Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

# REPERCUSIONES DE DISTINTAS AXIOMATIZACIONES DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS EN EL ANÁLISIS MATEMÁTICO REAL. AXIOMA DE ELECCIÓN, DETERMINACIÓN Y CONJUNTOS NO-MEDIBLES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICAS

PRESENTA:

IVÁN ONGAY VALVERDE

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MAGALI LOUISE MARIE FOLCH GABAYET
M. EN C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO.

México D.F., 2013

**Hoja de Datos del Jurado**

1. Datos del alumno

Ongay

Valverde

Iván

56 04 04 77

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

409006496

2. Datos del tutor 1

Dra.

Magali Louise Marie

Folch

Gabayet

3. Datos del tutor 2

M. en C.

Rafael

Rojas

Barbachano

4. Datos del sinodal 1

Dra.

Ana

Meda

Guardiola

5. Datos del sinodal 2

M. en C.

Osvaldo Alfonso

Téllez

Nieto

6. Datos del sinodal 3

Dr.

David

Meza

Alcántara

7.Datos del trabajo escrito.

Repercusiones de distintas axiomatizaciones de la Teoría de conjuntos en el Análisis Matemático Real.

Axioma de Elección, Determinación y conjuntos no-medibles.

127 p

2013

# Índice general

# Introducción

Todo inicia con una pregunta: ¿qué es el volumen? Arquímides, después de gritar "¡Eureka!" desnudo por la calle, lo definió como la cantidad de líquido desplazado por un objeto cuando se sumerge en el agua. Sin embargo, la noción de "sumergir en el agua" no es definible matemáticamente. Así que nuestra pregunta inicial puede leerse como "¿qué es el volumen matemáticamente?". Henri Lebesgue, en 1904, creó una teoría que permitía responder nuestra pregunta en cualquier espacio. Para él, cualquier medida (en particular el volumen), es una función que asigna a los conjuntos de puntos un número real mayor o igual que cero. Además, la función evaluada en el conjunto vacío da cero, y cumple que el valor de la unión finita o numerable de conjuntos ajenos es la suma de los valores de la función evaluada en cada uno[1]. La longitud, el área y el volumen son casos particulares de medidas sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, y Lebesgue se da cuenta de que sólo se les debe pedir una propiedad más para caracterizarlas: que al momento de mover (trasladar) un objeto (conjunto) la medida se mantenga.

El trabajo de Lebesgue no se detuvo ahí. De hecho, él dio un método de construcción general para crear medidas que se comportan como la longitud en el caso de $\mathbb{R}$, como el volumen en $\mathbb{R}^3$, o de forma análoga el hipervolumen en $\mathbb{R}^n$. Estas medidas (llamadas medida de Lebesgue de dimensión $n$) tienen la construcción más obvia: dado que lo único que sabemos medir con certeza son cajas, para conocer la medida de cualquier otro objeto es necesario aproximarnos cubriendo a éste con prismas rectangulares.

De primer momento, éste parecía ser el modelo ideal del volumen. Sin embargo, los sueños de Lebesgue (y de muchos otros) se derrumbaron pronto. En 1906, Giuseppe Vitali mostró un conjunto que no era medible para la medida de Lebesgue.

Nótese que desde el punto de vista matemático lo anterior no es ningún problema: los objetos matemáticos existen simplemente porque son expresables. Aún así, si se busca que un objeto matemático modele un fenómeno físico, como la intención de nuestra pregunta inicial, los objetos patológicos pueden ser problemáticos. La existencia de conjuntos no medibles es un inconveniente para

[1] Esta propiedad es llamada la $\sigma$-aditividad de una medida, matemáticamente, si la medida es $\mu$ y los conjuntos ajenos son $A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_n) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

la idea de usar a la medida de Lebesgue como una expresión matemática del volumen pues hasta ahora no se ha podido construir físicamente un conjunto no medible, o bien, no se han podido obtener dos bolas de un kilogramo cada una a partir de una bola que pese sólo un kilo[2].

Con esta línea de pensamiento, la demostración de Vitali, y el trabajo de Lebesgue, fueron puestos en tela de juicio. En los años subsecuentes hubo varios intentos de encontrar y suprimir a los causantes de estas anomalías[3]. Pero no fue sino hasta 1970 que el verdadero culpable de la existencia de conjuntos no medibles se dio a conocer. En ese año, Robert M. Solovay exhibió un modelo de la Teoría de Conjuntos donde todos los subconjuntos de reales son Lebesgue medibles. En su construcción muestra que el culpable de la creación de conjuntos no medibles es el Axioma de Elección, pero no todo él, pues años más tarde se mostró que se pueden tener modelos con el Axioma de Elecciones Dependientes, un debilitamiento del Axioma de Elección, donde todo sea medible.

El resultado de Solovay es muy importante pues, en la Lógica Matemática moderna (específicamente después de la publicación de los Teoremas de Gödel en los 30's), los axiomas ya no son verdades evidentes autoproclamadas, sino que se convirtieron en deseos para crear y entender mundos, o bien, herramientas que se usan a conveniencia de acuerdo al problema que se trabaje.

Recapitulemos: si los axiomas son herramientas y Solovay mostró que hay mundos donde todo es medible ¿qué axiomatización tienen estos mundos? ¿Qué axiomatización debemos usar para poder modelar el volumen con la medida de Lebesgue? ¿Cómo son los mundos que nos dejó Solovay? ¿Cómo son los mundos donde vale el Axioma de Elecciones Dependientes? ¿Vale la pena trabajar en ellos? ¿Qué tanto Análisis Matemático se puede hacer sin todo el poder del Axioma de Elección?

El presente trabajo tiene como objetivo mostrar que es posible hacer Análisis Matemático en un modelo donde sólo valga el Axioma de Elecciones Dependientes. Esto, de forma heurística, es un argumento para utilizar axiomatizaciones donde todo sea medible al modelar el mundo físico. Para lograr este objetivo se siguió el siguiente camino:

En primera instancia, al decidir quitar algún elemento, es importante preguntarse qué se pierde sin él. "¿Qué ganamos/obtenemos al trabajar con conjuntos no medibles?" es la pregunta que guía el capítulo 1 donde se construyen varios ejemplos de conjuntos no medibles y se encuentra que su existencia está relacionada con propiedades específicas de $\mathbb{R}$ como la posibilidad de bien ordenarlo, ser suma directa de grupos aditivos, tener base sobre $\mathbb{Q}$, etc. Es importante remarcar que algunas de estas implicaciones son ciertas sin utilizar todo el poder del Axioma de Elección, pero generan un conjunto no medible.

El capítulo 2 sirve como vínculo entre los otros dos respondiendo a las preguntas "¿por qué buscar mundos sin el Axioma de Elección cuando se pueden

[2] Esto es conocido como la paradoja de Banach-Tarski que fue demostrada años más tarde de la publicación de Vitali.

[3] Muchos de los intentos y avances en esta línea se pueden encontrar en [1].

buscar extensiones de la medida de Lebesgue?", "¿por qué podemos asumir que todo es medible?". Además, en este capítulo quedan claras las propiedades de $\mathbb{R}$ que dejan de ser válidas cuando no hay conjuntos no medibles.

Los teoremas y principios que son válidos en mundos completamente medibles se demuestran en el capítulo 3. Este capítulo cierra la argumentación al responder la pregunta "¿qué tanto análisis se puede hacer sin conjuntos no medibles?". De igual forma, esta pregunta redondea la búsqueda de esta introducción.

Finalmente, este trabajo está pensado para personas que tengan una madurez matemática parecida a la de los alumnos cursando la segunda mitad de la licenciatura en matemáticas. Por ello, al final se incluyeron dos apéndices, uno dedicado a la Teoría de la Medida (Apéndice A) y otro dedicado a Teoría de Conjuntos (Apéndice B). Ambos apéndices enumeran definiciones y teoremas que se suponen a lo largo de los capítulos con el propósito de ayudar a los lectores que no hayan profundizado en alguna de estas áreas.

De igual forma, en el trabajo se supone cierta noción topológica por lo que, en caso de duda, se recomienda revisar [13].

## 0.1. Notación

La siguiente es una lista de usos y términos que se utilizarán como notación en todo el trabajo:

- Si $A \subseteq X$ es un conjunto y $f : X \to B$ una función, $f[A] = \{f(x) \ / \ x \in A\}$ es la imagen del conjunto $A$ bajo la función $f$. Notemos que $f[A]$ es un subconjunto de $B$, es decir, $f[A] \subseteq B$.
- Con la notación anterior, si $C \subseteq B$ entonces $f^{-1}[C] = \{z \in X \ / \ f(z) \in C\}$ es la preimagen del conjunto $C$ bajo la función $f$. Notemos que $f^{-1}[C] \subseteq X$.
- $\kappa, \lambda$ denotarán cardinales (a menos que se especifique lo contrario). Para cada cardinal $\kappa$ su cardinal sucesor se denotará $\kappa^+$. Este sucesor se define como el mínimo ordinal que no es biyectable con $\kappa$.
- $\mu$ denotará una medida y en algunos casos $\lambda$ denotará la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{N}$ y $\omega$ denotarán el conjunto de números naturales (normalmente incluido el cero).
- $\mathbb{Z}$ denotará a los números enteros, $\mathbb{Q}$ a los racionales y $\mathbb{R}$ a los reales.
- $\alpha, \beta, \gamma, \xi$ denotarán ordinales. En este caso $\alpha^+$ denota el ordinal sucesor, a saber $\alpha \cup \{\alpha\}$.
- En los capítulos que no cree confusión $(x, y)$ denotará el par ordenado de los elementos $x$ y $y$. En las situaciones en que pueda confundirse con los intervalos se denotará como $\langle x, y\rangle$.

- $\{x, y\}$ es el conjunto (o par no ordenado) de los elementos $x$ y $y$. $\{x\}$ es el conjunto unitario de $x$.
- $\bigcup a = \{x \ / \ \exists y(y \in a \ \& \ x \in y\}$, es decir, el conjunto que tiene a los elementos de los elementos de $a$. Notemos que la unión indexada puede pensarse de la siguiente manera: $\bigcup\limits_{i \in I} a_i = \bigcup \{a_i \ / \ i \in I\}$.[4]
- $|\cdot|$ denotará el valor absoluto para números y la cardinalidad para conjuntos (que en algunos momentos también será denotada como $card(\cdot)$).

[4]Para saber más sobre la unión de un conjunto véase el axioma 4 de B.2.

# Capítulo 1

# Algunos conjuntos no medibles

"¿Qué ganamos al utilizar el Axioma de Elección en el Análisis Matemático Real?" es la pregunta que guía este capítulo. En él, nos centraremos en los ejemplos que usan mucha elección para su creación, específicamente, en ejemplos que creen conjuntos no medibles para la medida de Lebesgue (que llamaremos, simplemente, conjuntos no medibles).

Históricamente, el primer ejemplo de subconjuntos de números reales que no pertenecen a la $\sigma$-álgebra de los conjuntos medibles para la medida de Lebesgue son los conjuntos de Vitali, construidos por Giuseppe Vitali en 1906. Después de este ejemplo surgieron otros dados por Bernstein, Sierpińsky, Banach, etc.

Las construcciones de estos ejemplos se relacionan de formas distintas con diferentas áreas de las matemáticas (principalmente con el álgebra, la topología y la teoría de los conjuntos) y con diversas propiedades esenciales de la medida de Lebesgue (como su invarianza bajo traslación, su regularidad, entre otros).

A lo largo de este capítulo utilizaremos distintas definiciones y técnicas tanto de análisis como de otras áreas de las matemáticas que nos permitirán construir y entender algunos ejemplos de conjuntos y funciones no medibles.

Para entender un poco más qué es una medida y cómo se define una integral a partir de ella se recomienda revisar el apéndice A.

## 1.1. Conjuntos de Vitali

Para construir un conjunto de Vitali consideremos la siguiente relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}$[1]:

[1] $\equiv$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto $A$ si y sólo si 0) $\equiv \subseteq A \times A$ (si $(c, d) \in \equiv$ se escribe $c \equiv d$.); 1) Para todo $a \in A$, $a \equiv a$; 2) Si $a, b \in A$ y $a \equiv b$, entonces $b \equiv a$; y 3) Si

$$x \sim y \leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Utilizando el Axioma de Elección (A.E.) existe $V$ un conjunto de representantes de la relación $\sim$[2]. $V$ es un conjunto de Vitali. Mostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia es sencillo y se realiza de forma más general en teoría de grupos, ya que si pensamos a $\mathbb{Q}$ como un subgrupo del grupo abeliano aditivo $\mathbb{R}$, la relación $\sim$ es la que genera el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (pensándolo de este modo, $V$ sería la imagen de una función de elección de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$)[3].

La construcción de $V$ garantiza las siguientes dos propiedades:

Primero, si $r, s \in \mathbb{Q}$ entonces $(V + r) \cap (V + s) \neq \emptyset \leftrightarrow r = s$.[4] Como $V$ es distinto del vacío, por construcción, el regreso de la afirmación anterior es trivial. Para la primera implicación, supongamos que $(V + r) \cap (V + s) \neq \emptyset$. De esta forma existe $y$ tal que $x_1 + r = y = x_2 + s$ con $x_1, x_2 \in V$. Despejando obtenemos que $x_1 - x_2 = s - r \in \mathbb{Q}$, por lo que $x_1 \sim x_2$. Al ser $V$ un conjunto de representantes de $\sim$ lo anterior implica que $x_1 = x_2$, así $0 = r - s$, es decir, $r = s$.

La segunda propiedad es que $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} (V + q)$. Al ser $V$ un conjunto de representantes de $\sim$, si $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in V$ tal que $y \sim x$. Por la definición de $\sim$ tenemos que $y - x = p \in \mathbb{Q}$, por lo que $y = x + p \in V + p$.

Las dos propiedades demostradas nos ayudarán a probar el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.1.** *El conjunto $V$ construido anteriormente no es medible para la medida de Lebesgue ($\lambda$) sobre $\mathbb{R}$.*[5]

**Demostración**

Esta prueba se realizará por contradicción. Supongamos que $V$ es medible, utilizando la invarianza bajo traslación de $\lambda$ y las dos propiedades demostradas de $V$ tenemos que:

$$\sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(V) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(V + q) = \lambda(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} V + q) = \lambda(\mathbb{R}) = \infty.$$

Esto implica que $\lambda(V) > 0$.

Al tener $V$ medida positiva, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(V \cap [-n_0, n_0]) > 0$. En caso contrario, utilizando la continuidad de $\lambda$:[6]

$a, b, c \in A$ y $a \equiv b, b \equiv c$ entonces $a \equiv c$.

[2] Un conjunto de representantes $X$ de una relación de equivalencia $R$ sobre el conjunto $A$ cumple las siguientes dos propiedades: 1) Si $x, y \in X$ entonces $xRy$ si y sólo si $x = y$; y 2) si $z \in A$ entonces existe $x \in X$ tal que $xRz$.

[3] $f$ es una función de elección para el conjunto $a$ si y sólo si $f$ es una función $f : a \setminus \{\emptyset\} \to \bigcup a$ tal que $\forall x \in a \setminus \{\emptyset\}\ f(x) \in x$.

[4] Si $X \subseteq \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces $X + r = \{y \in \mathbb{R} \ / \ y = x + r,\ x \in X\}$. Notemos que esta definición se puede extender a cualquier grupo.

[5] La construcción de la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ se puede encontrar en A.5.

[6] La propiedad de continuidad de una medida se encuentra en A.3.3.

$$0 = \lim_{n\to\infty} \lambda(V \cap [-n,n]) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} (V \cap [-n,n])) = \lambda(V \cap \mathbb{R}) = \lambda(V).$$

Sea $Y = V \cap [-n_0, n_0]$ y $Z = \bigcup_{q\in([-1,1]\cap\mathbb{Q})} (Y+q)$. Notemos que

$$Z \subseteq [-n_0 - 1, n_0 + 1],$$

por lo que Z tiene medida finita (de hecho, $\lambda(Z) \leq 2n_0 + 2$), pero al ser $Y$ de medida positiva y un subconjunto de $V$:

$$\lambda(Z) = \lambda(\bigcup_{q\in([-1,1]\cap\mathbb{Q})} (Y+q)) = \sum_{q\in([-1,1]\cap\mathbb{Q})} \lambda(Y+q) = \sum_{q\in([-1,1]\cap\mathbb{Q})} \lambda(Y) = \infty.$$

Esta contradicción termina la prueba.

l.q.q.d.

La demostración anterior no es la clásica demostración de la no medibilidad de los conjuntos de Vitali, pero, como resalta Kharazishvili en [11], esta demostración sólo utiliza el hecho de que $\mathbb{Q}$ es un subgrupo aditivo (para la definición de $\sim$ y las dos propiedades), numerable (al utilizar aditividad de $\lambda$) y denso (al haber una cantidad numerable de ellos en $[-1,1]$). Esta observación nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 1.1.2.** Si $\Gamma$ es un subgrupo aditivo, numerable y denso de $\mathbb{R}$ definimos la relación $\sim_\Gamma$ como $x \sim_\Gamma y \leftrightarrow x - y \in \Gamma$. Sea $X$ un conjunto de representantes de la relación $\sim_\Gamma$. Diremos que $X$ es un conjunto del tipo Vitali y se le llamará un $\Gamma$-selector (por su nombre en inglés).

Notemos que los conjuntos de Vitali son $\mathbb{Q}$-selectores.

**Teorema 1.1.3.** *Sean $\Gamma$ un subgrupo aditivo, numerable y denso de $\mathbb{R}$ y $\mu$ una medida para alguna $\sigma$-álgebra*[7] *de $\mathbb{R}$ tal que:*

1. *$\mu$ es invariante bajo $\Gamma$ (es decir, si $g \in \Gamma$ y $E$ está en la $\sigma$-álgebra entonces $E + g \in dom(\mu)$ y $\mu(E) = \mu(E+g)$).*
2. *$[0,1] \in dom(\mu)$.*
3. *$0 < \mu([0,1]) < \infty$.*

*Entonces todo $\Gamma$-selector es no medible respecto a $\mu$.*

[7] La definición de una $\sigma$-álgebra se puede encontrar en A.1.1.

**Prueba**

Para poder reproducir la prueba que se da en el caso $\Gamma = \mathbb{Q}$ y $\mu = \lambda$ sólo es necesario mostrar que si $\mu$ cumple las hipótesis del teorema, entonces $[-m, m] \in dom(\mu)$ y es de medida positiva finita para toda $m \in \mathbb{N}$. Con ello, en la demostración anterior, se sustituye $\mathbb{Q}$ por $\Gamma$, $V$ por el $\Gamma$-selector y a $\lambda$ por $\mu$.

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Al ser $\Gamma$ denso para cada $k \geq 2$ existen $\gamma_k$ y $\delta_k$ tales que $\gamma_k \in (n - 1/k, n)$ y $\delta_k \in (n, n + 1/k)$. De esta forma las sucesiones $(\gamma_k)_{k\geq 2}$ y $(\delta_k)_{k\geq 2}$ convergen a $n$. Como $\mu$ es invariante bajo traslación y $[0,1] \in dom(\mu)$, tenemos que $[\gamma_k, \gamma_k + 1], [\delta_k, \delta_k + 1] \in dom(\mu)$ y

$$\mu([\delta_k, \delta_k + 1]) = \mu([\gamma_k, \gamma_k + 1]) = \mu([0, 1]) < \infty.$$

Así, al ser $k \geq 2$, tenemos que:

$$n - 1/2 \leq \gamma_k \leq n \leq \delta_k \leq n + 1/2 \leq \gamma_k + 1 \leq n + 1 \leq \delta_n + 1.$$

Por lo que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$[n, n + 1] \subseteq [\gamma_k, \delta_k + 1] = [\gamma_k, \gamma_k + 1] \cup [\delta_k, \delta_k + 1] \in dom(\mu)$$

pues $dom(\mu)$ es una $\sigma$-álgebra.

Al converger las sucesiones $(\gamma_k)_{k\geq 2}$, $(\delta_k)_{k\geq 2}$ a $n$, tenemos que

$$[n, n + 1] = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [\gamma_k, \delta_k + 1] \in dom(\mu)$$

y que

$$\mu([n, n+1]) \leq \mu([\gamma_k, \gamma_k + 1] \cup [\delta_k, \delta_k + 1]) \leq \mu([\gamma_k, \gamma_k + 1]) + \mu([\delta_k, \delta_k + 1]) < \infty.$$

Finalmente, basta remarcar que para toda $m \in \mathbb{N}$:

$$[-m, m] = \bigcup_{-m\leq n\leq m-1} [n, n + 1] \in dom(\mu)$$

y

$$0 < \mu([0, 1]) \leq \mu([-m, m]) \leq \sum_{-m\leq n\leq m-1} \mu([n, n + 1]) < \infty.$$

l.q.q.d.

## 1.2. Vitali multiplicativo

Inspirados en la construcción de Vitali utilizando la estructura aditiva del grupo $\mathbb{R}$, se puede construir un conjunto no medible con la estructura multiplicativa de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Tomemos la relación $\rho$ como sigue, si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x\rho y$ si y sólo si existe $r \in \mathbb{Q}^+ = \{p \in \mathbb{Q} \ / \ p > 0\}$ tal que $rx = y$. $\rho$ es una relación de equivalencia ya que si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x\rho x$ ya que $1x = x$; si $x\rho y$ entonces existe $r \in \mathbb{Q}^+$ tal que $rx = y$, como $r \neq 0$ tenemos que $x = y/r$ con $1/r \in \mathbb{Q}^+$, así $y\rho x$. Finalmente, si $x\rho y$ y $y\rho z$, tenemos que existen $r, r' \in \mathbb{Q}^+$ tales que $rx = y$ y $r'y = z$, de esta forma $r'rx = z$ y como $r'r \in \mathbb{Q}^+$, $x\rho z$.

Al igual que hicimos en la sección anterior, tomemos $P$ un conjunto de representantes de $\rho$. Para poder demostrar que éste no es un conjunto medible, es necesario utilizar la siguiente propiedad de la medida exterior $\lambda^*$ (y por tanto, de la medida de Lebesgue $\lambda$)[8]:

**Proposición 1.2.1.** *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ y para $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos*

$$sA = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x = sa, \ a \in A\},$$

*entonces $\lambda^*(sA) = |s|\lambda^*(A)$.*

**Prueba**

Sabemos que $\lambda^*(B) = \operatorname{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|b_i - a_i| \ / \ B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right\}$, tomando en cuenta que si $sA \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$, entonces tenemos que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(c_i/s, d_i/s)$ (o $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(d_i/s, c_i/s)$ dependiendo del signo de $s$) podemos realizar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\lambda^*(sA) = \operatorname{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|sb_i - sa_i| \ / \ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right\} = \\
= \operatorname{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|s||b_i - a_i| \ / \ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right\} = \\
= |s| \operatorname{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|b_i - a_i| \ / \ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right\} = |s|\lambda^*(A).
\end{aligned}$$

l.q.q.d.

Siguiendo las mismas estrategias de la sección anterior podemos demostrar que $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}^+} rP = \mathbb{R}$ y que si $r, s \in \mathbb{Q}^+$ tales que $r \neq s$ entonces $sP \cap rP = \{0\}$, al tener $\{0\}$ medida cero, tenemos que $rP$ y $sP$ se comportan como conjuntos disjuntos (respecto a la medida).

**Teorema 1.2.2.** *El conjunto $P$ es no medible.*

[8]Para entender la definición y algunas propiedades de $\lambda^*$ léase A.5

**Prueba**

Supongamos que sí lo es, en tal caso, como

$$\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \lambda(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}^+} rP) = \sum_{r\in\mathbb{Q}^+} r\lambda(P),$$

$\lambda(P) \neq 0$. Por tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda([-n,n] \cap P) > 0$. Notemos que:

$$2n = \lambda([-n,n]) = \lambda([-n,n] \cap \bigcup_{r\in\mathbb{Q}^+} rP) = \lambda(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}^+} [-n,n] \cap rP) =$$

$$= \sum_{r\in\mathbb{Q}^+} \lambda([-n,n]\cap rP) = \sum_{r\in\mathbb{Q}^+} r\lambda([-n/r,n/r]\cap P) \geq \sum_{r\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} r\lambda([-n/r,n/r]\cap P) \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} 1/k\lambda([-kn,kn] \cap P) \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1/k\lambda([-n,n] \cap P) = \lambda([-n,n]\cap P) \sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty.$$

l.q.q.d.

Para terminar esta sección es importante remarcar dos cosas. Primero, independientemente de que se puede repetir la prueba para la relación $x\rho' y$ si y sólo si existe $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ tal que $rx = y$, el teorema anterior implica que si $P'$ es un conjunto de representantes de $\rho'$ entonces $P'$ no es medible. Esto sucede ya que si tomamos el conjunto $R = P' \cup (-1)P'$, tenemos que $R$ es un conjunto de representantes de $\rho$. Notemos que si $P'$ es medible entonces $R$ lo sería también (de hecho, como $P' \cap (-1)P' = \{0\}$, tenemos que $\lambda^*(R) \leq \lambda^*(P') + \lambda^*((-1)P') = \lambda^*(P') + |-1|\lambda^*(P') = 2\lambda^*(P')$).

Al igual que en la sección pasada, el resultado anterior se puedo obtener con cualquier subgrupo multiplicativo denso y numerable de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ o de $\mathbb{R}^+$.

## 1.3. Conjuntos de Bernstein

Otro ejemplo de conjuntos no medibles son los conjuntos de Bernstein. En un inicio, los conjuntos de Bernstein sirvieron como contraejemplo a la idea que Cantor tenía para demostrar la hipótesis del continuo: dado que Cantor demostró que los conjuntos perfectos[9] tienen la misma cardinalidad de $\mathbb{R}$ pensaba demostrar que todo conjunto no numerable de números reales contenía un conjunto perfecto[10]. En 1908 Bernstein construye un conjunto que muestra que el plan de Cantor era irrealizable. Años más adelante se muestra que ese mismo conjunto es no medible.

[9] $P$ es un conjunto perfecto si y sólo si $P$ es un conjunto no vacío, cerrado y sin puntos aislados, es decir, para todo $x \in P$ y todo abierto $U$ de $x$ se tiene que $(P \cap U) \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

[10] Para saber más de ésta historia y de cómo se resolvieron las preguntas sobre la Hipótesis del Continuo véase [2].

**Definición 1.3.1.**

1. Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es totalmente imperfecto si y sólo si todo $A \subseteq E$ no es un conjunto perfecto.
2. $X \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto de Bernstein si y sólo si $X$ y $\mathbb{R} \setminus X$ son totalmente imperfectos.
3. Equivalentemente, $X$ es un conjunto de Bernstein si y sólo si para todo $P \subseteq \mathbb{R}$ perfecto y no vacío se tiene que $P \cap X \neq \emptyset$ y $P \cap (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset$.

Antes de mostrar que existen los conjuntos de Bernstein, es importante recordar los siguientes dos resultados:

**Lema 1.3.2.** *Existen tantos conjuntos perfectos como números reales.*

**Demostración**

El hecho de que $(-\infty, x]$ sea perfecto para todo $x \in \mathbb{R}$ muestra que al menos hay tantos conjuntos perfectos como reales. Por otra parte, cada conjunto abierto en $\mathbb{R}$ es la unión numerable de intervalos abiertos con extremos racionales, así que a lo más hay tantos como funciones de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, es decir, a lo más tantos como reales; de esta forma como los conjuntos perfectos son cerrados y hay un abierto por cada cerrado, tenemos que la cantidad de conjuntos perfectos es a lo más tantos como números reales. Así $|\mathbb{R}| = |\{P \ / \ P \ es \ perfecto\}|$.[11]

l.q.q.d.

**Lema 1.3.3.** *Todo conjunto perfecto tiene la misma cardinalidad de* $\mathbb{R}$.

**Demostración**

Sea $P$ un conjunto perfecto. Definimos recursivamente las siguientes sucesiones de intervalos cerrados enumeradas por medio de funciones $s : n \to \{0, 1\}$[12]:

Paso base (funciones con dominio 1):

Queremos dos intervalos tales que:

1. $I_{<0,0>} \cap I_{<0,1>} = \emptyset$.
2. $I_{<0,0>} \cap P \neq \emptyset$ y $I_{<0,1>} \cap P \neq \emptyset$.
3. Si $\ell$ denota la longitud del intervalo, $\ell(I_{<0,0>}), \ell(I_{<0,1>}) < 1/3$.

Estos intervalos existen ya que al ser $P$ un conjunto no vacío y sin puntos aislados, tiene al menos dos puntos. A estos dos puntos se les pueden construir intervalos con las características anteriores.

Paso recursivo:

Supongamos que ya tenemos definido el intervalo $I_s$ donde $s : n \to \{0, 1\}$ con $n \neq 0$. Definiremos los siguientes dos intervalos:

[11] Las propiedades básicas de $|\cdot|$ se pueden leer en B.5 y en B.6.

[12] Recordemos que las funciones son conjuntos, en este caso $s \subseteq n \times \{0, 1\}$ y que cada natural $n$ se puede pensar como el conjunto $n = \{0, 1, ..., n-1\}$. De esta forma $0 = \emptyset$, $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$, etc.

1. $I_{s\cup<n,0>}, I_{s\cup<n,1>} \subseteq I_s$.
2. $I_{s\cup<n,0>} \cap I_{s\cup<n,1>} = \emptyset$.
3. $I_{s\cup<n,0>} \cap P \neq \emptyset$ y $I_{s\cup<n,1>} \cap P \neq \emptyset$.
4. Finalmente, si $\ell$ denota la longitud del intervalo,
   $\ell(I_{s\cup<n,0>}), \ell(I_{s\cup<n,1>}) < (1/3)^n$.

Estos intervalos existen ya que al ser $P$ un conjunto no vacío y sin puntos aislados, al tener $I_s$ interior no vacío y ser $P \cap I_s \neq \emptyset$, la intersección tiene al menos dos puntos. Alrededor de estos dos puntos se pueden construir intervalos con las características anteriores.

Definamos una función inyectiva que nos permita mostrar que $P$ tiene al menos la misma cardinalidad de $\mathbb{R}$ (o bien, de ${}^{\omega}2$). Tomemos $\varphi : {}^{\omega}2 \to P$[13] tal que $\varphi(f) \in \bigcap_{n\in\omega} I_{f|_n}$[14].

Veamos que $\varphi$ está bien definida.

Para ello necesitamos mostrar que $\varphi(f)$ existe y es un elemento de $P$ para toda $f \in {}^{\omega}2$. Notemos que para cada $f \in {}^{\omega}2$ la sucesión de intervalos $(I_{f|_n})_{n\in\omega}$ es anidada (es decir, $I_{f|_{n+1}} \subseteq I_{f|_n}$)[15], de esta forma, utilizando el teorema de Intersección de Cantor[16], tenemos que $\bigcap_{n\in\omega} I_{f|_n} = \{x_f\}$ para algún $x_f \in \mathbb{R}$, por lo que $\varphi(f) = x_f$. Finalmente, $\varphi(f) \in P$ ya que la sucesión $\{P \cap I_{f|_n}\}$ cumple las hipótesis del Teorema de Intersección de Cantor y de esta forma $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega} (I_{f|_n} \cap P) \subseteq \bigcap_{n\in\omega} I_{f|_n} = \{x_f\}$.

Por otra parte, $\varphi$ es inyectiva. Tomemos $f, g \in {}^{\omega}2$ distintas, entonces existe $m \in \omega$ tal que $f(m) \neq g(m)$, por construcción, tenemos que $I_{f|_{m^+}} \cap I_{g|_{m^+}} = \emptyset$, $\varphi(g) \in I_{g|_{m^+}}$ y $\varphi(f) \in I_{f|_{m^+}}$, por lo que necesariamente $\varphi(f) \neq \varphi(g)$.

Lo anterior muestra que $|\mathbb{R}| = |{}^{\omega}2| \leq |P| \leq |\mathbb{R}|$.

l.q.q.d.

Con los resultados anteriores, y suponiendo que $\mathbb{R}$ es bien ordenable, ya podemos construir un conjunto de Bernstein. Sea $\alpha = \mathfrak{c} = \text{mín}\,\{\beta \;/\; card(\beta) = |\mathbb{R}|\}$[17].

---

[13] ${}^{\omega}2 = \{f \;/\; f : \omega \to 2 = \{0, 1\}\}$.

[14] Si $f : A \to B$ es una función y $C \subseteq A$; $f|_C$ es $f$ restringida a $C$, es decir, la función con dominio $C$ que tiene la misma regla de correspondencia de $f$.

[15] Esto sucede por la forma en que se construyeron los intervalos $I_s$ y el hecho de que $f|_{n+1} = f|_n \cup \{< n, f(n) >\}$.

[16]

**Teorema 1.3.4** (Intersección de Cantor)**.** *Sea $\langle X, d\rangle$ un espacio métrico completo y sea $\{F_n\}$ una sucesión anidada de subconjuntos cerrados y no vacíos de $X$ tal que $\lim_{n\to\infty} Diam(F_n) = 0$ (donde $Diam(A) = \sup\{d(x, y) \;/\; x, y \in A\}$). Entonces existe $x \in X$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} F_n = \{x\}$.*

[17] Es costumbre en teoría de conjuntos nombrar a los números ordinales ($OR$) con las primeras letras del alfabeto griego ($\alpha, \beta, \gamma$). La sección B.3 está dedicada a los números ordinales.

Por el lema 1.3.2, podemos numerar a la familia de todos los conjuntos perfectos $\mathcal{P}$ utilizando $\alpha$ de las siguientes dos formas:

$$\mathcal{P} = \{P_\xi \ / \ \xi < \alpha \ tal \ que \ \xi \ es \ par\}$$ [18]

y

$$\mathcal{P} = \{P_\xi \ / \ \xi < \alpha \ tal \ que \ \xi \ es \ impar\}.$$

Construiremos $\{x_\xi \ / \ \xi < \alpha\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que:

1. $\xi < \zeta < \alpha$ entonces $x_\xi \neq x_\zeta$.
2. Para todo $\xi < \alpha$, $x_\xi \in P_\xi$.

Para lograrlo, utilizaremos recursión transfinita como está definida en B.4.3:

Tomemos $\beta < \alpha$ y supongamos que para para todo $\xi < \beta$ ya tenemos definido $x_\xi$. Como $card(\beta) < card(\alpha) = |\mathbb{R}| = |P_\beta|$ tenemos que $P_\beta \setminus \{x_\xi \ / \ \xi < \beta\} \neq \emptyset$. Definimos $x_\beta$ tal que $x_\beta \in P_\beta \setminus \{x_\xi \ / \ \xi < \beta\}$.

Sea $X = \{x_\xi \ / \ \xi \ es \ par\}$, $X$ es un conjunto de Bernstein. Si $P$ es un conjunto perfecto, entonces existen $\xi$ par y $\zeta$ impar tales que $P_\xi = P = P_\zeta$. Notemos que $x_\xi \in P_\xi \cap X$ y que $x_\zeta \notin X$ por lo que $x_\zeta \in (\mathbb{R} \setminus X) \cap P_\zeta$, es decir $P_\xi \cap X \neq \emptyset$ y $(\mathbb{R} \setminus X) \cap P_\zeta \neq \emptyset$.

**Teorema 1.3.5.** *$X$ no es medible respecto a la medida de Lebesgue $\lambda$.*

Para demostrar este teorema utilizaremos el siguiente resultado:

**Teorema 1.3.6.** *$\mathbb{R}$ es Lindelöf*[19].

**Prueba**

Aquí demostraremos algo un poco más fuerte, veremos que para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ y $C$ una cubierta abierta de $A$, existe $C'$ una subcubierta numerable. Para demostrarlo, recordemos que $\mathbb{R}$ tiene una base topológica numerable $\{Q_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ (a saber, los intervalos con extremos racionales).

Sea $\{U_\eta \ / \ \eta \in H\}$ una cubierta de $A$, sabemos que para cada $\eta \in H$, $U_\eta = \bigcup_{Q_n \subseteq U_\eta} Q_n$, podemos tomar $n_1 < n_2 < n_3 ...$ tales que $Q_{n_i} \subseteq U_\eta$ para alguna $\eta$. De esta forma $A \subseteq \bigcup_{\eta \in H} U_\eta = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_{n_i}$.

Finalmente, tomemos $U_{\eta_i}$ tal que $Q_{n_i} \subseteq U_{\eta_i}$ (esto lo podemos hacer utilizando Axioma de Elección Numerable). De esta forma, $\{U_{\eta_i} \ / \ i \in \mathbb{N}\}$ es una subcubierta numerable de $\{U_\eta \ / \ \eta \in H\}$.

[18] $\alpha$ es un ordinal par (impar) si y sólo si su parte finita es par (impar). La existencia y noción de parte finita de un ordinal se encuentra en B.3.9.

[19] Esto quiere decir que toda cubierta abierta de $\mathbb{R}$ tiene una subcubierta numerable.

l.q.q.d.

**Prueba del teorema 1.3.5**

Si $X$ fuera medible, entonces al ser $\mathbb{R} = X \cup (\mathbb{R} \setminus X)$ tenemos que $X$ o $\mathbb{R} \setminus X$ debe tener medida positiva. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda(X) > 0$, por regularidad de la medida, sabemos que existe $F \subseteq X$ conjunto cerrado tal que $\lambda(F) > 0$. Definimos $F' = \{x \in F \ / \ \forall\ U \text{ abierto},\ x \in U,\ |U \cap F| > \aleph_0\}$[20], el conjunto de puntos de condensación de F. Por construcción, $F' \subseteq F \subseteq X$. Veremos que $F'$ es un conjunto perfecto:

1. Supongamos que $F' = \emptyset$, entonces, para cada $x \in F$ existe $U_x$ abierto tal que $|F \cap U_x| \leq \aleph_0$, notemos que $\{U_x \ / \ x \in F\}$ es una cubierta abierta de $F \subseteq \mathbb{R}$. Al ser F cerrado, $\{U_x \ / \ x \in F\} \cup \{\mathbb{R} \setminus F\}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{R}$. Al ser $\mathbb{R}$ Lindelöf, existe una subcubierta numerable $\{U_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ que nos proporciona una cubierta numerable de $F$, a saber $\{U_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \setminus \{\mathbb{R} \setminus F\}$. De esta forma, $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Así $|F| = |\bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \cap F)| \leq \aleph_0$ ya que, utilizando Axioma de Elección Numerable, unión numerable de conjuntos a lo más numerables, es a lo más numerable. Por otra parte, las propiedades de $\lambda$ implican que al tener $F$ medida positiva, no es numerable (ya que todo conjunto numerable tiene medida cero).

   Esto es una contradicción, por lo tanto $F' \neq \emptyset$.

2. Para ver que $F'$ es cerrado, tomemos un punto de acumulación[21] $h$ de $F'$. Como $F' \subseteq F$, $h$ también es punto de acumulación de $F$, al ser $F$ cerrado tenemos que $h \in F$. Ahora bien, si $U$ es un abierto al cual pertenece $h$, al ser $h$ punto de acumulación de $F'$ existe $g \in F' \cap U$. Como $U$ es un abierto donde está $g$, por definición de $F'$ tenemos que $|U \cap F| > \aleph_0$, por lo cual, $h \in F'$.

3. Supongamos que existe $h \in F'$ y $U$ abierto tales que $F' \cap U = \{h\}$. Esto quiere decir que para todo $y \in U \cap (F \setminus \{h\})$ existe $U_y$, abierto que contiene a $y$, tal que $|U_y \cap (U \cap (F \setminus \{h\}))| \leq \aleph_0$. Una vez más, $\{U_y \ / \ y \in U \cap (F \setminus \{h\})\}$ es una cubierta abierta de $U \cap (F \setminus \{h\})$, y por la demostración de 1.3.6, existe una subcubierta numerable $\{U_{y_n} \ / \ n \in \omega\}$. Notemos que $|U \cap (F \setminus \{h\})| = |\bigcup_{n \in \omega} (U_{y_n} \cap (U \cap (F \setminus \{h\})))| \leq \aleph_0$, pero $h \in F'$, por lo que $|U \cap F| > \aleph_0$, y así $|U \cap (F \setminus \{h\})| > \aleph_0$.

   Lo anterior es una contradicción. Por lo tanto, $F'$ no tiene puntos aislados.

De esta forma probamos que $F'$ es un conjunto perfecto contenido en $X$. Esto también es una contradicción, ya que $X$ es un conjunto de Bernstein. Por lo tanto, $X$ no es medible.

[20] A saber, $|\mathbb{N}| = |\omega| = |\omega_0| = \aleph_0$.

[21] Si $X$ es un espacio topológico, y $A \subseteq X$, $h$ es un punto de acumulación de $A$ si y sólo si para todo $U$ abierto que contenga a $h$, $U \cap A \neq \emptyset$.

l.q.q.d.

La demostración de este teorema nos da los siguientes corolarios:

**Corolario 1.3.7.** *Todo conjunto medible de medida positiva tiene la cardinalidad de los reales.*

**Demostración**

Por la prueba del teorema anterior, todo conjunto medible de medida positiva contiene un conjunto perfecto y por el lema 1.3.3, tenemos que éste es biyectable con los reales.

l.q.q.d.

**Definición 1.3.8.**

1. Si $\mu$ es una medida sobre $Y$,

$$N(\mu) = \{X \ / \ X \in dom(\mu),\ \mu(X) = 0\}$$

es la familia de los conjuntos nulos de $\mu$. Si $\mu$ es una medida completa[22], entonces $N(\mu)$ es el ideal[23] de los conjuntos nulos.

2. Al ideal de los nulos se le puede asociar el cardinal:

$non(N(\mu)) = \text{mín}\{card(X) \ / \ X \subseteq Y \ y \ X \notin N(\mu)\}$[24].

**Corolario 1.3.10.** *Si $\lambda$ denota la medida de Lebesgue y $non(N(\lambda)) = \kappa < |\mathbb{R}|$, entonces existe un conjunto no medible.*

**Prueba**

Si $non(N(\lambda)) = \kappa < |\mathbb{R}|$ entonces existe $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|X| = \kappa < |\mathbb{R}|$ y $\lambda^*(X) > 0$, por el corolario 1.3.7, $X$ no es medible.

l.q.q.d.

Para terminar esta sección, es importante remarcar que la construcción de Bernstein sirve para crear diversos tipos de conjuntos. Aunque en secciones posteriores haremos uso de estos métodos, aquí daremos un adelanto:

**Teorema 1.3.11.** *Existe un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ que es de Vitali y de Bernstein simultáneamente.*

---

[22] Véase A.3.4.

[23] $I$ es un ideal sobre $Y$ si y sólo si $I \subseteq \wp(Y)$ y es tal que si $A, B \in I$ entonces $A \cup B \in I$ y si $C \subseteq A \in I$ entonces $C \in I$. Se dice que $I$ es un ideal propio si y sólo si $Y \notin I$.

[24] En general, a cualquier ideal propio $I$ sobre $Y$ se le pueden asociar los siguientes invariantes cardinales:

**Definición 1.3.9.** $add(I) = \text{mín}\left\{card(H) \ / \ H \subseteq I \ \& \ \bigcup H \notin I\right\}$,

$cov(I) = \text{mín}\left\{card(H) \ / \ H \subseteq I \ \& \ Y \subseteq \bigcup H\right\}$,

$non(I) = \text{mín}\{card(X) \ / \ X \subseteq Y \ \& \ X \notin I\}$,

$cof(I) = \text{mín}\{card(H) \ /\forall A \in I, \exists B \in H(A \subseteq B)\}$.

