



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES  
FÍSICA DE ALTAS ENERGÍAS

**NO-CONMUTATIVIDAD, TEORÍAS DE ORDEN SUPERIOR Y  
VIOLACIÓN DE LORENTZ**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

**OSCAR SÁNCHEZ SANTOS**

TUTOR PRINCIPAL  
DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM  
MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORIAL  
DR. MARCOS ROSENBAUM PITLUCK  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM  
DR. MANUEL TORRES LABANSAT  
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

MÉXICO, D. F. FEBRERO 2013



*Dedicatoria:*

*A mi amadísimo hijo Leonardo, porque aunque no se encuentre en este momentos a mí lado, ha sido una gran inspiración en mi vida.*



*Agradecimientos:*

*Deseo expresar mis más grandes agradecimientos a los Doctores: Dr. Román Linares, Dr. Rodolfo P. Martínez, Dra. Myriam Mondragón, Dr. Merced Montesinos, Dr. Hernando Quevedo, Dr. Marcos Rosenbaum, y al Dr. Manuel Torres por sus comentarios y anotaciones que contribuyeron de manera substancial al desarrollo de esta tesis. Además deseo agradecer a la Srta. Trinidad Ramirez, por su apoyo en cuestiones administrativas.*

*Y en particular al Dr. José David Vergara Oliver por su gran apoyo en el transcurso del desarrollo de esta tesis.*

*Agradezco el apoyo por parte del proyecto PAPIIT-IN109013 para la realización de esta tesis.*



# No-conmutatividad, Teorías de Orden Superior y Violación de Lorentz

Oscar Sánchez Santos





# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>1. Formalismo de Dirac</b>	<b>1</b>
1.1. Formalismo de Dirac . . . . .	1
1.2. Cuerda Bosónica . . . . .	5
1.3. Modelo con Constricciones de Segunda Clase . . . . .	8
<b>2. Teorías de Orden Superior</b>	<b>11</b>
2.1. Teorías de Orden Superior y Formalismo de Ostrogradski . . . . .	11
2.2. Teoría Perturbativa . . . . .	13
2.3. Ejemplo . . . . .	17
<b>3. Estructuras No-canónicas</b>	<b>19</b>
3.1. No-conmutatividad y Paréntesis de Dirac . . . . .	19
3.2. No-conmutatividad del Espacio Tiempo . . . . .	21
3.2.1. Momento Conmutativo . . . . .	21
3.2.2. Momentos No-conmutativos . . . . .	24
3.2.3. Bases Cruzadas . . . . .	26
<b>4. Modelos Mecánicos de Teorías No-conmutativas</b>	<b>27</b>
4.1. Modelo de Chern-Simons de Primer Orden . . . . .	27
4.2. Oscilador Armónico Anisotrópico . . . . .	34
<b>5. Teoría No-conmutativa a partir de una Teoría de Orden Superior</b>	<b>39</b>
5.1. Ecuaciones de Movimiento Clásicas . . . . .	39
5.2. Constricciones y Hamiltoniano . . . . .	41
5.2.1. Aproximación Perturbativa y Espectro Cuántico . . . . .	43
5.3. Cuantización del Sistema . . . . .	46
5.4. Relaciones de Conmutación con Parámetro de Conmutatividad Local . . . . .	50
<b>6. Cuantización No-canónica y Bases Cruzadas</b>	<b>55</b>
6.1. Potencial Simpléctico . . . . .	55
6.2. Cuantización Canónica . . . . .	57

