j$, entonces $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j = \emptyset$. Podemos suponer que $x \in cl(\mathrm{U} \cap \mathrm{A})$ y además que A es un subconjunto de U.
Consideremos $\mathrm{F} = \{f \in C_p(X) : f(x_i) = 1 \ \text{ para } \ i = 1, ..., n\}$. Entonces F es

un subconjunto cerrado de $C_p(X)$. En efecto, argumentando por contradicción, si existe $g \in cl_p(\mathrm{F})$ tal que $g \notin \mathrm{F}$, entonces existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $|g(x_j)-1| > 0$, de donde $\mathcal{W}(g, \{x_j\}, |g(x_j) - 1|)$ es una vecindad básica de g. Como $g \in cl_p(\mathrm{F})$, debe de suceder que

$$\mathcal{W}(g, \{x_j\}, |g(x_j) - 1|) \cap \mathrm{F} \neq \emptyset.$$

Tomemos $h \in \mathcal{W}(g, \{x_j\}, |g(x_j) - 1|) \cap \mathrm{F}$, por lo cual

$$|h(x_j) - g(x_j)| < |1 - g(x_j)| \text{ y } h(x_j) = 1.$$

De donde $|1 - g(x_j)| < |1 - g(x_j)|$, lo cual no puede suceder. Por lo tanto F es un subconjunto cerrado de $C_p(X)$. Como $l(C_p(X)) \leqslant \tau$, no es muy díficil mostrar que $l(\mathrm{F}) \leqslant \tau$.
Para un punto $y = (y_1, ..., y_n)$ de A, consideremos $\mathrm{V}_y = \{g \in C_p(X) : g(y_i) > 0 \text{ para } i = 1, ..., n\}$. La colección $\{\mathrm{V}_y : y \in \mathrm{A}\}$ forma una cubierta abierta de F. Por hipótesis, existe un subconjunto B de A tal que $|\mathrm{B}| \leqslant \tau$ y $\bigcup\{\mathrm{V}_y : y \in \mathrm{B}\}$ contiene a F. Es suficiente con mostrar que $x \in cl(\mathrm{B})$. Supongamos lo contrario, es decir supongamos que $x \notin cl(\mathrm{B})$. Elegimos una vecindad abierta $\mathrm{U}' = \mathrm{U}'_1 \times \cdots \times \mathrm{U}'_n$ de x en X^n tal que $\mathrm{U}'_i \subseteq \mathrm{U}_i$ para $i = 1, ..., n$ y $\mathrm{U}' \cap \mathrm{B} = \emptyset$, y elegimos un elemento f_0 en F con $f_0 = 0$ en $X \setminus \bigcup\{U'_i : i = 1, ..., n\}$. Ahora existe un elemento $y \in \mathrm{B}$ tal que $f_0 \in \mathrm{V}_y$. Entonces se tiene que $f_0(y_j) > 0$ para $j = 1, ..., n$ y entonces $y_j \in \bigcup\{\mathrm{U}'_i : i = 1, ..., n\}$ para $j = 1, ..., n$. Como $y \in \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A} \subseteq \mathrm{U}$, se tiene que $y_j \in \mathrm{U}_j$ para $j = 1, ..., n$ y además, sucede que $y_j \in \mathrm{U}'_j$ para $j = 1, ..., n$. Esto significa que y esta en U' y en B. Esto es una contradicción pues $\mathrm{U}' \cap \mathrm{B} = \emptyset$. Entonces $x \in cl(\mathrm{B})$ y por lo tanto $t(X^n) \leqslant l(C_p(X))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

4.4. Un criterio para saber cuando $(\mathcal{C}_p(X))^\omega$ es hereditariamente separable o hereditariamente de Lindelöf

Definiciones 4.4.1.

(1) Un espacio X es ***hereditariamente separable*** *si cada subespacio de X es separable.*

(2) Un espacio X es ***hereditariamente de Lindelöf*** *si cada subespacio de X es de Lindelöf.*

En los siguientes resultados, restringimos nuestra atención en el caso de cardinales numerables.

Proposición 4.4.2. ***(Zenor [1980]).*** *Sean X y Y espacios topológicos y Z un espacio topológico segundo numerable, y sea f un mapeo de $X \times Y$ a Z tal que*

(a) $f(x, \cdot)$ es continuo en Y para cada $x \in X$.

(b) X tiene la topología débil para la cual $f(\cdot, y)$ es continuo en X para cada $y \in Y$.

Entonces se cumple lo siguiente:

(1) Si el producto Y^ω es un espacio hereditariamente de Lindelöf, entonces X es un espacio hereditariamente separable.

(2) Si el producto Y^ω es un espacio hereditariamente separable, entonces X es un espacio hereditariamente de Lindelöf.

Demostración. Definamos el siguiente mapeo $g : X \times Y^\omega \to Z^\omega$ tal que a cada $x \in X$ y $h \in Y^\omega$ le asociamos la función $g(x,h) : \omega \to Z$ cuya regla es $g(x,h)(n) = f(x,h(n))$, para cada $n \in \omega$. Tomemos $x \in X$ fijo pero albitrario. Entonces $g(x,\cdot) : Y^\omega \to Z^\omega$ es una función continua. Sea $i \in \omega$. Solamente hay que justificar que $\pi_i \circ g(x,\cdot) : Y^\omega \to Z$ es continua. Consideremos un subconjunto abierto V de Z y $h \in Y^\omega$ tal que $h \in (\pi_i \circ g(x,\cdot))^{-1}(\mathrm{V})$. Como la función $f(x,\cdot)$ es continua en Y, sucede que $(f(x,\cdot))^{-1}(\mathrm{V})$ es un subconjunto abierto de Y, de donde $\pi_i^{-1}[(f(x,\cdot))^{-1}(\mathrm{V})]$ es un subconjunto abierto de Y^ω tal que

$$h \in \pi_i^{-1}[(f(x,\cdot))^{-1}(\mathrm{V})] \subseteq (\pi_i \circ g(x,\cdot))^{-1}(\mathrm{V}).$$

De donde $\pi_i \circ g(x,\cdot) : Y^\omega \to Z$ es continua, y por lo tanto $g(x,\cdot) : Y^\omega \to Z^\omega$ es una función continua. De manera análoga, se puede justificar que $g(\cdot,h) : X \to Z^\omega$ es una función continua, para cada $h \in Y^\omega$.
Consideremos $\mathcal{B}_0 = \{\mathrm{B}_1, ..., \mathrm{B}_n, ...,\}$ una base numerable de Z. Entonces se tiene que

$$\mathcal{B} = \{\pi_{i_1}^{-1}[\mathrm{B}_1] \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}[\mathrm{B}_n] : n \in \mathbb{N}, i_j \in \omega, \mathrm{B}_j \in \mathcal{B}_0, \text{para cada } j \in \{i_1, ..., i_n\}\}$$

es una base numerable de Z^ω. Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{B}$ y cada $h \in Y^\omega$, ponemos $M(h,\mathrm{U}) = \{x \in X : g(x,h) \in \mathrm{U}\}$. Como $g(\cdot,h)$ es una función continua para cada $h \in Y^\omega$, entonces $M(h,\mathrm{U})$ es un subconjunto abierto de X para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{B}$. Además la colección $\{M(h,\mathrm{U}) : h \in Y^\omega, \mathrm{U} \in \mathcal{B}\}$ es una base para X. En efecto, tomemos $(f(\cdot,y_{i_1}))^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap \cdots \cap (f(\cdot,y_{i_n}))^{-1}(\mathrm{B}_n)$ un abierto básico no vacío de X, donde $n \in \mathbb{N}$, $i_1, ..., i_n \in \omega$ y $\mathrm{B}_j \in \mathcal{B}_0$ para cada $j \in \{i_1, ..., i_n\}$. Sea $x \in X$ con $x \in (f(\cdot,y_{i_1}))^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap \cdots \cap (f(\cdot,y_{i_n}))^{-1}(\mathrm{B}_n)$. Se tiene que $\mathrm{U} = \pi_{i_1}^{-1}(\mathrm{B}_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(\mathrm{B}_{i_n})$ es un elemento de $\mathcal{B}$. Consideremos $h : \omega \to Y$ cuya regla de correspondencia es $h(n) = y_{i_1}$ para $n \notin \{i_1, ..., i_n\}$ y $h(i_j) = y_{i_j}$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Entonces se tiene que $x \in M(h,\mathrm{U}) \subseteq (f(\cdot,y_{i_1}))^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap \cdots \cap (f(\cdot,y_{i_n}))^{-1}(\mathrm{B}_n)$. Por lo tanto la colección $\{M(h,\mathrm{U}) : h \in Y^\omega, \mathrm{U} \in \mathcal{B}\}$ es una base para X. Usando estas notaciones probaremos (1) y (2).
(1): Sea A un subespacio arbitrario de X. Para cualquier punto x de A y cualquier $\mathrm{U} \in \mathcal{B}$, ponemos $G(x,\mathrm{U}) = \{h \in Y^\omega : g(x,h) \in \mathrm{U}\}$. Entonces $G(x,\mathrm{U})$ es un subconjunto abierto de Y^ω. Por hipótesis, existe un subconjunto numerable A_{U} de A tal que $\bigcup\{G(x,\mathrm{U}) : x \in A\} = \bigcup\{G(x,\mathrm{U}) : x \in A_{\mathrm{U}}\}$. Entonces se tiene que $\bigcup\{A_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \in \mathcal{B}\}$ es un subconjunto denso numerable de A. En efecto, tomemos un abierto básico no vacío $A \cap (f(\cdot,y_{i_1}))^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap \cdots \cap (f(\cdot,y_{i_n}))^{-1}(\mathrm{B}_n)$ de A, donde $n \in \mathbb{N}$, $i_1, ..., i_n \in \omega$ y $\mathrm{B}_j \in \mathcal{B}_0$ para cada $j \in \{i_1, ..., i_n\}$. Hay que justificar que

$$A \cap (f(\cdot,y_{i_1}))^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap \cdots \cap (f(\cdot,y_{i_n}))^{-1}(\mathrm{B}_n) \cap (\bigcup\{A_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \in \mathcal{B}\}) \neq \emptyset.$$

Sea $x \in A \cap (f(\cdot, y_{i_1}))^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap \cdots \cap (f(\cdot, y_{i_n}))^{-1}(\mathrm{B}_n)$. Como $x \in (f(\cdot, y_{i_1}))^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap \cdots \cap (f(\cdot, y_{i_n}))^{-1}(\mathrm{B}_n)$ entonces $f(x, y_{i_j}) \in \mathrm{B}_{i_j}$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$.Considere-mos $\mathrm{U} = \pi_{i_1}^{-1}(\mathrm{B}_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(\mathrm{B}_{i_n})$, $G(x, \mathrm{U})$ y $h : \omega \to Y$ cuya regla de correspondencia es $h(n) = i_1$, si $n \notin \{i_1, ..., i_n\}$ y $h(i_j) = y_{i_j}$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Como $G(x, \mathrm{U})$ es un elemento de $\bigcup\{G(x, \mathrm{U}) : x \in A\}$, existe $x_0 \in A_{\mathrm{U}}$ tal que $G(x, \mathrm{U}) = G(x_0, \mathrm{U})$ y como $h \in G(x, \mathrm{U})$ entonces $h \in G(x_0, \mathrm{U})$. De donde no es muy díficil justificar que

$$x_0 \in A \cap (f(\cdot, y_{i_1}))^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap \cdots \cap (f(\cdot, y_{i_n}))^{-1}(\mathrm{B}_n) \cap (\bigcup\{A_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \in \mathcal{B}\}.$$

Por lo tanto A es separable.
(2): Puesto que $\{M(h, \mathrm{U}) : h \in Y^\omega, \mathrm{U} \in \mathcal{B}\}$ forma una base para X, es suficiente mostrar que cualquier subcolección $\mathcal{A}$ contiene una subcolección numerable $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup\{G : G \in \mathcal{A}\} = \bigcup\{G : G \in \mathcal{A}'\}$. Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{B}$, ponemos $A_{\mathrm{U}} = \{h \in Y^\omega : M(h, \mathrm{U}) \in A\}$. Entonces, por hipótesis, existe un subconjunto numerable E_{U} de A_{U} tal que $A_{\mathrm{U}} = cl_X(E_{\mathrm{U}})$. Ponemos $\mathcal{A}' = \{M(h, \mathrm{U}) : h \in E_{\mathrm{U}}, \mathrm{U} \in \mathcal{B}\}$. Entonces $\mathcal{A}'$ es una subcolección contable de $\mathcal{A}$. Además, si x es un punto de $\bigcup\{G : G \in \mathcal{A}\}$, entonces x es un elemento de $G = M(h, \mathrm{U})$ en $\mathcal{A}$. Por la definición de $M(h, \mathrm{U})$ tenemos que $g(x, h) \in \mathrm{U}$. Puesto que $g(x, \cdot)$ es continuo en Y^ω y E_{U} es denso en A_{U}, entonces existe $h_0 \in E_{\mathrm{U}}$ tal que $g(x, h_0)$ pertenece a U. Esto muestra que $x \in M(h_0, \mathrm{U})$ con $h_0 \in E_{\mathrm{U}}$ y $\mathrm{U} \in \mathcal{B}$, entonces x está en un elemento de algún miembro de $\mathcal{A}'$. En otras palabras, esto muestra que $\bigcup\{G : G \in \mathcal{A}\} = \bigcup\{G : G \in \mathcal{A}'\}$. Por lo tanto X es un espacio hereditariamente de Lindelöf. $\square$

Lema 4.4.3. *Para un espacio X, el espacio $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ es homeomorfo al espacio producto $(\mathcal{C}_p(X))^\omega$.*

Demostración. Definimos el mapeo $\psi : \mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega) \to (\mathcal{C}_p(X))^\omega$ que a cada $f \in \mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ le asociamos la función $\psi(f) : \omega \to \mathcal{C}_p(X)$ que a cada $n \in \omega$ le asociamos la función $\psi(f)(n) : X \to \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es $\psi(f)(n)(x) = f(x)(n)$ para cada $x \in X$.
Tomemos $f \in \mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ fija pero albitraria. Entonces para cada $n \in \omega$, $\psi(f)(n) \in \mathcal{C}_p(X)$. En efecto, sean $n \in \omega$, V un subconjunto abierto de los números reales y $x \in X$ con $x \in (\psi(f)(n))^{-1}(\mathrm{V})$. Consideremos la n-ésima proyección $\pi_n : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$. Como V es un subconjunto abierto de los números reales, entonces $\pi_n^{-1}(\mathrm{V})$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^\omega$ tal que $f(x) \in \pi_n^{-1}(\mathrm{V})$, de donde existe un abierto $\mathrm{M} \subseteq \mathbb{R}^\omega$ tal que $f(x) \in \mathrm{M} \subseteq \pi_n^{-1}(\mathrm{V})$. Como la función f es continua, existe un subconjunto abierto H de X tal que $x \in \mathrm{H} \subseteq f^{-1}(\mathrm{M})$. Además $\mathrm{H} \subseteq (\psi(f)(n))^{-1}(\mathrm{V})$, ya que si $y \in \mathrm{H}$, entonces $y \in f^{-1}(\mathrm{M})$, de donde $f(y) \in \pi_n^{-1}(\mathrm{V})$. Entonces $f(y)(n) \in \mathrm{V}$, es decir $y \in (\psi(f)(n))^{-1}(\mathrm{V})$. Por lo tanto, para cada $n \in \omega$ se tiene que $\psi(f)(n) : X \to \mathbb{R}$ es continua y por ende $\psi(f)(n) \in \mathcal{C}_p(X)$.

Inyectividad: Sean $f, g \in \mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ tales que $f \neq g$. Entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$, de donde existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x)(n) \neq g(x)(n)$. Entonces $\psi(f)(n)(x) \neq \psi(g)(n)(x)$, de donde existe $x \in X$ tal que $\psi(f)(n)(x) \neq \psi(g)(n)(x)$, entonces $\psi(f)(n) \neq \psi(g)(n)$, de donde existe $n \in \omega$ tal que $\psi(f)(n) \neq \psi(g)(n)$, entonces $\psi(f) \neq \psi(g)$ y por lo tanto ψ es una función inyectiva.

Sobreyectividad: Sea $h \in (\mathcal{C}_p(X))^\omega$. Definimos $g : X \to \mathbb{R}^\omega$ tal que a cada $x \in X$ le asocia la función $g(x) : \omega \to \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es $g(x)(n) = h(n)(x)$, para cada $n \in \omega$. Se tiene que $g : X \to \mathbb{R}^\omega$ es una función continua. En efecto, tomemos un abierto básico $\pi_{n_1}^{-1}(\mathrm{V}_1) \cap \cdots \cap \pi_{n_j}^{-1}(\mathrm{V}_j)$ de $\mathbb{R}^\omega$ donde $n_1, ..., n_j \in \omega$, $\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_j$ son subconjuntos abiertos de los números reales y $x \in X$ con $x \in g^{-1}[\pi_{n_1}^{-1}(\mathrm{V}_1) \cap \cdots \cap \pi_{n_j}^{-1}(\mathrm{V}_j)]$. Entonces, $g(x) \in \pi_{n_1}^{-1}(\mathrm{V}_1) \cap \cdots \cap \pi_{n_j}^{-1}(\mathrm{V}_j)$ de donde $g(x)(n_i) \in \mathrm{V}_i$ para cada $i = 1, ..., j$. Entonces $h(n_i)(x) \in \mathrm{V}_i$ para cada $i = 1, ..., j$. Como la función $h(n_i) : X \to \mathbb{R}$ es continua, existe un subconjunto abierto M de X tal que $x \in \mathrm{M} \subseteq (h(n_i))^{-1}(\mathrm{V}_i)$ para toda $i = 1, ..., n$. Además $\mathrm{M} \subseteq g^{-1}[\pi_{n_1}^{-1}(\mathrm{V}_1) \cap \cdots \cap \pi_{n_j}^{-1}(\mathrm{V}_j)]$, ya que si $y \in \mathrm{M}$ e $i \in \{1, ..., j\}$, entonces $y \in (h(n_i))^{-1}(\mathrm{V}_i)$. Por lo tanto $h(n_i)(y) \in \mathrm{V}_i$. De donde $g(y)(n_i) \in \mathrm{V}_i$. Por lo cual $g(y) \in \pi_{n_i}^{-1}(\mathrm{V}_i)$ para toda $i \in \{1, ..., j\}$. Entonces $g(y) \in \pi_{n_1}^{-1}(\mathrm{V}_1) \cap \cdots \cap \pi_{n_j}^{-1}(\mathrm{V}_j)$, de donde $y \in g^{-1}[\pi_{n_1}^{-1}(\mathrm{V}_1) \cap \cdots \cap \pi_{n_j}^{-1}(\mathrm{V}_j)]$. Por lo tanto $g : X \to \mathbb{R}^\omega$ es una función continua. De la definición de ψ, no es muy díficil justificar que $\psi(g) = h$. Por ende ψ es una función sobreyectiva.
Continuidad: Sea $i \in \omega$. Solamente hay que justificar que la función $\pi_i \circ \psi : \mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega) \to \mathcal{C}_p(X)$ es continua. En efecto, consideremos un abierto básico $\mathcal{U}(x_1, ...$ $, x_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n)$ de $\mathcal{C}_p(X)$, donde $x_1, ..., x_n \in X$, $\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n$ son subconjuntos abiertos de los números reales y $f \in \mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ tal que $f \in (\pi_i \circ \psi)^{-1}(\mathcal{U}(x_1, ..., x_n; \mathrm{V}_1,$ $..., \mathrm{V}_n))$. Entonces $\psi(f)(i) \in \mathcal{U}(x_1, ..., x_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n)$ de donde $f(x_j)(i) = \psi(f)(i)$ $(x_j) \in \mathrm{V}_j$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Se tiene que $\mathcal{U}(x_1, ..., x_n; \pi_i^{-1}(\mathrm{V}_1), ..., \pi_i^{-1}(\mathrm{V}_n))$ es un abierto básico de $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ tal que

$$f \in \mathcal{U}(x_1, ..., x_n; \pi_i^{-1}(\mathrm{V}_1), ..., \pi_i^{-1}(\mathrm{V}_n)) \subseteq (\pi_i \circ \psi)^{-1}(\mathcal{U}(x_1, ..., x_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n)).$$

Tomemos $h \in \mathcal{U}(x_1, ..., x_n; \pi_i^{-1}(\mathrm{V}_1), ..., \pi_i^{-1}(\mathrm{V}_n))$. Entonces $h(x_j) \in \pi_i^{-1}(\mathrm{V}_j)$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$, de donde $h(x_j)(i) \in \mathrm{V}_j$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$, de donde $\psi(h)(i)(x_j) \in \mathrm{V}_j$ para cada $j \in \{1, ..., \}$, entonces $\psi(h)(i) \in \mathcal{U}(x_1, ..., x_n; \mathrm{V}_1, ...,$ $\mathrm{V}_n)$. Entonces $\pi_i(\psi(h)) \in \mathcal{U}(x_1, ..., x_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n)$ y por ende $h \in (\pi_i \circ \psi)^{-1}(\mathcal{U}(x_1,$ $...., x_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n))$. Esto nos permite concluir que $\pi_i \circ \psi : \mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega) \to \mathcal{C}_p(X)$ es continua para toda $i \in \omega$. Por lo tanto $\psi : \mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega) \to (\mathcal{C}_p(X))^\omega$ es una función continua.