**Demostración**

Utilizaremos la misma notación de los conjuntos perfectos que en la construcción del conjunto de Bernstein. Al igual que en esa construcción, crearemos una sucesión de longitud $\alpha = \mathfrak{c}$ por medio de recursión.

Tomemos $\beta < \alpha$ y supongamos que para todo $\xi < \beta$ ya tenemos definido $x_\xi$. Al ser $|\bigcup\{\mathbb{Q} + x_\xi \ / \ \xi < \beta\}| = card(\beta) \cdot \aleph_0 = \text{máx}\{card(\beta), \aleph_0\} < |\mathbb{R}|$ (pues $\beta < \alpha$ y $\mathbb{Q}$ es numerable[25]) tenemos que $P_\beta \setminus \bigcup\{\mathbb{Q} + x_\xi \ / \ \xi < \beta\} \neq \emptyset$. Definimos $x_\beta$ como cualquier elemento de $P_\beta \setminus \bigcup\{\mathbb{Q} + x_\xi \ / \ \xi < \beta\}$.

Sea $X' = \{x_\xi \ / \ \xi \ es\ par\}$. Sabemos que $X'$ es de Bernstein, con la propiedad de que si $x, y \in X'$ con $x \neq y$ entonces $x - y \notin \mathbb{Q}$ (en caso contrario, $y \in \mathbb{Q} + x$, lo cual es imposible por construcción). Lo anterior hace a $X'$ un conjunto de representantes parcial de la partición de Vitali. Utilizando Axioma de Elección (o bien, Lema de Zorn) podemos extender $X'$ a un conjunto de representantes $X$ sobre $\mathbb{R}$.

Sin pérdida de generalidad, $X \cap \{x_\xi \ / \ \xi \ es\ impar\} = \emptyset$, ya que si $y \in X \cap \{x_\xi \ / \ \xi \ es\ impar\}$, podemos sustituir a $X$ por $X \cup \{y + 1\} \setminus \{y\}$ que sigue siendo un conjunto de representantes de la partición de Vitali. Por construcción, $X$ es un conjunto de Vitali, y claramente $X$ es un conjunto de Bernstein pues $\{x_\xi \ / \ \xi \ es\ par\} \subseteq X$ y $X \cap \{x_\xi \ / \ \xi \ es\ impar\} = \emptyset$.

l.q.q.d.

## 1.4. Bases de Hamel

Uno de los primeros enunciados que demostramos utilizando el Axioma de Elección es que todo espacio vectorial tiene base. Hamel a principios de 1900 se dio cuenta de que, al ser $\mathbb{Q}$ un campo, $\mathbb{R}$ se puede considerar como un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Las bases de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ son llamadas bases de Hamel.

Como es imaginable, las bases de Hamel sólo existen si suponemos parte del Axioma de Elección sobre $\mathbb{R}$ (que es equivalente a suponer que $\mathbb{R}$ es bien ordenable), y generan de diversas formas conjuntos no medibles.

**Definición 1.4.1.** $H$ es una base de Hamel si y sólo si $H$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}$ sobre el campo $\mathbb{Q}$.

Como veremos más adelante, las bases de Hamel no tienen porque ser no medibles, pero siempre que existe una genera un conjunto del tipo Vitali (mismos que ya se demostró que no son medibles en el teorema 1.1.3). Sin embargo, en esta sección tomaremos otro camino:

**Lema 1.4.2** (Propiedad de Steinhaus)**.** *Si $\lambda$ denota la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ y $A$ es un subconjunto medible respecto a $\lambda$ entonces* $\lim\limits_{h \to 0} \lambda(A \cap (A + h)) = \lambda(A)$.

[25]Las propiedades principales de las operaciones cardinales se pueden leer en B.6.3.

**Prueba**

Para demostrar esta propiedad, la probaremos primero para intervalos, después para abiertos de medida finita, luego para compactos y finalmente para todos los conjuntos medibles.

Primer paso. Sea $(a,b)$ un intervalo y tomemos $\epsilon > 0$ (lo probaremos sólo para $h > 0$, para $h < 0$ la demostración es análoga y para sucesiones combinadas, se tiene como resultado de las dos anteriores). Notemos que si $\epsilon < b - a$ entonces $(a,b) \cap ((a,b)+\epsilon) = (a,b) \cap (a+\epsilon, b+\epsilon) = (a+\epsilon, b)$, de esta forma

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lambda((a,b)\cap((a,b)+\epsilon)) = \lim_{\epsilon\to 0} \lambda((b, a+\epsilon)) = \lim_{\epsilon\to 0} b - a - \epsilon = b - a = \lambda((a,b)).$$

Segundo paso. Tomemos $U$ un abierto de medida finita. Al ser el conjunto $\{(a,b) \ / \ a,b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}\}$ una base de la topología usual de $\mathbb{R}$, tenemos que $U = \bigcup_{(a,b)\subseteq U} (a,b)$. Dado que la unión de dos intervalos con intersección no vacía es un intervalo y $\mathbb{R}$ es c.c.c. [26](ya que al tener una base numerable, y cada abierto contener un miembro de la base, se tiene que una colección de abiertos disjuntos contiene cada uno al menos un elemento de la base distinto a todos los demás. Por lo tanto esta colección es a lo más numerable), tenemos que $U = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$ intervalos disjuntos con $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Iniciemos con $n < \infty$. Al ser $n$ finito podemos utilizar la propiedad lineal de los límites y el caso de los intervalos:

$$\lambda(U) = \sum_{i=1}^{n} \lambda((a_i,b_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{\epsilon\to 0} \lambda((a_i,b_i)\cap((a_i,b_i)+\epsilon)) =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{i=1}^{n} \lambda((a_i,b_i)\cap((a_i,b_i)+\epsilon)) = \lim_{\epsilon\to 0} \lambda(\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\cap((a_i,b_i)+\epsilon)) \leq$$

$$\leq \lim_{\epsilon\to 0} \lambda(\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\cap\bigcup_{j=1}^{n}((a_j,b_j)+\epsilon)) = \lim_{\epsilon\to 0} \lambda(U\cap(U+\epsilon)) \leq \lambda(U).$$

Ahora analizemos la situación en que $n = \infty$. En este caso, tenemos que $\lim_{i\to\infty} b_i - a_i = 0$ y que $\lambda(U) = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < \infty$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la sucesión $\{b_i - a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ está acomodada de manera decreciente. Sabemos que para cada $\epsilon > 0$ existe una mínima $m_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n > m_\epsilon$, $b_n - a_n < \epsilon$, al ser la suseción decreciente sabemos que si $k \geq m_\epsilon$ entonces $b_k - a_k \geq \epsilon$. Es importante notar que si $\epsilon \to 0$ entonces $m_\epsilon \to \infty$. De esta forma:

[26]Un espacio topológico $X$ es c.c.c (o bien, tiene la condición de la cadena contable) si y sólo si toda colección de abiertos disjuntos es a lo más numerable.

$$\lambda(U) \geq \lim_{\epsilon\to 0} \lambda(U \cap (U+\epsilon)) \geq \lim_{\epsilon\to 0} \lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i) \cap ((a_i,b_i)+\epsilon)) =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \max\{b_i - a_i - \epsilon, 0\} = \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{i=1}^{m_\epsilon}(b_i - a_i - \epsilon).$$

Como la sucesión $\{1/n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a cero, existe $k_0$ tal que si $n \geq k_0$, $1/n^2 < \epsilon$, o bien $1/n < n\epsilon$. Sea $n_\epsilon = \max\{n \in \mathbb{N} \ / \ 1/n > n\epsilon\}$, como $1/n^2$ es decreciente si $k \geq n_\epsilon$ entonces $1/k > k\epsilon$. En particular $n_\epsilon \to \infty$ si $\epsilon \to 0$. Sea $N_\epsilon = \min\{m_\epsilon, n_\epsilon\}$, notemos que si $\epsilon \to 0$ entonces $N_\epsilon \to \infty$. Con esta información:

$$\lambda(U) \geq \lim_{\epsilon\to 0} \lambda(U \cap (U+\epsilon)) \geq \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{i=1}^{m_\epsilon}(b_i - a_i - \epsilon) \geq$$

$$\geq \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{i=1}^{N_\epsilon}(b_i - a_i - \epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{i=1}^{N_\epsilon}(b_i - a_i) - \epsilon N_\epsilon \geq$$

$$\geq \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{i=1}^{N_\epsilon}(b_i - a_i) - 1/N_\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{i=1}^{N_\epsilon}(b_i - a_i) - \lim_{\epsilon\to 0} 1/N_\epsilon = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) + 0 = \lambda(U).$$

Tercer paso. Sea $F$ un compacto. Al ser acotado, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F \subseteq (-n,n) = X$ (y por tanto, $F \cap (F+\epsilon) \subseteq X \cap (X+\epsilon)$). Como $\mathbb{R} \setminus F$ es abierto, $X \setminus F = X \cap \mathbb{R} \setminus F$ es abierto.

Notemos los siguientes resultados de operaciones de unión e intersección de conjuntos:

$$(X \setminus F) + \epsilon = (X+\epsilon) \setminus (F+\epsilon),$$

$$(X \cap (X+\epsilon)) \setminus (F+\epsilon) \subseteq (X+\epsilon) \setminus (F+\epsilon),$$

$$(X \setminus F) \cap ((X \setminus F) + \epsilon) = (X \cap (X+\epsilon)) \setminus (F \cup (F+\epsilon)),$$

$$(X \cap (X+\epsilon)) \setminus (F \cap (F+\epsilon)) = ((X \cap (X+\epsilon)) \setminus F) \cup ((X \cap (X+\epsilon)) \setminus (F+\epsilon)),$$

y

$$((X \cap (X+\epsilon)) \setminus F) \cap ((X \cap (X+\epsilon)) \setminus (F+\epsilon)) = (X \cap (X+\epsilon)) \setminus (F \cup (F+\epsilon)).$$

Teniendo estos resultados en mente y recordando que $X$ es de medida finita[27] tenemos que:

[27] Léase la propiedad de sustracción de una medida en el teorema A.3.3.

$$\begin{aligned}
\lambda(F) &\geq \lambda(F\cap(F+\epsilon)) = \lambda(X\cap(X+\epsilon)) - \lambda((X\cap(X+\epsilon))\setminus(F\cap(F+\epsilon))) = \\
&= \lambda(X\cap(X+\epsilon)) - \lambda(((X\cap(X+\epsilon))\setminus F)\cup((X\cap(X+\epsilon))\setminus(F+\epsilon))) = \\
&= \lambda(X\cap(X+\epsilon)) - [\lambda((X\cap(X+\epsilon))\setminus F) + \lambda((X\cap(X+\epsilon))\setminus(F+\epsilon)) \\
&\quad -\lambda(((X\cap(X+\epsilon))\setminus F)\cap((X\cap(X+\epsilon))\setminus(F+\epsilon)))] = \\
&= [\lambda(X\cap(X+\epsilon)) - \lambda((X\cap(X+\epsilon))\setminus F)] \\
&\quad - [\lambda((X\cap(X+\epsilon))\setminus(F+\epsilon)) - \lambda((X\cap(X+\epsilon))\setminus(F\cup(F+\epsilon)))] = \\
&= \lambda(F) - \lambda((X\cap(X+\epsilon))\setminus(F+\epsilon)) + \lambda((X\cap(X+\epsilon))\setminus(F\cup(F+\epsilon))) = \\
&= \lambda(F) - \lambda((X\cap(X+\epsilon))\setminus(F+\epsilon)) + \lambda((X\setminus F)\cap((X\setminus F)+\epsilon)) \geq \\
&\geq \lambda(F) - \lambda((X+\epsilon)\setminus(F+\epsilon)) + \lambda((X\setminus F)\cap((X\setminus F)+\epsilon)) = \\
&= \lambda(F) - \lambda((X\setminus F)+\epsilon)) + \lambda((X\setminus F)\cap((X\setminus F)+\epsilon)) = \\
&= \lambda(F) - [\lambda(X\setminus F) - \lambda((X\setminus F)\cap((X\setminus F)+\epsilon)]\,.
\end{aligned}$$

Como $X\setminus F$ es un abierto de medida finita, si $\delta > 0$ existe $r$ tal que si $0 \leq \epsilon < r$ entonces $|\lambda((X\setminus F)) - \lambda(X\setminus F\cap((X\setminus F)+\epsilon))| < \delta$, pues $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\lambda(X\setminus F\cap((X\setminus F)+\epsilon)) = \lambda((X\setminus F))$. Por lo anterior, si $0\leq\epsilon<r$:

$$\lambda(F) \geq \lambda(F\cap(F+\epsilon)) = \lambda(F) - [\lambda((X\setminus F)) - \lambda(X\setminus F\cap((X\setminus F)+\epsilon))] > \lambda(F)-\delta.$$

Por tanto, $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\lambda(F\cap(F+\epsilon)) = \lambda(F)$.

Último paso. Tomemos $A$ un conjunto medible. Si $A$ es tal que $\lambda(A) < \infty$ sea $\delta > 0$. Por regularidad de la medida, existe $F_\delta \subseteq A$ compacto tal que $\lambda(A) - \delta/2 < \lambda(F) \leq \lambda(A)$. Como los compactos cumplen la propiedad deseada, tenemos que para cada $\delta$ existe $r$ tal que si $0 < \epsilon < r$ entonces

$$\lambda(F) - \delta/2 < \lambda(F\cap(F+\epsilon)) \leq \lambda(F),$$

es decir, $|\lambda(F) - \lambda(F\cap(F+\epsilon))| < \delta/2$. De esta forma, si $0 < \epsilon < r$:

$$\lambda(A) \geq \lambda(A\cap(A+\epsilon)) \geq \lambda(F\cap(F+\epsilon)) > \lambda(F)-\delta/2 > \lambda(A)-\delta/2-\delta/2 = \lambda(A)-\delta.$$

Si $\lambda(A) = \infty$ probaremos que para cada $M \in \mathbb{N}$ existe $\delta_M$ tal que si $0 < \epsilon \leq \delta_M$ entonces $\mu(A\cap(A+\epsilon)) > M$.

Sea $M \in \mathbb{N}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(A\cap[-n,n]) = \lambda(A) = \infty$, existe $n$ tal que $\lambda(A\cap[-n,n]) > M+1$. Como $A\cap[-n,n]$ es de medida finita, existe $\delta$ tal que si $0 < \epsilon \leq \delta$ entonces $\lambda((A\cap[-n,n])\cap((A\cap[-n,n])+\epsilon)) > \lambda(A\cap[-n,n]) - 1$. De esta forma:

$$M < \lambda(A\cap[-n,n]) - 1 < \lambda((A\cap[-n,n])\cap((A\cap[-n,n])+\epsilon)) \leq \lambda(A\cap(A+\epsilon)).$$

l.q.q.d.

**Teorema 1.4.3.** *Si existe una base de Hamel de* $\mathbb{R}$ *sobre* $\mathbb{Q}$*, entonces existe un conjunto no medible.*

**Prueba**

Sea $H$ una base de Hamel, $x_0 \in H$ y $V = \langle H \setminus \{x_0\} \rangle_{\mathbb{Q}}$[28]. $V$ es no medible.

Supongamos que lo es. Notemos que $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (V + qx_0)$ (pues todo elemento de $\mathbb{R}$ se puede escribir como una suma finita de elementos de la base multiplicados por elementos de $\mathbb{Q}$) como

$$\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \lambda(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (V + qx_0)) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(V + qx_0) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(V),$$

tenemos que $\lambda(V) > 0$.

Sin embargo, si $p \neq q$, $(V + qx_0) \cap (V + px_0) = \emptyset$. En caso contrario, existiría $v \in (V + qx_0) \cap (V + px_0)$ por lo que habrían $v_1, v_2 \in V$ tales que $v_1 + qx_0 = v = v_2 + px_0$ por lo que $x_0 = (1/p - q)(v_1 - v_2)$, lo cual es una contradicción pues $x_0$ es linealmente independiente de los elementos de $V$. Con esto, $\lambda(V \cap (V + qx_0)) = \lambda(\emptyset) = 0$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Utilizando la propiedad de Steinhaus:

$$0 < \lambda(V) = \lim_{\epsilon \to 0} \lambda(V \cap (V + \epsilon)) = \lim_{q \to 0, q \in \mathbb{Q}} \lambda(V \cap (V + qx_0)) = \lim_{q \to 0, q \in \mathbb{Q}} 0 = 0.$$

Lo anterior es una contradicción, por tanto, $V$ es no medible.

l.q.q.d.

Independientemente de que las bases de Hamel generen conjuntos no medibles, surge una pregunta importante: ¿las bases de Hamel son, per se, medibles o no? Curiosamente, resulta que existen bases de Hamel que son medibles y otras que no. Por ejemplo:

**Proposición 1.4.4.** *Existe un conjunto de Bernstein que a su vez es base de Hamel.*

**Demostración**

Como es costumbre con los conjuntos de Bernstein, lo construiremos de forma recursiva. Sea $\alpha$ el mínimo ordinal biyectable con $\mathbb{R}$ y $\beta < \alpha$. Supongamos que $\{P_\xi \ / \ \xi < \alpha \text{ tal que } \xi \text{ es par}\}$ y $\{P_\xi \ / \ \xi < \alpha \text{ tal que } \xi \text{ es impar}\}$ son enumeraciones de la familia de los conjuntos perfectos de $\mathbb{R}$ y que para todo $\xi < \beta$, $x_\xi$ ya está definido.

[28] Si $E$ es un espacio vectorial sobre $K$, y $A \subseteq E$ entonces

$$\langle A \rangle_K = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \ / \ n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in K, y_i \in A \right\}.$$

Como $P_\beta$ tiene la misma cardinalidad de los números reales (lema 1.3.3) y $|\langle\{x_\xi \ / \ \xi < \beta\}\rangle_{\mathbb{Q}}| \leq |\wp_{fin}(card(\beta) \times \mathbb{Q})| = |card(\beta) \times \mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$[29] (pues $\beta < \alpha$ y $\mathbb{Q}$ es numerable), entonces $P_\beta \setminus \langle\{x_\xi \ / \ \xi < \beta\}\rangle_{\mathbb{Q}}$ no es vacío. Sea $x_\beta \in P_\beta \setminus \langle\{x_\xi \ / \ \xi < \beta\}\rangle_{\mathbb{Q}}$.

Tomemos $H_0 = \{x_\xi \ / \ \xi < \alpha \ es \ par\}$. Por construcción, $H_0$ es un conjunto linealmente independiente. Utilizando el Lema de Zorn, podemos extenderlo a $H$ una base de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ tal que $H \subseteq \mathbb{R} \setminus \{x_\xi \ / \ \xi < \alpha \ es \ impar\}$ (en caso de que existiera $y \in H \cap \{x_\xi \ / \ \xi < \alpha \ es \ impar\}$, al ser $y \neq 0$ linealmente independiente a los elementos de $H$, $H \cap \{2y\} \setminus \{y\}$ es base de $\mathbb{R}$ y ya no intersecta a $\{x_\xi \ / \ \xi < \alpha \ es \ impar\}$ en $y$, lo anterior se puede hacer con cada elemento de la intersección).

Por construcción, $H$ es una base de Hamel y, como

$$H_0 \subseteq H \subseteq \mathbb{R} \setminus \{x_\xi \ / \ \xi < \alpha \ es \ impar\},$$

$H$ es de Bernstein. Por lo tanto $H$ es un conjunto no medible.

l.q.q.d.

Notemos que si $H$ es una base de Hamel y $x_0 \in H$, $H \cap (H + qx_0) = \emptyset$ para todo $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ (si existiera $v \in H \cap (H + qx_0)$, entonces $v = v_1 + qx_0$ con $v_1 \in H$, pero esto no puede suceder ya que $v, v_1, x_0 \in H$ un conjunto linealmente independiente). De esta forma, si $H$ fuera medible,

$$\lambda(H) = \lim_{q \to 0, q \in \mathbb{Q}} \lambda(H \cap (H + qx_0)) = \lim_{q \to 0, q \in \mathbb{Q}} \lambda(\emptyset) = 0.$$

Nuestro objetivo será buscar un subconjunto de medida cero de los reales que genere a todo $\mathbb{R}$.

**Lema 1.4.5.** *Si $C$ es el conjunto ternario de Cantor del intervalo $[0,1]$, entonces $C + C = [0,2]$*[30].

**Prueba**

Para demostrar que $C + C = [0,2]$ mostraremos por medio de un argumento geométrico que $f[C \times C] = [0,2]$ donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define como $f(x,y) = x+y$.

En primera instancia, es claro que $C + C = f[C \times C]$. Además, como $C \times C \subseteq [0,1] \times [0,1]$, tenemos que $f[C \times C] \subseteq f[[0,1] \times [0,1]] = [0,2]$. A continuación veremos la otra contención.

Notemos que la función $f$ es lo mismo que proyectar los puntos de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R} \times \{0\}$ siguiendo la dirección de la recta $\ell = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 0\}$. Esto significa que si tenemos el punto $\langle x_0, y_0\rangle$ y trazamos la única recta paralela a $\ell$ que pasa por ahí (a saber, la recta cuya fórmula se despeja de $\dfrac{x - x_0}{y - y_0} = -1$)

[29] Para todo conjunto $A$, $\wp_{fin}(A) = ^{<\omega} A = \{C \subseteq A \ / \ |C| \in \omega\}$. Con axioma de elección, si $A$ es infinito $|^{<\omega}A| = |\bigcup_{n\in\omega} {}^n A| = \sup\{|A|^n \ / \ n \in \omega\} = \sup\{|A| \ / \ n \in \omega\} = |A|$.

[30] Si $X$ es un grupo con la suma y $A, B \subseteq X$, entonces $A + B = \{a + b \ / \ a \in A, b \in B\}$.

entonces su ordenada al origen (el punto donde la recta corta a $\mathbb{R} \times \{0\}$) es $x_0 + y_0$ (pues la fórmula analítica de la recta es $y = -x + (x_0 + y_0)$).

El siguiente lema nos será de utilidad: Si tenemos un cuadrado $ABCD$ y proyectamos los puntos del cuadrado a la recta que pasa por $DC$ de forma paralela a $AC$ entonces la proyección del cuadrado $ABCD$ y la de sus cuatro cuadrados terciarios (es decir, los cuadrados obtenidos de dividir cada lado en tres y sólo conservar los cuadrados de las esquinas 1.1) es la misma.

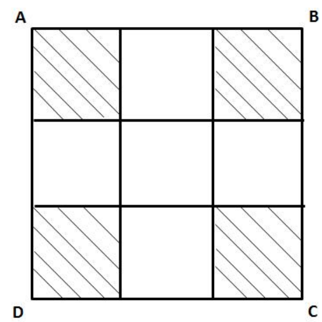


Figura 1.1: Sombreado los cuadrados ternarios de un cuadrado

Sabemos que la proyección de $ABCD$ a $DC$ es el segmento $DF$ tal que $C$ es su punto medio, ver 1.2 (esto lo sabemos pues la proyección descrita coincide con la suma, y la imagen de un cuadrado bajo la suma es la suma de la base y de la altura).

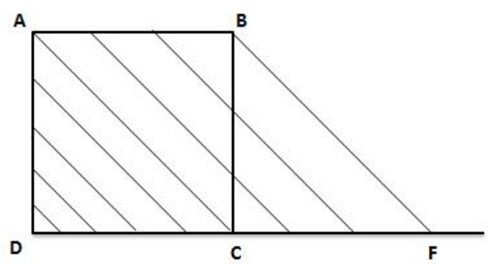


Figura 1.2: Proyección del cuadrado ABCD a la línea DC

Como los puntos del segmento $CF$ son proyecciones de los puntos en el segmento $BC$, basta ver que las proyecciones de los cuadrados ternarios cubren los lados $DC$ y $BC$. Por simetría del cuadrado, sólo es necesario analizar el caso del lado $DC$. Como para crear los cuadrados ternarios dividimos el segmento $DC$ en tres, sean $G$ y $H$ los puntos de esta división (ver 1.3).

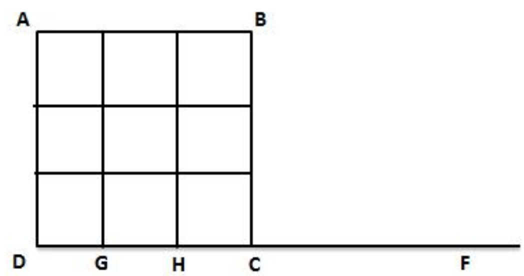


Figura 1.3: Puntos

Los puntos de los segmentos $DG$ y $HC$ están cubiertos pues estos lados son bases de los cuadrados ternarios. Sólo basta ver que los puntos del segmento de recta $GH$ son proyección de alguien, pero esto es sencillo pues la imagen bajo la proyección del cuadrado con base $DG$ es el segmento cuyo punto medio es $G$ (mismo argumento que con la proyección de $ABCD$). Por construcción, la longitud de $DG$ es igual a la de $GH$, por lo que la proyección del cuadrado es justo $DH$. Esto termina la demostración del lema.

Para utilizar el lema anterior debemos recordar que el conjunto ternario de Cantor se crea intersectando intervalos (segmentos de líneas) a los cuales se les quita un tercio, por lo que $C = \bigcap_{n\in\omega} A_n$ con $A_{n+1} \subseteq A_n$. De esta forma sabemos que $C \times C = (\bigcap_{n\in\omega} A_n) \times (\bigcap_{m\in\omega} A_m) \supseteq \bigcap_{n\in\omega}(A_n \times A_n)$.

Fijémonos que la imagen de $A_n \times A_n$ bajo $f$ es $[0,2]$ para toda $n \in \omega$. La demostración de este hecho la haremos por inducción. Para el caso base sabemos que $A_0 = [0,1]$ y que $f[A_0 \times A_0] = [0,2]$. Supongamos que $f[A_n \times A_n] = [0,2]$. Como $A_{n+1} \times A_{n+1}$ es el conjunto obtenido de la unión de los cuadrados ternarios de $A_n \times A_n$. Por el lema anterior, la diagonal es la misma. En este caso la diagonal es paralela a $\ell$ tenemos que $f[A_{n+1} \times A_{n+1}] = f[A_n \times A_n] = [0,2]$.

Con lo anterior tenemos que para todo punto $x \in [0,2]$ y todo $n \in \omega$ $W_n^x = f^{-1}[\{x\}] \cap (A_n \times A_n) \neq \emptyset$. Además, como $A_n \times A_n$ es compacto (producto de compactos) y $f^{-1}[\{x\}]$ es cerrado (preimagen de un cerrado bajo una función continua), entonces $W_n^x$ es compacto. Por lo que para toda $x \in [0,2]$, $\bigcap_{n\in\omega} W_n^x \neq \emptyset$

(pues es una intersección de compactos anidados). Como

$$\bigcap_{n\in\omega} W_n^x \subseteq \Big(\bigcap_{n\in\omega}(A_n \times A_n)\Big) \cap f^{-1}[\{x\}]$$

para todo $x \in [0,2]$, tenemos que $[0,2] = f[\bigcap_{n\in\omega}(A_n \times A_n)] \subseteq f[C \times C]$.

Por lo tanto concluimos que $C + C = f[C \times C] = [0,2]$.

l.q.q.d.

**Lema 1.4.6.** *Existe $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lambda(A) = 0$ y $A + A = \mathbb{R}$.*

**Demostración**

Si $C$ denota el conjunto de Cantor, sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} nC$. Por la proposición 1.2.1, $\lambda^*(nC) = |n|\lambda^*(C) = 0$, así, para toda $n \in \mathbb{Z}$, $nC$ es un conjunto medible de medida cero, por lo que $A$ es medible y $\lambda(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(nC) = 0$, por lo que $A$ también es un conjunto nulo.

Notemos que

$$nC + nC = \{na + nb \ / \ a, b \in C\} = \{n(a + b) \ / \ a, b \in C\} =$$

$$= \{nd \ / \ d \in C + C\} = n(C + C) = n[0,2],$$

por lo que si $n$ es positiva, $nC + nC = [0, 2n]$ y si es negativa, $nC + nC = [2n, 0]$, por lo que $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} nC + nC = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} [-2m, 2m] = \mathbb{R}$. De esta forma,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} nC + nC \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} nC + \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} nC = A + A.$$

l.q.q.d.

**Corolario 1.4.7.** *Existe una base de Hamel medible de medida cero.*

**Demostración**

Tomemos el conjunto $A$ de la demostración anterior, como $\mathbb{R} = A + A \subseteq \langle A\rangle_{\mathbb{Q}}$, $A$ genera a $\mathbb{R}$, utilizando el Lema de Zorn existe $H \subseteq A$ tal que $H$ es base del espacio[31]. Por definición, $H$ es una base de Hamel y como $H \subseteq A$ y $\lambda(A) = 0$, tenemos que $H$ es medible y $\lambda(H) = 0$.

l.q.q.d.

Independientemente de que el teorema anterior haya resuelto una de nuestras preguntas iniciales, irremediablemente nos crea nuevas. Por ejemplo, sabemos que

[31]En este caso el Lema de Zorn se utilizaría sobre el conjunto $\{C \ / \ C \subseteq A, C \textit{ genera a } \mathbb{R}\}$ ordenado por $\supset$.

el $dom(\lambda)$ es cerrado bajo traslaciones (es decir, si $E \in dom(\lambda)$, $E + r \in dom(\lambda)$ para todo $r \in \mathbb{R}$), pero ¿es cerrado bajo sumas de conjuntos?, es decir, si $A, B \in dom(\lambda)$, ¿$A + B \in dom(\lambda)$?

El siguiente resultado nos muestra que no:

**Teorema 1.4.8.** *Existen $A$ y $B$ conjuntos de medida cero tales que $A + B$ es no medible.*

**Demostración**

Sea $H = \{e_i \ / \ i \in I\}$ una base de Hamel de medida cero. Definimos para cada $n \in \omega$, $E_n = \left\{ \sum_{i \in I} q_i e_i \ / \ q_i \in \mathbb{Q}, |\{i \in I \ / \ q_i \neq 0\}| \leq n \right\}$.

Es importante notar que existen $E_n$ de medida cero, por ejemplo, $E_0 = \emptyset$ y $E_1 = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} qH$ pues $\lambda^*(E_1) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda^*(qH) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} |q| \lambda^*(H) = 0$.

De hecho, si cada $E_n$ fuera medible, su medida debería ser cero. Si definimos $e^n = e_0 + e_1 + ... + e_{2n}$ con $\{e_0, e_1, ..., e_{2n}\} \subseteq H$, entonces para cada $q \in \mathbb{Q}$ $E_n \cap (E_n + e^n q) = \emptyset$, pues todo elemento de $E_n$ se escribe con a lo más $n$ $e$'s distintas, mientras que los de $E_n + e^n q$ se escriben con al menos $n+1$ (pues, en el peor de los casos, se cancelan $n$ $e$'s). De esta forma, $\lim_{q \to 0} \lambda(E_n \cap (E_n + e^n q)) = 0$ y la propiedad de Steinhaus (1.4.2) implicaría que $\lambda(E_n) = 0$.

Sin embargo, como $E_n \subseteq E_{n+1}$ y $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \omega} E_n$ (pues al ser $H$ una base de Hamel, todo elemento de $\mathbb{R}$ es una combinación $\mathbb{Q}$-lineal de elementos de $H$) tendríamos que $\lim_{n \to \infty} \lambda(E_n) = \lambda(\mathbb{R}) = \infty$, por lo que existiría $m \in \omega$ mínima tal que $\lambda(E_m) > 0$. Lo anterior es una contradicción.

Por las observaciones anteriores tenemos que $E_m$ es no medible (de hecho, si $n > m$ $E_n$ no es medible), por la minimalidad de $m$, si $l < m$ $E_l$ tiene medida cero. Finalmente, al tener $E_0$ y $E_1$ medida cero, sabemos que $m \geq 2$.

Tenemos dos casos:

1. Si $m$ es par, tenemos que $m = 2k$, por lo que $E_m = E_{2k} = E_k + E_k$ con $\lambda(E_k) = 0$ (pues $k < m$).

2. Si $m$ es impar, tenemos que $m = 2k+1$, por lo que $E_m = E_{2k+1} = E_k + E_{k+1}$ con $\lambda(E_k) = \lambda(E_{k+1}) = 0$ (pues $k < m$).

l.q.q.d.

## 1.5. Particiones de Sierpiński

Al final de la sección 1.3 mostramos que en caso de que se cumplan ciertas hipótesis, la existencia de conjuntos no medibles puede depender simplemente de la cardinalidad de un conjunto. Existen otras formas de relacionar la existencia de estos conjuntos con la cardinalidad, específicamente, jugando con el valor de $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$. En esta sección mostraremos una forma en que la Hipótesis del Continuo (H.C.) junto con el A.E. implica que existen conjuntos no medibles.

**Hipótesis del Aleph (H.A.)** $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Esto implica que $\mathbb{R}$ es bien ordenable y que todo conjunto no numerable de números reales es biyectable con $\mathbb{R}$.[32]

Si suponemos la H.A. existe una biyección $f$ entre el intervalo $(0,1)$ y el ordinal $\omega_1$, con esta biyección podemos crear la relación $R \subseteq (0,1) \times (0,1)$ tal que $a\ R\ b$ si y sólo si $f(a) \in f(b)$.

**Teorema 1.5.1.** *$R$ es un conjunto no medible de $\mathbb{R}^2$.*

Para demostrar el teorema anterior enunciaremos (sin prueba) el útil teorema de Fubini (recordemos que la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^2$ es la completación de la medida $\lambda \times \lambda$):

**Teorema 1.5.2** (Fubini)**.** [33] *Sean $(X, S, \mu)$ y $(Y, T, \nu)$ espacios de medida $\sigma$-finitos y sea $\mu \times \nu$ la medida producto del espacio $X \times Y$.*

- *Si $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ es una función medible y no negativa, entonces*

$$\int_{X\times Y} hd(\mu \times \nu) = \int_Y \int_X hd\mu d\nu = \int_X \int_Y hd\nu d\mu.$$

- *Si $h$ es una función integrable de $X \times Y$ entonces para casi toda[34] $x \in X$ con respecto a $\mu$ y para casi toda $y \in Y$ con respecto a $\nu$, tenemos que $h_x(y') = h(x, y')$ es integrable respecto a $\nu$ y $h^y(x') = h(x', y)$ respecto a $\mu$. Además, si llamamos $f(x) = \int h(x, y)d\nu(y)$ y $g(y) = \int h(x, y)d\mu(x)$, tenemos que $f$ es integrable respecto a $\mu$ y $g$ respecto a $\nu$, y:*

$$\int_{X\times Y} hd(\mu \times \nu) = \int_X f d\mu = \int_Y gd\nu.$$

En particular, el teorema de Fubini implica que si encontramos una función entre dos espacios $\sigma$-finitos no negativa o integrable cuyas integrales iteradas no coincidan, entonces esta función no puede ser medible.

**Demostración del teorema 1.5.1**

[32] Notemos que H.A no es lo mismo que la Hipótesis del Continuo. La segunda, como veremos en el capítulo 2, no implica que los reales sean bien ordenables.

[33] Para una demostración de este teorema, revisar [7, pp.145-148]. Para entender la construcción de una integral a partir de una medida y sus propiedades véase A.4.

[34] Esta definición se encuentra en A.3.4.

Supongamos que $R$ es medible.

El conjunto $R$ cumple que para todo $y' \in \mathbb{R}$,

$$R^{y'} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \langle x, y' \rangle \in R\} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ xRy'\}$$

es a lo más numerable. Esto sucede pues $R^{y'}$ es el conjunto de todos los menores que $y'$ con el orden $R$, es decir, su segmento inicial[35]. Dado que $\langle \mathbb{R}, R \rangle$ es isomorfo a $\langle \omega_1, \in \rangle$ y todos los segmentos iniciales en $\omega_1$ son numerables, tenemos que $R^{y'}$ es numerable[36]. Como consecuencia, para toda $z \in (0,1)$ $\int \chi_R(x_1, z) dx_1 = \int_{R^z} 1 dx_1 = 0$,[37] pues $R^z$ es numerable y los conjuntos numerables son nulos.

Por otra parte, para todo $x' \in \mathbb{R}$, $R_{x'} = \{y \in \mathbb{R} \ / \ \langle x', y \rangle \in R\}$ cumple que $\lambda(\{z \ / \ (x', z) \in R_{x'}\}) = 1$ pues, al ser $R$ un orden total,

$$\{z \ / \ \langle x', z \rangle \in R_{x'}\} = (0,1) \setminus \left\{ w \ / \ \langle w, x' \rangle \in R^{x'} \right\},$$

por lo que difiere de $(0,1)$ en un conjunto numerable, en particular, si $w \in (0,1)$, tenemos que $\int \chi_R(w, x_2) dx_1 = \int_{R_w} 1 dx_2 = 1$.

$0 \leq \chi_R(x) \leq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y $sop(\chi_R) = \overline{\{x \ / \ \chi_R(x) \neq 0\}} \subseteq [0,1] \times [0,1]$, por lo que si $\chi_R$ es medible, debería ser integrable. Sin embargo:

$$\int \int \chi_R(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \int_0^1 \int_{R_{x_1}} 1 dx_2 dx_1 = \int_0^1 1 dx_1 = 1$$

y

$$\int \int \chi_R(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 \int_{R^{x_2}} 1 dx_1 dx_2 = \int_0^1 0 dx_2 = 0.$$

Por el teorema de Fubini y dado que $\mathbb{R}$ es $\sigma$-finito, lo anterior es una contradicción. Por lo tanto, $R$ es un conjunto no medible.

l.q.q.d.

Utilizando la H.A., este teorema puede generalizarse para $\mathbb{R}^{2n}$ si tomamos el conjunto que bien ordena a $\mathbb{R}^n$ (o bien, que bien ordena a $(0,1)^n$).

Durante la demostración del teorema notamos que $|R \cap (\mathbb{R} \times \{a\})| = |R^a \times \{a\}| \leq \aleph_0$ y que $|(((0,1) \times (0,1)) \setminus R) \cap (\{a\} \times \mathbb{R})| = |(\{a\} \times (0,1)) \setminus (\{a\} \times R_a)| \leq \aleph_0$ para todo $a \in (0,1)$.

A un par de conjuntos que cumplan las propiedades descritas en el párrafo anterior, que sean ajenos y que llenen todo el plano (o bien, que su unión sea

[35]Véase B.7.1.

[36]La definición de $\omega_1$ se puede leer en la sección B.5.

[37]Si $X$ es un conjunto y $A \subseteq X$, $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$ y $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$. Notemos que $\chi_A$ es una función medible si y sólo si $A$ es un conjunto medible.

$(0,1) \times (0,1))$ se les llama partición de Sierpiński. Durante la primera mitad del siglo XX, Sierpiński buscaba una partición del plano que cumpliera las propiedades de $R$ y $((0,1) \times (0,1)) \setminus R$ descritas en el párrafo anterior. En esos mismos años Sierpiński construyó el conjunto $R$.

No es difícil ver que una partición de Sierpiński está compuesta por dos conjuntos no medibles (se puede repetir la prueba sustituyendo $R$ por algún elemento de la patición). Es importante remarcar que la existencia de las particiones de Sierpiński es más fuerte de lo que aparenta:

**Teorema 1.5.3.** *Si existen $A$ y $B$ tales que $A \cup B = \mathbb{R}^2$; $A \cap B = \emptyset$ y*

$$|A \cap (\{a\} \times \mathbb{R})|, |B \cap (\mathbb{R} \times \{a\})| \leq \aleph_0$$

*para todo $a \in \mathbb{R}$ entonces es válida la H.A.*

**Prueba**

Supongamos el A.E. y tomemos $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|X| = |\omega_1| = \aleph_1$. Sea $Z = (X \times \mathbb{R}) \cap A$. Por hipótesis tenemos que $(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap A$ es a lo más numerable para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que $|Z| = |\bigcup_{x \in X} (\{x\} \times \mathbb{R}) \cap A| = \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$. Sea $p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proyección $p_2(x,y) = y$. Veamos que $p_2[Z] = \mathbb{R}$.

Sea $y \in \mathbb{R}$, notemos que, por hipótesis, $|(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap B| \leq \aleph_0$, mientras que $|(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap (X \times \mathbb{R})| = |X \times \{y\}| = \aleph_1$. De esta forma existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $(t,y) \in (X \times \mathbb{R}) \setminus B$. Como $A$ y $B$ es una partición de $\mathbb{R}^2$ tenemos que $(t,y) \in (X \times \mathbb{R}) \cap A = Z$, por tanto $p_2((t,y)) = y$ y $y \in p_2[Z]$.

Con lo anterior tenemos que $|\mathbb{R}| \leq \aleph_1$. Sin embargo, con el A.E. se sabe que $\aleph_1 \leq |\mathbb{R}|$. Las dos desigualdades anteriores implica la H.A.

l.q.q.d.

En la demostración anterior, si no utilizáramos el A.E. podríamos asegurar que existe una función sobre de todo conjunto no numerable de números reales en $\mathbb{R}$, pero sin el A.E. esto no implica ni la Hipótesis del Continuo[38], ni la H.A.

## 1.6. Dos funciones no medibles

Aunque ya hemos construido funciones características no medibles, hay otros métodos para crear directamente funciones de este tipo. En esta sección construiremos dos ejemplos: una función cuya gráfica es gruesa en $\mathbb{R}^2$, y estudiaremos un poco las soluciones no continuas de la ecuación de Cauchy, es decir, funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Ambas funciones son no medibles.

**Definición 1.6.1.** $A \subseteq X$ es $\mu$-grueso (o $\mu$-masivo) para la medida $\mu$ sobre X si y sólo si para todo conjunto medible $B$ de medida positiva, tenemos $A \cap B \neq \emptyset$.

[38]Hablaremos un poco de la Hipótesis del Continuo en el capítulo 2. A grandes rasgos es como la H.A. pero sin A.E.

Notemos que si un conjunto $A$ es $\mu$-masivo y $\mu$ medible entonces $\mu(X \setminus A) = 0$ (el complemento no puede tener medida positiva ya que, si la tuviera, $A$ lo intersectaría). De esta forma, si construimos un conjunto grueso que no sea de medida completa (es decir, que la medida del complemento no sea cero) entonces este conjunto no sería medible. Para lograr esto con la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ necesitamos algunos resultados:

**Proposición 1.6.2.** *En $\mathbb{R}^n$, si un conjunto $A$ intersecta a todos los conjuntos cerrados de medida positiva, entonces $A$ es $\lambda_n$-grueso.*[39]

**Prueba**

Sea $A$ un conjunto que intersecta a todos los cerrados de medida positiva y $B$ un conjunto de medida positiva. Como $\lambda_n$ es una medida regular existe $F \subseteq B$ compacto tal que $\lambda_n(F) > 0$. Por hipótesis, $A \cap F \neq \emptyset$, lo cual implica que $A \cap B \neq \emptyset$; por lo tanto, $A$ es $\lambda_n$-gruesa[40].

l.q.q.d.

**Proposición 1.6.3.** *Si $A$ y $B$ son de medida completa en $X$ respecto a $\mu$, entonces $A \cap B$ también lo es.*

**Prueba**

Basta probar que el complemento de $A \cap B$ es de medida cero.

$$0 \leq \mu(X \setminus (A \cap B)) = \mu((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) \leq \mu(X \setminus A) + \mu(X \setminus B) = 0.$$

l.q.q.d.