6.3.	Partícula Libre . . . . .	61
6.3.1.	Base $(x_1, p_2)$ . . . . .	61
6.3.2.	Base $(x_2, p_1)$ . . . . .	69
6.3.3.	Base $(p_1, p_2)$ . . . . .	71
6.4.	Partícula en Caída Libre . . . . .	73
6.4.1.	Base $(x_1, p_2)$ . . . . .	73
6.4.2.	Base $(x_2, p_1)$ . . . . .	75
6.4.3.	Base $(p_1, p_2)$ . . . . .	77
6.4.4.	Coordenadas Conmutativas y Momentos No-conmutativos . . . . .	79
6.4.5.	Base $(x_1, p_2)$ . . . . .	79
6.4.6.	Base $(x_2, p_1)$ . . . . .	81
6.4.7.	Base $(x_1, x_2)$ . . . . .	83
6.5.	Momentos y Coordenadas No-conmutativas . . . . .	85
6.5.1.	Base $(x_1, p_2)$ . . . . .	85
6.5.2.	Base $(x_2, p_1)$ . . . . .	88
6.6.	Cuantización de los Sistemas . . . . .	90
6.6.1.	Partícula en Caída Libre (Coordenadas No-conmutativas) . . . . .	90
6.6.2.	Partícula en Caída Libre (Momentos No-conmutativas) . . . . .	93
6.7.	Modelo de Chern-Simons Mecánico . . . . .	94
6.7.1.	Acción del Sistema . . . . .	94
6.7.2.	Variables Auxiliares . . . . .	95
6.7.3.	Lagrangiano y Método de Diagonalización . . . . .	96
6.7.4.	Espectro Cuántico . . . . .	98
<b>7.</b>	<b>Modelo de Chern-Simons de Orden <math>n</math></b> . . . . .	<b>101</b>
7.1.	Modelo con Derivadas Mayores que 2 . . . . .	101
7.1.1.	Momentos y Constricciones . . . . .	102
7.2.	Paréntesis de Dirac y Dos-forma Simpléctica . . . . .	103
7.3.	Aproximación Perturbativa . . . . .	104
7.4.	Modelo con Derivadas de Orden 3 . . . . .	105
7.4.1.	Hamiltoniano Canónico y Hamiltoniano Total . . . . .	106
<b>8.</b>	<b>Física de Dos Tiempos y Violación de Lorentz</b> . . . . .	<b>109</b>
8.1.	Dualidad de Norma . . . . .	109
8.2.	Violación de Lorentz . . . . .	112
<b>9.</b>	<b>Violación de Lorentz, Física de Dos Tiempos y Cuerdas</b> . . . . .	<b>117</b>
9.1.	Sistema . . . . .	117
9.2.	Acción Cuadrática . . . . .	121
9.3.	Límite de Perturbación Fuerte . . . . .	122
9.4.	Simetría de Lorentz y Física de dos Tiempos . . . . .	124
9.5.	Simetría de Poincaré y Teoría de Cuerdas . . . . .	125





# Introducción

La no-conmutatividad [1, 2] en la actualidad se ha convertido, en una de las áreas más importantes de la física teórica. En un sentido puramente matemático, la no-conmutatividad es una generalización de la no-conmutatividad cuántica del espacio-fase al espacio-tiempo [3]. Otros desarrollos teóricos que introducen la no-conmutatividad del espacio-tiempo [4] son, por ejemplo, teorías de campos en el contexto de renormalización [5], fenomenología del Modelo Estándar de la física de partículas, teoría de cuerdas [6] y efecto Hall cuántico [7]. Por otra parte, los primeros indicios de la no-conmutatividad, históricamente inician con Heisenberg, el conjeturó que la posibilidad de introducir relaciones de incertidumbre en las coordenadas como una manera de evitar singularidades en las auto-energías del electrón. Peierls utilizó esta idea en su trabajo del problema de Landau [7, 8], en éste la no-conmutatividad se presenta para campos magnéticos muy fuertes o equivalentemente en el límite de masa cero. Sin embargo, la no-conmutatividad a este nivel surge, ya sea tomando alguna clase de límite [10] en los parámetros de la teoría o de considerar estructuras simplécticas no-canónicas [11]. En otro contexto, que no sea considerar alguna clase de límite o estructura simpléctica no-canónica, en esta tesis se muestra que la no-conmutatividad surge de manera natural como consecuencia de las teorías de orden superior. La demostración de este hecho se hace utilizando el modelo de Chern-Simons con segundas derivadas temporales. Sin embargo, este tipo de teorías con esta clase de derivadas poseen problemas con el estado de mínima energía [12, 13, 14], para solucionar este conflicto se aplicará un método perturbativo, el cual utiliza las ecuaciones de movimiento para eliminar las derivadas temporales de ordenes superiores [8]. Este método permite escribir una teoría sin los problemas mencionados, además proporciona de manera natural una estructura simpléctica no-canónica, la cual muestra no-conmutatividad entre todas las variables del sistema.