Continuidad de ψ^{-1}: Consideremos un abierto básico $\mathcal{U}(x_1, ..., x_n; \mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_n)$ de $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$, donde $x_1, ..., x_n \in X$ y $\mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_n$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^\omega$. Sólamente hay que justificar que $\psi(\mathcal{U}(x_1, ..., x_m; \mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_m))$ es un subconjunto abierto de $(\mathcal{C}_p(X))^\omega$. Sea $f \in \mathcal{U}(x_1, ..., x_m; \mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_m)$, entonces $f(x_i) \in \mathrm{A}_i$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$. Para cada $i \in \{1, ..., m\}$ existe una cantidad finita $n_{i_1}, ..., n_{i_k}$ de elementos de ω y $\mathrm{V}_{i_1}, ..., \mathrm{V}_{i_k}$ subconjuntos abiertos de los números reales tales que

$$f(x_i) \in \pi_{n_{i_1}}^{-1}(\mathrm{V}_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{n_{i_k}}^{-1}(\mathrm{V}_{i_k}) \subseteq \mathrm{A}_i.$$

Consideremos los siguientes conjuntos

$$\mathrm{B}_i = \pi_{n_{i_1}}^{-1}(\mathcal{U}(x_1; \mathrm{V}_{i_1})) \cap \pi_{n_{i_2}}^{-1}(\mathcal{U}(x_1; \mathrm{V}_{i_2})) \cap \cdots \cap \pi_{n_{i_k}}^{-1}(\mathcal{U}(x_1; \mathrm{V}_{i_k}))$$

para cada $i \in \{1, ..., m\}$ y $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{B}_m$. Por construcción no es muy díficil observar que B es un subconjunto abierto básico de $(\mathcal{C}_p(X))^\omega$ con la propiedad:

$$\psi(f) \in \mathrm{B} \subseteq \psi(\mathcal{U}(x_1, ..., x_m; \mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_m)).$$

En efecto, tomemos $g \in \mathrm{B}$. Entonces, existe $h \in \mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ tal que $\psi(h) = g$. Si sucediera que $h \notin \mathcal{U}(x_1, ..., x_m; \mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_m)$. Entonces existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $h(x_i) \notin \mathrm{A}_i$, de donde $h(x_i) \notin \pi^{-1}_{n_{i_1}}(\mathrm{V}_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi^{-1}_{n_{i_k}}(\mathrm{V}_{i_k})$, entonces existe $j \in \{1, ..., k\}$ tal que $h(x_i)(n_{i_j}) \notin \mathrm{V}_{n_{i_j}}$ lo cual no puede suceder pues $g \in \mathrm{B}_i$ y $h(x_i)(n_{i_j}) = \psi(h)(n_{i_j})(x_i) = g(n_{i_j})(x_i) \in \mathrm{V}_{n_{i_j}}$. Entonces $h \in \mathcal{U}(x_1, ..., x_m; \mathrm{A}_1, ...$ $, \mathrm{A}_m)$ y así

$$\psi(f) \in \mathrm{B} \subseteq \psi(\mathcal{U}(x_1, ..., x_m; \mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_m)).$$

De lo anterior podemos concluir que ψ es una función abierta y por ende ψ^{-1} es una función continua. Por lo tanto el espacio $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ es homeomorfo al espacio producto $(\mathcal{C}_p(X))^\omega$.

□

Teorema 4.4.4. ***(Zenor [1980]).*** *Para un espacio topológico X, se tienen los siguientes resultados:*

(1) $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ es un espacio hereditariamente de Lindelöf si y solo si X^ω es un espacio hereditariamente separable.

(2) $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ es un espacio hereditariamente separable si y solo si X^ω es un espacio hereditariamente de Lindelöf.

Demostración. Definimos el mapeo $\psi : X^\omega \times \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}^\omega$ que a cada $f \in X^\omega$ y cada $g \in \mathcal{C}_p(X)$ le asocia la función $\psi(f, g) : \omega \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(f, g)(n) = g(f(n))$. Afirmación: para cada $f \in X^\omega$ se tiene que la función $\psi(f, \cdot) : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}^\omega$ es continua. En efecto, sea $i \in \omega$. Sólamente hay que justificar que la función $\pi_i \circ \psi(f, \cdot) : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ es continua, donde $\pi_i : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ es la i-ésima proyección. En efecto, tomemos un subconjunto abierto V de los números reales y $h \in \mathcal{C}_p(X)$ tal que $h \in (\pi_i \circ \psi(f, \cdot))^{-1}(\mathrm{V})$. Entonces, se tiene que $h(f(i)) = \pi_i(\psi(f, h)) \in \mathrm{V}$. El conjunto $\mathcal{U}(f(i); \mathrm{V})$ es un abierto básico $\mathcal{C}_p(X)$ tal que $h \in \mathcal{U}(f(i); \mathrm{V})$ y $\mathcal{U}(f(i); \mathrm{V}) \subseteq (\pi_i \circ \psi(f, \quad))^{-1}(\mathrm{V})$. Entonces, $\pi_i \circ \psi(f, \cdot) : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ es una función continua y por lo tanto $\psi(f, \cdot) : \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}^\omega$ es continua. De donde satisfacemos las condiciones requeridas por el Lema 4.4.2.

(1) Supongamos que $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ es un espacio hereditariamente de Lindelöf. Por el Lema 4.4.3, $(\mathcal{C}_p(X))^\omega$ es un espacio hereditariamente de Lindelöf. Ocupando la Proposición 4.4.2, el inciso (1), tenemos que X^ω es un espacio hereditariamente separable.

(2) Supongamos que $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ es un espacio hereditariamente separable. Por el Lema 4.4.3, $(\mathcal{C}_p(X))^\omega$ es un espacio hereditariamente separable. Ocupando el Lema 4.4.2, el inciso (2), tenemos que X^ω es un espacio hereditariamente de Lindelöf.

Definamos el mapeo $\psi_1 : \mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega) \times X \to \mathbb{R}^\omega$ que a cada $f \in \mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ y cada $x \in X$ le asocia la función $\psi_1(f, x) : \omega \to \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es $\psi_1(f, x)(n) = f(x)(n)$ para cada $n \in \omega$. Sea $f \in \mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$, entonces se tiene que $\psi_1(f, \cdot) : X \to \mathbb{R}^\omega$ es continuo. En efecto, sea $i \in \omega$. Sólamente hay que justificar que $\pi_i \circ \psi_1(f, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ es continua, donde $\pi_i : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ es la i-ésima proyección. Sea V un subconjunto abierto de los números reales y $x \in X$ con $x \in (\pi_i \circ \psi_1(f, \cdot))^{-1}(\mathrm{V})$, entonces $f(x)(i) = \pi_i(\psi_1(f, x)) \in \mathrm{V}$. Como V es abierto

y π_i es una función continua sucede que $\pi_i^{-1}(\mathrm{V})$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^\omega$. Además, como $f \in \mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ entonces $f^{-1}(\pi_i^{-1}(\mathrm{V}))$ es un subconjunto abierto de X tal que $x \in f^{-1}(\pi_i^{-1}(\mathrm{V})) \subseteq (\pi_i \circ \psi_1(f, \cdot))^{-1}(\mathrm{V})$. De donde $\pi_i \circ \psi_1(f, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ es continua para cada $i \in \omega$ y por lo tanto $\psi_1(f, \cdot) : X \to \mathbb{R}^\omega$ es continuo. De donde satisfacemos las condiciones requeridas por el Lema 4.4.2.
(1) Supongamos que X^ω es un espacio hereditariamente separable, entonces por el inciso (2) de la Proposición 4.4.2 tenemos que $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ es un espacio hereditariamente de Lindelöf.
(2)Supongamos que X^ω es un espacio hereditariamente de Lindelöf, entonces por el inciso (1) de la Proposición 4.4.2 tenemos que $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ es un espacio hereditariamente separable. □

4.5. Pseudocarácter, i-peso, peso de red y peso en $\mathcal{C}_p(X)$

Definición 4.5.1. *Una **red** en un espacio topológico X es una colección $\mathcal{R}$ de subconjuntos de X tal que cada subconjunto abierto no vacío de X es la unión de elementos de alguna subcolección de $\mathcal{R}$.*

Observación 4.5.2. *En espacios topológicos también se habla del concepto de red para generalizar las sucesiones, es decir, estamos ocupando la misma palabra para definir cosas distintas, hay que tener cuidado en el contexto el cual uno se esta trabajando.*

Definiciones 4.5.3. *Para un espacio topológico X definimos los siguientes numeros cardinales para X:*

1. *Sea $x \in X$. Una colección $\mathcal{V}_x$ de vecindades de x es una **pseudobase** de x si $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}_x$. El **pseudocarácter de X en el punto x**, el cual denotaremos por $\boldsymbol{\psi(x, X)}$, es el mínimo número cardinal τ tal que x tiene una pseudobase de cardinal τ. Por último, el **pseudocarácter** de X, $\boldsymbol{\psi(X)}$, se define como*

$$\psi(X) = \sup_{x \in X} \psi(x, X).$$

2. *El **peso de red** de X, que denotaremos por $\boldsymbol{nw(X)}$, es el menor cardinal τ tal que X tiene una red de cardinal τ.*

3. *El **peso** de X, que se denota como $\boldsymbol{w(X)}$, es el siguiente número cardinal*

$$w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \ \textit{ es una base para } X\} + \aleph_0.$$

4. *El **i-peso** de X, que denotaremos por $\boldsymbol{iw(X)}$ es el siguiente número cardinal*

$$iw(X) = \text{mín}\{(w(Y)) : X \textit{ está condensado en } Y\}$$

(Ver la Definición 3.3.1).

Teorema 4.5.4. ***(Arhangel'skiĭ [1976])**. Para un espacio X se tiene que $nw(X) = nw(\mathcal{C}_p(X))$.*

Demostración. Probaremos primero que $nw(\mathcal{C}_p(X)) \leqslant nw(X)$. Supongamos que $nw(X) = \tau$. Sea $\mathcal{P}$ una red para X tal que $|\mathcal{P}| = \tau$ y sea $\mathcal{B}$ una base numerable para $\mathbb{R}$. Entonces la colección $\mathcal{R} = \{\mathcal{V}(\mathrm{P}_1, ..., \mathrm{P}_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n) : \mathrm{P}_1, ..., \mathrm{P}_n \in \mathcal{P}, \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n, n \in \mathbb{N}\}$ forma una red para $\mathcal{C}_p(X)$ cuyo cardinal no excede a τ, donde $\mathcal{V}(\mathrm{P}_1, ..., \mathrm{P}_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n) = \{f \in \mathcal{C}(X) : f(\mathrm{P}_i) \subseteq \mathrm{V}_i \text{ para } i = 1, ..., n\}$. Sea $\mathcal{U}(x_1, ..., x_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n)$ un abierto básico no vacío de $\mathcal{C}_p(X)$, donde $x_1, ..., x_n \in X$ y $\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n \in \mathcal{B}$. Para cada $f \in \mathcal{U}(x_1, ..., x_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n)$ existe una subcolección $\mathcal{A}_i^f$ de $\mathcal{P}$ tal que $\bigcup \mathcal{A}_i^f = f^{-1}(\mathrm{V}_i)$ para cada $i = 1, ..., n$. Entonces se tiene que la subcolección

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{V}(\mathrm{B}_1^f, \mathrm{B}_2^f, ..., \mathrm{B}_n^f; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n) : f \in \mathcal{U}(x_1, ..., x_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n),\ \mathrm{B}_i^f \text{ es elemento de } \mathrm{A}_i^f \text{ para cada } i = 1, ..., n\}$$

de $\mathcal{R}$ cumple que $\bigcup \mathcal{A} = \mathcal{U}(x_1, ..., x_n; \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n)$. Esto muestra que $nw(\mathcal{C}_p(X)) \leqslant \tau$. Ahora probaremos que $nw(X) \leqslant nw(\mathcal{C}_p(X))$. Por el Teorema 1.0.12, X está encajado en $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$, entonces se tiene que $nw(X) \leqslant nw(\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X)))$. Además, por el parrafo anterior sucede que $nw(\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))) \leqslant nw(\mathcal{C}_p(X))$. De donde $nw(X) \leqslant nw(\mathcal{C}_p(X))$. Esto completa la demostración. □

Teorema 4.5.5. ***(Guthrie [1974].)*** *Para un espacio X se tiene que*

$$d(X) = iw(\mathcal{C}_p(X)) = \psi(\mathcal{C}_p(X)).$$

Demostración. Para cualquier espacio topológico Z, se puede observar fácilmente que $\psi(Z) \leqslant iw(Z)$, así que es suficiente mostrar que $iw(\mathcal{C}_p(X)) \leqslant d(X) \leqslant \psi(\mathcal{C}_p(X))$.

Comencemos con la primera desigualdad. Supongamos que $d(X) = \tau$ y que Y es un subconjunto denso de X con $|Y| = \tau$. Por el Teorema 1.0.11 inciso (a) tenemos que $w(\mathcal{C}_p(Y)) \leqslant w(\mathbb{R}^Y)$. Consideremos $\varphi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y)$ definido por $\varphi(f) = f \restriction_Y$ para cada $f \in \mathcal{C}_p(X)$. Del hecho de que Y es un subconjunto denso de X, no es muy díficil justificar que $\varphi : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y)$ es un mapeo continuo e inyectivo. Definimos $Z = \varphi(\mathcal{C}_p(X))$. Entonces tenemos que $w(Z) \leqslant \tau$ y φ es una condensación de $\mathcal{C}_p(X)$ en Z. Esto muestra que $iw(\mathcal{C}_p(X)) \leqslant \tau$.

Sigamos con la segunda desigualdad. Sea $\psi(\mathcal{C}_p(X)) = \tau$ y sea γ una familia básica de subconjuntos abiertos de $\mathcal{C}_p(X)$ con $|\gamma| \leqslant \tau$ y $\{0\} = \bigcap\{\mathrm{W} : \mathrm{W} \in \gamma\}$. Para cada $\mathrm{W} = \mathcal{W}(0, \{x_1, ..., x_n, \varepsilon\}) \in \gamma$, ponemos $K(\mathrm{W}) = \{x_1, ..., x_n\}$, y consideremos el conjunto $Y = \bigcup\{k(\mathrm{W}) : \mathrm{W} \in \gamma\}$. Se tiene que $|Y| \leqslant \tau$. Ahora, mostraremos que Y es un subconjunto denso en X. Argumentando por contradicción, supongamos que existe $x \in X \setminus cl(Y)$. Sea g un elemento en $\mathcal{C}_p(X)$ tal que $g(x) = 1$ y $g = 0$ en $cl(Y)$. Sucede que por contrucción, para cualquier $\mathrm{W} \in \gamma$, g es un elemento de W, entonces g debe ser la función 0, lo cual no puede suceder pues $g(x) = 1$. Por lo tanto Y es un subconjunto denso de X, con lo cual $d(X) \leqslant \psi(\mathcal{C}_p(X))$. □

Teorema 4.5.6. ***(Noble [1974]).*** *Para un espacio X se cumple la igualdad $iw(X) = d(\mathcal{C}_p(X))$.*

Demostración. Por los Teoremas 1.0.12 y 4.5.5, se tiene que $iw(X) \leqslant iw(\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))) = d(\mathcal{C}_p(X))$. Ahora, probaremos la otra dirección; esto es $d(\mathcal{C}_p(X)) \leqslant iw(X)$. Sea $iw(X) = \tau$ y φ una condensación de X en el espacio Y con $w(Y) \leqslant \tau$. Puesto que $nw(Y) \leqslant w(Y)$, por el Teorema 4.5.4 se tiene que $nw(\mathcal{C}_p(Y)) \leqslant$

$nw(Y) \leqslant w(Y) \leqslant \tau$. Puesto que φ es una condensación, resulta que el mapeo $\varphi^* : \mathcal{C}_p(Y) \to \mathcal{C}_p(X)$ cuya regla es $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$, para cada $g \in \mathcal{C}_p(X)$ es un homeomorfismo y $\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))$ es denso en $\mathcal{C}_p(X)$. De donde $d(\mathcal{C}_p(X)) \leqslant d(\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))) \leqslant nw(\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))) = nw(\mathcal{C}_p(Y)) \leqslant \tau$, esto muestra que $d(\mathcal{C}_p(X)) \leqslant \tau$. Esto completa la demostración de $d(\mathcal{C}_p(X)) \leqslant iw(X)$. □

Definición 4.5.7. *Un espacio X es* ***monolítico*** *si $nw(cl(A)) \leqslant |A|$ para cada subespacio A de X.*

Teorema 4.5.8. ***(Arhangel'skiĭ [1976]).*** *Si X es un espacio compacto, entonces $\mathcal{C}_p(X)$ es monolítico.*

Demostración. Solo se dara un esbozo de la demostración, cualquier duda puede consultarse en [Ark92]. Sea F un subespacio de $\mathcal{C}_p(X)$ y φ el mapeo de X en el espacio producto $\mathbb{R}^F$ definido por $f(x)(f) = f(x)$ para cada $x \in X$ y cada $f \in F$ y ponemos $Y = \varphi(X)$. Entonces se tiene que $w(Y) \leqslant |f| \cdot \aleph_0$ y además, el mapeo φ^* de $\mathcal{C}_p(Y)$ en $\mathcal{C}_p(X)$ cuya regla es $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$, para cada $g \in \mathcal{C}_p(Y)$ es un homeomorfismo. Desde X es un espacio compacto entonces φ es un mapeo perfecto y por lo tanto, es un mapeo cociente, $\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}_p(X)$. Desde que φ^* es un homeomorfismo, entonces $nw(\mathcal{C}_p(Y)) = nw(\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y)))$ y además, por el Teorema 4.5.4, se tiene que $nw(\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))) = nw(Y) \leqslant |F| \cdot \aleph_0$.
Ahora, es suficiente mostrar que F esta encajado en $\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))$, desde $\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))$ es cerrado en $\mathcal{C}_p(Y)$. Para cada $f \in F$, sea π_f la f-ésima proyección de $\mathbb{R}^F$. Entonces para cualquier $f \in F$ es solamente $\pi_f \circ \varphi$; esto es, $f = \varphi^*(\pi_f \restriction_Y)$ para cada $f \in F$, con lo cual esto muestra que $f \in \varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))$. De donde $nw(cl(F)) \leqslant nw(\varphi^*(\mathcal{C}_p(Y))) \leqslant |F| \cdot \aleph_0$. □

APÉNDICE A

Algunos resultados de Analísis

A.1. Espacios métricos completos

Recordemos que un espacio métrico (X, d) consta de un conjunto no vacío dotado de una función distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente:

(1) Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(2) Para todo $x, y \in X$ se tiene que $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) Para todo $x, y, z \in X$ tenemos que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Por abuso de notación denotaremos al espacio métrico (X, d) como X.

Resulta útil contar con un criterio de convergencia de sucesiones que dependa únicamente de los términos de la sucesión. Para sucesiones de números reales contamos con un critero tal, a saber: si una sucesión de números reales es de Cauchy entonces converge.
La noción de sucesión de Cauchy se extiende de manera natural a espacios métricos. Sin embargo, no resulta cierto en general que toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico converja. A los espacios métricos para los que esto ocurre se les llama espacios completos.

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico.

Definición A.1.1. *Una* ***sucesión*** *en X es una función $x : \mathbb{N} \to X$. El valor de esta función en k se llama el* ***k-ésimo término*** *de la sucesión y se denota por $x_k = x(k)$. La sucesión se denota por $x = (x_k)$.*

Definición A.1.2. *Una sucesión (x_k) en X es* ***de Cauchy*** *si, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_k, x_j) < \varepsilon \ \forall k, j \geqslant k_0.$$

Proposición A.1.3. *Toda sucesión convergente en X es de Cauchy.*

Demostración. Sea (x_k) una sucesión que converge a x en X. Dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ si $k \geqslant k_0$. Por tanto

$$d(x_k, x_j) \leqslant d(x_k, x) + d(x, x_j) < \varepsilon \ \ \forall k, j \geqslant k_0.$$

Es decir, (x_k) es de Cauchy. $\square$

En general no es cierto que toda sucesión de Cauchy converja. Veamos un ejemplo sencillo.

Ejemplo A.1.4. *Sea $X = (0, 1)$ con la métrica inducida por la de $\mathbb{R}$. La sucesión $(\frac{1}{k})$ es de Cauchy en $(0, 1)$ pero no converge en $(0, 1)$.*

Definición A.1.5. *Un espacio métrico X es* ***completo****, si toda sucesión de Cauchy en X converge en X.*

Si tenemos un espacio métrico (X, d) y $\mathrm{A} \subseteq X$, con $cl(\mathrm{A})$ denotamos la cerradura de A en el espacio X.
Ahora vamos a enunciar un criterio muy útil de cuándo un subconjunto A de un espacio métrico completo X es completo, pero para eso necesitamos de una Proposición.

Proposición A.1.6. *Sea A un subconjunto de X y sea $x \in X$. Entonces $x \in cl(\mathrm{A})$ si y sólo si existe una sucesión (x_k) tal que $x_k \in \mathrm{A}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y la sucesión (x_k) converge a x en X.*

Demostración. Si $x \in cl(\mathrm{A})$ entonces existe $x_k \in \mathrm{B}(x, \frac{1}{k}) \cap \mathrm{A}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Es decir, $x_k \in \mathrm{A}$ y $0 \leqslant d(x_k, x) \leqslant \frac{1}{k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, la sucesión (x_k) converge a x en X.
Sea ahora (x_k) una sucesión de puntos en A tal que converge a x en X, Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x) < \varepsilon$ para todo $k \geqslant k_0$. En particular, $x_{k_0} \in B(x, \varepsilon) \cap \mathrm{A}$. Por lo tanto $x \in cl(\mathrm{A})$. $\square$

Proposición A.1.7. *Sea X un espacio métrico completo. Un subespacio A de X es completo si y sólo si es cerrado en X.*

Demostración. Supongamos que A es cerrado en X. Sea (a_k) una sucesión de Cauchy en A. Entonces (a_k) es una sucesón de Cauchy en X y, como X es completo, $a_k \to x$ en X. Por la Proposición anterior $x \in cl(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$. Esto prueba que A es completo.
Supongamos ahora que A es completo. Sea $x \in cl(\mathrm{A})$. Por la Proposición anterior,

existe una sucesión (a_k) en A tal que $a_k \to x$ en X. La Proposición A.1.3 asegura entonces que (a_k) es de Cauchy y, como A es completo, se tiene que $a_k \to a$ en A. De la unicidad del límite se sigue que $x = a \in$ A. En consecuencia, A es cerrado. □

A.2. Convergencia uniforme

En esta sección daremos ejemplos importantes de espacios métricos completos. Empezaremos comparando ciertos tipos de convergencia para sucesiones de funciones.