Como $\{(a,b) \times (c,d) \;/\; a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}$ es una base de la topología de $\mathbb{R}^2$, realizando un cálculo análogo al de la demostración del lema 1.3.2 (donde demostramos que hay tantos conjuntos perfectos como números reales), sabemos que existen tantos cerrados de medida positiva como números reales. De esta forma, si $\alpha = \min\{\beta \;/\; card(\beta) = |\mathbb{R}|\}$, podemos escribir a la familia de conjuntos cerrados de medida positiva como $\{F_\xi \;/\; \xi < \alpha\}$.

Definamos recursivamente $(x_\xi, y_\xi)$ para $\xi < \alpha$ tal que para toda $\xi$, $(x_\xi, y_\xi) \in F_\xi$ y tal que si $\xi \neq \zeta$ entonces $x_\xi \neq x_\zeta$.

Tomemos $\beta < \alpha$ y supongamos que para todo $\xi < \beta$ ya tenemos definido $(x_\xi, y_\xi)$. $F_\beta = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} \times F_\beta(x)$ donde $F_\beta(x) = \{w \in \mathbb{R} \;/\; (x,w) \in F_\beta\}$. Sabemos que $\lambda(\{x \;/\; \lambda(F_\beta(x)) > 0\}) > 0$ (si fuera de medida cero, entonces el teorema de Fubini (1.5.2) implicaría que $\lambda_2(F_\beta) = 0$), por lo que

$$\{x \;/\; \lambda(F_\beta(x)) > 0\} \setminus \{x_\xi \;/\; \xi < \beta\} \neq \emptyset$$

[39]Denotaremos por $\lambda_n$ a la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Para saber un poco sobre la construcción de $\lambda_n$ véase A.5. Es importante remarcar que muchas de las propiedades y demostraciones que se hacen con $\lambda_1$ se pueden extender (o son análogas) con $\lambda_n$.

[40]Es importante remarcar que esta prueba se puede realizar de manera análoga en cualquier espacio topológico con una medida regular.

(pues $card(\beta) < \alpha = card(\alpha) = |\mathbb{R}|$ y por el teorema 1.3.7, los conjuntos de medida positiva tienen tantos elementos como números reales). Tomemos $x_\beta$ tal que $x_\beta \in \{x \ / \ \lambda(F_\beta(x)) > 0\} \setminus \{x_\xi \ / \ \xi < \beta\}$ y $y_\beta \in F_\beta(x_\beta)$. El par ordenado $(x_\beta, y_\beta)$ cumple las dos propiedades deseadas.

Notemos que el conjunto $\Gamma = \{(x_\beta, y_\beta) \ / \ \beta < \alpha\}$ es una función parcial de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, sea $f \subseteq \mathbb{R}^2$ una función con dominio $\mathbb{R}$ que contenga a $\Gamma$ (por ejemplo, $f$ tal que $f(x_\xi) = y_\xi$ y $f(z) = 0$ si $z \neq x_\xi$ para todo $\xi < \alpha$).

**Teorema 1.6.4.** *$f$ es un conjunto no medible de $\mathbb{R}^2$.*

**Demostración**

Por la proposición 1.6.2 tenemos que $f$ es un conjunto $\lambda_2$-grueso. Pero notemos que para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f \cap (f + (0, x)) = \emptyset$. Como $\lambda_2^*(f) = \lambda_2^*(f + (0, x))$, por el enunciado contrapositivo de la proposición 1.6.3 al ser $\lambda_2(\mathbb{R}^2 \setminus f \cap (f + (0, x))) = \infty$, $f$ no es de medida completa.

Finalmente, al ser $f$ un conjunto $\lambda_2$-grueso que no es de medida completa, tenemos que $f$ es un conjunto no medible de $\mathbb{R}^2$ respecto a $\lambda_2$.

l.q.q.d.

Además, podemos decir un poco más de $f$ como función:

**Lema 1.6.5.** *Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces $\lambda_2(g) = 0$.*

**Prueba**

Al ser las funciones características funciones no negativas, si utilizamos el teorema de Fubini (1.5.2):

$$\int \chi_g(x, y) d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} \int \chi_{\{g(x)\}}(y) dy dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0.$$

l.q.q.d.

**Corolario 1.6.6.** *La función $f$ cuya gráfica es $\lambda_2$-masiva es una función no medible.*

**Prueba**

Sabemos que la gráfica de $f$ (que simplemente es tomar en cuenta a $f$ como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es no medible, por el lema anterior, $f$ no puede ser medible.

l.q.q.d.

Para este ejemplo utilizamos técnicas parecidas a las utilizadas con los conjuntos de Bernstein, sin embargo, hay otra forma de notar que hay muchas funciones no medibles de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

**Definición 1.6.7.** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple $f(x + y) = f(x) + f(y)$ se dice que cumple la ecuación de Cauchy.

Notemos que si una función $f$ cumple la ecuación de Cauchy cumple las siguientes dos propiedades:

1. Haciendo una pequeña inducción podemos ver que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.

2. Como $f(x) = f(\frac{n}{n}x) = nf(\frac{1}{n}x)$, entonces $\frac{1}{n}f(x) = f(\frac{1}{n}x)$.

Lo anterior implica que para todo $r \in \mathbb{Q}$ tenemos que $f(rx) = rf(x)$, por lo que $f$ es una función $\mathbb{Q}$-lineal[41].

**Teorema 1.6.8.** *Existen $2^{2^{\aleph_0}}$[42] soluciones de la ecuación de Cauchy de las cuales $2^{\aleph_0}$ son continuas. De lo anterior se deduce que $2^{2^{\aleph_0}}$ de las soluciones no son continuas.*

**Demostración**

Como ya notamos, $f$ cumple la ecuación de Cauchy si y sólo si $f$ es $\mathbb{Q}$-lineal, por lo que para todo $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = f(r1) = rf(1)$, si esta función se quiere extender de forma continua necesariamente obtenemos que $f(x) = xf(1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De esta forma hay tantas soluciones de Cauchy continuas como posibles valores de $f(1)$, es decir, una por cada número real ($2^{\aleph_0}$).

Si $H$ es una base de Hamel, por el argumento de cardinalidad utilizado en la construcción de la base de Hamel no medible (teorema 1.4.4), $|H| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Si tomamos $H$, sabemos que para cada función $g$ de $H$ en $\mathbb{R}$ existe una función $f$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que extiende a $g$ $\mathbb{Q}$-linealmente y que todas las funciones $\mathbb{Q}$-lineales son extensión de alguna función de $H$ en $\mathbb{R}$. De esta forma existen $|{}^{H}\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|^{|H|} = (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$ soluciones de la ecuación de Cauchy.

l.q.q.d.

Es importante remarcar que la existencia de soluciones no continuas de la ecuación de Cauchy depende de la existencia de una base de Hamel de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Estas soluciones no continuas cumplen dos propiedades interesantes:

**Teorema 1.6.9.** *Las gráficas de las soluciones no continuas de la ecuación de Cauchy son densas en $\mathbb{R}^2$.*

**Prueba**

Sea $f$ una de estas soluciones, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $U$ una vecindad de $(x, y)$. Como $f$ no es continua, no es de la forma $f(z) = zf(1)$, por lo que existen $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tales que $\frac{f(a)}{a} \neq \frac{f(b)}{b}$. Con esto $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ son linealmente independientes[43], por lo que son una base de $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

[41] Si $K$ es un campo una función $f$ es $K$-lineal si y sólo si el dominio de $f$ es un espacio vectorial sobre $K$, si $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para cualesquiera dos elementos del dominio y $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$ para todo $k \in K$ y para todo $x$ en el dominio de $f$.

[42] Si $\lambda$ y $\kappa$ son cardinales, $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$. Por otra parte, es importante remarcar que para todo conjunto $A$, $|{}^A 2| = |\wp(A)|$.

[43] Si $(w, z), (w', z')$ son linealmente dependientes, entonces existe $\zeta \in \mathbb{R}$ tal que $(w, z) = \zeta \cdot (w', z') = \zeta(w', z')$. Si $w \neq 0 \neq w'$, entonces $\zeta \neq 0$ y $\frac{z}{w} = \frac{\zeta z'}{\zeta w'} = \frac{z'}{w'}$.

De esta forma existen $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $(x, y) = r(a, f(a)) + s(b, f(b))$. Utilizando la densidad de $\mathbb{Q}$ existen $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que $p(a, f(a)) + q(b, f(b)) \in U$. Notemos que, por la $\mathbb{Q}$-linealidad de $f$,

$$p(a, f(a)) + q(b, f(b)) = (pa + qb, pf(a) + qf(b)) = (pa + qb, f(pa + qb)) \in f.$$

Por lo tanto, $f \cap U \neq \emptyset$ y $f$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}^2$.

l.q.q.d.

**Teorema 1.6.10.** *Las soluciones no continuas de la ecuación de Cauchy son funciones no medibles.*

**Demostración**

Tomemos $f$ una de estas soluciones y $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que $\dfrac{f(a)}{a} \neq \dfrac{f(b)}{b}$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \dfrac{bf(x) - xf(b)}{bf(a) - af(b)}$. Es fácil ver que $g(a) = 1$, $g(b) = 0$ y que al ser $f$ $\mathbb{Q}$-lineal y no continua, entonces $g$ es $\mathbb{Q}$-lineal y no continua. De igual forma, si $f$ fuera una función medible, $g$ también lo sería. Veremos que $g$ es no medible.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea $A_n = g^{-1}[[n, n+1)]$ y $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que $|na - q_n b| < 1$. Finalmente, sea $B_0 = A_0 \cap [-1, 2]$ y para toda $n \in \mathbb{Z}$,

$$B_n = B_0 + (na - q_n b) \subseteq [-2, 3].$$

Los conjuntos $B_n$'s cumplen propiedades que no les permiten ser medibles.

En primera instancia, estos conjuntos son ajenos dos a dos. Si $B_n \cap B_m \neq \emptyset$ y $x \in B_n \cap B_m$, $x$ es de la forma $y + (na - q_n b) = x = z + (ma - q_m b)$ con $g(y), g(z) \in [0, 1)$, así $g(x) = ng(a) - q_n g(b) + g(y) = n + g(y) \in [n, n+1)$ y $g(x) = mg(a) - q_m g(b) + g(z) = m + g(z) \in [m, m+1)$. Como

$$g(x) \in [m, m+1) \cap [n, n+1)\,,$$

tenemos que $n = m$.

Por otra parte, para cada $x \in A_n \cap [0, 1]$, tenemos que

$$g(x - (na - q_n b)) = g(x) - n \in [0, 1)$$

con $x - (na - q_n b) \in [-1, 2]$, de esta forma $y = x - (na - q_n b) \in A_0 \cap [-1, 2]$ y $x = y + (na - q_n b) \in B_n$. Así $A_n \cap [0, 1] \subseteq B_n$.

Finalmente, sabemos que $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$, así:

$$\mathbb{R} = g^{-1}[\mathbb{R}] = g^{-1}[\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)] = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^{-1}[[n, n+1)] = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n.$$

De esta forma, $[0, 1] = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} A_n \cap [0, 1] \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} B_n \subseteq [-2, 3]$.

Si $A_0$ fuera medible, todos los conjuntos $B_n$'s también lo serían y $\lambda(B_0) = \lambda(B_n)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ (pues cada $B_n$ es $B_0$ trasladado). Además, al ser ajenos dos a dos, tendríamos que:

$$1 = \lambda([0,1]) \leq \lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(B_0) \leq \lambda([-2,3]) = 5.$$

Lo anterior es una contradicción, ya que si $\lambda(B_0) = 0$ entonces $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(B_0) = 0$; y si $\lambda(B_0) > 0$ entonces $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(B_0) = \infty$. Como ninguno de los dos casos es posible, tenemos que $B_0$ no es medibles y, por tanto, tampoco lo es $A_0$. Como consecuencia, la función $g$ no es medible.

l.q.q.d.

## 1.7. Otros teoremas

Los ejemplos anteriores son algunas de las formas de construir conjuntos y funciones no medibles. Sin embargo, no hemos mostrado cuántos conjuntos no medibles existen, o bien, con qué frecuencia se encuentran.

Aunque solemos trabajar con conjuntos medibles, bajo el Axioma de Elección existen una gran cantidad de elementos que no se encuentran en el dominio de la medida de Lebesgue.

**Teorema 1.7.1.** *Existen $2^{2^{\aleph_0}}$ conjuntos no medibles.*

**Prueba**

Daremos distintas demostraciones para este resultado:

1. En la construcción del conjunto de Bernstein (1.3), en cada etapa elegimos un elemento de entre $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ posibilidades, y tenemos $2^{\aleph_0}$ etapas. Por tanto, existen $(2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$ conjuntos de Bernstein.
2. En la construcción del conjunto de Vitali, existen $2^{\aleph_0}$ clases de equivalencia (pues si hubiera $\kappa < |\mathbb{R}|$ entonces $|\mathbb{R}| = \aleph_0 \cdot \kappa = \max\{\aleph_0, \kappa\} < |\mathbb{R}|$, lo cual es una contradicción). Cada clase de equivalencia tiene tantos elementos como $\mathbb{Q}$ (i.e., $\aleph_0$), por lo que existen $\aleph_0^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$ conjuntos de Vitali.
3. El conjunto de Cantor ($C$), es un conjunto perfecto de medida cero. Lo anterior implica que $|C| = |\mathbb{R}|$, y, al ser la medida de Lebesgue una medida completa, tenemos que todo elemento de $\wp(C)$ es un conjunto nulo. Por tanto existe $|\wp(C)| = 2^{2^{\aleph_0}}$ conjuntos medibles de medida cero.

   Sea $A$ cualquier conjunto no medible, notemos que para todo $X \in \wp(C)$, $A \cup X$ (y $A \setminus X$) no es medible. Si lo fuera, entonces $A = (A \cup X) \setminus X$

(respectivamente, $(A \setminus X) \cup X$) también sería medible (pues el dominio de la medida de Lebesgue es una $\sigma$-álgebra). De esta forma existen $|\wp(C)| = 2^{2^{\aleph_0}}$ conjuntos no medibles parecidos (en el sentido de medida) a $A$.

l.q.q.d.

Horst Herrlich menciona en [8] que aunque existen la misma cantidad de conjuntos medibles que de no medibles ($2^{2^{\aleph_0}}$) si se toma la relación de equivalencia sobre $\wp(\mathbb{R})$ tal que $A$ está relacionado con $B$ si y sólo si $\lambda^*((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = 0$, entonces existen $2^{\aleph_0}$ clases de equivalencia de conjuntos medibles mientras que existen $2^{2^{\aleph_0}}$ clases de conjuntos no medibles.

La observación anterior nos deja con la completa impresión de los conjuntos no medibles están más cerca de nosotros de lo que creemos. El siguiente resultado lo afirma.

**Teorema 1.7.2.** *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto medible tal que $\lambda(A) > 0$, entonces existe $B \subseteq A$ tal que $B$ es un conjunto no medible.*

**Demostración**

Daremos dos demostraciones de este resultado:

1. Tomemos $V$ un conjunto de Vitali (o bien, un conjunto tipo Vitali [1.1.3] o uno de los conjuntos asociados a las bases de Hamel) y sea $A$ un conjunto medible de medida positiva. Como $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (V + q)$ (en los otros casos tómese el conjunto necesario para hacer las traslaciones), entonces existe $q_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $\lambda^*(A \cap (V + q_0)) > 0$. Repitiendo la misma argumentación que en el teorema de Vitali (teorema 1.1.1), tenemos que $A \cap (V + q_0) \subseteq A$ es un conjunto no medible.

2. Tomemos $X$ un conjunto de Bernstein y $A$ un conjunto medible de medida positiva. Como $A = (A \cap X) \cup (A \setminus X)$, tenemos que alguno de los dos tiene medida exterior positiva. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda^*(A \cap X) > 0$, notemos que $A \cap X$ no contiene a ningún conjunto perfecto, pues $X$ es de Bernstein. De esta forma, argumentando igual que en el teorema de la no medibilidad de los conjuntos de Bernstein (teorema 1.3.5), $A \cap X \subseteq A$ no es medible.

l.q.q.d.

# Capítulo 2

# Ulam y Determinación

¿Hay medidas sobre $\mathbb{R}$ que no tengan conjuntos no medibles? Por el teorema de la unicidad de las medidas de Haar (que se puede leer en [7]) la medida de Lebesgue es la única regular e invariante bajo traslación sobre $\mathbb{R}$, pero, hasta ahora, no tenemos ninguna razón para creer que esta búsqueda es imposible. Este capítulo mostrará las dificultades que conlleva responder esta pregunta utilizando el Axioma de Elección e introducirá otra axiomatización con la cual la medida de Lebesgue cambia radicalmente.

## 2.1. Un poco sobre cardinales inaccesibles

Uno de los teoremas más importantes de este capítulo será el teorema de Ulam-Inaccesible. Todo el teorema se centra en demostrar que cierto cardinal es inaccesible. Para entender este resultado es necesario saber qué son estos cardinales y cómo es que surgen. Este es el objetivo de esta sección.

Una de las ideas más aceptadas de cómo es que inicia la búsqueda de los ahora llamados cardinales inaccesibles es la intuición de copiar las propiedades que tiene $\omega = \aleph_0 = |\omega|$. Si observamos los conjuntos finitos podemos notar que ninguna operación que éstos efectúen, de forma finita, alcanza a $\omega$, el primer cardinal infinito.

La idea de que no lo alcancen se puede formalizar un poco. En primera instancia, $\aleph_0$ es un cardinal (y un ordinal) límite, es decir, es un cardinal que es cerrado bajo sucesores.[1] Para todo cardinal finito (digamos, $m$) el cardinal imediado sucedor es $m+1$ que también es finito, por lo que si $m < \aleph_0$ entonces $m^+ = m+1$ también es menor que $\aleph_0$.

En segunda instancia, $\omega$ es un cardinal fuerte, esto quiere decir que si $m, n < \aleph_0$ entonces $m^n = |{}^n m| < \aleph_0$, en particular, si $a$ es un conjunto tal que $|a| < \aleph_0$, entonces $|\wp(a)| = 2^{|a|} < \aleph_0$. Para los finitos, $\omega$ es tan grande

[1] Véanse B.3.7 y B.5.12.

que ni siquiera la operación de potencia o de exponenciación es suficiente para alcanzarlo.[2]

Para terminar esta pequeña lista de propiedades de $\omega$ tenemos que éste es regular, es decir que $cof(\aleph_0) = \aleph_0$ donde, si $\kappa$ y $\lambda$ expresan cardinales,

$$cof(\lambda) = \text{mín}\left\{\kappa \ / \ \exists f : \kappa \to \lambda, \sup f[\kappa] = \bigcup f[\kappa] = \lambda\right\}.$$

El concepto de cofinalidad tiene muchas interpretaciones equivalentes, pero una manera de entenderlo es que $\kappa$ es regular ($cof(\kappa) = \kappa$) si un conjunto de cardinalidad $\kappa$ no es la unión de de menos de $\kappa$ conjuntos cada uno con cardinalidad estrictamente menor que $\kappa$.[3] En el caso de $\aleph_0$ su regularidad quiere decir que un conjunto infinito (numerable) no es la unión finita de conjuntos finitos.

Cuando uno estudia cardinalidades, comienza a buscar cardinales que cumplan las mismas propiedades que $\omega$ y no es difícil encontrarlos por separado. Por ejemplo, los puntos fijos de la funcional $\beth$[4] son cardinales fuertes, pero la mayoría son cardinales singulares; el cardinal $\aleph_\omega$ es un cardinal límite, pero $\aleph_\omega = \bigcup\limits_{n\in\omega} \aleph_n$, por lo que $cof(\aleph_\omega) = \aleph_0$, en general para todo $\gamma \in LIM$,

$$cof(\aleph_\gamma) = cof(\gamma) \leq |\gamma|,$$

por lo que la mayoría de los cardinales límite son singulares. Finalmente, todo cardinal sucesor ($\aleph_1, \aleph_2, \aleph_{27}, \aleph_{\beta+}$) es regular[5], pero ninguno es límite ni fuerte.

Como $\aleph_0$ es el único cardinal límite y regular conocido, o bien, el único fuerte y regular conocido, surgen las siguientes definiciones:

**Definición 2.1.1.** 1. $\kappa$ es un cardinal débilmente inaccesible si y sólo si $\kappa > \aleph_0$, $\kappa$ es regular y $\kappa$ es límite.

2. $\kappa$ es un cardinal inaccesible si y sólo si $\kappa > \aleph_0$, $\kappa$ es regular y $\kappa$ es fuerte.[6]

En primera instancia, es importante remarcar que si $\kappa$ es inaccesible entonces es débilmente inaccesible. Esto sucede por el siguiente lema:

[2] En general, $\lambda$ es fuerte si y sólo si para todo $\eta, \kappa < \lambda$, $\kappa^\eta < \lambda$.

[3] Si un cardinal $\lambda$ no es regular (es decir, si $\lambda$ es la unión de menos de $\lambda$ conjuntos cada uno con cardinalidad menor que $\lambda$) entonces se dice que $\lambda$ es singular.

[4] La funcional $\beth$ se define como

1. $\beth_0 = \aleph_0 = \omega$
2. $\beth_{\alpha+} = 2^{\beth_\alpha}$
3. Si $\gamma \in LIM$, $\beth_\gamma = \bigcup\limits_{\xi<\gamma} \beth_\xi$

El primer punto fijo de $\beth$ mayor o igual que $\alpha$ se encuentra de la siguiente forma: Sea $g$ tal que $g(0) = \alpha$ y $g(n^+) = \beth_{g(n)}$, $\kappa = \bigcup\limits_{n\in\omega} g(n)$ es el punto fijo buscado.

[5] Para este resultado se utiliza el Axioma de Elección.

[6] Las definiciones utilizadas aquí vienen de [9]. Es importante remarcar esto pues hay textos donde nombran a los cardinales débilmente inaccesibles como inaccesibles y a los inaccesibles como fuertemente inaccesibles.

**Lema 2.1.2.** *Todo cardinal fuerte es límite.*

**Prueba**

Supongamos que $\lambda$ es un cardinal fuerte, por tanto $\lambda \geq \aleph_0 > 2$ y para todo $\eta < \lambda$ cardinal tenemos que $2^\eta < \lambda$. No es difícil probar que para todo cardinal $\eta < \eta^+ \leq 2^\eta$[7]. Lo anterior implica que $\eta^+ < \lambda$ para todo cardinal $\eta < \lambda$. Por lo tanto, $\lambda$ es un cardinal límite.

l.q.q.d.

Gracias al lema anterior podemos justificar los nombres de las definiciones anteriores. Hasta ahora la búsqueda de los cardinales inaccesibles parece complicada pero no imposible. Sin embargo, el siguiente teorema aplasta nuestras esperanzas:

**Teorema 2.1.3.** *No se puede demostrar desde ZFC*[8] *que existe un cardinal inaccesible.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [5, pp. 107-110]. Aunque en primera instancia el resultado no es impresionante, pues conocemos otros enunciados que no se pueden demostrar desde $ZFC$, resulta que se demostró que el teorema «No se puede demostrar desde ZFC que no existe un cardinal inaccesible» no se puede demostrar. Por lo que la situación lógica de la existencia de los cardinales inaccesibles es complicada. Sabemos que no podemos demostrar que son consistentes con $ZFC$ y la inconsistencia sólo aparecerá en caso de que se encuentre una contradicción en la teoría. Por esta situación, en el artículo de Kanamori, Solovay y Reindhart (ver [10]) uno de sus subtítulos lleva el nombre «On the verge of inconsistency», "Al borde de la Inconsistencia".[9]

## 2.2. El teorema de Ulam

En el capítulo pasado construimos diversos conjuntos que comprobaban (utilizando de diversas maneras el Axioma de Elección) que el dominio de la medida de Lebesgue no es toda la potencia de $\mathbb{R}$. Sin embargo, podemos hacernos una pregunta distinta: ¿hay alguna medida sobre $\mathbb{R}$ cuyo dominio sea toda la potencia de los reales?

De la forma en que está formulada la pregunta, la respuesta es trivialmente que sí. Existen las funciones $\nu, \mu_a : \wp(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$,[10] tales que

[7] Esto es consecuencia del teorema de Cantor que afirma que para todo conjunto $a$, $a$ entra inyectivamente en $\wp(a)$ pero no existe ninguna función biyectiva entre $a$ y su potencia. Con el Axioma de Elección lo anterior implica que $|a| < |\wp(a)| = 2^{|a|}$.

[8] ZFC es la teoría axiomática de Zermelo Fraenkel ($ZF^-$) junto con el Axioma de Elección y el Axioma de Buena Fundación. Para saber más sobre los axiomas de ZFC leer [3] y el apéndice B, en especial la sección B.2.

[9] Otra forma de escribir los teoremas anteriores sería: "$ZFC \nvdash \exists\kappa$ Inaccesible" y "No se puede demostrar que $CON(ZFC) \to CON(ZFC + \exists\kappa$ Inaccesible$)''$.

[10] Para entender las operaciones en $\overline{\mathbb{R}}$ véase A.3.1.

$\nu(A) = 0$ para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\mu_a(A) = 1$ si $a \in A$ y $\mu_a(A) = 0$ en otro caso. Para toda $a \in \mathbb{R}$ las funciones $\mu_a, \nu$ son medidas que están definidas sobre toda la potencia de los reales. Sin embargo, ninguna de las dos tiene chiste.

En el caso de $\nu$, no es interesante pues es una función constante; y en el caso de $\mu_a$ tenemos que $\mu(\{a\}) = 1$. Aunque no lo hemos remarcado, la búsqueda de una medida sobre $\mathbb{R}$ es la búsqueda de una función que se comporte como la longitud o, en su defecto, que guarde alguna de sus propiedades como, por ejemplo, que cada punto (es decir, los conjuntos de la forma $\{b\}$) tenga medida cero. La construcción de la medida de Lebesgue sigue el objetivo de extender la idea de longitud a otros conjuntos que no sean los intervalos; idealmente, al preguntarnos por otras medidas en $\mathbb{R}$ nos preguntamos por extensiones de la medida de Lebesgue, es decir, funciones $\mu : \wp(\mathbb{R}) \to \bar{\mathbb{R}}$ que sean medidas y que $\mu|_{dom(\lambda)} = \lambda$ (donde $\lambda$ es la medida de Lebesgue). Pero si en estos momentos no sabemos si hay medidas con chiste cuyo dominio sea toda la potencia de los reales, buscar extensiones de la medida de Lebesgue se encuentra fuera de nuestras posibilidades, por lo que podemos conformarnos buscando medidas tales que la medida de los puntos sea cero.

**Definición 2.2.1.** Si $\mu$ es una medida sobre $X$ y para todo $a \in X$ cumple que $\mu(\{a\}) = 0$ entonces diremos que $\mu$ es una medida difusa.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores podemos cambiar nuestra pregunta: ¿existe una medida $\mu : \wp(\mathbb{R}) \to \bar{\mathbb{R}}$ tal que $\mu(\{a\}) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y que exista $A \subseteq \mathbb{R}$ (en algunos casos se pide que $A = [0, 1]$) con $0 < \mu(A)$?

**Teorema 2.2.2** (Ulam-Inaccesible)**.** *Si existe $\mu$ medida tal que $dom(\mu) = \wp(\mathbb{R})$, $\mu$ no es la constante cero y $\mu(\{a\}) = 0$ para toda $a \in \mathbb{R}$ entonces existe $\kappa$ un cardinal débilmente inaccesible tal que $\kappa$ entra inyectivamente en $\mathbb{R}$.*[11]

El teorema anterior no es una respuesta directa a nuestra pregunta, pero nos describe elementos necesarios para que nuestra respuesta sea afirmativa. Para poderlo demostrar usaremos la siguiente definición y el siguiente lema:

**Definición 2.2.3.** Una medida $\mu$ es $\kappa$ aditiva si y sólo si para todo $\{A_i\}_{i\in I}$ tal que $\mu(A_i) = 0$ para toda $i$ y $|I| < \kappa$ se tiene $\mu(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = 0$.

Es importante remarcar dos propiedades. Primero notemos que toda medida es $\aleph_1$-aditiva; segundo, si una medida es $\kappa$-aditiva, entonces es $\lambda$-aditiva para todo $\lambda < \kappa$. Además, en el caso de las medidas completas y de que la medida sea $\kappa$-aditiva pero no $\kappa^+$ aditiva, entonces tenemos que $add(N(\mu)) = \kappa$.[12] Curiosamente, la definición de *add* depende del Axioma de Elección, mientras que la definición de que una medida sea $\kappa$-aditiva no. Más adelante veremos un ejemplo de cómo sin Axioma de Elección el cardinal *non* (uno de los invariantes cardinales utilizados en el capítulo 1) no está bien definido.

[11]Notemos que esta medida $\mu$ no tiene puede ser la de Lebesgue, necesariamente $\mu$ es otra medida sobre $\mathbb{R}$.

[12]Véase 1.3.9 para recordar la definición de *add* y *non*.

**Lema 2.2.4.** *Si $(X, S, \mu)$ es un espacio de medida tal que $\mu(X) < \infty$, entonces no existe una colección $\{A_i\}_{i \in I}$ con $I$ no numerable tales que los $A_i$ sean $\mu$-medibles, ajenos (análogamente, casi ajenos)*[13] *dos a dos y de medida positiva.*

**Demostración del Lema**

Esta demostración la haremos por contrapositiva.

Sea $(X, S, \mu)$ un espacio de medida y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una colección no numerable de conjuntos medibles de medida positiva ajenos (o casi ajenos) dos a dos. Sea $B_n = \{A_i \ / \ i \in I, \mu(A_i) > 1/n\}$, como todo $A_i$ es de medida positiva $\{A_i\}_{i \in I} = \bigcup_{n \in \omega} B_n$.

Si todo $B_n$ fuera finito, entonces $\bigcup_{n \in \omega} B_n$ sería a los más numerable lo cual no es posible pues $I$ es no numerable. Sea $n_0$ tal que $B_{n_0}$ es infinito y tomemos $\{A_{j_m}\}_{m \in \omega} \subseteq B_{n_0}$. Como $\{A_{j_m}\}_{m \in \omega}$ son una cantidad numerable de conjuntos ajenos (casi ajenos) dos a dos tenemos que:

$$\mu(\bigcup_{m \in \omega} A_{j_m}) = \sum_{m \in \omega} \mu(A_{j_m}) \geq \sum_{m \in \omega} 1/n_0 = \infty$$

.

Finalmente, como $\bigcup_{m \in \omega} A_{j_m} \subseteq X$, $\mu(X) = \infty$.

l.q.q.d.

**Demostración del Teorema 2.2.2**

Supongamos que existe $\mu$ tal que $dom(\mu) = \wp(\mathbb{R})$, $\mu$ es no cero y es difusa. Consideremos la clase $A$ de los cardinales $\kappa$ tal que $\mu$ es $\kappa$- aditiva. $A$ es no vacía pues $\aleph_1 \in A$. Además, $A$ es un conjunto ya que $A \subseteq (2^{\aleph_0})^+$ pues $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$, $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pero, por hipótesis, $\mu(\mathbb{R}) > 0$; por lo que $\mu$ no es $(2^{\aleph_0})^+$-aditiva (y tampoco $\lambda$-aditiva para $\lambda \geq (2^{\aleph_0})^+$). Sea $\kappa_0 = \bigcup A = \sup A$[14]. Por construcción $\kappa_0 \leq 2^{\aleph_0}$.

$\kappa_0 \in A$. Si $\kappa_0 = \kappa^+$ y $\kappa_0 \notin A$, entonces $\kappa$ es cota superior de $A$ lo cual es una contradicción pues $\kappa < \kappa_0 = \sup A$. Si $\kappa_0$ es límite, tomemos $\kappa < \kappa_0$ y $\{A_\xi\}_{\xi < \kappa}$ una sucesión de conjuntos nulos. Como $\kappa_0$ es límite y es el supremo de $A$, existe $\kappa_1$ tal que $\kappa_1 \in A$ y $\kappa_1 \geq \kappa^+$. Al ser $\mu$ $\kappa_1$-aditiva y $\kappa < \kappa_1$, entonces $\mu(\bigcup_{\xi < \kappa} A_\xi) = 0$. Finalmente, esto pasa para todo $\kappa < \kappa_0$ con lo que obtenemos que $\mu$ es $\kappa_0$-aditiva.

Mostraremos que $\kappa_0$ es débilmente inaccesible. Como $\aleph_1 \in A$ obtenemos

[13] Dos conjuntos $A, B$ en un espacio de medida son casi ajenos si y sólo si $A \cap B$ es $\mu$-medible y $\mu(A \cap B) = 0$.

[14] El supremo de un conjunto es la mínima cota superior de éste. Véanse las definiciones de la sección B.3.

que $\kappa_0 > \aleph_0$. Además, al ser $\mu$ $\kappa_0$-aditiva pero no $\kappa_0^+$-aditiva, existe $\{B'_\xi\}_{\xi<\kappa_0}$ sucesión de conjuntos nulos tal que $\mu(\bigcup_{\xi<\kappa_0} B'_\xi) > 0$ (asegurar que esta unión es medible sólo se puede hacer gracias a la hipótesis $dom(\mu) = \wp(\mathbb{R})$). Sean $B = \bigcup_{\xi<\kappa_0} B'_\xi$ y $B_\xi = B'_\xi \setminus (\bigcup_{\beta<\xi} B'_\beta)$, notemos que $B = \bigcup_{\xi<\kappa_0} B_\xi$, pero que los conjuntos $B_\xi$ son ajenos dos a dos.

Definiremos una medida $\tau$ sobre $\wp(\kappa_0)$. Esta medida nos permitirá ver que $\kappa_0$ es regular. Si $\mu(B) < \infty$ entonces definimos $\tau(C) = \dfrac{\mu(\bigcup_{\alpha\in C} B_\alpha)}{\mu(B)}$. Si $\mu(B) = \infty$ y existe $B' \subseteq B$ tal que $0 < \mu(B') < \infty$ entonces tenemos que $B' = \bigcup_{\xi<\kappa}(B' \cap B_\xi)$ y definimos $\tau$ de forma análoga al caso anterior cambiando $B$ por $B'$ y $B_\alpha$ por $B' \cap B_\alpha$ . Finalmente, si $\mu(B) = \infty$ y para todo $D \subseteq B$ $\mu(D) = 0$ ó $\mu(D) = \infty$, entonces definimos $\mu'$ tal que $\mu'(D) = 0$ si $\mu(D) = 0$ y $\mu'(D) = 1$ si $\mu(D) = \infty$. Con esto podemos definir $\tau$ de forma análoga a los casos anteriores pero utilizando $\mu'$. Para facilitar notación, manejaremos $\tau(C) = \dfrac{\mu(\bigcup_{\alpha\in C} B_\alpha)}{\mu(B)}$ recordando que en los casos correspondientes se debe sustutuir $\mu$ por $\mu'$ o $B$ por $B'$.

Utilizamos esta medida para comprobar algunas propiedades. Tomemos $\kappa < \kappa_0$ y para cada $\xi < \kappa$ sean $A_\xi$ con $|A_\xi| < \kappa_0$ y $D_\xi = \bigcup_{\alpha\in A_\xi} B_\alpha$. Notemos que $\mu(D_\xi) = 0$ ya que $\mu$ es $\kappa_0$-aditiva. Una vez más, utilizando que $\mu$ es $\kappa_0$-aditiva, como $\kappa < \kappa_0$:

$$\tau(\bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi) = \frac{\mu(\bigcup_{\alpha\in\bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi} B_\alpha)}{\mu(B)} = \frac{\mu(\bigcup_{\xi<\kappa} D_\xi)}{\mu(B)} = 0.$$

Como $\tau(\bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi) = 0$ y $\tau(\kappa_0) = 1$, entonces $\bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi \neq \kappa_0$. Lo anterior muestra la regularidad de $\kappa_0$.

Finalmente, para mostrar que $\kappa_0$ es límite, supongamos que no lo es. En este caso $\kappa_0 = \kappa^+$, por lo que si $\xi < \kappa_0$, entonces $|\xi| \leq \kappa$. Por lo anterior, para cada $\xi < \kappa_0$ podemos tomar $f_\xi$ una función inyectiva de $\xi$ a $\kappa$[15].

Para cada $\alpha \in \kappa_0$ y cada $\xi \in \kappa$ definamos

$$M_\alpha^\xi = \{\beta \in \kappa_0 \ / \ \alpha < \beta \ \& \ f_\beta(\alpha) = \xi\}.$$

Notemos que si $\alpha \neq \gamma$ entonces $M_\alpha^\xi \cap M_\gamma^\xi = \emptyset$ para todo $\xi < \kappa < \kappa^+ = \kappa_0$ pues si $\beta \in M_\alpha^\xi \cap M_\gamma^\xi$ entonces $f_\beta(\alpha) = \xi = f_\beta(\gamma)$ y como $f_\beta$ es inyectiva tenemos que $\alpha = \gamma$.

[15] Aquí necesariamente utilizamos el Axioma de Elección.

Por otra parte, $\kappa_0 \setminus \bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi \subseteq \alpha^+$ ya que si $\eta \in \kappa_0 \setminus \alpha^+$ entonces $\alpha < \eta$ y $f_\eta(\alpha) \in \kappa$ está bien definido, por lo que $\eta \in M_\alpha^{f_\eta(\alpha)} \subseteq \bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi$. Como

$$\kappa_0 \setminus \alpha^+ \subseteq \bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi,$$

con sus complementos respecto a $\kappa_0$ sucede la contención opuesta.[16]

Esta observación nos permite asegurar que $|\bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi| = \kappa_0$ ya que si fuera estrictamente menor tendríamos que

$$\kappa_0 = |\kappa_0| = |(\kappa_0 \setminus \bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi) \cup \bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi| \leq |\alpha^+| + |\bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi| \leq$$

$$\leq \text{máx}\left\{\kappa, |\bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi|\right\} < \kappa^+ = \kappa_0.$$

Los dos párrafos anteriores permiten imaginarnos a la $M_\alpha^\xi$ como elementos de una matriz infinita con $\kappa$ renglones y $\kappa^+$ columnas.

$$\begin{pmatrix} M_0^0 & M_1^0 & \cdots & M_\alpha^0 & M_{\alpha^+}^0 & \cdots \\ M_0^1 & M_1^1 & \cdots & M_\alpha^1 & M_{\alpha^+}^1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_0^\xi & M_1^\xi & \cdots & M_\alpha^\xi & M_{\alpha^+}^\xi & \cdots \\ M_0^{\xi^+} & M_1^{\xi^+} & \cdots & M_\alpha^{\xi^+} & M_{\alpha^+}^{\xi^+} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Esta matriz es tal que los renglones están compuestos por conjuntos ajenos dos a dos y la unión de la columna es casi todo $\kappa_0$. A este tipo de arreglos se les llaman matrices de Ulam.

Ahora bien, notemos que como $\tau$ es $\kappa_0$-aditiva y $\tau(\{\xi\}) = \dfrac{\mu(B_\xi)}{\mu(B)} = 0$, entonces para todo $\alpha \in \kappa_0$ tenemos que $\tau(\alpha) = 0$, pues $\bigcup_{\xi\in\alpha} \{\xi\} = \alpha \subseteq \kappa_0$ y $|\alpha| < \kappa_0$. De esta forma $0 \leq \tau(\kappa_0 \setminus \bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi) \leq \tau(\alpha^+) = 0$, por lo que:

$$1 = \tau(\kappa_0) = \tau((\kappa_0 \setminus \bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi) \cup \bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi) =$$

[16] Notemos que se puede mostrar la igualdad, ya que, leyendo cuidadosamenta la definición, cada $M_\alpha^\xi$ es subconjunto de $\kappa_0 \setminus \alpha^+$.

$$= \tau(\kappa_0 \setminus \bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi) + \tau(\bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi) = 0 + \tau(\bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi) = \tau(\bigcup_{\xi<\kappa} M_\alpha^\xi).$$

Al ser $\kappa < \kappa_0$ para toda $\alpha$ existe $\xi_\alpha$ tal que $\tau(M_\alpha^{\xi_\alpha}) > 0$. Como existen $\kappa_0$ $\xi_\alpha$'s y tenemos $\kappa$ renglones entonces existe un renglón $\xi_0$ tal que $\xi_0 = \xi_\alpha$ para $\kappa_0$ $\alpha$'s, por lo que tenemos $\kappa_0 \geq \aleph_1 > \aleph_0$ conjuntos de medida positiva en un solo renglón. Pero esto es una contradicción ya que los conjuntos de cada renglón son ajenos, y lo anterior implica que existe una cantidad no numerable de conjuntos ajenos de medida positiva. Como $\tau(\kappa_0) = 1 < \infty$, la afirmación contradice el lema 2.2.4.

Por lo tanto, $\kappa_0$ no es sucesor. De esta forma, tenemos que $\kappa_0$ es un cardinal que entra inyectivamente en $\mathbb{R}$, que es mayor que $\aleph_0$, es regular y es límite. Lo que termina la prueba.

l.q.q.d.

Una de las interpretaciones más bonitas del teorema anterior reside en su enunciado contrapositivo (el cual aclararemos en los siguientes dos corolarios). Si lo leemos con cuidado, el teorema de Ulam nos dice que si ningún cardinal inaccesible entra inyectivamente en $\mathbb{R}$, entonces toda medida no cero y difusa en $\mathbb{R}$ tiene conjuntos no medibles.

**Corolario 2.2.5.** *Si la Hipótesis del Aleph (H.A.)*[17] *es válida, entonces toda medida difusa y no cero sobre* $\mathbb{R}$ *tiene al menos un conjunto no medible.*

**Prueba**

Si H.A. es válida entonces $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Sabemos que el primer cardinal débilmente inaccesible es estrictamente mayor que $\aleph_1$. Por el teorema anterior tenemos que como ningún cardinal inaccesible entra inyectivamente en $\mathbb{R}$ entonces las medidas en $\mathbb{R}$ son cero, o no son difusas, o su dominio no es toda la potencia.

l.q.q.d.

**Corolario 2.2.6.** *Si* $2^{\aleph_0} < \lambda$ *con* $\lambda$ *el primer inaccesible, entonces toda medida difusa y no cero sobre* $\mathbb{R}$ *tiene al menos un conjunto no medible.*

**Prueba**

Si $2^{\aleph_0} < \lambda$ entonces ningún inaccesible entra inyectivamente en $\mathbb{R}$ y por el teorema de Ulam, $dom(\mu) \neq \wp(\mathbb{R})$ para toda medida difusa y no cero.

l.q.q.d.

La primera sección del capítulo nos da una idea de lo poderoso que es el Teorema de Ulam. Éste nos dice que la búsqueda de medidas no triviales con dominio $\wp(\mathbb{R})$ utilizando el Axioma de Elección nos lleva a romper la Hipótesis del Continuo (por mucho) y nos lleva a la existencia de elementos que podrían ser una contradicción.

[17] Ver el inicio de la sección 1.5.

## 2.3. Otras relaciones de medida y cardinales

Leyendo cuidadosamente el Teorema de Ulam podemos notar que contiene la demostración del siguiente corolario:

**Definición 2.3.1.** $\kappa$ es un cardinal medible real-valuado (real-valued measurable cardinal) si y sólo si tiene una medida $\kappa$-aditiva definida en toda su potencia que sea no cero y difusa.

