



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El modelo de Nambu y su relación con la  
Electrodinámica en la norma  $A_\mu A^\mu = -\lambda^2$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Omar Jesús Franca Santiago



DIRECTOR DE TESIS:  
Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos

13 de febrero de 2012



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de Datos del Jurado

### 1. Datos del alumno

Franca

Santiago

Omar

Jesús

56 56 17 89

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

304053825

### 2. Datos del tutor

Dr.

Luis

Fernando

Urrutia

Ríos

### 3. Datos del sinodal 1

Dr.

Rodolfo

Patricio

Martínez

y Romero

### 4. Datos del sinodal 2

Dr.

Eduardo

Nahmad

Achar

### 5. Datos del sinodal 3

Dra.

Myriam

Mondragón

Ceballos

### 6. Datos del sinodal 4

Dra.

Gabriela

Murguía

Romero

### 7. Datos del trabajo escrito

El modelo de Nambu y su relación con la Electrodinámica en la norma  $A_\mu A^\mu = -\lambda^2$

85p

2012

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Simetría de Lorentz, Simetría CPT y Teorema CPT . . . . .	5
1.2. Posible violación de la invariancia de Lorentz . . . . .	6
<b>2. Electrodinámica Estándar (ED)</b>	<b>9</b>
2.1. Potenciales Vectorial y Escalar . . . . .	10
2.2. Las Transformaciones de Norma . . . . .	11
2.2.1. La Norma de Lorentz . . . . .	11
2.2.2. La Norma de Coulomb . . . . .	12
2.3. Movimiento de una partícula cargada en campos electromagnéticos externos . . . . .	15
<b>3. Formulación covariante de la Electrodinámica</b>	<b>18</b>
3.1. Cuadriectores y transformaciones de Lorentz . . . . .	18
3.2. Forma tensorial de las ecuaciones de Maxwell . . . . .	23
3.3. El Principio de Mínima Acción para la Electrodinámica Estándar . . . . .	26
3.3.1. La Invariancia de Norma en la formulación cuatridimensional . . . . .	28
<b>4. El modelo de Nambu y su relación con la electrodinámica estándar</b>	<b>30</b>
4.1. El Modelo de Nambu . . . . .	30
4.2. La ED en la Norma no lineal $A_\mu A^\mu = -\lambda^2$ . . . . .	32
4.2.1. El campo Coulombiano . . . . .	33
4.2.2. El campo magnético producido por un alambre infinito . . . . .	34
4.2.3. El campo magnético constante . . . . .	35
4.2.4. El campo eléctrico constante . . . . .	37
<b>5. La norma no lineal <math>A'_\mu A'^\mu = -\lambda^2</math> y la formulación de Hamilton-Jacobi</b>	<b>39</b>
5.1. La ecuación de Hamilton-Jacobi . . . . .	40
5.2. Ecuaciones de movimiento y el papel de los extremos fijos en la acción . . . . .	44
5.3. La partícula libre . . . . .	47
5.3.1. La acción calculada a partir de las ecuaciones de movimiento . . . . .	47
5.3.2. La acción calculada a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi . . . . .	47
5.3.3. La relación entre ambos métodos . . . . .	48

5.3.4. Las variables canónicas conjugadas en el método de Hamilton-Jacobi	49
<b>6. Aplicación de la ecuación de Hamilton-Jacobi para pasar a la norma</b>	
$A'_\mu A'^\mu = -\lambda^2$	<b>50</b>
6.1. La carga en presencia del campo Coulombiano . . . . .	54
6.1.1. Cálculo de la acción usando las cantidades conservadas . . . . .	54
6.1.2. Cálculo de la acción resolviendo directamente la ecuación de Hamilton-Jacobi . . . . .	56
6.2. Partícula en un campo magnético constante . . . . .	57
6.2.1. Cálculo de la acción mediante integración directa de las ecuaciones de movimiento . . . . .	57
6.2.2. Cálculo de la acción resolviendo directamente la ecuación de Hamilton-Jacobi en la Norma de Landau ( $\mathbf{A} = Bx\hat{\mathbf{j}}$ ) . . . . .	60
6.2.3. Cálculo de la acción resolviendo directamente la ecuación de Hamilton-Jacobi en la Norma estándar ( $\mathbf{A} = -\frac{B}{2}y\hat{\mathbf{i}} + \frac{B}{2}x\hat{\mathbf{j}}$ ) . . . . .	62
6.3. La carga en un campo eléctrico constante . . . . .	63
6.3.1. Cálculo de la acción mediante integración directa de las ecuaciones de movimiento . . . . .	63
6.3.2. Cálculo de la acción resolviendo directamente la ecuación de Hamilton-Jacobi . . . . .	65
6.3.3. Cálculo de la acción usando cantidades conservadas . . . . .	66
6.3.4. Relación entre las acciones obtenidas en las subsecciones 6.3.1 y 6.3.2 (6.3.3) . . . . .	67
6.4. La carga en el campo magnético de un alambre infinito . . . . .	71
6.4.1. Cálculo de la acción resolviendo directamente la ecuación de Hamilton-Jacobi . . . . .	71
<b>7. Límites no-relativistas y comparación de resultados</b>	<b>73</b>
7.1. El campo Coulombiano . . . . .	73
7.2. El campo magnético constante . . . . .	75
7.3. El campo eléctrico constante . . . . .	77
7.4. El campo magnético producido por un alambre infinito . . . . .	78
<b>8. Resumen y conclusiones</b>	<b>81</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La palabra simetría que proviene del griego *συμμετρία* (*σύν* “con”, “unión” y *μετρώ* “medida”) etimológicamente significa *unión harmónica de medidas* y describe en forma compacta el concepto físico que lleva el mismo nombre. Dentro de la Física, se dice que un sistema físico tiene una simetría siempre que exista una transformación tal que el sistema transformado sea indistinguible del original. Un ejemplo de esto, es la simetría rotacional que presenta una esfera homogénea y lisa; ya que al rotarla por un ángulo arbitrario no observamos ningún cambio. La existencia de una simetría es una de las propiedades generales más importantes que nos permite comprender mejor el comportamiento de los sistemas físicos.

A lo largo del último siglo, se ha demostrado experimentalmente que muchas de las simetrías consideradas fundamentales en realidad se rompen dependiendo del tipo de interacciones que se considere. Por ejemplo, paridad se conserva en la interacción electromagnética, pero se viola en la interacción débil. Sin embargo, otras simetrías como invariancia bajo traslaciones espaciales y temporales, invariancia bajo transformaciones de Lorentz, e invariancia bajo CPT se han supuesto válidas en todas las teorías que describen las interacciones fundamentales.

### 1.1. Simetría de Lorentz, Simetría CPT y Teorema CPT

Para explicar qué es la simetría de Lorentz, describimos brevemente qué son las transformaciones de Lorentz, aunque esto se estudiará detalladamente en el capítulo 3 de esta tesis.

Las transformaciones de Lorentz se dividen en dos tipos: rotaciones y “boosts”.

- Hay tres posibles tipos de rotaciones independientes, que pueden visualizarse como las rotaciones en torno a cada eje coordenado de un sistema cartesiano inercial.

- Un “boost” es un cambio en la velocidad. También hay tres tipos independientes de “boost”, uno a lo largo de cada eje del sistema cartesiano inercial.

Ahora bien, se dice que un sistema físico tiene simetría de Lorentz si respeta el postulado de la Relatividad Especial[1]: *Las leyes de la Física son invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Y los resultados de cualquier experimento físico son los mismos cuando son realizados con las mismas condiciones iniciales relativas a cualquier sistema de coordenadas inercial.*

De manera análoga, para dar una idea de qué es la simetría CPT, necesitamos saber qué es una transformación CPT.

La transformación CPT está formada por la combinación de tres transformaciones: conjugación de la carga  $\hat{C}$ , inversión de la paridad  $\hat{P}$ , y la inversión temporal  $\hat{T}$ .

- $\hat{C}$  convierte una partícula en su antipartícula.
- $\hat{P}$  cambia de signo de todas las coordenadas espaciales.
- $\hat{T}$  cambia la dirección del flujo de tiempo.

De igual forma, decimos que un sistema presenta la simetría CPT si la física que lo describe queda inalterada por una transformación combinada  $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$ .

Los experimentos muestran con alta precisión que las interacciones fundamentales en la naturaleza preservan ambas simetrías. El teorema CPT es un resultado general teórico que vincula las dos simetrías. Y establece lo siguiente[2]: *Cualquier teoría cuántica de campo que pueda ser descrita por un Lagrangiano  $\hat{\mathcal{L}}(x)$  hermitiano y Lorentz invariante, cuyos operadores de campo satisfacen el teorema de espín-estadística, entonces se cumple relación se mantiene cierta*

$$\hat{\theta}\hat{\mathcal{L}}(x)\hat{\theta}^{-1} = \hat{\mathcal{L}}(-x) , \quad (1.1)$$

donde  $\hat{\theta} = \hat{C}\hat{P}\hat{T}$ , además notamos que el orden de  $\hat{C}$ ,  $\hat{P}$  y  $\hat{T}$  no es importante. Esto implica que la acción, el Hamiltoniano, las ecuaciones de campo y las relaciones de conmutación canónicas también son invariantes bajo la transformación  $\hat{\theta}$ . Una de las consecuencias de este teorema es que ciertas propiedades de las partículas y sus respectivas antipartículas son idénticas como la masa, la vida media, la magnitud de la carga y el momento magnético.

## 1.2. Posible violación de la invariancia de Lorentz

Dado que la Física es una ciencia experimental, la validez de la invariancia de Lorentz debe estar sujeta a verificaciones experimentales y/o observacionales. Por otro lado, la

posible violación de la invariancia de Lorentz ha recibido recientemente mucha atención, tanto del punto de vista experimental como del teórico, motivada principalmente por la conexión con los posibles efectos surgidos de las drásticas modificaciones del espacio-tiempo a distancias del orden de la longitud de Planck, sugeridas por las aproximaciones más comunes de la gravedad cuántica. Aún cuando las observaciones experimentales y astrofísicas existentes ponen severos límites sobre los parámetros que describen dichas violaciones [3], el desarrollo de experimentos con mayor precisión continúa. Por otro lado, la observación de la violación de la invariancia de Lorentz o de la simetría CPT podría ser una señal de nueva física no convencional, que tendría grandes repercusiones en la concepción de la física contemporánea. Con el objeto de correlacionar las cotas experimentales existentes sobre los parámetros de violación, es necesario tanto considerar posibles mecanismos teóricos a través de los cuales dichas simetrías puedan ser violadas como construir modelos que incorporen dichos parámetros.

La motivación de esta tesis se enmarca en el estudio la ruptura espontánea de la simetría de Lorentz.

Normalmente, el hecho de que los fotones y los gravitones tengan masa cero se explica al invocar algún tipo de invariancia de norma. Aunque esté principio indudablemente ha sido fundamental para el desarrollo de la Física, es bastante interesante explorar la posibilidad de que esto tenga un origen dinámico[4]. Una posible explicación en esta dirección se basa en el estudio de la violación espontánea de la simetría de Lorentz motiva la posibilidad de que ambas partículas pueden surgir como los bosones de Nambu-Goldstone correspondientes a dicha ruptura. Esta idea data de los trabajos de Nambu[5] y Bjorken[6] junto con muchas otras contribuciones[7]. Recientemente, ha sido revivida en varios artículos[8, 9, 10, 11, 12].

En esta tesis, no se estudiará el mecanismo de ruptura espontánea de esta simetría solo se describirá brevemente a continuación. Uno de los modelos más estudiados comienza a partir de una teoría con un campo vectorial  $B^\mu$  dotado del término cinético estándar de la electrodinámica más un potencial diseñado para lograr la ruptura de la simetría de Lorentz vía un valor esperado en el vacío  $\langle B^\mu \rangle$  distinto de cero, que define una dirección preferida en el espacio-tiempo. Este potencial también rompe la invariancia de norma. Estos modelos se conocen como *modelos abejorro*[13]. La subsecuente ruptura de la simetría inducida por el mínimo del potencial distinto de cero parte los cuatro grados de libertad originales en  $B^\mu$  en tres bosones vectoriales de Nambu-Goldstone  $A^\mu$ , satisfaciendo la constricción  $A_\mu A^\mu = \pm\lambda^2$  que puede ser identificado con el fotón, más un campo escalar masivo  $\sigma$ , el cual es excitado a energías muy altas. A bajas energías, cuando el campo  $\sigma$  no está excitado, uno básicamente recupera el Lagrangiano para la electrodinámica en el vacío más la constricción no lineal mencionada arriba, la cual es interpretada como una condición que fija la norma. (Otras aproximaciones agregan una constricción más  $\partial_\mu A^\mu$  para garantizar desde el inicio la existencia de los dos grados de libertad del fotón[11]).



Es interesante destacar aquí que la restricción  $A_\mu A^\mu = \pm\lambda^2$  fue originalmente propuesta por Dirac como una forma de derivar la corriente electromagnética a partir de las excitaciones adicionales del campo de fotones, las cuales ahora dejan de ser los grados de libertad de norma, evitando de esta forma los problemas surgidos al considerar partículas puntuales[14, 15].

El punto de partida del trabajo original desarrollado en esta tesis es el modelo de Nambu, definido por su densidad Lagrangiana más la restricción no-lineal  $A_\mu A^\mu = \pm\lambda^2$ . El objetivo del trabajo es estudiar, en la formulación clásica, bajo qué condiciones dicho modelo es equivalente a la electrodinámica estándar en la norma no-lineal  $A_\mu A^\mu = \pm\lambda^2$ . Dicha no-linearidad impide un tratamiento general del problema por lo que se estudiarán casos especiales solubles, en los cuales se mostrará como construir la transformación de norma que nos lleva de una norma conocida a la norma no lineal mencionada arriba.

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se estudiará la formulación de la Electrodinámica estándar en términos de los potenciales electromagnéticos y enfatizando en el problema de las transformaciones de norma. Además de revisar la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana del movimiento de una partícula bajo la influencia de un campo electromagnético. En el Capítulo 3 se estudia la formulación covariante de la Electrodinámica estándar y se deducen las ecuaciones de Maxwell en forma tensorial a partir del Principio Mínima Acción además de revisar las transformaciones de norma en esta misma formulación. En el Capítulo 4 se estudia el Modelo de Nambu en la formulación clásica a partir de su definición sin discutir su origen. Se enfatiza en mostrar la existencia de la transformación de norma de una norma conocida a la norma no lineal sólo para el caso temporaloide, en el caso de sistemas sencillos que admitan solución. Éstos son: el campo Coulombiano, el campo magnético producido por un alambre recto e infinito con corriente constante, un campo magnético constante y un campo eléctrico constante. En el Capítulo 5 se analiza la propuesta de Nambu de relacionar la condición de norma no lineal con la ecuación de Hamilton-Jacobi relativista, por lo cual se revisa la teoría en la que se fundamenta. En el Capítulo 6 se aplica el método de Hamilton-Jacobi de acuerdo a la propuesta de Nambu, para construir los potenciales de la norma no lineal. Por ello, se calculan las funciones principales de Hamilton no relativistas para los sistemas mencionados arriba. En el Capítulo 7 se procede a comparar los límites no relativistas de las acciones relativistas obtenidas en el Capítulo 4, con aquellas calculadas en el Capítulo 6. Finalmente, en el Capítulo 8 se da el resumen y las conclusiones obtenidas en esta tesis.

# Capítulo 2

## Electrodinámica Estándar (ED)

En este capítulo revisamos la formulación de la electrodinámica en término de los potenciales electromagnéticos, haciendo énfasis en las transformaciones de norma, en las elecciones empleadas con más frecuencia y en la manera de pasar de una norma a otra. Además describimos brevemente la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana del movimiento de una partícula cargada en campos electromagnéticos de fondo, que será de utilidad en desarrollos posteriores.

Con este objeto partimos de las ecuaciones de Maxwell[16]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.4)$$

Estas ecuaciones implican la ecuación de continuidad, que nos da la conservación de la carga eléctrica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.5)$$

Introduzcamos el tensor totalmente antisimétrico de tercer rango:

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} +1 & \text{Para permutaciones pares de } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{Para permutaciones impares de } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{Otros casos} \end{cases}, \quad (2.6)$$

que se conoce como el *tensor de Levi-Civita*.

Con las definiciones anteriores, las ecuaciones de Maxwell (2.1),(2.2), (2.3) y (2.4) se pueden escribir, en notación de componentes ( $\mathbf{E} = \{E_i\}$ ,  $\mathbf{B} = \{B_i\}$ ,  $\mathbf{x} = \{x^i\}$ ), como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_i}{\partial x^i} &= \frac{4\pi}{c} \rho \quad , \quad \varepsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial x^j} = \frac{4\pi}{c} j_i + \frac{1}{c} \frac{\partial E_i}{\partial t} \quad , \\ \frac{\partial B_i}{\partial x^i} &= 0 \quad , \quad \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x^j} + \frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial t} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.7)$$

## 2.1. Potenciales Vectorial y Escalar

Las ecuaciones de Maxwell consisten en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden acopladas que relacionan las componentes de los campos eléctrico y magnético con las respectivas fuentes  $\rho$  (densidad de carga) y  $\mathbf{j}$  (densidad de corriente). Para resolver este sistema resulta conveniente introducir potenciales, obteniendo dos ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden: una escalar y otra vectorial. Este concepto de potenciales resulta familiar ya que constituyen una generalización de los que se usan en electrostática y magnetostática. La introducción de los potenciales  $\mathbf{A}$  (potencial vectorial) y  $\Phi$  (potencial escalar) se lleva a cabo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Como } \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ &\Rightarrow \exists \mathbf{A}, \quad \text{tal que,} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Con lo anterior, la otra ecuación homogénea (2.3), la Ley de Faraday, se puede escribir en la forma:

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \exists \Phi, \quad \text{tal que,} \quad \mathbf{E} = - \left( \nabla \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad . \quad (2.9)$$

Con (2.8) y (2.9) las ecuaciones de Maxwell homogéneas (2.2) y (2.3) se satisfacen automáticamente. Lo que resta es analizar el comportamiento dinámico de  $\Phi$  y  $\mathbf{A}$ , el cual está determinado por las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas (2.1) y (2.4).

Si tomamos (2.8) y (2.9) y las sustituimos en (2.1), obtenemos:

$$- \nabla \cdot \left( \nabla \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\rho \quad , \quad (2.10)$$

Análogamente sustituyendo en (2.4):

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad , \\ \Leftrightarrow \quad \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \frac{\partial (\nabla \Phi)}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad , \\ \Leftrightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial (\nabla \Phi)}{\partial t} \quad . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Si definimos el operador de D'Alambert o Dalambertiano, en la siguiente forma:

$$\square^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (2.12)$$

entonces la ecuación para el potencial vectorial queda:

$$\square^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right). \quad (2.13)$$

Con lo cual, se ha obtenido un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden acopladas conformado por (2.10) y (2.13). El desacoplamiento se consigue al explotar la arbitrariedad envuelta en la definición de los potenciales.

## 2.2. Las Transformaciones de Norma

Como  $\mathbf{B}$  está definido por (2.8) en términos de  $\mathbf{A}$ , esto implica que el potencial vectorial es arbitrario en el sentido de que se le puede agregar el gradiente de una función escalar  $\Lambda$ ; dejando a  $\mathbf{B}$  invariante bajo la transformación:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda. \quad (2.14)$$

Para dejar invariante el campo eléctrico (2.9), el potencial escalar debe ser simultáneamente transformado:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (2.15)$$

Las transformaciones (2.14) y (2.15) se conocen como las transformaciones de norma de la ED. A continuación, se revisan dos de las normas más comunes en ED.

### 2.2.1. La Norma de Lorentz

Está definida por:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (2.16)$$

Ahora, sustituyendo (2.16) en (2.10) y (2.13), obtenemos:

$$\square^2 \Phi = -\rho, \quad (2.17)$$

$$\square^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.18)$$

A continuación mostramos que siempre podremos encontrar potenciales, tales que satisfagan la condición de Lorentz. Supongamos que los potenciales  $\mathbf{A}, \Phi$  que satisfacen las ecuaciones (2.10) y (2.13) no satisfacen (2.16). Hagamos una transformación de norma a los potenciales  $\mathbf{A}', \Phi'$ , demandemos que  $\mathbf{A}', \Phi'$  satisfagan la condición de Lorentz y determinemos la función  $\Lambda$  requerida:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \square^2 \Lambda. \quad (2.19)$$

Entonces, dicha función escalar  $\Lambda$  se encuentra resolviendo:

$$\square^2 \Lambda = - \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) . \quad (2.20)$$

Después de este paso, no obstante, los potenciales  $\mathbf{A}$  y  $\Phi$  todavía no están únicamente determinados. En efecto, como veremos a continuación, hay una clase infinita de potenciales de norma equivalentes que describen la misma física y todos satisfacen la condición de Lorentz (2.16) debido a que podemos aún hacer otra transformación de norma:

$$\Phi' \rightarrow \Phi'' = \Phi' - \frac{\partial \Lambda'}{\partial t} , \quad (2.21)$$

$$\mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{A}'' = \mathbf{A}' - \nabla \Lambda' . \quad (2.22)$$

Como  $\Phi'$  y  $\mathbf{A}'$  son soluciones de (2.16), se puede encontrar  $\Lambda'$  que satisface:

$$\square^2 \Lambda' = 0 . \quad (2.23)$$

Y notamos que  $\Lambda'$  es una solución homogénea de (2.20). Esta última ecuación asegura que la condición de Lorentz (2.16) se cumpla. Como veremos más adelante la ventaja de la norma de Lorentz es su covariancia, es decir que su forma funcional no depende del sistema de coordenadas.

### 2.2.2. La Norma de Coulomb

Esta norma se define de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 . \quad (2.24)$$

Sustituyendo (2.24) en (2.10) y (2.13), obtenemos:

$$\nabla^2 \Phi = -\rho , \quad (2.25)$$

$$\square^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) . \quad (2.26)$$

Formalmente resolvemos (2.25) como:

$$\Rightarrow \Phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\nabla^2} \rho(\mathbf{x}, t) . \quad (2.27)$$

Para aclarar esta notación, procedemos en forma análoga a la notación de Dirac en Mecánica Cuántica. Pensemos que  $|\Phi(t)\rangle$ ,  $|\rho(t)\rangle$  son vectores en cierto espacio de Hilbert tales que al proyectarlos en la base de configuración  $\{|\mathbf{x}\rangle\}$  recuperamos las funciones

$$\langle \mathbf{x} | \Phi(t) \rangle = \Phi(\mathbf{x}, t) , \quad (2.28)$$

$$\langle \mathbf{x} | \rho(t) \rangle = \rho(\mathbf{x}, t) . \quad (2.29)$$

De este modo la ecuación (2.27) se escribe como:

$$|\Phi(t)\rangle = -\frac{1}{\nabla^2}|\rho(t)\rangle \quad (2.30)$$

Además se cumplen las siguientes propiedades:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle, \quad (2.31)$$

$$\int d\mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}'| = 1. \quad (2.32)$$

A continuación, aclararemos el significado del operador  $1/\nabla^2$ . Para ello, recordaremos la definición de la función de Green del operador  $\nabla^2$ :

$$\nabla^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad , \quad G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \quad (2.33)$$

Mostramos que (2.33) puede escribirse como:

$$\nabla^2 G = 1. \quad (2.34)$$

Proyectando sobre la base de configuraciones:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | \nabla^2 G | \mathbf{x}' \rangle &= \langle \mathbf{x} | 1 | \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle, \\ \Leftrightarrow \nabla_x^2 \langle \mathbf{x} | G | \mathbf{x}' \rangle &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \Leftrightarrow G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \langle \mathbf{x} | G | \mathbf{x}' \rangle. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Reescribiendo la ecuación (2.34) como:

$$G = \frac{1}{\nabla^2}, \quad (2.36)$$

vemos que:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \langle \mathbf{x} | \frac{1}{\nabla^2} | \mathbf{x}' \rangle. \quad (2.37)$$

Finalmente, proyectando  $|\Phi(t)\rangle$  de la ecuación (2.30) en el espacio de configuraciones se obtiene:

$$\langle \mathbf{x} | \Phi(t) \rangle = -\langle \mathbf{x} | \frac{1}{\nabla^2} | \rho(t) \rangle = -\int \langle \mathbf{x} | \frac{1}{\nabla^2} | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | \rho(t) \rangle d^3x', \quad (2.38)$$

que en el espacio de funciones corresponde a:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -\int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3x'. \quad (2.39)$$

Este resultado es familiar pues se trata de la solución particular para la ecuación de Poisson con fuente  $\rho(\mathbf{x}', t)$ . De este modo podemos resolver la ecuación (2.26).