Sea S un conjunto y sea (X, d) un espacio métrico.

Definición A.2.1. *Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, converge* ***puntualmente*** *en S a una función $f : S \to X$ si $f_k(z) \to f(z)$ en X para cada $z \in S$. Es decir, (f_k) converge puntualmente a f en S si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $z \in S$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε y de z) tal que*

$$d(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \ \forall k \geqslant k_0.$$

A la función f se le llama el ***límite puntual*** *de (f_k).*

El límite puntual de una sucesión de funciones continuas no es, por lo general, una función continua, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo A.2.2. *La sucesión de funciones $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = x^k$, converge puntualmente a la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & si \quad x = 1. \end{cases}$$

Daremos a continuación una noción de convergencia según la cual el límite de una sucesión de funciones continuas resultará ser una función continua.

Definición A.2.3. *Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, converge* ***uniformemente*** *en S a una función $f : S \to X$ si, dada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε) tal que*

$$d(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \ \forall k \geqslant k_0, \ \forall z \in S.$$

A *la función f se le llama el* ***límite uniforme*** *de (f_k).*

Notemos que esta noción es más fuerte que la de convergencia puntual, es decir, si (f_k) converge uniformemente a f, entonces converge puntualmente a f. El recíproco no es cierto pues la sucesión (f_k) del ejemplo A.2.2 no converge uniformemente en $[0, 1]$.

Con $\mathcal{B}(S, X)$ denotaremos el conjunto de todas las funciones $f : S \to X$ acotadas (una función $f : S \to X$ es acotada si existe $c > 0$ y $x_0 \in X$ tales que

$d(f(z), x_0) \leqslant c$ para toda $z \in S$). Se tiene que $\mathcal{B}(S, X)$ es un espacio métrico con la **métrica uniforme** d_∞ definida como $d_\infty(f, g) = \sup_{z \in S} d(f(z), g(z))$ para todo $f, g \in \mathcal{B}(S, X)$.

Resulta que para funciones acotadas la convergencia uniforme es simplemente la convergencia en el espacio métrico $(\mathcal{B}(S, X), d_\infty)$.

Proposición A.2.4. *Sea (f_k) una sucesión en $\mathcal{B}(S, X)$. Entonces, (f_k) converge uniformemente a f en S si y sólo si (f_k) converge a f en $(\mathcal{B}(S, X), d_\infty)$.*

Demostración. Si $f \in \mathcal{B}(S, X)$ y (f_k) converge a f en $(\mathcal{B}(S, X), d_\infty)$ entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_\infty(f_k, f) = \sup_{z \in S} d(f(z), g(z)) < \varepsilon, \ \forall k \geqslant k_0.$$

En consecuencia,

$$d(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \ \forall k \geqslant k_0, \ \forall z \in S.$$

Es decir, (f_k) converge uniformemente a f en S.
Recíprocamente, si (f_k) converge uniformemente a f en S entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_k(z), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall k \geqslant k_0, \ \ \forall z \in S.$$

Como f_{k_0} es acotada, existen $c > 0$ y $x_0 \in X$ tales que $d(f_{k_0}(z), x_0) < c$ para todo $z \in S$. En consecuencia

$$d(f(z), x_0) \leqslant d(f(z), f_{k_0}(z)) + d(f_{k_0}(z), x_0) < \varepsilon + c \ \forall z \in S.$$

Esto prueba que $f \in \mathcal{B}(S, X)$. Por una de las desigualdades anteriores se sigue que

$$d_\infty(f_k, f) = \sup_{z \in S} d(f_k(z), f(z)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ \forall k \geqslant k_0.$$

Es decir, (f_k) converge a f en $\mathcal{B}(S, X)$. □

El siguiente ejemplo muestra que, aún cuando una sucesión de funciones continuas converge puntualmente a una función continua, no necesariamente converge uniformemente.

Ejemplo A.2.5. *Sea $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la función dada por*

$$f_k(x) = \text{máx}\left\{ k - k^2 \left| x - \frac{1}{k} \right|, 0 \right\}.$$

La sucesión (f_k) converge puntualmente a 0, pero no converge uniformemente ya que

$$d_\infty(f_k, 0) = f_k\left(\frac{1}{k}\right) = k \to \infty.$$

La propiedad fundamental de la convergencia uniforme es la siguiente.

Proposición A.2.6. *Sean* (Z, d_Z) *y* (X, d_X) *espacios métricos. Si* $f_k : Z \to X$ *es continua para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y* (f_k) *converge uniformemente a* f *en* Z*, entonces* $f : Z \to X$ *es continua.*

Demostración. Sean $z_0 \in Z$ y $\varepsilon > 0$. Como (f_k) converge uniformemente a f, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall z \in Z, \forall k \geqslant k_0.$$

Y, como f_{k_0} es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(f_{k_0}(z), f_{k_0}(z_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } d_Z(z, z_0) < \delta.$$

Tomemos $z \in Z$ tal que $d_Z(z, z_0) < \delta$, en consecuencia,

$$\begin{aligned} d_X(f(z), f(z_0)) &\leqslant d_X(f(z), f_{k_0}(z)) + d_X(f_{k_0}(z), f_{k_0}(z_0)) + d_X(f_{k_0}(z_0), f(z_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que f es continua. □

El siguiente espacio jugará un papel importante.

Definición A.2.7. *Sean* Z *y* X *espacios métricos. El* ***espacio de funciones continuas y acotadas*** *de* Z *a* X *es el conjunto*

$$\mathcal{C}^*(Z, X) = \{f : Z \to X : f \text{ es continua y acotada}\}$$

con la métrica inducida por la de $(\mathcal{B}(Z, X), d_\infty)$*, es decir,*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{z \in Z} d_X(f(z), g(z))$$

si $f, g \in \mathcal{C}^*(Z, X)$.

Si K es un espacio métrico compacto, toda función continua de K en X es acotada. Para sucesiones de funciones continuas y acotadas podemos reinterpretar la Proposición A.2.6 como sigue.

Corolario A.2.8. *Sean* Z *y* X *espacios métricos. Entonces* $\mathcal{C}^*(Z, X)$ *es un subespacio cerrado de* $(\mathcal{B}(Z, X), d_\infty)$.

Demostración. Sea $f \in cl(\mathcal{C}^*(Z, X))$. Por la Proposición A.1.6 existe una sucesión (f_k) en $\mathcal{C}^*(Z, X)$ tal que $f_k \to f$ en $\mathcal{B}(Z, X)$. La Proposición A.2.6 asegura entonces que $f \in \mathcal{C}^*(Z, X)$. Esto prueba que $\mathcal{C}^*(Z, X)$ es cerrado en $\mathcal{B}(Z, X)$. □

A.3. Espacios de funciones completos

A continuación daremos un criterio que garantiza la convergencia uniforme de una sucesión de funciones en términos de la sucesión misma.
Sea S un conjunto y (X, d_X) un espacio métrico.

Definición A.3.1. *Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, es **uniformemente de Cauchy** en S si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d_X(f_k(z), f_j(z)) < \varepsilon \ \forall j, k \geqslant k_0, \ \forall z \in S.$$

El siguiente Teorema nos da una condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme de una sucesión de funciones.

Teorema A.3.2. ***(Criterio de convergencia uniforme de Cauchy)*** *Sea X un espacio métrico completo. Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, converge uniformemente en S si y sólo si (f_k) es uniformemente de Cauchy en S.*

Demostración. Si (f_k) converge uniformemente a f en S, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall k \geqslant k_0, \ \forall z \in S.$$

En consecuencia,
$d_X(f_k(z), f_j(z)) \leqslant d_X(f_k(z), f(z)) + d_X(f(z), f_j(z)) < \varepsilon \ \forall k, j \geqslant k_0, \ \forall z \in S.$
Es decir, (f_k) es uniformemente de Cauchy.
Supongamos ahora que (f_k) es uniformemente de Cauchy en S. Entonces, para cada $z \in S$, la sucesión $(f_k(z))$ es de Cauchy en X y, como X es completo, esta sucesión converge a un punto de X al que detonaremos por $f(z)$. Probaremos ahora que $f_k \to f$ uniformemente en S. Sea $\varepsilon > 0$. Como (f_k) es uniformemente de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(f_k(z), f_j(z)) < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall k, j \geqslant k_0, \ \forall z \in S.$$

Y como para cada $z \in S$ se tiene que $f_j(z) \to f(z)$ en X, existe $j_z \in \mathbb{N}$ (que depende de z) tal que

$$d_X(f_j(z), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall j \geqslant j_z.$$

Dadas $k \geqslant k_0$ y $z \in S$, tomemos j=máx$\{k_0, j_z\}$. Entonces

$$d_X(f_k(z), f(z)) \leqslant d_X(f_k(z), f_j(z)) + d_X(f_j(z), f(z)) < \varepsilon \ \forall k \geqslant k_0, \ \forall z \in S.$$

En consecuencia,

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \ \forall k \geqslant k_0, \ \forall z \in S,$$

es decir, (f_k) converge uniformemente a f. □

Una consecuencia importante del Teorema anterior es la siguiente.

Corolario A.3.3. *Sea S un conjunto, Z un espacio métrico y X un espacio métrico competo. Entonces los espacios $(\mathcal{B}(S, X), d_\infty)$ y $(\mathcal{C}_b^0(Z, X), d_\infty)$ son completos.*

Demostración. Sea (f_k) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(S,X)$. Claramente (f_k) es uniformemente de Cauchy en S y, por el Teorema A.3.2, (f_k) converge en $(\mathcal{B}(S,X),d_\infty)$. Esto prueba que $(\mathcal{B}(S,X),d_\infty)$ es completo. Por el Colorario A.2.8, $(\mathcal{C}^*(Z,X),d_\infty)$ es un subconjunto cerrado $\mathcal{B}(Z,X)$. La Proposición A.1.7 asegura entonces que $(\mathcal{C}^*(Z,X),d_\infty)$ es completo. □

A.4. Conjuntos totalmente acotados

Sea (X,d_X) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$.

Definición A.4.1.

*(1) La **bola abierta** en X con centro en x_0 y radio ε es el conjunto*

$$\mathrm{B}(x_0,\varepsilon) = \{x \in X \ : d(x,x_0) < \varepsilon\},$$

*(2) La **bola cerrada** en X con centro en x_0 y radio ε es el conjunto*

$$\widehat{\mathrm{B}}(x_0,\varepsilon) = \{x \in X \ : d(x,x_0) \leqslant \varepsilon\}.$$

Estudiaremos a los subconjuntos de X que tienen la siguiente propiedad.

Definición A.4.2. *Un subconjunto* A *de* X *es* ***totalmente acotado*** *(o precompacto) si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe un número finito de puntos* $a_1,...,a_n \in \mathrm{A}$ *tales que*

$$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}(a_1,\varepsilon) \cup \cdots \cup \mathrm{B}(a_n,\varepsilon).$$

Veamos algunas propiedades sencillas de los conjuntos totalmente acotados.

Proposición A.4.3.

(a) Todo subconjunto compacto de X es totalmente acotado.

(b) Todo subconjunto totalmente acotado de X es acotado.

(c) Todo subconjunto de un conjunto totalmente acotado es, a su vez, totalmente acotado.

(d) La cerradura en X de un conjunto totalmente acotado es totalmente acotada.

Demostración. (a) Si $K \subseteq X$ es compacto entonces, para toda $\varepsilon > 0$, la cubierta abierta $\{\mathrm{B}(x,\varepsilon) : x \in K\}$ de K contiene una subcubierta finita. Es decir, existen $x_1,...,x_m \in K$ tales que

$$K \subseteq \mathrm{B}(x_1,\varepsilon) \cup \cdots \cup \mathrm{B}(x_m,\varepsilon).$$

Por lo tanto K es totalmente acotado.

(b) Si $\mathrm{A} \subseteq X$ es totalmente acotado, entonces existen $m \in \mathbb{N}$ y $a_1,....,a_m \in \mathrm{A}$ tales que

$$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}(a_1, 1) \cup \cdots \cup \mathrm{B}(a_m, 1).$$

En consecuencia, $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}(a_1, r+1)$ donde $r = \text{máx}\{d_X(a_1, a_j) : j = 2, ..., m\}$, es decir, A es acotado.

(c) Sea A un subconjunto totalmente acotado, sea $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{A}$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, ..., a_m \in \mathrm{A}$ con la propiedad de que

$$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}\left(a_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \cdots \cup \mathrm{B}\left(a_m, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Sea $J = \{j \in \{1, ..., m\} \ : \mathrm{B}\left(a_j, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap D \neq \emptyset\}$. Para cada $j \in J$ elegimos un punto $b_j \in \mathrm{B}\left(a_j, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathrm{D}$. Entonces se cumple que

$$\mathrm{D} \subseteq \bigcup_{j \in J} \mathrm{B}(b_j, \varepsilon).$$

Esto prueba que D es totalmente acotado.

(d) Sea A un subconjunto totalmente acotado, sea $\varepsilon > 0$, y sean $a_1, ..., a_m \in \mathrm{A}$ tales que

$$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}\left(a_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \cdots \cup \mathrm{B}\left(a_m, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Como $\widehat{B}\left(a_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \cdots \cup \widehat{B}\left(a_m, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ es cerrado, se tiene que

$$cl(\mathrm{A}) \subseteq \widehat{B}\left(a_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \cdots \cup \widehat{B}\left(a_m, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

En consecuencia,

$$cl(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{B}(a_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup \mathrm{B}(a_m, \varepsilon).$$

Esto prueba que $cl(\mathrm{A})$ es totalmente acotado.

□

El siguiente resultado da caracterizaciones muy útiles de los compactos.

Teorema A.4.4. *Para un espacio métrico $X = (X, d_X)$, las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:*

(a) X es compacto.

(b) Toda sucesión en X contiene una subsucesión que converge en X.

(c) X es completo y totalmente acotado.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea (x_k) una sucesión en X. Probaremos primero que existe un punto $y_0 \in X$ tal que, para toda $\varepsilon > 0$, la bola abierta $\mathrm{B}(y_0, \varepsilon)$ con centro en y_0 y radio ε contiene alguna subsucesión de (x_k).
Argumentando por contradicción, supongamos que para cada $y \in X$ existe $\varepsilon_y > 0$ tal que $\mathrm{B}(y, \varepsilon_y)$ no contiene ninguna subsucesión de (x_k). Entonces existe $k_y \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que

$$x_k \notin \mathrm{B}(y, \varepsilon_y), \forall k \geqslant k_y.$$

Como X es compacto, la cubierta abierta $\mathcal{C} = \{\mathrm{B}(y, \varepsilon_y) \ : y \in X\}$ de X contiene una subcubierta finita, es decir, existen $y_1, ..., y_m \in X$ tales que

$$X \subseteq \mathrm{B}(y_1, \varepsilon_{y_1}) \cup \cdots \cup \mathrm{B}(y_m, \varepsilon_{y_m}).$$

Esto implica que $x_k \notin X$ para todo $k \geqslant$máx$\{k_{y_1}, ..., k_{y_m}\}$, lo cual es falso.
Así pues, existe $y_0 \in X$ tal que toda bola abierta con centro en y_0 contiene a una subsucesión de (x_k). Esto nos permite escoger, recursivamente, un punto $x_{k_j} \in \mathrm{B}(y_0, \frac{1}{j})$ tal que $k_j > k_{j-1}$. La sucesión (x_{k_j}) es una subsucesión de (x_k) que converge a y_0.
$(b) \Rightarrow (c)$ Sea (x_k) una sucesión de Cauchy en X. Si X satisface (b) entonces (x_k) contiene una subsucesión que converge a un punto $x \in X$. Como la sucesión es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, entonces (x_k) converge a x en X. Esto prueba que X es completo.
Supongamos ahora que X no es totalmente acotado. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que X no puede ser cubierto por un número finito de bolas abiertas de radio ε_0. Por consiguiente, podemos escoger, inductivamente, una sucesión de puntos $x_k \in X$ tales que

$$x_k \notin \mathrm{B}(x_1, \varepsilon_0) \cup \cdots \cup \mathrm{B}(x_{k-1}, \varepsilon_0).$$

Por tanto, $d_X(x_j, x_k) \geqslant \varepsilon_0$ para toda $j \neq k$ y, en consecuencia, ninguna subsucesión de (x_k) es de Cauchy. Esto implica que (x_k) no contiene ninguna subsucesión convergente lo cual no puede pasar por hipótesis. Por lo tanto X es totalmente acotado.
$(c) \Rightarrow (a)$ Argumentando por contradicción, supongamos que X es completo y totalmente acotado pero no es compacto. Entonces X tiene una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ que no contiene ninguna subcubierta finita. Como X es totalmente acotado, está contenido en un número finito de bolas abiertas de radio 1. Por tanto, existe un punto $x_0 \in X$ tal que $\mathrm{B}(x_0, 1)$, no puede ser cubierta por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Como $\mathrm{B}(x_0, 1)$ es totalmente acotado, está contenido en un número finito de bolas abiertas de radio $\frac{1}{2}$ cuyos centros están en $\mathrm{B}(x_0, 1)$. Por consiguiente, existe $x_1 \in \mathrm{B}(x_0, 1)$ tal que $\mathrm{B}(x_1, \frac{1}{2})$, no puede ser cubierta por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. De este modo construímos, recursivamente, una sucesión (x_k) tal que $x_k \in \mathrm{B}(x_{k-1}, \frac{1}{2^{k-1}})$ y $\mathrm{B}(x_k, \frac{1}{2^k})$ no puede ser cubierta por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Para toda $j \geqslant k$, se tiene entonces que

$$d_X(x_k, x_j) \leqslant d_X(x_k, x_{k+1}) + \cdots + d_X(x_{j-1}, x_j) < \tfrac{1}{2^k} + \cdots + \tfrac{1}{2^{j-1}} < \tfrac{1}{2^{k-1}},$$

es decir, la sucesión (x_k) es de Cauchy. Como X es completo, esta sucesión converge a un punto x^* en X. Haciendo tender $j \to \infty$ en la desigualdad obtenemos que

$$d_X(x_k, x^*) \leqslant \tfrac{1}{2^{k-1}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, como $x^* \in X$, existe $U^* \in \mathcal{U}$ tal que $x^* \in U^*$. Como U^* es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathrm{B}(x^*, \varepsilon) \subseteq U^*$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, para todo $x \in \mathrm{B}(x_k, \frac{1}{2^k})$, se tiene que

$$d_X(x, x^*) \leqslant d_X(x, x_k) + d_X(x_k, x^*) < \tfrac{1}{2^k} + \tfrac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon,$$

es decir,

$$\mathrm{B}(x_k, \tfrac{1}{2^k}) \subseteq \mathrm{B}(x^*, \varepsilon) \subseteq U^*.$$

Esto es una contradicción, ya que habíamos supuesto que $\mathrm{B}(x_k, \frac{1}{2^k})$ no puede ser cubierta por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Por lo tanto X es compacto. □

Definición A.4.5. *Un subconjunto* A *de* X *es* ***relativamente compacto*** *(en* X*) si su cerradura* $cl(\mathrm{A})$ *en* X *es compacta.*

Los subconjuntos relativamente compactos de $\mathbb{R}^n$ son precisamente aquellos que son acotados. Para un espacio métrico arbitrario se cumple lo siguiente.

Corolario A.4.6. *Un subconjunto* A *de un espacio métrico completo* X *es relativamente compacto si y sólo si es totalmente acotado.*

Demostración. Sea A relativamente compacto en X. Entonces se tiene que $cl(\mathrm{A})$ es compacta en X de donde por la Proposicón A.4.3 implica entonces que $cl(\mathrm{A})$ es totalmente acotado y, en consecuencia, que A también lo es.
Inversamente, supongamos que A es totalmente acotado. La Proposición A.4.3 afirma que $cl(\mathrm{A})$ es totalmente acotado. Por otra parte, como X es completo y $cl(\mathrm{A})$ es cerrado en X, se tiene que $cl(\mathrm{A})$ es completo. El Teorema A.4.4 asegura entonces que $cl(\mathrm{A})$ es compacto. □

A.5. El Teorema de aproximación de Weierstrass

Cuando hacemos cálculos con números reales usamos siempre una aproximación decimal del estos, es decir, usamos algún número racional suficientemente cercano al número real que nos interesa.
En este capítulo probaremos que toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se puede aproximar uniformemente, tanto como queramos, por una función polinomial. Este resultado se conoce como el Teorema de Aproximación de Weierstrass. Tiene gran relevancias desde el punto de vista teórico y práctico, dado que los polinomios son las funciones continuas más simples, susceptibles de ser evaluadas por una computadora.

El objetivo de esta sección es demostrar que toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se puede aproximar uniformemente por polinomios, es decir, por funciones de la forma

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Este resultado se le conoce como el Teorema de Aproximación de Weierstrass. Más aún, exhibiremos una sucesión explícita de polinomios que converge uniformemente a la función f en $[a,b]$.