**Corolario 2.3.2.** *Si existe un cardinal $\kappa$ medible real-valuado, entonces $\kappa$ es débilmente inaccesible.*

La búsqueda de la existencia de cardinales medibles real-valuados se puede simplificar un poco con el siguiente resultado cuya prueba es un corolario de la demostración del teorema de Ulam (teorema 2.2.2):

**Corolario 2.3.3.** *Si $\lambda$ es el primer cardinal que tiene una medida definida en toda su potencia no cero y difusa entonces $\lambda$ es medible real-valuado.*

**Demostración**

Para demostrar que $\lambda$ es medible real-valuado sólo queda ver que la medida $\mu$ encontrada sobre $\lambda$ es $\lambda$-aditiva. Supongamos que no lo es y sea $A$ el conjunto de los cardinales $\kappa$ tal que $\mu$ es $\kappa$- aditiva. Notemos que $A \subseteq \lambda$ pues $\mu$ no es $\lambda$-aditiva.

Sea $\kappa_0 = \bigcup A$. Por la demostración de 2.2.2, sabemos que $\kappa_0 \in A$, por lo que $\kappa_0 \neq \lambda$. De esta forma $\kappa_0 < \lambda$. Sabemos que $\mu$ no es $\kappa_0^+$-aditiva, por lo que existe una $\kappa_0$-sucesión de conjuntos de $\lambda$, digamos $\{B_\xi\}_{\xi \in \kappa_0}$, tal que para toda $\alpha < \kappa_0$ $\mu(B_\alpha) = 0$ y $\mu(\bigcup_{\xi < \lambda} B_\xi) > 0$.

Como probamos en el teorema de Ulam, podemos suponer que estos conjuntos son ajenos dos a dos. Nombremos $B = \bigcup_{\xi < \kappa_0} B_\xi$, ahora definiremos la siguiente medida $\tau$ sobre toda la potencia de $\kappa_0$:

$$\tau(C) = \frac{\mu(\bigcup_{\alpha \in C} B_\alpha)}{\mu(B)}.$$

En caso de que tengamos problemas con $\mu(B) = \infty$ hacemos las mismas consideraciones que en el teorema 2.2.2. Notemos que $\tau$ es una medida no cero y difusa definida sobre toda la potencia de $\kappa_0$, pero $\kappa_0 < \lambda$. Esto es una contradicción pues $\lambda$ es el cardinal más chico con esta propiedad. Dado que la contradicción viene de que $\mu$ no es $\lambda$-aditiva obtenemos el resultado buscado.

l.q.q.d.

Ya que tenemos definidos una nueva clase de cardinales, podemos regresar un poco a las intuiciones probabilistas.

Sin ser muy rebuscados, en probabilidad surge la siguiente pregunta: ¿qué sucede si alargamos el tiempo indefinidamente?

Ejemplifiquemos a lo que me refiero. Imaginemos a un mono frente a una máquina de escribir ideal (que no se le acabe la tinta, no se descomponga y no se trabe), y démosle una tira de papel infinita para que el mono teclée en ella todo lo que quiera. Una pregunta sencilla es ¿qué probabilidad tiene de escribir algo coherente? Digamos la frase «hola mundo».

Si sólo lo dejamos teclear diez veces, tiene una probabilidad de 1 en $(cdt)^{10}$ (donde *cdt* significa cantidad de teclas), pero si lo dejamos teclear 11 veces tendría 2 en $(cdt)^{11}$ (pues sería válido que escriba « hola mundo» u «hola mundo »), dejándolo teclear 12 veces su probabilidad aumentaría (sería algo como $1+2\dot{(}cdt)$ en $(cdt)^{12}$). Siguiendo esta secuencias de ideas ¿cuál es la probabilidad de que escriba «hola mundo» en una cantidad infinita de tecleos?

Haciendo las cuentas, resulta que tiene probabilidad 1 de que suceda. De hecho, el mono tiene probabilidad 1 de escribir todas las obras de Cortázar sin faltas de ortografía, y tiene posibilidad 1 de escribir todos los libros escritos por la humanidad hasta el 14 de agosto de 2014.

Lo anterior es un caso particular de la Ley 0-1 de Kolmogorov, en la cual se dice que la probabilidad sobre las colas de eventos independientes que se repiten infinitamente es cero o uno.

Ya mostramos una forma de definir una medida de probabilidad sobre los cardinales medibles real-valuados (es la medida $\tau$ de la demostración del teorema de Ulam), de esta forma podemos preguntarnos: si hacemos una cantidad infinita de eventos sobre estos cardinales ¿habrá algún lugar donde se cumpla la ley 0-1 de Kolmogorov?

**Definición 2.3.4.** Un cardinal $\kappa$ es medible si y sólo si existe una medida $\kappa$ aditiva, no trivial y difusa tal que sus únicos valores sean 0 o 1.[18]

En un primer momento podríamos pensar que los cardinales medibles y los medibles real-valuados tienen las mismas propiedades. Sin embargo, la restricción de los valores de la medida es más influyente de lo que parece:

**Lema 2.3.5.** *Sea $\mu$ una medida $\kappa$-aditiva que sólo tome los valores $0, 1$. Entonces si $\{X_\alpha \ / \ \alpha < \lambda\}$ con $\lambda < \kappa$ son conjuntos $\mu$-medibles de medida uno, tenemos que $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ también es $\mu$ medible y es de medida $1$.*

**Demostración**

[18] La definición usual de estos cardinales es que exista un ultrafiltro no principal $\kappa$-completo. Por motivos del enfoque de este texto utilizaremos la idea de medida no trivial, difusa y $\kappa$-aditiva. Se puede demostrar que el cardinal más chico con una medida no trivial y de valores cero y uno resulta ser un cardinal medible, es decir, la medida es en verdad $\kappa$-aditiva. Por ello en algunos textos no se menciona la $\kappa$-aditividad en medidas para definir este tipo de cardinales y simplemente se define una medida con valores $0, 1$ como motivación.

Como cada $X_\alpha$ es $\mu$-medible de medida 1, tenemos que $X_\alpha^c$ es $\mu$-medible de medida cero. Como $\mu$ es $\kappa$-aditiva y $\lambda < \kappa$ tenemos que $\bigcup\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha^c$ es $\mu$-medible y de medida 0. Finalmente, como $\bigcup\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha^c = (\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha)^c$, $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ es $\mu$-medible de medida 1.

l.q.q.d.

**Teorema 2.3.6.** *Los cardinales medibles son fuertes.*

**Prueba**

Sea $\kappa$ un cardinal medible, y supongamos que existe $\lambda < \kappa$ tal que $2^\lambda \geq \kappa$. En este caso existe $S \subseteq {}^\lambda 2$ tal que $|S| = \kappa$. Como $\kappa$ es medible tenemos que existe $\mu$ una medida $\kappa$-aditiva difusa con valores cero y uno sobre toda su potencia. Si $S = \{f_\alpha : \lambda \to \{0,1\} \ / \ \alpha < \kappa\}$, definimos $X_\beta$ como $\{\alpha \in \kappa \ / \ f_\alpha(\beta) = 0\}$ o como $\{\alpha \in \kappa \ / \ f_\alpha(\beta) = 1\}$ dependiendo cual tenga $\mu$ medida 1[19]. Esto nos define la función $g : \lambda \to 2^\kappa$ tal que $g(\beta)$ es 0 si $X_\beta = \{\alpha \in \kappa \ / \ f_\alpha(\beta) = 0\}$ y 1 en el otro caso.

Recordemos que si $\alpha \neq \beta$ entonces $f_\alpha \neq f_\beta$. Teniendo lo anterior en mente, si $\alpha, \beta \in X_\alpha$ para toda $\alpha < \lambda$ entonces, por definición de $g$ y de $X_\gamma$,

$$f_\alpha(\gamma) = g(\gamma) = f_\beta(\gamma)$$

para todo $\gamma \in \lambda$, por lo que $f_\alpha = f_\beta$ obteniendo así que $\alpha = \beta$. De esta forma, $|\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha| \leq 1$ lo que implica que $\mu(\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha) = 0$. Esto contradice el lema anterior.

l.q.q.d.

**Corolario 2.3.7.** *Todo cardinal medible es un cardinal inaccesible.*

**Prueba**

Todo cardinal medible es un cardinal medible real-valuado, por lo que es débilmente inaccesible. El teorema anterior asegura que son fuertes. Por tanto, los cardinales medibles son débilmente inaccesibles y fuertes, es decir, inaccesibles.

l.q.q.d.

Aunque claramente todos los cardinales medibles son medibles real-valuados, no todos los medibles real-valuados son medibles. En el teorema de Ulam creamos un cardinal medible real-valuado que es más chico que $2^{\aleph_0}$, por lo que no es un cardinal fuerte.

De primer momento, podemos creer que pueden existir muchísimos tipos de cardinales medibles real-valuados que no sean medibles, sin embargo los siguientes resultados nos acotan esta posibilidad, generalizando el teorema de Ulam:

[19] Como estos conjuntos son complementarios, si ambos midieran 1 tendríamos que $\mu(\kappa) = 2$, si ambos midieran cero tendríamos que $\mu(\kappa) = 0$. De esta forma, es necesario que uno sea nulo y el otro de medida completa.

**Definición 2.3.8.** Sea $\nu$ una medida sobre el conjunto $S$. $A \subseteq S$ es un átomo si y sólo si $A$ es $\nu$-medible, $\nu(A) > 0$ y para todo $B \subseteq A$ $\nu$-medible se tiene que $\nu(B) = 0$ o $\nu(B) = \nu(A)$.

**Lema 2.3.9.** *Si existe $X$ un conjunto con una medida no cero, finita y sin átomos entonces $X$ tiene una partición en $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ partes cada una $\mu$-medible y de medida cero.*

**Demostración**

Sea $\mu$ la medida sobre $X$ descrita en las hipótesis del teorema. Al no tener átomos, para todo conjunto de medida positiva $A \subseteq X$ existen $B, C \subseteq A$ conjuntos $\mu$-medibles tales que $B \cap C = \emptyset$, $\mu(B), \mu(C) > 0$ y $B \cup C = A$.

A continuación crearemos un árbol $T$ definiendo sus niveles[20]. Éste estará ordenado por la contención inversa ($\supseteq$) y sus nodos serán subconjuntos $\mu$-medibles de medida positiva de $X$.

En el nivel cero el único elemento será $X$.

Supongamos que ya tenemos definido el nivel $\alpha$. Si $Y$ es un elemento del nivel $\alpha$ sólo tendrá dos sucesores inmediatos $Z_1$ y $Z_2$ tales que sean una partición de $Y$ en elementos $\mu$-medibles de medida positiva, es decir, $Z_1, Z_2 \subseteq Y$, $Z_1 \cup Z_2 = Y$, $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ y $\mu(Z_1), \mu(Z_2) > 0$. Nótese el fuerte uso de elección al momento de elegir sucesores para todo elemento del árbol.

Finalmente, si $\gamma$ es un ordinal límite y tenemos todos los niveles anteriores definidos, $Y$ será un elemento del nivel $\gamma$ si y sólo si $Y$ es $\mu$-medibles, tiene medida positiva y si existe $\{Y_\xi\}_{\xi<\gamma}$ una $\gamma$-sucesión de subconjuntos de $X$ tales que $Y_\alpha$ pertenezca al nivel $\alpha$ del árbol y $Y = \bigcap\limits_{\xi<\gamma} Y_\xi$.

Dado que dos elementos que no sean comparables son ajenos, es claro que si $Y$ es un elemento del nivel $\gamma$ con $\gamma$ límite y $Y = \bigcap\limits_{\xi<\gamma} Y_\xi$ entonces los elementos $Y_\xi$ forman una cadena.

Este árbol tiene varias propiedades importantes. Primero, notemos que ninguna rama tiene altura un ordinal sucesor[21], pues si tiene un elemento en el nivel $\alpha$ forzosamente tiene dos sucesores en el nivel $\alpha^+$. Por otra parte, al utilizar el orden $\supseteq$ tenemos que toda rama es una sucesión de conjuntos anidados. Si tomamos su intersección ésta no puede ser $\mu$-medible de medida positiva (si lo fuera, habría un elemento mayor y comparable con todos los de la rama, lo cual es una contradicción) por lo que su intersección debe ser no $\mu$-medible, vacía o $\mu$-medible de medida cero[22]. Finalmente, para cada $x \in X$ el conjunto $T_x = \{Y \in T \ / \ x \in Y\}$ es una rama, esto sucede porque los sucesores de cada

[20] Para saber más sobre árboles léase la sección B.7.

[21] Recuérdese que las ramas son las cadenas maximales. Para más información véase B.7.2.

[22] Sí se pueden tener sucesiones de conjuntos anidados de medida positiva cuya intersección sea vacía, por ejemplo $\bigcap\limits_{n\in\omega} (0, \frac{1}{n})$.

elemento $Z$ son una partición de éste por lo que si $x \in Z$ sólo puede estar en uno de sus dos sucesores.

La información anterior nos dice que si tomamos todas las ramas de $T$ cuya intersección sea no vacía, entonces el conjunto de las intersecciones de las ramas es una partición de $X$ en elementos no $\mu$-medibles o $\mu$-medibles de medida cero. Mostraremos que la partición descrita sólo tiene conjuntos $\mu$-medibles de medida cero y contaremos cuántas ramas puede tener nuestro árbol para terminar la prueba.

Notemos que cada nivel de $T$ está compuesto por conjuntos ajenos entre sí de medida positiva, pero, $\mu(X) < \infty$ por lo que el lema 2.2.4 nos obliga a que sean a lo más una cantidad numerable.

Por otra parte, si tomamos una cadena de elementos $\{Z_\beta\}_{\beta\in\alpha}$ tal que $Z_\beta$ esté en el nivel $\beta$, podemos crear el conjunto de conjuntos ajenos $\left\{Z_\beta \setminus Z_{\beta^+}\right\}_{\beta<\alpha}$[23]. Estos conjuntos $\mu$-medibles, además, son de medida positiva pues $Z_{\beta^+}$ y $Z_\beta \setminus Z_{\beta^+}$ son los únicos sucesores en $T$ de $Z_\beta$ mismos que, por definición, no tienen medida cero. Una vez más, el lema 2.2.4 obliga a que $\left\{Z_\beta \setminus Z_{\beta^+}\right\}_{\beta<\alpha}$ sea numerable, por lo que $\alpha < \omega_1$, esto nos dice nos dice que la altura de nuestro árbol es a lo más $\omega_1$.

Lo anterior implica que la intersección de los elementos de cualquier rama (es decir, cualquier elemento de nuestra partición) es $\mu$-medible pues es, a lo más, intersección numerable de onjetos $\mu$-medibles. Por las consideraciones anteriores, obtenemos que la intersección de una rama es un conjunto $\mu$-medible de medida cero.

Sabemos que la altura de nuestro árbol es a lo más $\omega_1$, que cada nivel de $T$ es a lo más numerable y que ninguna rama puede tener altura no numerable. Así, hay a lo más tantas ramas como $\{f : \alpha \to \omega \ / \ \alpha < \omega_1\} = {}^{<\omega_1}\omega$, en otras palabras hay a lo más tantas ramas como:

$$|{}^{<\omega_1}\omega| = |\bigcup_{\alpha<\omega_1} {}^{\alpha}\omega| \leq \sum_{\alpha<\omega_1} \aleph_0^{|\alpha|} = (\sup_{\alpha<\omega_1} \aleph_0^{|\alpha|}) \cdot \aleph_1 = \aleph_0^{\aleph_0} \cdot \aleph_1 = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

De esta forma la cantidad de ramas de intersección no vacía de nuestro árbol es menor o igual que $2^{\aleph_0}$. Sea $\{R_\xi \ / \ \xi < \kappa\}$ una enumeración de todas la ramas tales que $P_\xi = \bigcap_{Z\in R_\xi} Z \neq \emptyset$. Ya mostramos que $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ y que $\{P_\xi \ / \ \xi < \kappa\}$ es una partición de $X$ en conjuntos de $\mu$-medibles de medida cero.

l.q.q.d.

**Teorema 2.3.10.** *Si existe $X$ un conjunto con una medida no cero, sin átomos y con dominio $\wp(X)$ entonces existe un cardinal medible real-valuado menor o igual que $2^{\aleph_0}$.*

[23]Notemos que son ajenos pues si $\xi < \xi^+ \leq \gamma < \gamma^+$ entonces $Z_{\gamma^+} \subsetneq Z_\gamma \subseteq Z_{\xi^+} \subsetneq Z_\xi$, por lo que $(Z_\gamma \setminus Z_{\gamma^+}) \cap (Z_\xi \setminus Z_{\xi^+}) = (Z_\gamma \cap Z_\xi) \setminus (Z_{\gamma^+} \cup Z_{\xi^+}) = Z_\gamma \setminus Z_{\xi^+} = \emptyset$.

**Demostración**

Como $X$ tiene una medida $\mu$ sin átomos con dominio $\wp(X)$, entonces existe $A \subseteq X$ tal que $0 < \mu(A)$ y $\mu(A) \neq \mu(X)$, en particular tenemos que

$$\mu(A) < \mu(X) \leq \infty,$$

por lo que $A$ es de medida finita. Notemos que $\mu|_{\wp(A)}$ es una medida no cero, finita, sin átomos y con dominio $\wp(A)$ por lo que, utilizando el lema anterior, $A$ tiene una partición en $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ partes de medida cero. Sea $\{P_\xi \ / \ \xi < \kappa\}$ esta partición. Definamos la siguiente medida sobre el conjunto $\kappa$:

$$\tau(C) = \frac{\mu(\bigcup_{\beta \in C} P_\beta)}{\mu(A)}.$$

Esta es una medida difusa, no cero (pues $\tau(\kappa) = 1$) y con dominio $\wp(\kappa)$. Sea $\kappa_0$ el mínimo cardinal tal que tenga una medida difusa, no cero y con dominio toda la potencia del cardinal. Por el corolario 2.3.3 $\kappa_0$ es medible real-valuado, y por construcción $\kappa_0 \leq \kappa \leq 2^{\aleph_0}$.

l.q.q.d.

**Corolario 2.3.11.** *Si existe $X$ un conjunto con una medida no cero, sin átomos y con dominio $\wp(X)$ entonces su medida no es $(2^{\aleph_0})^+$-aditiva.*

**Prueba**

Una vez más, si $\mu$ es la medida en cuestión, con estas hipótesis existe $A \subseteq X$ tal que $0 < \mu(A) < \infty$. Por el lema 2.3.9 $A$ tiene una partición $\{P_\xi \ / \ \xi < \kappa\}$ en elementos de medida cero con $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.

Notemos que $\kappa \leq 2^{\aleph_0} < (2^{\aleph_0})^+$, que $\mu(P_\xi) = 0$ para toda $\xi < \kappa$ pero que $\mu(\bigcup\limits_{\xi<\kappa} P_\xi) = \mu(A) > 0$. Por lo que $\mu$ no es $(2^{\aleph_0})^+$-aditiva.

l.q.q.d.

**Corolario 2.3.12.** *Si $\kappa$ es un cardinal medible real-valuado, entonces $\kappa$ es medible o $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.*

**Prueba**

Sea $\kappa$ un cardinal medible real-valuado y $\mu$ su medida $\kappa$-aditiva, no cero y difusa con dominio $\wp(\kappa)$.

Si $\mu$ no tiene átomos, por el corolario anterior $\mu$ no es $(2^{\aleph_0})^+$-aditiva, pero por hipótesis es $\kappa$-aditiva, así tenemos que $\kappa < (2^{\aleph_0})^+$, en otras palabras, $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.

En otro caso, $\mu$ tiene un átomo, digamos $A \subseteq \kappa$. Como $\mu$ es difusa y $\kappa$-aditiva, necesariamente $|A| = \kappa$ por lo que, sin pérdida de generalidad, podemos pensar que $A = \kappa$.[24] De esta forma tenemos que para todo $C \subseteq \kappa$, $\mu(C) = \mu(\kappa)$ o

[24] Si $A \neq \kappa$ sabemos que ambos son biyectables por lo que existe $f : A \to \kappa$ una biyección entre ellos, podemos definir una medida $\nu$ sobre $\kappa$ de tal forma que $\nu(B) = \mu(f^{-1}[B])$. Para $\nu$ $\kappa$ es un átomo.

$\mu(C) = 0$. Definimos $\mu'$ una medida sobre $\kappa$ tal que para todo $B \subseteq \kappa$ $\mu'(B) = 1$ si y sólo si $\mu(B) = \mu(\kappa)$ y $\mu'(B) = 0$ en otro caso, es decir, si $\mu(B) = 0$.

Es claro que $\mu'$ es una medida no cero, difusa, $\kappa$-aditiva que sólo toma valores 0 y 1, por lo que $\kappa$ es un cardinal medible.

l.q.q.d.

**Corolario 2.3.13.** *Si es válida H.A. o $2^{\aleph_0}$ es más chico que el primer cardinal inaccesible entonces toda medida sin átomos y no cero tiene conjuntos no medibles.*

**Demostración**

Se obtiene por el enunciado contrapositivo del teorema anterior.

l.q.q.d.

Para cerrar esta sección es importante mencionar otro teorema sobre cardinales medibles. Con él podemos entender las grandes implicaciones de su existencia en la teoría de ZFC.

**Teorema 2.3.14.** *Si $\kappa$ es un cardinal medible, entonces existen $\kappa$ cardinales inaccesibles por debajo de él.*[25]

## 2.4. Juegos

Hemos trabajado con medidas y AE hasta este momento, y hemos descubierto que su combinación nos creó problemas tanto en la medida de Lebesgue como en otras medidas sobre $\mathbb{R}$ (e inclusive, con medidas sin átomos). Con este panorama es lógico preguntarse ¿qué pasaría si todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ fueran Lebesgue medibles? Solovay en 1970 prueba que existe un modelo de $ZF^-$ donde todos los conjuntos de reales son Lebesgue medibles y, por tanto, no vale el Axioma de Elección.

A grandes rasgos, Solovay asume la existencia de un cardinal inaccesible y hace un forcing donde lo colapsa a $\aleph_1$, de esta forma, surgen muchos reales nuevos. Finalmente, se fija en un submodelo de su construcción y utilizando un concepto llamado *random reals* muestra que en ese modelo todo es medible.

Aunque innovadora, la construcción de Solovay es muy técnica y puramente conjuntista, por lo que no la haremos aquí[26]. En cambio, tomaremos un nuevo axioma que también implica que todo elemento de la potencia de $\mathbb{R}$ es Lebesgue medible y muestra una bella relación entre los juegos y muchas propiedades de los reales.

---

[25] De hecho, se puede demostrar que todo cardinal medible es un cardinal de Mahlo, es decir, que el conjunto de cardinales inaccesibles bajo él es estacionario. Sin embargo, la teoría necesaria para definir el concepto de estacionario, aunque sencilla, es larga y no ayuda a los objetivos de esta tesis. La demostración de este teorema se puede encontrar en [9].

[26] Para conocer esta prueba léase [1].

En lo que sigue ${}^{I}A = \{f : I \to A\}$, en el caso de que $I$ sea un ordinal nos permitiremos expresar a $f \in^{I} A$ como la sucesión $(f(0), f(1), ..., f(\xi), ...) = (f(i))$. Iniciaremos nuestra incursión a la teoría de juegos en los juegos finitos para tener claros los conceptos y técnicas al momento de saltar a los juegos infinitos.

**Definición 2.4.1.** *Un juego finito de dos participantes es:*

$$G = G(n, X, Y, A)$$

*donde:*

- *$n$ es un número natural que representa la cantidad de turnos de cada jugador.*
- *$X$ y $Y$ son conjuntos no vacíos y finitos. $X$ (resp. $Y$) representa las posibles jugadas del jugador uno (resp. dos) en cada turno.*
- *$A$ es un subconjunto de ${}^{n}(X \times Y)$ que representa el conjunto ganador del jugador uno.*

*El juego $G$ se celebra de la siguiente manera: en el primer turno el jugador uno elige un elemento $x_0 \in X$, después el jugador dos, sabiendo lo que eligió su oponente, toma un elemento $y_0 \in Y$. Ahora, en el segundo turno, sabiendo todas las jugadas realizadas, el jugador uno toma $x_1 \in X$ y así sucesivamente. Al final del juego se tendrá la $n$-sucesión de parejas*

$$((x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_{n-1}, y_{n-1})) \in {}^{n}(X \times Y);$$

*a esta $n$-sucesión se le llama resultado del juego.*

*Si el resultado del juego pertenece a $A$ gana el jugador uno, en otro caso gana el jugador dos.*

*Una estrategia $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{n-1})$ para el jugador uno es una $n$-ada de funciones tal que para toda $i \in n$ se tiene que $\sigma_i : {}^{i}(X \times Y) \to X$[27]. Análogamente las estrategias $\tau$ del jugador dos son $n$-adas de funciones $(\tau_0, \tau_1, ..., \tau_{n-1})$ tal que para toda $i \in n$, $\tau_i : (({}^{i}(X \times Y)) \times X) \to Y$.*

*Una estrategia $\sigma$ del jugador uno es ganadora si y sólo si para toda $n$-sucesión $(y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \in {}^{n}Y$ el resultado del juego $((x_0, y_0), (x_1, y_1), ...., (x_{n-1}, y_{n-1}))$ obtenido tomando $x_0 = \sigma_0(\emptyset)$, $x_1 = \sigma_1((x_0, y_0))$, $x_2 = \sigma_2(((x_0, y_0), (x_1, y_1)))$, etc. pertenece a $A$. Al resultado del juego siguiendo la estrategia $\sigma$ y teniendo la sucesión $(y_0, y_1, ..., y_{n-1})$ como jugadas del jugador dos le llamaremos $R(\sigma, (y_0, y_1, ..., y_{n-1}))$.*

*Análogamente, se define una estrategia ganadora para el jugador dos. La función $R(\tau, (x_0, x_1, ..., x_{n-1}))$ también se usará para nombrar al resultado del*

[27] Recordemos que ${}^{0}(X \times Y) = \{\emptyset\}$. Por lo que las estrategias del jugador uno siempre inician con una constante.

*juego que se obtiene cuando el jugador dos sigue la estrategia $\tau$ y el jugador uno juega $(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$.*

*Finalmente, se dice que el juego $G$ es determinado si y sólo si existe una estrategia ganadora para alguno de los jugadores.*

Aunque todas las demostraciones de esta sección se pueden hacer siguiendo la rigidez de las definiciones antes mencionadas, en ocasiones, principalmente al momento de definir estrategias, se hará de manera más informal para que queden más claras las nociones, se respete la intuición y las demostraciones no se alarguen en tecnicismos.

Este primer teorema no utiliza el AE.

**Teorema 2.4.2.** *Todo juego finito es determinado.*

**Prueba**

Lo demostraremos por inducción sobre los turnos.

*Caso base,* $n = 1$. Tenemos el juego $G(1, X, Y, A)$. Si existe $x_0 \in X$ tal que para todo $y \in Y$, $(x_0, y) \in A$ el primer jugador tiene estrategia ganadora (a saber, elegir $x_0$). Si no, tenemos que para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \notin A$.

Como los conjuntos son finitos, podemos elegir sin utilizar Axioma de Elección un $\tau(x) \in Y$ para todo $x \in X$ tal que $(x, \tau(x)) \notin A$. Esta $\tau$ es una estrategia ganadora para el segundo jugador.

*Paso inductivo* Tomemos el juego

$$G(n + 1, X, Y, A).$$

Para cada pareja $(x, y) \in X \times Y$ definamos el juego

$$G_{(x,y)}(n, X, Y, A(x, y))$$

donde:

$$A(x, y) = \{((x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)) \in {}^{n}(X \times Y) \ / \ ((x, y), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)) \in A\}.$$

Si existe $x_0 \in X$ tal que para todo $y \in Y$ el juego $G_{(x_0,y)}$ tiene estrategia ganadora para el jugador uno, digamos $\sigma_y$, entonces el primer jugador tiene estrategia ganadora, a saber, elegir $x_0$ y después seguir la estrategia $\sigma_y$ correspondiente a la $y$ elegida por el jugador dos. En esta selección no se utiliza el AE pues, aunque las estrategias no son necesariamente únicas, $Y$ es un conjunto finito.

En caso contrario, para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que el juego $G_{(x,y)}$ no tiene estrategia ganadora para el jugador uno. Por hipótesis de inducción, al ser los juegos $G_{(x,y)}$ de $n$ turnos, los $G_{(x,y)}$ son juegos determinados. Así, para cada

$x \in X$ existe $y \in Y$ tal que el jugador dos tiene estrategia ganadora $\tau_{(x,y)}$ en el juego $G_{(x,y)}$.

Ahora, al ser todo finito, podemos hacer, sin AE, una función $\tau_0 : X \to Y$ tal que en el juego $G_{(x,\tau_0(x))}$ el jugador dos tenga estrategia ganadora. De esta forma, la estrategia ganadora del jugador dos sería utilizar la función $\tau_0$ y de ahí seguir la estrategia $\tau_{(x,\tau_0(x))}$ siendo $x$ la elección del primer jugador.

l.q.q.d.

Sorprendentemente, los juegos finitos se comportan de forma determinista (aunque en esta categoría entran juegos como ajedrez, damas inglesas, Go, etc.). De esta forma, podemos dejar de lado la teoría finita y pasar al siguiente nivel, el de los juegos infinitos.

Existen dos caminos para convertir el juego $G(n, X, Y, A)$ en un juego infinito. En el primero permitimos que los conjuntos de los turnos sean infinitos, es decir, dejamos que $X$ o $Y$ tengan cardinalidad infinita. En el otro camino hacemos que la cantidad de turnos sea infinita, es decir, permitimos $n \geq \omega$. A continuación analizaremos un poco de ambos caminos y demostraremos que no existe ninguna teoría que contenga a $ZF^-$ tal que todos los juegos sean determinados.

**Teorema 2.4.3.** *Son equivalentes:*

1. *Los juegos de la forma $G(n, X, Y, A)$, con $n$ un natural pero donde permitimos que los conjuntos de los turnos sean infinitos, son determinados.*
2. *Los juegos de la forma $G(1, X, Y, A)$ son determinados.*
3. *El Axioma de Elección.*

**Demostración**

1)$\Rightarrow$ 2) Es claro.

2)$\Rightarrow$ 3) Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un conjunto de conjuntos no vacíos. Buscamos formar una función de elección. Definamos el juego $G(1, I, \bigcup_{i\in I} A_i, A)$ donde

$$A = \{(i, x) \;/\; x \notin A_i\}.$$

Como para todo $i \in I$ existe $x \in A_i$ el jugador uno no puede tener estrategia ganadora (pues, con cualquier elección que haga, el jugador dos puede evitar que el primer jugador gane). Utilizando 2), el juego definido está determinado, por lo que existe una estrategia ganadora para el jugador dos. Ésta es una función $\tau : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $(i, \tau(i)) \notin A$, es decir, $\tau(i) \in A_i$. $\tau$ es una función de elección.

3)$\Rightarrow$ 1) Se repite la misma demostración que el teorema anterior (el 2.4.2) sólo que en los momentos en que se menciona que no se usa el Axioma de Elección pues las cosas son finitas, se utiliza el Axioma de Elección para los casos infinitos.

l.q.q.d.

Es importante notar que en los juegos de la forma $G(1, X, Y, A)$, si el jugador uno no tiene estrategia ganadora, entonces el jugador dos siempre puede ganar (como se argumenta en el caso 2) $\Rightarrow$ 3)). Sin embargo, esto no implica que el jugador dos tenga estrategia ganadora, por ejemplo, si el AE no es válido, habrá $\{A_i\}_{i\in I}$ sin función de elección por lo que el juego definido en 2) $\Rightarrow$ 3) para esos conjuntos cumple que el jugador dos siempre puede ganar, pero no tiene estrategia ganadora.

**Definición 2.4.4.** 1. Un juego infinito de dos participantes es:

$$G = G(X, A)$$

donde:

- $X$ es un conjunto no vacío. $X$ representa las posibles jugadas del jugador uno y dos en cada turno.
- $A$ es un subconjunto de ${}^{\omega}X$ que representa el conjunto ganador del jugador uno.

El juego $G$ se celebra de la siguiente manera: en el turno cero el jugador uno elige un elemento $x_0 \in X$, en el turno uno el jugador dos, sabiendo lo que eligió su oponente, toma un elemento $x_1 \in X$. Ahora, en el turno dos, sabiendo todas las jugadas realizadas, el jugador uno toma $x_2 \in X$ y así sucesivamente. El juego tiene $\omega$ turnos. De esta forma. Al final del juego se tendrá la sucesión $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...) \in {}^{\omega}X$; a esta sucesión se le llama resultado del juego. Notemos que los elementos con índice par de la sucesión son las jugadas del jugador uno y los de índice impar las del dos.

Al igual que en los juegos finitos, si el resultado del juego pertenece a $A$ gana el jugador uno, en otro caso gana el jugador dos.

Una estrategia $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_n, ...)$ para el jugador uno es una sucesión de funciones tal que para toda $n \in \omega$ se tiene que $\sigma_n : {}^{2n}X \to X$. Análogamente las estrategias $\tau$ del jugador dos son sucesiones de funciones $(\tau_0, \tau_1, ..., \tau_n, ...)$ tal que para toda $n \in \omega$, $\tau_n : {}^{2n+1}X \to X$.

Una estrategia $\sigma$ del jugador uno es ganadora si y sólo si para toda sucesión $(y_0, y_1, ..., y_n, ...) \in {}^{\omega}X$ el resultado del juego $(x_0, y_0, x_1, y_1, ...., x_n, y_n, ...)$ obtenido tomando $x_0 = \sigma_0(\emptyset)$, $x_1 = \sigma_1((x_0, y_0))$, $x_2 = \sigma_2((x_0, y_0, x_1, y_1))$, etc. pertenece a $A$. Al resultado del juego siguiendo la estrategia $\sigma$ y teniendo la sucesión $(y_0, y_1, ..., y_n, ...)$ como jugadas del jugador dos le llamaremos $R(\sigma, (y_0, y_1, ..., y_n, ...))$.

Análogamente, se define una estrategia ganadora para el jugador dos. La función $R(\tau, (x_0, x_1, ..., x_n, ...))$ también se usará para nombrar al resultado del juego que se obtiene cuando el jugador dos sigue la estrategia $\tau$ y el jugador uno juega $(x_0, x_1, ..., x_n, ...)$.

Finalmente, se dice que el juego $G$ es determinado si y sólo si existe una estrategia ganadora para alguno de los jugadores.

2. Si $A \subseteq [0,1]$, $G(A)$ denotará al juego $G(2 = \{0,1\}, A')$ donde $(x_n) \in A'$ si y sólo si $\displaystyle\sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{2^{n+1}} \in A$.

Si consideramos juegos con una cantidad infinita de turnos podemos notar que el menor cambio en el juego produce repercusiones grandes en la existencia de estrategias ganadoras para los contendientes.

Si consideramos el juego $G(2, A)$ donde

$$A = \{((x_n) \in {}^{\omega}2 \;/\; \exists n \in \omega\, x_{2n} \neq x_{2n+1}\},$$

resulta que el jugador dos tiene estrategia ganadora, a saber, siempre elegir el mismo valor que elige el primer jugador.

Sin embargo, si consideramos el juego $G(2, A \cup \{0\})$ donde 0, representa la función constante con valor 0 el jugador uno es quien tiene estrategia ganadora, elegir siempre el valor cero.

A continuación, veremos que algunos de los juegos que definimos son equivalentes respecto a su determinación.

**Teorema 2.4.5.** *Los siguientes son equivalentes:*

1. *Si $A$ es un subconjunto de ${}^{\omega}\omega$, el juego $G(\omega, A)$ es determinado.*
2. *Si $A$ es un subconjunto de ${}^{\omega}2$, el juego $G(2, A)$ es determinado.*
3. *Si $A$ es un subconjuto de $[0,1]$, el juego $G(A)$ es determinado.*

**Demostración**

1)$\Rightarrow$ 2) Sea el juego $G(2, A)$ con $A \subseteq {}^{\omega}2$. Definimos el juego $G(\omega, B)$ donde

$$B = \{(x_n) \in {}^{\omega}\omega \;/\; (x_n) \in A \vee \exists n\, x_{2n+1} \notin 2 = \{0,1\}\} \subseteq {}^{\omega}\omega.$$[28]

Por 1) existe $\tau$ una estrategia para el juego $G(\omega, B)$.

Analicemos un poco el juego $G(\omega, B)$. Si el jugador uno busca ganar necesita que el resultado sea una secuencia de ceros y unos (pues quiere que esté en $A$). Si este jugador tirara un número diferente a cero o uno el jugador dos tendría una forma inmediata de ganar (a saber siempre tirar cero o uno), esto implica que si tomamos una estrategia ganadora del jugador uno y la restringimos a ${}^{\omega}2$,[29] entonces el resultado del juego estará en $A \subseteq {}^{\omega}2$.

El jugador dos tiene una situación análoga, pues este perderá en el momento que realice un tiro diferente a cero o uno (por la definición de $A$). Esto nos lleva a que toda estrategia ganadora del jugador dos restringida a ${}^{\omega}2$ nos regresa secuencias de ceros y unos que no pertenecen a $A$.[30]

[28] Recordemos que ${}^{\omega}2 \subseteq {}^{\omega}\omega$.

[29] Aquí estamos haciendo un abuso de notación, en realidad se debe restringir la $i$-ésima función de la estrategia a ${}^{2i}2$.

[30] Misma observación que en el párrafo anterior sólo que aquí las funciones deben restringirse a ${}^{2i+1}2$.

En ambos casos, restringir las estrategias ganadoras del juego $G(\omega, B)$ nos crea estrategias ganadoras del juego $G(2, A)$.

2)⇒ 1) Sea $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ y consideremos los siguientes tres conjuntos que forman una partición de ${}^{\omega}2$:

$$X = \{(x_n) \in {}^{\omega}2 \ / \ |\{x_{2n+1} = 0 \ / \ n \in \omega\}| < \aleph_0\},$$

$$Y = \{(x_n) \in {}^{\omega}2 \setminus X \ / \ |\{x_{2n} = 0 \ / \ n \in \omega\}| < \aleph_0\},$$

$$Z =^{\omega} 2 \setminus (X \cup Y).$$

Ahora bien, consideremos la función $h : Z \to {}^{\omega}\omega$ tal que

$$h((x_1, x_2, ...)) = (y_1, y_2, ...)$$

donde

$$y_0 = \text{mín}\{k \in \omega \ / \ x_{2k} = 0\};$$

$$y_1 = \text{mín}\{k \in \omega \ / \ x_{2y_0+2k+1} = 0\};$$

$$y_2 = \text{mín}\{k \in \omega \ / \ x_{2y_0+2y_1+2k} = 0\};$$

etc. Es decir, $y_0$ representa la cantidad de unos seguidos que eligió el primer jugador al inicio del juego; $y_1$ la cantidad de unos que eligió el segundo jugador después del primer cero del jugador uno; etc.

Notemos que esta función simula[31] a los juegos de tipo $G(\omega, C)$ en $Z$. Supongamos que en un juego $G(\omega, C)$ el jugador uno inicia con el número $k$ y luego sigue el dos eligiendo $l$. Lo que se verá en $Z$ utilizando nuestra función es que el jugador uno tirará $k$ unos antes de su primer cero (y mientras tanto no importa qué haga el dos), después de ello, ya que se tiene la información de la primera jugada de uno, el jugador dos tira $l$ unos consecutivos y luego un cero (lo que haga el jugador uno en ese lapso no importa). Y así sucesivamente. Con esto, es posible transformar las estrategias restringidas a $Z$ a estrategias de $G(\omega, C)$. Sin embargo, 2) implica que tenemos estrategias de $G(2, C)$, por lo que es necesario crear adecuadamente uno de estos juegos.

Definamos $B = (h^{-1}[A] \cup X) \setminus Y$. $G(2, B)$ es el juego que estamos buscando ya que el conjunto $B$ obliga a ambos jugadores a tirar una cantidad infinita de ceros[32], es decir, a que los resutados finales estén en $Z$. Esto pasa pues el jugador dos es obligado a tirar una infinidad de ceros ya que $X$ está contenido en $B$ (si tirara una cantidad finita de ceros perdería automáticamente) y el jugador uno es obligado pues $Y$ está en el complemento de $B$ (si el jugador uno tirara una cantidad finita de ceros, basta con que el jugador dos tire una infinidad de ceros para que pierda).

---

[31]Por simular nos referimos a que copia la información de los juegos de forma que las estrategias de uno puedan pasarse al otro.

[32]Nótese que el termino "obliga" se refiere a que "las estrategias ganadoras de cualquiera de los dos jugadores necesariamente cumplen que". El cambio se ha realizado para mantener la intuición.

De esta forma $B$ obliga a que la información importante del juego esté en $Z$. Con la interpretación de los juegos simulados en $Z$ se puede generar una estrategia ganadora de $G(\omega, A)$ a partir de una de $G(2, B)$.

2)$\Rightarrow$ 3) Sea el juego $G(A)$. Por definición $G(A)$ es el juego $G(2 = \{0,1\}, A')$ donde $(x_n) \in A'$ si y sólo si $\displaystyle\sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{2^{n+1}} \in A$. Sin embargo, por 2), estos juegos están determinados.

3)$\Rightarrow$ 2) Sean $A \subseteq {}^{\omega}2$ y $f : {}^{\omega}2 \to [0,1]$ tal que $f((x_n)) = \displaystyle\sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{2^{n+1}}$. Utilizando esta notación, si $C \subseteq [0,1]$, entonces $G(C)$ es el juego $G(2, f^{-1}[C])$. Aunque por hipótesis tenemos que el juego $G(f[A])$ está determinado, este representa el juego $G(2, f^{-1}[f[A]])$ y dado que $f$ no es inyectiva puede pasar que $f^{-1}[f[A]] \neq A$. Por ello necesitamos hacer una pequeña modificación.

Sea $M = \{(x_n) \in {}^{\omega}2 \ / \ x_{4m+2} = 0 \ \& \ x_{4m+3} = 1\}$. Notemos que $f$ restringida a $M$ es inyectiva. Consideremos la biyección $g : M \to {}^{\omega}2$ tal que $g((x_n)) = (y_n)$ con $y_{2m} = x_{4m}$ y $y_{2m+1} = x_{4m+1}$ y sea

$$B = (g^{-1}[A] \cup \{(x_n) \in {}^{\omega}2 \ / \ \exists n(x_{4n+3} = 0)\}) \setminus \{(x_n) \in {}^{\omega}2 \ / \ \exists n \forall m \geq n(x_m = x_n)\}.$$

El conjunto $B$ cumple que $f^{-1}[f[B]] = B$ pues es un conjunto que no tiene terminaciones constantes (en estos conjuntos $f$ es inyectiva), por lo que cualquier estrategia ganadora de $G(f[B])$ es una estrategia ganadora de $G(2, f^{-1}[f[B]] = B)$. Por otra parte, el conjunto $B$ obliga a ambos jugadores a mantener sus jugadas en el conjunto $M$ ya que si el jugador dos tira en un turno de la forma $4m+3$ algo que no sea 1 pierde inmediatamente, mientras que si el jugador uno tira en un turno de la forma $4m+2$ algo que no sea 0, el jugador dos tiene una forma de ganar (a saber, siempre tirar 1).

Con esto, sabemos que la información importante del juego está en $M$. Pero, $M$ tiene una simulación de los juegos $G(2, C)$ por medio de $g$. Esto pasa pues en $M$ la información importante se encuentra en los tiros de la forma $4m$ y $4m+1$ (ya que en los otros dos siempre se tira cero y uno). Así, las estrategias ganadoras de $G(2, B)$ pueden convertirse en estrategias ganadoras de $G(2, A)$, evitando la información repetitiva en los turnos $4m+2$ y $4m+3$. Esto termina nuestra prueba.

l.q.q.d.