Sustituyendo la ecuación (2.27) en (2.26) obtenemos:

$$\square^2 A_i(\mathbf{x}, t) = -j_i(\mathbf{x}, t) + \partial_i \partial_t \left( -\frac{1}{\nabla^2} \right) \rho(\mathbf{x}, t) . \quad (2.40)$$

Conmutando los operadores en la ecuación (2.40), se tiene que:

$$\square^2 A_i = -j_i + \partial_i \left( -\frac{1}{\nabla^2} \right) \partial_t \rho . \quad (2.41)$$

Usando la ecuación de continuidad (2.5) resulta:

$$\begin{aligned} \square^2 A_i &= -j_i + \partial_i \left( -\frac{1}{\nabla^2} \right) (-\partial_k j_k) , \\ &= -j_i + \partial_i \left( \frac{1}{\nabla^2} \right) \partial_k j_k , \\ \square^2 A_i &= \left( \delta_{ik} - \frac{\partial_i \partial_k}{\nabla^2} \right) j_k . \end{aligned} \quad (2.42)$$

Para checar la consistencia con la condición de Coulomb (2.24), tomamos la divergencia de la ec. (2.42):

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 = \partial_i (\square^2 A_i) &= \partial_i \left( \delta_{ik} - \frac{\partial_i \partial_k}{\nabla^2} \right) j_k , \\ \square^2 (\partial_i A_i) &= \left( \partial_k - \frac{\nabla^2 \partial_k}{\nabla^2} \right) j_k = 0 . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ahora mostramos como pasar de la norma de Coulomb  $\mathbf{A}'$  y  $\Phi'$  a la norma de Lorentz con potenciales  $\mathbf{A}$  y  $\Phi$ . Para esto hacemos una transformación de norma como en (2.14) y (2.15) con el objeto de hallar la función escalar  $\Lambda$  que las conecta:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \Lambda \Leftrightarrow \Lambda = -\frac{1}{\nabla^2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) . \quad (2.44)$$

Esto último se debe a que  $\mathbf{A}'$  satisface (2.24). A continuación se muestra como se transforma el potencial escalar empleando la función  $\Lambda$  obtenida en (2.44):

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda \quad (2.45)$$

Usando la condición de Lorentz (2.16), en la expresión (2.44) para  $\Lambda$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \Phi' &= \Phi - \frac{1}{\nabla^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} , \\ &= \frac{1}{\nabla^2} \left( \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = -\frac{1}{\nabla^2} \rho . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Esta última ecuación es resultado de usar la ec. (2.17). De este modo recuperamos la expresión (2.27) para el potencial en la norma de Coulomb.

## 2.3. Movimiento de una partícula cargada en campos electromagnéticos externos

Cuando una partícula con carga  $q$  se mueve con cierta velocidad  $\mathbf{v}$  en un campo electromagnético, experimenta la *fuerza de Lorentz*

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) . \quad (2.47)$$

Entonces, de acuerdo a la Segunda Ley de Newton, la ecuación diferencial de movimiento que obedece la partícula bajo dicha fuerza es

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) . \quad (2.48)$$

Sin embargo, al usar las ecuaciones (2.8) y (2.9), es posible reescribir la ec.(2.48) en términos de los potenciales, como se ve a continuación

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = q \left\{ -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})] \right\} . \quad (2.49)$$

A continuación se muestra que la ecuación diferencial de movimiento (2.48) se puede deducir a partir del siguiente Lagrangiano

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T - V = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} - q\Phi . \quad (2.50)$$

Si calculamos la ecuación de Euler-Lagrange solo para la componente en  $x$ , nos da

$$0 = \frac{d}{dt}(m\dot{x} + qA_x) + q \frac{\partial \Phi}{\partial x} - q \left( v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) , \quad (2.51)$$

$$m\ddot{x} = q \left( v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - q \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{dA_x}{dt} \right) . \quad (2.52)$$

Sin embargo, aún se puede simplificar esta expresión, ya que la derivada temporal total de  $A_x$ , está relacionada con la derivada parcial con respecto al tiempo de la siguiente manera a través de la regla de la cadena

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A_x = \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} . \quad (2.53)$$

Por otro lado tenemos que

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x = v_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + v_z \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) . \quad (2.54)$$



Entonces sustituyendo (2.53) y (2.54) en (2.52) encontramos la ecuación diferencial de movimiento en la dirección  $x$

$$m\ddot{x} = q \left( v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - q \frac{\partial \Phi}{\partial x} - q \left( \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right), \quad (2.55)$$

$$= q \left[ - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + v_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + v_z \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \right], \quad (2.56)$$

$$= q \left[ E_x + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)_x \right]. \quad (2.57)$$

Análogamente, para las direcciones  $y$  y  $z$  se tiene

$$m\ddot{y} = q \left[ E_y + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)_y \right], \quad (2.58)$$

$$m\ddot{z} = q \left[ E_z + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)_z \right]. \quad (2.59)$$

Así entonces se recuperan las tres componentes de (2.48).

Una herramienta de la formulación Hamiltoniana en la Mecánica Analítica que usaremos a menudo para determinar las ecuaciones de movimiento de un sistema bajo un campo electromagnético es la *Sustitución Mínima* cuyo origen lo exponemos a continuación. Consideremos una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  moviéndose en un campo electromagnético, cuyo Lagrangiano está dado por (2.50).

Si calculamos el momento canónico a  $x_i$ , dado por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \quad (2.60)$$

obtenemos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \left( \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} - q\Phi \right) = m\dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i. \quad (2.61)$$

Para obtener el Hamiltoniano, generado por la *transformada de Legendre*,

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \dot{x}_i p_i - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \quad (2.62)$$

debemos eliminar  $\dot{x}_i$  de (2.61) en términos de los momentos  $p_i$ . Sustituyendo en (2.62)

obtenemos

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \left(p_i - \frac{q}{c}A_i\right)\frac{p_i}{m} - \frac{m}{2}\frac{\left(p_i - \frac{q}{c}A_i\right)^2}{m^2} - \frac{qA_i}{m}\left(p_i - \frac{q}{c}A_i\right) + q\Phi, \quad (2.63)$$

$$= \frac{p_i^2}{m} - 2\frac{qA_i p_i}{mc} + \frac{(qA_i)^2}{mc^2} - \frac{p_i^2 - 2\frac{q}{c}p_i A_i + \left(\frac{q}{c}A_i\right)^2}{2m} + q\Phi, \quad (2.64)$$

$$= \frac{p_i^2}{2m} - \frac{qA_i p_i}{mc} + \frac{(qA_i)^2}{2mc^2} + q\Phi, \quad (2.65)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_i - \frac{q}{c}A_i\right)^2 + q\Phi \quad (2.66)$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + q\Phi, \quad (2.67)$$

Si el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, entonces lo podemos identificar con la energía total de la partícula  $\mathcal{E}$ . Reemplacemos  $H$  por  $\mathcal{E}$  y además escribamos esta última expresión de la siguiente manera:

$$\mathcal{E} - q\Phi = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2. \quad (2.68)$$

Las sustituciones

$$\mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \quad y \quad \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} - q\Phi, \quad (2.69)$$

constituyen las así llamadas *sustitución mínima*, que permiten encontrar la energía de la partícula en el campo electromagnético a partir de la relación

$$\mathcal{E} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (2.70)$$

para la partícula libre.

# Capítulo 3

## Formulación covariante de la Electrodinámica

Con el objeto de hacer contacto con el modelo de Nambu, en este Capítulo revisamos la formulación covariante de la Electrodinámica estándar y su deducción a partir del Principio de Mínima Acción.

### 3.1. Cuadrivectores y transformaciones de Lorentz

La invariancia en la forma de las ecuaciones de la Electrodinámica bajo transformaciones de Lorentz fue demostrada por Lorentz y Poincaré antes de la formulación de la Relatividad Especial. Esta invariancia de forma o *covariancia* de las ecuaciones de Maxwell y de la fuerza de Lorentz implica que las cantidades físicas  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  que aparecen en estas ecuaciones transformen de una forma bien definida bajo transformaciones de Lorentz. Con el objeto de poner de manifiesto estas propiedades se recurre a la estructura del *espacio-tiempo* o *espacio de Minkowski*, que es un espacio vectorial de dimensión 4. Un punto en el espacio-tiempo está especificado por las coordenadas  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Donde:

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z, \quad (3.1)$$

lo que define el cuadrivector

$$x^\mu \equiv (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad x^\mu \equiv (ct, \mathbf{x}) . \quad (3.2)$$

Aquí  $\mu = 0, 1, 2, 3$  e  $i = 1, 2, 3$ . En general, los índices Griegos correrán de 0 a 3, mientras los índices Latinos correrán de 1 a 3.

Ahora estudiaremos las transformaciones de Lorentz, mencionadas en el primer párrafo de esta sección. Consideremos dos sistemas en una configuración estándar, es decir, donde  $\mathcal{S}'$  se mueve a lo largo del eje  $X$  de  $\mathcal{S}$  a velocidad constante  $v$  y los ejes de  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$  coinciden en  $t = t' = 0$  (ver Fig.3.1). Las coordenadas (primadas) de un evento  $P$  con respecto a  $\mathcal{S}'$

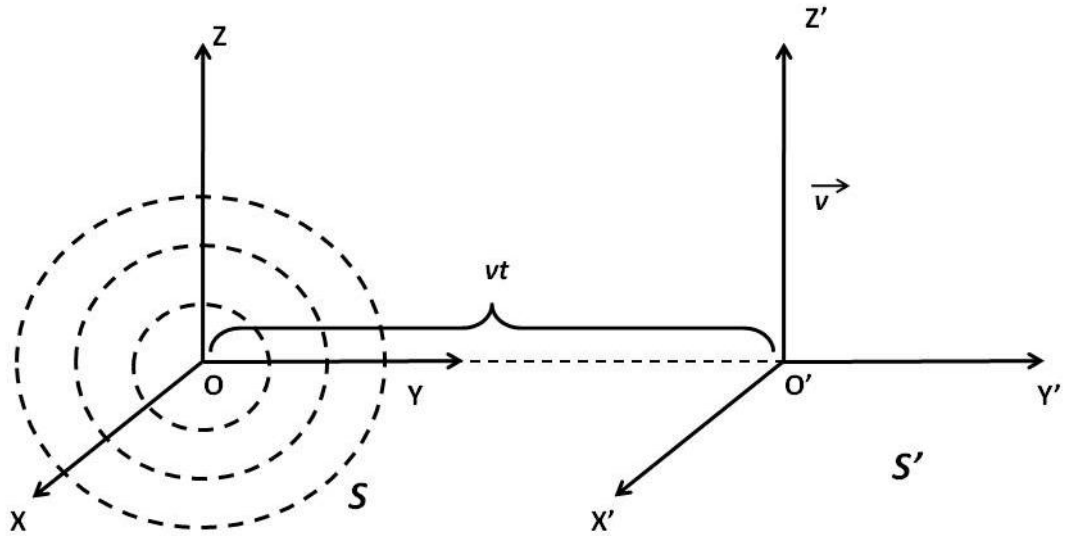


Figura 3.1: Dos sistemas inerciales  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$  en configuración estándar (los orígenes de  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$  coinciden en  $t = t' = 0$ )

están relacionadas con las coordenadas (no primadas) en  $\mathcal{S}$  vía una transformación lineal de la forma:

$$t' = At + Bx ,$$

$$x' = Dt + Ex ,$$

$$y' = y ,$$

$$z' = z .$$

Posteriormente, justificaremos el por qué la transformación debe ser lineal. Más aún, como requerimos que  $x' = 0$  corresponda con  $x = vt$  y que  $x = 0$  corresponda con  $x' = -vt'$ , encontramos inmediatamente que  $D = -Ev$ , y que  $D = -Av$ , por consiguiente  $A = D$ . Entonces tenemos

$$t' = At + Bx , \tag{3.3}$$

$$x' = A(x - vt) , \tag{3.4}$$

$$y' = y , \tag{3.5}$$

$$z' = z . \tag{3.6}$$

En Relatividad Especial, Einstein abandonó el postulado de un tiempo absoluto y lo reemplazó por el postulado que dice[17]: *La velocidad de la luz  $c$  es finita e igual en todos los sistemas inerciales.* Al aplicar este nuevo postulado, junto con el principio de relatividad, nosotros podemos obtener las *transformaciones de Lorentz* conectando las coordenadas de un evento  $P$  en dos diferentes sistemas inerciales  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$ .

Ahora consideremos un fotón emitido desde los orígenes (coincidentes) de  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$  al tiempo  $t = t' = 0$  y viajando en una dirección arbitraria, como en la Fig.3.1. Subsecuentemente las coordenadas espaciales y temporales del fotón en cada sistema deberán satisfacer:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \quad (3.7)$$

Sustituyendo las relaciones (3.3)-(3.6) en esta expresión y resolviendo para las constantes  $A$  y  $B$ , obtenemos:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) , \quad (3.8)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct) , \quad (3.9)$$

$$y' = y , \quad (3.10)$$

$$z' = z . \quad (3.11)$$

Donde  $\beta = v/c$  y  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

Además de lo anterior, el espacio-tiempo tiene una geometría específica determinada por un intervalo invariante  $s^2$  entre dos eventos  $x^\mu$  y  $y^\mu$ :

$$s^2 = - (x^0 - y^0)^2 + (x^i - y^i)^2 . \quad (3.12)$$

En forma diferencial, el intervalo infinitesimal  $ds$  que define la métrica de nuestro espacio es:

$$ds^2 = - (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 . \quad (3.13)$$

Esta métrica es un caso especial del elemento diferencial de longitud general:

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (3.14)$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  se llama *tensor métrico*. Para el espacio-tiempo plano de la Relatividad Especial el tensor métrico es diagonal:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

El tensor métrico se denotará por  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$ , cuya signatura es +2.

El tensor métrico contravariante  $\eta^{\mu\nu}$  se define como el inverso de  $\eta_{\mu\nu}$ . Para el espacio-tiempo plano:

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} . \quad (3.16)$$

Nótese que la contracción de los tensores métricos contravariante y covariante da la delta de Kronecker en cuatro dimensiones:

$$\eta_{\mu\sigma} \eta^{\sigma\nu} = \delta_\mu^\nu . \quad (3.17)$$

De la ec.(3.14) vemos que es posible definir el 4-vector covariante:

$$dx_\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu , \quad (3.18)$$

de tal modo que

$$(ds)^2 = dx_\nu dx^\nu . \quad (3.19)$$

Esta idea se generaliza para cualquier cuadrivector  $v^\mu$  de modo que

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad (3.20)$$

y su inverso,

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu \quad (3.21)$$

De esta forma, la contracción con  $\eta_{\mu\nu}$  y  $\eta^{\mu\nu}$  es el procedimiento para cambiar un índice en un tensor cualquiera, de contravariante en covariante y viceversa.

Usando el tensor métrico es posible estudiar en general las transformaciones de Lorentz que nos llevan de un sistema inercial cartesiano  $x^\mu$  a un nuevo sistema  $x'^\mu$  en el espacio de Minkowski. Como se requiere que el nuevo sistema coordinado también sea un sistema inercial de Minkowski, el elemento de distancia  $ds^2$  debe de tomar la misma forma tanto en las coordenadas primadas como en las no primadas, i.e.

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu . \quad (3.22)$$

En otras palabras la métrica en las nuevas coordenadas debe también estar dada por (3.15). Usando las propiedades de transformación de un tensor de segundo rango, esto implicará que la transformación  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  debe satisfacer:

$$\eta_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \eta_{\rho\sigma} , \quad (3.23)$$

que es una condición necesaria y suficiente para que  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  sea la transformación de Lorentz buscada entre los dos sistemas inerciales. De (3.23), vemos que los elementos de matriz de la transformación deben ser constantes. Y se satisface

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \eta_{\rho\sigma} . \quad (3.24)$$

Entonces, la transformación entre dos sistemas inerciales debe ser lineal como habíamos dicho antes, i.e.

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu , \quad (3.25)$$

donde  $\Lambda^\mu{}_\nu$  y  $a^\mu$  son constantes. A esta forma general se le conoce como *transformación de Lorentz inhomogénea* (o *transformación de Poincaré*). Aquí se utilizará siempre  $a^\mu = 0$ , en cuyo caso (3.25) se reduce a una transformación de Lorentz homogénea. Las constantes  $\Lambda^\mu{}_\nu$  en la matriz dependen de la velocidad relativa y la orientación de los dos sistemas inerciales. Si las coordenadas primadas y no primadas corresponden a nuestros sistemas

$\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$  estudiados en párrafos previos, obtenemos que la matriz de transformación puede ser escrita en dos formas equivalentes:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi & 0 & 0 \\ -\sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

donde  $\psi = \operatorname{arctanh}\beta$ . Claramente, si los ejes de  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$  están rotados uno respecto al otro entonces la matriz de la transformación se torna más complicada.

La transformación inversa de (3.26) se puede obtener fácilmente al hacer  $v \rightarrow -v$  (o equivalentemente  $\psi \rightarrow -\psi$ ). En general, la matriz de la transformación inversa se denota por:

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}, \quad (3.27)$$

y puede ser calculada de la transformación original utilizando las propiedades de la métrica para subir o bajar índices, i.e.

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}\Lambda^\rho{}_\sigma. \quad (3.28)$$

Esta es verdaderamente la inversa requerida lo que puede ser demostrado usando (3.23):

$$\Lambda^\mu{}_\nu\Lambda_\mu{}^\sigma = \Lambda^\mu{}_\nu\eta_{\mu\rho}\eta^{\sigma\tau}\Lambda^\rho{}_\tau = \eta_{\nu\tau}\eta^{\sigma\tau} = \delta_\nu^\sigma \quad (3.29)$$

Antes de seguir avanzando, es necesario recordar que existen dos clases de vectores: covariantes y contravariantes. Un vector contravariante transforma como el vector  $x^\mu$

$$v'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu, \quad (3.30)$$

mientras que un vector covariante transforma como

$$v'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu v_\nu. \quad (3.31)$$

En términos de índices, para un tensor  $T$  definimos,

$$\begin{aligned} \text{Índices covariantes} &\longrightarrow T_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r} \text{ (subíndice)}, \\ \text{Índices contravariantes} &\longrightarrow T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_s} \text{ (superíndice)}, \end{aligned}$$

cada índice transforma de acuerdo a las expresiones (3.31) y (3.30) respectivamente.

Con lo anterior es posible incluir al operador  $\nabla$  en notación cuadrivectorial:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \equiv \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right). \quad (3.32)$$

El 4-vector densidad de corriente queda definido por:

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{j}). \quad (3.33)$$

### 3.2. Forma tensorial de las ecuaciones de Maxwell

A continuación mostramos que las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir en forma tensorial empleando la notación cuadrimensional que hemos introducido. Esto es posible, definiendo el *tensor de Faraday*  $F$ , cuyas componentes son el campo eléctrico y magnético, como se muestra:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

En este contexto, cabe destacar que los potenciales  $\Phi$  y  $\mathbf{A}$  también forman un 4-vector, a saber, el *4-vector potencial* o *cuadripotencial*:

$$A^\mu = (\Phi, \mathbf{A}). \quad (3.35)$$

El tensor de Faraday también puede ser escrito como una 2-forma usando el producto exterior:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta, \quad (3.36)$$

mientras que el 4-potencial puede ser escrito como una 1-forma:

$$\mathbf{A} = A_\mu \mathbf{d}x^\mu. \quad (3.37)$$

El tensor de Faraday se relaciona con el 4-potencial por:

$$\mathbf{F} = \mathbf{d}A. \quad (3.38)$$

Usando una base coordenada es posible escribir el Tensor de Faraday en componentes:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.39)$$

Ahora debemos mostrar, que (3.39) reproduce (3.34) con las definiciones hechas previamente de los potenciales en (2.8) y (2.9). Para facilitar esta tarea, probaremos que el tensor de Faraday es antisimétrico:

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu = -(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -F_{\mu\nu}. \quad (3.40)$$

Haciendo  $\mu = \nu$  en (3.40):

$$F_{\mu\mu} = 0, \quad \forall \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (3.41)$$

donde no hay suma sobre los índices repetidos.



Ahora con la antisimetría del tensor de Faraday solo debemos de determinar 6 componentes. Si hacemos  $\mu = 0$  y  $\nu = 1$  en (3.39):

$$F_{01} = -F_{10} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{1}{c} \partial_t A_x - \partial_x(-\Phi), \quad (3.42)$$

$$= \frac{1}{c} \partial_t A_x + \partial_x \Phi, \quad (3.43)$$

$$= -E_x. \quad (3.44)$$

Análogamente para  $\mu = 0$  y  $\nu = 2, 3$  se tiene:

$$F_{02} = -F_{20} = \frac{1}{c} \partial_t A_y + \partial_y \Phi = -E_y, \quad (3.45)$$

$$F_{03} = -F_{30} = \frac{1}{c} \partial_t A_z + \partial_z \Phi = -E_z. \quad (3.46)$$

De igual forma, para  $\mu = 1$  y  $\nu = 2, 3$  se obtiene:

$$F_{12} = -F_{21} = \partial_x A_y - \partial_y A_x = B_z, \quad (3.47)$$

$$F_{13} = -F_{31} = \partial_y A_z - \partial_z A_y = -B_x. \quad (3.48)$$

Y si  $\mu = 2$  y  $\nu = 3$  hallamos:

$$F_{23} = -F_{32} = \partial_y A_z - \partial_z A_y = B_x. \quad (3.49)$$

A continuación mostramos cómo se recuperan las ecuaciones de Maxwell (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) a partir del tensor de Faraday.

De la expresión (3.39), se recupera la antisimetría del tensor dada en (3.34). Considerando que  $d^2 A = dF = 0$  se encuentra que:

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0. \quad (3.50)$$

De esta ecuación recuperamos las ecuaciones de Maxwell homogéneas (2.2) y (2.3). Es decir si hacemos  $\rho = 1$ ,  $\nu = 2$  y  $\mu = 0$ :

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{02} + \partial_2 F_{10} + \partial_0 F_{21} &= \partial_x(-E_y) + \partial_y(E_x) - \frac{1}{c} \partial_t B_z = 0, \\ \Leftrightarrow -\partial_x E_y + \partial_y E_x &= \frac{1}{c} \partial_t B_z, \\ \Leftrightarrow \partial_x E_y - \partial_y E_x &= -\frac{1}{c} \partial_t B_z. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Análogamente haciendo  $\rho = 2$ ,  $\nu = 3$  y  $\mu = 0$ ; junto con  $\rho = 1$ ,  $\nu = 3$  y  $\mu = 0$  se obtiene:

$$\partial_y E_z - \partial_z E_y = -\frac{1}{c} \partial_t B_x, \quad (3.52)$$

y,

$$\partial_z E_x - \partial_x E_z = -\frac{1}{c} \partial_t B_y, \quad (3.53)$$

respectivamente.

Las ecuaciones (3.51), (3.52) y (3.53), son las componentes de (2.3). Por otro lado, tomando  $\rho = 1$ ,  $\nu = 2$  y  $\mu = 3$ :

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{32} + \partial_2 F_{13} + \partial_3 F_{21} &= \partial_x(-B_x) + \partial_y(-B_y) + \partial_z(-B_z) = 0, \\ \Leftrightarrow \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Con lo cual demostramos que (3.54) corresponde con (2.2).