Para $0 \leqslant k \leqslant n$ consideremos los polinomios (Observe la Figura 3)

$$\gamma_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k},$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

es el coeficiente binomial. De la conocida fórmula binomial

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

se sigue que

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_{n,k}(t) = 1. \tag{A.1}$$

Multiplicando por t la igualdad (A.1), con $n-1$ en lugar de n, obtenemos

$$\begin{aligned}
t &= t\sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n-1,k}(t) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^{j+1}(1-t)^{n-1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j+1}{n} \binom{n}{j+1} t^{j+1}(1-t)^{n-(j+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \gamma_{n,k}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \gamma_{n,k}(t).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$nt = \sum_{k=0}^{n} k\gamma_{n,k}(t). \tag{A.2}$$

De manera análoga, multiplicando pot t^2 la igualdad (A.1) con $n-2$ en vez de n, es sencillo probar que

$$(n^2 - n)t^2 = \sum_{k=0}^{n} (k^2 - k)\gamma_{n,k}(t). \tag{A.3}$$

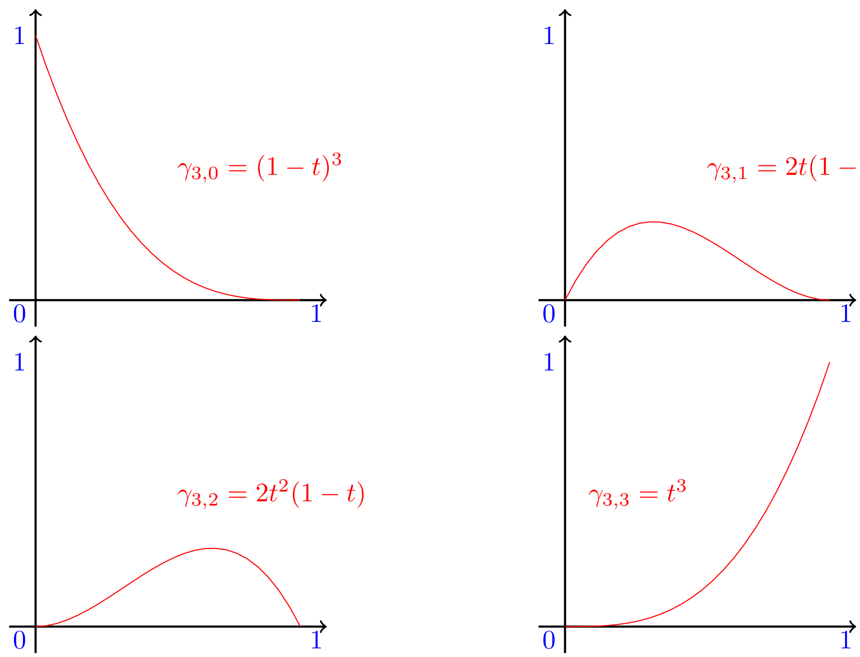


Figura 3. Esbozo del comportamiento del polinomio $\gamma_{3,n}$ para $n = 0, 1, 2, 3$.

Definición A.5.1. *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. El* ***n-ésimo polinomio de Bernstein de*** f *es el polinomio*

$$\beta_n(t) = \beta_{f,n}(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\gamma_{n,k}(t).$$

Teorema A.5.2. ***(de aproximación de Bernstein)*** *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. La sucesión de polinomios de Bernstein $(\beta_{f,n})$ converge uniformemente a f en $[0,1]$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad si \ \ |s - t| < \delta. \tag{A.4}$$

Multiplicando la igualdad (A.1) por $f(t)$ obtenemos que

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} f(t)\gamma_{n,k}(t).$$

Así, para cada $t \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$|f(t)-\beta_{f,n}(t)| = \left|\sum_{k=0}^{n}(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right))\gamma_{n,k}(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\gamma_{n,k}(t). \quad (A.5)$$

Probaremos que el lado derecho de esta desigualdad es menor que ε si n satisface

$$n \geqslant \text{máx}\left\{\frac{1}{\delta^4}, \frac{\|f\|_\infty^2}{\varepsilon^2}\right\}. \quad (A.6)$$

Para cada $t \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$ consideremos los conjuntos

$$I_1 = \left\{k \in \mathbb{N} \ : \ 0 \leqslant k \leqslant n, \ \left|\frac{k}{n} - t\right| < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}$$
$$I_2 = \{k \in \mathbb{N} \ : \ 0 \leqslant k \leqslant n, \ , k \notin I_1\}.$$

Si n satisface (A.6), entonces $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}} < \delta$, y se sigue de (A.4) y de (A.1) que

$$\sum_{k\in I_1}\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\gamma_{n,k}(t) < \sum_{k\in I_1}\frac{\varepsilon}{2}\gamma_{n,k}(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (A.7)$$

Por otra parte, si $k \in I_2$ entonces $\left(t - \frac{k}{n}\right)^{-2} \leqslant \sqrt{n}$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in I_2}\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\gamma_{n,k}(t) &\leqslant \sum_{k\in I_2}2\|f\|_\infty\gamma_{n,k}(t) \\
&= 2\|f\|_\infty\sum_{k\in I_2}\frac{\left(t-\frac{k}{n}\right)^2}{\left(t-\frac{k}{n}\right)^2}\gamma_{n,k}(t) \\
&\leqslant 2\|f\|_\infty\sqrt{n}\sum_{k\in I_2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\gamma_{n,k}(t). \quad (A.8)
\end{aligned}$$

Probaremos ahora que

$$\sum_{k=0}^{n}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\gamma_{n,k}(t) \leqslant \frac{1}{4n}. \quad (A.9)$$

Multiplicando la igualdad (A.1) por t^2, la igualdad (A.2) por $-\frac{2}{n}t$, y la suma de las igualdades (A.2) y (A.3) por $\frac{1}{n^2}$ obtenemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} t^2 &= \sum_{k=0}^{n} t^2 \gamma_{n,k}(t), \\ -2t^2 &= \sum_{k=0}^{n} -2\frac{k}{n} t \gamma_{n,k}(t), \\ \left(1-\frac{1}{n}\right) t^2 + \frac{1}{n} t &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \gamma_{n,k}(t). \end{aligned}$$

Sumando estas tres igualdades obtenemos

$$\frac{1}{n}(t-t^2) = \sum_{k=0}^{n} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 \gamma_{n,k}(t). \tag{A.10}$$

Notemos que $\max_{t\in[0,1]}(t-t^2) \leqslant \frac{1}{4}$. En consecuencia, (A.10) implica (A.9). Si n satisface (A.6), entonces $\frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{n}} \leqslant \varepsilon$. Por tanto, (A.8) y (A.9) implican que

$$\sum_{k\in I_2} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \gamma_{n,k}(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

De esta desigualdad, junto con (A.5) y (A.7), obtenemos que

$$\begin{aligned} |f(t) - \beta_{f,n}(t)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \gamma_{n,k}(t) \\ &= \sum_{k\in I_1} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \gamma_{n,k}(t) + \sum_{k\in I_2} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \gamma_{n,k}(t) < \varepsilon \end{aligned}$$

para toda $t \in [0,1]$, si n satisface (A.6). es decir,

$$\|f - \beta_{f,n}\|_\infty < \varepsilon \quad si \;\; n \geqslant \max\left\{\frac{1}{\delta^4}, \frac{\|f\|_\infty^2}{\varepsilon^2}\right\}. \tag{A.11}$$

Esto concluye la demostración. □

Observa que la fórmula (A.11) nos da una estimación del error, en términos de f, en cada paso de la aproximación.
Una consecuencia inmediata del Teorema de Aproximación de Bernstein es el siguiente resultado importante.

Corolario A.5.3. ***(Teorema de Aproximación de Weierstrass)*** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una sucesión de polinomios (p_n) que converge uniformemente a f en $[a,b]$.*

Demostración. La función $\rho : [0,1] \to [a,b]$ dada por $\rho(t) = (1-t)a + tb$ es un homeomorfismo. Sea $g = f \circ \rho$, la cual es una función continua definida en el $[0,1]$. Por el Teorema anterior, se tiene que

$$\beta_{g,n} \to g \text{ uniformemente en } [0,1].$$

La función $p_n = \beta_{g,n} \circ \rho^{-1}$ es continua en $[a,b]$ y es el polinomio de grado n

$$p_n(s) = \beta_{g,n}\left(\frac{s-a}{b-a}\right) = \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\gamma_{n,k}\left(\frac{s-a}{b-a}\right)$$

Dado que

$$|p_n(s) - f(s)| = |\beta_{g,n}(\rho^1(s)) - g(\rho^{-1}(s))| \quad \forall s \in [a,b],$$

concluímos que

$$\|p_n - f\|_\infty = \|\beta_{g,n} - g\|_\infty.$$

En consecuencia, $p_n \to f$ en $(\mathcal{C}^0[a,b], d_\infty)$. $\square$

La compacidad del dominio de f jugó un papel importante en la demostración del Teorema A.5.2 para asegurar la continuidad uniforme de f. El siguiente ejemplo muestra que el Colorario A.5.3 no es válido, en general, si el dominio no es compacto.

Ejemplo A.5.4. *Sea* $f(t) = sen\left(\frac{1}{t}\right)$, $t \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right]$. *Ninguna sucesión de polinomios converge a* f *en* $\mathcal{C}^0\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$.

Demostración. Argumentando por contradicción, supongamos que existe una sucesión de polinomios (p_k) que converge a f en $\mathcal{C}^0\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$. Entonces (p_k) es de Cauchy en $\mathcal{C}^0\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$. Por lo tanto, dada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|p_k(t) - p_j(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right], \ \forall k, j \geqslant k_0.$$

Como la función $t \to |p_k(t) - p_j(t)|$ es continua en $\mathbb{R}$, la desigualdad anterior implica que

$$|p_k(0) - p_j(0)| \leqslant \varepsilon \ \ \forall k, j \geqslant k_0,$$

en consecuencia, (p_k) es de Cauchy en $\mathcal{C}^0\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ y, como $\mathcal{C}^0\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ es completo, existe $g \in \mathcal{C}^0\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ tal que

$$p_k \to g \text{ en } \mathcal{C}^0\left[0, \frac{2}{\pi}\right].$$

Concluímos entonces que

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} p_k(t) = f(t) = sen\left(\frac{1}{t}\right) \quad \forall t \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right]$$

y, como g es continua en $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$, obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{2}{n\pi}\right) = g(0).$$

Esto es una contradicción, ya que la sucesión $\left(sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$ no converge.

$\square$

APÉNDICE $\mathcal{B}$

Conceptos básicos de Topología general

B.1. Espacios topológicos

Daremos el nombre de topología en un conjunto dado X, a una colección de subconjuntos de X que tenga ciertas características que nos permitan medir de alguna manera la cercanía o lejanía de los objetos que pertenecen a X con respecto a un subconjunto fijo $E \subseteq X$. Por ejemplo, deseamos determinar cuándo un punto $x \in X$ se encuentra "adherido" o "pegado" a un subconjunto dado E, o cuándo un subconjunto A de X está "lejos" de E.

Definición B.1.1. *Una* ***topología*** *en un conjunto X es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:*

(A_1) *el conjunto vacío $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{T}$,*

(A_2) *si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{T}$, entonces $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{T}$,*

(A_3) *si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.*

Definición B.1.2. *Si $\mathcal{T}$ es una topología en X, a la pareja $(X, \mathcal{T})$ le llamaremos* ***espacio topológico****, y los elementos que pertenecen a $\mathcal{T}$ reciben el nombre de* ***subconjuntos abiertos*** *de X.*

Obsérvese que la condición (A_2) de la definición B.1.1 implica, usando un proceso inductivo, que la intersección de cualquier subcolección finita de elementos de $\mathcal{T}$, también es un elemento de $\mathcal{T}$.

Los primeros intentos por definir estructuras topológicas se deben a M. Fréchet y a F. Riesz entre los años 1906 y 1908. La primera definición satisfactoria al respecto fue dada por F. Haudorff en 1914 en términos de sistemas de vecindades.

Ejemplos B.1.3.

(1) *Sea* $X = \{a, b, c\}$. *La colección* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ *es una topología en* X.

(2) *Para cualquier conjunto* X, *la colección* $\mathcal{P}(X)$ *de todos sus posibles subconjuntos satisface los axiomas que define una topología. A ésta le llamaremos topología discreta en* X, *y a la pareja* $(X, \mathcal{P}(X))$ *espacio discreto* X.

(3) *También es fácil verificar que la colección* $\{\emptyset, X\}$ *es una topología en un conjunto dado* X. *A ésta le llamamos topología indiscreta en* X, *y* $(X, \{\emptyset, X\})$ *es un espacio indiscreto.*

(4) *Ahora describiremos la topología cofinita. Sea* X *un conjunto cualquiera y*

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X : X \setminus E \textit{ es un conjunto finito}\}.$$

De las fórmulas de De Morgan se desprende que $\mathcal{T}$ *es una topología en* X. *En efecto, la condición* (A_1) *de la definición B.1.1, se satisface trivialmente. Ahora, si* A, B *son elementos no vacíos en* $\mathcal{T}$, *entonces* $X \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = (X \setminus \mathrm{A}) \cup (X \setminus \mathrm{B})$ *es un conjunto finito ya que la unión de dos conjuntos finitos es un conjunto finito; por lo tanto,* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{T}$. *Por último tenemos que si* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$, *o bien* $\mathcal{A} \subseteq \{\emptyset\}$, *en cuyo caso* $\bigcup \mathcal{A} = \emptyset \in \mathcal{T}$, *o bien existe un elemento no vacío* $\mathrm{A}_0 \in \mathcal{A}$, *y entonces* $X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus \mathrm{A} : \mathrm{A} \in \mathcal{A}\} \subseteq X \setminus \mathrm{A}_0$. *Como* $X \setminus \mathrm{A}_0$ *es finito, así también lo es* $X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, *y por lo tanto* $\bigcup \mathcal{A}$ *pertenece a* $\mathcal{T}$.

Dado un espacio métrico (X, d), podemos generar, con la métrica d, una topología en X de la siguiente forma. Para cada $x \in X$ y cada número real positivo r, tomamos el conjunto $\mathrm{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. A este conjunto le llamaremos **la bola abierta de radio r y centro en x** (Observe la Figura 4).

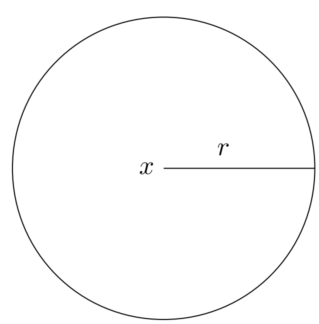


Figura 4. La bola con centro en x y radio r.

Definimos entonces

$$\mathcal{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X : E \text{ es la unión de bolas abiertas}\}.$$

La colección $\mathcal{T}_d$ es una topología en X que llamaremos topología en X inducida por la métrica d.

Verifiquemos que en efecto $\mathcal{T}_d$ satisface la condición (A_2) de la definicón B.1.1. Sean $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ dos elemetos de $\mathcal{T}_d$. En el caso en que $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 = \emptyset$, el resultado se sigue inmediatamente. En caso contrario, para cada $x \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$, existen $x_1, x_2 \in X$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $x \in \mathrm{B}(x_1, r_1) \subseteq \mathrm{E}_1$ y $x \in \mathrm{B}(x_2, r_2) \subseteq \mathrm{E}_2$. Ahora, el lector puede convencerse de que existe $r_x \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathrm{B}(x, r_x) \subseteq \mathrm{B}(x_1, r_1) \cap \mathrm{B}(x_2, r_2)$. De esto se desprende que $x \in \mathrm{B}(x, r_x) \subseteq \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$. Esto significa que $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 = \bigcup\{\mathrm{B}(x, r_x) : x \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2\}$; es decir, $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$ es la unión de bolas abiertas, y por lo tanto pertenece a $\mathcal{T}_d$.
El lector puede verificar que también las otras dos condiciones en la definición B.1.1 se cumplen para $\mathcal{T}_d$.

B.2. Bases y Subbases

Definición B.2.1. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una subcolección $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ es **una base** para $\mathcal{T}$ si para cada elemento $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$ existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{A} = \bigcup \mathcal{A}$.*

Trivialmente, $\mathcal{T}$ misma es una base para $(X, \mathcal{T})$. Además, recuerde que el conjunto vacío $\emptyset$ está contenido en cualquier otro conjunto, y $\bigcup \emptyset = \emptyset$; de tal manera que el conjunto $\emptyset \in \mathcal{T}$ se logra recuperar por medio de la unión de los elementos de la subcolección $\emptyset$ de la base $\mathcal{B}$.
Para un espacio métrico (X, d), se tiene que la colección de bolas abiertas en X, $\mathcal{B}_d$=$\{\mathrm{B}(x, r)\ x \in X \text{ y } r \in \mathbb{R}^+\}$, es una base de $(X, \mathcal{T}_d)$. A continuación exhibiremos una caracterización bastante útil de las bases.

Proposición B.2.2. ***(Caracterización de las bases)*** *Una subcolección $\mathcal{B}$ de una topología $\mathcal{T}$ en X es una base de $\mathcal{T}$ si y sólo si para cada $\mathrm{A} \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ y cada $x \in \mathrm{A}$ existe $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$ con la propiedad $x \in \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$, $\mathrm{A} \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ y $x \in \mathrm{A}$. Por definición, podemos encontrar $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{A} = \bigcup \mathcal{A}$. Esto significa que para algún $\mathrm{B} \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ se cumple que $x \in \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$.
Recíprocamente, sea $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$ no vacío. Para cada $x \in \mathrm{A}$ podemos encontrar $\mathrm{B}_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathrm{B}_x \subseteq \mathrm{A}$. Resulta entonces que $\mathrm{A} = \bigcup\{\mathrm{B}_x : x \in \mathrm{A}\}$. □

Observación B.2.3. *Obsérvese que si $\mathcal{B}$ es una base de una topología $\mathcal{T}$ en X, entonces $\mathcal{B}$ debe de cubrir a X (es decir, $\bigcup \mathcal{B} = X$) y para cada subcolección finita $\mathrm{B}_1, ..., \mathrm{B}_n \in \mathcal{B}$, si $x \in \mathrm{B}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{B}_n$, entonces debe de existir un elemento B de $\mathcal{B}$ que satisfaga que $x \in \mathrm{B} \subseteq \mathrm{B}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{B}_n$.*

Definición B.2.4. *Una subcolección $\mathcal{S}$ de una topología $\mathcal{T}$ en X es **una subbase** para $(X, \mathcal{T})$ si $\mathcal{B}$=$\{\bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S} \text{ y } 0 < |\mathcal{A}| < \aleph_0\}$ es una base para $\mathcal{T}$. Es decir, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ es una subbase para $\mathcal{T}$ si, y sólo si, para cada $\mathrm{A} \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ y cada $x \in \mathrm{A}$ existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ finita no vacía tal que $x \in \bigcap \mathcal{A} \subseteq \mathrm{A}$.*

Es claro que la colección de intersecciones de subcolecciones finitas de una topología $\mathcal{T}$, reproducen a $\mathcal{T}$, de tal manera que $\mathcal{T}$ es un ejemplo evidente de subbase de ella misma. También, usando la observación B.2.3 podemos con facilidad concluir que cada base de una topología $\mathcal{T}$, constituye una subbase de $\mathcal{T}$.

B.3. Subespacios

Supongamos que $\mathcal{T}$ es una topología definida sobre un conjunto X y que Y es un subconjunto de X. Lo que nos interesa es que $\mathcal{T}$ proporciona una forma de medir qué tan cercanos a Y se encuentran otros objetos contenidos en X, así que una forma natural de proporcionarle a Y una noción de cercanía es la siguiente: para cada $\mathrm{A} \subseteq Y$ fijo, $\mathrm{B} \subseteq Y$ esta cercano a A en Y si, considerados como objetos de X, B está cercano a A. A continuación vamos a analizar algunas consecuencias de esta idea.

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y dado $\mathrm{Y} \subseteq X$, definimos la colección

$$\mathcal{T} \restriction_{\mathrm{Y}} = \{\mathrm{A} \cap \mathrm{Y} : \mathrm{A} \in \mathcal{T}\}.$$

Proposición B.3.1. $\mathcal{T} \restriction_{\mathrm{Y}}$ *es una topología en* Y.

Demostración. Como $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, tenemos que $\emptyset, Y \in \mathcal{T} \restriction_{\mathrm{Y}}$. Si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{T}$, entonces $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{T}$ y $(\mathrm{A} \cap \mathrm{Y}) \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{Y}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{Y}$. Y para concluir, si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\bigcup\{\mathrm{A} \cap \mathrm{Y} : A \in \mathcal{A}\} = (\bigcup \mathcal{A}) \cap \mathrm{Y}$. □

A $\mathcal{T} \restriction_{\mathrm{Y}}$ le llamaremos **topología relativa** en Y con respecto a $(X, \mathcal{T})$, y diremos que $(\mathrm{Y}, \mathcal{T} \restriction_{\mathrm{Y}})$, es un subespacio de $(X, \mathcal{T})$.

El resultado siguiente nos proporciona un método para generar bases y subbases para los subespacios de un espacio dado.

Proposición B.3.2. *Sean* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico y* $\mathrm{Y} \subseteq X$. *Entonces:* *Si* $\mathcal{B}$ *es una base (subbase) para* $\mathcal{T}$, *entonces* $\mathcal{B}_{\mathrm{Y}} = \{\mathrm{B} \cap \mathrm{Y} : B \in \mathcal{B}\}$ *es una base (subbase) para* $\mathcal{T} \restriction_{\mathrm{Y}}$.