Al momento de trabajar con ${}^{\omega}\omega$ podemos darle una topología. Podemos definir para cada $n \in \omega$ y cada $s \in {}^{n}\omega$

$$\langle s \rangle = \{f \in {}^{\omega}\omega \ / \ f|_n = s\}.$$

Si consideramos a ${}^{<\omega}\omega = \displaystyle\bigcup_{n\in\omega} {}^{n}\omega = \{s \ / \ \exists n \in \omega\, (s : n \to \omega)\}$, el conjunto $\{\langle s \rangle \ / \ s \in {}^{<\omega}\omega\}$ es base de una topología sobre ${}^{\omega}\omega$. Llamaremos ${}^{\omega}\omega$ al espacio topológico que tiene como conjunto ${}^{\omega}\omega$ y la topología generada por la base mencionada.

${}^{\omega}\omega$, conocido también como el espacio de Baire, es un espacio muy importante. Es un espacio polaco[33] tal que cualquier otro espacio polaco es una imagen continua de él. Además, es homeomorfo a los irracionales con la topología inducida de $\mathbb{R}$. Finalmente, si $A \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $A = f[{}^{\omega}\omega]$ para alguna función continua $f : {}^{\omega}\omega \to \mathbb{R}$ se dice que $A$ es un conjunto analítico y se demuestra que es medible[34]. Para los juegos infinitos obtenemos un resultado muy particular:

**Teorema 2.4.6.** *Sea $G(\omega, A)$ un juego y $R(\sigma, \cdot) : {}^{\omega}\omega \to {}^{\omega}\omega$ con $\sigma$ una estrategia del jugador uno, la función que a cada elemento de $x \in {}^{\omega}\omega$ asigna el resultado del juego donde el jugador dos juega $x$ y el uno juega de acuerdo a $\sigma$. Entonces, $R(\sigma, \cdot)$ es continua e inyectiva.*[35]

**Demostración**

Es claro que $R(\sigma, \cdot)$ es inyectiva para cualquier estrategia $\sigma$. Si

$$y = (y_0, y_1, ...) \neq (z_0, z_1, ...) = z,$$

existen $y_n \neq z_n$, por lo que

$$R(\sigma, y) = (y'_0, y_0, ..., y'_n, y_n, ...) \neq (z'_0, z_0, ..., z'_n, z_n, ...) = R(\sigma, z).$$

Para demostrar que es continua debemos mostrar que la preimagen de conjuntos abiertos es abierta. Para ello, basta mostrar que la preimagen de elementos de la base es abierta. Sea $s \in {}^{<\omega}\omega$, analizaremos por casos $R(\sigma, \cdot)^{-1}[\langle s \rangle]$.

Primer caso, $s = (s_0, s_1, ..., s_{2n})$. Si existe $s_{2k+1}$, $k < n$ tal que ese número no es el tiro determinado por sigma teniendo la información $(s_0, ..., s_{2k})$ entonces $R(\sigma, \cdot)^{-1}[\langle s \rangle] = \emptyset$. En otro caso (es decir, si para todo $s_{2k+1}$, $k < n$, ésta es la jugada indicada por $\sigma$ cuando se tiene $(s_0, ..., s_{2k})$) entonces

$$R(\sigma, \cdot)^{-1}[\langle s \rangle] = \langle (s_1, s_3, ..., s_{2n-1}) \rangle ,$$

pues la única manera de obtener que $R(\sigma, x)|_{2n} = s$ es que a $\sigma$ se le de la información $(s_1, s_3, ..., s_{2n-1})$.

Segundo caso, $s = (s_0, s_1, ..., s_{2n+1})$. De forma análoga al caso anterior, si existe $s_{2k+1}$, $k \leq n$, tal que ese número no es el tiro determinado por sigma teniendo la información $(s_0, ..., s_{2k})$ entonces $R(\sigma, \cdot)^{-1}[\langle s \rangle] = \emptyset$. En otra situación, tenemos que $R(\sigma, \cdot)^{-1}[\langle s \rangle] = \langle (s_1, s_3, ..., s_{2n+1}) \rangle$.

En todos los casos la preimagen es un conjunto abierto, lo que termina la demostración.

l.q.q.d.

Para terminar la sección mostraremos los problemas que trae el AE a la teoría de juegos.

---

[33] Esto quiere decir que es un espacio topológico no vacío con un subconjunto denso numerable (separable) y tal que existe una métrica compatible con la topología que lo hace un espacio métrico completo (completamente metrizable).

[34] Esta demostración se puede encontrar en [12, pp. 26-28] y en [9, pp. 150-151]

[35] El resultado también es válido si en vez de $\sigma$ utilizamos una estrategia $\tau$ del jugador dos. La demostración es análoga.

**Teorema 2.4.7.** *Utilizando el Axioma de Elección, existe un subconjunto A de* ${}^{\omega}2$ *tal que el juego* $G(2, A)$ *no está determinado.*

**Demostración**

Independientemente de $A$, toda estrategia en los juegos $G(2, A)$ es un elemento de $\prod_{n\in\omega} {}^{2n}2$ o de $\prod_{n\in\omega} {}^{2n+1}2$, ya sea que hablemos del jugador uno o del dos, respectivamente. En cualquier caso, tenemos que

$$2^{\aleph_0} = \prod_{n\in\omega} 2 \leq \prod_{n\in\omega} {}^{2n}2, \prod_{n\in\omega} {}^{2n+1}2 \leq \prod_{n\in\omega} \aleph_0 = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.^{36}$$

Por lo que existen tantas estrategias en estos juegos como números reales.

Utilizando el Axioma de Elección, existe $\alpha$ ordinal tal que $\alpha = 2^{\aleph_0}$. Enumeremos los conjuntos de estrategias de cada jugador con $\alpha$. Los siguientes conjuntos ajenos los definiremos de forma recursiva para todo ordinal menor que $\alpha$:

Sean $A_0 = B_0 = \emptyset$

Si $\gamma < \alpha$ y $\gamma \in LIM$, sean $A_\gamma = \bigcup_{\xi<\gamma} A_\xi$, $B_\gamma = \bigcup_{\xi<\gamma} B_\xi$.

Si $\beta < \alpha$ tomamos la estrategia $\sigma_\beta$ del jugador uno y la estrategia $\tau_\beta$ del jugador dos. Como notación, si seleccionamos el elemento $x = (x_0, x_1, x_2, ...)$ de ${}^{\omega}2$, el resultado del juego donde el primer jugador siguió la estrategia $\sigma_\beta$ y el segundo jugó como indica $x$ le llamaremos $R(\sigma_\beta, x)$. La notación para las estrategias del jugador dos son análogas. Por el teorema 2.4.6 $R(\sigma, \cdot)$ es inyectiva, esto implica que $|R(\sigma, \cdot)[{}^{\omega}2]| = |{}^{\omega}2| = 2^{\aleph_0}$. Por otra parte, $|A_\beta| \leq |\beta| < \alpha$, así que existe $x_{\sigma_\beta}$ tal que $R(\sigma_\beta, x_{\sigma_\beta}) \notin A_\beta$, definimos $B_{\beta+1} = B_\beta \cup \{R(\sigma_\beta, x_{\sigma_\beta})\}$. Este conjunto cumple que un juego $G(2, A)$ con $A \cap B_{\alpha+1} = \emptyset$ no tiene como estrategia ganadora a $\sigma_\beta$. De manera análoga, existe $x_{\tau_\beta}$, tal que $R(\tau_\beta, x_{\tau_\beta}) \notin B_{\beta+1}$, definimos $A_{\beta+1} = A_\beta \cup \{R(\tau_\beta, x_{\tau_\beta})\}$. Al igual que $B_{\beta+1}$, $A_{\beta+1}$ cumple que un juego $G(2, A)$ tal que $A_{\beta+1} \subseteq A$ no tiene como estrategia ganadora a $\tau_\beta$.

Sea $C = \bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi$, por construcción para todo $\beta < \alpha$ tenemos que $A_{\beta+1} \subseteq C$ y que $C \cap B_{\beta+1} = \emptyset$, por lo que el juego $G(2, C)$ no tiene como estrategia ganadora a ninguna estrategia posible de los jugadores.

l.q.q.d.

El teorema anterior, junto con el teorema 2.4.3, nos muestra que si vale el AE no todos los juegos son determinados, y si no vale el AE, entonces no todos los juegos son determinados, haciendo de la teoría de juegos infinita rica en cualquier axiomatización.

[36] Para las propiedades de $\prod$ véase B.6.3.

## 2.5. Axioma de Determinación

Hasta este punto muchos de nuestros teoremas se basan en el uso del AE o alguno de sus debilitamientos. Sin embargo, a lo largo del trabajo hemos mencionado, aunque de forma muy discreta, que puede trabajarse en mundos sin AE. En esta sección, como punto de entrada, recordemos que las equivalencias del teorema 2.4.5 son falsas si el AE es verdadero.

**El Axioma de Determinación (AD)** dice que es válida cualquiera de las afirmaciones del teorema 2.4.5.

El AD surgió en 1962 y fue propuesto por Mycieslki y Steinhaus. Desde su creación ha llamado la atención de varios matemáticos y suele describirse como el "enemigo natural" del AE. Esta aseveración viene como resultado de los teoremas 2.4.5 y 2.4.7, al fin y al cabo ellos dicen que:

$$\mathbf{AD} \Rightarrow \neg\mathbf{AE}$$

o puesto como contrapositiva,

$$\mathbf{AE} \Rightarrow \neg\mathbf{AD}.$$

Es importante notar que el regreso no es necesariamente válido (es decir que si no sucede AD, entonces sucede el AE), analizando detenidamente los teoremas finales de la sección pasada, el hecho de que el AE implique no AD viene de poder bien ordenar a los reales. En un modelo donde se pueda bien ordenar a los reales pero exista un conjunto no bien ordenable no valdrán ni el AE, ni el AD.

Esto nos hace pensar que ambos axiomas no son tan contrarios como aparentan, de hecho, el Axioma de Determinación admite un poco de elección:

**Teorema 2.5.1.** *El AD implica el $AEN(\mathbb{R})$ (Axioma de Elección Numerable en $\mathbb{R}$), es decir, que toda familia $\{X_i\}_{i\in\omega}$ de conjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tiene una función de elección. Equivalentemente, $\prod_{i\in\omega} X_i \neq \emptyset$.*

**Demostración**

Como ${}^{\omega}\omega$ es biyectable con $\mathbb{R}$[37] podemos suponer que cada $X_i \subseteq {}^{\omega}\omega$. Juguemos $G(\omega, A)$ con $A = \{(x_n) \in {}^{\omega}\omega \ / \ (x_{2n+1}) \notin X_{x_0}\}$ donde $(x_{2n+1})$ denota la subsucesión de los elementos impares de $(x_n)$. Claramente, el jugador uno no tiene estrategia ganadora: como cada $X_m$ es distinto del vacío, una vez que el jugador uno eligió $x_0$ el jugador dos puede tomar un elemento de $X_{x_0}$.

[37] Sin usar elección, sabemos que ${}^{\omega}2$ es biyectable con $\mathbb{R}$. Por otra parte, y de forma natural, ${}^{\omega}2$ entra inyectivamente en ${}^{\omega}\omega$ quien entra inyectivamente en el intervalo $[0, 1]$ utilizando, cuidadosamente, expansiones decimales.

Por el AD, existe una estrategia ganadora para el juego, por lo que ésta es una estrategia ganadora $\tau$ para el jugador dos. $\tau$ nos ayudará a generar una función de elección.

Sea $f : \omega \to \bigcup_{i\in\omega} X_i$ tal que $f(m)$ sea la secuencia que obtiene el segundo jugador al utilizar $\tau$ cuando el jugador uno eligió $x_0 = m$ y $x_n = 0$ para todo $n \geq 1$, es decir, si $R(\tau, (m, 0, 0, 0, .., 0, ...)) = (y_n^m) \notin A$ entonces $f(m) = (y_{2n+1}^m)$. Por como construimos $A$, tenemos que $f(m) \in A_m$ para toda $m \in \omega$, por lo que $f \in \prod_{i\in\omega} X_i$.

l.q.q.d.

Así podemos entender que aunque el AD niega el AE, no lo niega por completo. Esto nos da posibilidades diversas en las demostraciones y mantiene algunas propiedades comunes, como veremos en el siguiente capítulo. Sin embargo, para nosotros, el teorema más importante relacionado con el AD es el que muestra que el dominio de la medida de Lebesgue es toda la potencia de los reales. Para este teorema necesitaremos algunos lemas:

En lo que sigue $\lambda$ será la medida de Lebesgue y $\mathcal{B}$ será el conjunto de todos los intervalos abiertos de reales con extremos racionales, es decir, $B \in \mathcal{B}$ si y sólo si existen $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que $p \leq q$ y $B = (p, q) \subseteq \mathbb{R}$.

**Lema 2.5.2.** *Sea $\mathcal{S} : \wp_{\aleph_1}(\{(a, b) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}) \to [0, \infty]$ una función definida sobre la potencia contable*[38] *del conjunto de los intervalos con el vacío tal que $\mathcal{S}(\mathcal{C}) = \sum_{A\in\mathcal{C}} \lambda(A)$ y dado $A \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_A = \left\{\mathcal{C} \in \wp_{\aleph_1}(\mathcal{B}) \ / \ A \subseteq \bigcup \mathcal{C}\right\}$. Mostraremos que $\lambda^*(A) = \inf \mathcal{S}[\mathcal{B}_A]$.*[39]

**Demostración**

Claramente $\lambda^*(A) \leq \inf \mathcal{S}[\mathcal{B}_A]$. Además, si $\lambda^*(A) = \infty$ ya terminamos.

Para la otra desigualdad en el caso $\lambda^*(A) < \infty$ mostraremos que para cada $\epsilon > 0$ existe $\mathcal{C} \in \mathcal{B}_A$ tal que

$$\lambda^*(A) \leq \mathcal{S}(\mathcal{C}) < \lambda^*(A) + \epsilon.$$

Sea $\epsilon > 0$, por la definición de $\lambda^*$ sabemos que existe $\{(a_i, b_i)\}_{i\in\omega}$ con $a_i \leq b_i$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i\in\omega}(a_i, b_i)$ y $\sum_{i\in\omega}(b_i - a_i) < \lambda^*(A) + \dfrac{\epsilon}{2}$.

[38] Definimos la potencia contable de un conjunto como

$$\wp_{\aleph_1}(X) = \{B \subseteq X \ / \ |B| < \aleph_1\} = \{B \subseteq X \ / \ |B| \leq \aleph_0\}.$$

[39] Recordemos que para todo $A \subseteq \mathbb{R}$, si tomamos

$$\mathcal{D}_A = \left\{\mathcal{C} \in \wp_{\aleph_1}(\{(a, b) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}) \ / \ A \subseteq \bigcup \mathcal{C}\right\},$$

entonces tenemos que, por definición, $\lambda^*(A) = \inf \mathcal{S}[\mathcal{D}_A]$.

Por propiedades de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, sabemos que para cada $i \in \omega$ existen $r_i, s_i \in \mathbb{Q}$ tales que $0 < a_i - r_i, s_i - b_i < \left(\frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{1}{2^{i+1}}\right)$.[40]

De esta forma, para toda $i \in \omega$ tenemos que $(a_i, b_i) \subseteq (r_i, s_i) \neq \emptyset$, y

$$\lambda((r_i, s_i)) = s_i - r_i = s_i - b_i + b_i - a_i + a_i - r_i < b_i - a_i + 2\frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{1}{2^{i+1}} = b_i - a_i + \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Así, $\{(r_i, s_i) \ / \ i \in \omega\} \in \mathcal{B}_A$ y

$$\mathcal{S}(\{(r_i, s_i) \ / \ i \in \omega\}) = \sum_{i \in \omega} (s_i - r_i) \leq \sum_{i \in \omega} (b_i - a_i + \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^{i+1}}) =$$

$$= \sum_{i \in \omega} b_i - a_i + \sum_{i \in \omega} \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^{i+1}} = \sum_{i \in \omega} b_i - a_i + \frac{\epsilon}{2} < \lambda^*(A) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \lambda^*(A) + \epsilon.$$

l.q.q.d.

**Lema 2.5.3.** *Para todo conjunto nulo de reales $N$ y toda sucesión $(\delta_n)$ de números reales positivos existe una sucesión $(G_n)$ de abiertos tales que cada abierto se puede expresar como la unión finita de elementos de $\mathcal{B}$, $N \subseteq \bigcup_{i \in \omega} G_i$ y, para todo natural $n$, se cumple que $\lambda(G_n) < \delta_n$.*

**Prueba**

Sea $N$ un conjunto nulo de reales y $(\delta_n)$ una sucesión de reales positivos. Por el lema anterior, sabemos que existe $\mathcal{C} \in \mathcal{B}_N$ tal que $\mathcal{S}(\mathcal{C}) < \lambda(N) + \delta_0 = \delta_0$. Si $|\mathcal{C}| < \aleph_0$ ya terminamos, la sucesión $G_0 = \bigcup \mathcal{C}$ y $G_n = \emptyset$ para todo $n > 0$ cumplen con lo buscado.

Si $|\mathcal{C}| = \aleph_0$, enumerémoslo de forma que $\mathcal{C} = \{B_i \ / \ i \in \omega\}$. Es importante recordar que por definición cada $B_i \in \mathcal{B}$.

Sabemos que $\mathcal{S}(\mathcal{C}) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(B_i) < \delta_0 < \infty$, esto implica que $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=n}^{\infty} \lambda(B_i) = 0$. Sea $n_0$ el mínimo natural $n$ tal que $\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda(B_i) < \delta_1$. Con esto obtenemos que $G_0 = \bigcup_{i=0}^{n_0} B_i$ cumple $\lambda(G_0) \leq \sum_{i=0}^{n_0} \lambda(B_i) \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \lambda(B_i) < \delta_0$.

Sea $n_1$ el mínimo natural $m$ tal que $m > n_0$ y $\sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda(B_i) < \delta_2$. Así, $G_1 = \bigcup_{i=n_0+1}^{n_1} B_i$ tiene la propiedad $\lambda(G_1) \leq \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda(B_i) \leq \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \lambda(B_i) < \delta_1$.

[40] Aquí se usó el $AEN(\mathbb{R})$ pero se puede evitar por la numerabilidad de $\mathbb{Q}$. Para saber más sobre cómo evitar elección véase el capítulo 3.

Con esta misma técnica, definimos para todo $j > 1$ a $n_j$ como el mínimo natural $k$ tal que $k > n_{j-1}$ y $\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda(B_i) < \delta_{j+1}$. Además, definimos el abierto $G_j = \bigcup_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} B_i$ tal que, por contrucción, tiene la propiedad

$$\lambda(G_j) \leq \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \lambda(B_i) \leq \sum_{i=n_j+1}^{\infty} \lambda(B_i) < \delta_j.$$

Así, la sucesión $(G_n)$ cumple que cada elemento es un abierto que se puede expresar como unión finita de elementos de $\mathcal{B}$ y, además, para toda $n$ natural $\lambda(G_n) < \delta_n$. Por otra parte

$$\bigcup_{n\in\omega} G_n = G_0 \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} G_i = \bigcup_{i=0}^{n_0} B_i \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} \left( \bigcup_{\ell=n_{j-1}+1}^{n_j} B_\ell \right) = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = \bigcup \mathcal{C},$$

por lo que $N \subseteq \bigcup_{n\in\omega} G_n$.

l.q.q.d.

**Lema 2.5.4.** *AD implica que cualquier conjunto de reales en el cual todo subconjunto medible es de medida cero, entonces este es medible y nulo. En lenguaje formal:*

$$AD \to (\forall Z \subseteq \mathbb{R}(\forall B \subseteq Z(B \ \textit{medible}) \to \lambda(B) = 0) \to (Z \ \textit{medible} \,\&\, \lambda(Z) = 0))\,.$$

**Demostración**

Como $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1]$ tenemos que $B \subseteq \mathbb{R}$ es de medida cero si y sólo si para toda $n \in \mathbb{Z}$, $B \cap [n, n+1]$ es de medida cero. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{Z}$ sabemos que $B \subseteq [n, n+1]$ es de medida cero si y sólo si $B - n \subseteq [0, 1]$ es de medida cero. Utilizando estas dos reducciones, podemos suponer que $Z \subseteq [0, 1]$.

Sea $Z \subseteq [0, 1]$ tal que para todo $B \subseteq Z$ medible se tiene que $B$ es de medida cero. Mostraremos, utilizando AD, que $Z$ es un conjunto nulo.

Sea $\epsilon > 0$, y para cada $n$ denotemos por $\mathcal{G}^n$ al conjunto de todos los abiertos que se pueden expresar como unión finita de elementos de $\mathcal{B}$ y cuya medida es menor que $\epsilon/2^{2(n+1)+1}$. En otras palabras,

$$\mathcal{G}^n = \left\{ G \in \wp(\mathbb{R}) \ / \ \exists m \in \omega \exists B_0, ..., B_{m-1} \in \mathcal{B}(G = \bigcup_{i\in m} B_i \,\&\, \lambda(G) < \frac{\epsilon}{2^{2(n+1)+1}} \right\}.$$

Notemos que para cada $n$, $\mathcal{G}^n$ es numerable[41]. Para cada $n$, sea $\{G^n_m\}$ una enumeración de $\mathcal{G}^n$.[42]

Definamos el juego $G(\omega, A)$ considerando:

$$a_{(x_n)} = \sum_{n\in\omega} \frac{x_{2n}}{2^{n+1}}$$

y

$$A = \left\{ (x_n) \in {}^{\omega}\omega \;/\; (x_{2n}) \in {}^{\omega}2 \,\&\, a_{(x_n)} \in Z \,\&\, a_{(x_n)} \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} G^n_{x_{2n+1}} \right\}.$$

En otras palabras, el juego consiste en que el jugador uno va eligiendo la expansión binaria de un número en $Z$ mientras el jugador dos intenta cubrirlo con abiertos. Al final del juego el primer jugador gana si el segundo no logra cubrir el número en $Z$ que fue construyendo.

Mostraremos que el primer jugador no tiene estrategia ganadora. Supongamos que sí la tiene, y sea $\sigma$ una estrategia ganadora, definamos la función

$$g = f \circ proy_{par} \circ R(\sigma, \cdot)$$

donde $f((x_0, x_1, ...)) = \sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ y $proy_{par}((x_n)) = (x_{2n})$. Lo que hace esta función es que a cada secuencia de jugadas del jugador dos, le asocia el número en $[0, 1]$ que va construyendo el jugador uno utilizando la estrategia $\sigma$. Por el teorema 2.4.6 y por la topología definida en ${}^{\omega}\omega$, tenemos que $g$ es continua y, por tanto, $g[{}^{\omega}\omega] = C$ es medible. Como $\sigma$ es estrategia ganadora, tenemos que $C \subseteq Z$, y al ser $C$ medible tenemos, por hipótesis, que es de medida cero.

El hecho de que $\lambda(C) = 0$, junto con el lema anterior, implica que podemos encontrar abiertos $U_k$ que se puedan expresar como unión finita de elementos de $\mathcal{B}$ tales que $C \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ y $\lambda(U_k) < \epsilon/2^{2(k+1)+1}$ para toda $k$. Entre otras cosas, tenemos que $U_k \in \mathcal{G}^k$ para todo $k$. Sea $G^k_{m_k}$ la enumeración de $U_k$ en $\mathcal{G}^k$. Si el jugador dos juega los elementos $(m_0, m_1, m_2, ...., m_k, ...)$ entonces $R(\sigma, (m_0, m_1, m_2, ...., m_k, ...)) \notin A$ ya que todos los posibles números que eligue el jugador uno utilizando la estrategia $\sigma$ están en el conjunto $C \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} G^i_{m_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_k$. Esto es una contradicción ya que si $\sigma$ fuera una estrategia ganadora, entonces $R(\sigma, \cdot)[{}^{\omega}\omega] \subseteq A$.

[41] Todos los abiertos que se pueden expresar como uniones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ son a lo más tantos como $\bigcup_{n\in\omega} {}^{n}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$. Este conjunto, inclusive sin utilizar el AE, es numerable. Para una prueba de esto léase 3.4.2 implicación 5) $\Rightarrow$ 6).

[42] Podemos elegir enumeraciones para cada $\mathcal{G}^n$ sin utilizar el AE, ya que podemos mostrar que el conjunto de todos los abiertos que se pueden expresar como unión finita de elementos de $\mathcal{B}$ es numerable, lo enumeramos y utilizamos la enumeración del orden en los conjuntos $\mathcal{G}^n$ (por enumeración del orden nos referimos a que si tenemos el conjunto $\{27, 35, 28, 3\}$ asociamos al 3 con el 1, al 27 con el 2, al 28 con el 3 y al 35 con el 4).

Así, por AD, existe una estrategia ganadora para el jugador dos, digamos, $\tau$.

Para cada $s \in {}^{<\omega}2 = \{f : n \to 2 \ / \ n \in \omega\}$ tal que $dom(s) = n$ definimos $(x_0^s, x_1^s, x_2^s, ..., x_{2(n-1)+1}^s)$ siendo $x_{2k}^s = s(k)$ y $x_{2k+1}^s$ las respuestas generadas por la estrategia $\tau$ (en otras palabras, hasta ese momento se ha jugado $(s(0), \tau_0(s(0)), s(1), \tau_1((s(0), \tau_0(s(0)), s(1))), ..., s(n-1), x_{2(n-1)+1}^s)$ donde $x_{2(n-1)+1}^s = \tau_n((s(0), \tau_0(s(0)), s(1), \tau_1((s(0), \tau_0(s(0)), s(1))), ..., s(n-1)))$. Con esto definimos $G_s = G^{n-1}_{x^s_{2(n-1)+1}}$.

De esta forma, para cada $a \in Z$ tenemos que

$$a \in \bigcup \left\{ G_s \ / \ \exists (x_n) \in {}^{\omega}\omega (a = a_{(x_n)} = \sum_{n \in \omega} \frac{x_{2n}}{2^{n+1}} \,\&s \subseteq (x_n)) \right\}.[43]$$

Esto nos lleva a que:

$$Z \subseteq \bigcup \{ G_s \ / \ s \in^{<\omega} 2 \} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s.$$

Notemos que, por construcción,

$$\lambda(\bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s) \leq \sum_{s \in \{0,1\}^n} \lambda(G_s) = \sum_{s \in \{0,1\}^n} \lambda(G^{n-1}_{x^s_{2(n-1)+1}}) <$$

$$< \sum_{s \in \{0,1\}^n} \epsilon / 2^{2(n-1+1)+1} = \sum_{s \in \{0,1\}^n} \epsilon / 2^{2n+1} = 2^n \cdot \epsilon / 2^{2n+1} = \epsilon / 2^{n+1}.$$

Por lo que

$$\lambda^*(Z) \leq \lambda^*(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s) = \lambda(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s) \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(\bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon / 2^{n+1} = \epsilon.$$

l.q.q.d.

**Teorema 2.5.5.** *Bajo AD toda subconjunto de $\mathbb{R}$ está en el dominio de la medida de Lebesgue ($\lambda$).*

**Prueba**

Como $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1]$ tenemos que $A \subseteq \mathbb{R}$ es medible si y sólo si para toda $n \in \mathbb{Z}$ $A \cap [n, n+1]$ es medible. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{Z}$ sabemos que $A \subseteq [n, n+1]$ es medible si y sólo si $A - n \subseteq [0, 1]$ es medible. Utilizando estas

[43] Aquí es importante recordar una vez más que las funciones son conjuntos y que las sucesiones son funciones.

dos reducciones, basta demostrar que toda la potencia del conjunto $[0,1]$ está en el dominio de la medida de Lebesgue.

Tomemos $B \in \wp([0,1])$. Tomemos los conjuntos

$$B_n = \left\{U \ / \ U \text{ es abierto} \,\&\, B \subseteq U \,\&\, \lambda(U) < \lambda^*(B) + \frac{1}{n}\right\}.$$

Utilizando el $AEN(\mathbb{R})$, podemos encontrar abiertos $U_n$ tales que $U_n \in B_n$ para toda $n \in \omega$.[44] De esta forma, el conjunto $G = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ es tal que $B \subseteq G$ y $\lambda(G) = \lambda^*(B)$, pues para toda $n \in \omega$

$$\lambda^*(B) \leq \lambda^*(G) = \lambda(G) \leq \lambda(U_n) < \lambda^*(B) + \frac{1}{n}.^{45}$$

Mostraremos que el conjunto $G \setminus B$ cumple que todo subconjunto medible de él es nulo. Supongamos lo contrario, entonces existe $Z$, un conjunto medible de $G \setminus B$, tal que $\lambda(Z) > 0$. Tomando en cuenta que $B \subseteq G \setminus Z$ (pues $Z \subseteq G \setminus B$) tenemos

$$1 = \lambda^*([0,1]) \geq \lambda^*(B) = \lambda(G) > \lambda(G) - \lambda(Z) = \lambda(G \setminus Z) =$$
$$\lambda^*(G \setminus Z) \geq \lambda^*(B) = \lambda(G).$$

Esto es una contradicción, ya que es imposible que $\lambda^*(B) > \lambda^*(B)$.

Como el conjunto $G \setminus B$ cumple las hipótesis del lema anterior, tenemos que AD implica que $G \setminus B$ es nulo, por lo que $B$ es un conjunto medible (pues es resta conjuntista de dos medibles). Con esto, terminamos la demostración.

l.q.q.d.

Basándonos en los resultados del capítulo anterior, sabemos que este teorema cambia radicalmente el universo matemático, principalmente a $\mathbb{R}$. Por ejemplo, el teorema anterior implica que $\mathbb{R}$ no es bien ordenable; implica que no existen soluciones no continuas para la ecuación de Cauchy; de hecho, también implica que $\mathbb{R}$ no tiene una base como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Además, podemos obtener los siguientes corolarios y teoremas:

**Corolario 2.5.6.** *AD implica que todo conjunto o su complemento contienen un conjunto perfecto, es decir, no hay conjuntos de Bernstein.*

### Prueba

El teorema 1.3.5 indica que todo conjunto de Bernstein es no medible, como el AD implica que no hay conjuntos no medibles el resultado se sigue.

l.q.q.d.

[44] En esto podemos utilizar el Axioma de Elección Numerable en $\mathbb{R}$, pues existen tantos abiertos como números reales.

[45] Cada uno de estos conjuntos es no vacío pues $\lambda^*$ es un ínfimo.

**Corolario 2.5.7.** *AD implica que* $\mathbb{R}$ *no es biyectable con* $\omega_1$*.*

**Prueba**

Si fueran biyectables podríamos tomar $R \subseteq [0,1]^2$ una relación tal que $\langle [0,1], R\rangle \cong \langle \omega_1, \in \rangle$. Sin embargo, este conjunto resulta ser un conjunto no medible por el teorema 1.5.1.

l.q.q.d.

**Corolario 2.5.8.** *AD implica que no existen funciones cuya gráfica sea masiva en* $\mathbb{R}^2$*.*

**Prueba**

En la primera parte de la sección 1.6 se mostró que toda función cuya gráfica sea masiva en $\mathbb{R}^2$ es una función no medible, esto implicaría la existencia de un conjunto no medible.

l.q.q.d.

**Corolario 2.5.9.** *El AD implica que el grupo aditivo de* $\mathbb{R}$ *no se puede dividir en sumandos directos no triviales.*

**Prueba**

Supongamos que existen $\{0\} \subsetneq A, B \subsetneq \mathbb{R}$ subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$ tales que $\mathbb{R} = A \oplus B$, esto quiere decir que para todo $x \in \mathbb{R}$ existen $a \in A, b \in B$ únicos tales que $x = a + b$. Con esto podemos construir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(a + b) = a$. Esta función satisface la ecuación $f(x + y) = f(x) + f(y)$, pues si $x = a_1 + b_1$ y $y = a_2 + b_2$, obtenemos

$$f(x+y) = f(a_1+b_1+a_2+b_2) = f((a_1+a_2)+(b_1+b_2)) = a_1+a_2 = f(x)+f(y).$$

Sin embargo, no es constante ni es continua (ya que como $A, B \neq \{0\}$, para todo $a \neq 0 \neq b$ tenemos que $f(a) = a$ y $f(b) = 0$). Si suponemos el AD, esto es una contradicción, pues esta función es no medible.

l.q.q.d.

En el capítulo pasado definimos el invariante cardinal del ideal de los conjuntos nulos $N = N(\lambda)$:

$$non(N) = \text{mín}\left\{\kappa \ / \ X \subseteq \mathbb{R}, X \notin N, |X| = \kappa\right\}.$$

Si utilizamos el AD, tenemos que los únicos subconjuntos bien ordenables de $\mathbb{R}$ son los numerables (véase teorema 2.5.10), por lo tanto, toda función de $\kappa$ un cardinal en $\mathbb{R}$ tiene imagen con medida de Lebesgue 0, pues esta imagen es numerable. De esta forma, $non(N)$ no está bien definido, pues no existe un cardinal tal que $|X| = \kappa$ y $X \notin N$.

Otra de las implicaciones del AD es la no existencia de matrices de Ulam. Al inicio del capítulo demostramos el Teorema de Ulam (teorema 2.2.2) y mencionamos que necesitábamos el AE para demostrarlo. Como la medida de

Lebesgue tiene dominio completo bajo el AD, si el Teorema de Ulam fuera válido sin AE tendríamos que existe un cardinal inaccesible debajo de $\mathbb{R}$. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado:

**Hipótesis del Continuo** Todo $A \subseteq \mathbb{R}$ no numerable es biyectable con los reales. Esta hipótesis es independiente del Axioma de Elección y es implicada por la Hipótesis del Aleph (H.A.).

**Teorema 2.5.10.** *El AD implica la Hipótesis del Continuo.*[46]

El AD cambia tanto la relación entre medida y cardinalidad, que éste define una medida difusa no trivial sobre $\aleph_1$ haciéndolo un cardinal medible sin que sea inaccesible[47].

El Axioma de Determinación debe ser utilizado con cuidado.

---

[46] Este teorema se demuestra con un juego definido en el espacio polaco de Cantor ${}^{\omega}2 = {}^{\omega}\{0,1\}$ mostrando que todo conjunto no numerable contiene un conjunto perfecto. Por los objetivos de esta tesis no se demuestra aquí. Su demostración se puede encontrar en [9]

[47] Por los objetivos de esta tesis no se demuestra aquí. El teorema se puede encontrar en [9].

# Capítulo 3

# Análisis sin tanta Elección

La relación entre el Análisis Matemático y el Axioma de Elección es muy clara. Se suele decir mucho que sin AE no podría haber Cálculo Diferencial e Integral. Sin embargo, no es difícil probar que la mayoría del Cálculo (y probablemente del Análisis) sólo depende de que la potencia de los reales sea bien ordenable, aunque este hecho no es equivalente al AE[1]. De igual forma, todos los teoremas realizados en el capítulo 1 se pueden hacer sólo asumiendo el $AE(\mathbb{R})$[2]. Sin embargo, en el capítulo 2, intuimos que toda la teoría de la medida se puede realizar bajo el Axioma de Determinación, y por tanto, bajo el Axioma de Elección Numerable en $\mathbb{R}$ ($AEN(\mathbb{R})$).

Comparando la información que tenemos, una duda surge: ¿Qué tanto Axioma de Elección necesitamos para realizar los principales teoremas de Análisis Matemático? Este capítulo intentará resolver esta duda.

## 3.1. Elección y algunos debilitamientos

La historia del AE se remonta a 1904 cuando Ernst Zermelo publica una demostración de la forma de bien ordenar cualquier conjunto donde supone una equivalencia al AE. A partir de las críticas realizadas a su publicación, Zermelo comienza a buscar los axiomas esenciales de la matemática (búsqueda que dio origen a los axiomas de ZFC) y se comienza a discutir ampliamente si el llamado AE es verdadero o no. Aunque el tiempo mostró que esa discusión no tenía respuesta concreta, el AE tomó gran fama y en muchas ramas de las matemáticas se encontraron equivalencias o debilitamientos[3].

[1] Puede haber un modelo donde $\wp(\mathbb{R})$ es bien ordenable pero $\wp(\wp(\mathbb{R}))$ no.

[2] Esta notación indica que los reales son bien ordenables, pero que no necesariamente es válido el AE en todo el universo.

[3] Se dice que un enunciado $p$ es debilitamiento del enunciado $q$ si y sólo si $q$ implica $p$, pero no se puede demostrar que $p$ implique $q$. Por lo general, se habla de debilitamientos de axiomas pues, desde un punto de vista lógico, bajo una misma axiomatización todos los teoremas son

Aunque en esta sección no daremos todas las equivalencias, ni todos los debilitamientos, mostraremos algunos dependiendo de su fama y de su uso en el trabajo.

Comencemos recordando los enunciados de estos axiomas:

**El Axioma de Elección (AE)** dice que para todo conjunto $a$ existe una función de elección, es decir, $f : a \setminus \{\emptyset\} \to \bigcup a$ tal que para todo $x \in a \setminus \{\emptyset\}$, $f(x) \in x$[4].

**El Axioma de Elección Numerable (AEN)** dice que para todo conjunto $a$ numerable existe una función de elección.

**El Axioma de Elecciones Dependientes (AED)** dice que para todo conjunto $a$ que tenga una relación $r \subseteq a \times a$ que cumple que para todo $x \in a$ existe $y \in a$ tal que $x\,r\,y$, entonces existe $f : \omega \to a$ tal que $f(n)\,r\,f(n+1)$.

**Teorema 3.1.1.** *Los siguientes son equivalentes:*

1. *AE*
2. *Para todo conjunto $\{X_i\}_{i\in I}$ tal que $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, tenemos que $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.*
3. *Toda partición tiene un conjunto de representantes.*
4. *Para todo conjunto $a$ existe una función de elección en $\wp(a)$.*

**Demostración**

1)⇒ 2) Recordemos que $\prod_{i\in I} X_i = \left\{ f \;/\; f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i, f(i) \in I \,\forall i \in I \right\}$. De esta forma si tomamos al conjunto $\{X_i\}_{i\in I}$ por el AE tenemos que existe

$$g : \{X_i\}_{i\in I} \setminus \{\emptyset\} = \{X_i\}_{i\in I} \to \bigcup \{X_i\}_{i\in I} = \bigcup_{i\in I} X_i$$

tal que $g(X_i) \in X_i$ para todo $i \in I$. Sea $h : I \to \{X_i\}_{i\in I}$ tal que $h(i) = X_i$, tenemos que $h \circ g \in \prod_{i\in I} X_i$.

equivalentes entre sí.

[4]Recuérdese que desde un punto de vista conjuntista, los elementos de un conjunto son también conjuntos.

2)⇒ 3) Sea $\{P_i \ / \ i \in I\}$ una partición de $a$. Como cada $P_i \neq \emptyset$ tenemos, por 2), que $\prod_{i\in I} P_i \neq \emptyset$. Por lo que existe $f : I \to \bigcup_{i\in I} P_i$ tal que $f(i) \in P_i$. Notemos que el conjunto $F[I]$ es un conjunto de representantes para la partición.

3) ⇒ 4) Sea $a$ un conjunto. Tomemos en cuenta el conjunto

$$B = \{\{x\} \times x \ / \ x \in \wp(a) \setminus \{\emptyset\}\}.$$

Éste es una partición del conjunto $\bigcup B$. Por 3), existe un conjunto de representantes $f$, por lo que para cada $b \in B$ tenemos que $|b \cap f| = 1$. De esta forma, para cada $x \in \wp(a)$ tenemos que $(\{x\} \times x) \cap f = \{(x, f(x))\}$ con $f(x) \in x$. $f$ es la función de elección buscada.

4) ⇒ 1) Notemos que para todo conjunto $a$, $a \subseteq \wp(\bigcup a)$. Por lo que si existe una función de elección para $\wp(\bigcup a)$, su restricción a $a \setminus \{\emptyset\}$ es una función de elección de $a$.

l.q.q.d.

La siguiente es una de las equivalencias más famosas del AE. Otras muy importantes son el Lema de Zorn, el Teorema de Tychonoff (el producto de compactos es compacto), que todo espacio vectorial tenga base, que a todo conjunto se le pueda dar estructura de grupo abeliano, etc. Sin embargo, éstas no son utilizadas en este trabajo y sus pruebas, aunque ingeniosas, no son cortas.

**Teorema 3.1.2.** *AE es equivalente a que todo conjunto es bien ordenable*[5].

**Prueba**

⇒ Supongamos válido el AE, y sean $a$ y $b$ conjuntos tales que $b \notin a$. Utilizando el AE, sea $g$ una función de elección de $\wp(a)$. Definamos la funcional $F : OR \to a \cup \{b\}$ tal que $F(\alpha) = g(a \setminus F[\alpha])$ si $a \setminus F[\alpha] \neq \emptyset$ y $F(\alpha) = b$ en otro caso.

Es importante remarcar que si $F(\beta) \neq b \neq F(\gamma)$ y $\gamma \neq \beta$ entonces $F(\gamma) \neq F(\beta)$, ya que, sin pérdida de generalidad, suponiendo que $\gamma < \beta$, tenemos que $F(\gamma) \in F[\beta]$, y como $F(\beta) = g(a \setminus F[\beta]) \in a \setminus F[\beta]$, tenemos que $F(\beta) \neq F(\gamma)$.

En cambio, si existe $\beta$ tal que $F(\beta) = b$ entonces $F(\gamma) = b$ para todo $\gamma \geq \beta$ pues, en este caso, $\beta \subseteq \gamma$, por lo que $a \setminus F[\gamma] \subseteq a \setminus F[\beta] = \emptyset$. Claramente, debe existir un ordinal cuya imagen sea $b$, si no existiera, tendríamos una funcional inyectiva de una clase propia a un conjunto, eso es una contradicción[6].

Sea $\alpha_0 = \min \{\alpha \ / \ F(\alpha) = b\}$, este mínimo está bien definido pues el conjunto $\{\alpha \ / \ F(\alpha) = b\}$ es un conjunto no vacío. Notemos que $h = F|_{\alpha_0}$ es una inyección (pues si $\gamma < \alpha_0$, $F(\gamma) \neq b$) y es suprayectiva (pues $F(\alpha_0) = b$, lo que implica que $a \setminus F[\alpha_0] = \emptyset$).

Lo anterior muestra que $h$ es una biyección entre $a$ y un ordinal, como los ordinales están bien ordenados bajo la pertenencia, podemos copiar la relación

[5] Para ver la definición de conjunto bien ordenable léanse las secciones B.3 y B.6

[6] Esta contradicción viene a partir del Esquema de Reemplazo, este axioma está explicado en B.2.

del ordinal en $a$ para que $h$ sea un isomorfismo. Con este método encontramos un buen orden para el conjunto $a$.

$\Leftarrow$ Tomemos un conjunto $a$, y supongamos que es bien ordenable. De esta forma existe $r \subseteq a \times a$ tal que $\langle a, r \rangle$ es un buen orden. Definamos la función $g : \wp(a) \setminus \{\emptyset\} \to \bigcup \wp(a) = a$ tal que $g(X) = \text{mín}_r X$. Esta función está bien definida y es una función de elección para $\wp(a)$.

l.q.q.d.

**Teorema 3.1.3.** *1. AE $\Rightarrow$ AED.*

*2. AED $\Rightarrow$ AEN.*

**Prueba**

1. Sean $a$ un conjunto y $r \subseteq a \times a$ tales que para todo $x \in a$ existe $y \in a$ tal que $xry$; y sea $f$ una función de elección para $\wp(a)$. Definamos recursivamente la función $g : \omega \to a$ tal que $g(0) = f(a)$ y $g(n+1) = f(\{y \ / \ g(n)ry\})$.[7] La función $g$ está bien definida y cumple $g(n)rg(n+1)$ para todo $n \in \omega$.