Las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (2.1) y (2.4) se escriben como[16]:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu, \quad (3.55)$$

que corresponden a las ecuaciones de movimiento de la Electrodinámica Estándar. Éstas se recuperan como sigue. Haciendo  $\mu = 0$  en (3.55) tenemos:

$$\begin{aligned} \partial^0 F_{00} + \partial^1 F_{01} + \partial^2 F_{02} + \partial^3 F_{03} &= \frac{4\pi}{c} J_0, \\ \Leftrightarrow \partial_x(-E_x) + \partial_y(-E_y) + \partial_z(-E_z) &= \frac{4\pi}{c}(-c\rho) = -4\pi\rho, \\ \Leftrightarrow \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z &= 4\pi\rho, \end{aligned} \quad (3.56)$$

que corresponde a la ec. (2.1). Para hallar las ecuaciones de Maxwell faltantes, que corresponden a las componentes de la ec. (2.4) tomamos sucesivamente en (3.55)  $\mu = 1$ :

$$\begin{aligned} \partial^0 F_{10} + \partial^1 F_{11} + \partial^2 F_{12} + \partial^3 F_{13} &= \frac{4\pi}{c} J_1, \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{c} \partial_t E_x + \partial_y B_z + \partial_z(-B_y) &= \frac{4\pi}{c} j_x, \end{aligned} \quad (3.57)$$

luego  $\mu = 2$ :

$$\begin{aligned} \partial^0 F_{20} + \partial^1 F_{21} + \partial^2 F_{22} + \partial^3 F_{23} &= \frac{4\pi}{c} J_2, \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{c} \partial_t E_y + \partial_x(-B_z) + \partial_z B_x &= \frac{4\pi}{c} j_y, \end{aligned} \quad (3.58)$$

y  $\mu = 3$ :

$$\begin{aligned} \partial^0 F_{30} + \partial^1 F_{31} + \partial^2 F_{32} + \partial^3 F_{33} &= J_3, \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{c} \partial_t E_z + \partial_x B_y + \partial_y(-B_x) &= \frac{4\pi}{c} j_z. \end{aligned} \quad (3.59)$$

### 3.3. El Principio de Mínima Acción para la Electrodinámica Estándar

Consideremos la acción

$$S(A^\mu) = \int_{\Omega} L(A^\mu) d^4x = \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} J_\mu A^\mu \right) d^4x . \quad (3.60)$$

Aplicando el Principio de Mínima Acción para extremos fijos

$$\delta S(A^\mu) = 0 , \quad (3.61)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \left[ -\frac{1}{16\pi c} \delta (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \frac{1}{c^2} \delta (J_\mu A^\mu) \right] d^4x , \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{c} \left[ -\frac{1}{16\pi} (F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}) + \frac{1}{c} J_\mu \delta A^\mu \right] d^4x . \end{aligned} \quad (3.62)$$

Como la primera contracción es invariante:

$$0 = \int_{\Omega} \frac{1}{c} \left[ -\frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} + \frac{1}{c} \delta (J_\mu A^\mu) \right] d^4x . \quad (3.63)$$

Usando la ecuación (3.39):

$$0 = \int_{\Omega} \frac{1}{c} \left[ -\frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} \delta (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \frac{1}{c} J_\mu \delta A^\mu \right] d^4x . \quad (3.64)$$

Cambiando  $\nu \longleftrightarrow \mu$  en el primer término:

$$0 = \int_{\Omega} \frac{1}{c} \left[ \frac{1}{8\pi} (-F_{\nu\mu} \partial^\nu \delta A^\mu + F_{\mu\nu} \partial^\nu \delta A^\mu) + \frac{1}{c} J_\mu \delta A^\mu \right] d^4x \quad (3.65)$$

y usando la antisimetría del tensor de Faraday en el mismo término resulta

$$0 = \int_{\Omega} \frac{1}{c} \left( \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \partial^\nu \delta A^\mu + \frac{1}{c} J_\mu \delta A^\mu \right) d^4x . \quad (3.66)$$

Dado que las operaciones  $\delta$  y derivada con respecto a las coordenadas conmutan e integrando por partes tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu} \partial^\nu \delta A^\mu d^4x + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} J_\mu \delta A^\mu d^4x , \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \partial^\nu (F_{\mu\nu} \delta A^\mu) dV - \frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \partial^\nu F_{\mu\nu} \delta A^\mu d^4x + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} J_\mu \delta A^\mu d^4x . \end{aligned} \quad (3.67)$$

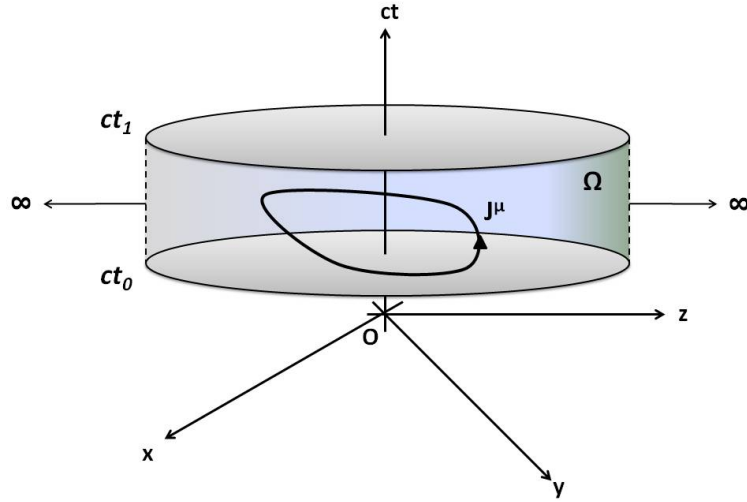


Figura 3.2: En un espacio-tiempo, dos superficies espaciales a  $ct_0$  y  $ct_1$ , respectivamente limitan a un volumen tetradimensional donde se observa un campo.

Ahora bien, nos percatamos de dos detalles fundamentales en la primera integral de (3.67). En primer lugar hay que fijarse en el hecho de que se trata de una integral a realizarse sobre un intervalo temporal definido  $[t_0, t_1]$ , escogido de tal manera que, en  $t_0$  y  $t_1$  todas las componentes de  $A^\mu$  están dadas *a priori* en todo el espacio. Se trata, pues, de una integral que se puede visualizar sobre una región del espacio-tiempo  $\Omega$  como en la Fig.(3.2).

El otro detalle fundamental es la primer integral de (3.67) es una integral de una 4-divergencia sobre una región  $\Omega$  del espacio-tiempo. Entonces es factible aplicar *teorema de Gauss* y expresarla ahora como una integral de hipersuperficie, definida sobre la frontera  $\partial\Omega$  del hipervolumen considerado, esto es:

$$0 = \frac{1}{4\pi c} \oint_{\partial\Omega} F_{\mu\nu} \delta A^\mu dS^\nu - \frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \partial^\nu F_{\mu\nu} \delta A^\mu d^4x + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} J_\mu \delta A^\mu d^4x . \quad (3.68)$$

La hipersuperficie  $\partial\Omega$  está limitada temporalmente por los dos planos  $ct_0 = cte$  y  $ct_1 = cte$  de la Fig.(3.2). Además  $\partial\Omega$  se extiende por sus caras laterales en las tres dimensiones hasta el infinito espacial. El elemento diferencial  $dS^\nu$  es proporcional a los vectores normales a las caras de la hipersuperficie que encierra al volumen determinado por  $\Omega$ .

Como se estableció que el potencial  $A^\mu$  está determinado *a priori* en  $t_0$  y  $t_1$ , que son las “tapas” del hipervolumen, las variaciones  $\delta A^\mu$  son nulas en éstas y elegimos  $\delta A^\mu \rightarrow 0$  en el infinito espacial  $\forall t$ . Por lo tanto, la primer integral de (3.67) es igual a cero.

Entonces, de acuerdo con el Principio de Mínima Acción o Principio de Hamilton finalmente se obtiene:

$$\delta S(A^\mu) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{4\pi} \partial^\nu F_{\mu\nu} + \frac{1}{c} J_\mu \right) \delta A^\mu d^4x = 0, \quad (3.69)$$

$$\therefore \partial^\nu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu. \quad (3.70)$$

Con esto hemos demostrado el origen de la ecuación (3.55), que fue usada en la sección anterior, a partir del Principio de Mínima Acción. La formulación covariante permite recuperar directamente la conservación de la carga. Tomando la cuatridivergencia en la ec. (3.55)

$$\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = \partial^\mu J_\mu. \quad (3.71)$$

Empleando la antisimetría del tensor de Faraday y la conmutatividad del gradiente obtenemos

$$\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = -\partial^\mu \partial^\nu F_{\nu\mu} = -\partial^\nu \partial^\mu F_{\nu\mu} = -\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = 0, \quad (3.72)$$

$$\therefore \partial^\mu J_\mu = 0. \quad (3.73)$$

La ecuación (3.73) corresponde a la conservación de la carga en cualquier sistema inercial y reproduce la ecuación (2.5) ya conocida.

### 3.3.1. La Invariancia de Norma en la formulación cuatridimensional

Más aún, dada la definición de  $F_{\mu\nu}$  en (3.39), es posible ver que los potenciales no están únicamente determinados por los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , como ya habíamos indicado en las secciones pasadas. En efecto, si le sumamos a  $A^\mu$  el gradiente de una función escalar  $\Lambda$ , de modo que

$$A^\mu \longrightarrow A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu \Lambda, \quad (3.74)$$

esto no cambiará el tensor de Faraday:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu'} &= \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \Lambda) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu \Lambda) \\ &= \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \partial^\nu \Lambda - \partial^\nu \partial^\mu \Lambda - \partial^\nu A^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

De este modo, recuperamos las transformaciones de norma

$$A^i \rightarrow A^{i'} = A^i + \partial^i \Lambda, \quad A^0 \rightarrow A^{0'} = A^0 + \partial^0 \Lambda, \quad (3.76)$$

sólo que ahora hemos usado la notación covariante.

Analícemos qué consecuencias tiene la invariancia de norma en la acción (3.60). Llevando a cabo la transformación (3.74) se tiene

$$S(A^{\mu'}) = \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{16\pi c} F'_{\mu\nu} F^{\mu\nu'} + \frac{1}{c^2} J_\mu A^{\mu'} \right) d^4x. \quad (3.77)$$

Utilizando la invariancia del tensor de Faraday ante transformaciones de norma, resulta

$$S(A^{\mu'}) = -\frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} J_{\mu} (A^{\mu} + \partial^{\mu}\Lambda) d^4x, \quad (3.78)$$

$$= \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x + \frac{1}{c^2} J_{\mu} A^{\mu} \right) d^4x + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} J_{\mu} \partial^{\mu}\Lambda d^4x, \quad (3.79)$$

$$= S(A^{\mu}) + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} J_{\mu} \partial^{\mu}\Lambda d^4x. \quad (3.80)$$

Integrando por partes la segunda integral y tras aplicarle el Teorema de Gauss, se obtiene

$$\begin{aligned} S(A^{\mu'}) &= S(A^{\mu}) + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \partial^{\mu} (J_{\mu}\Lambda) d^4x - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \Lambda \partial^{\mu} J_{\mu} d^4x, \\ &= S(A^{\mu}) + \frac{1}{c^2} \oint_{\partial\Omega} J_{\mu}\Lambda dS^{\nu} - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \Lambda \partial^{\mu} J_{\mu} d^4x. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Ahora, la segunda integral es igual a cero porque la corriente  $J^{\mu}$  está localizada en una región determinada del espacio-tiempo, como se ilustra en la Fig.(3.2).

$$\Rightarrow S(A^{\mu'}) = S(A^{\mu}) - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \Lambda \partial^{\mu} J_{\mu} d^4x. \quad (3.82)$$

Analizando estos términos descubrimos que para recuperar la acción (3.60) y por consiguiente, las ecuaciones de movimiento de la Electrodinámica Estándar necesitamos que la segunda integral del lado derecho sea igual a cero; como  $\Lambda(\mathbf{x}, t) \neq 0$  esto será posible únicamente si:

$$\partial^{\mu} J_{\mu} = 0. \quad (3.83)$$

Es decir, imponer la conservación de la carga (3.73) implica la invariancia de norma de la acción de la Electrodinámica Estándar.

# Capítulo 4

## El modelo de Nambu y su relación con la electrodinámica estándar

El modelo de Nambu [5] surge como una alternativa para explicar la masa cero de los fotones, interpretándolos como los bosones de Goldstone asociados a la ruptura espontánea de la simetría de Lorentz. En esta tesis no discutiremos el origen del modelo, sino que partiremos de su definición en términos de la densidad Lagrangiana. Como veremos a continuación en la formulación clásica, el modelo de Nambu más la ley de Gauss aplicada como restricción adicional, reproduce en efecto la electrodinámica estándar en la norma no lineal  $A_\mu A^\mu = -\lambda^2$ . El estudio de la electrodinámica en dicha norma es un problema bastante complicado debido a la no-linearidad y no puede llevarse a cabo en general, como en las normas más usadas como la de Coulomb y Lorentz. De este modo, el énfasis de esta Tesis está en mostrar la existencia de la transformación de norma que nos lleva de una norma conocida (la norma de Coulomb, por ejemplo) a la norma no-lineal, en el caso de algunos ejemplos sencillos que admiten solución. Dichos casos son: el campo Coulombiano, el campo magnético producido por un alambre recto infinito con corriente constante, un campo magnético constante y un campo eléctrico constante. La construcción de la función de norma se llevará a cabo por diversos métodos que se explican en el desarrollo de la Tesis. Además se estudia la consistencia entre estas diversas alternativas.

### 4.1. El Modelo de Nambu

El modelo de Nambu está definido por la densidad Lagrangiana

$$L_N = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu, \quad (4.1)$$

más la siguiente restricción al cuadripotencial  $A^\mu$ :

$$A_\mu A^\mu = -\lambda^2. \quad (4.2)$$

Esta restricción se puede resolver directamente para cualquiera de las componentes de  $A^\mu$ . Entonces hay tres componentes que pueden ser vistas como dinámicamente indepen-

dientes, de tal modo que la cuarta componente es función de éstas. Bajo una transformación de Lorentz, las cuatro componentes transforman linealmente, pero las tres variables independientes del cuadripotencial tendrán que transformarse no linealmente entre ellas mismas. En general, hay tres casos que deben ser considerados[18]:

$$\lambda^2 > 0 \text{ (temporaloide) , } \lambda^2 = 0 \text{ (nulo) } \text{ y } -\lambda^2 < 0 \text{ (espacialoide) .}$$

En esta tesis sólo se estudiará el caso temporaloide. Eligiendo las componentes espaciales del cuadripotencial como independientes, se obtiene

$$A_0 A^0 + \mathbf{A}^2 = -\lambda^2 \Leftrightarrow A^0 = \sqrt{\lambda^2 + \mathbf{A}^2} , \quad (4.3)$$

Con lo anterior, el Lagrangiano de la ecuación (4.1) resulta una función solo de  $A^i$ :

$$L_N(A^0 = \sqrt{\lambda^2 + \mathbf{A}^2}, A^i) . \quad (4.4)$$

A continuación calculamos el cambio infinitesimal de  $A^0$  como

$$\delta A^0 = \delta \left( \sqrt{\lambda^2 + \mathbf{A}^2} \right) = \frac{A^j \delta A_j}{\sqrt{\lambda^2 + \mathbf{A}^2}} = \frac{A^j \delta A_j}{A^0} . \quad (4.5)$$

Para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange, variamos  $L_N$  recuperando la expresión (3.69) con la diferencia ahora que no todos los  $\delta A^\mu$  son independientes en virtud de (4.5). Separando índices temporales y espaciales:

$$\delta L_N = (-\partial^\nu F_{0\nu} + J_0) \delta A^0 + (-\partial^\nu F_{i\nu} + J_i) \delta A^i . \quad (4.6)$$

Usando la ecuación (4.5):

$$\begin{aligned} \delta L_N &= (-\partial^\nu F_{0\nu} + J_0) \frac{A_i \delta A^i}{A^0} + (-\partial^\nu F_{i\nu} + J_i) \delta A^i = 0 , \\ \therefore \frac{\delta L_N}{\delta A^i} &= (-\partial^\nu F_{0\nu} + J_0) \frac{A_i}{A^0} + (-\partial^\nu F_{i\nu} + J_i) = 0 . \end{aligned} \quad (4.7)$$

En términos del campo electromagnético la ecuación anterior resulta

$$(\nabla \cdot \mathbf{E} - \rho) \frac{\mathbf{A}}{A^0} + (\partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{j}) = \mathbf{0} . \quad (4.8)$$

Vemos que para recuperar las ecuaciones de Maxwell, tenemos que imponer la Ley de Gauss (2.1) para todo tiempo, como una constricción adicional, i.e.,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - \rho \equiv 0 \quad \forall t . \quad (4.9)$$

Es necesario verificar que esta constricción sea consistente con las ecuaciones de movimiento (4.8). Analizemos la evolución temporal de la constricción (4.9)

$$\frac{d}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{E} - \rho) = \nabla \cdot (\partial_t \mathbf{E}) - \partial_t \rho . \quad (4.10)$$



Despejando  $\partial_t \mathbf{E}$  de (4.8):

$$\partial_t \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{j} - (\nabla \cdot \mathbf{E} - \rho) \frac{\mathbf{A}}{A^0}, \quad (4.11)$$

y sustituyendo en (4.10) resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{E} - \rho) &= \nabla \cdot \left[ \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{j} - (\nabla \cdot \mathbf{E} - \rho) \frac{\mathbf{A}}{A^0} \right] - \partial_t \rho, \\ &= -\partial_t \rho - \nabla \cdot \mathbf{j}_{ef}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

La última igualdad se cumple porque  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$  y además por haber realizado la sustitución:

$$\mathbf{j}_{ef} = \mathbf{j} + (\nabla \cdot \mathbf{E} - \rho) \frac{\mathbf{A}}{A^0}. \quad (4.13)$$

Ahora, aplicando la constricción (4.9):

$$\mathbf{j}_{ef} = \mathbf{j} \quad (4.14)$$

$$\therefore \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{E} - \rho) = -\partial_t \rho - \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (4.15)$$

Vemos que en efecto la constricción se mantiene en el tiempo debido a la ecuación de continuidad (2.5) ya conocida. Resumiendo, el modelo de Nambu más la imposición de la Ley de Gauss (4.9) produce una teoría equivalente a la ED. La interpretación natural es que el modelo de Nambu más la Ley de Gauss es equivalente a la Electrodinámica en la norma  $A_\mu A^\mu = -\lambda^2$ .

## 4.2. La ED en la Norma no lineal $A_\mu A^\mu = -\lambda^2$

En esta sección estudiaremos la Electrodinámica en esta norma no lineal, para lo cual se procede en forma similar a los estudios de las transformaciones de norma realizados en los capítulos 2 y 3. Lo que haremos será analizar cómo cambia el potencial  $A^\mu$ , conocido en la norma de Coulomb, cuando se hace la transformación para pasar a la norma no lineal  $A_\mu A^\mu = -\lambda^2$  para algunos casos especiales. El propósito aquí, es determinar la existencia de la función  $\Lambda(\mathbf{r}, t)$  que nos permite pasar a la norma  $A_\mu A^\mu = -\lambda^2$ .

Con este objeto, se determinará explícitamente la función  $\Lambda(\mathbf{r}, t)$  definida en la ecuación (3.74). Como se ha mencionado previamente se analizarán los siguientes casos: una carga puntual estática, un alambre infinito, un sistema con campo magnético constante y un sistema con un campo eléctrico constante.

Sea  $A^\mu$  el potencial electromagnético en la norma de Coulomb. Nos interesa hallar  $\Lambda$ , tal que

$$A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu \Lambda, \quad (4.16)$$

está en la norma no lineal, es decir que se satisfaga

$$A'_\mu A^{\mu'} = -\lambda^2 \Leftrightarrow (A^\mu + \partial^\mu \Lambda)^2 = -\lambda^2. \quad (4.17)$$

Para facilidad de cálculos posteriores despejaremos  $\Phi'$  en la primera ecuación de (4.17)

$$(\Phi')^2 = (\mathbf{A}')^2 + \lambda^2. \quad (4.18)$$

### 4.2.1. El campo Coulombiano

Consideremos una carga puntual  $q$  en el origen. Este problema tiene las siguientes características en la norma de Coulomb[19]:

$$\Phi = \frac{Q}{r}, \quad \mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}; \quad (4.19)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (4.20)$$

La ecuación (4.16) produce

$$\Phi' = \frac{Q}{r} + \partial^0 \Lambda = \frac{Q}{r} - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda; \quad (4.21)$$

$$\mathbf{A}' = \nabla \Lambda. \quad (4.22)$$

Y sustituyendo en (4.18) obtenemos

$$\left( \frac{Q}{r} - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda \right)^2 = (\nabla \Lambda)^2 + \lambda^2. \quad (4.23)$$

Para resolver esta ecuación, usaremos separación de variables. Proponemos

$$\Lambda(\mathbf{r}, t) = f_1(r) + f_2(\theta) + f_3(t), \quad (4.24)$$

con  $f_3(t) = cat$  de tal modo que  $\partial_t \Lambda = c\alpha$ . Introduciendo la expresión (4.24) para  $\Lambda$  resulta

$$\begin{aligned} \left( \frac{Q}{r} - \alpha \right)^2 - \lambda^2 &= \left( \partial_r \Lambda \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \partial_\theta \Lambda \hat{\theta} \right)^2 \\ \Leftrightarrow \left( \frac{Q}{r} - \alpha \right)^2 - \lambda^2 &= (\partial_r \Lambda)^2 + \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \Lambda)^2 \\ \Rightarrow \left( \frac{Q}{r} - \alpha \right)^2 - \lambda^2 &= (\partial_r f_1(r))^2 + \frac{1}{r^2} (\partial_\theta f_2(\theta))^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Finalmente, nos falta determinar  $f_1(r)$  y  $f_2(\theta)$ . Para obtenerlas, imponemos la simetría esférica de este sistema físico, suponiendo así que  $f_2(\theta) = \beta_2\theta$  y obteniendo

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{r} - \alpha\right)^2 - \lambda^2 &= [\partial_r f_1(r)]^2 + \frac{\beta_2^2}{r^2}, \\ \Leftrightarrow \partial_r f_1(r) &= \pm \sqrt{\left(\frac{Q}{r} - \alpha\right)^2 - \lambda^2 - \frac{\beta_2^2}{r^2}}, \\ \Leftrightarrow f_1(r) &= \pm \int \sqrt{\left(\frac{Q}{r} - \alpha\right)^2 - \lambda^2 - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Para nuestros fines basta con dejar esta integral indicada. Por compatibilidad con los resultados posteriores de la teoría se elegirá el signo  $-$  de la raíz. Así, concluimos que  $\Lambda$  tiene la siguiente forma:

$$\Lambda(\mathbf{r}, t) = - \int \sqrt{\left(\frac{Q}{r} - \alpha\right)^2 - \lambda^2 - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr + \beta_2\theta + cat. \quad (4.27)$$

#### 4.2.2. El campo magnético producido por un alambre infinito

Consideremos un alambre recto infinito con corriente  $I$  en la dirección del eje  $Z$ . El campo electromagnético de un alambre finito y sus respectivos potenciales en la norma de Coulomb son[19]:

$$\mathbf{A} = -\frac{2I}{c} \ln \rho \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{B} = \frac{2I}{\rho} \hat{\phi}; \quad (4.28)$$

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (4.29)$$

Para obtener los potenciales en la norma no lineal sustituimos los potenciales en (4.16) obteniendo:

$$\Phi' = -\frac{1}{c} \partial_t \Lambda, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{A}' = -\frac{2I}{c} \ln \rho \hat{\mathbf{k}} + \nabla \Lambda. \quad (4.31)$$

Sustituyendo (4.30) y (4.31) en (4.18), hallamos la siguiente ecuación para  $\Lambda$ :

$$\left(\frac{1}{c} \partial_t \Lambda\right)^2 = \left(-\frac{2I}{c} \ln \rho \hat{\mathbf{k}} + \nabla \Lambda\right)^2 + \lambda^2. \quad (4.32)$$

Reescribimos esta ecuación no lineal para resolverla más fácilmente:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{c}\partial_t\Lambda\right)^2 &= \left(-\frac{2I}{c}\ln\rho\hat{\mathbf{k}} + \nabla\Lambda\right) \cdot \left(-2I\ln\rho\hat{\mathbf{k}} + \nabla\Lambda\right) + \lambda^2, \\
&= \frac{4I^2}{c^2}(\ln\rho)^2 - \frac{4I}{c}\ln\rho\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla\Lambda + (\nabla\Lambda)^2 + \lambda^2, \\
&= \frac{4I^2}{c^2}(\ln\rho)^2 - \frac{4I}{c}\ln\rho\hat{\mathbf{k}} \cdot \left(\partial_\rho\Lambda\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\partial_\phi\Lambda\hat{\phi} + \partial_z\Lambda\hat{\mathbf{k}}\right) + (\nabla\Lambda)^2 + \lambda^2, \\
&= \frac{4I^2}{c^2}(\ln\rho)^2 - \frac{4I}{c}\ln\rho\partial_z\Lambda + (\nabla\Lambda)^2 + \lambda^2, \\
&= \frac{4I^2}{c^2}(\ln\rho)^2 - \frac{4I}{c}\ln\rho\partial_z\Lambda + (\partial_\rho\Lambda)^2 + \frac{1}{\rho^2}(\partial_\phi\Lambda)^2 + (\partial_z\Lambda)^2 + \lambda^2. \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Tras analizar los términos proponemos

$$\Lambda(\mathbf{r}, t) = f_1(\rho) + \beta_2\phi + \beta_3z + cat. \quad (4.34)$$

Sustituyendo en (4.33) tenemos entonces:

$$\alpha^2 = \frac{4I^2}{c^2}(\ln\rho)^2 - \frac{4I}{c}\beta_3\ln\rho + [\partial_\rho f_1(\rho)]^2 + \frac{\beta_2^2}{\rho^2} + \beta_3^2 + \lambda^2 \quad (4.35)$$

$$\Leftrightarrow [\partial_\rho f_1(\rho)]^2 = \alpha^2 - \lambda^2 - \frac{\beta_2^2}{\rho^2} - \frac{4I^2}{c^2}(\ln\rho)^2 + \frac{4I}{c}\beta_3\ln\rho - \beta_3^2 \quad (4.36)$$

$$\Leftrightarrow f_1(\rho) = \pm \int \sqrt{\alpha^2 - \lambda^2 - \frac{\beta_2^2}{\rho^2} - \left(\frac{2I}{c}\ln\rho - \beta_3\right)^2} d\rho. \quad (4.37)$$

Por compatibilidad con los resultados posteriores de la teoría se elegirá el signo  $-$  de la raíz.

$$\begin{aligned}
\therefore \Lambda(\mathbf{r}, t) &= - \int \sqrt{\alpha^2 - \lambda^2 - \frac{\beta_2^2}{\rho^2} - \left(\frac{2I}{c}\ln\rho - \beta_3\right)^2} d\rho \\
&\quad + \beta_2\phi + \beta_3z + cat. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