Demostración. Las demostraciones de los hechos mencionados en la Proposición son muy similares entre sí, de tal modo que sólo desarrollaremos la demostración de uno de ellos a manera de ejemplo. Supongamos, pues, que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$. Dado $\mathrm{A} \in \mathcal{T} \restriction_{\mathrm{Y}}$ debe existir $\mathrm{A}^{+} \in \mathcal{T}$ de tal modo que $\mathrm{A} = \mathrm{A}^{+} \cap \mathrm{Y}$. Por nuestra suposición, debe existir $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ de tal manera que $\mathrm{A}^{+} = \bigcup \mathcal{A}$ y, por ende, $\mathrm{A} = \bigcup \mathcal{A}^{+}$, donde $\mathcal{A}^{+}$=$\{\mathrm{B} \cap \mathrm{Y}\text{: } \mathrm{B} \in \mathcal{A}\}$$\subseteq \mathcal{B}_{Y}$. □

B.4. Continuidad y Homeomorfismos

Uno de los conceptos básicos más importantes en topología es el de función continua. Intuitivamente, una función f definida sobre un espacio topológico X y con valores en otro espacio topológico Y, es continua en un punto x_0 de X si manda puntos cercanos a x_0 en puntos cercanos a $f(x_0)$.

En esta sección, generalizaremos esta idea a espacios topológicos y estableceremos de manera formal la noción de continuidad y exploraremos algunas de sus consecuencias.

Definiciones B.4.1. *Sea f una función cuyo dominio X y codominio Y son espacios topológicos.*

(1) *Diremos que f es* ***continua en el punto x_0*** *de X si para cualquier subconjunto abierto A de Y que contiene a $f(x_0)$, existe un subconjunto abierto B de X que contiene a x_0 y que satisface $f(B) \subseteq A$.*

(2) *En el caso en que f sea continua en todos los puntos de X, se dirá simplemente que f es continua.*

Observaciones B.4.2.

(1) *Si $\mathcal{B}_0$ y $\mathcal{B}_1$ son bases para X y Y, respectivamente, entonces la función $f : X \to Y$ es continua en x_0 si, y sólo si, cada vez que $A \in \mathcal{B}_1$ y $f(x_0) \in A$, se tiene que existe $B \in \mathcal{B}_0$ de tal forma que $x_0 \in B$ y $f(B) \subseteq A$. En otras palabras, la continuidad de cualquier función puede ser comprobada empleando bases.*

(2) *Si suponemos que X y Y son espacios métricos, entonces las colecciones de bolas abiertas forman bases para ellos, así que la continuidad de f en x_0 puede ser comprobada usando bolas abiertas.*

Ejemplos B.4.3.

(a) *Sean X y Y espacios topológicos y b un elemento de Y. Si f es la función constante b de X en Y ($f(x)=b$ para cualquier $x \in X$), entonces f es continua pues $f(X) \subseteq A$ siempre que $b \in A \subseteq Y$.*

(b) *Consideremos $b \in \mathbb{R}^n$. Definimos la función traslación por b como $T_b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuya regla es $T_b(x) = x + b$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Por la observación B.4.2 se tiene que T_b es una función continua, además no es muy difícil justificar que T_b es una función biyectiva y su inversa $T_{-b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua.*

A continuación vamos a dar una lista de formas diferentes en las que se expresa la continuidad de una función. Este es un resultado que nos será de mucha utilidad y cuya demostración la pueden consultar en [TC11].

Teorema B.4.4. *Si f es una función del espacio topológico X en el espacio topológico Y, entonces las condiciones siguientes son equivalentes.*

(1) *f es continua.*

(2) *Para cualquier conjunto abierto U de Y se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.*

(3) *$f^{-1}(F)$ es cerrado en X para cualquier cerrado F de Y.*

(4) *$f(cl_X(A)) \subseteq cl_Y(f(A))$ para cualquier $A \subseteq X$, donde cl_X y cl_Y son los operadores cerradura en X y Y, respectivamente.*

(5) *$cl_X(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl_Y(B))$ para cada $B \subseteq Y$.*

Demostración. □

Observación B.4.5. *Si f es una función del espacio topológico X en el espacio topológico Y y si $\mathcal{B}$, $\mathcal{S}$ son una base y una subbase de Y, respectivamente, entonces son equivalentes*

(1) *f es continua.*

(2) *$f^{-1}(B)$ es abierto en X para cada $B \in \mathcal{B}$.*

(3) *$f^{-1}(S)$ es abierto en X para cada $S \in \mathcal{S}$.*

Proposición B.4.6. *Si las funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son continuas, entonces su composición $g \circ f$ también es una función continua.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto de Z. Vamos a demostrar que $(g \circ f)^{-1}(A)$ es un subconjunto abierto de X. Pero $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ y como g es continua entonces $g^{-1}(A)$ es un subconjunto abierto de Y. Por hipótesis, f también es continua, luego se cumple que $f^{-1}(g^{-1}(A))$ es abierto en X. □

Corolario B.4.7. *Si $f : X \to Y$ es una función continua y A es una subespacio de X, entonces la función $f \restriction A : A \to Y$ es continua.*

Con todo este material y con ayuda del ejemplo (b) de B.4.3 podemos considerar la siguiente definiciones.

Definiciones B.4.8.

(1) *Una función biyectiva h definida sobro el espacio topológico X y con valores en el espacio topológico Y es un* ***homeomorfismo*** *si tanto ella como su inversa son continuas.*

(2) *Los espacios topológicos X y Y serán llamados* ***homeomorfos*** *si existe un homeomorfismos entre X y Y. La expresión $X \cong Y$ significará que los espacios X y Y son homeomorfos.*

Es inmediato, de la definición, que si f es un homeomorfismo, entonces f^{-1} también lo es.

Cuando dos espacios X y Y son homeomorfos, los consideramos como objetos equivalentes en la clase de espacios topológicos, y podemos intercambiar uno por el otro en nuestros discursos y argumentaciones sin que las conclusiones se alteren. Como hemos mencionado, ellos son el mismo objeto topológico.

Definición B.4.9. *Sea f una función del espacio topológico X en el espacio topológico Y. Diremos que f es una función* ***abierta*** *(o* ***cerrada****) si la imagen bajo f de cualquier subconjunto abierto (o cerrado) de X es un subconjunto abierto (o cerrado) en Y.*

Observación B.4.10. *Sea $\mathcal{B}$ una base del espacio topológico X. Si Y es un espacio topológico y f es una función de X en Y, entonces no es muy difícil justificar que f es una función abierta si, y sólo si, $f(B)$ es abierto en Y para cada $B \in \mathcal{B}$.*

Proposición B.4.11. *Si f es una función biyectiva entre los espacios topológicos X y Y, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

(1) *f^{-1} es una función continua.*

(2) *f es una función abierta.*

(3) *f es una función cerrada.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea A un subconjunto abierto de X. Si f^{-1} es continua entonces $(f^{-1})^{-1}(A)$ es un subconjunto abierto de Y, y como $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$, ya podemos concluir que f es abierta.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que f es abierta y sea F un subconjunto cerrado de X. Esto último implica que $U = X \setminus F$ es abierto en X, así pues $f(U)$ debe ser abierto en Y. Ahora, la biyectividad de f garantica que $f(F) = f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$ y, por consiguiente, $f(F)$ es cerrado en Y.

(3) $\Rightarrow$ (1) Finalmente mostraremos que si f es cerrada entonces f^{-1} es continua. Si F es un subconjunto cerrado de X, tenemos que $f(F)$ es cerrado en Y; este hecho, junto con la igualdad $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$, nos prueba la continuidad de f^{-1}.

□

Corolario B.4.12. *Una función biyectiva y continua $f : X \to Y$ es un homeomorfismo si satisface alguna de las condiciones equivalentes* (1), (2), (3) *de la Proposición B.4.11.*

B.5. Topologías débiles inducidas por funciones

Obsérvese que si $f : X \to Y$ es una función continua donde $(Y, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, siempre es posible considerar una topología en X que haga de f una función continua. Simplemente tomemos a la más fina de todas las topologías para X: la topología discreta $\mathcal{P}(X)$. Pero, en general, es posible definir más de una topología en X que trasforme a f en función continua. De entre estas topologías nos interesa la más pequeña.

Hagamos la siguiente observación: para cada función f definida en un conjunto X y con valores en un conjunto Y, y para cada familia $\{\mathrm{A}_j : j \in J\}$ de subconjuntos de Y, se cumple:

(i) $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ y $f^{-1}[Y] = X$,

(ii) $f^{-1}[\bigcup_{j\in J} \mathrm{A}_j] = \bigcup_{j\in J} f^{-1}[\mathrm{A}_j]$, y

(iii) $f^{-1}[\bigcap_{j\in J} \mathrm{A}_j] = \bigcap_{j\in J} f^{-1}[\mathrm{A}_j]$.

Estas igualdades nos permiten definir una topología en un conjunto X cada vez que tengamos una función f definida en X y con valores en un espacio topológico $(Y, \mathcal{T})$.

Proposición B.5.1. *El conjunto* ${}_f\mathcal{T}$=$\{f^{-1}[\mathrm{A}] : \mathrm{A} \in \mathcal{T}\}$ *es una topología en* X*, donde* $f : X \to (Y, \mathcal{T})$ *es una función sobreyectiva.*

A la topología ${}_f\mathcal{T}$ le llamaremos **topología inicial** en X definida por f y $(Y, \mathcal{T})$ (o **topología débil** en X inducida por f).

Como los elementos de ${}_f\mathcal{T}$ son precisamente las imágenes inversas de los subconjuntos abiertos de Y, resulta claro que si dotamos a X con la topología ${}_f\mathcal{T}$, la función f es continua. Además, ${}_f\mathcal{T}$ tiene otra propiedad importante: supongamos que $\mathcal{T}'$ es una topología en X tal que $f : (X, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T})$ es continua; esto significa que para cada $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$, $f^{-1}[\mathrm{A}] \in \mathcal{T}'$. es decir ${}_f\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. De esta forma hemos demostrado el siguiente resultado.

Proposición B.5.2. *La topología* ${}_f\mathcal{T}$ *es la menor (o más débil) de las topologías para* X *que hace continua a la función* f*.*

Otra caracterización fundamental de la topología ${}_f\mathcal{T}$ es la siguiente:

Proposición B.5.3.

(1) *Para cualquier espacio topológico* Z*, una función* $g : Z \to (X, {}_f\mathcal{T})$ *es continua si y sólo si* $f \circ g$ *es continua.*

(2) *Además* ${}_f\mathcal{T}$ *es la única topología en* X *que satisface* (1)*.*

Demostración.

(1) Naturalmente, si g es continua, entonces $f \circ g$ también. Supongamos ahora que $f \circ g$ es continua, y sea $\mathrm{A} \in {}_f\mathcal{T}$. Esto significa que existe $\mathrm{B} \in \mathcal{T}$ tal que $\mathrm{A} = f^{-1}[\mathrm{B}]$. Por lo tanto, $g^{-1}[\mathrm{A}] = g^{-1}[f^{-1}[\mathrm{B}]] = (f \circ g)^{-1}[\mathrm{B}]$. Como $f \circ g$ es continua y B es un subconjunto abierto de Y, entonces $g^{-1}[\mathrm{A}]$ es abierto en Z. Con lo cual tenemos que g es continua.

(2) Supongamos ahora que $\mathcal{T}'$ es una topología en X que satisface la misma condición que ${}_f\mathcal{T}$ en (1). La función identidad $id_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}')$ es continua, por lo cual $f = f \circ id : (X, \mathcal{T}') \to Y$ es continua. Aplicamos la Proposición B.5.2 y obtenemos ${}_f\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.
Ahora consideramos la función $id : (X, {}_f\mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$. La composición $f \circ id : (X, {}_f\mathcal{T}) \to Y$ es continua. Como estamos suponiendo que $\mathcal{T}'$ satisface (1), entonces $id : (X, {}_f\mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ es continua. Pero esto significa que $\mathcal{T}' \subseteq {}_f\mathcal{T}$.

□

Generalicemos ahora lo dicho hasta aquí de la siguiente manera:
Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos, y sea

$$\mathcal{F}=\{f_j : X \to X_j : j \in J\ \}$$

una familia de funciones definidas sobre un conjunto X. Denotemos por ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$ (o ${}_{f}\mathcal{T}$ si f es el único elemento de $\mathcal{F}$) a la menor de las topologías en X que convierten a cada función $f \in \mathcal{F}$ en una función continua. Tenemos entonces:

Proposición B.5.4.

(1) La familia $\mathcal{S}=\{f_j^{-1}[\mathrm{A}] : j \in J \text{ y } \mathrm{A} \in \mathcal{T}_j\}$ *es una subbase para la topología* ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$.

(2) ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$ *es la única topología que satisface la siguiente Proposición: para cualquier espacio topológico* Z *y cualquier función* $g : Z \to (X, {}_{\mathcal{F}}\mathcal{T})$, g *es continua si y sólo si* $f_j \circ g$ *es continua para cada* $j \in J$.

Demostración.

(1) Consideremos la topología $\mathcal{T}$ en X generada por $\mathcal{S}$ como subbase. (Note que la colección $\mathcal{S}$ satisface todos los requerimientos para generar una topología como una subbase ya que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ y $\bigcup \mathcal{S} = X$). Vamos a demostrar que $\mathcal{T}$ coincide con ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$. En otras palabras, vamos a verificar que $\mathcal{T}$ es la menor topología que hace a cada f_j continua para cada $j \in J$.
Como $\mathcal{S}$ es una subbase de $\mathcal{T}$, entonces una base para $\mathcal{T}$ es

$$\mathcal{B}=\{f_{j_1}^{-1}[\mathrm{A}_1] \cap \cdots \cap f_{j_n}^{-1}[\mathrm{A}_\mathrm{n}] : n \in \mathbb{N}, j_i \in J \text{ y } \mathrm{A}_\mathrm{i} \in \mathcal{T}_{j_i}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n\ \}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{T}=\{\mathrm{U} \subseteq X : \exists \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B} \text{ tal que } U = \bigcup \mathcal{U}\}$.
Ahora bien, cada elemento de $\mathcal{S}$ pertenece a $\mathcal{T}$; así, para cada $j \in J$ y cada $\mathrm{A} \in \mathcal{T}_j$, $f_j^{-1}[\mathrm{A}] \in \mathcal{T}$; lo que significa que, para cada $j \in J$,
$f_j : (X, \mathcal{T}) \to (X_j, \mathcal{T}_j)$ es continua.
Por otro lado, si $\mathcal{T}'$ es una topología en X tal que $f_j : (X, \mathcal{T}') \to X_j$ es continua para cada $j \in J$, entonces, $f_j^{-1}[\mathrm{A}] \in \mathcal{T}'$ para cada $j \in J$ y cada $\mathrm{A} \in \mathcal{T}_j$.
Por lo tanto, como estamos suponiendo que $\mathcal{T}'$ es una topología, tenemos que para cualquier colección finita j_1,...,j_n de elementos de J, y cada colección $\mathrm{A}_i \in \mathcal{T}_{j_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $f_{j_1}^{-1}[\mathrm{A}_1] \cap \cdots \cap f_{j_n}^{-1}[\mathrm{A}_\mathrm{n}] \in \mathcal{T}'$; es decir, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

(2) La demostración de la Proposición de este inciso se puede hacer de manera análoga a la demostración de la Proposición B.5.3 en la parte dos.

□

Observación B.5.5. *Es fácil verificar que si para cada* $j \in J$, $\mathcal{B}_j$ *es una base para la topología* $\mathcal{T}_j$, *entonces* $\mathcal{D}=\{f_j^{-1}[\mathrm{A}] : j \in J, \mathrm{A} \in \mathcal{B}_j\}$ *es una subbase de* ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$.

Definición B.5.6. *Sean* $\mathcal{C} = \{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ *una colección de espacios topológicos,* X *un conjunto y* $\mathcal{F}=\{f_j : X \to X_j\}$ *una colección de funciones. A la topología* ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$ *en* X *le llamamos* ***topología débil*** *o* ***topología inicial*** *inducida por* $\mathcal{F}$ *(y* $\mathcal{C}$*).*

B.6. Producto de dos espacios topológicos

Para cada pareja de conjuntos X y Y podemos considerar al conjunto $X \times Y$. En el caso en que tanto en X como en Y estén definidas estructuras topológicas, es natural intentar construir alguna topología en $X \times Y$ que se encuentre convenientemente relacionada con las topologías de cada factor. Un modo natural de hacer esto es usando las técnicas de lo dicho anteriormente, ya que las proyecciones $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ ($\pi_X(x, y) = x$ y $\pi_Y(x, y) = y$ para cada $(x, y) \in X \times Y$) son funciones que relacionan naturalmente a $X \times Y$ con los espacios topológicos X y Y.

Definición B.6.1. *Dados dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{S})$, llamaremos* ***topología producto*** $\mathcal{P}$*, o* ***topología de Tychonoff****, en $X \times Y$, a la topología ${}_{\{\pi_X,\pi_Y\}}\mathcal{T}$; es decir, $\mathcal{P}$ es la menor de las topologías en $X \times Y$ que convierte a π_X y a π_Y en funciones continuas.*

Observación B.6.2.

(1) *Resulta que si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ y si $\mathcal{C}$ es una base de $\mathcal{S}$, entonces $\{\pi_X^{-1}[\mathrm{B}] \cap \pi_Y^{-1}[\mathrm{C}] : \mathrm{B} \in \mathcal{B}$ y $\mathrm{C} \in \mathcal{C}\}$ es una base para $\mathcal{P}$. Ahora bien $\pi_X^{-1}[\mathrm{B}] \cap \pi_Y^{-1}[\mathrm{C}] = \mathrm{B} \times \mathrm{C}$. Concluimos así que la colección $\{\ \mathrm{B} \times \mathrm{C} : \mathrm{B} \in \mathcal{B}$ y $\mathrm{C} \in \mathcal{C}\}$ es una base para $\mathcal{P}$*

(2) *Observese que si alguno de los espacios X ó Y es vacío, entonces $X \times Y$ es vacío y $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$.*

Las siguientes dos proposiciones nos dan un criterio de cómo los espacios topológicos X y Y están relacionados con el espacio $X \times Y$ cuando lo consideramos con la topología producto.

Proposición B.6.3. *Las proyecciones $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ son funciones continuas y abiertas cuando consideramos en $X \times Y$ la topología producto.*

Demostración. Recuérdese que hemos definido como topología producto en $X \times Y$ a la topología inicial ${}_{\{\pi_X,\pi_Y\}}\mathcal{T}$, lo cual significa que π_X y π_Y son continuas. □

Definiciones B.6.4.

(1) *Sea x un elemento del espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Un subconjunto V de X es una* ***vecindad*** *de x en el espacio $(X, \mathcal{T})$ si podemos encontrar un $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$ que satisfaga $x \in \mathrm{A} \subseteq \mathrm{V}$. A la colección de vecindades de x en X le llamamos* ***sistema de vecindades*** *del punto x (en $(X, \mathcal{T})$) y lo denotamos por $\mathcal{V}(x)$.*

(2) *Para un punto x en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, una colección $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ en una* ***base de vecindades*** *de x en $(X, \mathcal{T})$ si para cada $\mathrm{V} \in \mathcal{V}(x)$ podemos encontrar $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(x)$ tal que $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{V}$.*

Si tenemos un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y $\mathrm{E} \subseteq X$, con $cl(\mathrm{E})$ denotaremos la cerradura del conjunto E en el espacio X (o con $cl_X(\mathrm{E})$ para hacer explícito que estamos trabajando en el espacio X).

Definiciones B.6.5. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico.*

(1) Un subconjunto $\mathrm{E} \subseteq X$ *es* ***denso*** *en* X *si* $cl(\mathrm{E}) = X$.

(2) $(X, \mathcal{T})$ *es* ***separable*** *si contiene un subconjunto denso numerable.*

(3) El espacio $(X, \mathcal{T})$ *es* ***primero numerable*** *si cada punto* $x \in X$ *posee una base local numerable de vecindades de* X.

(4) El espacio $(X, \mathcal{T})$ *es* ***segundo numerable*** *si existe una base numerable para* $\mathcal{T}$.

Proposición B.6.6. *Si* X *y* Y *son dos espacios topológicos segundo numerables (respectivamente, primero numerables, separables), entonces* $X \times Y$ *también es un espacio segundo numerable (respectivamente, primero numerable, separable).*

Demostración. A manera de ejemplo sólo demostraremos la parte primera de la Proposición, las demás demostraciones las pueden encontrar en [TC11]. Entonces, si $\mathcal{B}$ es una base numerable de X y $\mathcal{C}$ es una base de Y, se tiene que el siguiente conjunto $\{\mathrm{B}\times\mathrm{C} : \mathrm{B} \in \mathcal{B} \text{ y } \mathrm{C} \in \mathcal{C}\}$ forma una base numerable de $X\times Y$. Por lo tanto, el producto de dos espacios segundo numerables comparte esa propiedad. □

B.7. Producto de una familia arbitraria de espacios topológicos

En esta sección vamos a generalizar la construcción que hicimos en la sección anterior de la topología producto de una colección finita de espacios topológicos y, siguiendo las ideas de la Proposición B.5.4, construiremos una topología producto también para el caso en que la colección de espacios topológicos dados es infinita.

Consideremos una familia $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ de espacios topológicos no vacíos, en donde J es un conjunto no vacío finito o infinito. Recuerde que $\prod_{j\in J} X_j$ es el conjunto de todas las posibles funciones de elección definidas sobre la colección $\{X_j : j \in J\}$. Más formalmente,

$$\prod_{j\in J} X_j = \{f : J \to \bigcup_{j\in J} X_j : \text{para cada } j \in J,\ f(j) \in X_j\}$$

Para cada $i \in J$, podemos definir la función

$$\pi_i : \prod_{j\in J} X_j \to X_i$$

como $\pi_i(f) = f(i)$ para cada $f \in \prod_{j\in J} X_j$. A π_i le llamaremos proyección sobre el i-ésimo factor. Agrupamos a todas estas funciones en una colección $\mathcal{P}=\{\pi_j : j \in J\}$.