No obstante, la importancia de las aplicaciones de la no-conmutatividad en las diferentes áreas de la física teórica, esta viola la simetría de Lorentz [15, 16, 17, 18], debido fundamentalmente a que el parámetro de no-conmutatividad es constante, parece plausible entonces que si se introduce una dependencia local en el parámetro de no-conmutatividad, se pueda recuperar la simetría de Lorentz. H. Snyder contruyó un espacio-tiempo no-conmutativo con esta extraordinaria peculiaridad, dicho espacio-tiempo con esta característica es compatible con la simetría de Lorentz, sin embargo, éste no es compatible con la simetría de Poincaré, debido a la dependencia local del parámetro de conmutatividad. C. N. Yang construyó un espacio-tiempo que posee tanto la simetría

de Lorentz y que además es invariante bajo traslaciones, es decir, es invariante de Poincaré [19], pero que sólo tiene sentido en cinco dimensiones [20]. En vista, de que el parámetro de no-conmutatividad es constante, las teorías que poseen dichas relaciones de conmutación son invariantes bajo traslaciones, pero no bajo empujones y rotaciones. Uno de los modelos que introduce términos que rompen con la simetría de Lorentz, es el Modelo Estándar Extendido SME [15]. El sector fermiónico de este modelo, introduce relaciones de dispersión que generaliza la relación de dispersión de la partícula libre relativista, dicha relación contiene términos que violan la simetría de Lorentz. En este trabajo se estudia el Lagrangiano que da origen a esta relación de dispersión. Las simetrías de este Lagrangiano son extendidas, cuando se recupera la simetría de Lorentz, haciendo que los vectores constantes que aparecen en el Lagrangiano sean locales en los campos. Cuando esta simetría se recupera, se obtiene vía el formalismo de Dirac el Hamiltoniano de la física de dos tiempos [22, 24, 25, 26, 27, 28], esta teoría es una teoría de unificación, sólo que para llevarla a cabo se tienen que considerar dos coordenadas temporales. Para diferentes elecciones de norma de esta teoría se obtienen diferentes modelos de la física, por ejemplo, la partícula libre no masiva, el átomo de hidrógeno o modelos que poseen relaciones las conmutación de Snyder. Por otra parte, cuando se restaura la simetría de Poincaré se tienen que considerar objetos unidimensionales extendidos, es decir, cuerdas. Con lo cual se tiene que introducir una dependencia extra en el espacio de parámetros de los campos, además de la dependencia temporal, de tal manera que obtiene la acción de la cuerda bosónica. En el contexto de las simetrías, como ya se mencionó C. N. Yang contruyó un espacio-tiempo no-conmutativo en cinco dimensiones. En el caso presente la dependencia extra de un nuevo parámetro en los campos, introduce una nueva dimensión en la teoría pero a nivel de la hoja del mundo no de los campos, tal que de esta manera se recupera la simetría de Poincaré [20].

Por otra parte, teorías con derivadas de orden superior (terceras derivadas o derivadas superiores en el tiempo en las ecuaciones de movimiento, segundas derivadas o derivadas superiores en las Lagrangianas) surgen de manera natural por varias razones en diversas áreas de la física. Los términos con derivadas de orden superior son agregados a las teorías con derivadas de orden inferior como correcciones de la teoría. Esto ocurre en la Relatividad General, por ejemplo, cuando las correcciones cuánticas naturalmente contienen derivadas de orden superior en la métrica, o modelos no-líneales de la teoría de cuerdas predice términos de orden  $R^2$  [30] y ordenes más altos. Modelos clásicos también contienen dichas correcciones, tales como el modelo relativista de Dirac de la radiación del electrón [13]. La presencia de estos términos de corrección no importa que tan pequeñas sean, hace que la nueva teoría con derivadas de orden superior en el tiempo, tenga propiedades radicalmente distintas a las teorías de primer orden. Una de las nuevas características de estas teorías, es que poseen más grados de libertad que las teorías de orden inferior. Si se asume que el orden de la teoría es  $n$  y se supone que la energía cinética es cuadrática en estas  $n$ -velocidades; las cuales se definen como  $x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$ . Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange serán de orden  $(2n)$  y como consecuencia se