### 4.2.3. El campo magnético constante

En la norma de Coulomb un campo magnético constante en la dirección  $Z$  está descrito por[19]:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}; \quad (4.39)$$

$$\Phi = 0 \quad , \quad \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (4.40)$$

Al igual que en los casos anteriores, para ver la forma que adquirirán estos potenciales en la norma no lineal, los sustituimos en (4.16), teniendo así:

$$\Phi' = -\frac{1}{c}\partial_t\Lambda, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) + \nabla\Lambda. \quad (4.42)$$

Sustituyendo (4.41) y (4.42) en la expresión (4.18) tenemos:

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t\Lambda\right)^2 = \lambda^2 + \left[\frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) + \nabla\Lambda\right]^2 = \lambda^2 + \left[\frac{B}{2}(x\hat{\mathbf{j}} - y\hat{\mathbf{i}}) + \nabla\Lambda\right]^2. \quad (4.43)$$

Ahora para simplificar esta ecuación diferencial parcial no lineal de primer orden, hacemos una transformación de norma adicional con la siguiente función escalar:

$$\tilde{\Lambda} = \frac{B}{2}xy. \quad (4.44)$$

Se observa lo siguiente:

$$\Phi'' = \Phi' - \frac{1}{c}\partial_t\tilde{\Lambda} = \Phi'. \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'' &= \mathbf{A} + \nabla\tilde{\Lambda}, \\ &= \frac{B}{2}(x\hat{\mathbf{j}} - y\hat{\mathbf{i}}) + \nabla\left(\frac{B}{2}xy\right), \\ &= \frac{B}{2}(x\hat{\mathbf{j}} - y\hat{\mathbf{i}}) + \partial_x\left(\frac{B}{2}xy\right)\hat{\mathbf{i}} + \partial_y\left(\frac{B}{2}xy\right)\hat{\mathbf{j}}, \\ &= \frac{B}{2}(x\hat{\mathbf{j}} - y\hat{\mathbf{i}}) + \frac{B}{2}y\hat{\mathbf{i}} + \frac{B}{2}x\hat{\mathbf{j}}, \\ &= Bx\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Sustituyendo entonces  $\mathbf{A}'$ ,  $\Phi'$  por  $\mathbf{A}''$ ,  $\Phi''$  en (4.16) obtenemos una ecuación ligeramente más sencilla de resolver:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c}\partial_t\Lambda\right)^2 &= \lambda^2 + [Bx\hat{\mathbf{j}} + \nabla\Lambda]^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{c}\partial_t\Lambda\right)^2 &= \lambda^2 + (Bx\hat{\mathbf{j}} + \nabla\Lambda) \cdot (Bx\hat{\mathbf{j}} + \nabla\Lambda), \\ &= \lambda^2 + B^2x^2 + 2Bx\partial_y\Lambda + (\partial_x\Lambda)^2 + (\partial_y\Lambda)^2 + (\partial_z\Lambda)^2. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Si analizamos los términos, es posible proponer una función análoga a la empleada en el alambre finito

$$\Lambda(\mathbf{x}, t) = f_1(x) + \beta_2 y + c\alpha t, \quad (4.48)$$

con lo cual (4.47) toma la siguiente forma:

$$\alpha^2 = \lambda^2 + B^2 x^2 + [\partial_x f_1(x)]^2 + \beta_2^2 + 2Bx\beta_2, \quad (4.49)$$

$$= \lambda^2 + [\partial_x f_1(x)]^2 + (Bx + \beta_2)^2 \quad (4.50)$$

$$\Leftrightarrow f_1(x) = \pm \int \sqrt{\alpha^2 - \lambda^2 - (Bx + \beta_2)^2} dx. \quad (4.51)$$

Por compatibilidad con los resultados posteriores de la teoría se elegirá el signo  $-$  de la raíz.

$$\therefore \Lambda(\mathbf{x}, t) = - \int \sqrt{\alpha^2 - \lambda^2 - (Bx + \beta_2)^2} dx + \beta_2 y + cat, \quad (4.52)$$

#### 4.2.4. El campo eléctrico constante

En la norma de Coulomb un campo eléctrico constante en la dirección  $Z$  está determinado por[19]:

$$\mathbf{E} = \varepsilon \hat{\mathbf{k}}, \quad \Phi = -\varepsilon z; \quad (4.53)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (4.54)$$

Sustituyendo en (4.16) tenemos

$$\Phi' = -\varepsilon z - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda, \quad (4.55)$$

$$\mathbf{A}' = \nabla \Lambda, \quad (4.56)$$

y sustituyendo (4.55) y (4.56) en (4.18) obtenemos

$$\left( \varepsilon z + \frac{1}{c} \partial_t \Lambda \right)^2 = \lambda^2 + (\nabla \Lambda)^2 \quad (4.57)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2 z^2 + \frac{2\varepsilon z}{c} \partial_t \Lambda + \left( \frac{1}{c} \partial_t \Lambda \right)^2 = \lambda^2 + (\partial_x \Lambda)^2 + (\partial_y \Lambda)^2 + (\partial_z \Lambda)^2. \quad (4.58)$$

Analizando los términos en (4.58) a través de su dependencia funcional y en forma análoga a los sistemas anteriores, es posible proponer:

$$\Lambda(\mathbf{x}, t) = \beta_1 x + \beta_2 + f(z) + cat, \quad (4.59)$$

Con lo cual (4.58) se reescribe como sigue

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 z^2 + 2\varepsilon z \alpha + \alpha^2 &= \lambda^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + [\partial_z f(z)]^2 \\ \Leftrightarrow [\partial_z f(z)]^2 &= (\varepsilon z + \alpha)^2 - \lambda^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 \\ \Leftrightarrow \partial_z f(z) &= \pm \sqrt{(\varepsilon z + \alpha)^2 - \lambda^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2} \\ \Leftrightarrow f(z) &= \pm \int \sqrt{(\varepsilon z + \alpha)^2 - \lambda^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2} dz. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Por compatibilidad con los resultados posteriores de la teoría se elegirá el signo  $-$  de la raíz.

$$\begin{aligned} \therefore \Lambda(\mathbf{x}, t) &= \beta_1 x + \beta_2 y \\ &\quad - \int \sqrt{(\varepsilon z + \alpha)^2 - \lambda^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2} dz + cat. \end{aligned} \quad (4.61)$$

En estos ejemplos hemos determinado explícitamente la forma de  $\Lambda(\mathbf{r}, t)$  para pasar a la norma no lineal. Sin embargo, las ecuaciones (4.27), (4.38), (4.52) y (4.61) que definen las transformaciones de norma aparentemente no están bien definidas en todo el espacio tiempo, ya que están restringidas a regiones donde los radicales sean mayores o iguales a cero. Esto indicaría que la norma  $A_\mu A^\mu = -\lambda^2$  no es admisible. En el próximo capítulo discutimos una manera alternativa de calcular la función de norma  $\Lambda$ .

## Capítulo 5

# La norma no lineal $A'_\mu A'^\mu = -\lambda^2$ y la formulación de Hamilton-Jacobi

Como hemos visto, pasar de una norma dada  $A^\mu$  a la norma no lineal significa hallar una función  $\Lambda(\mathbf{x}, t)$  tal que

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t) + \partial^\mu \Lambda(\mathbf{x}, t)]^2 = -\lambda^2. \quad (5.1)$$

Ahora la pregunta relevante es cómo determinamos si la ecuación (5.1) tiene soluciones para un  $A^\mu$  arbitrario. Para contestar esto, recurrimos a la idea planteada por Yoichiro Nambu [5]. Nambu observó que la ecuación de Hamilton-Jacobi (H-J) Relativista para una partícula en un campo externo  $A^\mu$  es:

$$\left[ \partial_\mu S(\mathbf{x}, t) - \frac{q}{c} A_\mu(\mathbf{x}, t) \right] \left[ \partial^\mu S(\mathbf{x}, t) - \frac{q}{c} A^\mu(\mathbf{x}, t) \right] = -m^2 c^2, \quad (5.2)$$

donde  $S$  es la función principal de Hamilton. La comparación de las ecuaciones (5.1) y (5.2) muestra la correspondencia

$$\Lambda = -\frac{c}{q} S, \quad (5.3)$$

$$\lambda = mc^2/q. \quad (5.4)$$

Entonces (5.1) tendrá una solución en la medida en que haya una solución para el problema relativista y/o su límite no relativista, asociado a la partícula correspondiente. En otras palabras, el problema asociado consiste en calcular la dinámica de una partícula cargada que se mueve bajo la acción de los campos electromagnéticos cuya transformación de norma nos interesa estudiar. En lo sucesivo exploramos esta posibilidad para encontrar la función de norma  $\Lambda$  con base en la relación (5.3). Es decir, invertimos el proceso y nos concentramos en el cálculo de la función principal de Hamilton (no-relativista) para los ejemplos considerados. Posteriormente en el Capítulo 7, retomamos las funciones  $\Lambda$  calculadas en el Capítulo 4, obtenemos las respectivas funciones principales de Hamilton empleando la relación (5.3), calculamos su límite no relativista y comparamos con los resultados obtenidos directamente en el Capítulo 6.



## 5.1. La ecuación de Hamilton-Jacobi

Motivados por lo anterior, en adelante usaremos extensivamente la ecuación de Hamilton-Jacobi. Por ello revisaremos la teoría en la que está fundamentada.

El método de Hamilton-Jacobi es un camino alternativo; no necesariamente un atajo, para integrar las ecuaciones diferenciales de movimiento de un sistema Mecánica Analítica.

Esta formulación se debe casi en su totalidad a Sir William Rowan Hamilton. En su desarrollo hizo uso de las propiedades de las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden que también fueron consideradas por Karl Gustav Jacob Jacobi. De ahí que este método en la mecánica lleve el nombre de los dos personajes.

Para comenzar, supongamos el caso de un sistema de  $N$  partículas masivas, que se mueven por el espacio físico debido a la acción de fuerzas conservativas y sujeto a  $l$  constricciones holonómicas. Sea  $H$  la función hamiltoniana de estado dinámico,

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \quad (5.5)$$

cuyas variables satisfacen las ecuaciones de Hamilton.

Ahora consideremos una transformación canónica, en que las nuevas coordenadas y los nuevos momentos sean constantes de movimiento. Además pedimos que el nuevo Hamiltoniano  $K$  sea 0. Entonces, lo que se está proponiendo es una transformación canónica muy especial:

$$T : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \longrightarrow (\alpha, \beta) , K = 0 ; \quad (5.6)$$

siendo las  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  un conjunto de  $6N - 2l$  constantes de movimiento.

Una transformación canónica de esta naturaleza ha vuelto trivial el problema de las ecuaciones de Hamilton.

La transformación canónica es tal que las coordenadas generalizadas y momentos son mapeados en un punto fijo  $(\alpha_i, \beta_i)$  del espacio fase. De hecho, si las  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  son conocidas y la transformación canónica está determinada, entonces, en el caso en que ésta sea invertible, es posible establecer el problema inverso:

$$T^{-1} : (\alpha, \beta) \longrightarrow (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . \quad (5.7)$$

En estas condiciones, será posible conocer a las coordenadas y los momentos en todo instante. Este es el camino que propuso Hamilton al principio del siglo XIX y que se conoce como la *formulación de Hamilton-Jacobi*.

Para atacar el problema, consideremos ahora que la transformación canónica (5.6), ha sido generada por una función  $\tilde{S}$  que pertenece a la clase  $F_2$  [20, 21]. Las funciones de

esta clase, se definen como aquellas funciones generadoras de transformaciones canónicas, que dependen de las “viejas” coordenadas, los “nuevos” momentos y el tiempo, en general. Esto quiere decir que estas funciones son del tipo general siguiente:

$$F_2 \equiv F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) . \quad (5.8)$$

Para que una función sea clase  $F_2$  debe satisfacer las siguientes condiciones diferenciales:

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_k} = p_k \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, 3N - l , \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_k} = Q_k \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, 3N - l , \quad (5.10)$$

$$H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = K . \quad (5.11)$$

Si esto es así, entonces la función generadora  $\tilde{S}$  debe depender de las “viejas” coordenadas generalizadas y de los “nuevos” momentos, que para este caso son todas las constantes  $\beta$ , y del tiempo; esto es:

$$\tilde{S} \equiv \tilde{S}(\mathbf{q}, \beta, t) \in F_2 . \quad (5.12)$$

Siendo una función de clase  $F_2$ , según se ha postulado, entonces debe satisfacer las condiciones diferenciales (5.9), (5.10) y (5.11):

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k} = p_k \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, 3N - l , \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta_k} = \alpha_k \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, 3N - l , \quad (5.14)$$

$$H + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0 . \quad (5.15)$$

La función generadora  $\tilde{S}$  se conoce como la *función principal de Hamilton* y es ella la que genera, por hipótesis, la transformación canónica (5.6).

Para convencernos de que, en efecto, la función principal de Hamilton (5.12) genera, a través de las condiciones diferenciales (5.13) y (5.14), la transformación canónica buscada, merece la pena estudiar con detalle aquí estas expresiones.

Supongamos por el momento que la función principal de Hamilton es conocida. Ahora pensemos que esta función es derivada parcialmente, con respecto a cada una de las viejas coordenadas, tal como se establece en (5.13). Lo que se obtiene al derivar esta función con respecto a cada  $q_k$  es una nueva función (una por cada derivada) que, en general, se puede entender como dependiente, nuevamente, de las viejas coordenadas, de los parámetros  $\beta_k$  y del tiempo. Si se designa a cada una de las funciones que resultan de este proceso de derivación como  $\Phi_k$ , esto es:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k} \equiv \Phi_k(\mathbf{q}, \beta, t) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, 3N - l , \quad (5.16)$$

entonces, de acuerdo con (5.13), lo que se ha obtenido es un sistema de  $3N - l$  ecuaciones simultáneas:

$$p_k \equiv \Phi_k(\mathbf{q}, \beta, t) ; k = 1, 2, \dots, 3N - l , \quad (5.17)$$

El mismo razonamiento es válido para la segunda parte de las condiciones diferenciales (5.14); i.e., si  $\tilde{S}$  es conocida, entonces al derivarla con respecto a cada uno de los parámetros  $\beta$ , se va a obtener una función  $\Psi_k$  que, en general, debe suponerse como una función de viejas coordenadas, parámetros  $\beta$  y el tiempo:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta_k} = \Psi_k(\mathbf{q}, \beta, t) ; k = 1, 2, \dots, 3N - l , \quad (5.18)$$

de tal modo que, de acuerdo con (5.14) se ha establecido ahora un sistema de  $3N - l$  ecuaciones simultáneas:

$$\alpha_k \equiv \Psi_k(\mathbf{q}, \beta, t) ; k = 1, 2, \dots, 3N - l , \quad (5.19)$$

De este último paso, haciendo únicamente álgebra, es posible despejar cada una de las  $3N - l$  coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, \dots, q_{3N-l}$ , en función de los parámetros  $\alpha, \beta$  y el tiempo  $t$ ; esto es:

$$q_k = q_k(\alpha, \beta, t) ; k = 1, 2, \dots, 3N - l , \quad (5.20)$$

Una vez despejadas las coordenadas, se puede ahora sustituir cada una de ellas, tal como se ve en (5.20), en las expresiones (5.17). Así, lo que queda son  $3N - l$  momentos generalizados, en términos de los parámetros

$$p_k = p_k(\alpha, \beta, t) ; k = 1, 2, \dots, 3N - l , \quad (5.21)$$

Lo que se ha obtenido son las fórmulas paramétricas de coordenadas y momentos, en función del tiempo. En otras palabras, se trata de toda una familia de trayectorias en el espacio fase. Para conocer cuál de todas las trayectorias es la que el sistema dinámico seguirá, es necesario despejar los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de las expresiones (5.20) y (5.21). Se obtiene lo siguiente:

$$\alpha_k \equiv \alpha_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) ; k = 1, 2, \dots, 3N - l \quad (5.22)$$

$$\beta_k \equiv \beta_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) ; k = 1, 2, \dots, 3N - l . \quad (5.23)$$

Estas son las nuevas expresiones para una transformación canónica de “viejas ” a “nuevas ” coordenadas y momentos; que se describieron genéricamente en (5.6).

Ahora si se establecen las condiciones iniciales en (5.22) y (5.23) al tiempo  $t_0$ , se tiene que:

$$\alpha_k \equiv \alpha_k(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0) ; k = 1, 2, \dots, 3N - l \quad (5.24)$$

$$\beta_k \equiv \beta_k(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0) ; k = 1, 2, \dots, 3N - l . \quad (5.25)$$

Esto significa que los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  han quedado totalmente determinados.

Finalmente, sustituyendo estas funciones de las condiciones iniciales, de vuelta en (5.20) y (5.21), proceso que describe (5.7) obtenemos:

$$q_k \equiv q_k(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) ; k = 1, 2, \dots, 3N - l \quad (5.26)$$

$$p_k \equiv p_k(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) ; k = 1, 2, \dots, 3N - l . \quad (5.27)$$

Estas son las ecuaciones de movimiento del sistema, en términos de sus condiciones iniciales. Por lo tanto, el problema ha quedado resuelto.

Sin embargo, aún necesitamos conocer la función principal de Hamilton. Para obtenerla es necesario revisar una condición diferencial que aún no ha sido explorada: se trata de la (5.15). Recordando que el Hamiltoniano es función de las coordenadas generalizadas y de los momentos canónicos conjugados, esta expresión se puede reescribir como

$$H(\mathbf{q}, \nabla \tilde{S}, t) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0 , \quad (5.28)$$

en donde se ha sustituido, en vez de los momentos, las derivadas parciales de la función principal de Hamilton, con respecto a las coordenadas generalizadas de acuerdo con (5.13).

La expresión (5.28) es una ecuación diferencial no lineal de primer orden, en las derivadas parciales de la función principal de Hamilton,  $\tilde{S}$ . Se trata de la llamada *ecuación de Hamilton-Jacobi*. Para hallar la función  $\tilde{S}$  es necesario resolver esta ecuación.

Finalmente, es conveniente investigar un poco más acerca de la naturaleza de la función principal de Hamilton. Tomando la diferencial total y de acuerdo con su dependencia funcional (5.12), se tiene que

$$d\tilde{S} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta_k} d\beta_k + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} dt . \quad (5.29)$$

Como los nuevos momentos  $\beta_k$  son constantes (5.29) se reduce a

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{S}}{dt} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} . \quad (5.30)$$

Pero las derivadas de  $\tilde{S}$  con respecto a las coordenadas son los momentos, según se ve en (5.13) y la derivada temporal, de acuerdo con H-J (5.28), es el Hamiltoniano, tal como se deduce de (5.15). De este modo

$$\frac{d\tilde{S}}{dt} = p_k \dot{q}_k - H = L ; \quad (5.31)$$

donde  $L$  es el Lagrangiano. Por lo tanto, integrando se obtiene que:

$$\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} (p_k \dot{q}_k - H) dt . \quad (5.32)$$

Así, se ha demostrado que la función principal de Hamilton es la Acción del sistema.

## 5.2. Ecuaciones de movimiento y el papel de los extremos fijos en la acción

Como sabemos las ecuaciones de movimiento del sistema se obtienen a partir del Principio de Mínima Acción que establece lo siguiente[20, 22]: “De entre todas las trayectorias posibles que un sistema pudiera seguir bajo ciertas fuerzas aplicadas y constricciones específicas en un intervalo de tiempo  $t_0$  y  $t_1$ , la que realmente ocurrirá es aquella que corresponda a un valor extremal de una funcional llamada Acción”, cuya expresión matemática es

$$\delta S = 0 . \quad (5.33)$$

En términos del Lagrangiano la acción es

$$\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt . \quad (5.34)$$

Al calcular la primera variación de esta acción, se obtiene

$$\delta \tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} \delta L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt , \quad (5.35)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt = 0 , \quad (5.36)$$

con la regla de suma sobre índices repetidos. Pero el término en las variaciones de las velocidades, lo podemos reescribir ya que la operación de variación y la derivación total con respecto al tiempo son conmutativas. De este modo al integrar por partes el segundo integrando de (5.36) y al factorizar hallamos la siguiente expresión

$$\delta \tilde{S} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k dt = 0 . \quad (5.37)$$

Como toda la expresión tiene que ser igual a cero, esto pasa únicamente si en el primer sumando, que depende solamente de los extremos, la variación de las coordenadas en esos puntos es cero. Esto impone la condición de extremos fijos en el principio variacional. Por otro lado, las variaciones que sufre la trayectoria del sistema entre  $t_0$  y  $t_1$  son arbitrarias excepto en los dos puntos ya mencionados, por lo cual, el corchete del segundo sumando también debe ser igual a cero, i.e.,

$$\delta q_k(t_0) = \delta q_k(t_1) = 0 , \quad (5.38)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 . \quad (5.39)$$

Observamos que la última condición nos da las *ecuaciones de Euler-Lagrange*. Si denotamos por  $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$  y a  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$  podemos concluir que

$$\tilde{S} = \tilde{S}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0, t_1, t_0) . \quad (5.40)$$

Sin embargo, es posible cambiar las variables del sistema dentro de la acción a través de una transformación de Legendre entre la velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$  y el momento  $\mathbf{p}$ . Esto se logra introduciendo el Hamiltoniano del sistema como se hace en (5.32)

$$\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} [p_k \dot{q}_k - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)] dt = 0 . \quad (5.41)$$

Aplicando el Principio de Mínima Acción a  $\tilde{S}$ , obtenemos

$$\delta \tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} [\delta(p_k \dot{q}_k) + \delta H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)] dt , \quad (5.42)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[ p_k \delta \dot{q}_k + \dot{q}_k \delta p_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \right] dt = 0 . \quad (5.43)$$

Al integrar por partes  $p_k \delta \dot{q}_k$  y factorizar, tenemos:

$$\delta \tilde{S} = p_k \delta q_k \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( -\dot{p}_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k + \left( \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k \right] dt = 0 . \quad (5.44)$$

Como ya vimos anteriormente, para que esta expresión sea igual a cero, debemos tomar extremos fijos en  $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$  y a  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ . Además como las variaciones con respecto a las coordenadas y momentos son arbitrarias en el intervalo  $[t_0, t_1]$ , encontramos que:

$$\delta q_k(t_0) = \delta q_k(t_1) = 0 , \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k , \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k . \quad (5.47)$$

Identificamos las ecs. (5.46) y (5.47) como las *ecuaciones de Hamilton*. Además observamos que pese a haber hecho la transformación de Legendre al Hamiltoniano, el principio variacional resultante requiere mantener las coordenadas fijas en los extremos de acuerdo con la ec.(5.45). Concluyendo de nueva cuenta que  $\tilde{S}$  tiene la misma dependencia que en (5.40).

Siguiendo estas ideas, es posible hacer que la acción dependa de otras variables distintas a las ya indicadas. Esto se muestra en el siguiente ejemplo: donde consideramos la misma acción (5.32), sólo que le sumamos una función particular:

$$\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} [p_k \dot{q}_k - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)] dt - p_k q_k \Big|_{t_0} . \quad (5.48)$$

Aplicando el Principio de Mínima Acción se tiene

$$\delta \tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} [p_k \delta \dot{q}_k + \dot{q}_k \delta p_k - \delta H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)] dt - p_k \delta q_k \Big|_{t_0} - q_k \delta p_k \Big|_{t_0} = 0 . \quad (5.49)$$

Integrando por partes  $p_k \delta \dot{q}_k$  y factorizando los términos semejantes obtenemos

$$\begin{aligned} \delta \tilde{S} &= p_k \delta q_k \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( -\dot{p}_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k + \left( \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k \right] dt \\ &\quad - p_k \delta q_k \Big|_{t_0} - q_k \delta p_k \Big|_{t_0}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( -\dot{p}_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k + \left( \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k \right] dt \\ &\quad - p_k \delta q_k \Big|_{t_1} - q_k \delta p_k \Big|_{t_0} = 0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Para que esta ecuación sea igual a cero, utilizamos los hechos antes descritos: i) la arbitrariedad de las variaciones de las coordenadas y de los momentos en el intervalo; y ii) fijar los extremos, que en este caso son  $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$  y a  $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$ , obteniendo las siguientes condiciones:

$$\delta p_k(t_0) = \delta q_k(t_1) = 0, \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k, \quad (5.53)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k. \quad (5.54)$$

Vemos que recuperamos las ecuaciones de Hamilton (5.46) y (5.47). Sin embargo la acción tiene ahora una nueva dependencia:

$$\tilde{S} = \tilde{S}(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_0, t_1, t_0). \quad (5.55)$$

Esta clase de transformaciones entre variables independientes de la acción son un caso particular de las *transformaciones canónicas* [20, 21].

Por otro lado, la ecuación (5.32) nos permite desarrollar un método alternativo para encontrar la acción del sistema basado en la solución de las ecuaciones de movimiento, en vez de resolver la ecuación de H-J(5.28). Este método se basa en tomar el Lagrangiano del sistema e integrarlo con respecto al tiempo de  $t_0$  a  $t_1$ . Sin embargo para poder integrar el Lagrangiano en ese intervalo es necesario conocer  $\mathbf{q}(t)$  como función de los extremos fijos.