Podemos ahora considerar en $\prod_{j\in J} X_j$ la topología débil ${}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ inducida por $\mathcal{P}$. A la pareja $(\prod_{j\in J} X_j, {}_{\mathcal{P}}\mathcal{T})$ le llamaremos producto topológico o producto Tychonoff de los espacios X_j, y a ${}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ le llamamos topología producto o topología Tychonoff en el producto $\prod_{j\in J} X_j$.

Por lo visto anteriormente, tenemos las siguientes propiedades de la topología producto.

Proposición B.7.1.

(1) Para cada $i \in J$, $\pi_i : (\prod_{j\in J} X_j, {}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ es continua.

(2) ${}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ es la menor topología que transforma a cada π_j en una función continua.

(3) Si Z es un espacio topológico y $g : Z \to \prod_{j\in J} X_j$, entonces g es continua si y sólo si $\pi_j \circ g$ es continua para cada $j \in J$.

(4) La familia $\mathcal{S}=\{\pi_j^{-1}[\mathrm{B}] : j \in J \text{ y } \mathrm{B} \in \mathcal{T}_j\}$ es una subbase de ${}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$.

Proposición B.7.2. *La proyección $\pi_i : \prod_{j\in J} X_j \to X_i$ definida por $\pi_i(f) = f(i)$ para cada $f \in \prod_{j\in J} X_j$, es una función abierta para cualquier $i \in J$.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto arbitrario del espacio $\prod_{j\in J} X_j$. Mostraremos que $\pi_i[\mathrm{A}]$ es un conjunto abierto en X_i. Para $x \in \pi_i[\mathrm{A}]$ existe $f \in \mathrm{A}$ tal que $\pi_i(f) = x$. Podemos encontrar un básico típico $\mathrm{B} = \pi_{j_1}^{-1}[\mathrm{A}_1] \cap \cdots \cap \pi_{j_k}^{-1}[\mathrm{A}_k]$ tal que $f \in \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$, en donde $k \in \mathbb{N}$, $j_1, ..., j_k \in J$, y A_l es un subconjunto abierto en X_{j_l} para cada $1 \leqslant l \leqslant k$. Tenemos entonces que $x = \pi_i(f) \in \pi_i[\mathrm{B}] \subseteq \pi_i[\mathrm{A}]$. Pero $\pi_i[\mathrm{B}]$ es igual a X_i o es igual a algún A_l. En cualquiera de estos casos, $\pi_i[\mathrm{B}]$ es abierto en X_i. Con esto hemos demostrado que el conjunto $\pi_i[\mathrm{A}]$ es abierto. □

La convergencia de una sucesión en un espacio producto está determinada por la convergencia de las sucesiones que determina cada proyección. En términos precisos:

Proposición B.7.3. *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos en $\prod_{j\in J} X_j$ converge a un punto x de $\prod_{j\in J} X_j$ si y sólo si la sucesión $(\pi_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\pi_i(x)$ en X_i para cada $i \in J$.*

Demostración. Como cada π_i es una función continua, entonces $x_n \to x$ implica $\pi_i(x_n) \to \pi_i(x)$.
Supongamos ahora que para cada $i \in J$, la sucesión $(\pi_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\pi_i(x)$. Tomamos un conjunto abierto A en el producto topológico que contiene a x. Existe un abierto canónico $\mathrm{B} = \pi_{j_1}^{-1}[\mathrm{A}_1] \cap \cdots \cap \pi_{j_k}^{-1}[\mathrm{A}_k]$ tal que $x \in \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$, en donde $k \in \mathbb{N}$, $j_1, ..., j_k \in J$, y A_l es un subconjunto abierto en X_{j_l} para cada $1 \leqslant l \leqslant k$. Como $\pi_{j_l}(x_n)$ converge a $\pi_{j_l}(x)$, existe $n(l) \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_{j_l}(x_n) \in \mathrm{A}_l$ para toda $n \geqslant n(l)$ y para cada $l \in \{1, ..., k\}$. Resulta que si $n \geqslant \text{máx}\{n(1), ..., n(k)\}$, de donde tenemos que $x_n \in \mathrm{B}$, lo cual completa la demostracíon. □

Proposición B.7.4. *Sea $\{X_j : j \in J\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos.*

(1) Si cada X_j es segundo numerable y además $|J| \leq \aleph_0$, entonces el producto Tychonoff $X = \prod_{j\in J} X_j$ es segundo numerable.

(2) Si $X = \prod_{j\in J} X_j$ es segundo numerable, entonces cada X_j es segundo numerable.

Demostración. Cuando J es finito, el inciso (1) se obtiene por un proceso inductivo a partir de la Proposición B.6.6.
Podemos suponer pues que $J = \mathbb{N}$. Para cada natural k, tomamos una base numerable $\mathcal{B}_k=\{\mathrm{B}_1^k, \mathrm{B}_2^k, ..., \mathrm{B}_n^k, ...\}$ del espacio X_k. (Observese que no pedimos que los B_i^k sean diferentes por pares, incluso podría suceder que $\mathcal{B}_k$ sea un conjunto

finito). Por la definición de la topología en X, la siguiente colección es una base para X:
$\mathcal{B}$=$\{\pi_{j_1}^{-1}[\mathrm{A}_1]\cap\cdots\cap\pi_{j_k}^{-1}[\mathrm{A}_k] : n \in \mathbb{N}, i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}$ y $\mathrm{A}_j \in \mathcal{B}_j$ para cada $j \in \{i_1, ..., i_n\}$ $\}$.
Ahora bien, el conjunto $\mathcal{B}$ es numerable ya que la aplicación $\phi : \mathcal{B} \to \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ definida por

$$\phi(\pi_{j_1}^{-1}[\mathrm{A}_1] \cap \cdots \cap \pi_{j_k}^{-1}[\mathrm{A}_k]) = (i_1, ...i_n, l_1, ...l_n)$$

cuando $\mathrm{A}_j = \mathrm{B}_{l_j}^{i_j}$ para cada $j \in \{i_1, ...i_n\}$, es una función inyectiva. Pero $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ es un conjunto numerable; por lo tanto $\mathcal{B}$ es numerable. De donde se tiene que X es segundo numerable. □

B.8. Topologías fuertes definidas por funciones

Consideremos ahora una función f definida sobre un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y con valores en un conjunto Y. Vamos a construir una topología en Y, con propiedades deseadas, a partir de f y de $\mathcal{T}$ de manera dual a lo hecho en la sección B.5. Queremos que la topología obtenida en Y, que denotaremos por $\mathcal{T}_f$, sea la más grande de las topologías que convierte a f en una función continua y, además, que satisfaga la propiedad:

Para cualquier espacio topológico Z, una función $g : Y \to Z$ es continua si y sólo si $g \circ f$ es continua.

Proponemos como $\mathcal{T}_f$ a la colección $\{\mathrm{E} \subseteq Y : f^{-1}[\mathrm{E}] \in \mathcal{T}\}$. Verifiquemos que $\mathcal{T}_f$ cumple con las condiciones requeridas.

Teorema B.8.1.

(1) *La familia $\mathcal{T}_f$ es una topología en Y.*

(2) *La función $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_f)$ es continua, y $\mathcal{T}_f$ es la mayor en las topologías en Y que satisface esta propiedad.*

(3) *$\mathcal{T}_f$ es la única topología en Y que satisface la siguiente propiedad:*
Para cualquier espacio topológico Z, una función $g : Y \to Z$ es continua si y sólo si $g \circ f$ es continua.

Demostración.

(1) No es muy díficil justificar que $\mathcal{T}_f$ es una topología en Y.

(2) La continuidad de f es una consecuencia directa de la definición de $\mathcal{T}_f$. Además, si $\mathcal{T}'$ es una topología que hace continua a f, entonces $f^{-1}[\mathrm{A}]$ debe de ser un elemento de $\mathcal{T}$ para cada $\mathrm{A} \in \mathcal{T}'$. Lo cual significa que $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_f$.

(3) Si $g : Y \to Z$ es continua, como f también lo es, entonces $g \circ f$ es continua. Ahora supongamos que $g \circ f$ es una función continua; es decir, supongamos que $(g \circ f)^{-1}[\mathrm{A}] = f^{-1}[g^{-1}[\mathrm{A}]] \in \mathcal{T}$ para cada subconjunto abierto A de Z.

La manera en que está definida la familia $\mathcal{T}_f$ nos indica que $g^{-1}[\mathrm{A}]$ debe de ser un elemento de $\mathcal{T}_f$ para cada abierto A de Z; es decir, g es continua. Por otro lado, si $\mathcal{T}'$ es una topología en Y que satisface la propiedad, entonces la función identidad $id_Y : (Y, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T}_f)$ es continua ya que $id_Y \circ f$ lo es. Por lo tanto, $\mathcal{T}_f \subseteq \mathcal{T}'$. Además $id_Y : (Y, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T}')$ es una función continua. Como estamos suponiendo que $(Y, \mathcal{T}')$ satisface la propiedad $f = id_Y \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua, aplicando (2), obtenemos $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_f$.

□

Ejemplo B.8.2. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico cualquiera. Sea Y un conjunto y sea $y_0 \in Y$ fijo. Para la función $f : X \to Y$ constante y_0, la topología $\mathcal{T}_f$ en Y es la topología discreta, ya que si $\mathrm{E} \subseteq Y$,*

$$f^{-1}[\mathrm{E}] = \begin{cases} \emptyset & si \quad y_0 \notin \mathrm{E} \\ \\ X & si \quad y_0 \in \mathrm{E}. \end{cases}$$

Es decir, cualquier subconjunto de Y pertenece a $\mathcal{T}_f$.

Podemos generalizar la técnica presentada aquí de una manera análoga a lo hecho para definir topologías débiles. Dada una familia de espacios topológicos $\mathcal{G} = \{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ y dada una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_j : X_j \to Y : j \in J\}$, podemos definir la colección $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ de todos los subconjuntos E de Y que satisfacen $f_j^{-1}[\mathrm{E}] \in \mathcal{T}_j$ para toda $j \in J$. Se cumple entonces el siguiente resultado cuya demostración se puede buscar en [TC11].

Teorema B.8.3.

(1) *La colección $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ es una topología en Y.*

(2) *Cada $f_j : (X_j, \mathcal{T}_j) \to (Y, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ es continua para toda $j \in J$, y $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ es la mayor de las topologías en Y con esta propiedad.*

(3) *$\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ es la única topología en Y que satisface: Para cualquier espacio topológico Z, una función $g : (Y, \mathcal{T}_{\mathcal{F}}) \to Z$ es continua si y sólo si $g \circ f_j$ es continua para cada $j \in J$.*

Definición B.8.4. *A la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ le llamaremos **topología fuerte**, o **topología final**, en Y definida por la familia de funciones $\mathcal{F}$ y la familia de espacios topológicos $\mathcal{G}$.*

Ejemplo B.8.5. *La **suma topológica libre** de una familia de espacios topológicos: Sea $\mathcal{G} = \{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ una colección de espacios topológicos, y sea $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ (la unión ajena de estos espacios). Podemos entonces considerar, para cada $j \in J$, la función inclusión $i_j : X_j \to X$ definida por $i_j(x) = x$. Para $\mathcal{F} = \{i_j : j \in J\}$, $\mathrm{E} \subseteq X$ pertenece a $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ si y sólo si $\mathrm{E} \cap X_j \in \mathcal{T}_j$ para todo $j \in J$. A la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ le llamamos **topología suma** de la familia $\mathcal{G}$, y a la pareja $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ le llamamos **suma topológica** de la familia $\mathcal{G}$. La **suma topológica libre** de la familia $\mathcal{G}$, denotada por $\bigoplus_{j \in J} X_j$, es el espacio suma de la familia $\{X_j \times \{j\} : j \in J\}$. Sus subconjuntos abiertos se obtienen, simplemente, uniendo subconjuntos abiertos de los espacios sumando. Por ejemplo, si $\mathbb{R}_n = \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n$ es homeomorfo al subespacio $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \times \{n\})$ de $\mathbb{R}^2$.*

B.9. Los Espacios Completamente Regulares o de Tychonoff

La clase de los espacios completamente regulares fue introducida poco tiempo después de que H. Tietze introdujera los espacios normales. En 1930 el matemático ruso Andrei Nikolaevich Tychonoff demostró que todo espacio normal es homeomorfo a un subespacio de un espacio producto de tipo $[0,1]^M$, para un adecuado conjunto M (los espacios $[0,1]^M$ son conocidos hoy en día como *cubos de Tychonoff*); y preguntó si la condición de normalidad en su resultado era una condición necesaria. A. N. Tychonoff notó que esto no era así e introdujo los espacios completamente regulares, haciendo ver que en dichos espacios topológicos, y únicamente ellos, tienen la propiedad de ser homeomorfos a subespacios de cubos de Tychonoff.

Definiciones B.9.1. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.*

(1) $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio* T_1*, o* $\mathcal{T}$ *es una topología* T_1*, si para cualesquiera puntos distintos x y y de X, existen subconjuntos abiertos* U *y* V *de X tales que* $y \in \mathrm{V} \setminus \mathrm{U}$ *y* $x \in \mathrm{U} \setminus \mathrm{V}$.

(2) $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio* T_2 *o* ***Hausdorff*** *si para cualesquiera puntos distintos x y y de X, existe subconjuntos abiertos ajenos* U *y* V *de X tales que* $y \in \mathrm{V}$ *y* $x \in \mathrm{U}$.

(3) $(X, \mathcal{T})$ *es un* ***espacio regular*** *o* T_3 *si satisface las siguientes condiciones:*

  (1) $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio* T_1*; y*

  (2) para cualquier $\mathrm{F} \subseteq X$ *cerrado y* $x \in X \setminus \mathrm{F}$ *existen conjuntos abiertos ajenos* U *y* V *tales que* $x \in \mathrm{U}$ *y* $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{V}$.

(4) El espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ *es* ***completamente regular*** *(o* ***Tychonoff****) si satisface las siguientes condiciones:*

  (1) $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio T_1; y*

  (2) para cualquier subconjunto cerrado F *de X y cualquier punto* $x \notin \mathrm{F}$*, existe una función continua* $f : X \to [0,1]$ *tal que* $f[\mathrm{F}] \subseteq \{1\}$ *y* $f(x) = 0$.

(5) El espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ *es* ***normal*** *o* T_4 *si X tiene las siguientes propiedades:*

  (1) $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio* T_1*; y*

  (2) para cualesquiera subconjuntos cerrados y ajenos F_1 *y* F_2 *de X, existen abiertos ajenos* A_1 *y* A_2 *de X tales que* $\mathrm{F}_1 \subseteq \mathrm{A}_1$ *y* $\mathrm{F}_2 \subseteq \mathrm{A}_2$.

De la misma definición de espacio completamente regular podemos deducir fácilmente que los espacios completamente regulares son espacios regulares. En efecto, si X es un espacio completamente regular, $\mathrm{F} \subseteq X$ es un subconjunto cerrado y $x \notin \mathrm{F}$ es arbitrario, entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f[\mathrm{F}] \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$. Entonces los subconjuntos $\mathrm{A}_1 = f^{-1}[(\frac{1}{2}, 1]]$ y

$A_2 = f^{-1}[[0, \frac{1}{2})]$ son subconjuntos abiertos de X ajenos y satisfacen $F \subseteq A_1$ y $x \in A_2$.

Proposición B.9.2. *Todo espacio métrico es un espacio Tychonoff.*

Demostración. En efecto, supongamos que (X, d) es un espacio métrico. Claramente el espacio X satisface la propiedad de ser un espacio T_1, con esto sólo nos queda justificar que X satisface la condición dos de la cuarta definición de B.9.1. Consideremos un subconjunto cerrado F y un punto $p \notin F$. Definamos la siguiente función $f : X \to [0, 1]$ definida por medio de la fórmula

$$f(x) = \frac{d(x, p)}{d(x, p) + d(x, F)},$$

donde $d(x, F) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in F\}$. Obsérvese que $d(x, F) > 0$ para todo $x \notin F$. Note también que $f(p) = 0$ y que $f(x) = 1$ para cada $x \in F$. Para verificar que f es continua, simplemente recuerde que las funciones de tipo $g : X \to \mathbb{R}$, donde $g(x) = d(x, A)$ para toda $x \in X$ y $A \subseteq X$ fijo, son siempre continuas. Entonces f es continua siendo el cociente de dos funciones continuas. □

Proposición B.9.3. *La propiedad de ser un espacio Completamente Regular o de Tychonoff es hereditaria.*

Proposición B.9.4. *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. $\prod_{j \in J} X_j$ es un espacio completamente regular si y sólo si cada espacio X_j es un espacio completamente regular.*

Demostración.

$\Rightarrow$] Supóngamos que $\prod_{j \in J} X_j$ es un espacio completamente regular. Como cada espacio X_i es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{j \in J} X_j$, entonces el espacio X_i es un espacio completamente regular.

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que cada espacio X_j es un espacio completamente regular. Debido a que cada espacio X_j es un espacio T_1, el $\prod_{j \in J} X_j$ también es un espacio T_1. Consideremos ahora un punto $x \in \prod_{j \in J} X_j$ y un subconjunto cerrado F de $\prod_{j \in J} X_j$ que no contenga a x. Como $x \in (\prod_{j \in J} X_j) \setminus F$ y F es cerrado, existe un subconjunto abierto canónico B de $\prod_{j \in J} X_j$ tal que $x \in B \subseteq (\prod_{j \in J} X_j) \setminus F$. Como B es un abierto canónico del producto de los espacios X_j, existe una cantidad finita de índices $j_1, j_2, ..., j_n$ en el conjunto J y subconjuntos abiertos $U_{j_1} \in \mathcal{T}_{j_i}$, para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tales que $B = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{j_i}^{-1}[U_{j_i}]$. Como $x \in B$, entonces la j_i-ésima coordenada de x, $x_{j_i} = \pi_{j_i}(x)$, pertenece al abierto U_{j_i} (para toda $i = 1, 2, ..., n$). Como cada espacio X_{j_i} es un espacio completamente regular, para toda $i = 1, 2, ..., n$, existe una función continua $f_i : X_{j_i} \to [0, 1]$ tal que $f_i(x_{j_i}) = 1$ y $f_i(X_{j_i} \setminus U_{j_i}) \subseteq \{0\}$. Definamos $g_i : \prod_{j \in J} X_j \to [0, 1]$ como la composición $g_i = f_i \circ \pi_{j_i}$ para toda $i = 1, 2, ..., n$, y definamos $g : \prod_{j \in J} X_j \to [0, 1]$ como la función

$$g(y) = \text{mín}\{g_i(y) : i = 1, 2, ..., n\}$$

para toda $y \in \prod_{j\in J} X_j$; esto es, g=mín$\{g_1, g_2, ..., g_n\}$. Como cada una de las funciones g_i es una función continua, la función g es una función continua. Además, sucede que

$$g(x)=\text{mín}\{g_i(x) : i = 1, 2, ..., n\}=\text{mín}\{f_i(x_{j_i}) : i = 1, 2, ..., n\}=1$$

y si $y \in \prod_{j\in J} X_j \setminus \mathrm{B}$ entonces $y_{j_i} = \pi_{j_i} \notin \mathrm{U}_{j_i}$ para alguna i, por lo cual $f_{j_i} = 0$ para alguna $i \in \{1, 2, ..., n\}$. En consecuencia,

$$g(y) = \text{mín}\{g_i(y) : i = 1, 2, ..., n\} = \text{mín}\{f_i(y_{j_i}) : i = 1, 2, ..., n\}=0.$$

Por lo tanto, se ha mostrado la existencia de una función continua $g : \prod_{j\in J} X_j \to [0, 1]$ tal que $g(x) = 1$ y $g(\mathrm{F}) \subseteq \{0\}$. Esto es $\prod_{j\in J} X_j$ es un espacio completamente regular.

□

Definición B.9.5. *Sean* A *y* B *subconjuntos ajenos de un espacio topológico X, diremos que* A ***está funcionalmente separado de*** B *si existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f[\mathrm{A}] \subseteq \{0\}$ y $f[\mathrm{B}] \subseteq \{1\}$.*

De esta forma un espacio topologíco X es completamente regular si es un espacio T_1 y si para cualquier subconjunto cerrado F de X, todo punto x de X que no pertenezca a F, se tiene que $\{x\}$ está funcionalmete separado de F.

Como ya lo habiamos mencionado al principio de esta sección, A. N. Tychonoff demostró en 1930 que los espacios normales pueden encajarse en espacios de tipo $[0, 1]^M$, y demostró también la existencia de espacios topológicos no normales que pueden ser encajados en productos $[0, 1]^M$. Tychonoff llamó a los espacios que son homeomorfos a un subespacio de un cubo $[0, 1]^M$ espacios completamente regulares. El método creado por Tychonoff para la demostración de sus resultados es conocido como producto diagonal de funciones, y es una herramienta muy importante en Topología General para construir encajes.
Sean X un espacio topológico, $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F}=\{ f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de funciones. Bajo estas condiciones podemos definir la función $f : X \to \prod_{\alpha\in J} Y_\alpha$ cuya regla de asociación esta dada por: $f(x)$ es el único elemento de $\prod_{\alpha\in J} Y_\alpha$ cuya β-ésima coordenada es $f_\beta(x)$ (para toda $\beta \in J$). En el caso en que cada una de las funciones f_α es continua, se tiene que la función f es también una función continua. La función f es llamada el *producto diagonal de las funciones* f_α y es comúnmente denotada con el símbolo $\triangle_{\alpha\in J} f_\alpha$ ó $\triangle_{g\in\mathcal{F}}\, g$.

Definición B.9.6.