2. Sea $\{A_i\}_{i \in \omega}$ una colección no vacía de conjuntos, definamos $<$ sobre $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ tal que $x < y$ si y sólo si $x \in A_i$ y $y \in A_{i+1}$. Como todo conjunto $A_i$ es no vacío, tenemos que para todo $z \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ existe $w \in \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ tal que $z < w$. Utilizando el AED, existe $h : \omega \to \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ tal que $h(n) < h(n+1)$.

   Notemos que si $h(0) \in A_{i_0}$ entonces $h(n) \in A_{i_0+n}$, por lo que $h \in \prod_{i=i_0}^{\infty} A_i$. Como el conjunto $\{A_0, A_1, ..., A_{i_0-1}\}$ es finito, podemos seleccionar $x_j \in A_j$ para todo $0 \leq j < i_0$. Si definimos $f : \omega \to \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ tal que $f(i) = x_i$ si $0 \leq j < i_0$ y $f(i) = h(i)$ en otro caso, tenemos que $f \in \prod_{i=0}^{\infty} A_i$, lo cual es equivalente al AEN.

l.q.q.d.

Como se imagina, el AED es un debilitamiento del AE, y AEN es un debilitamiento de AED, por lo que no es posible demostrar el regreso de las afirmaciones anteriores. Es importante remarcar que en el caso del AEN, las equivalencias válidas para elección que tienen que ver con productos y con particiones siguen siendo equivalentes al AEN en su versión numerable.

[7] Las diferentes versiones de recursión se encuentran en B.4.

Otros debilitamientos famosos del AE son el Metateorema de Compacidad, el Teorema del Ultrafiltro, la existencia de ultrafiltros no principales, la existencia de conjuntos no Lebesgue medibles, que la finitud según Dedekind y según Cantor coincidan, entre otros.

## 3.2. Trampas con elección

Una de las complicaciones principales para identificar qué teoremas requirieron el Axioma de Elección para su demostración y cuales no, es la cotidianidad con la que lo utilizamos. Esto lleva a utilizar el axioma sin darnos cuenta, o bien, a utilizarlo cuando no se necesita. Con la finalidad de resaltar estos hechos mostraremos los siguientes dos ejemplos:

**Teorema 3.2.1.** *La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

**Prueba**

Sea $\{A_i\}_{i\in\omega}$ una colección de conjuntos numerables. Sean $f_i : A_i \to \omega$ biyecciones, éstas existen puesto que cada conjunto es numerable. Definamos la función $g : \bigcup_{i=0}^{\infty} \{i\} \times A_i \to \omega \times \omega$ tal que $g(j, x) = (j, f_j(x))$. Claramente la función $g$ es una biyección entre la unión ajena de las $A$ y $\omega \times \omega$ el cual sabemos que es numerable.

l.q.q.d.

Aparentemente, en la prueba anterior nunca se utilizó el AE, no obstante, esto es falso. Si leemos con cuidado, al momento en que definimos las funciones $f_i$, sabemos que existen pero no son únicas, por lo que para cada $A_i$ existen una infinidad de opciones para elegir como función $f_i$. En ese momento fue necesario utilizar elección.

Es importante remarcar que el AE se utiliza cuando se debe seleccionar, de manera no determinada, una infinidad de elementos teniendo en cada selección al menos dos opciones. Si debemos hacer una selección en una cantidad finita de conjuntos (aunque sean de cardinalidad infinita) o si tenemos un método efectivo de selección (como el caso de los elementos mínimos en los conjuntos bien ordenados) no es necesario el AE.

**Definición 3.2.2.**

1. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x_0 - y| < \delta$ entonces

$$|f(x_0) - f(y)| < \epsilon.$$

2. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es secuencialmente continua en $x_0$ si y sólo si para toda sucesión $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ cuyo límite sea $x_0$ se tiene que $f(z_i) \to f(x_0)$ cuando $i \to \infty$.

3. Se dice que $f$ es continua (análogamente secuencialmente continua) si y sólo si es continua (análogamente secuencialmente continua) para todo $x_0$ en su dominio.

4. Las definiciones son análogas en caso de que el dominio sea un intervalo, o un conjunto con interior no vacío.

**Teorema 3.2.3.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces $f$ es continua si y sólo si es secuencialmente continua.*

**Demostración 1**

$\Rightarrow$ Supongamos que $f$ es continua. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a $x_0$. Por continuidad, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que si $|x_0 - y| < \delta_\epsilon$ entonces $|f(x_0) - f(y)| < \epsilon$.

Por convergencia, para cada $\delta > 0$ existe $N_\delta \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N_\delta$ entonces $|x_0 - z_m| < \delta$.

Uniendo lo anterior obtenemos que para todo $\epsilon > 0$, existe $N_{\delta_\epsilon}$ tal que si $m \geq N_{\delta_\epsilon}$, entonces $|z_m - x_0| < \delta_\epsilon$ y, por tanto, $|f(z_m) - f(x_0)| < \epsilon$ para toda $m \geq N_{\delta_\epsilon}$. De esta forma $\{f(z_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $f(x_0)$.

$\Leftarrow$ Este enunciado se probará utilizando su contrapositiva.

Supongamos que $f$ no es continua. Mostraremos que no es secuencialmente continua. Como $f$ no es continua existen $x_0$ y $\epsilon_0 > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe $y_\delta$ tal que $|x_0 - y_\delta| < \delta$ y $|f(x_0) - f(y_\delta)| \geq \epsilon_0$.

Por lo anterior, utilizando el AEN, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $z_n$ tal que $|x_0 - z_n| < 1/n$ y $0 < \epsilon_0 \leq |f(x_0) - f(z_n)|$. Notemos que la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}$ converge a $x_0$ pero $\{f(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}$ no converge a $f(x_0)$ pues se mantiene a una distancia mayor o igual a $\epsilon_0$ de él. Esto implica que $f$ no es secuencialmente continua.

l.q.q.d.

En esta prueba no hay forma de seleccionar la sucesión $\{z_n\}$ asegurando que cada elemento sea racional forzando al teorema a utilizar el AEN.[8] Así, el uso del AE en la demostración anterior parece indiscutible. Sin embargo, leyendo cuidadosamente podemos darnos cuenta que en la prueba anterior en verdad se demuestra el siguiente teorema: "Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$, entonces es equivalente ser continua en $x_0$ y ser secuencialmente continua en $x_0$".

Para la demostración del teorema entrecomillado es necesario utilizar el AEN. Sin embargo, se puede demostrar el teorema 3.2.3 en la teoría de $ZF^{-}$[9]:

**Demostración 2**

$\Rightarrow$ La misma que en la demostración 1.

[8] Poder tomar racionales nos ayudaría a evitar el AE ya que, al ser $\mathbb{Q}$ numerable, lo podemos bien ordenar de esta forma podemos elegir, sin el axioma, el mínimo racional en esa numeración que cumpla la propiedad.

[9] Es decir, sin utilizar el AE ni el Axioma de Buena Fundación.

$\Leftarrow$ Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una numeración de $\mathbb{Q} \cup \{x_0\}$. Siguiendo la demostración 1 podemos probar sin necesidad de utilizar el Axioma de Elección que si $f$ restringida a $\mathbb{Q} \cup \{x_0\}$ es secuencialmente continua entonces es continua. Para evitar el uso de elección, se seleccionan $x_n = q_{j_n}$ donde $j_n = \text{mín}\,\{i \in \mathbb{N} \ / \ |x_0 - q_i| < 1/n \ \& \ |f(x_0) - f(q_i)| > \epsilon\}$.

Si $f$ es secuencialmente continua, sabemos que $f$ restringida a $\mathbb{Q} \cup \{x\}$ es continua para toda $x \in \mathbb{R}$. De esta forma, para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta_x > 0$ tal que si $r$ es racional y $|x - r| < \delta_x$ entonces $|f(x) - f(r)| < \epsilon/2$.

Sea $z$ tal que $|x_0 - z| < \delta_{x_0}$, por densidad, existe un racional $r_z$ que esté entre $x_0$ y $z$ (respecto al orden) tal que $|z - r_z| < \delta_z$. Con esto, tenemos que:

$$|f(x_0) - f(z)| = |f(x_0) - f(r_z) + f(r_z) - f(z)| \leq$$

$$\leq |f(x_0) - f(r_z)| + |f(r_z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Pues tenemos que $|r_z - z| < \delta_z$ y $|r_z - x| \leq |x - z| < \delta_x$.

l.q.q.d.

Es importante precisar que no todas las pruebas donde no se necesita el AE cambian tanto como las del ejemplo anterior. En algunos casos, basta cambiar el método de elección justo como se mostró utilizando $\mathbb{Q} \cup \{x\}$. En muchos casos en que se selecciona un número real con cierta propiedad, puede elegirse un número racional que satisfaga las mismas propiedades, con la diferencia de que sobre $\mathbb{Q}$ existen formas de elegir constructivamente.

## 3.3. Teoremas sin elección

Como se comenzó a esbozar en la sección anterior, existen muchos teoremas de Análisis Matemático que no requieren el uso del Axioma de Elección para demostrarse. Es importante remarcar que la construcción de $\mathbb{R}$ por medio de cortaduras de Dedekind (se puede revisar [3]) no utiliza el Axioma de Elección por lo que la propiedad del supremo (al igual que la convergencia de sucesiones de Cauchy) se tienen por construcción en los números reales y no es necesario dar una prueba de ellos.

A continuación presentaremos otros teoremas de Análisis Matemático que se pueden realizar una vez que ha sido construido $\mathbb{R}$. Como es de suponerse, en esta sección se trabajará en la teoría de $ZF^-$, es decir, se evitará por completo el uso del AE para la demostración de los teoremas que se presenten.

**Teorema 3.3.1.** *Sea $X$ un espacio topológico. $F$ es cerrado (i.e., su complemento es abierto) si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.*

**Demostración**

$\Rightarrow$ Supongamos que $F$ es cerrado, de esta forma $X \setminus F$ es abierto por lo que para todo $y \in X \setminus F$ existe un abierto $V$ tal que $V \subseteq X \setminus F$, esto implica que si

$x$ es un punto de acumulación de $F$, $x \notin X \setminus F$ ya que para todo abierto $U$ tal que $x \in U$, $U \cap F \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$ Sea $F$ tal que contiene a todos sus puntos de acumulación. Sea $y \in X \setminus F$, sabemos que $y$ no es un punto de acumulación, por lo que existe un abierto $V$ tal que $y \in V$ y $V \cap F = \emptyset$, por tanto $V \subseteq X \setminus F$. Esto implica que $X \setminus F$ es abierto y que $F$ es cerrado.

l.q.q.d.

**Teorema 3.3.2** (Bolzano-Weierstrass)**.** *Todo conjunto infinito y acotado de* $\mathbb{R}$ *tiene un punto de acumulación.*

**Prueba**

Sea $A$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ infinito y acotado. Por tanto, existe $[a_0, b_0]$ un intervalo de longitud finita tal que $A \subseteq (a_0, b_0)$. Este intervalo lo podemos partir en los intervalos $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ y $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$. Dado que $A$ es infinito tenemos que $A \cap [a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ o $A \cap [\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$ es infinito. Si $A \cap [a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ es infinito, nombramos $a_1 = a_0$ y $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, de no ser así, $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ y $b_1 = b_0$.

Utilizando el mismo argumento podemos repetir el procedimiento, teniendo definidos $a_n$ y $b_n$ definimos $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ si $A \cap [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ es infinito, de no ser así definimos $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ y $b_{n+1} = b_n$.

Con este procedimiento obtuvimos una infinidad de intervalos tales que $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subsetneq [a_n, b_n]$ y tales que $A \cap [a_n, b_n]$ es infinito. Por otra parte, si suponemos que $|b_0 - a_0| = \eta$ tendremos que $|a_n - b_n| = \eta/2^n$, por lo que si tomamos $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $i < j$ tenemos que $[a_j, b_j] \subseteq [a_i, b_i]$ lo que nos lleva a que $|a_j - a_i| < \eta/2^i$. Esto muestra que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y, por tanto, existe $a$ su punto de convergencia.

Demostraremos que $a$ es un punto de acumulación de $A$. Sea $U$ un abierto de $\mathbb{R}$ tal que $a \in U$, de esta forma, sabemos que existe $\epsilon > 0$ tal que el intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subseteq U$. Dado que $a$ es el punto de convergencia de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, sabemos que existe $N_\epsilon$ tal que si $m \geq N_\epsilon$ $a_m \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Elijamos $N_\epsilon$ como el mínimo número natural $k$ tal que cumpla el criterio de convergencia descrito y tal que $\eta/2^k < \epsilon$. Con esto tenemos que $[a_{N_\epsilon}, b_{N_\epsilon}] \subseteq (a - \epsilon, a + \epsilon) \subseteq U$. Como $A \cap [a_{N_\epsilon}, b_{N_\epsilon}]$ es infinito, $A \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto $a$ es un punto de acumulación de $A$.

l.q.q.d.

**Teorema 3.3.3** (Heine-Borel)**.** *Un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

**Demostración**

$\Rightarrow$ Sea $K$ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Notemos que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(-i, i)$, por lo que el conjunto $\{(-n,n)\ /\ n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de $K$. Por compacidad, existe una subcubierta finita. Sea $n_0$ el máximo número natural que define un intervalo en la subcubierta finita obtenida. Tenemos que $K \subseteq (-n_0, n_0)$, por lo que $K$ es un conjunto acotado.

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus K$, notemos que el conjunto $\{\mathbb{R} \setminus [x - 1/n, x + 1/n]\ /\ n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de $K$, pues cada elemento es un conjunto abierto y $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus [x - 1/n, x + 1/n] = \mathbb{R} \setminus \{x\}$. Como $K$ es compacto tenemos que existe una subcubierta finita, es decir, existen $n_1, n_2, ..., n_m$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{R} \setminus [x - 1/n_i, x + 1/n_i].$$

Notemos que si $\ell$ es el máximo de $n_1, n_2, ..., n_m$, tedríamos que

$$K \subseteq \mathbb{R} \setminus [x - 1/\ell, x + 1/\ell].$$

De esta forma, $(x - 1/\ell, x + 1/\ell) \subseteq \mathbb{R} \setminus K$. Como esto sucede para todo elemento en el complemento de $K$, tenemos que $\mathbb{R} \setminus K$ es abierto, y por tanto, $K$ es cerrado.

$\Leftarrow$ Sea $A$ un subconjunto cerrado y acotado. Al ser acotado existe $[a_0, b_0]$ tal que $A \subseteq [a_0, b_0]$. Notemos que si $K$ es compacto y $B \subseteq K$ es cerrado, entonces $B$ es compacto. Esto sucede ya que si $C$ es una cubierta de $B$, $C \cup \{\mathbb{R} \setminus B\}$ es una cubierta de $K$, de esta forma, existe una subcubierta finita $C'$ de $C \cup \{\mathbb{R} \setminus B\}$. Notemos que $C' \setminus \{\mathbb{R} \setminus B\}$ es una subcubierta finita de $C$ que cubre a $B$. Con este hecho basta demostrar que $[a_0, b_0]$ es compacto para probar que $A$ lo es.

Supongamos que $[a_0, b_0]$ no es compacto, por tanto, existe una cubierta abierta $D$ que no tiene subcubiertas finitas. Dado que $[a_0, b_0]$ no se puede cubrir de manera finita con elementos de $D$, alguno de los conjuntos $[a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}]$, $[\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0]$ tampoco puede ser cubierto finitamente. Utilizando el mismo razonamiento que en la demostración del Teorema de Bolzano Weierstrass, definimos intervalos $[a_n, b_n]$ tales que $[a_n, b_n]$ no se pueden cubrir con una cantidad finita de elementos de $D$. Tomemos la sucesión $\left\{\frac{a_n + b_n}{2}\right\}_{n=0}^{\infty}$. Como esta sucesión está contenida en $[a_0, b_0]$, por el Teorema de Bolzano Weierstrass, tenemos que existe $b$ un punto de acumulación.

Tomemos $U_b \in D$ tal que $b \in U_b$, este elemento existe pues $D$ es una cubierta de $[a_0, b_0]$. Sabemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $(b - \epsilon, b + \epsilon) \subseteq U_b$. Siguiendo el razonamiento de la demostración de Bolzano Weiestrass, tenemos que existe $N$ tal que $\frac{a_N + b_N}{2} \in [a_N, b_N] \subseteq (b - \epsilon, b + \epsilon) \subseteq U_b$. Lo anterior es una contradicción pues estamos cubriendo $[a_N, b_N]$ con un solo elemento de $D$.

Por lo tanto $[a_0, b_0]$ es compacto.

l.q.q.d.

**Definición 3.3.4.** $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $|x - y| < \delta$ se tiene $|g(x) - g(y)| < \epsilon$.

**Teorema 3.3.5.** $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *es continua si y sólo si es uniformemente continua.*[10]

**Prueba**

$\Leftarrow$ Una función que es uniformemente continua en particular es continua.

$\Rightarrow$ Sea $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. Sea $\epsilon > 0$, como $f$ es continua tenemos que para cada $x \in [0,1]$ existe $\delta$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon/2.$$

Definimos $\delta_x = \text{mín}\,\{i \in \mathbb{N} \;/\; |x - y| < q_i \to |f(x) - f(y)| < \epsilon/2\}$ y

$$C = \{(x - \delta_x/2, x + \delta_x/2) \;/\; x \in [0,1]\},$$

notemos que $C$ es una cubierta abierta de $[0,1]$. Por el teorema de Heine-Borel, $[0,1]$ es compacto, por lo que existe una subcubierta finita de $C$.

De esta forma existen $x_0, ..., x_m$ tales que $\left\{(x_i - \frac{\delta_i}{2}, x_i + \frac{\delta_i}{2}) \;/\; 0 \leq 1 \leq m\right\}$ es una cubierta de $[0,1]$. Sea $\delta = \text{mín}\left\{\frac{\delta_{x_i}}{2} \;/\; 0 \leq i \leq m\right\}$.

Sean $z, y \in [0,1]$ tales que $|z - y| < \delta$. Por la construcción anterior, existe $x_i$ tal que $|x_i - z| < \frac{\delta_{x_i}}{2}$, sea $i_z$ el mínimo natural que cumple con esto. De esta forma tenemos que:

$$|x_{i_z} - y| \leq |x_{i_z} - z| + |z - y| < \frac{\delta_{x_{i_z}}}{2} + \delta \leq \delta_{x_{i_z}}$$

por lo que

$$|f(z) - f(y)| \leq |f(z) - f(x_{i_z})| + |f(x_{i_z}) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Lo anterior muestra la continuidad uniforme de $f$.

l.q.q.d.

**Teorema 3.3.6.** *Sea $K$ un espacio topológico compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces $f$ tiene máximo y mínimo.*

**Prueba**

Notemos que $f[K]$ es un compacto de $\mathbb{R}$,[11] por tanto es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Por la propiedad del supremo, existe $\sup f[K]$ y $\sup f[K] \in f[K]$ (pues

[10] Este teorema es válido sin A.E. con cualquier otro intervalo cerrado de longitud finita, o cualquier compacto que tenga a $\mathbb{Q}$ como subconjunto denso.

[11] La demostración es análoga a que las imágenes de Lindelöf son Lindelöf escrita más adelante en la implicación 12) $\Rightarrow$ 13) del teorema 3.4.2.

los supremos son puntos de acumulación y $f[K]$ es cerrado). Lo anterior implica que existe $a \in K$ tal que $f(a) = \sup f[K]$. Por tanto $f(a) = \max f[K]$. La demostración para el mínimo es análoga.

l.q.q.d.

**Teorema 3.3.7.** *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas del $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ tal que convergen puntualmente a $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Entonces $g$ es continua si y sólo si la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $g$.*[12]

**Demostración**

$\Leftarrow$ Supongamos que la sucesión converge uniformemente a $g$, y sea $\epsilon > 0$, sabemos que existe $N_\epsilon$ tal que si $m \geq N_\epsilon$ entonces $|g(x) - f_m(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ para toda $x$ en $[0,1]$. Al ser $f_{N_\epsilon}$ continua en un compacto, es uniformemente continua, por lo que existe $\delta_\epsilon$ tal que para todas las $x, y \in K$ que cumplen $|x-y| < \delta_\epsilon$ tenemos que $|f_{N_\epsilon}(x) - f_{N_\epsilon}(y)| < \dfrac{\epsilon}{3}$. Con lo anterior tenemos que si $|x-y| < \delta_\epsilon$:

$$|g(x)-g(y)| \leq |g(x)-f_{N_\epsilon}(x)|+|f_{N_\epsilon}(x)-f_{N_\epsilon}(y)|+|f_{N_\epsilon}(y)-g(y)| < \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Esto prueba que $g$ es uniformemente continua y, por tanto, continua.

$\Rightarrow$ Supongamos que $g$ es continua, sea $\epsilon > 0$ y sea $\{q_i\}_{i\in\omega}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. Dado que la sucesión converge puntualmente a $g$, para todo $x \in [0,1]$ existe $N_{x,\epsilon}$ mínimo tal que si $m \geq N_{x,\epsilon}$, $|g(x) - f_m(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}$. Además, como $[0,1]$ es compacto, tenemos que $g$ y cada una de las $f_n$ son uniformemente continuas, por lo que, si consideramos $g = f_{-1}$, existen para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ $\delta_{\epsilon,n}$ tales que si $x, y \in [0,1]$ y $|x-y| < \delta_{\epsilon,n}$, entonces $|f_n(x) - f_n(y)| < \dfrac{\epsilon}{3}$. Definimos $\delta_{\epsilon,n} = q_{i_{\epsilon,n}}$ donde $i_{\epsilon,n}$ es el mínimo natural $i$ tal que $q_i$ cumple con la propiedad anterior para $f_n$.

Sea $C = \left\{(x - \dfrac{\delta_{\epsilon,N_{x,\epsilon}}}{2}, x + \dfrac{\delta_{\epsilon,N_{x,\epsilon}}}{2}) \ / \ x \in [0,1]\right\}$. C es una cubierta abierta de $[0,1]$, por lo que existen $x_1, ..., x_{n_0} \in [0,1]$ tal que

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_0} (x_i - \frac{\delta_{\epsilon,N_{x_i,\epsilon}}}{2}, x_i + \frac{\delta_{\epsilon,N_{x_i,\epsilon}}}{2}).$$

Sea $N_\epsilon = \max\{N_{x_i,\epsilon} \ / \ 1 \leq i \leq n_0\}$. Por otra parte, para cada $y \in [0,1]$ existe $x_i$ tal que $|y - x_i| < \delta_{\epsilon,N_{x_i}}$, sea esta $x_{i_y}$[13]. Notemos que si $n \geq N_\epsilon$, entonces $n \geq N_{x_i,\epsilon}$ para toda $1 \leq i \leq n_0$, por lo que para toda $z$:

$$|g(z)-f_m(z)| \leq |g(z)-g(x_{i_z})|+|g(x_{i_z})-f_m(x_{i_z})|+|f_m(x_{i_z})-f_m(z)| \leq \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}.$$

[12] Este teorema es válido sin A.E. con cualquier otro intervalo cerrado de longitud finita, o cualquier compacto que tenga a $\mathbb{Q}$ como subconjunto denso.

[13] Para elegir $x_{i_y}$ sin usar elección, de las $x_i$ que cumplan la propiedad, se selecciona la que tenga el menor índice $i$.

Esto muestra que $f_n \to g$ uniformemente.

l.q.q.d.

**Teorema 3.3.8.** $C^0([0,1],\mathbb{R})$ *con la métrica* $d_\infty(f,g) = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$ *es completo.*[14]

**Demostración**

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy respecto a $d_\infty$. De esta forma tenemos que para cada $x \in [0,1]$, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de números reales. Al ser $\mathbb{R}$ completo, cada una de estas sucesiones tiene un único límite. Sea $f_x$ el límite de $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = f_x$. Basta mostrar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $f$ para mostrar que $f$ es continua y, por tanto, $C^0([0,1],\mathbb{R})$ completo.

Sea $\epsilon > 0$, como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, existe $N$ tal que si $m, n \geq N$ entonces $d_\infty(f_m, f_n) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Por tanto $|f_m(x) - f_n(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Como la sucesión $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$ y $|\cdot|$ es continua tenemos que:

$$|f_m(x) - f(x)| = |f_m(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Por lo que si $m \geq N$ tenemos que $d_\infty(f_m, f) < \epsilon$, es decir, la sucesión $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f$.

Por el resultado anterior, $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ por lo que toda sucesión de Cauchy en $C^0([0,1],\mathbb{R})$ converge en $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

l.q.q.d.

En Teoría de la Medida también se pueden hacer avances sin necesidad del AE, por ejemplo, se puede definir la medida de Lebesgue pues su definición sólo utiliza intervalos e ínfimos. De igual forma puede demostrarse que la medida exterior que la define es invariante bajo traslación, es $\sigma$-subaditiva, monótona, no trivial, difusa y completa.

Recordemos que en $ZF^-$ una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si es secuencialmente continua.

Otros teoremas que son verdaderos en $ZF^-$ son:

**Teorema 3.3.9.**

1. $\mathbb{R}$ *es separable, i. e., tiene un subconjunto denso y numerable.*
2. $\mathbb{R}$ *es $\sigma$-compacto, i.e., es unión numerable de compactos.*
3. *En* $\mathbb{R}$ *todo subconjunto conexo es un intervalo.*

Como podemos notar, mucha de la teoría básica de los números reales, su estructura, su topología y algunos de sus principales teoremas de análisis son

[14] Recordemos que $C^0([0,1],\mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es continua}\}$ y que un espacio métrico es completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy converge.

válidos sin utilizar el Axioma de Elección. Sin embargo, existen conceptos que necesitan del AE para que funcionen como estamos acostumbrados. Por ejemplo, si el elemento $a$ es un punto de acumulación de $A$ es necesario el AEN para decir que existe una sucesión de elementos de $A$ que converge a $a$, esto implica que sin el AEN si tenemos un conjunto $A$ tal que sea cerrado bajo sucesiones (que el límite de toda sucesión de elementos de $A$ esté en $A$) no necesariamente es topológicamente cerrado pues puede haber un punto de acumulación que no esté al alcance de las sucesiones de $A$. De igual forma, los supremos e ínfimos no necesariamente pueden ser alcanzados por una sucesión, por tanto, no necesariamente es cierta la regularidad de la medida de Lebesgue.

Aunque los avances que se pueden hacer sin AE en Análisis Matemáticos son mayores a los que uno puede esperar, en definitiva, algo de elección se necesita para trabajar cómodamente esta rama de las matemáticas.

## 3.4. La fuerza del AEN

A estas alturas hemos mostrado muchos teoremas que se demuestran utilizando el AEN. Aunque podríamos enumerarlos, o bien, dar cada una de las demostraciones, en esta sección mostraremos cuáles de estos resultados son válidos si y sólo si es válido el AEN en $\mathbb{R}$ (es decir, que es válido $AEN(\mathbb{R})$).

**Definición 3.4.1.**

1. Un conjunto $A$ es secuencialmente cerrado si y sólo si contiene a todos los puntos que se alcanzan por medio de sucesiones de elementos de $A$.
2. Un espacio topolígico es secuencial si y sólo si ser cerrado es equivalente a ser secuencialmente cerrado.
3. Un espacio topológico es Fréchet si y sólo si para todo punto de acumulación $x$ de un conjunto $A$ existe una sucesión de elementos de $A$ que converge a $x$.
4. Un espacio topológico es separable si y sólo si contiene un subconjunto denso cuya cardinalidad es a lo más la de los números naturales.

**Axioma Parcial de Elección Numerable en $\mathbb{R}$ ($APEN(\mathbb{R})$)** dice que para todo conjunto $\{\emptyset \neq X_i \subseteq \mathbb{R} \ / \ i \in \mathbb{N}\}$ existe $M \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que

$$\prod_{m\in M} X_m \neq \emptyset.$$

**Teorema 3.4.2.** *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $\mathbb{R}$ *es Fréchet.*

2. *Todo subconjunto de* $\mathbb{R}$ *es secuencial.*
3. *Una función* $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua si y sólo si es secuencialmente continua.*
4. *Todo conjunto no acotado de* $\mathbb{R}$ *contiene una sucesión no acotada.*
5. $APEN(\mathbb{R})$.
6. $AEN(\mathbb{R})$.
7. *Todo espacio topológico segundo numerable de* $\wp(\mathbb{N})$ *es separable.*
8. *Todo subespacio de* $\mathbb{R}$ *es separable.*
9. *Cada espacio topológico segundo numerable es Lindelöf (ver definición en [13]).*
10. *Cada subespacio de* $\mathbb{R}$ *es Lindelöf.*
11. $\mathbb{R}$ *es Lindelöf.*
12. $\mathbb{N}$ *es Lindelöf.*
13. $\mathbb{Q}$ *es Lindelöf.*
14. *Una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en* $x_0 \in \mathbb{R}$ *si y sólo si es secuencialmente continua en* $x_0$.

**Demostración**

El método de demostración será el siguiente: realizaremos un ciclo de equivalencias entre los incisos 1-8, después haremos otro ciclo que involucre el inciso 6 y los incisos 9-13. Finalmente mostraremos que el inciso 14 es equivalente al 6.

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $\mathbb{R}$ es Fréchet. Demostraremos que un conjunto $X$ es cerrado si y sólo si contiene los límites de todas sus sucesiones. La ida es incluso válida en $ZF^-$ pues si $a$ es el límite de una sucesión, entonces es un punto de acumulación de ésta. Para el regreso, al ser $\mathbb{R}$ Fréchet todo punto de acumulación se puede alcanzar con una sucesión.

2) $\Rightarrow$ 3) Supongamos que ser secuencialmente cerrado y cerrado son equivalentes, probaremos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si es secuencialmente continua. La ida es válida en $ZF^-$ como se mostró en 3.2.3. Para el regreso, tomemos $A$ un cerrado de $\mathbb{R}$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq f^{-1}[A] \subseteq X$ que tenga como límite a $a \in X$. Al ser $f$ secuencialmente continua sabemos que $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(a)$. Como $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, y $A$ es cerrado, resulta que $f(a) \in A$ y por tanto, $a \in f^{-1}[A]$. Esto muestra que si $f$ es secuencialmente continua entonces $f^{-1}[A]$ es secuencialmente cerrado, finalmente 2) nos asegura que $f^{-1}[A]$ es cerrado por lo que $f$ es continua.

3) $\Rightarrow$ 4) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no acotado y $h : \mathbb{R} \to (0, 1)$ un homeomorfismo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que 0 es punto de acumulación de

$h[A]$. Definamos la función $f : h[A] \cup \{0\} \to \{0,1\} \subseteq \mathbb{R}$ como $f(x) = 0$ si $x \in h[A]$ y $f(0) = 1$. Claramente $f$ no es una función continua, por 3) tenemos que no es secuencialmente continua por lo que existen $x_0 \in h[A] \cup \{0\}$ y $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq h[A] \cup \{0\}$ tales que $a_n$ converge a $x_0$ y $f(a_n)$ no converge a $f(x_0)$. Por la forma en la que está definida $f$, necesariamente $x_0 = 0$ y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq h[A]$. De esta forma existe $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq h[A]$ que converge a 0. Finalmente, $\left\{h^{-1}(a_n)\right\}_{n=0}^{\infty} \subseteq A$ es una sucesión no acotada.

4) $\Rightarrow$ 5) Sean $\{\emptyset \neq X_n \subseteq \mathbb{R} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, $h_0 : \mathbb{R} \to (0,1)$ un homeomorfismo y $h_n : \mathbb{R} \to (n, n+1)$ homeomorfismos tales que $h_n(x) = h_0(x) + n$. Consideremos el conjunto $A = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{\infty} h_i[X_i]$, como cada $X_i$ es no vacía tenemos que $A$ es un conjunto no acotado. Por 4) tenemos que existe una sucesión no acotada $\{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$, sea $M = \left\{n \in \mathbb{N} \ / \ h_n[X_n] \cap \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \emptyset\right\}$. Al ser la sucesión $\{a_n\}$ no acotada, $M$ es un conjunto infinito. Para cada $m \in M$ definimos $n_m = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \ / \ a_k \in h_m[X_m]\}$. De esta forma tenemos que para todo $m \in M$, $a_{n_m} \in h[X_m]$. Con esto mostramos que

$$(h_m^{-1}(a_{n_m})) = (h_0^{-1}(a_{n_m} - m)) \in \prod_{m\in M} X_m,$$

con lo que se prueba $APEN(\mathbb{R})$.

5) $\Rightarrow$ 6) Supongamos válido $APEN(\mathbb{R})$. Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \wp(\mathbb{R})$, mostraremos que podemos aplicar $APEN(\mathbb{R})$ a $\left\{\displaystyle\prod_{i=1}^{m} X_i \ / \ m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$. Sabemos que $\mathbb{R}^2$ es biyectable con $\mathbb{R}$, así que sea $h$ una biyección entre ellos. Ahora definimos recursivamente funciones biyectivas $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea $f_1 = Id_{\mathbb{R}}$ y, suponiendo a $f_n$ definida, sea $f^{n+1}((x_1, ..., x_n, x_{n+1})) = h(f^n((x_1, ..., x_n)), x_{n+1})$. De esta forma aplicamos $APEN(\mathbb{R})$ al conjunto $\left\{f^m \left[\displaystyle\prod_{i=1}^{m} X_i\right] \ / \ m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$. Así existe $M$ un conjunto infinito tal que $\displaystyle\prod_{m\in M} f^m \left[\prod_{i=1}^{m} X_i\right] \neq \emptyset$. Sea $(a_m) \in \displaystyle\prod_{m\in M} f^m \left[\prod_{i=1}^{m} X_i\right]$, claramente $((f^m)^{-1}(a_n)) \in \displaystyle\prod_{m\in M} (\prod_{i=1}^{m} X_i)$. Por lo que existe un conjunto $M$ infinito tal que $\displaystyle\prod_{m\in M} (\prod_{i=1}^{m} X_i) \neq \emptyset$.

Sea $m_{-1} = 0$ y enumeremos $M$ ascendentemente, es decir $M = \{m_i \ / \ i \in \mathbb{N}\}$ tal que si $i < j$ entonces $m_i < m_j$. Sea $(a_{m_i}) \in \displaystyle\prod_{i=1}^{\infty} (\prod_{i=1}^{m_i} X_i)$. Notemos que $a_n \in \mathbb{R}^n$, por lo que $a_n = (a_n^1, ..., a_n^n)$. Definamos $(b_n)$ de tal forma que $b_k = a_{n+1}^k$ para todo $m_n < k \leq m_{n+1}$ y toda $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, en otras palabras,

$$(b_n) = (a_0^0, a_0^1, ..., a_0^{m_0}, a_1^{m_0+1}, a_1^{m_0+2}, ..., a_1^{m_1}, a_2^{m_1+1}, ...).$$

Claramente $(b_n) \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, lo que prueba $AEN(\mathbb{R})$.[15]

6) $\Rightarrow$ 7) Supongamos $AEN(\mathbb{R})$. Como existe una biyección entre $\wp(\mathbb{N})$ y $\mathbb{R}$ resulta que $AEN(\wp(\mathbb{N}))$ es válido. Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico segundo numerable con $X \subseteq \wp(N)$. Sabemos que existe $B = \{U_i \ / \ i \in \mathbb{N}\}$ una base de la topología $\tau$[16] que no incluya al conjunto vacío. Utilizando el $AEN(\wp(\mathbb{N}))$ seleccionamos $(a_n) \in \prod_{i=0}^{\infty} U_i$. Notemos que para toda $k$, $a_k \in U_k$, por lo que para todo $V$ abierto de $X$, como existe $k_0$ tal que $U_{k_0} \subseteq V$, tenemos que existe $k_0$ tal que $a_{k_0} \in V$. Por lo tanto $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es denso en $X$ y $X$ es separable.[17]

7) $\Rightarrow$ 8) Es claro pues $\mathbb{R}$ puede verse como el conjunto de cortaduras de Dedekind de $\wp(\mathbb{Q})$ que es biyectable con $\wp(\mathbb{N})$ y su topología es dos numerable. Por tanto, para todo $X \subseteq \mathbb{R}$ la topología inducida es segundo numerable y, por 7), $X$ sería separable.

8) $\Rightarrow$ 1) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x_0$ un punto de acumulación de $A$. Por 8) tenemos que $A$ es separable, por lo que existe $A_d = \{a_i \ / \ i \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ denso. Sea

$$k_n = \text{mín}\,\{k \in \mathbb{N} \ / \ |x_0 - a_k| < 1/n\}$$

al ser $x_0$ un punto de acumulación de $A$ y $A_d$ denso, tenemos que para todo $n > 0$, $k_n$ está bien definido. Notemos que la sucesión $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ converge a $x_0$.

6) $\Rightarrow$ 9) Supongamos $AEN(\mathbb{R})$ y sea $(X, \tau)$ un espacio segundo numerable. Al ser segundo numerable existe una base numerable de la topología lo que implica que no existen más abiertos que funciones de $\omega$ en 2,[18] es decir, hay una función inyectiva de $\tau$ a ${}^{\omega}2$ que es biyectable con $\mathbb{R}$. Por tanto es válido $AEN(\tau)$.

Sea $C$ una cubierta abierta de $X$. Mostraremos que existe $C'$ una subcubierta numerable de $C$. Sabemos que existe $B = \{U_i \ / \ i \in \mathbb{N}\}$ una base de la topología $\tau$. Sean $C_n = \{U \in C \ / \ U_n \subseteq U\}$ y $M = \{k \in \mathbb{N} \ / \ C_k \neq \emptyset\}$. De esta forma, usando $AEN(\tau)$ tenemos que existe $(V_i) \in \prod_{i \in M} C_i$. Notemos que $C' = \{V_i \ / \ i \in M\}$ es una subcubierta numerable de $C$, esto sucede ya que para cada $x \in X$ existe $U \in C$, $x \in U$; al ser $U$ abierto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_k \subseteq U$; finalmente, sabemos que $U_k \subseteq V_k$, por lo que para todo $x \in X$ existe $V \in C'$ tal que $x \in V$. Lo anterior muestra que $(X, \tau)$ es Lindelöf.

9) $\Rightarrow$ 10) Para todo $X \subseteq \mathbb{R}$ la topología inducida de $X$ es segundo numerable. Por 9), $X$ es Lindelöf.

---

[15] Notemos que esta prueba es válida para mostrar que $APEN$ implica $AEN$.

[16] Recordemos que una base $B$ es un conjunto de conjuntos abiertos tales que para todo $V$ abierto y para todo $x \in V$ existe $U \in B$ tal que $x \in U \subseteq V$.

[17] Notemos que $AEN$ puede demostrar el resultado anterior eliminando la hipótesis de $\wp(\mathbb{N})$.

[18] Como cada abierto es la unión de los abiertos de la base que contiene, si numeramos la base, a cada abierto podemos asignarle la función que indique si el elemento de la base está contenido o no. Esta asignación es inyectiva.

10) $\Rightarrow$ 11) Como $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$, tenemos que $\mathbb{R}$ es un subespacio de $\mathbb{R}$, por lo que por 10) $\mathbb{R}$ es Lindelöf.

11) $\Rightarrow$ 12) Notemos que $\mathbb{N}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ (pues su complemento es $(-\infty, 0) \cup \bigcup_{i=0}^{\infty}(i, i+1)$ que es abierto). Basta probar que todo conjunto cerrado de un Lindelöf es Lindelöf con la topología inducida. Sea $A \subseteq X$ un conjunto cerrado con $X$ un espacio topológico Lindelöf, y $C$ una cubierta abierta de $A$. Notemos que $C \cup (X \setminus A)$ es una cubierta abierta de $X$, por lo que existe $C'$ una subcubierta numerable. Finalmente, $C' \setminus \{X \setminus A\}$ es una subcubierta numerable de $C$.

12) $\Rightarrow$ 13) Tomemos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ una biyeccción. Como $\mathbb{N}$ tiene la topología discreta, $f$ es una función continua[19]. Sea $C$ una cubierta de $\mathbb{Q}$. Notemos que $D = \left\{f^{-1}[U] \ / \ U \in C\right\}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{N}$ (pues $f$ es biyección continua), por 12), sabemos que existe $D' = \left\{f^{-1}[U_i] \ / \ i \in \mathbb{N}\right\}$ subcubierta numerable de $D$. Finalmente, es claro que $C' = \{U_i \ / \ i \in \mathbb{N}\}$ es una subcubierta numerable de $C$.[20]

13) $\Rightarrow$ 6) Demostraremos que para todo subconjunto no acotado existe una sucesión no acotada. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no acotado, sin pérdida de generalidad, supongamos que no tiene cota superior[21]. Sea $C = \{(-\infty, a) \cap \mathbb{Q} \ / \ a \in A\}$, $C$ es una cubierta abierta de $\mathbb{Q}$ pues $A$ es no acotado; por 13), existe $C'$ una subcubierta numerable. Ahora, como sabemos que $\sup(-\infty, a) \cap \mathbb{Q} = a$ tenemos que para todo elemento $U \in C'$, $\sup U \in A$. Dado que $C'$ cubre a $\mathbb{Q}$, $\{\sup U \ / \ U \in C'\}$ es una sucesión no acotada contenida en $A$.

6) $\Rightarrow$ 14) Es la demostración 1 del teorema 3.2.3.

14) $\Rightarrow$ 6) Demostraremos por contrapositiva que si asumimos la equivalencia entre continuidad secuencial puntual y continuidad puntual entonces es cierto que si $a$ es un punto de acumulación de $X \subseteq \mathbb{R}$ entonces existe una sucesión contenida en $X$ con límite $a$. Supongamos que existen $a$ y $X$ tales que ninguna sucesión de $X$ alcanza a $a$. De esta forma $a \notin X$. Consideremos $\chi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función característica de $X$, esta función no es continua en $a$ (pues para $\epsilon = 1/2$ y para toda $\delta > 0$ existe $x_\delta \in X \cap (a - 1/2, a + 1/2)$ por lo que $|x_\delta - a| < \delta$ pero $|f(a) - f(x_\delta)| = |0 - 1| = 1 > 1/2 = \epsilon$). Sin embargo, toda sucesión con límite en $a$ está contenida en $\mathbb{R} \setminus X$, por lo que $\chi_X$ es secuencialmente continua. Esto contradice 14).

l.q.q.d.

**Definición 3.4.3.** $X$ es secuencialmente compacto si y sólo si que para toda sucesión de $X$ exista una subsucesión convergente en $X$.

**Teorema 3.4.4.** *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

[19] Esto prueba que todo espacio topológico numerable es la imagen bajo una función continua de $\mathbb{N}$.

[20] Notemos que lo anterior es una prueba de que las imágenes continuas de un Lindelöf son Lindelöf. Por otra parte, toda la prueba anterior se puede cambiar a que todo espacio numerable es Lindelöf, este resultado también es equivalente a $AEN(\mathbb{R})$.

[21] De no ser así, trabajaremos con $-A$. Al final, al obtener la sucesión, la sucesión de negativos estará en $A$ y será no acotada.