El caso de un sistema conservativo permite el uso del método de separación de variables para resolver la ec. de Hamilton-Jacobi (5.28), ya que el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo. Proponemos:

$$\tilde{S}(\mathbf{q}, \beta, t) = W(\mathbf{q}, \beta) - \mathcal{E}t, \quad (5.56)$$

donde  $\mathcal{E}$  es una constante de separación. Sustituyendo (5.56) en (5.28) se consigue

$$H(\mathbf{q}, \nabla W) = \mathcal{E}. \quad (5.57)$$

Lo que identifica a  $\mathcal{E}$  con la energía del sistema. La función  $W$  definida en (5.56) se le conoce como *función característica de Jacobi*. La ecuación de H-J (5.57) queda ahora expresada en términos de las derivadas de esta función con respecto a las coordenadas generalizadas.

Los resultados obtenidos en (5.32) y (5.56) serán de mucha ayuda en desarrollos posteriores.

### 5.3. La partícula libre

Como un ejemplo simple de muchas de las propiedades enunciadas anteriormente consideremos el caso de una partícula libre en una sola dimensión con las siguientes condiciones iniciales:

$$x(t_0 = 0) = 0, \quad (5.58)$$

$$x(t_1) = x_1. \quad (5.59)$$

El Lagrangiano para este sistema es

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2}. \quad (5.60)$$

#### 5.3.1. La acción calculada a partir de la ecuaciones de movimiento

Primero calculamos la acción directamente a partir de las ecuaciones de movimiento. Partimos de

$$\tilde{S} = \int_0^{t_1} \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} dt. \quad (5.61)$$

La velocidad  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$  que es una constante está en función de las condiciones iniciales:  $v = x_1/t_1$ . Entonces

$$\tilde{S}(x_1, t_1) = \frac{mv^2}{2} \int_0^{t_1} dt = \frac{mx_1^2}{2t_1^2} t_1 = \frac{mx_1^2}{2t_1}. \quad (5.62)$$

#### 5.3.2. La acción calculada a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi

Sin embargo, es posible hallar la acción a través de la solución directa de la ecuación de Hamilton-Jacobi. El Hamiltoniano de este sistema es

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (5.63)$$



y la ecuación de Hamilton-Jacobi a resolver es

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0. \quad (5.64)$$

Como  $H$  no depende explícitamente del tiempo, proponemos

$$\tilde{S} \equiv \tilde{S}(x, \mathcal{E}, t) = W(x, \mathcal{E}) - \mathcal{E}t. \quad (5.65)$$

Como se trata de un sistema con un solo grado de libertad, la función principal de Hamilton correspondiente debe concebirse como función de una sola variable y de un solo parámetro  $\mathcal{E}$ . Considerando esto y sustituyendo la ec.(5.65) en la (5.64) obtenemos:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 = \mathcal{E} \Leftrightarrow p = \frac{\partial W}{\partial x} = \pm \sqrt{2m\mathcal{E}}. \quad (5.66)$$

Eligiendo el signo + se encuentra que

$$\tilde{S}(x, t) = \sqrt{2m\mathcal{E}}x - \mathcal{E}t. \quad (5.67)$$

### 5.3.3. La relación entre ambos métodos

Para establecer la conexión entre las acciones (5.62) y (5.67) identificamos, en la ecuación anterior la constante de separación  $\mathcal{E}$  con la energía total. Más aún ésta se debe identificar con el parámetro  $\beta_1$  indicado en la formulación general del método de Hamilton-Jacobi.

Entonces, al usar la condición diferencial (5.14) obtenemos

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta_1} \equiv \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \mathcal{E}} \equiv \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} - t = \frac{mx}{\sqrt{2m\mathcal{E}}} - t = \alpha_1. \quad (5.68)$$

Despejando  $x(t)$  encontramos que

$$x(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} (t + \alpha_1). \quad (5.69)$$

Al aplicar la condición inicial  $x(t_0 = 0) = 0$  llegamos a que

$$\alpha_1 = -t_0 = 0. \quad (5.70)$$

Con esto concluimos que  $\alpha_1$  representa el tiempo inicial al cual empieza el movimiento de la partícula.

También, después de aplicar la condición inicial  $x(t_1) = x_1$  obtenemos

$$x_1 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} t_1. \quad (5.71)$$

Ahora bien, en la expresión (5.67) necesitamos eliminar la energía para dejar a la acción como función únicamente de  $x$  y  $t$  como se ve en (5.62). Entonces de (5.71), despejamos  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} = \frac{m x_1^2}{2 t_1^2}. \quad (5.72)$$

Sustituyendo  $\mathcal{E}$  en (5.67) se tiene

$$\tilde{S}(x, t) = \frac{m x_1}{t_1} x_1 - \frac{m x_1^2}{2 t_1^2} t_1, \quad (5.73)$$

$$= \frac{m x_1^2}{2 t_1}. \quad (5.74)$$

Hemos mostrado así que los dos métodos son equivalentes.

### 5.3.4. Las variables canónicas conjugadas en el método de Hamilton-Jacobi

Para concluir el estudio de la partícula libre, y de acuerdo con la teoría general, verificaremos que  $\mathcal{E} = \beta_1$  y  $\alpha_1$ , son variables conjugadas. Para ello, introduciremos los *corchetes de Poisson*. Dadas dos funciones  $A$  y  $B$  cualesquiera, que están definidas en el espacio fase y son derivables, se define el corchete de Poisson de  $A$  y  $B$  como:

$$\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k}, \quad (5.75)$$

con la regla de suma sobre los índices repetidos.

Entonces, queremos calcular el corchete de Poisson de  $\alpha_1$  y  $\mathcal{E} = \beta_1$ , para lo cual es necesario expresar a estas constantes como funciones de  $x$  y  $p$ . De (5.66) despejamos  $\mathcal{E}$

$$\beta_1 = \mathcal{E} = \frac{p^2}{2m}. \quad (5.76)$$

Usando esta ecuación y despejando  $\alpha_1$  de (5.68) obtenemos:

$$\alpha_1 = \frac{m x}{p} - t, \quad (5.77)$$

Sustituyendo (5.77) y (5.76) en la definición del corchete de Poisson, tenemos

$$\{\alpha_1, \mathcal{E} = \beta_1\} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{m x}{p} - t \right) \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p^2}{2m} \right) - \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{m x}{p} - t \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p^2}{2m} \right) = \frac{m}{p} \frac{p}{m} = 1. \quad (5.78)$$

Con esto último hemos probado que  $\alpha_1$  y  $\mathcal{E}$  son variables conjugadas.

# Capítulo 6

## Aplicación de la ecuación de Hamilton-Jacobi para pasar a la norma $A'_{\mu}A'^{\mu} = -\lambda^2$

En este capítulo aplicaremos el método de Hamilton-Jacobi de acuerdo a la sugerencia de Nambu, para construir los potenciales en la norma no lineal  $A'_{\mu}A'^{\mu} = -\lambda^2$  a partir de la norma de Coulomb. El método está basado en la construcción de la función principal de Hamilton-Jacobi del problema dinámico asociado, que se relaciona con la función  $\Lambda$  que produce la transformación de norma buscada, mediante la expresión (5.3). A continuación calculamos las acciones no-relativistas de los ejemplos considerados, que posteriormente compararemos con los límites no relativistas de las correspondientes acciones obtenidas a partir de los resultados en el Capítulo 4. Para los casos considerados previamente sólo estudiaremos el límite no relativista de la ecuación de H-J Relativista (5.2) y calcularemos las respectivas funciones principales de Hamilton. La relación entre ambos regímenes se describe en el siguiente diagrama:

$p_{\mu}p^{\mu} = -(mc)^2$ [1]	No Relativista $\rightarrow$	$\mathcal{E} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ [2]
$\downarrow p_{\mu} \rightarrow p_{\mu} - \frac{qA_{\mu}}{c}$		$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} - q\Phi \downarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{q\mathbf{A}}{c}$
$(p_{\mu} - \frac{q}{c}A_{\mu})^2 = -(mc)^2$ [3]	No Relativista $\rightarrow$	$\mathcal{E} - q\Phi = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2$ [4]
$\downarrow p_{\mu} \rightarrow \partial_{\mu}S$		$\mathbf{p} \rightarrow \nabla\tilde{S} \downarrow \mathcal{E} \rightarrow -\partial_t\tilde{S}$
$(\partial_{\mu}S - \frac{q}{c}A_{\mu})^2 = -(mc)^2$ [5]	No Relativista $\rightarrow$	$-\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t} + q\Phi\right) = \frac{1}{2m} (\nabla\tilde{S} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2$ [6]

Explicuemos el diagrama recién mostrado. Empecemos por la primera columna. Primero que nada definamos el 4-momento como sigue:

$$p^\mu \equiv \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (6.1)$$

$$\Rightarrow p_\mu p^\mu = -\frac{E^2}{c^2} + \mathbf{p}^2 = -(mc)^2. \quad (6.2)$$

Con lo cual obtenemos  $p_\mu p^\mu = -(mc)^2$  que es la ecuación [1] del diagrama.

No obstante, nosotros estamos estudiando el movimiento de una partícula relativista en un campo electromagnético. De acuerdo a la sección 2.3 entonces para describir la interacción debemos llevar a cabo la *sustitución mínima*, i.e., reemplazar  $p^\mu$  por  $p^\mu - qA^\mu/c$  en [1], obteniendo la ecuación [3] del diagrama.

Después de esto, la formulación de Hamilton-Jacobi requiere que se haga la sustitución  $p^\mu \rightarrow \partial^\mu S$ , siendo  $S$  la acción de la partícula, con lo cual llegamos a la ecuación [5] del diagrama.

Ahora, en la segunda columna, representamos el límite no relativista de las ecuaciones de la columna precedente. Sabemos que

$$p^0 = \frac{E}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} = mc \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}. \quad (6.3)$$

Para ir de la ecuación [1] a la ecuación [2] del diagrama necesitamos considerar el límite cuando  $m \rightarrow \infty$ . Si expandemos (6.3) como binomio se tiene que

$$p^0 = mc \left( 1 + \frac{p^2}{2m^2 c^2} + \dots \right) \quad (6.4)$$

$$\simeq mc + \frac{p^2}{2mc} = mc + \frac{\mathcal{E}}{c}. \quad (6.5)$$

Para identificar  $\mathcal{E}$ , observamos lo siguiente

$$p_\mu p^\mu = - \left( mc + \frac{\mathcal{E}}{c} \right)^2 + \mathbf{p}^2 = -(mc)^2 \Leftrightarrow -m \left( mc^2 + 2\mathcal{E} + \frac{\mathcal{E}^2}{mc^2} \right) + \mathbf{p}^2 = -(mc)^2. \quad (6.6)$$

Si además  $m \gg \mathcal{E}$  se desprecia el último sumando de la izquierda y hallamos que

$$\mathcal{E} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (6.7)$$

Observamos que la ec.(6.7) coincide con la ec. [2] del diagrama y es la energía como función del momento de una partícula libre no relativista.

Sin embargo, debemos adecuar esta expresión para la correspondiente partícula cargada en un campo electromagnético. Por ello, tenemos que sustituir  $\mathbf{p}$  por  $\mathbf{p} - q\mathbf{A}/c$  y  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} - q\Phi$  en la ec.(6.7); con lo cual obtenemos la ec. [4] del diagrama.

Finalmente, la ecuación [6] del diagrama se obtiene al hacer las sustituciones  $\mathbf{p} \rightarrow \nabla\tilde{S}$  y  $\mathcal{E} \rightarrow -\partial_t\tilde{S}$  en [4], establecidas en la formulación de Hamilton-Jacobi, donde  $\tilde{S}$  es la función principal de Hamilton no relativista de la partícula.

Además en este diagrama se puede ver que la ecuación de Hamilton-Jacobi Relativista (5.2) es justo la que se halla en la esquina inferior izquierda del diagrama. Mientras que el límite no relativista de dicha ecuación es la hallada en la esquina inferior derecha.

Para demostrar esta afirmación, reescribimos la ec.(5.2) de la siguiente manera

$$-\left(\partial_0 S - \frac{q}{c}A_0\right)^2 + \left(\partial_i S - \frac{q}{c}A_i\right)^2 = -m^2 c^2 \quad (6.8)$$

$$\Leftrightarrow -\left(\partial_0 S - \frac{q}{c}A_0\right)^2 = -m^2 c^2 - \left(\partial_i S - \frac{q}{c}A_i\right)^2 \quad (6.9)$$

$$\Leftrightarrow \partial_0 S - \frac{q}{c}A_0 = \pm\sqrt{m^2 c^2 + \left(\partial_i S - \frac{q}{c}A_i\right)^2} \quad (6.10)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c}\partial_t S + \frac{q}{c}\Phi = \pm mc\sqrt{1 + \frac{1}{m^2 c^2} \left(\partial_i S - \frac{q}{c}A_i\right)^2}. \quad (6.11)$$

Entonces, al expandir el binomio,

$$\partial_t S + q\Phi \simeq \pm mc^2 \pm \frac{1}{2m} \left(\partial_i S - \frac{q}{c}A_i\right)^2 \quad (6.12)$$

$$\Leftrightarrow \partial_t S + q\Phi \mp mc^2 = \pm \frac{1}{2m} \left(\partial_i S - \frac{q}{c}A_i\right)^2 \quad (6.13)$$

$$\Leftrightarrow \partial_t (S \mp mc^2 t) = \pm \frac{1}{2m} \left(\partial_i S - \frac{q}{c}A_i\right)^2 \quad (6.14)$$

$$\Leftrightarrow -\partial_t (S \mp mc^2 t) = \mp \frac{1}{2m} \left(\partial_i S - \frac{q}{c}A_i\right)^2. \quad (6.15)$$

Sin embargo, antes de concluir con este desarrollo ¿qué signo debemos escoger en la ec.(6.15)? Para responder a esta pregunta establezcamos la ecuación de Hamilton-Jacobi no relativista de una partícula libre

$$\frac{(\nabla\tilde{S})^2}{2m} = -\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t}. \quad (6.16)$$

Entonces, si en la ec.(6.15) hacemos  $A^\mu = 0$ , nos damos cuenta que el signo + (en el  $\pm$ ) de la ecuación es el adecuado, obteniendo así:

$$-\partial_t (S + mc^2 t) = \frac{1}{2m} (\partial_i S)^2. \quad (6.17)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (6.16) y (6.17) describen al mismo sistema físico si hacemos la siguiente definición

$$\tilde{S} \equiv S + mc^2 t . \quad (6.18)$$

De este modo, la ec.(6.18) nos da una relación explícita a primer orden en  $1/m$  entre la acción relativista  $S$  y la acción no relativista  $\tilde{S}$ . Dicha relación será de utilidad en desarrollos posteriores.

Un punto importante que discutimos a continuación es el límite no relativista de la norma no lineal. Para ello reescribimos (4.2) de la siguiente forma

$$A^{0'} = \pm \left( \lambda^2 + \mathbf{A}'^2 \right)^{1/2} \quad (6.19)$$

$$= \pm \lambda \left( 1 + \frac{\mathbf{A}'^2}{\lambda^2} \right)^{1/2} , \quad (6.20)$$

considerando  $\lambda > 0$  y suponiendo que  $\lambda^2 \gg \mathbf{A}'^2$ , expandemos el binomio obteniendo

$$A^{0'} = \pm \lambda \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{A}'^2}{\lambda^2} + \dots \right) \quad (6.21)$$

$$\simeq \pm \lambda \pm \frac{\mathbf{A}'^2}{2\lambda} \quad (6.22)$$

$$\Rightarrow A^{0'} \mp \lambda \simeq \pm \frac{\mathbf{A}'^2}{2\lambda} . \quad (6.23)$$

Sin embargo, la constante  $\lambda$  que le es sumada al potencial  $A^{0'}$  en (6.23) no tiene efectos observables, puesto que no alterará al campo eléctrico y por compatibilidad con el resultado posterior de este capítulo se elegirá el signo  $-$  (en el  $\pm$ ). Por lo tanto, definimos al potencial escalar en el límite no relativista como sigue:

$$\tilde{A}^{0'} = A^0 + \lambda = -\frac{\mathbf{A}'^2}{2\lambda} . \quad (6.24)$$

Finalmente, demostraremos a continuación de manera análoga al caso relativista que la condición no relativista de la norma no lineal (6.24) nos devuelve la ecuación [6] del cuadro arriba presentado. Se trata de la ecuación de Hamilton-Jacobi no relativista para una partícula en un campo electromagnético.

Realizando la transformación de norma (4.16) en (6.24), obtenemos

$$\tilde{A}^0 + \partial^0 \tilde{\Lambda} = -\frac{1}{2\lambda} \left( \mathbf{A} + \partial^i \tilde{\Lambda} \right)^2 , \quad (6.25)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{A}^0 - \partial_0 \tilde{\Lambda} = -\frac{1}{2\lambda} \left( \mathbf{A} + \partial_i \tilde{\Lambda} \right)^2 . \quad (6.26)$$

Usando (5.4) resulta

$$\Phi - \frac{1}{c} \partial_t \tilde{\Lambda} = -\frac{q}{2mc^2} \left( \mathbf{A} + \nabla \tilde{\Lambda} \right)^2 . \quad (6.27)$$

Si, análogamente a la ecuación(5.3), proponemos la relación

$$\tilde{\Lambda} = -\frac{c}{q}\tilde{S}, \quad (6.28)$$

y la sustituimos en (6.27) encontramos que

$$\Phi + \frac{1}{q}\partial_t\tilde{S} = -\frac{q}{2mc^2}(\mathbf{A} - \nabla\tilde{S})^2, \quad (6.29)$$

$$\Rightarrow -\left(\Phi + \frac{1}{q}\partial_t\tilde{S}\right) = \frac{q}{2mc^2}\left(\mathbf{A} - \frac{c}{q}\nabla\tilde{S}\right)^2 \quad (6.30)$$

$$\Rightarrow -\left(q\Phi + \partial_t\tilde{S}\right) = \frac{q^2}{2mc^2}\left(\frac{c}{q}\nabla\tilde{S} - \mathbf{A}\right)^2 \quad (6.31)$$

$$\therefore -\left(q\Phi + \partial_t\tilde{S}\right) = \frac{1}{2m}\left(\nabla\tilde{S} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2. \quad (6.32)$$

## 6.1. La carga en presencia del campo Coulombiano

### 6.1.1. Cálculo de la acción usando las cantidades conservadas

Ahora encontraremos la acción de un sistema constituido por una partícula en presencia de otra que induce un potencial coulombiano en el espacio. Dado que este problema es básicamente el problema de Kepler de una fuerza central, simplificaremos el problema de tres a dos dimensiones pues es conocido que el momento angular de la partícula es una constante de movimiento. Comenzamos por plantear el Lagrangiano de este sistema en dos dimensiones

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{qQ}{r}. \quad (6.33)$$

Al analizar este Lagrangiano se aprecia que no depende de  $\theta$ . En otras palabras,  $\theta$  es una coordenada ignorable. Si calculamos la ecuación de Euler-Lagrange para  $\theta$  se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0. \quad (6.34)$$

Por lo tanto el momento canónico conjugado a esta coordenada se conserva:

$$l \equiv p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = cte. \quad (6.35)$$

También vemos que (6.33) no depende del tiempo, es decir que el sistema se encuentra en un movimiento estacionario y como tampoco hay fuerzas generalizadas no conservativas, podemos entonces imponer la conservación de la energía; como se muestra a continuación

$$\mathcal{E} = T(\dot{r}, \dot{\theta}) + V(r), \quad (6.36)$$

$$= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{qQ}{r}. \quad (6.37)$$

Tomando  $m\dot{r}^2$  de (6.35) y sustituyéndolo en (6.37), obtenemos la expresión para la conservación de la energía de este sistema

$$\mathcal{E} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l\dot{\theta}}{2} + \frac{qQ}{r}, \quad (6.38)$$

o bien,

$$\mathcal{E} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{qQ}{r}. \quad (6.39)$$

Ahora establecemos la acción de este sistema en base al Lagrangiano (6.33)

$$\tilde{S} = \int \left[ \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{qQ}{r} \right] dt, \quad (6.40)$$

$$= \int \frac{m\dot{r}^2}{2} dt + \int \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} dt - \int \frac{qQ}{r} dt. \quad (6.41)$$

Sustituyendo  $l$  a partir de (6.35), tenemos

$$\tilde{S} = \int \frac{m\dot{r}^2}{2} dt + \int \frac{l\dot{\theta}}{2} dt - \int \frac{qQ}{r} dt. \quad (6.42)$$

Ahora despejamos  $qQ/r$  de (6.38) y lo sustituimos

$$\tilde{S} = \int \frac{m\dot{r}^2}{2} dt + \int \frac{l\dot{\theta}}{2} dt - \int \left( \mathcal{E} - \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{l\dot{\theta}}{2} \right) dt \quad (6.43)$$

$$= \int \frac{m\dot{r}^2}{2} \frac{dr}{\dot{r}} \int \frac{l\dot{\theta}}{2} dt - \int \mathcal{E} dt + \int \frac{m\dot{r}^2}{2} \frac{dr}{\dot{r}} + \int \frac{l\dot{\theta}}{2} dt, \quad (6.44)$$

$$= \int m\dot{r} dr + \int l\dot{\theta} dt - \int \mathcal{E} dt. \quad (6.45)$$

Por otro lado  $\dot{r}$  se puede determinar a partir de la conservación de la energía (6.39) de la siguiente manera

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( \mathcal{E} - \frac{qQ}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}. \quad (6.46)$$

Entonces,

$$\tilde{S} = m \int \sqrt{\frac{2}{m} \left( \mathcal{E} - \frac{qQ}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} \right)} dr + l \int \dot{\theta} dt - \mathcal{E} \int dt, \quad (6.47)$$

$$= \int \sqrt{2m\mathcal{E} - \frac{2mqQ}{r} - \frac{l^2}{2mr^2}} dr + l\theta - \mathcal{E}t. \quad (6.48)$$



### 6.1.2. Cálculo de la acción resolviendo directamente la ecuación de Hamilton-Jacobi

A continuación, encontraremos la acción resolviendo directamente la ec. (5.28) para este sistema[24]. El Hamiltoniano para este sistema en coordenadas polares es:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{qQ}{r}, \quad (6.49)$$

con lo cual establecemos la ecuación de H-J

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \frac{qQ}{r} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0. \quad (6.50)$$

Para resolver dicha ecuación proponemos la siguiente separación de variables

$$\tilde{S}(\mathbf{r}, t) = W_1(r) + W_2(\theta) + W_3(t). \quad (6.51)$$

Sustituyendo (6.51) en (6.50)

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{dW_1}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{dW_2}{d\theta} \right)^2 \right] + \frac{qQ}{r} = -\frac{dW_3}{dt}. \quad (6.52)$$

Y haciendo (6.52) igual a una constante  $\beta_3$ :

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{dW_1}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{dW_2}{d\theta} \right)^2 \right] + \frac{qQ}{r} = \beta_3, \quad (6.53)$$

$$\frac{dW_3}{dt} = -\beta_3. \quad (6.54)$$

Integrando (6.54) resulta

$$W_3 = -\beta_3 t. \quad (6.55)$$

Luego multiplicamos (6.53) por  $2mr^2$ , y despejamos los términos que solo dependen de  $\theta$ , con lo que se obtiene

$$\left( \frac{dW_2}{d\theta} \right)^2 = r^2 \left[ 2m\beta_3 - \frac{2mqQ}{r} - \left( \frac{dW_1}{dr} \right)^2 \right]. \quad (6.56)$$

Como el lado izquierdo de (6.56) depende sólo de  $\theta$  y el otro lado sólo de  $r$ , entonces cada

uno de ellos debe ser igual a una constante  $\beta_2$ :

$$\frac{dW_2}{d\theta} = \beta_2 \Leftrightarrow W_2(\theta) = \beta_2\theta , \quad (6.57)$$

$$r^2 \left[ 2m\beta_3 - \frac{2mqQ}{r} - \left( \frac{dW_1}{dr} \right)^2 \right] = \beta_2^2 \quad (6.58)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dW_1}{dr} = \sqrt{2m\beta_3 - \frac{2mqQ}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}} \quad (6.59)$$

$$\Leftrightarrow W_1(r) = \int \sqrt{2m\beta_3 - \frac{2mqQ}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} \therefore \tilde{S}(\mathbf{r}, t) &= \int \sqrt{2m\beta_3 - \frac{2mqQ}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr \\ &+ \beta_2\theta - \beta_3t . \end{aligned} \quad (6.61)$$

En (6.61)  $\beta_2$  se identifica con el momento angular de la partícula  $l$  y  $\beta_3$  de nueva cuenta, se identifica con la energía  $\mathcal{E}$ . Por lo tanto, con estas identificaciones (6.61) y (6.48) son iguales mostrando la consistencia de ambos métodos.