*(1) Diremos que la familia de funciones $\mathcal{F}$ **separa** (o **distingue**) **puntos** del espacio X si para cada par de puntos distintos x y y de X, existe un índice $\beta \in J$ tal que $f_\beta(x) \neq f_\beta(y)$.*

(2) *Por otro lado, diremos que la familia de funciones $\mathcal{F}$* ***separa*** *(o* ***distingue****)* ***puntos de subconjuntos cerrados*** *de X si para cada punto $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X tal que $x \notin \mathrm{F}$ existe un índice $\beta \in J$ tal que $f_\beta(x) \notin cl[f_\beta(\mathrm{F})]$.*

La siguiente Proposición establece algunas propiedades básicas de familias de funciones que separan puntos y de familias de funciones que separan puntos de subconjuntos cerrados.

Proposición B.9.7.

(1) *Si la familia de funciones $\mathcal{F}$ distingue puntos, entonces la función $f = \triangle_{g\in\mathcal{F}} g$ es una función inyectiva.*

(2) *Si la familia de funciones $\mathcal{F}$ distingue puntos de conjuntos cerrados, entonces la función $f = \triangle_{g\in\mathcal{F}} g$ tiene la siguiente propiedad: para cualquier subconjunto abierto A de X, el conjunto $f[\mathrm{A}]$ es un subconjunto abierto de $f[X]$.*

Demostración.

(1) Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como la familia de funciones $\mathcal{F}$ distingue puntos, existe un índice $\alpha \in J$ para el cual se tiene que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. Entonces $f(x)(\alpha) \neq f(y)(\alpha)$. Por lo cual, $f(x) \neq f(y)$; es decir, f es inyectiva.

(2) Sea A un subconjunto abierto de X. Consideremos un punto $q \in f[\mathrm{A}]$ arbitrario. Sea $a \in \mathrm{A}$ tal que $f(a) = q$. Obsérvese ahora que el subconjunto cerrado $X \setminus \mathrm{A}$ de X no contiene al punto a. Entonces existe una función $f_\beta \in \mathcal{F}$ tal que $f_\beta(a) \notin cl[f_\beta(X \setminus \mathrm{A})]$. Como $Y_\beta \setminus cl[f_\beta(X \setminus \mathrm{A})]$ es un subconjunto abierto de Y_β y la función $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} Y_\alpha \to Y_\beta$ es continua, tenemos que el conjunto

$$\pi_\beta^{-1}(Y_\beta \setminus cl[f_\beta(X \setminus \mathrm{A})]) = \{y \in \textstyle\prod_{\alpha\in J} Y_\alpha : y(\beta) \notin cl[f_\beta(X \setminus \mathrm{A})]\}$$

es un subconjunto abierto de $\prod_{\alpha\in J} Y_\alpha$. Notemos ahora que

$$q \in \pi_\beta^{-1}(Y_\beta \setminus cl[f_\beta(X \setminus \mathrm{A})]) \cap f[X] \subseteq f[\mathrm{A}]$$

y que $\pi_\beta^{-1}(Y_\beta \setminus cl[f_\beta(X \setminus \mathrm{A})]) \cap f[X]$ es un subconjunto abierto de $f[X]$. Por lo tanto, podemos concluir que $f[A]$ es un subconjunto abierto de $f[X]$.

$\square$

El siguiente teorema debido a A. N. Tychonoff muestra la anunciada caracterización de los espacios completamente regulares.

Teorema B.9.8. ***(De Tychonoff sobre la inmersión)*** *Un espacio topológico X es completamente regular si, y sólo si, X es homeomorfo a un subespacio de un espacio producto $[0,1]^M$ para algún conjunto M.*

Demostración.

$\Rightarrow$] Supongamos que X es un espacio completamente regular. Sea $\mathcal{F}$=$\{f : X \to [0,1] : f$ es continua$\}$. Indicamos los elementos de $\mathcal{F}$=$\{f_\alpha : \alpha \in J\}$. Resulta que la familia $\mathcal{F}$ distingue puntos de conjuntos cerrados. En efecto, si $\mathrm{F} \subseteq X$ es cerrado y $x \in X \setminus \mathrm{F}$, por ser X completamente regular, existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(\mathrm{F}) \subseteq \{1\}$. Entonces $f \in \mathcal{F}$ y $f(x) \notin cl[f(\mathrm{F})]$. Como X es un espacio T_1, entonces todo subconjunto unipuntual es siempre un subconjunto cerrado de X. Utilizando esto y el hecho de que $\mathcal{F}$ distingue puntos de cerrados, podemos concluir que la familia $\mathcal{F}$ también distingue puntos de puntos. En consecuencia, el producto diagonal $\triangle f_\alpha = g : X \to [0,1]^J$ dado por $g(x)(\alpha) = f_\alpha(x)$ para toda $x \in X$ y $\alpha \in J$, es un homeomorfismo sobre el subespacio $g(X)$ de $[0,1]^J$.

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que X es homeomorfo a un subespacio de un espacio de tipo $[0,1]^M$ para algún conjunto M. Como $[0,1]$ es un espacio completamente regular, el producto de espacios completamente regulares es un espacio completamente regular, el espacio $[0,1]^M$ es un espacio completamente regular. Pero, X es homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^M$, digamos Y. Entonces Y es completamente regular y así lo es X ya que la regularidad completa es hereditaria.

$\square$

B.10. Algo de Redes

Definición B.10.1. *Una pareja $(\Lambda, \leqslant)$, en donde Λ es un conjunto y $\leqslant$ es una relación en Λ, es un **conjunto dirigido** si satisface las siguientes condiciones:*

(a) *$\lambda \leqslant \lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$.*

(b) *si $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ y $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$ entonces $\lambda_1 \leqslant \lambda_3$ y,*

(c) *para cada λ_1, λ_2 en Λ, existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leqslant \lambda_3$ y $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$.*

(1) Observe que el conjunto de numeros naturales $\mathbb{N}$ con su orden usual es una dirección, y que una dirección no satisface necesariamente la antisimetría.

(2) Observe también que el conjunto de vecindades $\mathcal{V}_x$ de un punto x en un espacio topológico X es un conjunto dirigido cuando se define "$V \leqslant U$ si y sólo si $U \subseteq V$".

Definición B.10.2. *Una **red** en un conjunto X es una función $r : \Lambda \to X$, en donde Λ es un conjunto dirigido. Al punto $r(\lambda)$ se le denotara frecuentemente como x_λ, y la expresión "$r : \Lambda \to X$ es una red" se escribe también como "$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red".*

(3) Observe, a partir de las definiciones, que cada sucesión en un conjunto X es una red en X.

(4) Si para cada vecindad V de un punto x en un espacio X elegimos un punto x_V, entonces $(x_V)_{V\in\mathcal{V}_x}$ es una red en X.

Definición B.10.3. *Decimos que una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en un espacio topológico X* ***converge a un punto*** *x de X, lo cual representamos escribiendo $x_\lambda \to x$, si para cada vecindad V de x existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in V$ para toda $\lambda \geqslant \lambda_0$.*

Observación B.10.4. *Si para cada vecindad V de un punto x en un espacio X se toma $x_V \in V$, entonces la red $(x_V)_{V\in\mathcal{V}_x}$ converge al punto x.*

A continuación enunciaremos dos Proposiciones cuya demostración la pueden consultar en [TC11].

Proposición B.10.5. *Para cualquier subconjunto A de un espacio topológico se cumple: $x \in cl(A)$ si y sólo si existe una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en A que converge a x.*

Demostración. □

Proposición B.10.6. *Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua en un punto z de X si y sólo si cada vez que una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converga a z en X, entonces la red $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $f(z)$ en Y.*

Demostración. □

B.11. Filtros y convergencia

Antes de la publicación de *Grundzüge der Mengenlehre de Hausdorff*, varios notables matemáticos propusieron diversos sistemas de axiomas que intentaban definir la noción de espacio topológico. En su gran mayoría, todas estas axiomatizaciones pretendían que la noción de convergencia de sucesiones fuera su fundamento; en particular, se esperaba que la operación que consiste en tomar límites de sucesiones bastara para definir el operador cerradura de un espacio topológico. El mismo M. Frechet describió, en su tesis doctoral en 1906, un sistema de axiomas que intentaba sistematizar las propiedades fundamentales de la convergencia de sucesiones de los espacios conocidos hasta ese momento. Pronto se supo que las ideas construidas alrededor de las sucesiones no eran lo suficientemente poderosas para lograr reproducir la idea general de espacio topológico.

Pero la problemática permanecía: en algunos espacios, como los espacios métricos, la convergencia de sucesiones basta para describir su topológia, en otros no. Había que sustituir a las sucesiones y su convergencia por objetos y procesos más generales y complejos.

Fue F. Riesz quien en 1908, en su artículo, introduce los conceptos de filtro y ultrafiltro, haciendo notar su potencial para definir puntos de acumulación y llevar a cabo procesos de completación. Pero es hasta 1937 que Henry Cartan reintrodujo estos conceptos presentándolos con claridad como los instrumentos adecuados para reemplazar a las sucesiones en el estudio de los espacios abstractos.

En esta sección estudiaremos los filtros y su convergencia, demostraremos que a través de ellos es posible definir el operador cerradura en cualquier espacio topológico.

Definición B.11.1. *Sea X un conjunto no vacío. Una colección no vacía $\mathcal{F}$ de subconjuntos no vacíos de X se llama* ***filtro*** *en X si se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) Si $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ y $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{F}_1$, entonces $\mathrm{F}_1 \in \mathcal{F}$.

(2) Si $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 \in \mathcal{F}$, entonces $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 \in \mathcal{F}$.

Es fácil probar que la condición (2) de la definición anterior es válida para cualquier cantidad finita de elementos de $\mathcal{F}$. Por otra parte, es común decir que la condición (1) significa que la colección $\mathcal{F}$ es cerrada bajo superconjuntos. De esta manera un filtro en un conjunto X es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos que es cerrada bajo superconjuntos y bajo intersecciones finitas.

El lector debe notar que la noción de filtro pertenece enteramente al ambito de la teoría de conjuntos. En lo que sigue involucramos a los filtros en el mundo de los espacios topológicos.

Ejemplos B.11.2.

(1) Es fácil verificar que en todo espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, la colección $\mathcal{V}(x)$ de todas las vecindades de un punto $x \in X$ es un filtro en X, dicho filtro es llamado ***filtro de vecindades*** *de x en X o* ***sistema de vecindades*** *del punto x.*

(2) Si X es un conjunto y $\emptyset \neq \mathrm{A} \subseteq X$, entonces la colección

$$\mathcal{F}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{B} : \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \subseteq X\}$$

es ul filtro en X. Es costumbre escribir $\mathcal{F}_p$ para denotar al filtro $\mathcal{F}(\mathrm{A})$ en el caso en que $\mathrm{A} = \{p\}$.

El sistema de vecindades de un punto en un espacio topológico es un ejemplo clásico de filtro. Como bien sabemos, para determinar al sistema de vecindades de un punto es suficiente conocer una base de vecindades del punto. En el caso más general de los filtros, la situación es la misma: un filtro puede ser determinado por subcolecciones especiales de él. A continuación introducimos la noción de base de filtro.

Definición B.11.3. *Dado un filtro $\mathcal{F}$ en un conjunto X, una subcolección no vacía $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$ es* ***una base de filtro para*** *$\mathcal{F}$ si ocurre que para todo $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ existe un $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{F}$.*

Enunciaremos una Proposición cuya demostración la pueden consultar en [TC11].

Proposición B.11.4. *Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de un filtro en X si y sólo si $\emptyset \notin \mathcal{B}$ y para cualesquiera $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \in \mathcal{B}$ existe $\mathrm{B}_3 \in \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{B}_3 \subseteq \mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2$.*

Observación B.11.5. *Si $\mathcal{B}$ es una colección no vacía de subconjuntos de un conjunto X que satisface la condición*

$$\emptyset \notin \mathcal{B} \text{ y para todo } \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \in \mathcal{B} \text{ existe } \mathrm{B}_3 \in \mathcal{B} \text{ tal que } \mathrm{B}_3 \subseteq \mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2,$$

entonces el filtro del cual $\mathcal{B}$ es base es la colección

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{\mathrm{F} \subseteq X : \text{ existe } \mathrm{B} \in \mathcal{B} \text{ tal que } \mathrm{B} \subseteq \mathrm{F}\}.$$

*El filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ es el **filtro generado por la base** $\mathcal{B}$.*

Definición B.11.6. *Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X es un **filtro maximal** si no existe un filtro $\mathcal{G}$ sobre X tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$. Los filtros maximales son también llamados **ultrafiltros**.*

Definición B.11.7. *Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto X **tiene la propiedad de la intersección finita** (o es **una familia centrada**) si para toda subfamilia finita $\mathcal{F}'$ no vacía de $\mathcal{F}$, se tiene que $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$.*

A continuación enunciaremos algunas consecuencias de la definición de ultrafiltro cuyas demostraciones las pueden consultar en [TC11].

Proposición B.11.8. *Sea X un conjunto. Para toda familia centrada $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X existe un ultrafiltro $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{C}$.*

Como cualquier filtro y cualquier base de filtro es una familia centrada, tenemos el siguiente colorario.

Corolario B.11.9. *Sea X un conjunto. Si $\mathcal{F}$ es un filtro (respectivamente, una base de filtro) entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{F}$.*

Teorema B.11.10. *Sea X un conjunto. Las siguientes proposiciones con equivalentes:*

(1) $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en X.

(2) $\mathcal{F}$ es una familia centrada maximal.

(3) $\mathcal{F}$ es una base de filtro con la siguiente propiedad: para todo $\mathrm{A} \subseteq X$, si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \neq \emptyset$ para cada $\mathrm{B} \in \mathcal{F}$, entonces $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$.

(4) $\mathcal{F}$ es una familia centrada con las siguientre propiedad: para todo $\mathrm{A} \subseteq X$, se tiene que $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ ó $X \setminus \mathrm{A} \in \mathcal{F}$.

Para caracterizar el operador cerradura usando filtros, necesitamos introducir las nociones de filtro convergente y de punto de acumulación de un filtro.

Definición B.11.11. *Sea X un espacio topológico.*

*(1) Un filtro $\mathcal{F}$ (en X) **converge** a un punto $x \in X$, y x es un **punto límite** de $\mathcal{F}$, si toda vecindad de x pertenece al filtro $\mathcal{F}$. Para denotar este hecho escribiremos $\mathcal{F} \to x$.*

*(2) Diremos que una base de filtro $\mathcal{B}$ **converge** a un punto $x \in X$, y x es un **punto límite** de $\mathcal{B}$, si el filtro generado por ella converge a x; esto es, si $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} \to x$.*

Definición B.11.12. *Sea X un espacio topológico.*

(1) Se dice que un punto $x \in X$ es ***punto de acumulación de un filtro*** *$\mathcal{F}$ si $x \in \bigcap\{cl_X(\mathrm{F}) : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$*

(2) Un punto $x \in X$ es ***punto de acumulación de una base de filtro*** *$\mathcal{B}$ si lo es del filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ generado por $\mathcal{B}$.*

Observación B.11.13.

(1) Note que si $\mathcal{F}$ es un filtro que converge a un punto x de un espacio topológico X, entonces el punto x es punto de acumulación del filtro $\mathcal{F}$. Efectivamente, sea $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ arbitrario. Como $\mathcal{F} \to x$, tenemos que $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Entonces $\mathrm{F} \cap \mathrm{V} \neq \emptyset$ para toda $\mathrm{V} \in \mathcal{V}(x)$. Esta última propiedad implica que $x \in cl_X(\mathrm{F})$. Por lo tanto, $x \in \bigcap\{cl_X(\mathrm{F}) : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$.

(2) El recíproco de la afirmación anterior no es cierto. Por ejemplo, considere en el espacio $\mathbb{R}^2$, con la topología inducida por la norma euclidiana, dos puntos diferentes $\vec{x}, \vec{y}$. Observe que el filtro $\mathcal{F}(\{\vec{x}, \vec{y}\})$ contiene tanto a $\vec{x}$ como a $\vec{y}$ como sus únicos puntos de acumulación, pero el filtro no converge a ningun punto de $\mathbb{R}^2$.

Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio topológico X, podemos considerar el conjunto $\mathrm{S}_{n_0} = \{x_m : m \geqslant n_0\}$ para cada $n_0 \in \mathbb{N}$. La colección $\mathcal{S} = \{\mathrm{S}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de filtro como podrá constatar el lector. El filtro generado por $\mathcal{S}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$, es llamado filtro generado por la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Enuciaremos las últimas consecuencias de esta breve sección cuyas demostraciones las omitiremos.

Proposición B.11.14. *Sea $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico X. Entonces, la sucesión s converga a un punto $p \in X$ (respectivamente, p es un punto de acumulación de s) si y sólo si el filtro generado por s, $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$, converge a p (respectivamente, p es un punto de acumulación de $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$).*

Ahora veremos que la convergencia de filtros determina completamente la topología de cualquier espacio.

Teorema B.11.15. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. Un punto x pertenece a $cl_X(\mathrm{A})$ si y sólo si existe una base de filtro $\mathcal{B}$ formada por subconjuntos de A tal que $\mathcal{B} \to x$ en X.*

B.12. Espacios compactos

Además de los trabajos de G. Cantor y R. Baire sobre las propiedades topológicas de la recta real, hay aportaciones de Bolzano, Borel, Weierstrass y Lebesgue sobre el conocimiento de la topología de los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$. Ellos demostraron en particular que para un subconjunto F de $\mathbb{R}^n$ las siguientes condiciones son equivalentes (1894, 1903, 1904):

(1) F es cerrado y acotado.

(2) (Borel-Lebesgue) Cada cubierta $\mathcal{C}$ de F formada por bolas abiertas contiene una subcolección finita $\mathcal{D}$ que aún cubre a F.

(3) (Bolzano-Weierstrass) Cada sucesión en F tiene un punto de acumulación.

Caracterizando así la compacidad de subconjuntos de los espacios euclidianos. R. Engenlking nos dice al respecto lo siguiente:
...cuando la Topología General estaba en su infancia, para definir nuevas clases de espacios topológicos se consideraba una propiedad del intervalo $[0, 1]$ *o de* $\mathbb{R}$ *y se analizaba la clase de espacios que satisfacían esa propiedad. La compacidad, la separabilidad y la conexidad fueron definidas siguiendo ese patrón.*

Precisamente, los resultados de Borel, Lebesgue, Bolzano y Weierstrass constituyen el origen de la definición de compacidad en toda su generalidad.

En 1923 y 1924, P. Alexandroff y P. Uryshon introducen, en forma independiente a otros matemáticos de la época, el concepto de compacidad y anuncian también varios resultados importantes que publican en su obra célebre artículo de 1929 *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*. Ellos definen a la compacidad inspirándose en la caracterización de Borel-Lebesgue de los subconjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$, y llaman a sus espacios topológicos bicompactos. Además de todo ello, introducen también la noción de compacidad local, definen la compactación por un punto (o compactación de Alexandroff) de un espacio localmente compacto y dan una serie de ejemplos de espacios que ahora son clásicos como el Duplicado de Alexandroff del círculo, el cuadrado lexicográfico, el espacio de la doble flecha y lo que ahora llamamos la línea de Alexandroff-Sorgenfrey.

En esta sección estudiaremos las propiedades más relevantes de la compacidad en espacios topológicos arbitrarios e introduciremos algunos otros conceptos relacionados a ella. Demostraremos el importante teorema de Tychonoff sobre la compacidad de un producto de espacios topológicos.

La formulación de la noción de compacidad como la conocemos hoy en día es debida a los matemáticos rusos P. S. Alexandroff y P. Uryshon.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X es **una cubierta** de X si $X = \bigcup \mathcal{U}$. Si además cada uno de los elementos de $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de X, entonces a $\mathcal{U}$ le llamaremos **cubierta abierta** de X. Por otro lado, si $\mathcal{U}$ es una cubierta de X y $\mathcal{V}$ es una subcolección de $\mathcal{U}$, diremos que $\mathcal{V}$ es una subcubierta de $\mathcal{U}$ si $\bigcup \mathcal{V} = X$.

Definición B.12.1. *Un espacio topológico X es* ***un espacio compacto*** *si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

Diremos que un subconjunto F de un espacio topológico X es **un subconjunto compacto** si al ser considerado con la topología relativa, es un espacio compacto. Por ejemplo, todo subconjunto finito de un espacio topológico es siempre un subconjunto compacto.
No es difícil darse cuenta que un espacio discreto X es compacto únicamente en

el caso en que es finito puesto que la familia $\{\{x\} : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Por otro lado, es sencillo notar que todo espacio indiscreto es siempre compacto, no importando su cardinalidad.

Ejemplos B.12.2.

(1) *El intervalo cerrado $[a,b]$ con $a < b$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. En efecto, considere una cubierta abierta $\mathcal{U}$ del intervalo $[a,b]$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{U}$ está formada por subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Consideremos ahora el siguiente conjunto:*

$$A = \{x \in [a,b] : \text{el intervalo } [a,x] \text{ puede ser cubierto por una cantidad finita de elementos de } \mathcal{U}\}.$$

Observemos primeramente que A es diferente del vacío pues $a \in A$. El conjunto A está acotado superiormente por el número b. Por el axioma del supremo existe $\alpha = \sup A$. Observe que $\alpha > a$ ya que si $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ es tal que $a \in \mathrm{U}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon < b$ y $[a, a+\varepsilon) \subseteq \mathrm{U}$. Esto significa que $a + \varepsilon \in A$.
Afirmamos que $\alpha = b$. Es claro que b es una cota superior de A, y por ello $\alpha \leqslant b$. Ahora, si $\alpha < b$, entonces $\alpha \in (a,b)$. Como $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $[a,b]$, existe $\mathrm{V} \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha \in \mathrm{V}$. Como V es abierto y $\alpha \in \mathrm{V}$, existe $\delta > 0$ tal que $(\alpha-\delta, \alpha+\delta) \subseteq \mathrm{V}$. Podemos suponer sin perder generalidad que $(\alpha-\delta, \alpha+\delta) \subseteq (a,b)$. Como $\alpha - \delta < \alpha$, existe un $z \in A$ tal que $\alpha - \delta < z$. Como $z \in A$, existen $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, ..., \mathrm{V}_n \in \mathcal{U}$ tales que $[a,z] \subseteq \mathrm{V}_1 \cup \mathrm{V}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{V}_n$. Entonces $[a, \alpha+\delta] \subseteq \mathrm{V}_1 \cup \mathrm{V}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{V}_n \cup \mathrm{V}$. En consecuencia, $\alpha + \delta \in A$, pero esto contradice la igualdad $\alpha = \sup A$. Por lo tanto $b = \alpha = \sup A$.
Un argumeto similar al anterior permite demostrar que $b \in A$. Con lo cual podemos concluir que $[a,b]$ es compacto.
Contrario a lo que sucede con los intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$, la recta real con su topología usual no es un espacio compacto. Por ejemplo, la cubierta abierta $\{(-n,n) : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ no tiene subcubiertas finitas.