1. *$\mathbb{R}$ es secuencial.*

2. *Ser completo es equivalente a ser cerrado en $\mathbb{R}$, para subconjuntos de $\mathbb{R}$.*

3. *$AE(c\mathbb{R})$, es decir, si $\{X_i\}_{i\in I}$ es un conjunto de subconjuntos completos de $\mathbb{R}$ entonces $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.*

4. *$AEN(c\mathbb{R})$, es decir, si $\{X_i\}_{i\in\omega}$ es un conjunto de subconjuntos completos de $\mathbb{R}$ entonces $\prod_{i\in\omega} X_i \neq \emptyset$.*

5. *Los subespacios completos de $\mathbb{R}$ son separables.*

6. *Los conjuntos no acotados y completos de $\mathbb{R}$ contienen sucesiones no acotadas.*

7. *Ser compacto es equivalente a ser secuencialemnte compacto para subconjuntos de $\mathbb{R}$ con la topología inducida.*

8. *Ser compacto es equivalente a ser completo y acotado, para subespacios de $\mathbb{R}$.*

**Demostración**

1) $\Rightarrow$ 2) Desde $ZF^-$ se puede probar que todo espacio cerrado es completo, pues como un cerrado tiene a todos sus puntos de acumulación, tendrá a los límites de todas las sucesiones de Cauchy. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un espacio completo, esto implica que el límite de toda sucesión de Cauchy contenida en $X$ está en $X$, como toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy, tenemos que $X$ tiene a los límites de todas sus suceciones. Por 1) $\mathbb{R}$ es secuencial, lo que implica que $X$ es cerrado.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ un conjunto de subconjuntos completos de $\mathbb{R}$, por 2) todos estos conjuntos son cerrados. Basta mostrar que si $\{Y_i\}_{i\in I}$ es un conjunto de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ entonces $\prod_{i\in I} Y_i \neq \emptyset$. Sea

$$n_i = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \ / \ Y_i \cap [-k,k] \neq \emptyset\},$$

al ser $Y_i$ cerrado tenemos que $Y_i \cap [-n_i, n_i]$ es cerrado, por lo que

$$\text{ínf}\, Y_i \cap [-n_i, n_i] \in Y_i \cap [-n_i, n_i]$$

para todo $i \in I$, esto implica que $(\text{ínf}\, Y_i \cap [-n_i, n_i]) \in \prod_{i\in I} Y_i$. Esto demuestra $AE(c\mathbb{R})$.

3) $\Rightarrow$ 4) Claramente $AE(c\mathbb{R})$ implica $AEN(c\mathbb{R})$.

4) $\Rightarrow$ 5) Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un espacio completo. Ahora consideremos los conjuntos $[p,q] \cap X \neq \emptyset$ con $\langle p,q\rangle \in \mathbb{Q}^2$. Como $[p,q]$ y $X$ son espacios completos, si

$[p,q] \cap X \neq \emptyset$ entonces la intersección también es completa, por lo que 4) implica que existe $(a_{\langle p,q\rangle}) \in \prod_{[p,q]\cap X\neq\emptyset} [p,q] \cap X$. Notemos que el conjunto

$$B = \left\{ X \cap (p,q) \ / \ \langle p,q\rangle \in \mathbb{Q}^2 \right\}$$

es una base del espacio $X$ y que para todo $X \cap (p,q) \neq \emptyset$ existen racionales $p < r < s < q$ tales que $\emptyset \neq X \cap [r,s] \subseteq X \cap (p,q)$, por lo que $a_{\langle r,s\rangle} \in X \cap (p,q)$. Lo anterior implica que el conjunto $\left\{ a_{\langle p,q\rangle} \ / \ [p,q] \cap X \neq \emptyset \right\}$ es denso en $X$.

5) $\Rightarrow$ 6) Si $A$ es un subconjunto no acotado y completo de $\mathbb{R}$, por 5) tenemos un conjunto denso y numerable de él. Este conjunto es una sucesión no acotada.

6) $\Rightarrow$ 1) Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ secuencialmente cerrado y supongamos que existe un punto de acumulación $a \notin X$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a = 1$ y $X \subseteq (0,1)$[22]. Sea $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo que preserve el orden y tal que $|x-y| < |h(x) - h(y)|$ para todo $x, y \in (0,1)$.[23] Con esta propiedad tenemos que $h[X]$ es completo y no acotado[24]. Por 6), tenemos que existe $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq h[X]$ no acotada. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que esta sucesión diverge a infinito (que no tiene puntos de acumulación). Por tanto la sucesión $\left\{h^{-1}(y_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge a 1. Esto contradice el hecho de que $X$ sea secuencialmente cerrado. Por lo tanto, ser secuencialmente cerrado implica ser cerrado en $\mathbb{R}$.

2) $\Rightarrow$ 7) Sabemos que desde $ZF^-$ ser compacto en $\mathbb{R}$ es equivalente a ser cerrado y acotado, y, que si tomamos una sucesión acotada ésta tiene un punto de acumulación[25]. En el teorema 3.4.2, en la implicación 8) $\Rightarrow$ 1), se muestra como crear una subsucesión convergente a un punto de acumulación, lo que muestra desde $ZF^-$ que compacto implica secuencialmente compacto. Para el regreso, tomemos $X$ secuencialmente compacto. Sea $\{a_n\}$ una sucesión contenida en $X$ que converja a $a \in \mathbb{R}$, por ser $X$ secuencialmente compacto existe una

[22] Esto lo podemos hacer pues la traslación $f(x) = x + (1-a)$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en sí mismo, por lo que $f[X]$ seguiría siendo secuencialmente cerrado y tendría como punto de acumulación a $f(a) = 1 \notin f[X]$. Después, podemos suponer que $f[X] \subseteq (-\infty, 1]$, de no serlo cada elemento mayor que 1 lo enviamos a su inverso multiplicativo, esta función también es continua por lo que todo se mantendría igual. Finalmente, dado que $1 \notin f[X] \subseteq (-\infty, 1]$, tenemos que $f[X] \subseteq (-\infty, 1)$ que es homeomorfo a $(0,1)$ con un homeomorfismo que preserve el orden, tendremos que $h[f[X]]$ tiene como punto de acumulación a 1.

[23] La función $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{4x} & x \in [0, \frac{1}{4}] \\ 4x - 2 & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \dfrac{-1}{4x-4} & x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

es un ejemplo de este tipo de homeomorfismos.

[24] Aunque la parte de no acotado es obvia, en la parte de completo, si tomamos una sucesión de Cauchy en $h[X]$, la sucesión de preimágenes también será de Cauchy (pues $|x-y| < |h(x)-h(y)|$) así que existirá un punto de convergencia en $X$ cuya imagen será el punto de convergencia en $h[X]$.

[25] Por el teorema de Bolzano Weierstrass.

subsucesión convergente, sin embargo, el único punto de acumulación de la sucesión es $a$, por lo que $a \in X$. Esto muestra que $X$ es secuencialmente cerrado y, por 2), esto implica que $X$ es cerrado.

La demostración de que $X$ es acotado la haremos por contradicción. Supongamos que $X$ es no acotado. Como $X$ es cerrado, es completo, así que, por 6) (que ya mostramos que es equivalente a 2)) tenemos que existe una sucesión no acotada en $X$, digamos, $\{y_n\}$. Consideremos la siguiente sucesión $\{z_m = y_{n_m}\}_{m=0}^{\infty}$ donde $n_m = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \ / \ m < y_k\}$. La sucesión de las $z$'s no tiene puntos de acumulación, por lo que no tiene subsucesiones convergentes. Esto contradice la compacidad secuencial de $X$. Por lo tanto $X$ es acotado. Como tenemos que $X$ es cerrado y acotado, $X$ es compacto.

7) $\Rightarrow$ 8) Sabemos que desde $ZF^-$ ser compacto en $\mathbb{R}$ es equivalente a ser cerrado y acotado, y, desde $ZF^-$ todo cerrado es completo por lo que todo compacto es completo y acotado. Ahora, sea $X$ un conjunto completo y acotado y $\{a_n\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $X$. Como $X$ es acotado el teorema de Bolzano-Weierstrass implica que tiene un punto de acumulación $a$, por la técnica mostrada en la implicación 8) $\Rightarrow$ 1) del teorema 3.4.2, tenemos que existe una subsucesión convergente a este punto. Basta mostrar que $a \in X$ para demostrar que es secuencialmente compacto, sin embargo, como toda sucesión convergente es de Cauchy, y $X$ es completo, tenemos que $a \in X$. Por tanto $X$ es secuencialmente compacto y, por 7), es compacto.

8) $\Rightarrow$ 2) Sea $X$ completo. Al ser $X \cap [-n, n]$ completo y acotado, por 8) es compacto, y por tanto es cerrado para todo número natural $n$. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus X$ y sea $n_x = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \ / \ x \in [-k, k]\}$ y

$$m_x = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \ / \ (x - 1/k, x + 1/k) \subseteq [-n_x + 1, n_x + 1] \cap \mathbb{R} \setminus X\}.$$

$m_x$ está bien definido ya que al ser $\mathbb{R} \setminus (X \cap [-n_x - 1, n_x + 1])$ abierto con $x$ como elemento, sabemos que existe otro abierto $\epsilon > 0$ tal que

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus (X \cap [-n_x - 1, n_x + 1]).$$

Por otra parte, como $|x - (n_x + 1)| \geq 1$ (pues $x \in [-n_x, n_x]$) si $\epsilon < 1$ tenemos que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq [-n_x - 1, n_x + 1]$. Como

$$\mathbb{R} \setminus (X \cap [-n_x - 1, n_x + 1]) = (\mathbb{R} \setminus X) \cup (-\infty, -n_x - 1) \cup (n_x + 1, \infty),$$

tenemos que $(x - 1/m_x, x + 1/m_x) \subseteq \mathbb{R} \setminus X$. Por tanto, $X$ es cerrado.

l.q.q.d.

Los 14 puntos del primer teorema nos muestran que con un debilitamiento de AEN podemos trabajar y crear las herramientas básicas del Análisis Matemático en $\mathbb{R}$. El segundo teorema nos explica que, asumiendo $AEN(\mathbb{R})$, algunas nociones de compacidad coinciden en $\mathbb{R}$, esto es importante pues en el libro [8] se muestra que, sin el Axioma de Elección, existen tres o cuatro nociones de compacidad que no coinciden (que sí coinciden si asumimos el AE).

Por otra parte, algunos de los teoremas de la sección anterior pueden generalizarse. Todos aquellos que hablan de funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ pueden cambiarse por funciones $f : K \to \mathbb{R}$ con $K$ compacto (por ejemplo el teorema 3.3.5). Estas generalizaciones se pueden hacer pues en la prueba se utiliza que $\mathbb{Q}$ es denso en $[0,1]$, sin embargo, con el $AEN(\mathbb{R})$ tenemos que $K$ tiene un subconjunto denso numerable.

Hablando de teoría de la medida, como se muestra en 2.5.5, la regularidad de la medida de Lebesgue se puede demostrar utilizando $AEN(\mathbb{R})$.

## 3.5. Más allá de $\mathbb{R}$

El Teorema de Arzelà-Ascoli es uno de los primeros teoremas que nos sacan de $\mathbb{R}$ y nos presentan otro tipo de espacios. Su importancia radica en que da una caracterización de los conjuntos compactos (precompactos o totalmente acotados, depende la versión) en el espacio de funciones continuas $C^0(X,Y)$ con $X$ un espacio métrico compacto y $Y$ un espacio métrico completo. Esta caracterización hace a los conjuntos compactos (y a los espacios) más entendibles y manejables.

**Definición 3.5.1.**

1. Un espacio métrico $(X,d)$ es totalmente acotado (o precompacto) si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existen una cantidad finita de puntos $a_i$ con $1 \leq i \leq n$ tal que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_X(a_i,\epsilon)$ donde
$$B_X(x,\epsilon) = \{y \in X \ / \ d(x,y) < \epsilon\}.$$
2. $A$ es relativamente compacto si y sólo si la cerradura de $A$ es compacta.
3. $F$, un conjunto de funciones continuas de $(X,d_X)$ a $(Y,d_Y)$, es equicontinua en $z_0 \in X$ si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta_{z_0,\epsilon}$ tal que si $d_X(z_0,x) < \delta_{z_0,\epsilon}$ entonces $d_Y(f(z_0),f(x)) < \epsilon$ para toda $f \in F$.
4. $F$ es equicontinuo si y sólo si es equicontinuo en todo elemento de $X$.
5. $B_X(a,\delta) = \{y \ / \ d_X(a,y) < \delta\}$, $\overline{B_X}(a,\delta) = \{y \ / \ d_X(a,y) \leq \delta\}$ y si $A \subseteq X$, $\overline{A}$ es la cerradura de $A$[26].

No es difícil mostrar en $ZF^-$ que $B_X(a,\delta)$ siempre es abierto y $\overline{B_X}(a,\delta)$ cerrado[27]. Por otra parte, aunque asumiendo el Axioma de Elección resulta que la noción de precompacto y de relativamente compacto coinciden, en $ZF^-$ sólo podemos mostrar los siguiente puntos:

**Teorema 3.5.2.**

1. *Todo espacio compacto es totalmente acotado.*
2. *Todo conjunto totalmente acotado es acotado.*

[26]Donde la cerradura es el mínimo cerrado bajo la contención que contiene a $A$.
[27]Una demostración de esto se puede encontrar en [4, pp.29-31].

3. *Si $X$ es un espacio totalmente acotado y $A \subseteq X$, entonces $A$ es totalmente acotado.*

4. *Si $X$ es relativamente compacto entonces $X$ es precompacto.*

**Demostración**

1. Sea $X$ compacto y $\epsilon > 0$, entonces $C = \{B_X(x,\epsilon) \ / \ x \in X\}$ es una cubierta abierta de $X$, por lo que existen una cantidad finita de puntos $a_i \in X$ con $1 \leq i \leq n$ tal que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_X(a_i,\epsilon)$.

2. Sea $X$ un conjunto totalmente acotado. Por tanto existen $a_1, ..., a_n$ tales que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_X(a_i,1)$. Sea $r = \max\{d_X(a_1,a_i) \ / \ 1 \leq i \leq n\}$, por lo que $X \subseteq B_X(a_1, r+2)$.

3. Sea $X$ totalmente acotado y $A \subseteq X$, sabemos que para toda $\epsilon > 0$ existen $x_1, ..., x_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ tal que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_X(x_i,\frac{\epsilon}{2})$. Sean $n_1, ..., n_m$ los números $i$ entre 1 y $n$ tales que $A \cap B_X(x_i,\frac{\epsilon}{2}) \neq \emptyset$, y sea $a_i \in A \cap B_X(x_{n_i},\frac{\epsilon}{2})$ para toda $1 \leq i \leq m$. Como para todo $z \in B_X(c,\delta)$ se cumple que $B_X(c,\delta) \subseteq B_X(z,2\delta)$, tenemos que
$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_X(x_{n_i},\frac{\epsilon}{2}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_X(a_{n_i},\epsilon).$$
Finalmente, como $B_A(c,\delta) = B_X(c,\delta) \cap A$ obtenemos que
$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_A(a_{n_i},\epsilon).$$
Por lo que $A$ es totalmente acotado.

4. Sea $X$ relativamente compacto, entonces $\overline{X}$ es compacto, por lo que $\overline{X}$ es totalmente acotado (o precompacto). Como $X \subseteq \overline{X}$ tenemos, por el inciso anterior, que $X$ es precompacto.

l.q.q.d.

Con las definiciones anteriores ya podemos escribir el teorema que nos interesa:

**Teorema 3.5.3** (Arzelà-Ascoli K-Y). *Sea $K$ un espacio métrico compacto y $Y$ un espacio métrico completo. $F \subseteq C^0(K,Y)$ es relativamente compacto si y sólo si $F$ es equicontinuo y $F(x) = \{f(x) \ / \ f \in F\}$ es relativamente compacto en $Y$ para toda $x \in K$.*

La demostración de este teorema puede revisarse en [4], sin embargo, su demostración usa más elección que $AEN(\mathbb{R})$. Suponiendo el teorema anterior tenemos el siguiente corolario:

**Teorema 3.5.4** (Arzelà-Ascoli K-$\mathbb{R}$)**.** *Sea $K$ un espacio métrico compacto. $F \subseteq C^0(K, \mathbb{R})$ es relativamente compacto si y sólo si $F$ es equicontinuo y $F(x) = \{f(x) \ / \ f \in F\}$ es acotado en $Y$ para toda $x \in K$.*

Mostraremos que una implicación del Teorema de Arzelà-Ascoli K-$\mathbb{R}$ con $K$ compacto y separable es equivalente al $AEN(\mathbb{R})$. Para demostrarlo deberemos tomar en cuenta que toda función continua se define por los valores que toma en un conjunto denso. Dado que $K$ es separable, tiene un subconjunto $A$ denso y numerable, por lo que toda función continua $f : K \to \mathbb{R}$ está definida por su restricción a $A$. Por lo que hay ${}^{A}\mathbb{R}$ funciones continuas, sabemos que $\mathbb{N}$ es biyectable con $A$ y $\mathbb{R}$ con ${}^{\mathbb{N}}2$. Esto muestra que el tamaño de $C^0(K, \mathbb{R})$ es el mismo que el de ${}^{\mathbb{N}}({}^{\mathbb{N}}2)$ que, haciendo cuentas, es biyectable con $\mathbb{R}$. Por tanto, si $K$ es compacto y separable podemos usar el siguiente lema:

**Lema 3.5.5.** *Asumiendo $AEN(\mathbb{R})$, si $X$ es un espacio totalmente acotado biyectable con $\mathbb{R}$, entonces toda $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ admite una subsucesión de Cauchy. En caso de que $X \subseteq Y$ con $Y$ un espacio completo, tendríamos que la cerradura de $X$ es secuencialmente compacta, pues toda sucesión tiene una subsucesión convergente (a este concepto le llamaremos relativamente secuencialmente compacto).*

**Demostración**

Dado que $\mathbb{R}$ es biyectable con $X$, tenemos que $\mathbb{R}^n$ es biyectable con $X^n$. En la implicación 5) $\Rightarrow$ 6) del teorema 3.4.2, mostramos sin utilizar el AE que $\mathbb{R}^n$ es biyectable con $\mathbb{R}$ y, por tanto, sabemos que sin el Axioma de Elección podemos biyectar a $\mathbb{R}^n$ con $(n, n+1)$. De esta forma el conjunto $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X^n$ es biyectable con $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+1) \subseteq \mathbb{R}$, por lo que si es válido $AEN(\mathbb{R})$, entonces es válido $AEN(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X^n)$.

Sean $A_n = \left\{ a = (a_1, ..., a_{m_a}) \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X^n \ / \ X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_a} B_X(a_i, \frac{1}{n}) \right\}$ subconjuntos de $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X^n$. Como $X$ es totalmente acotado tenemos que $A_n \neq \emptyset$ para toda $n$. Utilizando $AEN(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X^n)$ tenemos que $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. Sea $(a_n) \in \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ donde $a_k = (a_k^1, ..., a_k^{m_k})$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión, mostraremos que esta sucesión tiene una subsucesión de Cauchy. Definimos $l_1$ como el mínimo natural $l$ tal que

$$B_X(a_1^l, 1) \cap \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es infinito. Este natural existe ya que, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_1} B_X(a_1^i, 1)$, no todas las bolas pueden intersectar finitamente a la sucesión. Seguimos definiendo, sea $b_1 = a_1^{l_1}$ y

$$n_1 = \text{mín}\{\ell \in \mathbb{N} \ / \ x_\ell \in B_X(b_1, 1)\}.$$

Supongamos que tenemos definidos $l_k$, $b_k$, $n_k$ y que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cap \bigcap_{j=1}^{k} B_X(b_j, \frac{1}{j})$ es infinito. Definimos $l_{k+1}$ como el mínimo natutral $l$ tal que

$$B_X(a_{k+1}^l, \frac{1}{k+1}) \cap (\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cap \bigcap_{j=1}^{k} B_X(b_j, \frac{1}{j}))$$

es infinito. Dado que suponemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cap \bigcap_{j=1}^{k} B_X(b_j, \frac{1}{j})$ es infinito, la existencia de una bola que contenga una cantidad infinita de ellos es clara. Finalmente, sean $b_{k+1} = a_{k+1}^{l_{k+1}}$ y $n_{k+1} = \text{mín}\left\{\ell \in \mathbb{N} \ / \ x_\ell \in \bigcap_{i=1}^{k+1} B_X(b_i, \frac{1}{i})\right\}$.

Claramente la sucesión $(x_{n_i})$ es de Cauchy. Para verlo, sea $\epsilon > 0$ y $N$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$. Entonces, para toda $m, l \geq N$ tenemos que $x_l, x_m \in B_X(b_N, \frac{1}{N})$, por lo que $d_X(x_l, x_m) < \frac{1}{N} < \epsilon$.

l.q.q.d.

**Teorema 3.5.6.** *Los siguientes son equivalentes:*

1. $AEN(\mathbb{R})$.
2. *Sea $K$ un espacio métrico compacto y separable. Si $F \subseteq C^0(K, \mathbb{R})$ es equicontinuo y $F(x) = \{f(x) \ / \ f \in F\}$ es acotado en $\mathbb{R}$ para toda $x \in K$ entonces $F$ es relativamente secuencialmente compacto.*

**Prueba**

2) $\Rightarrow$ 1) Como observación inicial, es importante remarcar que si $F$ es relativamente secuencialmente compacto, entonces $F(x)$ es acotado para toda $x \in K$. Para mostrarlo, sea $F$ relativamente secuencialmente compacto, como estamos utilizando la métrica del máximo tenemos que $F(x)$ es secuencialmente compacto en $\mathbb{R}$ para toda $x \in K$, por lo que $\overline{F(X)}$ es cerrado y secuencialmente

compacto. Si $\overline{F(x)}$ no fuera acotado, entonces $\overline{F(x)}\cap([-n-1,-n]\cup[n,n+1]) \neq \emptyset$ para una infinidad de $n$'s, por lo que la sucesión creada por los

$$\inf \overline{F(x)} \cap ([-n-1,-n] \cup [n,n+1])$$

que sí están definidos resulta estar contenida en $\overline{F(x)}$, ser no acotada y no tener puntos de acumulación. Esto contradice que $\overline{F(x)}$ sea secuencialmente compacto. Por tanto $\overline{F(x)}$ es acotado, al igual que $F(x)$.[28]

Por el teorema 3.4.2, basta mostrar que todo conjunto de $\mathbb{R}$ contiene una sucesión no acotada. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no acotado, y $F = \{f_b : [0,1] \to \mathbb{R} \;/\; b \in A\}$ donde $f_b$ es tal que para todo $x \in [0,1]$, $f_b(x) = b$. Esto implica que $F(0) = A$ es no acotado, y por la observación, tenemos que $F$ no es relativamente secuencialmente compacto. Por tanto existe $\{f_{b_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que no tiene subsucesiones de Cauchy. Dado que

$$d_\infty(f_{b_n}, f_{b_m}) = d_{C^0([0,1],\mathbb{R})}(f_{b_n}, f_{b_m}) = \max_{x\in[0,1]} |f_{b_n}(x) - f_{b_m}(x)| = |b_n - b_m|$$

tenemos que la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones de Cauchy. Lo anterior implica que no tiene puntos de acumulación. Si tuviera uno, digamos $b$, entonces la sucesión $\{b_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ con $n_k = \min\{i \in \mathbb{N} \;/\; (\forall j < k(i > n_j)) \;\&\; (|b_i - b| < 1/i)\}$ convergería a $b$ y por tanto sería de Cauchy.

Como $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene puntos de acumulación, por el Teorema de Bolzano-Weiestrass, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto no acotado.

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $F$ es equicontinua y $F(x)$ es acotado en $\mathbb{R}$ para todo $x \in K$, queremos probar que $F$ es relativamente secuencialmente compacto. Para hacerlo, demostraremos que es totalmente acotado lo cual, utilizando $AEN(\mathbb{R})$, implica la relatividad secuencial compacta.

Dado que $\mathbb{R}$ es completo, $C^0(K,\mathbb{R})$ también lo es (esto es una generalización del teorema 3.3.8). Sea $\epsilon > 0$, al ser $F$ equicontinuo, para cada $z \in K$ existe $\delta_z > 0$ tal que para toda $f \in F$ y $y \in K$ tal que $d_K(y,z) < \delta_z$ tenemos que $|f(z) - f(y)| < \frac{\epsilon}{4}$.[29] Como $K$ es compacto, existen $z_1, ..., z_m$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_K(z_i, \frac{\epsilon}{4})$. Como cada $F(z_i)$ es actodado en $\mathbb{R}$, entonces es totalmente acotado (pues los acotados son relativamente compactos). Lo anterior implica que existen $x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}$:

$$F(z_1) \cup ... \cup F(z_m) \subseteq (x_1 - \frac{\epsilon}{4}, x_1 + \frac{\epsilon}{4}) \cup ... \cup (x_k - \frac{\epsilon}{4}, x_k + \frac{\epsilon}{4}).$$

Consideremos el conjunto finito $S = \{\sigma : \{1,...,m\} \to \{1,...,k\}\}$. Para cada $\sigma \in S$ sea $F_\sigma = \left\{f \in F \;/\; f(z_i) \in (x_{\sigma(i)} - \frac{\epsilon}{4}, x_{\sigma(i)} + \frac{\epsilon}{4}) \forall i \in \{1,...,m\}\right\}$. Dado que

$$F(z_1) \cup ... \cup F(z_m) \subseteq (x_1 - \frac{\epsilon}{4}, x_1 + \frac{\epsilon}{4}) \cup ... \cup (x_k - \frac{\epsilon}{4}, x_k + \frac{\epsilon}{4})$$

[28] Aquí mostramos que en $ZF^-$ ser cerrado y secuencialmente compacto es lo mismo que ser cerrado y acotado, por tanto, compacto.

[29] Para no utilizar el A.E. podemos utilizar el truco de elegir $\delta_z$ racional.

para toda $f \in F$ y toda $i \in \{1, ..., m\}$, existe $j_f^i \in \{1, ..., k\}$ tal que

$$f(z_i) \in (x_{j_f^i} - \frac{\epsilon}{4}, x_{j_f^i} + \frac{\epsilon}{4}),$$

por lo que si definimos $\sigma_f \in S$ tal que $\sigma_f(i) = j_f^i$ tenemos que $f \in F_{\sigma_f}$ por lo que $F \subseteq \bigcup_{\sigma \in S} F_\sigma$.

Mostraremos que cada $F_\sigma$ está contenido en una bola de radio $\epsilon$. Sean $f, g \in F_\sigma$ y $z \in K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_K(z_i, \frac{\epsilon}{4})$, sabemos que existe $1 \leq i \leq m$ tal que $d_K(z, z_i) < \delta_{z_i}$, lo que implica que $|f(z) - f(z_i)| < \frac{\epsilon}{4}$ y $|g(z) - g(z_i)| < \frac{\epsilon}{4}$. De esta forma:

$$|f(z)-g(z)| \leq |f(z)-f(z_i)|+|f(z_i)-x_{\sigma(i)}|+|x_{\sigma(i)}-g(z_i)|+|g(z_i)-g(z)| < \frac{4\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Por tanto $d_\infty(f, g) = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)| < \epsilon$, en consecuencia $F_\sigma$ es un subconjunto de $B_{C^0(K,\mathbb{R})}(h, \epsilon)$ para toda $h \in F_\sigma$. Así, si seleccionamos $g_\sigma \in F_\sigma$ (lo cual es una elección finita así que no se utiliza $AEN(\mathbb{R})$) tenemos que

$$F \subseteq \bigcup_{\sigma \in S} B_{C^0(K,\mathbb{R})}(g_\sigma, \epsilon).$$

l.q.q.d.

Con esto, si es válido el $AEN(\mathbb{R})$ entonces tenemos una condición suficiente para la compacidad secuencial en algunos espacios de funciones. Horst Herlich en su libro [8] demuestra el siguiente teorema en la página 100:

**Teorema 3.5.7.** *Sea $F \subseteq C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, las siguiente son equivalentes:*

1. *Toda sucesión en $F$ tiene una subsucesión que converge continuamente a alguna función $g$ (aunque no esté en $F$).*[30]

2. *$F$ es equicontinua y para toda $x \in \mathbb{R}$, $F(x)$ es acotada.*

Sin embargo, $AEN(\mathbb{R})$ (e incluso AEN) no es todo poderoso. Existen teoremas de Análisis/Topología general que no se puden demostrar. Una vez más, Herlich en [8, pp. 95-96] nos muestra un ejemplo:

**Teorema 3.5.8** (Teorema de Ascoli)**.** *Para todo espacio localmente compacto y Hausdorff $X$, y todo espacio métrico $Y$, tenemos que $F \subseteq C_{co}(X, Y)$*[31] *es*

[30] La sucesión $(f_n)$ converge continuamente a $g$ si y sólo si para toda $x \in \mathbb{R}$ y toda sucesión $y_k \to x$ tenemos que $f_n(y_n)$ converge a $g(x)$.

[31] $C_{co}(X, Y)$ denota al conjunto de las funciones continuas de $X$ a $Y$ con la topología compacto-abierta. Véase [13].

*compacto si y sólo si $F(x)$ es compacto en $Y$ para toda $x \in X$; $F$ es cerrado en el espacio producto $Y^X$; y $F$ es equicontinuo*[32].

**Teorema 3.5.9.** *El teorema de Ascoli es equivalente al Teorema del Ideal Primo (TIP).*

TIP es más fuerte que AEN y que AED, además de que permite la existencia de conjuntos no medibles.

## 3.6. Utilizando AED

En 1984 se demostró que si es consistente $ZF^-$+AD, entonces es consistente $ZF^-$+AD+AED. De esta forma, AED es el debilitamiento del Axioma de Elección más fuerte que es compatible con el hecho de que no haya conjuntos no medibles de números reales.

Ya demostramos que AED implica el AEN, por lo que todo lo demostrado en las secciones pasadas sigue siendo válido al igual que varias de sus generalizaciones. Por otra parte, con el AED podemos igualar algunos conceptos de compacidad:

**Lema 3.6.1.** *Con AED, tenemos que todo conjunto relativamente secuencialmente compacto es totalmente acotado.*

**Demostración**

Supongamos que $X$ no es totalmente acotado. Por tanto existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $X$ no es cubierto por una cantidad finita de bolas de radio $\epsilon_0$. Ahora bien, diremos que $\{a_1, ..., a_n\} \, r \, \{b_1, ..., b_m\}$ si y sólo si $m = n + 1$, $a_i = b_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ y $b_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} B_X(a_i, \epsilon_0)$. Como $X$ no es totalmente acotado, $r$ cumple las hipótesis del AED, por lo que existe una sucesión de subconjuntos $(A_k)$ para $k \in \mathbb{N}$ tal que $A_k r A_{k+1}$. Definimos para toda $l \geq 1$ a $a_l$ como el único elemento de $A_l \setminus A_{l-1}$.

Notemos que para toda $l \geq 2$, $a_l \notin \bigcup_{i=1}^{l-1} B_X(a_i, \epsilon_0)$, por lo que para cualesquiera $n, m \geq 1$ tenemos que $d_X(a_m, a_n) \geq \epsilon_0$, de esta forma la sucesión de $\{a_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones de Cauchy, y por tanto, $X$ no es relativamente secuencialmente compacto.

l.q.q.d.

**Teorema 3.6.2.** *Sea $K$ un espacio métrico compacto. Si $F \subseteq C^0(K, \mathbb{R})$ es relativamente secuencialmente compacto entonces $F$ es equicontinuo y*

$$F(x) = \{f(x) \ / \ f \in F\}$$

*es acotado en $\mathbb{R}$ para toda $x \in K$.*

[32]En este caso la equicontinuidad dice que para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un abierto $U$ tal que $x \in U$ y para toda $f \in F$ y $y \in U$, $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$.

**Demostración**

Sea $F$ relativamente secuencialmente compacto, como estamos utilizando la métrica del máximo, tenemos que $F(x)$ es relativamente secuencialmente compacto en $\mathbb{R}$ para toda $x \in K$, como el $AEN(\mathbb{R})$ implica que ser compacto es lo mismo que ser secuencialmente compacto, tenemos que $\overline{F(x)}$ es compacto y, por tanto, acotado. Así, $F(x)$ es acotado para toda $x \in K$.

Por otra parte, al ser $F$ relativamente secuencialmente compacto, por el lema anterior, es totalmente acotada. Sea $\epsilon > 0$, sabemos que existen $g_1, ..., g_n \in F$ tales que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{C^0(K,\mathbb{R})}(g_i, \frac{\epsilon}{3})$. Como $K$ es compacto, la generalización del teorema 3.3.5 implica que toda $g \in F$ es uniformemente continua, por lo que existen $\delta_i$ tal que si $d_K(x,y) < \delta_i$ entonces $|g_i(x) - g_i(y)| < \frac{\epsilon}{3}$. Sea $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, ..., \delta_n\}$. Si $f \in F$, sabemos que existe $g_{i_f}$ tal que $|f(x) - g_{i_f}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ para toda $x \in K$,[33] por lo que si $x, y \in K$ tales que $d_K(x,y) < \delta$ entonces:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g_{i_f}(x)| + |g_{i_f}(x) - g_i(y)| + |g_{i_f}(y) - f(y)| < \frac{3\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Esto muestra que $F$ es equicontinua (pues para toda $f \in F$, si $d_K(x,y) < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$).

l.q.q.d.

**Teorema 3.6.3.** *Para $X$ espacio métrico, los siguientes son equivalentes:*

1. *$X$ es compacto.*
2. *$X$ es secuencialmente compacto.*
3. *$X$ es completo y totalmente acotado.*

**Prueba**

La demostración 1) $\Rightarrow$ 2) se puede hacer en $ZF^-$ y es conocida.

La implicación 2) $\Rightarrow$ 3) ya está muy adelantada. El hecho de que secuencialmente compacto implica totalmente acotado ya lo demostramos. Ahora bien, si $X$ es secuencialmente compacto, entonces toda sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, pero se puede demostrar que si una suseción de Cauchy tiene una subsucesión convergente entonces toda la sucesión converge.[34]

Finalmente, 3) $\Rightarrow$ 1) es una demostración análoga al teorema de Heine-Borel, en vez de utilizar los intervalos de $\mathbb{R}$ se utilizan la cantidad de bolas finitas dada

[33] Para evitar mucha elección se puede pedir que $i_f$ sea el mínimo $j$ tal que $|f(x) - g_j(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $x \in K$.

[34] Esta demostración se puede encontrar en [4].

por ser totalmente acotado. Teniendo cuidado, esta elección de bolas se puede realizar con AED.

l.q.q.d.

El AED es lo suficientemente fuerte para permitirnos hacer mucho del Análisis Matemático que conocemos. Como ya mostramos, tenemos algunas de las equivalencias más usuales de compacidad. De igual forma, podemos demostrar que todo espacio métrico compacto es dos numerable, y que toda topología dos numerable es separable y Lindelöf.

# Capítulo 4

# Conclusiones

A lo largo del trabajo hemos estudiado a la Teoría de la Medida y al Análisis Matemático con diferentes axiomatizaciones. Los dos ejes principales fueron los mundos con conjuntos no medibles y sin ellos. En los primeros dos capítulos mostramos que el Axioma de Elección crea monstruos para la medida de Lebesgue aunque, por otra parte, da propiedades a $\mathbb{R}$ que pueden ser importantes, propiedades como los conjuntos de representantes, las bases de espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, etcétera.

Sin embargo, bajo el Axioma de Elección, al buscar una medida no constante y que asigne a los puntos el valor cero, nos encontramos con que los números reales crecen a proporciones inimaginables (inaccesibles) rompiendo muchos lugares comunes como la Hipótesis del Continuo y abriendo más preguntas que respuestas. Además, esta nueva búsqueda pierde sentido. La medida no cero y difusa que tenga como dominio toda la potencia de $\mathbb{R}$ es una medida que no es regular (como nos lo muestran los conjunto de Bernstein); no puede ser invariante bajo traslación (como nos enseñó Vitali con sus conjuntos), ni tener propiedades bonitas bajo la multiplicación (como se demostró con el conjunto de Vitali multiplicativo). Estas razones nos hicieron buscar otra respuesta sin utilizar el Axioma de Elección.

Así es como decidimos trabajar con el Axioma de Determinación. En esta teoría muchos de los deseos de inicios del siglo XX son verdaderos: vale la Hipótesis del Continuo, es posible que valga el Axioma de Elecciones Dependientes (y así, la unión numerable de conjuntos numerables es numerable, al igual que las nociones de infinito coinciden); y, principalmente, todos los conjuntos son medibles bajo la medida de Lebesgue.

Todo el tercer capítulo justifica que gran parte del Análisis Real se puede hacer bajo el Axioma de Elecciones Numerables en $\mathbb{R}$ (mismo que es una implicación del Axioma de Determinación) y al final mostramos que mucho del Análisis Matemático se puede hacer utilizando simplemente el Axioma de Elecciones Dependientes.

Con lo anterior, la teoría $ZF^- + AD + AED$ parece ser la mejor al momento de trabajar con la medida de Lebesgue: esta axiomatización no permite monstruos para la medida, pero permite todo el Cálculo y el Análisis, acercándose un poco a la forma en que vivimos. Sin embargo, no todo puede ser bueno. Independientemente de que esta teoría crea problemas en otros ámbitos de las matemáticas, en [8] explican que la consistencia del Axioma de Determinación es equivalente a la consistencia de la existencia de cardinales de Woodin, mismos que, en particular, son Cardinales Inaccesibles.

Este detalle no es problema de la selección de nuestros axiomas, sino que es una implicación de la propiedad que buscamos. Shelah probó que la existencia de modelos donde todos los conjuntos de reales están en el dominio de la medida de Lebesgue necesita que existan Cardinales Inaccesibles.

Algo es claro: la situación lógica de los enunciados "existe una medida cuyo dominio es toda la potencia de $\mathbb{R}$" y "todos los conjuntos de números reales son medibles bajo la medida de Lebesgue" es complicada. Ambos resultados llevan a la existencia de Cardinales Inaccesibles lo que los pone muy cerca de la inconsistencia. Pero trabajar sin ellos nos aleja de los modelos de volumen buscados en la introducción, pues nadie ha podido construir un conjunto que no tenga volumen, o bien, separar una bola de un kilo en dos bolas de un kilo cada una.

Al final, si algo nos ha enseñado la lógica moderna es que nosotros podemos decidir. El presente trabajo argumenta porqué es una buena decisión trabajar con $ZF^- + AD + AED$ o con $ZF^- + AED$+"todos los conjuntos son Lebesgue medibles". Si esta axiomatización es cómoda o conveniente para obtener resultados queda a juicio de cada uno de nosotros.

# Apéndice A

# Teoría de la medida

En este apéndice mencionaremos los teoremas y definiciones básicas de Teoría de la Medida, todas las pruebas se pueden encontrar en [6].

## A.1. $\sigma$-álgebras

**Definición A.1.1.** $S \subseteq \wp(X)$ es una $\sigma$-álgebra si y sólo si:

1. $X \in S$.
2. Si $A \in S$, entonces $A^c = X \setminus A \in S$.
3. Si $\{A_i\}_{i \geq 0} \subseteq S$, entonces $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i \in S$.

En estos casos se dirá que $S$ es una $\sigma$-álgebra sobre $X$.

**Teorema A.1.2.** *Para todo $E \subseteq \wp(X)$ existe una única $\sigma$-álgebra $S(E)$ tal que:*

- *$E \subseteq S(E)$.*
- *Si $S$ es una $\sigma$-álgebra sobre $X$ tal que $E \subseteq S$, entonces $S(E) \subseteq S$.*

*A $S(E)$ se le llamará la $\sigma$-álgebra generada por $E$.*

**Proposición A.1.3.** *Si $S$ es una $\sigma$-álgebra sobre $X$ y $f : Y \to X$ una función entonces $f^{-1}(S) = \left\{f^{-1}[A] \ / \ A \in S\right\}$ es una $\sigma$-álgebra sobre $Y$.*

**Definición A.1.4.** Si consideramos $\tau = \{(a, b) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$ la topología usual de $\mathbb{R}$, entonces definimos $\mathbb{B}_{\mathbb{R}} = S(\tau)$. $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ es llamada la $\sigma$-álgebra de Borel, y sus elementos son conocidos como conjuntos borelianos.

## A.2. Funciones medibles

**Definición A.2.1.** 1. Un espacio medible es una pareja $\langle X, S\rangle$ donde $S$ es una $\sigma$-álgebra sobre $S$.

2. Sean $\langle X, S\rangle$ y $\langle Y, S'\rangle$ dos espacios medibles. Entonces $f : X \to Y$ es una función medible relativa a $S$ y $S'$ si y sólo si $f^{-1}(S') \subseteq S$.

3. En el caso especial en que $Y = \mathbb{R}$ y $S' = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$, llamaremos a las funciones medibles respecto a $S$ y $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ funciones $S$-medibles.

**Teorema A.2.2.** *Sea $\langle X, S\rangle$ un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Son equivalentes:*

1. *$f$ es $S$-medible.*
2. *$f^{-1}[U] \in S$ para todo $U$ abierto.*
3. *$f^{-1}[(c, \infty)] = \{x \in X \ / \ f(x) > c\} \in S$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*
4. *$f^{-1}[(-\infty, c]] = \{x \in X \ / \ f(x) \leq c\} \in S$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*
5. *$f^{-1}[(-\infty, c)] = \{x \in X \ / \ f(x) < c\} \in S$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*
6. *$f^{-1}[[c, \infty)] = \{x \in X \ / \ f(x) \geq c\} \in S$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

**Definición A.2.3.** 1. La función característica de un conjunto $A \subseteq X$, denotada por $\chi_A$, se define como $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ tal que $\chi_A(x) = 1$ si y sólo si $x \in A$.

2. $s : X \to \mathbb{R}$ es una función simple si y sólo si toma únicamente una cantidad finita de valores.

**Proposición A.2.4.** *Consideremos $\langle X, S\rangle$ un espacio medible.*

1. *$s : X \to \mathbb{R}$ es simple si y sólo si existen conjuntos $E_1, ..., E_n \subset X$ tales que $s(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) a_i$ con $a_i \in \mathbb{R}$ para toda $i$.*

2. *Toda función simple tiene una descripción canónica de la forma*

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) a_i$$

*donde $E_i \cap E_j = \emptyset$ si y sólo si $i \neq j$ y $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X$.*

3. *$s : X \to \mathbb{R}$ $s(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) a_i$ es $S$-medible si y sólo si para todo $i$, $E_i \in S$. Una función simple $S$-medible será llamada $S$-simple.*

4. *Toda función $S$-medible es la resta de dos funciones $S$-medibles no negativas, a saber, $f = f^+ - f^-$ donde $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ y $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.*

**Teorema A.2.5.** *Sea $\langle X, S\rangle$ un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ una función $S$-medible no negativa, entonces existe una sucesión $(s_n)$ de funciones $S$-simples tal que:*

1. $0 \leq s_n \leq s_{n+1} \leq f$.[1]
2. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ *para todo* $x \in X$.
3. *Si $f$ es acotada, entonces $s_n \to f$ uniformemente en $X$.*

**Proposición A.2.6.** *Sea $\langle X, S\rangle$ un espacio medible y $(f_n)$ una sucesión de funciones $S$-medibles tal que $(f_n(x))$ es acotada para todo $x \in X$. Entonces todas las siguientes funciones son $S$-medibles:*

1. $m_n(x) = \min\limits_{1\leq i\leq n} f_i(x)$.
2. $M_n(x) = \max\limits_{1\leq i\leq n} f_i(x)$.
3. $f(x) = \inf\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i(x)$.
4. $F(x) = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i(x)$.
5. $f^*(x) = \liminf f_i(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geq n} f_k(x)$.
6. $F^*(x) = \limsup f_i(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} f_k(x)$.