## 6.2. Partícula en un campo magnético constante

### 6.2.1. Cálculo de la acción mediante integración directa de las ecuaciones de movimiento

Ahora encontraremos la acción para una partícula sometida a un campo magnético constante en la dirección del eje  $Z$ , integrando el Lagrangiano directamente a partir de la primera expresión en (5.32) bajo las siguientes condiciones iniciales:

$$x(t_0) = 0 \quad , \quad x(t_1) = x_1 ; \quad (6.62)$$

$$y(t_0) = 0 \quad , \quad y(t_1) = y_1 ; \quad (6.63)$$

$$z(t_0) = 0 \quad , \quad z(t_1) = z_1 . \quad (6.64)$$

El Lagrangiano para esta partícula en la norma estándar es

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + \frac{qB}{2c} (xy - yx) . \quad (6.65)$$

No obstante, primero necesitaremos encontrar las ecuaciones de movimiento de la partícula a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, obteniendo

$$m\ddot{x} - \frac{qB}{c} \dot{y} = 0 , \quad (6.66)$$

$$m\ddot{y} + \frac{qB}{c} \dot{x} = 0 , \quad (6.67)$$

$$m\ddot{z} = 0 , \quad (6.68)$$

cuyas soluciones son respectivamente

$$x(t) = A(\cos \omega t - 1) + B \sin \omega t, \quad (6.69)$$

$$y(t) = -A \sin \omega t + B(\cos \omega t - 1), \quad (6.70)$$

$$z(t) = \frac{z_1}{t_1} t, \quad (6.71)$$

donde  $\omega = qB/mc$ . Cabe destacar que estas soluciones ya satisfacen la condición inicial para el tiempo  $t = t_0$ . Sin embargo, como nuestro objetivo es obtener la solución  $\tilde{S} = \tilde{S}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0, t_1, t_0)$  de la ec.(6.83), es necesario dejar la acción en función explícita de los extremos fijos. Por ello es necesario reemplazar  $A$ ,  $B$  por las funciones adecuadas de  $x_1$  y  $y_1$ . Imponiendo las condiciones iniciales (6.62), (6.63) y (6.64) se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t_1 - 1 & \sin \omega t_1 \\ -\sin \omega t_1 & \cos \omega t_1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (6.72)$$

Definiendo  $\theta_1 = \omega t_1$  y usando las relaciones trigonométricas conocidas para el ángulo doble, resulta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = -2 \sin \frac{\theta_1}{2} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta_1}{2} & -\cos \frac{\theta_1}{2} \\ \cos \frac{\theta_1}{2} & \sin \frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (6.73)$$

Si invertimos la matriz del sistema y resolvemos para  $A$  y  $B$ ,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} \\ \frac{1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (6.74)$$

Utilizando (6.74), las ecuaciones de movimiento finalmente quedan así:

$$x(t) = \left( -\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} \right) (\cos \omega t - 1) + \left( \frac{x_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} - \frac{y_1}{2} \right) \sin \omega t, \quad (6.75)$$

$$y(t) = -\left( -\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} \right) \sin \omega t + \left( \frac{x_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} - \frac{y_1}{2} \right) (\cos \omega t - 1), \quad (6.76)$$

$$z(t) = \frac{z_1}{t_1} t. \quad (6.77)$$

Sustituyendo las ecuaciones de movimiento en el lagrangiano (6.65) se tiene

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = & \frac{m}{2} \left\{ \left[ - \left( -\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} \right) \omega \sin \omega t + \left( \frac{x_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} - \frac{y_1}{2} \right) \omega \cos \omega t \right]^2 \right. \\
& + \left. \left[ \left( -\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} \right) \omega \cos \omega t - \left( \frac{x_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} - \frac{y_1}{2} \right) \omega \sin \omega t \right]^2 + \left( \frac{z_1}{t_1} \right)^2 \right\} \\
& + \frac{qB}{c} \left[ \left( -\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} \right) (\cos \omega t - 1) + \left( \frac{x_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} - \frac{y_1}{2} \right) \sin \omega t \right] \\
& \left[ - \left( -\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} \right) \omega \cos \omega t - \left( \frac{x_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} - \frac{y_1}{2} \right) \omega \sin \omega t \right] \\
& - \frac{qB}{c} \left[ - \left( -\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} \right) \sin \omega t + \left( \frac{x_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} - \frac{y_1}{2} \right) (\cos \omega t - 1) \right] \\
& \left[ - \left( -\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} \right) \omega \sin \omega t + \left( \frac{x_1}{2} \cot \frac{\theta_1}{2} - \frac{y_1}{2} \right) \omega \cos \omega t \right]. \quad (6.78)
\end{aligned}$$

Simplificando los términos semejantes, se obtiene:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{mz_1^2}{2t_1^2} + \frac{m\omega^2}{8} (x_1^2 + y_1^2) \csc^2 \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \cos \omega t. \quad (6.79)$$

Ahora, de acuerdo a la ec. (5.32) tenemos que integrar este Lagrangiano de  $t_0 = 0$  a  $t_1$ , obteniendo

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) &= \int_0^{t_1} \left[ \frac{mz_1^2}{2t_1^2} + \frac{m\omega^2}{8} (x_1^2 + y_1^2) \csc^2 \left( \frac{\theta_1}{2} \cos \omega t \right) \right] dt, \\
&= \frac{mz_1^2}{2t_1} + \frac{m\omega}{4} (x_1^2 + y_1^2) \cot \left( \frac{\theta_1}{2} \right). \quad (6.80)
\end{aligned}$$

Finalmente, al quitar los subíndices de  $x, y, z$  y  $t$ , encontramos la acción para una partícula bajo un campo magnético constante:

$$\tilde{S}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{mz^2}{2t} + \frac{m\omega}{4} (x^2 + y^2) \cot \left( \frac{\omega t}{2} \right). \quad (6.81)$$

Por completez verificaremos que (6.81) satisfaga la ecuación de H-J (5.28). El Hamiltoniano del sistema es

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \left[ \left( p_x + \frac{qBy}{2c} \right)^2 + \left( p_y - \frac{qBx}{2c} \right)^2 + p_z^2 \right]. \quad (6.82)$$

Por lo tanto, la ec.(5.28) toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} + \frac{qBy}{2c} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} - \frac{qBx}{2c} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0. \quad (6.83)$$

Calculando las derivadas y sustituyendo tenemos:

$$\begin{aligned}
& H(\mathbf{x}, \nabla \tilde{S}) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0 \tag{6.84} \\
\Rightarrow & \frac{1}{2m} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{m\omega}{4} (x^2 + y^2) \cot \left( \frac{\omega t}{2} \right) \right) + \frac{qBy}{2c} \right]^2 \right. \\
& + \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{m\omega}{4} (x^2 + y^2) \cot \left( \frac{\omega t}{2} \right) \right) - \frac{qBx}{2c} \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{mz^2}{2t} \right) \right]^2 \left. \right\} \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{mz^2}{2t} + \frac{m\omega}{4} (x^2 + y^2) \cot \left( \frac{\omega t}{2} \right) \right] \\
& = \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{m\omega x}{2} \cot \left( \frac{\omega t}{2} \right) + \frac{m\omega y}{2} \right)^2 + \left( \frac{m\omega y}{2} \cot \left( \frac{\omega t}{2} \right) - \frac{m\omega x}{2} \right)^2 - \frac{m^2 z^2}{t^2} \right] \\
& \quad - \frac{m\omega^2}{8} (x^2 + y^2) \csc^2 \left( \frac{\omega t}{2} \right) \\
& = \frac{1}{2m} \left[ \frac{m^2 \omega^2 x^2}{4} (x^2 + y^2) \left( \cot^2 \left( \frac{\omega t}{2} \right) + 1 \right) + \frac{m^2 z^2}{t^2} \right] \\
& \quad - \frac{mz^2}{2t^2} - \frac{m\omega^2}{8} (x^2 + y^2) \csc^2 \left( \frac{\omega t}{2} \right) \\
& = \frac{m\omega^2}{8} (x^2 + y^2) \csc^2 \left( \frac{\omega t}{2} \right) + \frac{mz^2}{2t^2} \\
& \quad - \frac{mz^2}{2t^2} - \frac{m\omega^2}{8} (x^2 + y^2) \csc^2 \left( \frac{\omega t}{2} \right) = 0 . \tag{6.85}
\end{aligned}$$

### 6.2.2. Cálculo de la acción resolviendo directamente la ecuación de Hamilton-Jacobi en la Norma de Landau ( $\mathbf{A} = Bx\hat{\mathbf{j}}$ ).

A continuación, hallaremos la acción resolviendo directamente la ecuación de H-J (5.28) para este sistema[23]. El Hamiltoniano de una partícula cargada bajo la influencia de un campo magnético en la norma de Landau es

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \left[ p_x^2 + \left( p_y - \frac{qBx}{c} \right)^2 \right] . \tag{6.86}$$

Haciendo la sustitución  $\mathbf{p} \rightarrow \nabla S$  en (6.86) obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi a resolver:

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} - \frac{qBx}{c} \right)^2 \right] + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0 . \tag{6.87}$$

Recordando que  $qB/c = m\omega$ , proponemos

$$\tilde{S}(\mathbf{x}, t) = W_1(x) + W_2(y) - \beta_3 t . \tag{6.88}$$

Entonces al sustituir en (6.87) queda

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{dW_1}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dW_2}{dy} - m\omega x \right)^2 \right] + \frac{dW_3 t}{dt} = 0 \quad (6.89)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{dW_1}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dW_2}{dy} - m\omega x \right)^2 \right] = -\frac{dW_3 t}{dt} = \beta_3, \quad (6.90)$$

obteniendo la siguiente ecuación:

$$\left( \frac{dW_1}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dW_2}{dy} - m\omega x \right)^2 = 2m\beta_3. \quad (6.91)$$

Separando (6.91) en las variables dependientes:

$$\left( \frac{dW_1}{dx} \right)^2 - 2m\beta_3 = \left( \frac{dW_2}{dy} - m\omega x \right)^2 \quad (6.92)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dW_2}{dy} = m\omega x + \sqrt{\left( \frac{dW_1}{dx} \right)^2 - 2m\beta_3} = \beta_2. \quad (6.93)$$

Hallamos las siguientes ecuaciones

$$m\omega x + \sqrt{\left( \frac{dW_1}{dx} \right)^2 - 2m\beta_3} = \beta_2, \quad (6.94)$$

$$W_2(y) = \beta_2(y). \quad (6.95)$$

Reescribiendo (6.94) obtenemos

$$\frac{dW_1}{dx} = \sqrt{2m\beta_3 + (\beta_2 - m\omega x)^2} \quad (6.96)$$

$$\Leftrightarrow W_1(x) = \int \sqrt{2m\beta_3 + (\beta_2 - m\omega x)^2} dx. \quad (6.97)$$

Para nuestros fines posteriores, es suficiente con dejar indicada la integral en (6.97). De modo que la expresión final de la acción es

$$\tilde{S}(\mathbf{x}, t) = \int \sqrt{2m\beta_3 + (\beta_2 - m\omega x)^2} dx + \beta_2 y - \beta_3 t. \quad (6.98)$$

Sin embargo, la integral se puede realizar al hacer  $u = \beta_2 - m\omega x$  y al usar la fórmula

$$\int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left( \frac{u}{a} + \sqrt{\frac{u^2}{a^2} + 1} \right) \quad (6.99)$$

$$= \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{u}{a} \right), \quad (6.100)$$

resultando

$$W_1(x) = -\frac{\beta_2 - m\omega x}{2m\omega} \sqrt{2m\beta_3 + (\beta_2 - m\omega x)^2} + m\beta_3 \operatorname{arcsinh} \left( \frac{\beta_2 - m\omega x}{\sqrt{2m\beta_3}} \right). \quad (6.101)$$

### 6.2.3. Cálculo de la acción resolviendo directamente la ecuación de Hamilton-Jacobi en la Norma estándar $\left(\mathbf{A} = -\frac{B}{2}y\hat{\mathbf{i}} + \frac{B}{2}x\hat{\mathbf{j}}\right)$ .

Aquí resolveremos de igual forma la ecuación de H-J (5.28) pero en la norma de estándar[23]. Entonces, el Hamiltoniano de una partícula cargada bajo la influencia de un campo magnético de estas condiciones es

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \left[ \left( p_x + \frac{qBy}{2c} \right)^2 + \left( p_y - \frac{qBx}{2c} \right)^2 \right]. \quad (6.102)$$

Sustituyendo  $\mathbf{p} \rightarrow \nabla S$  en (6.102) obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi a resolver:

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} + \frac{m\omega y}{2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} - \frac{m\omega x}{2} \right)^2 \right] + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0. \quad (6.103)$$

Donde que  $qB/c = m\omega$ . Proponemos

$$\tilde{S}(\mathbf{x}, t) = W_1(x) + W_2(y) + \frac{m\omega xy}{2} - \beta_3 t. \quad (6.104)$$

Sustituyendo en (6.103) obtenemos

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{dW_1}{dx} + \frac{m\omega y}{2} + \frac{m\omega y}{2} \right)^2 + \left( \frac{dW_2}{dy} + \frac{m\omega x}{2} - \frac{m\omega x}{2} \right)^2 \right] - \beta_3 = 0 \quad (6.105)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{dW_1}{dx} + m\omega y \right)^2 + \left( \frac{dW_2}{dy} \right)^2 \right] = \beta_3. \quad (6.106)$$

En analogía con el problema en la norma de Landau tenemos que despejar  $dW_1/dx$  e igualar a una constante  $\beta_2$ , como se muestra a continuación

$$\Rightarrow \frac{dW_1}{dx} = \sqrt{2m\beta_3 - \left( \frac{dW_2}{dy} \right)^2} - m\omega y = \beta_2, \quad (6.107)$$

obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$W_1(x) = \beta_2 x, \quad (6.108)$$

$$\frac{dW_2}{dy} = \sqrt{2m\beta_3 - (\beta_2 - m\omega y)^2}. \quad (6.109)$$

Integrando (6.109) resulta

$$W_2(y) = \int \sqrt{2m\beta_3 - (\beta_2 - m\omega y)^2} dy. \quad (6.110)$$

Para fines posteriores es suficiente con dejar la integral indicada (6.110). De esta forma la acción es:

$$\tilde{S}(\mathbf{x}, t) = \beta_2 x + \int \sqrt{2m\beta_3 - (\beta_2 - m\omega y)^2} dy + \frac{m\omega xy}{2} - \beta_3 t. \quad (6.111)$$

No obstante, la integral se puede realizar al hacer  $u = \beta_2 - m\omega y$  y usar la siguiente fórmula para  $n = 1$

$$-\int (a^2 - u^2)^{n/2} du = -\frac{u(a^2 - u^2)^{n/2}}{n+1} + \frac{a^2 n}{n+1} \int -(a^2 - u^2)^{n/2-1} du, \quad n \neq -1; \quad (6.112)$$

obtenemos

$$W_2(y)(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{m\omega} \left[ \frac{\beta_2 - m\omega y}{2} \sqrt{2m\beta_3 - (\beta_2 - m\omega y)^2} \right] + \frac{\beta_3}{m} \arccos \left( \frac{\beta_2 - m\omega y}{\sqrt{2m\beta_3}} \right). \quad (6.113)$$

## 6.3. La carga en un campo eléctrico constante

### 6.3.1. Cálculo de la acción mediante integración directa de las ecuaciones de movimiento

Ahora encontraremos la acción para una partícula bajo la influencia de un campo eléctrico constante en la dirección del eje  $Z$  con las mismas condiciones iniciales y el mismo procedimiento del problema del campo magnético constante.

El Lagrangiano de este sistema es

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - q\Phi = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + q\varepsilon z. \quad (6.114)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange de este sistema son

$$m\ddot{x} = 0, \quad (6.115)$$

$$m\ddot{y} = 0, \quad (6.116)$$

$$m\ddot{z} + q\varepsilon = 0, \quad (6.117)$$

cuyas soluciones son respectivamente

$$x(t) = c_1 t + c_2, \quad (6.118)$$

$$y(t) = c_3 t + c_4, \quad (6.119)$$

$$z(t) = \frac{q\varepsilon}{2m} t^2 + c_5 t + c_6. \quad (6.120)$$



Aplicando las condiciones iniciales a estas soluciones obtenemos

$$x(t) = \frac{x_1}{t_1} t, \quad (6.121)$$

$$y(t) = \frac{y_1}{t_1} t, \quad (6.122)$$

$$z(t) = \frac{\omega t^2}{2} + \left( \frac{z_1}{t_1} - \frac{\theta_1}{2} \right) t. \quad (6.123)$$

Donde  $\omega = q\varepsilon/m$  y  $\theta_1 = \omega t_1$ . Sustituyendo estas ecuaciones en la ec. (6.114) se tiene que

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{m}{2} \left[ \frac{x_1^2}{t_1^2} + \frac{y_1^2}{t_1^2} + \left( \omega t + \frac{z_1}{t_1} - \frac{\theta_1}{2} \right)^2 \right] + m\omega \left[ \frac{\omega t^2}{2} + \left( \frac{z_1}{t_1} - \frac{\theta_1}{2} \right) t \right]. \quad (6.124)$$

Simplificando la expresión anterior obtenemos

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{m}{2t_1^2} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - \frac{mz_1\theta_1}{2t_1} + \frac{m\theta_1^2}{8} - m\omega\theta_1 t + \frac{2m\omega z_1 t}{t_1} + m\omega^2 t^2. \quad (6.125)$$

El siguiente paso es integrar este Lagrangiano de  $t_0 = 0$  a  $t_1$  de acuerdo con la primera expresión en (5.32), obteniendo

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) &= \int_0^{t_1} \left[ \frac{m}{2t_1^2} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - \frac{mz_1\theta_1}{2t_1} + \frac{m\theta_1^2}{8} - m\omega\theta_1 t + \frac{2m\omega z_1 t}{t_1} + m\omega^2 t^2 \right] dt, \\ &= \frac{m}{2t_1} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - \frac{mz_1\theta_1}{2} + \frac{m\theta_1^2 t_1}{8} - \frac{m\omega\theta_1 t_1^2}{2} + m\omega z_1 t_1 + \frac{m\omega^2 t_1^3}{3}, \\ &= \frac{m}{2t_1} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + \frac{m\omega z_1 t_1}{2} - \frac{m\omega^2 t_1^3}{24}. \end{aligned} \quad (6.126)$$

Finalmente, al quitar los subíndices a  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $t$ , encontramos la acción para este sistema físico:

$$\tilde{S}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{m}{2t} (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{m\omega z t}{2} - \frac{m\omega^2 t^3}{24}. \quad (6.127)$$

Por completez verificaremos que la ec. (6.127) satisface la ecuación de H-J (5.28). Como el Hamiltoniano para el campo eléctrico es

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - q\varepsilon z, \quad (6.128)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{x}, \nabla \tilde{S}) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} &= \frac{1}{2m} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{m}{2t} (x^2 + y^2 + z^2) \right) \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{m}{2t} (x^2 + y^2 + z^2) \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{m}{2t} (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{m\omega z t}{2} - \frac{m\omega^2 t^3}{24} \right) \right]^2 \right\} \\
&\quad - q\varepsilon z + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{m}{2t} (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{m\omega z t}{2} - \frac{m\omega^2 t^3}{24} \right], \\
&= \frac{1}{2m} \left[ \frac{m^2 x^2}{t^2} + \frac{m^2 y^2}{t^2} + \left( \frac{mz}{t} + m\omega t - \frac{m\omega t}{2} \right)^2 \right] - m\omega z \\
&\quad - \frac{m}{2t^2} (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{m\omega z}{2} - \frac{m\omega^2 t^2}{8}, \\
&= \frac{mz^2}{2t^2} + \frac{m\omega z}{2} + \frac{m\omega^2 t^2}{8} - \frac{m\omega z}{2} - \frac{mz^2}{2t^2} - \frac{m\omega^2 t^2}{8} = 0. \quad (6.129)
\end{aligned}$$

### 6.3.2. Cálculo de la acción resolviendo directamente la ecuación de Hamilton-Jacobi

A continuación, procederemos a hallar la acción para este sistema resolviendo directamente la ecuación de H-J (5.28). Para este fin, usaremos el Hamiltoniano del sistema que está dado por (6.128), con lo cual la ecuación de Hamilton-Jacobi a resolver es:

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial z} \right)^2 \right] - q\varepsilon z + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0. \quad (6.130)$$

Luego proponemos la siguiente separación de variables:

$$\tilde{S}(\mathbf{x}, t) = W_1(x) + W_2(y) + W_3(z) - \beta_3 t. \quad (6.131)$$

Sustituyendo en (6.130), obtenemos

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{dW_1}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dW_2}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dW_3}{dz} \right)^2 \right] - q\varepsilon z - \beta_3 = 0 \quad (6.132)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{dW_1}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dW_2}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dW_3}{dz} \right)^2 \right] - q\varepsilon z = \beta_3. \quad (6.133)$$

Ahora multiplicamos (6.133) por  $2m$  y al despejar  $(dW_2/dy)^2$  hallamos que

$$\left( \frac{dW_2}{dy} \right)^2 = 2m\beta_3 + 2mq\varepsilon z - \left( \frac{dW_3}{dz} \right)^2 - \left( \frac{dW_1}{dx} \right)^2. \quad (6.134)$$

Al proponer  $W_2(y) = \beta_2 y$ , la ec. (6.134) toma la siguiente forma

$$2m\beta_3 + 2mq\epsilon z - \left(\frac{dW_3}{dz}\right)^2 - \left(\frac{dW_1}{dx}\right)^2 = \beta_2^2. \quad (6.135)$$

Después, despejamos  $(dW_1/dx)^2$  y al proponer  $W_1(x) = \beta_1 x$ , la ec. (6.135) toma la siguiente forma

$$2m\beta_3 + 2mq\epsilon z - \left(\frac{dW_3}{dz}\right)^2 = \beta_2^2 - \beta_1^2 \quad (6.136)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dW_3}{dz} = \sqrt{2m\beta_3 - \beta_2^2 - \beta_1^2 + 2mq\epsilon z} \quad (6.137)$$

$$\Leftrightarrow W_3(z) = \int \sqrt{2m\beta_3 - \beta_2^2 - \beta_1^2 + 2mq\epsilon z} dz \quad (6.138)$$

$$\Leftrightarrow W_3(z) = \frac{1}{3mq\epsilon} [2m(\beta_3 + q\epsilon z) - \beta_1^2 - \beta_2^2]^{3/2} \quad (6.139)$$

$$\therefore \tilde{S}(\mathbf{x}, t) = \beta_1 x + \beta_2 y + \frac{1}{3mq\epsilon} [2m(\beta_3 + q\epsilon z) - \beta_1^2 - \beta_2^2]^{3/2} - \beta_3 t. \quad (6.140)$$

### 6.3.3. Cálculo de la acción usando cantidades conservadas

Ahora encontraremos la acción, a partir de la integración directa del Lagrangiano (6.114), empleando conservación de energía y sin recurrir a la solución explícita de las ecuaciones de movimiento. La integral a resolver es la siguiente:

$$\tilde{S} = \int \left( \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + q\epsilon z \right) dt. \quad (6.141)$$

En esta expresión se ve que el Lagrangiano no depende de  $x$  y  $y$ , que entonces son coordenadas ignorables, es decir, que sus momentos canónicos conjugados se conservan, i.e.

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = cte, \quad (6.142)$$

$$p_y \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = cte. \quad (6.143)$$

También nos damos cuenta que como el Lagrangiano no depende del tiempo y como tampoco existen fuerzas no conservativas, podemos imponer la conservación de la energía, como se muestra a continuación

$$\mathcal{E} = T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + V(z), \quad (6.144)$$

$$= \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - q\epsilon z. \quad (6.145)$$

Despejando  $q\epsilon z$  de la ec.(6.145) y sustituyendo en (6.141) tenemos

$$\tilde{S} = \int \left( \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \mathcal{E} \right) dt = \int m\dot{\mathbf{x}}^2 dt - \int \mathcal{E} dt, \quad (6.146)$$

$$= \int m\dot{x}^2 dt + \int m\dot{y}^2 dt + \int m\dot{z}^2 dt - \mathcal{E}t, \quad (6.147)$$

$$= \int m\dot{x}^2 dt + \int m\dot{y}^2 dt + \int m\dot{z} dz - \mathcal{E}t. \quad (6.148)$$

Sustituyendo  $p_x$  y  $p_y$  obtenidos en las ecuaciones (6.142) y (6.143) respectivamente, tenemos

$$\tilde{S} = \int p_x \dot{x} dt + \int p_y \dot{y} dt + \int m\dot{z} dz - \mathcal{E}t, \quad (6.149)$$

$$= p_x x + p_y y + \int m\dot{z} dz - \mathcal{E}t. \quad (6.150)$$

Además si despejamos  $\dot{z}$  de (6.145) y lo sustituimos en esta última expresión, se obtiene

$$\tilde{S} = p_x x + p_y y + \int m \sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E} + q\epsilon z) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} dz - \mathcal{E}t. \quad (6.151)$$

Finalmente despejamos  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  de las relaciones (6.142) y (6.143), y sustituyéndolos obtenemos:

$$\tilde{S} = p_x x + p_y y + \int m \sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E} + q\epsilon z) - \frac{p_x^2}{m^2} - \frac{p_y^2}{m^2}} dz - \mathcal{E}t \quad (6.152)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{S} = p_x x + p_y y + \int \sqrt{2m(\mathcal{E} + q\epsilon z) - p_x^2 - p_y^2} dz - \mathcal{E}t \quad (6.153)$$

$$\therefore \tilde{S} = p_x x + p_y y + \frac{1}{3mq\epsilon} [2m(\mathcal{E} + q\epsilon z) - p_x^2 - p_y^2]^{3/2}. \quad (6.154)$$

Observamos que (6.154) coincide con (6.140) al hacer  $\beta_3 = \mathcal{E}$ ,  $\beta_1 = p_x$  y  $\beta_2 = p_y$ , demostrando nuevamente que ambos métodos son equivalentes.