(2) *El espacio $[0,\omega_1]$ donde ω_1 es el primer cardinal no numerable, es compacto. En efecto, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $[0,\omega_1]$. Para algún $\mathrm{U}_0 \in \mathcal{U}$, $\omega_1 \in \mathrm{U}_0$. Entonces, existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $(\alpha_0, \omega_1] \subseteq \mathrm{U}_0$. Sea $\mathrm{U}_1 \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha_0 \in \mathrm{U}_1$. Si $\alpha_0 > 0$, podemos encontrar $\alpha_1 < \alpha_0$ tal que $(\alpha_1, \alpha_0] \subseteq \mathrm{U}_1$. Tomemos ahora $\mathrm{U}_2 \in \mathcal{U}$ que contiene a α_1. Si $\alpha_1 > 0$, existe $\alpha_2 < \alpha_1$ tal que $(\alpha_2, \alpha_1] \subseteq \mathrm{U}_2$. De esta manera podemos continuar. Note que para algún $n \in \mathbb{N}$, deberá ocurrir que $\alpha_n = 0$, puesto que de lo contrario obtendríamos una sucesión estrictamente decreciente $\cdots < \alpha_{n+1} < \alpha_n < \cdots < \alpha_1 < \alpha_0$. Esto significaría que el conjunto $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene primer elemento, lo cual contradice la buena ordenabilidad de $[0,\omega_1]$.*
Observese ahora que la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n = 0$ implica que la subcolección finita $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, ..., \mathrm{U}_{\mathrm{n}+1}$ de elementos de $\mathcal{U}$ cubre a $[0,\omega_1]$.

Una demostración análoga nos permite afirmar que para cualquier número ordinal α, el espacio $[0,\alpha]$ es compacto. Además, si α es un ordinal límite,

$[0, \alpha)$ no es compacto pues la colección $\{[0, \beta) : \beta < \alpha\}$ es una cubierta de $[0, \alpha)$ que carece de subcubiertas finitas.

En algunas ocaciones es útil la siguiente formulación de la compacidad en términos de las interseccióñes finita de subespacios cerrados. Recuérdese que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto X tiene la propiedad de la intersección finita (o es una familia centrada) si para toda subfamilia finita $\mathcal{F}'$ no vacía de $\mathcal{F}$, se tiene que $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$.

Proposición B.12.3. *Un espacio X es compacto si y sólo si toda familia de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.*

Demostración. Sea X compacto, y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos cerrados en X. Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, entonces la familia $\mathcal{U} = \{X \setminus \mathrm{F} : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$ es una cubierta abierta de X. Por la compacidad de X, la cubierta $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita $\mathcal{U}'$. Sea $\mathcal{F}' = \{X \setminus \mathrm{U} : \mathrm{U} \in \mathcal{U}'\}$. Entonces $\bigcap \mathcal{F}' = \emptyset$, y $\mathcal{F}$ no tiene la propiedad de intersección finita.
Ahora supongamos que toda familia de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces $\mathcal{F} = \{X \setminus \mathrm{U} : \mathrm{U} \in \mathcal{U}\}$ es una familia de conjuntos cerrados en X, y $\bigcap \mathcal{F} = X \setminus \bigcup \mathcal{U} = \emptyset$. Esto implica que $\mathcal{F}$ no tiene la propiedad de la intercección finita, y entonces existe $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ finito tal que $\bigcap \mathcal{F}' = \emptyset$. Entonces la familia $\mathcal{V} = \{X \setminus \mathrm{F} : \mathrm{F} \in \mathcal{F}'\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. □

Uno de los hechos relevantes de la compacidad es que se preserva bajo operaciones básicas. Por ejemplo, a pesar de que la compacidad no es una propiedad hereditaria (el intervalo abierto $(0, 1)$ es un subespacio no compacto del espacio compacto $[0, 1]$), sí se preserva cuando consideramos subespacios cerrados.

Proposición B.12.4. *Sean X un espacio compacto y F un subespacio cerrado de X. Entonces F es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de F. Para todo $\mathrm{V} \in \mathcal{V}$ sea $\mathrm{U_V}$ un conjunto abierto de X tal que $\mathrm{V} = \mathrm{U_V} \cap \mathrm{F}$. Entonces $\mathcal{U} = \{\mathrm{U_V} : \mathrm{V} \in \mathcal{V}\} \cup (X \setminus \mathrm{F})$ es una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{U}'$ una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. La familia $\{\mathrm{U} \cap \mathrm{F} : \mathrm{U} \in \mathcal{U}'\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{V}$. □

Proposición B.12.5. *Si X es un espacio compacto, Y es un espacio, y existe una función continua $f : X \to Y$ tal que $f[X] = Y$, entonces Y es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de Y. Entonces $\mathcal{U} = \{f^{-1}(\mathrm{V}) : \mathrm{V} \in \mathcal{V}\}$ es una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{U}'$ una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Entonces la familia $\mathcal{V}' = \{f(\mathrm{U}) : \mathrm{U} \in \mathcal{U}'\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{V}$. □

La compacidad es una propiedad de suma importancia y gran fuerza. Por ejemplo, en el siguiente teorema se puede apreciar cómo los subconjuntos compactos de un espacio Hausdorff se "comportan como puntos".

Teorema B.12.6.

(1) Sea X un espacio de Hausdorff, y $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2 \subseteq X$ subespacios compactos de X. Si $\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_2 = \emptyset$, entonces existen subconjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $\mathrm{K}_1 \subseteq \mathrm{U}$ y $\mathrm{K}_2 \subseteq \mathrm{V}$.

(2) Sea X un espacio regular. Si $\mathrm{F} \subseteq X$ es cerrado y $\mathrm{K} \subseteq X$ es compacto y $\mathrm{F} \cap \mathrm{K} = \emptyset$, entonces existen abiertos ajenos U u V tales que $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{U}$ y $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{V}$.

Demostración.

(1) Fijamos un punto $y \in \mathrm{K}_1$. Para todo $x \in \mathrm{K}_2$, sean $\mathrm{U}_x^y, \mathrm{V}_x^y$ abiertos tales que $x \in \mathrm{U}_x^y$, $y \in \mathrm{V}_x^y$ y $\mathrm{U}_x^y \cap \mathrm{V}_x^y = \emptyset$. La familia $\mathcal{U} = \{\mathrm{U}_x^y \cap \mathrm{K}_2 : x \in \mathrm{K}_2\}$ es una cubierta abierta de K_2. Sea $\{\mathrm{U}_{x_1}^y \cap \mathrm{K}_2, ..., \mathrm{U}_{x_m}^y \cap \mathrm{K}_2\}$ una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Definamos $\mathrm{A}_y = \mathrm{U}_{x_1}^y \cup \cdots \cup \mathrm{U}_{x_m}^y$ y $\mathrm{B}_y = \mathrm{V}_{x_1}^y \cap \cdots \cap \mathrm{V}_{x_m}^y$.
Note ahora que la colección $\mathcal{W} = \{\mathrm{B}_y \cap \mathrm{K}_1 : y \in \mathrm{K}_1\}$ es una cubierta abierta de K_1. Como K_1 es compacto, existen $y_1, y_2, ..., y_n$ en K_1 tales que $\{\mathrm{B}_{y_1} \cap \mathrm{K}_1, ..., \mathrm{B}_{y_n} \cap \mathrm{K}_1\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{W}$. Definamos $\mathrm{U} = \mathrm{B}_{y_1} \cup \cdots \cup \mathrm{B}_{y_n}$ y $\mathrm{V} = \mathrm{A}_{y_1} \cap \cdots \cap \mathrm{A}_{y_n}$. Entonces $\mathrm{K}_1 \subseteq \mathrm{U}$, $\mathrm{K}_2 \subseteq \mathrm{V}$ y $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \emptyset$.

(2) Como X es regular, para cada $x \in \mathrm{K}$ existen abiertos ajenos U_x y V_x tales que $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{U}_x$ y $x \in \mathrm{V}_x$. Note que la familia $\mathcal{V} = \{\mathrm{V}_x \cap \mathrm{K} : x \in \mathrm{K}\}$ es una cubierta abierta de K. Siendo K compacto, existen $x_1, x_2, ..., x_n$ en K tales que $\{\mathrm{V}_{x_1} \cap \mathrm{K}, ..., \mathrm{V}_{x_n} \cap \mathrm{K}\}$ es una subcubierta abierta de $\mathcal{U}$ que cubre a K. Definamos ahora a $\mathrm{U} = \mathrm{U}_{x_1} \cap \cdots \cap \mathrm{U}_{x_n}$ y $\mathrm{V} = \mathrm{V}_{x_1} \cup \cdots \cup \mathrm{V}_{x_n}$. Entonces U y V son abiertos ajenos tales que $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{U}$ y $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{V}$.

$\square$

Corolario B.12.7.

(1) Si X es un espacio Hausdorff y K es un subespacio compacto de X, entonces K es cerrado en X.

(2) Todo espacio Hausdorff compacto es normal.

(3) Sean X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces f es una función cerrada.

Demostración.

(1) Si $x \in X \setminus \mathrm{K}$, aplicando el Teorema B.12.6 a los compactos $\mathrm{K}_1 = \{x\}$ y $\mathrm{K}_2 = \mathrm{K}$, podemos concluir que existen subconjuntos abiertos ajenos U y V tales que $\mathrm{K}_1 \subseteq \mathrm{U}$ y $\mathrm{K}_2 \subseteq \mathrm{V}$. Entonces $x \in \mathrm{U} \subseteq X \setminus \mathrm{K}$. De esta manera hemos probado que K es cerrado.

(2) Sean $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ conjuntos cerrados ajenos en X. Como X es compacto, tanto F_1 como F_2 son subespacios compactos. Como F_1 es ajeno de F_2, podemos aplicar el Teorema B.12.6 (inciso (1)) y concluir que existe abiertos ajenos U y V que satisfacen $\mathrm{F}_1 \subseteq \mathrm{U}$ y $\mathrm{F}_2 \subseteq \mathrm{V}$. Esto muestra que X es normal.

(3) Si $\mathrm{F} \subseteq X$ es cerrado, entonces F es compacto. La función $f \restriction_{\mathrm{F}}: \mathrm{F} \to f[\mathrm{F}]$ es continua y sobreyectiva. Siendo F compacto, $f[\mathrm{F}]$ es compacto. Pero todo subespacio compacto de un espacio Hausdorff, es un subconjunto cerrado.

□

Corolario B.12.8. *Sean X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff y $f : X \to Y$ un mapeo continuo. Si f es biyectivo, entonces f es un homeomorfismo.*

Proposición B.12.9. *Sean X un espacio y $\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n$ subespacios compactos de X tales que $X = \mathrm{X}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{X}_n$. Entonces X es compacto.*

Demostración. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, entonces para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathcal{U}_i = \{\mathrm{U} \cap \mathrm{X}_i : \mathrm{U} \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de X_i, y existe una subfamilia finita $\mathcal{U}'_i \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\{\mathrm{U} \cap \mathrm{X}_i : \mathrm{U} \in \mathcal{U}'_i\}$ cubre a X_i.
La familia $\mathcal{U}'_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}'_n$, es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ que cubre a X. □

B.13. Producto de espacios compactos

En esta sección demostraremos el célebre teorema de Tychonoff que asegura la compacidad del producto topológico de espacios compactos. Uno de los resultados de esta sección engloba alguna de las caracterizaciones, en términos de convergencia de filtros, de la compacidad.

Proposición B.13.1. *Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) X es un espacio compacto.

(2) Todo filtro en X tiene un punto de acumulación.

(3) Todo ultrafiltro en X tiene un punto de acumulación.

(4) Todo ultrafiltro en X converge.

Demostración.

(1) ⇒ (2) Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Consideremos la colección $cl(\mathcal{F}) = \{cl(\mathrm{F}) : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro, se tiene que

$$\emptyset \neq \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{F}_n \subseteq cl(\mathrm{F}_1) \cap cl(\mathrm{F}_2) \cap \cdots \cap cl(\mathrm{F}_n)$$

para cualesquiera $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, ..., \mathrm{F}_n \in \mathcal{F}$. Entonces la colección $cl(\mathcal{F})$ es una familia centrada de subconjuntos cerrados de X. Por la Proposición B.12.3, tenemos que $\bigcap cl(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Observese ahora que cualquier punto en el conjunto $\bigcap cl(\mathcal{F})$ es un punto de acumulación para $\mathcal{F}$.

(2) ⇒ (3) Esta implicación se cumple ya que cualquier ultrafiltro es un filtro.

(3) ⇒ (4) Supongamos que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en X. Por hipótesis existe $x \in \bigcap\{cl(\mathrm{F}) \mid \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$. Probaremos ahora que $\mathcal{F} \to x$. Consideremos una vecindad cualquiera de x, digamos V. Como $x \in cl(\mathrm{F})$ para toda $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ y $\mathrm{V} \in \mathcal{V}(x)$, tenemos que $\mathrm{V} \cap \mathrm{F} \neq \emptyset$. El Teorema B.11.10 implica ahora que $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$. Con lo cual podemos concluir que $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$, y por ende $\mathcal{F} \to x$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Supongamos que $\mathcal{U}$ no tiene subcubiertas finitas. Entonces la colección $\mathcal{C} = \{X \setminus \mathrm{U} : \mathrm{U} \in \mathcal{U}\}$ es una colección centrada de subconjuntos de X. Por la Proposición B.11.8 podemos considerar un ultrafiltro $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{C}$. Aplicando nuestra hipótesis, podemos garantizar la existencia de un punto $x \in X$ tal que $\mathcal{F} \to x$. Pero entonces x es un punto de acumulación de $\mathcal{F}$. Así que $x \in cl_X(X \setminus \mathrm{U})$ para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$. Pero como cada elemento de $\mathcal{U}$ es abierto, lo cual implica que $x \in X \setminus \mathrm{U}$ para toda $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$, contradiciendo el hecho de que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X. Entonces debe de existir una subcolección finita de $\mathcal{U}$ que cubre a X. Por lo tanto X es un espacio compacto.

$\square$

Teorema B.13.2. ***(Tychonoff)****. Sea $\{X_j : j \in J\}$ una colección no vacía de espacios topológicos no vacíos. El producto de Tychonoff $X = \prod_{j \in J} X_j$ es un espacio compacto si y sólo si X_j es compacto para cada $j \in J$.*

Demostración.

$\Rightarrow$] Sea $j \in J$ arbitraria. Como cada proyección $\pi_j : X \to X_j$ es una función continua y sobreyectiva, el espacio X_j es compacto.

$\Leftarrow$] Supongamos que cada elemento en $\{X_j : j \in J\}$ es un espacio compacto. Vamos a demostrar que $X = \prod_{j \in J} X_j$ es compacto probando que todo ultrafiltro en X converge. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro en X.
Afirmación. Para cada $j \in J$, la base de filtro $\pi_j[\mathcal{F}] = \{\pi_j[\mathrm{F}] : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$ es un ultrafiltro en X_j.
En efecto, sea $j \in J$ fijo. Es claro que $\pi_j[\mathcal{F}] \neq \emptyset$ y que cada elemento de $\pi_j[\mathcal{F}]$ es diferente del vacío. Por otra parte, si $\pi_j[\mathrm{F}] \in \pi_j[\mathcal{F}]$ y $\pi_j[\mathrm{F}] \subseteq \mathrm{A}$, entonces $\mathrm{F} \subseteq \pi_j^{-1}[\pi_j[\mathrm{F}]] \subseteq \pi_j^{-1}[\mathrm{A}]$. Como $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es cerrado bajo superconjuntos, $\pi_j^{-1}[\mathrm{A}] \in \mathcal{F}$. Entonces $\mathrm{A} = \pi_j[\pi_j^{-1}[\mathrm{A}]] \in \pi_j[\mathcal{F}]$.
Para verificar que $\pi_j[\mathcal{F}]$ es cerrada bajo intersecciones finitas, consideremos un par de elementos $\pi_j[\mathrm{F}_1], \pi_j[\mathrm{F}_2] \in \pi_j[\mathcal{F}]$. Como $\mathcal{F}$ es filtro y $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 \in \mathcal{F}$, tenemos que $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 \in \mathcal{F}$. Note ahora que $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 \subseteq \pi_j^{-1}[\pi_j[\mathrm{F}_1] \cap \pi_j[\mathrm{F}_2]]$. Entonces, $\pi_j^{-1}[\pi_j[\mathrm{F}_1] \cap \pi_j[\mathrm{F}_2]] \in \mathcal{F}$. Consecuentemente,

$$\pi_j[\mathrm{F}_1] \cap \pi_j[\mathrm{F}_2] = \pi_j[\pi_j^{-1}[\pi_j[\mathrm{F}_1] \cap \pi_j[\mathrm{F}_2]]] \in \pi_j[\mathcal{F}].$$

Finalmente, probemos que $\pi_j[\mathcal{F}]$ es un ultrafiltro. Supongamos que $\mathrm{U} \subseteq X_j$ es tal que $\mathrm{U} \cap \pi_j[\mathrm{F}] \neq \emptyset$ para todo $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$. Entonces $\pi_j^{-1}[\mathrm{U}] \cap \mathrm{F} \neq \emptyset$ para todo $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, $\pi_j^{-1}[\mathrm{U}] \in \mathcal{F}$. Entonces, $\mathrm{U} = \pi_j[\pi_j^{-1}[\mathrm{U}]] \in \pi_j[\mathcal{F}]$.
Por lo tanto, $\pi_j[\mathcal{F}]$ es un ultrafiltro en X_j.
Ahora, aplicando la hipótesis y la Proposición B.13.1, podemos garantizar la existencia de un punto $x_j \in X_j$ tal que $\pi_j[\mathcal{F}] \to x_j$ en X_j, para toda $j \in J$. Definamos $x : J \to \bigcup_{j \in J} X_j$ por medio de la regla: $x(j) = x_j$ para cada $j \in J$. Claramente la función x es un elemento de X. Probaremos ahora que $\mathcal{F} \to x$ en X.
Tomemos una vecindad V de x en X. Entonces existe un abierto canónico $\pi_{j_1}^{-1}[\mathrm{B}_{j_1}] \cap \cdots \cap \pi_{j_n}^{-1}[\mathrm{B}_{j_n}]$ tal que

$$x \in \pi_{j_1}^{-1}[\mathrm{B}_{j_1}] \cap \cdots \cap \pi_{j_n}^{-1}[\mathrm{B}_{j_n}] \subseteq \mathrm{V}$$

Como cada $x_{j_i} = \pi_{j_i}(x) \in \mathrm{B}_{j_i}$ y cada B_{j_i} es un abierto en X_{j_i}, tenemos que $\mathrm{B}_{j_i} \in \pi_{j_i}[\mathcal{F}]$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ (puesto que $\pi_{j_i}[\mathcal{F}] \to x_{j_i}$). De donde, existen $\mathrm{F}_{j_i} \in \mathcal{F}$ tales que $\mathrm{B}_{j_i} = \pi_{j_i}[\mathrm{F}_{j_i}]$ para toda i. Entonces $\mathrm{F}_{j_i} \subseteq \pi_{j_i}^{-1}[\mathrm{B}_{j_i}]$ para cada $i = 1, ..., n$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro, lo anterior implica que $\pi_{j_i}^{-1}[\mathrm{B}_{j_i}] \in \mathcal{F}$ para toda i. Pero entonces siendo $\mathcal{F}$ cerrado bajo intersecciones finitas, sucede que $\pi_{j_1}^{-1}[\mathrm{B}_{j_1}] \cap \cdots \cap \pi_{j_n}^{-1}[\mathrm{B}_{j_n}] \in \mathcal{F}$. Y como $\mathcal{F}$ es cerrado con respecto a superconjuntos, $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$. Podemos entonces concluir que toda vecindad de x en X pertenece al filtro $\mathcal{F}$. Esto último demuestra que $\mathcal{F} \to x$.

$\square$

Bibliografía

[Ark92] A. V. Arkhangelskii. *Topological function spaces.* Kluwer Academic, 1992.

[Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology.* Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[JDM85] D. Lutzer J. Dijkstra, T. Grilliot and Van Mill. Funtion spaces of low borel complexity. page 8, 1985.

[KV84] Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan. *Handbook of Set-Theorethic Topology.* Elsevier Science Publishers, 1984.

[MiN89] Kiiti Morita and Jun iti Nagata. *Topics in General Topology.* Elsevier Science, 1989.

[MN88] McCoy and Ntantu. *Topological Properties of Spaces of Continuous Functions.* Springer, 1988.

[Mun10] James R. Munkers. *Topology.* Prentice-Hall, 2010.

[TC11] Angel Tamariz and Fidel Casarrubias. *Manuscrito Topología General.* 2011.