**Corolario A.2.7.** *Sea $\langle X, S\rangle$ un espacio medible y $(f_n)$ una sucesión de funciones $S$-medibles convergente, entonces $L(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ es $S$-medible.*

**Proposición A.2.8.** *Sea $\langle X, S\rangle$ un espacio medible y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones $S$-medibles. Entonces para toda $a \in \mathbb{R}$ las funciones $af$, $f+g$ y $fg$ son $S$-medibles.*

## A.3. Medidas

**Definición A.3.1.** La recta real extendida $\overline{\mathbb{R}}$ se define como el conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$. Las operaciones entre los reales finitos son las usuales y se definen las siguientes operaciones:

- $\infty + \infty = \infty + x = x + \infty = \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $-\infty + (-\infty) = -\infty + x = x + (-\infty) = -\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[1] Si $f, g : X \to \mathbb{R}$, diremos que $g \leq f$ si y sólo si para todo $x \in X$ se tiene que $g(x) \leq f(x)$.

- $\infty \cdot x = x \cdot \infty = \begin{cases} \infty & \text{si } x \in (0, \infty] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\infty & \text{si } x \in [-\infty, 0) \end{cases}$
- $(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \in (0, \infty] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \infty & \text{si } x \in [-\infty, 0) \end{cases}$

**Definición A.3.2.** Sea $\langle X, S\rangle$ un espacio medible. Una medida en $\langle X, S\rangle$ es una función $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(E) \geq 0$, para todo $E \in S$.
3. $\mu$ es $\sigma$-aditiva, es decir, si $(E_n)$ es una sucesión de elementos de $S$ tal que $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $m \neq n$ entonces $\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(E_i)$.

A la terna $\langle X, S, \mu\rangle$ le llamaremos espacio de medida.

**Proposición A.3.3.** *Sea $\langle X, S, \mu\rangle$ un espacio de medida. Entonces:*

1. *$\mu$ es aditiva, es decir, $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ siempre que $E_1, E_2 \in S$ y $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.*
2. *$\mu$ es monótona, i.e., si $E \subseteq F$ y $E, F \in S$ entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$.*
3. *$\mu$ es sustractiva, es decir, si $E \subseteq F$, $E, F \in S$ y $\mu(E) < \infty$ entonces $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.*
4. *Si $(E_n)$ es una sucesión de elementos de $S$ tal que $E_i \subseteq E_{i+1}$ entonces $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.*
5. *Si $(F_n)$ es una sucesión de elementos de $S$ tal que $F_{i+1} \subseteq F_i$ entonces $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$. Si $\mu(F_k) < \infty$ para alguna $k \in \mathbb{R}$ entonces se alcanza la igualdad. A los puntos 4 y 5 se les conoce como la propiedad de continuidad de una medida.*
6. *Si $(A_n)$ es una sucesión de elementos de $S$, entonces*

$$\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

**Definición A.3.4.** Sea $\langle X, S, \mu\rangle$ un espacio de medida.

- Definimos el conjunto de los conjuntos $\mu$-nulos:

$$N(\mu) = \{E \in S \ / \ \mu(E) = 0\}.$$

- Diremos que $\mu$ es completa si para todo $E$ $\mu$-nulo y todo $F \subseteq E$ tenemos que $F \in S$, lo que implicaría que $F \in N(\mu)$.
- Sea $P(x)$ una propiedad referente a los elementos de $X$. Decimos que $P(x)$ es cierta casi dondequiera relativa a $\mu$ (c.d. rel. $\mu$) si existe $E \in N(\mu)$ tal que $P(x)$ sea cierta para todo $x \in X \setminus E$.

## A.4. Integrar respecto a una medida

Sea $\langle X, S, \mu \rangle$ un espacio de medida fijo.

**Definición A.4.1.** Definimos los conjuntos

$$\mathbb{M}(X, S) = \{f : X \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es } S\text{-medible}\}$$

y

$$\mathbb{M}^+(X, S) = \{f \in \mathbb{M}(X, S) \ / \ f(x) \geq 0 \ \forall x \in X\}.$$

**Definición A.4.2.**

1. Sea $s : X \to \mathbb{R}$ una función $S$-simple y no-negativa cuya descripción canónica es $s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}$. Definimos la integral de $s$ con respecto a la medida $\mu$ como:

$$\int s d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

2. Sea $f \in \mathbb{M}^+(X, S)$ y $\underline{S}(f)$ el conjunto

$$\underline{S}(f) = \left\{ s \in \mathbb{M}^+(X, S) \ / \ s \text{ es simple } \& \ s \leq f \right\}.$$

Definimos la integral de $f$ respecto a $\mu$ como:

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu \ / \ s \in \underline{S}(f) \right\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

3. $f \in \mathbb{M}(X, S)$ es integrable con respcto a $\mu$ si y sólo si $\int f^+ d\mu < \infty$ y $\int f^- d\mu < \infty$. Definimos la integral de $f$ respecto a $\mu$ como:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \mathbb{R}.$$

4. Sea $f$ una función integrable. Para cada $E \in S$ definimos la integral de $f$ respecto a $\mu$ en $E$ como:

$$\int_E f d\mu = \int f \cdot \chi_E d\mu.$$

Si $X = \mathbb{R}$ y $E = [a, b]$ un intervalo (puede ser semi abierto o abierto) entonces $\int_a^b f d\mu$ denota a $\int_{[a,b]} f d\mu$.

**Proposición A.4.3.** *1. Cada una de las definiciones dadas en A.4.2 es una generalización de la anterior. Es decir, si $s$ es una función $S$-simple no-negativa entonces $\int s d\mu$ es el mismo número sin importar si se calcula de cualquiera de las tres formas descritas. Análogamente para las funciones $f$ $S$-medibles y no negativas.*

*2. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathbb{M}(X, S)$ funciones integrables entonces $cf$ y $cf + g$ son funciones integrables y*

$$\int (cf + g) d\mu = \int cf d\mu + \int g d\mu = c \int f d\mu + \int g d\mu.$$

*3. $f$ es una función integrable si y sólo si $|f| = f^+ + f^-$ es integrable. Además, para todo $E \in S$ $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$.*

*4. Si $f$ es integrable y $g$ es una función medible tal que $|g| \leq |f|$ entonces $g$ es una función integrable.*

*5. Si $f$ y $g$ son funciones $S$-medibles no negativas tales que $g \leq f$, entonces $0 \leq \int g d\mu \leq \int f d\mu$.*

## A.5. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

**Definición A.5.1.** 1. Definimos la medida exterior de Lebesgue para un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ como:

$$\lambda^*(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} (b_i - a_i) \ / \ A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i, b_i) \right\}$$

2. Los conjuntos Lebesgue medibles de $\mathbb{R}$ serán los conjutos $E$ tales que para todo $A \in \wp(\mathbb{R})$ se cumple la igualdad $\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E)$. $\mathcal{L}$ denotará el conjunto de los conjuntos Lebesgue medibles.

3. La medida de Lebesgue $\lambda$ se define como la restricción de la medida exterior de Lebesgue a los conjuntos Lebesgue medibles, es decir, $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}}$.

**Proposición A.5.2.** *1.* $\emptyset \in \mathcal{L}$ *y* $\lambda^*(\emptyset) = 0 = \lambda(\emptyset)$.

2. $\mathcal{L}$ *es una* $\sigma$*-álgebra.*

3. *Para todo* $A \in \wp(\mathbb{R})$, $\lambda^*(A) \geq 0$. *En consecuencia, para todo* $E \in \mathcal{L}$ $\lambda(E) \geq 0$.

4. *Si* $F \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$ *entonces* $\lambda^*(F) \leq \lambda^*(E)$.

5. *Si* $\{A_i\}_{i=0}^{\infty} \subseteq \wp(\mathbb{R})$ *entonces* $\lambda^*(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^*(A_i)$.

6. *Si* $\{E_i\}_{i=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}$ *es una sucesión de conjuntos ajenos entonces*

$$\lambda(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(E_i).$$

7. $\mathbb{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{L}$.

8. *Si* $E \subseteq \mathbb{R}$ *y* $\lambda^*(E) = 0$, *entonces* $E \in \mathcal{L}$. *En consecuencia, si* $E \in \mathcal{L}$ *y* $\lambda(E) = 0$ *entonces* $\wp(E) \subseteq \mathcal{L}$.

9. *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Si existe* $E \in \mathcal{L}$ *tal que* $\lambda^*((E \setminus A) \cup (A \setminus E)) = 0$ *entonces* $A \in \mathcal{L}$.

**Proposición A.5.3.** $\lambda$ *es una medida completa.*

**Definición A.5.4.** A las funciones $\mathcal{L}$-medibles les llamaremos funciones medibles. De igual forma, llamaremos conjuntos medibles a los conjuntos Lebesgue-medibles.

**Proposición A.5.5.** *Toda función continua de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *es medible.*

Para el caso de $\mathbb{R}^n$ se modifica $\lambda^*$ de modo que en vez de intervalos se usan cajas $\prod_{i=0}^{n}(a_i, b_i)$ y al momento de sumar, los sumandos serían de la forma $\prod_{i=0}^{n}(b_i - a_i)$. Todas las proposiciones también son válidas en este caso.

# Apéndice B

# Teoría de los conjuntos

En este apéndice mencionaremos los teoremas y definiciones básicas de la Teoría de Conjuntos, todas las pruebas se pueden encontrar en [3].

## B.1. Lenguaje

La Teoría de Conjuntos utiliza un lenguaje específico. En éste las variables $x, y, z, a, b, c, ...$ representan conjuntos, el símbolo $=$ representa la igualdad, los símbolos $\in, \neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ representan la pertenencia, la negación, "y", "o", "entonces" y "si y sólo si" respectivamente. Finalmente los cuantificadores $\forall, \exists$ significan "para todo" y "existe".

De esta manera, la fórmula:

$$\forall y \, \exists x \, \neg(x \in y),$$

se deletrea como "para todo $y$ existe un $x$ tal que $x$ no pertenece a $y$" y se lee como "ningún conjunto tiene como elementos a todos los conjuntos".

Como notación las fórmulas $\neg(x = y)$ y $\neg(x \in y)$ se reducirán a $x \neq y$ y $x \notin y$.

Fuera de nuestro lenguaje hablaremos de "clases". Las clases no necesariamente son un conjunto y las denotaremos con mayúsculas. Formalmente, una clase representa todos los conjuntos que cumplen una propiedad (fórmula) $\varphi$, es decir, $\{x \ / \ \varphi(x)\}$. Por ejemplo, la clase de todos los conjuntos la denotaremos por $V$ y representa a la fórmula $x = x$, de esta forma podemos decir que $V = \{x \ / \ x = x\}$. Si una clase no es un conjunto diremos que es una clase propia.

## B.2. Axiomas

Los siguientes son los axiomas que conforman la teoría de Zermelo-Fraenkel ($ZF^-$):

1. **Extensionalidad** $\forall x \forall y \forall z(((z \in x) \leftrightarrow (z \in y)) \rightarrow x = y)$. "Para que dos conjuntos sean iguales basta con que tengan los mismos elementos".

2. **Vacío** $\exists x \forall y\, (y \notin x)$. "Existe un conjunto sin elementos". Utilizando el Axioma de Extensionalidad se puede ver que este conjunto es único, y se denota como $\emptyset$, el conjunto vacío.

3. **Par** $\forall a \forall b \exists x \forall z\, ((z \in x) \leftrightarrow (z = a \vee z = b))$. "Para cualesquiera dos conjuntos existe otro cuyos únicos elementos son ellos". Utilizando el Axioma de Extensionalidad para todo $a, b$ se puede ver que este conjunto es único, y se denota como $\{a, b\}$, el par de $a$ y $b$. En caso de que $a = b$ el conjunto $\{a, a\}$ se denotará como $\{a\}$, el conjunto unitario de $a$. $\{a, b\}$ es también conocido como el par no ordenado de $a$ y $b$, definimos el par ordenado de $a$ y $b$ como $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

4. **Unión** $\forall a \exists x \forall z\, ((z \in x) \leftrightarrow (\exists w(z \in w \,\&\, w \in x)))$. "Para cualquier conjunto existe otro que tiene a los elementos de sus elementos". Utilizando el Axioma de Extensionalidad para todo $a$ se puede ver que este conjunto es único, y se denota como $\bigcup a$, la unión de $a$. Como convención $\bigcup\limits_{x \in a} x$, la unión de una cantidad arbitraria de conjuntos, denota a $\bigcup a$. Así $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} a_i = \bigcup \{a_i \ / \ i \in \mathbb{N}\}$.

5. **Potencia** $\forall a \exists x \forall z\, ((z \in x) \leftrightarrow (\forall w(w \in z \rightarrow w \in a)))$. "Para cualquier conjunto existe otro que tiene a todos sus subconjuntos como elementos". Utilizando el Axioma de Extensionalidad para todo $a$ se puede ver que este conjunto es único, y se denota como $\wp(a)$, la potencia de $a$. Como notación la fórmula $\forall w(w \in z \rightarrow w \in a)$ se reducirá a $z \subseteq a$.

6. **Esquema de Comprensión** Sea $\varphi$ una fórmula conjuntista. Entonces $\forall a \exists x \forall z\, ((z \in x) \leftrightarrow (z \in a \,\&\varphi(z)))$. "La colección de todos los elementos de un conjunto con una propiedad dada es un conjunto". Tomando una fórmula conjuntista fija, $\varphi$, y utilizando el Axioma de Extensionalidad se tiene que para todo $a$ el conjunto descrito en el axioma es único, y se denota como $\{x \in a \ / \ \varphi(x)\}$. Este axioma (junto con los anteriores) implica que la colección de todos los conjuntos no es un conjunto, es una clase.

7. **Infinito** $\exists x\, ((\emptyset \in x) \,\&\, (\forall w(w \in x \rightarrow w \cup \{w\} \in x)))$. "Existe un conjunto inductivo, es decir, un conjunto que tenga al vacío y sea cerrado bajo la operación sucesor[1]". Utilizando todos los axiomas anteriores se define el

[1] La operación sucesor $\_^{+}$ asocia a cada conjunto $x$ el conjunto $x \cup \{x\}$.

conjunto $\omega = \bigcap\{x \ / \ x \text{ es inductivo}\}$, donde si $A$ es una clase no vacía y $a \in A$ entonces $\bigcap A = \{x \in a \ / \ \forall y(y \in A \to x \in y)\}$. $\omega$ es el conjunto inductivo más pequeño y es el conjunto de los números naturales para los teórico conjuntistas.

8. **Esquema de Reemplazo** Diremos que una fórmula $\varphi$ con dos variables libres representa una funcional si y sólo si es una clase de parejas ordenadas que se comporta como una función, es decir,

$$(\forall x((\forall w\,\forall z(\varphi(x,z)\,\&\,\varphi(x,w)) \to (z = w))))\,\&\,(\forall a(\exists y(\varphi(a,y)))).$$

Sea $\varphi$ una fórmula que represente una funcional. El Axioma de Reemplazo para $\varphi$ dice: $\forall x\,\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (\exists w(w \in x\,\&\,\varphi(w,z))))$ "La imagen de un conjunto bajo una funcional es un conjunto". Utilizando el Axioma de Extensionalidad para todo $a$ se puede ver que este conjunto es único, y, si llamamos $F$ a la funcional, se denota como $F[a]$, la imagen de $a$ bajo $F$. Gracias a este axioma se puede demostrar que no hay funciones inyectivas de una clase a un conjunto[2].

## B.3. Ordinales

**Definición B.3.1.** 1. Un buen orden $x$ es un par ordenado $\langle a, r\rangle$ con $r \subseteq a \times a$,[3] tal que para todo $b \subseteq a$ no vacío existe $x_b \in b$ mismo que para todo $d \in b \setminus \{x_b\}$, $x_b\, r\, d$.[4]

2. $COBO = \{x \ / \ \exists a \exists r(x = \langle a, r\rangle \text{ es un buen orden})\}$ es la clase de los COnjuntos Bien Ordenados. $COBO$ es una clase propia.

3. Un conjunto $x$ es transitivo si y sólo si todo elemento de $x$ es un subconjunto de este mismo, es decir: $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$.

4. Un número ordinal es un conjunto transitivo que ordenado bajo la pertenencia es un buen orden, es decir, $\alpha$ es un ordinal si y sólo si

$$(\forall y(y \in \alpha \to y \subseteq \alpha))\,\&\,(\langle \alpha, \in\rangle \in COBO).$$

A partir de este momento utilizaremos las letras griegas $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\eta$, $\xi$ para representar ordinales. Algunos ejemplos son $\emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $n = \{0, 1, ..., n-1\} \in \omega$, $\omega$, $\omega \cup \{\omega\} = \omega^+$, etc.

**Proposición B.3.2.** *1.* $\forall \alpha(\alpha \notin \alpha)$.

[2]Esto sucede ya que toda funcional inyectiva tiene una funcional inversa, la inversa sería una funcional tal que la imagen de un conjunto es una clase. Este contradice el Esquema Axiomático de Reemplazo.

[3]Recordemos que $c \times d = \{\langle x, y\rangle \ / \ (x \in c)\ \&(y \in d)\}$.

[4]Recordemos que, cuando se piensa en relaciones, $a\, s\, b$ denota $\langle a, b\rangle \in s$.

2. *Si* $\alpha \in \beta$ *y* $\beta \in \gamma$ *entonces* $\alpha \in \gamma$.

3. *No es posible que* $\alpha \in \beta$ *y que* $\beta \in \alpha$.

4. $\forall\alpha\,\forall\beta(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$.

5. *Si* $\alpha$ *es un ordinal,* $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ *también es ordinal y es el sucesor inmediato de* $\alpha$.

Cuando no cree confusión, $\beta < \alpha$ significará $\beta \in \alpha$ y $\beta \leq \alpha$, $(\beta \in \alpha \vee \beta = \alpha)$.

**Proposición B.3.3.** 1. $\alpha \subseteq \beta$ *si y sólo si* $\alpha \leq \beta$.

2. $\alpha \subsetneq \beta$ *si y sólo si* $\alpha \in \beta$.

3. $\forall\alpha\,\forall\beta(\alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha)$.

4. *Si* $x \in \alpha$, $x$ *es un ordinal.*

5. $\alpha = \{\beta \ / \ \beta$ *es ordinal* $\&$ $\beta < \alpha\}$.

6. *Si* $x \subseteq \alpha$ *y* $x$ *es transitivo, entonces* $x$ *es ordinal.*

7. $\alpha \cap \beta$ *es un ordinal.*

**Teorema B.3.4** (Principio del Mínimo ordinal)**.** *Toda clase no vacía de ordinales tiene un elemento mínimo. Es decir, si* $C$ *es una clase no vacía de ordinales, entonces se cumple que* $\exists\alpha \in C\,\forall\beta \in C(\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta)$. *A saber, el mínimo es* $\bigcap C$.

Como notación, $OR$ será la clase de todos los ordinales

$$OR = \{x \ / \ x \text{ es ordinal}\}\,.$$

**Corolario B.3.5** (Paradoja de Burali-Forti)**.** *$OR$ es una clase propia.*

**Proposición B.3.6.** 1. *Para toda clase* $C \subseteq OR$, $\bigcap C \in OR$.

2. *Para todo conjunto* $a \subseteq OR$, $\bigcup a \in OR$.

3. $C \subseteq OR$ *es un conjunto si y sólo si es acotado, es decir, si existe* $\alpha$ *tal que para todo* $\beta \in C$, $\beta \leq \alpha$.

4. $C \subseteq OR$ *es una clase propia si y sólo si es no acotado.*

5. *Para toda clase* $\emptyset \neq C \subseteq OR$, $\bigcap C = \text{mín}_{\in} C = \text{ínf}_{\in} C$.[5]

[5] Recuérdese que el ínfimo es la máxima cota inferior, es decir, si tomamos a $r$ como una relación, $a$ es el ínfimo de los elementos de $C$ si y sólo si

$$((\forall b \in C(a\,r\,b \vee b = a))\,\&\,(\forall y(\forall d \in C(y\,r\,d \vee d = y)) \to (y\,r\,a \vee y = a))).$$

6. *Para todo conjunto* $a \subseteq OR$, $\bigcup a = \sup_{\in} a$.[6]

**Definición B.3.7.** 1. Un ordinal $\beta$ es sucesor si es de la forma $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha^+$ para algún $\alpha$.

2. Un ordinal es límite si y sólo si no es vacío y no es sucesor.

A la clase de los ordinales límites le llamaremos $LIM$.

**Proposición B.3.8.** *1. Para todo* $\beta$ *existe* $\alpha \in LIM$ *tal que* $\beta < \alpha$, *por tanto* $LIM$ *es una clase propia.*

2. $\forall\beta(\bigcup \beta^+ = \beta)$.

3. $\alpha$ *es un ordinal límite si y sólo si* $\alpha \neq \emptyset$ *y* $\bigcup \alpha = \alpha$

4. *Un ordinal es límite si y sólo si es inductivo, es decir, si tiene como elemento al vacío y es cerrado bajo la función sucesor.*

**Proposición B.3.9.** *Para todo ordinal* $\alpha$ *existe un único número natural* $n(\alpha)$ *y un único ordinal límite* $\ell(\alpha)$ *tal que* $\alpha = \ell(\alpha) + n(\alpha)$.[7] *A* $n(\alpha)$ *se le llama la parte finita de* $\alpha$ *y a* $\ell(\alpha)$ *su parte límite.*

**Teorema B.3.10** (Enumeración)**.** *Todo buen orden* $\langle a, r\rangle$ *es isomorfo a un único ordinal, es decir, para todo buen orden* $\langle a, r\rangle$ *existe un único ordinal* $\alpha$ *tal que existe una función biyectiva* $f : a \to \alpha$ *tal que para cualesquiera* $b, c \in a$, $b\, r\, c \leftrightarrow f(b) \in f(c)$.

## B.4. Inducción y recursión transfinita

**Teorema B.4.1** (Principio de Inducción en OR, I)**.** *Sea* $\varphi$ *una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos. Si se cumple que*

$$\forall\alpha \in OR((\forall\beta(\beta \in \alpha) \to \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha)$$

*entonces se tiene que*

$$\forall\gamma \in OR(\varphi(\gamma)).$$

*En otras palabras, si una fórmula tiene la propiedad de que para cualquier ordinal, si todos sus elementos la cumplen, entonces el ordinal también la cumple, resulta que es una fórmula válida para todo ordinal.*

---

[6] Recuérdese que el supremo es la mínima cota superior, es decir, si tomamos a $r$ como una relación, $a$ es el supremo de los elementos de $C$ si y sólo si

$$((\forall b \in C(b\, r\, a \vee b = a)) \,\&\, (\forall y(\forall d \in C(d\, r\, y \vee d = y)) \to (a\, r\, y \vee y = a))).$$

[7] Sumar un natural $m$ por la derecha a un ordinal $\beta$ es lo mismo que utilizar $m$-veces la función sucesor sobre $\beta$.

Una generalización de este teorema es válida para cualquier clase $A$ que tenga una relacional asociada $R$ que la bien funde, es decir, es válido para toda clase $A$ y toda funcional $R$ tal que para cada clase no vacía $B \subseteq A$ existe $x \in B$ tal que $\forall y(y \in B \to \neg(yRx))$. Esta generalización permite utilizar esta primera forma de inducción no sólo en $OR$, sino que también en los mismos ordinales o en algunas secciones del universo conjuntista.

**Teorema B.4.2** (Principio de Inducción en OR, II). *Sea $\varphi$ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos. Si se cumple que:*

1. $\varphi(\emptyset)$ .
2. $\forall \alpha(\varphi(\alpha) \to \varphi(\alpha^+))$.
3. $\forall \gamma(((\gamma \in LIM) \,\&\, (\forall \xi(\xi \in \gamma \to \varphi(\xi)))) \to \varphi(\gamma))$

*entonces se tiene que* $\forall \beta \in OR(\varphi(\beta))$.

**Teorema B.4.3** (Recursión Transfinita para OR, I). *Sea $G$ una funcional con dominio el universo, entonces existe una única funcional $F$ tal que:*

1. *El dominio de $F$ es la clase $OR$.*
2. $\forall \alpha(F(\alpha) = G(F|_\alpha))$.[8]

Para este teorema también existe una generalización válida para cualquier clase $A$ que tenga una relacional asociada $R$ que la bien funde. Gracias a esta generalización tendremos la libertad de definir recursivamente hasta cierto ordinal o en otras clases de conjuntos.

**Teorema B.4.4** (Recursión Transfinita para OR, II). *Sean $G$ y $H$ funcionales con dominio el universo y $a$ un conjunto cualquiera, entonces existe una única funcional $F$ tal que:*

1. $dom(F) = OR$.
2. $F(0) = a$.
3. $F(\alpha^+) = G(F(\alpha))$.
4. *Para todo* $\gamma \in LIM$, $F(\gamma) = H(F|_\gamma)$.

**Teorema B.4.5** (Recursión Transfinita para OR, III). *Sean $G$ y $H$ funcionales con dominio el universo y $a$ un conjunto cualquiera, entonces existe una única funcional $F$ tal que:*

1. $dom(F) = OR$.

[8] Es importante recordar que $F|_\alpha$ denota a la funcional $F$ restringida a $\alpha$, por lo que es una función y, utilizamos el Esquema Axiomático de Reemplazo, un conjunto.

2. *$F(0) = a$.*
3. *$F(\alpha^+) = G(F(\alpha))$.*
4. *Para todo $\gamma \in LIM$, $F(\gamma) = H(F[\gamma])$.*

**Teorema B.4.6** (Recursión Transfinita para OR, IV)**.** *Sea $G$ una funcional con dominio el universo, entonces existe una única funcional $F$ tal que:*

1. *El dominio de $F$ es la clase OR.*
2. *$\forall\alpha(F(\alpha) = G(F[\alpha]))$.*

## B.5. Ordinales iniciales y cardinales

**Definición B.5.1.**

1. Una función $f : a \to b$ es inyectiva si y sólo si para todo $x, y \in a$ tales que $x \neq y$ se tiene que $f(x) \neq f(y)$. Si existe una inyección (función inyectiva) de $a$ a $b$ diremos que $a$ es inyectable en $b$.
2. Una función $f : a \to b$ es suprayectiva si y sólo si para todo $z \in b$ existe $x \in a$ tal que $f(x) = z$.
3. Una función $f : a \to b$ es biyectiva si y sólo si $f$ es inyectiva y suprayectiva. Si existe una función biyectiva entre $a$ y $b$ diremos que $a$ y $b$ son biyectables.
4. $a \preceq b$ denotará el hecho de que $a$ sea inyectable en $b$.
5. $a \prec b$ denotará el hecho de que $a$ sea inyectable en $b$, mas que no son biyectables.
6. En caso de que $a$ y $b$ sean biyectables diremos que son equipotentes y lo denotaremos por $|a| = |b|$.

**Proposición B.5.2.** *Sean $a$, $b$ y $c$ conjuntos:*

1. *Si $a \preceq b$ y $b \preceq c$ entonces $a \preceq c$.*
2. *Si $a$ es biyectable con $b$ y $b$ es biyectable con $c$ entonces $a$ es biyectable con $c$.*

**Teorema B.5.3** (Cantor)**.** *Para todo conjunto $a$ se tiene que $a$ es inyetable en $\wp(a)$ pero no es biyectable, es decir, $a \prec \wp(a)$.*

**Teorema B.5.4** (Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *Si se tiene que $a$ y $b$ son conjuntos tales que $a$ es inyectable en $b$ y $b$ es inyectable en $a$, entonces $a$ y $b$ son biyectables.*

**Teorema B.5.5** (Sandwich)**.** *Sean $a$, $b$ y $c$ conjuntos tales que $a$ y $c$ son biyectables y tales que $a$ es inyectable en $b$ y $b$ es inyectable en $c$. Entonces tenemos que los tres son biyectables.*

**Corolario B.5.6.** *Si tenemos que $a \prec b$ y que $b \prec c$ entonces obtenemos que $a \prec c$.*

**Definición B.5.7.**

1. $\alpha$ es un ordinal inicial si y sólo si no es biyectable con ninguno ordinal de sus predecesores (elementos).
2. Si $a$ es un conjunto, el Hartog de $a$, $H(a)$, se define como el mínimo ordinal que no es inyectable en $a$. En otras palabras, $H(a) = \bigcap\{\gamma \ / \ \neg(\gamma \preceq a)\}$.

**Proposición B.5.8.**

1. *Para todo $a$, $H(a)$, su Hartog, es un conjunto.*
2. *Para todo $a$, $H(a)$ es un ordinal inicial.*
3. *Si $b \subseteq OR$ es un conjunto de ordinales iniciales, entonces $\bigcup b$ es un ordinal inicial.*

**Definición B.5.9.** Por medio de la tercera versión de recursión ordinal definimos la funcional $\aleph$ como:

1. $\aleph(0) = \omega$.
2. $\aleph(\alpha^+) = H(\aleph(\alpha))$.
3. Si $\gamma \in LIM$, $H(\gamma) = \bigcup\limits_{\xi\in\gamma} \aleph(\xi)$.

Como notación $\aleph_\alpha$ denotará a $\aleph(\alpha)$.

**Teorema B.5.10.** *$\beta \geq \omega$ es ordinal inicial si y sólo si existe $\alpha$ tal que $\beta = \aleph_\alpha$.*

**Definición B.5.11.**

1. Diremos que $\alpha$ es un cardinal si y sólo si es un ordinal inicial.
2. Diremos que $\alpha$ es un cardinal infinito si y sólo si es un ordinal inicial mayor o igual que $\omega$.
3. $car = \{\alpha \ / \ \alpha$ es ordinal inicial$\}$.
4. $CAR = \{\alpha \ / \ \alpha \geq \omega$ es ordinal inicial$\} = \aleph[OR]$.

En lo que sigue las letras griegas $\lambda$, $\kappa$ y $\mu$ denotarán cardinales. En estos casos, y a menos que se indique lo contrario, denotaremos por $\lambda^+$ al sucesor cardinal de lambda, es decir, $\lambda^+ = H(\lambda)$. Con esta notación tenemos que $\aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha^+}$ donde el primer signo de sucesor indica el sucesor cardinal de $\aleph_\alpha$ y el segundo el sucesor ordinal de $\alpha$.

De igual forma, cuando hablemos de $\aleph_\alpha$ como un ordinal (o nos refiramos a su tipo de orden) utilizaremos la notación $\omega_\alpha$. Por ejemplo, $\aleph_1$ es el primer tamaño (cardinal) no numerable, mientras que $\omega_1$ es el primer buen orden no numerable, y, por tanto, todos los buenos órdenes numerables están en él. Notemos que todo elemento de $\omega_\alpha$ no es biyectable con $\omega_\alpha$.

**Definición B.5.12.** 1. Diremos que un cardinal $\kappa$ es sucesor si y sólo si existe $\lambda$ tal que $\lambda^+ = H(\lambda) = \kappa$.

2. Un cardinal $\mu$ es límite si y sólo si no es cero y no es sucesor. Notemos que $\aleph[LIM \cup \{0\}]$ es la clase de todos los cardinales límite.

## B.6. Operaciones cardinales

**Definición B.6.1.** 1. $a$ es un conjunto bien ordenable si y sólo si existe $r \subseteq a \times a$ tal que $\langle a, r\rangle \in COBO$.

2. $BO = \{a \ / \ a$ es bien ordenable$\}$.

3. Si $a \in BO$ definimos $|a| = \text{mín}\,\{\alpha \ / \ a \preceq \alpha\}$.

4. Si $\kappa, \lambda$ son cardinales definimos $\kappa + \lambda = |(a \times \{0\}) \cup (b \times \{1\})|$ donde $a$ es biyectable con $\kappa$ y $b$ con $\lambda$.

5. Con las mismas consideraciones que el inciso anterior, $\kappa \cdot \lambda = |a \times b|$.

6. ${}^b a = \{f : b \to a\}$.

7. Utilizando el Axioma de Elección definimos $\kappa^\lambda = |\,{}^\lambda\kappa|$.[9]

8. Definimos $\mathcal{X}_{i\in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \ / \ \forall i \in I(f(i) \in A_i) \right\}$ con $I \in V$. Dado el caso de que para toda $i \in I$, $A_i \in V$ tenemos que $\mathcal{X}_{i\in I} A_i \in V$.

   En lo que sigue, $I$ será un conjunto.

9. Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ tales que $\lambda_i = |A_i|$ entonces, utilizando el Axioma de Elección, definimos $\sum_{i\in I} \kappa_i = |\bigcup_{i\in I}(A_i \times \{i\})|$.

10. Con las mismas consideraciones que en el inciso anterior, y suponiendo el Axioma de Elección, definimos $\prod_{i\in I} \lambda_i = |\mathcal{X}_{i\in I} A_i|$.

**Proposición B.6.2.** *1. Si $a \in BO$ entonces $|a|$ existe y es un ordinal inicial, es decir, $|a| \in car$.*

*2. Si $a \in BO$ es infinito (i.e., no es biyectable con ningún natural) entonces $|a| \in CAR$.*

*3. Si $a, b \in BO$ entonces $|a| = |b|$ si y sólo si $a$ es biyectable con $b$.*

*4. Si $a, b \in BO$ y $a \prec b$ entonces $|a| < |b|$. De igual forma, si $a \preceq b$ entonces $|a| \leq |b|$.*

[9] Utilizamos el Axioma de Elección ya que, como se demuestra en 3.1.2, este axioma es equivalente a que $BO = V$.

5. *Si* $a \in BO$, $||a|| = |a|$.

6. *Si* $\alpha$ *es ordinal tenemos que* $|\alpha| \leq \alpha$.

7. *Si* $\kappa$ *es cardinal, entonces* $|\kappa| = \kappa$.

Notemos que, utilizando la proposición anterior, el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein dice: "Si $a, b \in BO$, $|a| \leq |b|$ y $|b| \leq |a|$ entonces $|a| = |b|$". De igual forma, el teorema del Sandwich se puede escribir de la siguiente forma: "Si $a, b, c \in BO$, $|a| = |c|$ y $|a| \leq |b| \leq |c|$ entonces $|a| = |b| = |c|$".

**Proposición B.6.3.** 1. *Las operaciones* $+$ *y* $\cdot$ *están bien definidas, es decir, el resultado no depende del representante.*

2. *Con el AE, las operaciones* $\sum$ *y* $\prod$ *están bien definidas.*

3. *Si* $\kappa, \lambda$ *son finitos, entonces* $\kappa + \lambda$, $\kappa \cdot \lambda$ *y* $\kappa^\lambda$ *son iguales a las operaciones entre números naturales usuales.*[10]

4. *Si* $\kappa, \lambda \in CAR$ *entonces* $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

5. *Supongamos el AE.* $|\wp(a)| = 2^{|a|}$. *Utilizando el teorema de Cantor (teorema B.5.3) tenemos que* $|a| < 2^{|a|}$.

6. *Supongamos el AE.* $|{}^b a| = |a|^{|b|}$.

7. *Supongamos el AE. Si* $\kappa \geq \aleph_0$ *y* $2 \leq \lambda \leq \kappa$ *entonces*

$$\kappa < \kappa^+ \leq 2^\kappa = \kappa^\kappa = (\kappa^+)^\kappa.$$

8. *Supongamos el AE. Si* $\lambda \leq \kappa$ *entonces* $2^\lambda \leq 2^\kappa$ *y si* $\mu$ *es un cardinal,* $\lambda^\mu \leq \kappa^\mu$.

9. *Supongamos el AE. Si tenemos dos sucesiones* $\{\lambda_i\}_{i\in I}$, $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ *tales que* $\kappa_i \leq \lambda_i$ *entonces* $\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \lambda_i$.

10. *Supongamos el AE. Si tenemos dos sucesiones* $\{\lambda_i\}_{i\in I}$, $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ *tales que* $\kappa_i \leq \lambda_i$ *entonces* $\prod_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \lambda_i$.

**Teorema B.6.4.** *Asumiendo AE.* $\sum_{i\in I} \kappa_i = (\sup\{\kappa_i \ / \ i \in I\}) \cdot |I|$.

**Teorema B.6.5** (Köning)**.** *Asumiendo AE. Si tenemos dos sucesiones* $\{\lambda_i\}_{i\in I}$, $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ *tales que* $\kappa_i < \lambda_i$ *entonces* $\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$.

[10]En el caso de los naturales, todas las operaciones están bien definidas sin el AE.

## B.7. Árboles

En lo que sigue, si $\langle a, r\rangle$ es un buen orden, su tipo, $\tau(\langle a, r\rangle)$, es el ordinal descrito en el Teorema de Enumeración, es decir, el teorema B.3.10.

**Definición B.7.1.** 1. Un orden parcial reflexivo $x$ es un par ordenado $\langle a, r\rangle$ con $r \subseteq a \times a$ tal que:

*a)* $\forall y \in a(y\, r\, y)$.

*b)* $\forall y \in a \forall z \in a(((y\, r\, z) \,\&\, (z\, r\, y)) \rightarrow y = z)$.

*c)* $\forall y \in a \forall z \in a \forall w \in a(((y\, r\, z) \,\&\, (z\, r\, w)) \rightarrow (y\, r\, w))$.

Generalmente, este tipo de órdenes utilizarán la relación $\leq$.

2. Un orden parcial irreflexivo $x$ es un par ordenado $\langle a, r\rangle$ con $r \subseteq a \times a$ tal que:

   *a)* $\forall y \in a \neg(y\, r\, y)$.

   *b)* $\forall y \in a \forall z \in a(((y\, r\, z) \rightarrow \neg(z\, r\, y))$.

   *c)* $\forall y \in a \forall z \in a \forall w \in a(((y\, r\, z) \,\&\, (z\, r\, w)) \rightarrow (y\, r\, w))$.

   Generalmente, este tipo de órdenes utilizarán la relación $<$.

3. Un orden parcial $x$ es un orden parcial que sea reflexivo o irreflexivo. Es importante notar que en todo orden reflexivo que utilice la relación $\leq$ se puede definir $<$ como $y < z \leftrightarrow (y \leq z \,\&\, y \neq z)$. De igual forma, a partir de $<$ se puede definir $\leq$ como $y \leq z \leftrightarrow (y < z \vee y = z)$.

4. $COPO = \{x \;/\; x \text{ es un orden parcial}\}$ es la clase de los COnjuntos Parcialmente Ordenados.

5. Si $\langle a, r\rangle \in COPO$ y $y \in a$ definimos el segmento inicial de $y$ como

$$y_r = \{z \;/\; z \neq y \,\&\, (z\, r\, y)\}\,.$$

   Por ejemplo, en un ordinal $\alpha$, si $\beta \in \alpha$ se tiene que $\beta_< = \beta$.

6. Si $\langle a, r\rangle \in COPO$ decimos que $c \subseteq a$ es una cadena si y sólo si

$$\forall x \in c \forall y \in c((x\, r\, y) \vee (x = y) \vee (y\, r\, x)),$$

   es decir, si todos sus elementos son comparables.

De ahora en adelante nos permitiremos escribir al conjunto subyacente al orden parcial como el orden parcial mismo, es decir, nos permitiremos escribir $a = \langle a, r\rangle$. También es importante notar que todo conjunto bien ordenado está parcialmente ordenado, es decir, $COBO \subseteq COPO$.

Las siguientes definiciones se tomaron de [9].

**Definición B.7.2.** 1. $T = \langle T, < \rangle$ es un árbol si y sólo si para todo $x \in T$, $\langle x_<, < \rangle$,[11] es un buen orden.

2. Para cada $x \in T$ definimos $o(x) = \tau(\langle x_<, < \rangle)$, es decir, como el tipo de orden de su segmento inicial. Es importante notar que $o(x) \in OR$.

3. El $\alpha$-ésimo nivel de $T$, $T_\alpha$, es el conjunto de todos los $x \in T$ tales que su segmento inicial con el orden $<$ es isomorfo a $\alpha$. Es decir

$$T_\alpha = \{x \in T \ / \ o(x) = \alpha\}.$$

4. La altura $h(T)$ de un árbol $T$ es el mínimo $\alpha$ tal que $T_\alpha = \emptyset$. Equivalentemente, se puede mostrar que $h(T) = \sup\limits_{x \in T} o(x)^+$.

5. Si $T = \langle T, < \rangle$ es un árbol, una rama es una cadena maximal respecto a $<$. Es decir, $R \subseteq T$ es una rama si y sólo si $R$ es una cadena y para toda cadena $C$ tal que $R \subseteq C$ se tiene que $R = C$.

6. Al igual que la altura de un árbol, la altura de una rama $R$, $h(R)$, es el mínimo nivel del árbol en el cual la rama no tiene elementos, es decir, el mínimo $\alpha$ tal que $T_\alpha \cap R = \emptyset$. Equivalentemente, se puede mostrar que $h(R) = \sup\limits_{x \in R} o(x)^+$. Es fácil notar que la pareja $\langle R, < \rangle$ es un buen orden, y que $\tau(\langle R, < \rangle) = h(R)$.

7. Se dice que una rama $R$ es cofinal si y sólo si $h(R) = h(T)$, es decir, si la rama recorre todos los niveles de un árbol.

8. Si $T$ es un árbol y $x \in T$, definimos los sucesores de $x$ como

$$succ(x) = \{y \ / \ x < y\}.$$

Notemos que para todo $y \in succ(x)$, $o(x) < o(y)$.

9. Si $T$ es un árbol y $x \in T$, los sucesores inmediatos de $x$ son los elementos de $succ(x) \cap T_{o(x)^+}$.

Es importante mencionar que es posible definir un árbol definiendo sus niveles y las relaciones entre ellos.

[11] Esto es un abuso de notación, lo correcto es escribir, $\langle x_<, < |_{x_<} \rangle$ donde $< |_{x_<} = < \cap (x_< \times x_<)$, es decir, hacer notar que estamos restringiendo la relación a $x_<$. Sin embargo, nos permitiremos el abuso.

# Bibliografía


[1] Ana Álvarez Velasco, "Axioma de Elección y Teoría de la Medida", Tesis de Licenciatura, UNAM, 2003

[2] Ana Álvarez Velasco, *El problema del Continuo antes de Cohen (1873-1963)*, Aportaciones Matemáticas, Memorias 35, (2005), pp. 61-69.

[3] José Alfredo Amor Montaño, Gabriela Campero Arena y Favio Ezequiel Miranda Perea. "Teoría de los Conjuntos, Curso intermedio", Las Prensas de Ciencias, 2011.

[4] Mónica Clapp, "Introducción al Análisis Real", Notas del curso impartido en la Facultad de Ciencias de la UNAM, 2008-2009.

[5] Frank R. Drake, "Set Theory; An Introduction to Large Cardinals", North-Holland, 1974.

[6] Guillermo Grabinsky. *Teoría de la medida.* Las prensas de ciencias. 2009.

[7] Paul R. Halmos, "Measure Theory", Springer-Verlag, 1974.

[8] Horst Herrlich, "Axiom of Choice", Springer, 2006.

[9] Thomas Jech, "Set Theory, The Third Millenium Edition, revised and expanded", Springer, 2002.

[10] Akihira Kanamori, Robert M. Solovay y William N. Reinhardt, *Strong Axioms of Infinity and Elementary Embeddings*, Annals of Mathematical Logic 13, (1978), pp. 73-116.

[11] A.B. Kharazishvili, "Nonmeasurable Sets and Functions", North-Holland Mathematic Studies, Elsevier, 2004.

[12] Juan José Montellano Ballesteros, "Teoría de la Medida, Axioma de Elección vs Axioma de Determinación", Tesis de Licenciatura, UNAM, 1991.

[13] Carlos Prieto, "Topología Básica", Fondo de Cultura Económica, 2003.