### 6.3.4. Relación entre las acciones obtenidas en las subsecciones 6.3.1 y 6.3.2 (6.3.3)

Para este sistema fue accesible encontrar la acción (6.127) a través del método propuesto en la subsección pasada, que se basa en la integración directa de las ecuaciones de movimiento en un intervalo  $[t_0, t_1]$ . Y que también se halló la acción (6.140) resolviendo la ecuación de Hamilton-Jacobi (6.130) de manera relativamente fácil. Entonces vale la pena mostrar la conexión entre ambas soluciones tal como se hizo en la partícula libre ya expuesto en el Capítulo 5. La idea es ilustrar el cambio de constantes de integración en la acción, del conjunto  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  al conjunto  $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ , en un ejemplo

un poco más complicado.

Para ello, comenzamos por obtener las ecuaciones de movimiento a partir de la acción (6.140) que en adelante se denotará por  $\tilde{S}_2$ . La acción (6.127) se denotará por  $\tilde{S}_1$ . Con este objeto es necesario calcular las constantes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ , que de acuerdo a la formulación de Hamilton-Jacobi están dadas por (5.14). Para este sistema físico son:

$$\frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial \beta_1} = x - \frac{\beta_1}{mq\varepsilon} \sqrt{2m(\beta_3 + q\varepsilon z) - \beta_1^2 - \beta_2^2} = \alpha_1, \quad (6.155)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial \beta_2} = y - \frac{\beta_2}{mq\varepsilon} \sqrt{2m(\beta_3 + q\varepsilon z) - \beta_1^2 - \beta_2^2} = \alpha_2, \quad (6.156)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial \beta_3} = \frac{1}{mq\varepsilon} \sqrt{2m(\beta_3 + q\varepsilon z) - \beta_1^2 - \beta_2^2} - t = \alpha_3. \quad (6.157)$$

Despejando  $z(t)$  de (6.157) se tiene:

$$z(t) = \frac{q\varepsilon}{2m} (t + \alpha_3)^2 + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2mq\varepsilon} - \frac{\beta_3}{q\varepsilon}. \quad (6.158)$$

Aplicando las siguientes condiciones iniciales

$$x(0) = 0, \quad x(t_1) = x_1; \quad (6.159)$$

$$y(0) = 0, \quad y(t_1) = y_1; \quad (6.160)$$

$$z(0) = 0, \quad z(t_1) = z_1. \quad (6.161)$$

Considerando la condición inicial  $z(0)$  obtenemos

$$z(0) = \frac{q\varepsilon\alpha_3^2}{2m} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2mq\varepsilon} - \frac{\beta_3}{q\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta_3}{q\varepsilon} = \frac{q\varepsilon\alpha_3^2}{2m} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2mq\varepsilon}. \quad (6.162)$$

Imponiendo  $z(t_1)$  se tiene

$$z(t_1) = \frac{q\varepsilon}{2m} (t_1 + \alpha_3)^2 + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2mq\varepsilon} - \frac{\beta_3}{q\varepsilon} = z_1 \Leftrightarrow \frac{\beta_3}{q\varepsilon} = \frac{q\varepsilon}{2m} (t_1 + \alpha_3)^2 - z_1 + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2mq\varepsilon}. \quad (6.163)$$

Sustituyendo (6.162) en (6.163) hallamos

$$\frac{q\varepsilon\alpha_3^2}{2m} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2mq\varepsilon} = \frac{q\varepsilon}{2m} (t_1 + \alpha_3)^2 - z_1 + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2mq\varepsilon} \quad (6.164)$$

$$\Leftrightarrow \frac{q\varepsilon t_1}{m} \alpha_3 = z_1 - \frac{q\varepsilon t_1^2}{2m} \quad (6.165)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_3 = \frac{mz_1}{q\varepsilon t_1} - \frac{t_1}{2}. \quad (6.166)$$

Entonces,

$$\beta_3 = \frac{q^2\varepsilon^2\alpha_3^2}{2m} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2m} = \frac{q^2\varepsilon^2}{2m} \left( \frac{mz_1}{q\varepsilon t_1} - \frac{t_1}{2} \right)^2 + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2m}. \quad (6.167)$$

Ahora, en (6.167) sólo nos falta determinar  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Para ello empleamos  $x(t)$  usando (6.155). Si despejamos  $2m(\beta_3 + q\varepsilon z)$  de (6.158) tenemos

$$2m(\beta_3 + q\varepsilon z) = q^2\varepsilon^2(t + \alpha_3)^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2. \quad (6.168)$$

Al sustituir esta expresión en (6.155) obtenemos

$$x - \frac{\beta_1}{mq\varepsilon} \sqrt{q^2\varepsilon^2(t + \alpha_3)^2} = \alpha_1 \Leftrightarrow x(t) = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{m}(t + \alpha_3). \quad (6.169)$$

Aplicando la primera condición inicial dada en (6.159) para  $x$  resulta

$$x(0) = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{m}\alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -\frac{\beta_1}{m}\alpha_3. \quad (6.170)$$

Tras aplicar la segunda condición para  $x$  hallamos que

$$x(t_1) = \frac{\beta_1}{m}t_1 \Leftrightarrow \beta_1 = \frac{mx_1}{t_1}. \quad (6.171)$$

Análogamente, para  $y(t)$  tenemos

$$y - \frac{\beta_2}{mq\varepsilon} \sqrt{q^2\varepsilon^2(t + \alpha_3)^2} = \alpha_2 \Leftrightarrow y(t) = \alpha_2 + \frac{\beta_2}{m}(t + \alpha_3). \quad (6.172)$$

Aplicando las dos condiciones iniciales (6.159), se encuentra que

$$\beta_2 = \frac{my_1}{t_1}. \quad (6.173)$$

Por lo tanto, (6.167) queda como:

$$\beta_3 = \frac{q^2\varepsilon^2}{2m} \left( \frac{mz_1}{q\varepsilon t_1} - \frac{t_1}{2} \right)^2 + \frac{m(x_1^2 + y_1^2)}{2t_1^2}, \quad (6.174)$$

y con esta expresión determinamos que

$$2m\beta_3 - \beta_1^2 - \beta_2^2 = q^2\varepsilon^2 \left( \frac{mz_1}{q\varepsilon t_1} - \frac{t_1}{2} \right)^2. \quad (6.175)$$

Al evaluar (6.140) en los extremos  $(\mathbf{x}_1, t_1) = (x_1, y_1, z_1, t_1)$  y  $(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{0}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{S}_2(\mathbf{x}_1, t_1) &= \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \frac{1}{3mq\varepsilon} [2m(\beta_3 + q\varepsilon z_1) - \beta_1^2 - \beta_2^2]^{3/2} \\ &- \frac{1}{3mq\varepsilon} [2m\beta_3 - \beta_1^2 - \beta_2^2]^{3/2} - \beta_3 t. \end{aligned} \quad (6.176)$$

Finalmente, si  $\omega = q\varepsilon/m$  y sustituimos (6.171), (6.173), (6.174) y (6.175) en (6.176) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\tilde{S}_2(\mathbf{x}_1, t_1) &= \frac{mx_1^2}{t_1} + \frac{my_1^2}{t_1} + \frac{1}{3m^2\omega} \left[ m^2\omega^2 \left( \frac{z_1}{\omega t_1} - \frac{t_1}{2} \right)^2 + 2m^2\omega z_1 \right]^{3/2} \\ &\quad - \frac{1}{3m^2\omega} \left[ m^2\omega^2 \left( \frac{z_1}{\omega t_1} - \frac{t_1}{2} \right)^2 \right]^{3/2} \\ &\quad - \left[ \frac{m\omega^2}{2} \left( \frac{z_1}{\omega t_1} - \frac{t_1}{2} \right)^2 + \frac{m(x_1^2 + y_1^2)}{2t_1^2} \right] t_1, \quad (6.177)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{m(x_1^2 + y_1^2)}{t_1} + \frac{1}{3m^2\omega} \left[ m^2\omega^2 \left( \frac{z_1^2}{\omega^2 t_1^2} - \frac{z_1}{\omega} + \frac{t_1^2}{4} \right) + 2m^2\omega z_1 \right]^{3/2} \\ &\quad - \frac{m^2\omega^2}{3} \left( \frac{z_1}{\omega t_1} - \frac{t_1}{2} \right)^3 - \left[ \frac{m\omega^2 t_1}{2} \left( \frac{z_1}{\omega t_1} - \frac{t_1}{2} \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{m(x_1^2 + y_1^2)}{2t_1}, \quad (6.178)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{m(x_1^2 + y_1^2)}{2t_1} + \frac{m\omega^2}{3} \left( \frac{z_1}{\omega t_1} + \frac{t_1}{2} \right)^3 \\ &\quad - \frac{m\omega^2}{3} \left( \frac{z_1}{\omega t_1} - \frac{t_1}{2} \right)^3 - \frac{m\omega^2 t_1}{2} \left( \frac{z_1}{\omega t_1} - \frac{t_1}{2} \right)^2, \quad (6.179)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{m(x_1^2 + y_1^2)}{2t_1} + \frac{mz_1^3}{3\omega t_1^3} + \frac{mz_1^2}{2t_1} + \frac{m\omega z_1 t_1}{4} + \frac{m\omega^2 t_1^3}{24} \\ &\quad - \frac{mz_1^3}{3\omega t_1^3} + \frac{mz_1^2}{2t_1} - \frac{m\omega z_1 t_1}{4} + \frac{m\omega^2 t_1^3}{24} \\ &\quad - \frac{mz_1^2}{2t_1} + \frac{m\omega z_1 t_1}{2} - \frac{m\omega^2 t_1^3}{8}\end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{S}_2(\mathbf{x}_1, t_1) = \frac{m(x_1^2 + y_1^2)}{2t_1} + \frac{m\omega z_1 t_1}{2} - \frac{m\omega^2 t_1^3}{24} = \tilde{S}_1(\mathbf{x}_1, t_1). \quad (6.180)$$

Quitando los subíndices obtenemos

$$\tilde{S}_2(\mathbf{x}, t) = \frac{m(x^2 + y^2)}{2t} + \frac{m\omega z t}{2} - \frac{m\omega^2 t^3}{24} = \tilde{S}_1(\mathbf{x}, t). \quad (6.181)$$

Con la ecuación (6.181) hemos probado finalmente que ambos métodos son equivalentes.

## 6.4. La carga en el campo magnético de un alambre infinito

### 6.4.1. Cálculo de la acción resolviendo directamente la ecuación de Hamilton-Jacobi

Finalmente, procederemos a resolver la ecuación de H-J (5.28) para el alambre recto infinito con corriente  $I$  en la dirección del eje  $Z$ . El hamiltoniano de este sistema en coordenadas cilíndricas, es

$$H(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} \left[ p_\rho^2 + \frac{p_\phi^2}{\rho^2} + \left( p_z + \frac{2qI}{c^2} \ln \rho \right)^2 \right]. \quad (6.182)$$

Al hacer la sustitución  $\mathbf{p} \rightarrow \nabla \tilde{S}$  en (6.182) hallamos la ecuación de H-J para este sistema

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial z} + \frac{2qI}{c^2} \ln \rho \right)^2 \right] + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0, \quad (6.183)$$

Análogamente a los sistemas anteriores, proponemos una solución general de la forma

$$\tilde{S}(\mathbf{r}, t) = W_1(\rho) + W_2(\phi) + W_3(z) - \beta_0 t. \quad (6.184)$$

Sustituyendo en (6.183) obtenemos

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{dW_1}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{dW_2}{d\phi} \right)^2 + \left( \frac{dW_3}{dz} + \frac{2qI}{c^2} \ln \rho \right)^2 \right] - \beta_0 = 0. \quad (6.185)$$

Al multiplicar por  $2m\rho^2$  la ec.(6.185) y despejar los términos que solo dependen de  $\phi$  se encuentra que

$$\left( \frac{dW_2}{d\phi} \right)^2 = \rho^2 \left[ 2m\beta_0 - \left( \frac{dW_1}{d\rho} \right)^2 - \left( \frac{dW_3}{dz} + \frac{2qI}{c^2} \ln \rho \right)^2 \right]. \quad (6.186)$$

Como el lado izquierdo de la ec.(6.186) depende únicamente de  $\phi$ , entonces lo igualamos a una constante  $\beta_2$ , encontrando lo siguiente

$$\frac{dW_2}{d\phi} = \beta_2 \Leftrightarrow W_2(\phi) = \beta_2 \phi, \quad (6.187)$$

$$\rho^2 \left[ 2m\beta_0 - \left( \frac{dW_1}{d\rho} \right)^2 - \left( \frac{dW_3}{dz} + \frac{2qI}{c^2} \ln \rho \right)^2 \right] = \beta_2^2 \quad (6.188)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dW_3}{dz} = \sqrt{2m\beta_0 - \left( \frac{dW_1}{d\rho} \right)^2 - \frac{\beta_2^2}{\rho^2}} - \frac{2qI}{c^2} \ln \rho. \quad (6.189)$$



Otra vez, como el lado izquierdo depende únicamente de  $z$  se iguala la ecuación (6.189) a una constante  $\beta_3$  y resulta lo siguiente

$$\frac{dW_3}{dz} = \beta_3 \Leftrightarrow W_3(z) = \beta_3 z, \quad (6.190)$$

$$\sqrt{2m\beta_0 - \left(\frac{dW_1}{d\rho}\right)^2 - \frac{\beta_2^2}{\rho^2} - \frac{2qI}{c^2} \ln \rho} = \beta_3 \quad (6.191)$$

$$\Leftrightarrow 2m\beta_0 - \left(\frac{dW_1}{d\rho}\right)^2 - \frac{\beta_2^2}{\rho^2} = \left(\frac{2qI}{c^2} \ln \rho + \beta_3\right)^2 \quad (6.192)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dW_1}{d\rho} = \sqrt{2m\beta_0 - \frac{\beta_2^2}{\rho^2} - \left(\frac{2qI}{c^2} \ln \rho + \beta_3\right)^2} \quad (6.193)$$

$$\Leftrightarrow W_1(\rho) = \int \sqrt{2m\beta_0 - \frac{\beta_2^2}{\rho^2} - \left(\frac{2qI}{c^2} \ln \rho + \beta_3\right)^2} d\rho \quad (6.194)$$

$$\therefore \tilde{S}(\mathbf{r}, t) = \int \sqrt{2m\beta_0 - \frac{\beta_2^2}{\rho^2} - \left(\frac{2qI}{c^2} \ln \rho + \beta_3\right)^2} d\rho + \beta_2 \phi + \beta_3 z - \beta_0 t. \quad (6.195)$$

# Capítulo 7

## Límites no-relativistas y comparación de resultados

En esta capítulo procederemos a comprobar que el límite no relativista ( $m \rightarrow \infty$ ) de acciones relativistas obtenidas mediante la relación (5.3), a partir de la funciones de transformación de norma  $\Lambda$  calculadas en el capítulo 4, coinciden con aquellas calculadas en el Capítulo 6. De esta forma verificamos la consistencia entre los diversos métodos de cálculo empleados.

Para lograr este objetivo es conveniente recordar las siguientes relaciones halladas previamente, pues se usarán frecuentemente

$$\lambda = \frac{mc^2}{q}, \quad (7.1)$$

$$S = -\frac{q\Lambda}{c}, \quad (7.2)$$

$$\tilde{S} = S + mc^2t \Leftrightarrow S = \tilde{S} - mc^2t, \quad (7.3)$$

### 7.1. El campo Coulombiano

Retomemos la función de norma para este sistema dada por (4.27):

$$\Lambda(\mathbf{r}, t) = -\int \sqrt{\left(\frac{Q}{r} - \alpha\right)^2 - \lambda^2 - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr + \beta_2\theta + cat. \quad (7.4)$$

Sin embargo, al utilizar las relaciones (7.1) y (7.2), hallamos la acción relativista para este sistema

$$S = \frac{q}{c} \int \sqrt{\left(\frac{Q}{r} - \alpha\right)^2 - \frac{m^2c^4}{q^2} - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr - \frac{q}{c}\beta_2\theta - q\alpha t, \quad (7.5)$$

$$= \frac{q}{c} \int \sqrt{\frac{Q^2}{r^2} - 2\frac{\alpha Q}{r} + \alpha^2 - \frac{m^2c^4}{q^2} - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr - \frac{q}{c}\beta_2\theta - q\alpha t. \quad (7.6)$$

Mas aún queda una pregunta por contestar, ¿qué significado físico tiene la constante de separación  $\alpha$ ? Para resolver esta cuestión analicemos las unidades de  $\alpha$  en alguno de los términos de la ec.(7.6) que la contengan

$$[S] = J \cdot s \Rightarrow [q\alpha t] = J \cdot s \Leftrightarrow [\alpha] = \frac{J}{[q]} . \quad (7.7)$$

Por lo tanto,  $\alpha$  tiene que ser la energía relativista  $E$  por unidad de carga. Considerando esto escribimos  $\alpha = E/q$  y la ec.(7.6) queda como sigue

$$S = \frac{q}{c} \int \sqrt{\frac{Q^2}{r^2} - 2\frac{QE}{qr} + \frac{E^2}{q^2} - \frac{m^2c^4}{q^2} - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr - \frac{q}{c}\beta_2\theta - Et , \quad (7.8)$$

$$= \frac{1}{c} \int \sqrt{\frac{q^2Q^2}{r^2} - 2\frac{qQE}{r} + E^2 - m^2c^4 - \frac{q^2\beta_2^2}{r^2}} dr - \frac{q}{c}\beta_2\theta - Et . \quad (7.9)$$

Ahora, a partir de la ec.(6.3) tenemos que  $E = p^0c$ , entonces al repetir el límite cuando  $m \rightarrow \infty$  hecho en el capítulo pasado, obtenemos, que a primer orden en  $1/m$

$$E = mc^2 + \mathcal{E} . \quad (7.10)$$

Al sustituir este valor de  $E$  en (7.9) resulta

$$S = \frac{1}{c} \int \sqrt{\frac{q^2Q^2}{r^2} - 2\frac{(mc^2 + \mathcal{E})qQ}{r} + (mc^2 + \mathcal{E})^2 - m^2c^4 - \frac{q^2\beta_2^2}{r^2}} dr - \frac{q}{c}\beta_2\theta - (mc^2 + \mathcal{E})t , \quad (7.11)$$

$$= \frac{1}{c} \int \sqrt{\frac{q^2Q^2}{r^2} - 2\frac{(mc^2 + \mathcal{E})qQ}{r} + 2m\mathcal{E}c^2 + \mathcal{E}^2 - \frac{q^2\beta_2^2}{r^2}} dr - \frac{q}{c}\beta_2\theta - \mathcal{E}t - mc^2t , \quad (7.12)$$

$$= \int \sqrt{\frac{q^2Q^2}{c^2r^2} - \frac{2mqQ}{r} - \frac{2\mathcal{E}qQ}{c^2r} + 2m\mathcal{E} + \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \frac{q^2\beta_2^2}{c^2r^2}} dr - \frac{q}{c}\beta_2\theta - \mathcal{E}t - mc^2t , \quad (7.13)$$

$$= \int \sqrt{2m\mathcal{E} \left( 1 + \frac{q^2Q^2}{2mc^2\mathcal{E}r^2} - \frac{qQ}{mc^2r} + \frac{\mathcal{E}}{2mc^2} \right) - \frac{2mqQ}{r} - \frac{q^2\beta_2^2}{c^2r^2}} dr - \frac{q}{c}\beta_2\theta - \mathcal{E}t - mc^2t . \quad (7.14)$$

Ahora bien, como estamos tomando el límite cuando  $m \rightarrow \infty$  esto implica que  $\mathcal{E} \ll mc^2$ . Por consiguiente, todos los términos de la energía no relativista son del mismo orden, i.e.,

$$\mathcal{E} \sim V(r) = \frac{qQ}{r} \quad (7.15)$$

$$\Rightarrow \frac{q^2 Q^2}{2mc^2 \mathcal{E} r^2} \sim \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \ll 1 \quad (7.16)$$

$$\Rightarrow \frac{qQ}{mc^2 r} \sim \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \ll 1 \quad (7.17)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{2mc^2} \sim \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \ll 1. \quad (7.18)$$

Como todos estos términos son muy pequeños los podemos despreciar dentro de la raíz, obteniendo

$$S = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - \frac{2mqQ}{r} - \frac{q^2\beta_2^2}{c^2 r^2}} dr - \frac{q}{c}\beta_2\theta - \mathcal{E}t - mc^2t. \quad (7.19)$$

Observamos que si en la ec.(7.19) hacemos las siguientes sustituciones

$$\mathcal{E} \rightarrow \beta_3 \quad y \quad -\frac{q\beta_2}{c} \rightarrow \beta'_2, \quad (7.20)$$

obtenemos,

$$S = \int \sqrt{2m\beta_3 - \frac{2mqQ}{r} - \frac{\beta_2'^2}{r^2}} dr - \frac{q}{c}\beta'_2\theta - \beta_3t - mc^2t, \quad (7.21)$$

$$= \tilde{S} - mc^2t, \quad (7.22)$$

i.e., recuperamos la relación (7.3) pues la acción no relativista es

$$\tilde{S} = \int \sqrt{2m\beta_3 - \frac{2mqQ}{r} - \frac{\beta_2'^2}{r^2}} dr + \beta_2\theta - \beta_3t. \quad (7.23)$$

Con esto hemos demostrado que el parámetro de norma relativista  $\Lambda$  obtenido en (4.27) reproduce el límite no relativista calculado según la ecuación no relativista de H-J de una partícula puntual estática.

## 7.2. El campo magnético constante

Retomemos la función de norma para este sistema dada por (4.52):

$$\Lambda(\mathbf{x}, t) = - \int \sqrt{\alpha^2 - \lambda^2 - (Bx + \beta_2)^2} dx + \beta_2 y + cat. \quad (7.24)$$

Después al utilizar las relaciones (7.1) y (7.2), hallamos la acción relativista para esta partícula

$$S = \frac{q}{c} \int \sqrt{\alpha^2 - \frac{m^2 c^4}{q^2} - (Bx + \beta_2)^2} dx - \frac{q}{c} \beta_2 y - q\alpha t, \quad (7.25)$$

$$= \frac{1}{c} \int \sqrt{q^2 \alpha^2 - m^2 c^4 - (qBx + q\beta_2)^2} dx - \frac{q}{c} \beta_2 y - q\alpha t. \quad (7.26)$$

Como ya vimos en la partícula puntual estática,  $\alpha$  es la energía relativista  $E$  por unidad de carga. Así que la ecuación (7.26) queda como

$$S = \frac{1}{c} \int \sqrt{E^2 - m^2 c^4 - (qBx + q\beta_2)^2} dx - \frac{q}{c} \beta_2 y - Et. \quad (7.27)$$

Ahora tomamos el límite cuando  $m \rightarrow \infty$ . Para ello usamos la ec.(7.10) que sustituimos en (7.27), hallando lo siguiente

$$S = \frac{1}{c} \int \sqrt{(mc^2 + \mathcal{E})^2 - m^2 c^4 - (qBx + q\beta_2)^2} dx - \frac{q}{c} \beta_2 y - (mc^2 + \mathcal{E})t, \quad (7.28)$$

$$= \frac{1}{c} \int \sqrt{2m\mathcal{E}c^2 + \mathcal{E}^2 - (qBx + q\beta_2)^2} dx - \frac{q}{c} \beta_2 y - \mathcal{E}t - mc^2 t, \quad (7.29)$$

$$= \int \sqrt{2m\mathcal{E} + \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \left(\frac{qBx}{c} + \frac{q\beta_2}{c}\right)^2} dx - \frac{q}{c} \beta_2 y - \mathcal{E}t - mc^2 t, \quad (7.30)$$

$$= \int \sqrt{2m\mathcal{E} \left(1 + \frac{\mathcal{E}}{2mc^2}\right) - \left(\frac{qBx}{c} + \frac{q\beta_2}{c}\right)^2} dx - \frac{q}{c} \beta_2 y - \mathcal{E}t - mc^2 t. \quad (7.31)$$

No obstante, como estamos tomando el límite cuando  $m \rightarrow \infty$ , entonces

$$\frac{\mathcal{E}}{2mc^2} \ll 1, \quad (7.32)$$

por lo que es posible desprestigiar este término, encontrando lo siguiente

$$S = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - \left(\frac{qBx}{c} + \frac{q\beta_2}{c}\right)^2} dx - \frac{q}{c} \beta_2 y - \mathcal{E}t - mc^2 t. \quad (7.33)$$

Observando (7.33), nos damos cuenta que al realizar las siguientes sustituciones

$$\mathcal{E} \rightarrow \beta_3 \quad y \quad - \frac{q\beta_2}{c} \rightarrow \beta'_2, \quad (7.34)$$

obtenemos,

$$S = \int \sqrt{2m\beta_3 - \left(\frac{qBx}{c} - \beta'_2\right)^2} dx + \beta'_2 y - \beta_3 t - mc^2 t, \quad (7.35)$$

$$= \int \sqrt{2m\beta_3 - \left(\beta'_2 - \frac{qBx}{c}\right)^2} dx + \beta'_2 y - \beta_3 t - mc^2 t, \quad (7.36)$$

$$= \tilde{S} - mc^2 t. \quad (7.37)$$

I.e., recuperamos la relación (7.3) ya que la acción no relativista para este sistema es

$$\tilde{S} = \int \sqrt{2m\beta_3 + \left(\beta_2 - \frac{qBx}{c}\right)^2} dx + \beta_2 y - \beta_3 t. \quad (7.38)$$

Con esto hemos probado que el parámetro de norma relativista  $\Lambda$  obtenido en (4.52) reproduce el límite no relativista de una partícula cargada en un campo magnético calculado según la ecuación no relativista de H-J.

### 7.3. El campo eléctrico constante

Para el caso del campo eléctrico constante en dirección del eje  $Z$ , volvamos a tomar el parámetro de norma hallado en (4.61)

$$\Lambda(\mathbf{x}, t) = \beta_1 x + \beta_2 y - \int \sqrt{(\varepsilon z + \alpha)^2 - \lambda^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2} dz + c\alpha t. \quad (7.39)$$

Ahora usamos las relaciones (7.1) y (7.2), y hallamos así la acción relativista de este sistema

$$S = -\frac{q}{c}\beta_1 x - \frac{q}{c}\beta_2 y + \frac{q}{c} \int \sqrt{(\varepsilon z + \alpha)^2 - \frac{m^2 c^4}{q^2} - \beta_1^2 - \beta_2^2} dz - q\alpha t, \quad (7.40)$$

$$= -\frac{q}{c}\beta_1 x - \frac{q}{c}\beta_2 y + \frac{1}{c} \int \sqrt{(q\varepsilon z + q\alpha)^2 - m^2 c^4 - q^2 \beta_1^2 - q^2 \beta_2^2} dz - q\alpha t. \quad (7.41)$$

Como hemos visto anteriormente,  $\alpha$  es la energía relativista  $E$  por unidad de carga. Así la ecuación (7.41) queda

$$S = -\frac{q}{c}\beta_1 x - \frac{q}{c}\beta_2 y + \frac{1}{c} \int \sqrt{(q\varepsilon z + E)^2 - m^2 c^4 - q^2 \beta_1^2 - q^2 \beta_2^2} dz - Et. \quad (7.42)$$

Ahora procedemos a tomar el límite cuando  $m \rightarrow \infty$ , para ello utilizamos la ec.(7.10) y la sustituimos en (7.42) encontrando lo siguiente

$$S = -\frac{q}{c}\beta_1 x - \frac{q}{c}\beta_2 y + \frac{1}{c} \int \sqrt{(q\varepsilon z + mc^2 + \mathcal{E})^2 - m^2 c^4 - q^2 \beta_1^2 - q^2 \beta_2^2} dz - (mc^2 + \mathcal{E})t, \quad (7.43)$$

$$= -\frac{q}{c}\beta_1 x - \frac{q}{c}\beta_2 y + \frac{1}{c} \int \sqrt{q^2 \varepsilon^2 z^2 + 2q\varepsilon z mc^2 + 2qz\varepsilon \mathcal{E} + 2mc^2 \mathcal{E} + \mathcal{E}^2 - q^2 \beta_1^2 - q^2 \beta_2^2} dz - \mathcal{E}t - mc^2 t, \quad (7.44)$$

$$= -\frac{q}{c}\beta_1 x - \frac{q}{c}\beta_2 y + \int \sqrt{\frac{q^2 \varepsilon^2 z^2}{c^2} + 2q\varepsilon zm + 2m\mathcal{E} + \frac{2qz\varepsilon \mathcal{E}}{c^2} + \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \frac{q^2 \beta_1^2}{c^2} - \frac{q^2 \beta_2^2}{c^2}} dz - \mathcal{E}t - mc^2 t, \quad (7.45)$$

$$= -\frac{q}{c}\beta_1 x - \frac{q}{c}\beta_2 y + \int \sqrt{2m\mathcal{E} \left(1 + \frac{q^2 \varepsilon^2 z^2}{2mc^2 \mathcal{E}} + \frac{qz\varepsilon}{mc^2} + \frac{\mathcal{E}}{2mc^2}\right) + 2q\varepsilon zm - \frac{q^2 \beta_1^2}{c^2} - \frac{q^2 \beta_2^2}{c^2}} dz - \mathcal{E}t - mc^2 t. \quad (7.46)$$

De nuevo, como estamos tomando el límite cuando  $m \rightarrow \infty$  esto implica que  $\mathcal{E} \ll mc^2$ . Por consiguiente, todos los términos de la energía no relativista son del mismo orden, i.e.,

$$\mathcal{E} \sim V(z) = q\varepsilon z \quad (7.47)$$

$$\Rightarrow \frac{q^2\varepsilon^2 z^2}{2mc^2\mathcal{E}} \sim \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \ll 1 \quad (7.48)$$

$$\Rightarrow \frac{qz\varepsilon}{mc^2} \sim \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \ll 1 \quad (7.49)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{2mc^2} \sim \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \ll 1. \quad (7.50)$$

Por lo tanto, son muy pequeños y es posible despreciar estos términos, como se muestra a continuación

$$S = -\frac{q}{c}\beta_1 x - \frac{q}{c}\beta_2 y + \int \sqrt{2q\varepsilon z m + 2m\mathcal{E} - \frac{q^2\beta_1^2}{c^2} - \frac{q^2\beta_2^2}{c^2}} dz - \mathcal{E}t - mc^2 t. \quad (7.51)$$

Pero observando (7.51), nos damos cuenta que al realizar las siguientes sustituciones

$$\mathcal{E} \rightarrow \beta_3 \quad y \quad -\frac{q\beta_2}{c} \rightarrow \beta_2'. \quad (7.52)$$

Obtenemos,

$$S = \beta_1' x + \beta_2' y + \int \sqrt{2q\varepsilon z m + 2m\beta_3 - \beta_1'^2 - \beta_2'^2} dz - \beta_3 t - mc^2 t, \quad (7.53)$$

$$= \beta_1' x + \beta_2' y + \int \sqrt{2m(q\varepsilon z + 2\beta_3) - \beta_1'^2 - \beta_2'^2} dz - \beta_3 t - mc^2 t, \quad (7.54)$$

$$= \tilde{S} - mc^2 t. \quad (7.55)$$

I.e., recuperamos la relación (7.3) ya que la acción no relativista para este sistema es

$$\tilde{S} = \beta_1 x + \beta_2 y + \int \sqrt{2m(\beta_3 + q\varepsilon z) - \beta_1^2 - \beta_2^2} dz - \beta_3 t. \quad (7.56)$$

Con esto hemos probado que el límite no relativista del parámetro de norma relativista  $\Lambda$  obtenido en (4.61) reproduce la acción de una partícula cargada en un campo magnético calculada de acuerdo con la ecuación no relativista de H-J.

## 7.4. El campo magnético producido por un alambre infinito

Para el alambre recto infinito con corriente  $I$  en la dirección  $Z$ , recordamos que el parámetro de norma relativista (4.38) es

$$\Lambda(\mathbf{r}, t) = - \int \sqrt{\alpha^2 - \lambda^2 - \frac{\beta_2^2}{\rho^2} - \left(\frac{2I}{c} \ln \rho - \beta_3\right)^2} d\rho + \beta_2 \phi + \beta_3 z + cat. \quad (7.57)$$

Usando nuevamente las relaciones (7.1) y (7.2), se encuentra que la acción relativista de este sistema es

$$S = \frac{q}{c} \int \sqrt{\alpha^2 - \frac{m^2 c^4}{q^2} - \frac{\beta_2^2}{\rho^2} - \left( \frac{2I}{c} \ln \rho - \beta_3 \right)^2} d\rho - \frac{q}{c} \beta_2 \phi - \frac{q}{c} \beta_3 z - q \alpha t, \quad (7.58)$$

$$= \frac{1}{c} \int \sqrt{q^2 \alpha^2 - m^2 c^4 - \frac{q^2 \beta_2^2}{\rho^2} - \left( \frac{2qI}{c} \ln \rho - q \beta_3 \right)^2} d\rho - \frac{q}{c} \beta_2 \phi - \frac{q}{c} \beta_3 z - q \alpha t. \quad (7.59)$$

Como se demostró anteriormente  $\alpha$  es la energía relativista  $E$  por unidad de carga. De este modo, la ec.(7.59) queda

$$S = \frac{1}{c} \int \sqrt{E^2 - m^2 c^4 - \frac{q^2 \beta_2^2}{\rho^2} - \left( \frac{2qI}{c} \ln \rho - \frac{q}{c} \beta_3 \right)^2} d\rho - \frac{q}{c} \beta_2 \phi - \frac{q}{c} \beta_3 z - Et. \quad (7.60)$$

Al tomar el límite cuando  $m \rightarrow \infty$ , tenemos que usar la ec.(7.10) y la sustituimos en (7.60), como a continuación se muestra

$$S = \frac{1}{c} \int \sqrt{(\mathcal{E} + mc^2)^2 - m^2 c^4 - \frac{q^2 \beta_2^2}{\rho^2} - \left( \frac{2qI}{c} \ln \rho - \frac{q}{c} \beta_3 \right)^2} d\rho, - \frac{q}{c} \beta_2 \phi - \frac{q}{c} \beta_3 z - (\mathcal{E} + mc^2)t \quad (7.61)$$

$$= \frac{1}{c} \int \sqrt{\mathcal{E}^2 + 2m\mathcal{E}c^2 - \frac{q^2 \beta_2^2}{\rho^2} - \left( \frac{2qI}{c} \ln \rho - q\beta_3 \right)^2} d\rho, - \frac{q}{c} \beta_2 \phi - \frac{q}{c} \beta_3 z - \mathcal{E}t - mc^2 t, \quad (7.62)$$

$$= \int \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} + 2m\mathcal{E} - \frac{q^2 \beta_2^2}{c^2 \rho^2} - \left( \frac{2qI}{c^2} \ln \rho - \frac{q}{c} \beta_3 \right)^2} d\rho, - \frac{q}{c} \beta_2 \phi - \frac{q}{c} \beta_3 z - \mathcal{E}t - mc^2 t, \quad (7.63)$$

$$= \int \sqrt{2m\mathcal{E} \left( 1 + \frac{\mathcal{E}}{2mc^2} \right) - \frac{q^2 \beta_2^2}{c^2 \rho^2} - \left( \frac{2qI}{c^2} \ln \rho - \frac{q}{c} \beta_3 \right)^2} d\rho, - \frac{q}{c} \beta_2 \phi - \frac{q}{c} \beta_3 z - \mathcal{E}t - mc^2 t. \quad (7.64)$$

Como en los demás sistemas estudiados anteriormente, al hacer  $m \rightarrow \infty$  implica que  $\mathcal{E} \ll mc^2$ . Entonces se tiene lo siguiente

$$\frac{\mathcal{E}}{2mc^2} \sim \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \ll 1, \quad (7.65)$$



Por lo tanto, el segundo término del paréntesis es despreciable, como aquí se muestra

$$S = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - \frac{q^2\beta_2^2}{c^2\rho^2} - \left(\frac{2qI}{c^2} \ln \rho - \frac{q}{c}\beta_3\right)^2} d\rho - \frac{q}{c}\beta_2\phi - \frac{q}{c}\beta_3z - \mathcal{E}t - mc^2t. \quad (7.66)$$

Pero analizando (7.66), nos percatamos que al hacer las siguientes sustituciones

$$\mathcal{E} \rightarrow \beta_0, \quad -\frac{q\beta_2}{c} \rightarrow \beta'_2 \quad y \quad -\frac{q\beta_3}{c} \rightarrow \beta'_3. \quad (7.67)$$

Se obtiene,

$$S = \int \sqrt{2m\beta_0 - \frac{\beta_2'^2}{\rho^2} - \left(\frac{2qI}{c^2} \ln \rho + \beta'_3\right)^2} d\rho + \beta'_2\phi + \beta'_3z - \beta_0t - mc^2t, \quad (7.68)$$

$$= \tilde{S} - mc^2t. \quad (7.69)$$

I.e., recuperamos otra vez la relación (7.3) ya que la acción no relativista para el alambre es:

$$\tilde{S}(\mathbf{r}, t) = \int \sqrt{2m\beta_0 - \frac{\beta_2'^2}{\rho^2} - \left(\frac{2qI}{c^2} \ln \rho + \beta'_3\right)^2} d\rho + \beta_2\phi + \beta_3z - \beta_0t.$$

Con esto hemos probado que el límite no relativista del parámetro de norma relativista  $\Lambda$  obtenido en (4.38) reproduce la acción de una partícula cargada en un campo magnético de acuerdo con la ecuación no relativista de H-J.

# Capítulo 8

## Resumen y conclusiones

En esta tesis se estudia el Modelo de Nambu, que surge como una de las posibilidades para obtener una ruptura espontánea de la simetría de Lorentz, con el objeto de determinar bajo que condiciones es equivalente a la electrodinámica estándar en la norma no-lineal  $A'_\mu A'^\mu = -\lambda^2$ . También se muestra, para algunos casos particulares solubles, cómo obtener las transformaciones que nos permiten pasar a dicha norma. La motivación de incorporar el rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz viene de la posibilidad de interpretar al fotón como los correspondientes modos de Goldstone asociados a dicha ruptura.

Como antecedentes previos al estudio del modelo de Nambu, el Capítulo 2 contiene una revisión de los aspectos básicos de la electrodinámica tanto en su formulación vectorial, mientras que el Capítulo 3 revisa la formulación covariante, ambos con énfasis en el problema de las transformaciones de norma. En el Capítulo 5 se revisaron también los conceptos asociados al método de Hamilton-Jacobi, que posteriormente fue aplicado a cada uno de los casos particulares considerados.

En el Capítulo 4 se introdujo el modelo de Nambu, concentrándonos en su versión temporaloide. Se demostró que dicha restricción del modelo solamente es equivalente a la electrodinámica estándar en la norma  $A_0 = (\lambda^2 + \mathbf{A}^2)^{1/2}$  una vez que se ha impuesto la ley de Gauss como constricción externa. Debido a que la ley de Gauss genera las transformaciones de norma en la formulación Hamiltoniana, este resultado muestra que dicha invariancia no se recupera en forma automática a partir del modelo de Nambu, sino que debe ser impuesta adicionalmente. En este capítulo también se construyeron las transformaciones de norma que permiten pasar, de la norma de Coulomb, a la norma no lineal en los casos solubles correspondientes a un campo coulombiano, un campo magnético producido por un alambre infinito, un campo magnético constante y un campo eléctrico constante.

En el Capítulo 5 se introduce la propuesta de Nambu para obtener las funciones que permiten pasar, de la norma  $A_\mu$ , a la norma no lineal  $A'_\mu A'^\mu = -\lambda^2$  empleando la

construcción de la acción respectiva, que se obtiene mediante la resolución del problema de Hamilton-Jacobi relativista asociado

$$\left[ \partial^\mu S(\mathbf{x}, t) - \frac{q}{c} A^\mu(\mathbf{x}, t) \right]^2 = -m^2 c^2. \quad (8.1)$$

El problema asociado consiste en determinar el movimiento de una partícula con masa  $m$  y carga  $q$  en el campo electromagnético descrito por el potencial  $A_\mu$ , que posteriormente se quiere describir en la norma no lineal, mediante la transformación de norma

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda. \quad (8.2)$$

La relación entre ambos problemas está dada por

$$\lambda = \frac{mc^2}{q}, \quad S = -\frac{q\Lambda}{c}. \quad (8.3)$$

De este modo, la transformación a la norma no-lineal, determinada por  $\Lambda$ , está dada en términos de la acción  $S$  del problema asociado y viceversa. También se discutió el papel de los extremos fijos en la acción mostrando cómo se relacionan las diversas maneras de prescribirlos. Se consideró el caso de la partícula libre, que es especialmente ilustrativo en estos aspectos, debido a la simplicidad de los cálculos involucrados.

El Capítulo 6 contiene la aplicación directa del método descrito en el capítulo anterior a los casos particulares considerados, en la aproximación no relativista. Con este objeto se muestra en general como obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi no-relativista para la correspondiente acción  $\tilde{S}$ , a partir de su expresión relativista, en el contexto de la interacción electromagnética. También se obtiene la expresión no-relativista de la norma no-lineal y se muestra que la función  $\tilde{\Lambda}$  que permite acceder a ella sigue cumpliendo la relación  $\tilde{\Lambda} = -c\tilde{S}/q$ , por lo que el método de Nambu para calcular  $\tilde{\Lambda}$  sigue siendo aplicable. De este modo, en este capítulo la atención se concentra en el cálculo de las acciones no-relativistas para los casos particulares considerados. Se emplearon tres métodos diferentes para obtener dicha acción: (i) resolución directa de la ecuación de Hamilton-Jacobi, (ii) integración del Lagrangiano empleando la conservación de energía y (iii) integración del Lagrangiano empleando las soluciones explícitas de las ecuaciones de movimiento en términos de los valores iniciales. También se estudió la relación entre los diversos métodos, mostrando la equivalencia de los resultados, en su caso. En el caso particular de la carga en un campo eléctrico constante se mostró explícitamente como pasar de la acción escrita en términos de las constantes de separación ( $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ ) y sus variables canónicas conjugadas ( $\beta_i, i = 1, 2, 3$ ), que aparecen al resolver la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi, a la acción reescrita en términos de las posiciones iniciales y finales del sistema.

En el capítulo 7 se muestra la compatibilidad entre los diversos métodos desarrollados para obtener la función  $\Lambda$  que permite acceder a la norma no-lineal. Mediante la relación

general (8.3) se obtienen las acciones relativistas para los casos particulares considerados a partir de las correspondientes expresiones para la función  $\Lambda$  calculadas en el Capítulo 4. A continuación se obtienen los límites no relativistas de dichas acciones que se comparan favorablemente con los cálculos directos realizados en el Capítulo 6.

Resumiendo, en los casos particulares considerados se ha mostrado que en efecto es posible construir la transformación que nos lleva a la norma no-lineal  $A'_\mu A'^\mu = -\lambda^2$ , mediante las funciones  $\Lambda$ . Una de las características que debe satisfacer una buena norma es que esté bien definida en todo el espacio-tiempo. Varios de los cálculos realizados empleando las constantes de separación en la ecuación de Hamilton-Jacobi muestran que las funciones  $S$ , o alternativamente  $\Lambda$  parecieran no estar definidas en todo el espacio, debido a la posibilidad de que se indetermina el radical. Como consecuencia de esto se tendría que la norma no-lineal no sería accesible en todo el espacio. Aunque no hemos probado el caso general, conjeturamos que estas posibles indefiniciones se evitan procediendo de la siguiente manera. Las funciones de norma no-relativista pueden conectarse con la acción del sistema gracias a la relación  $\tilde{\Lambda} = -c\tilde{S}/q$ . De este modo es posible apreciar que las constantes de separación  $\alpha$  y  $\beta$  de las que depende  $\tilde{\Lambda}(t, \mathbf{x})$ , están directamente relacionadas con aquéllas que aparecen en la formulación de Hamilton-Jacobi. Entonces siempre es posible realizar una transformación canónica que nos lleve del espacio de las constantes  $(\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, 3)$  al espacio de las posiciones iniciales y finales  $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0)$  del sistema asociado. La conjetura es que al expresar  $\tilde{S}$  ( $\tilde{\Lambda}$ ) de este modo se pone de manifiesto que estas funciones están bien definidas en todo el espacio. Esto se ha demostrado explícitamente para el campo magnético constante y el campo eléctrico constante, asegurando de este modo que el límite no relativista de la norma no lineal es accesible en estos casos.

Como continuación de este trabajo mencionamos las siguientes posibilidades. Por una parte es conveniente completar el estudio de la equivalencia clásica del modelo de Nambu y la electrodinámica estándar en los casos espacialoide y nulo. Finalmente es de gran interés investigar si estas equivalencias se mantienen o no a nivel cuántico, en los tres casos del modelo.

# Bibliografía

- [1] Rindler, Wolfgang. *Relativity Special, General and Cosmological*. Oxford University Press. 2a. ed. Gran Bretaa. 2006.
- [2] Greiner, Walter. Reinhardt, Joachim. *Field Quantization*. Springer-Verlag. Berlin, 1996.
- [3] Alan Kostelecky and Neil Russell, *Data Tables for Lorentz and CPT Violation*. Rev. Mod. Phys. 83, 11 (2011).
- [4] J.L. Chkareuli, C.D. Frogart and H.B. Nielsen, *Lorentz Invariance and Origin of Symmetries*, Phys. Rev. Letts. **87**(2001)091601.
- [5] Y. Nambu, *Quantum Electrodynamics in Nonlinear Gauge*, Suppl. of the Prog. Theor. Phys., Extra Number, (1968)190.
- [6] J. D. Bjorken, Ann. Phys. (N.Y.) **24**(1963)174.
- [7] G. S. Guralnik, *Photon as a Symmetry-breaking solution to Field theory. I*, Phys. rev. **134**(1964)B 1404; A. Kovner and B. Rosenstein, *New Look at QED<sub>4</sub>: the photons a Goldstone boson and the topological interpretation of electric charge*, Phys. Rev. **D49**(1994)5571; I. Low and A. V. Manohar, *Spontaneously broken spacetime symmetries and Goldstone theorem*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002)101602; P. Kraus and E. T. Tomboulis, *Photons and gravitons as Goldstone bosons and the cosmological constant*, Phys. Rev. **D66**(2002)045015.
- [8] V.A. Kostelecky and R. Potting, *Gravity from Local Lorentz Violation*, Gen.Rel.Grav.**37**(2005)1675, Int.J.Mod.Phys. **D14**(2005)2341.
- [9] J.L. Chkareuli, C.D. Frogart and H.B. Nielsen, *Deriving Gauge Symmetry and Spontaneous Lorentz violation*, arXiv: hep-th/0610186.
- [10] A. T. Azatov and J.L. Chkareuli, *Nonlinear QED and Physical Lorentz invariance*, Phys. Rev. **D73**(2006)065026.
- [11] J.L. Chkareuli, C.D. Frogart, R. N. Mohapatra and H.B. Nielsen, *Photon as a Vector Goldstone Boson: Nonlinear  $\sigma$  Model for QED*, arXiv: hep-th/0412225.

- 
- [12] J.L. Chkareuli and J. G. Jejelava, *Spontaneous Lorentz Violation: Non-Abelian Gauge Fields as Pseudo-Goldstone Vector Bosons*, arXiv: 0704.0553 [hep-th].
- [13] R. Bluhm and V. A. Kostelecky, *Spontaneous Lorentz Violation: Nambu-Goldstone Modes and Gravity*, Phys. Rev. **D71** (2005)065008.
- [14] P.A.M. Dirac, *A New Classical Theory of Electrons*, Proc. Roy. Soc. (London), **A209**(1951)291; P.A.M. Dirac, *A New Classical Theory of Electrons. II*, Proc. Roy. Soc. (London), **A212**(1951)330; P.A.M. Dirac, *A New Classical Theory of Electrons. III*, Proc. Roy. Soc. (London), **A223**(1954)438.
- [15] P.A.M. Dirac, *Is there an Aether?* Nature (London) **168**(1951)906.
- [16] Jackson, John David. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc. 3a. ed. New Jersey, E.U. 1999.
- [17] Hobson, M.P. Efstathiou, G. Lasenby, A.N. *General Relativity. An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press. E.U. 2006.
- [18] Schutz, Bernard F. *A first course in General Relativity*. Cambridge University Press. Reino Unido. 2004.
- [19] Griffiths, David J. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall. 3a. ed. New Jersey, E.U. 1999.
- [20] Goldstein, Herbert. Poole, Charles y Safko, John. *Classical Mechanics*. Addison Wesley. 3a. ed. San Francisco, E.U. 2002.
- [21] Viniegra Heberlein, Fermín Alberto. *Mecánica. Libro 3. Sistemas Dinámicos*. Las Prensas de Ciencias. México, UNAM. 2009.
- [22] Viniegra Heberlein, Fermín Alberto. *Mecánica. Libro 2*. Las Prensas de Ciencias. México, UNAM. 2009.
- [23] José, Jorge V. Saletan, Eugen J. *Classical Dynamics: A contemporary approach*. Cambridge University Press. E.U. 1998.
- [24] Spiegel, Murray Ralph. *Schaum's outline of theory and problems of theoretical mechanics. SI(metric)*. McGraw-Hill, Inc. Singapore. 1982.