necesitan  $(2n)$  condiciones iniciales para determinar completamente su movimiento, es decir, el espacio consta de  $(2n)$  variables. Además, como se sabe a través de la representación Hamiltoniana se puede escribir estas mismas ecuaciones de movimiento, sólo que en esta representación se pueden escribir como ecuaciones de primer orden, en consecuencia se tendrán  $(2n)$  ecuaciones, por lo tanto, resultan  $(2n)$  variables en el espacio fase. Este hecho hace evidente que el análisis de estas teorías es bastante más complejo que el caso de teorías con ecuaciones de Euler-Lagrange de segundo orden.

Otra de las características y quizá la más grave de todas, es que las teorías con derivadas de orden superior, es su pérdida del estado de más baja energía [12]. Analicemos brevemente como surge este conflicto con el estado de mínima energía. Como se sabe para el caso de teorías de orden inferior las velocidades no son parte del espacio fase, por consecuencia esta tienen que ser eliminarlas, esto puede ser hecho despejándolas de los momentos (siempre y cuando la teoría sea no-degenerada). Si se asume que la teoría es cuadrática en las velocidades, además de considerar potenciales también cuadráticos en las coordenadas, esto proporciona Hamiltonianos cuadráticos en los momentos y como consecuencia se tiene una teoría con Hamiltoniano acotado por abajo. Para el caso de teorías de orden superior se realiza algo similar, se tienen que despejar las derivadas temporales más altas de la teoría, sin embargo, estas proporcionan Hamiltonianos que son lineales en por lo menos en uno de los momentos, es decir, estas teorías no son acotadas por abajo, ya que los momentos pueden tomar tanto valores positivos como negativos. Clásicamente estos valores negativos en el Hamiltoniano están bien definidos, sin embargo, cuánticamente este hecho tiene problemas, ya que en este caso no se posee estado de mínima energía, debido a que el Hamiltoniano no es acotado por abajo. Existen varias maneras de remediar este problema, una de ellas es utilizar el método perturbativo descrito en este trabajo. Dicho método consiste en reemplazar las derivadas de orden superior, ya sea por derivadas de primer orden o por las coordenadas dependiendo de la paridad del orden de las derivadas, esta perturbación se hace a partir de las ecuaciones de movimiento. Se aplica este método a los modelos de orden superior propuestos en este trabajo. Sin embargo, en estos modelos sus variables son no-conmutativas y la cuantización de estos sistemas no puede ser llevada a cabo directamente debido a la no-conmutatividad de sus variables. Para remediar, este hecho varios procedimientos pueden ser realizados: Uno de ellos es utilizar el mapeo de Darboux, el cual consiste en mapear las variables no-conmutativas a variables que satisfacen las relaciones de conmutación canónicas. Otro procedimiento es utilizar bases cruzadas, el cual consiste en elegir las observables que formen un conjunto completo de observables que conmuten y describir el sistema con estas variables. Este procedimiento aunque más complicado tiene la ventaja de cuantizar directamente en las variables originales, es decir, las observables de la teoría corresponden a variables en las cuales estaba descrito originalmente el sistema. En estas teorías se propone un marco general para lograr la cuantización en este tipo de bases.

Uno de los principales propósitos de esta tesis es mostrar, la relación que existe entre la no-conmutatividad con las teorías de orden superior. La demostración de este hecho,

se hace introduciendo una extensión del modelo de Chern-Simons de primer orden a segundo orden en las derivadas temporales. Sin embargo, como se mencionó estas teorías no tienen estado de mínima energía. La solución a este problema es superado utilizando el método perturbativo descrito en la sección 2,2 del capítulo dos. Este método proyecta los estados de energía a los estados de mínima energía, dicha proyección tiene como resultado el producir una estructura simpléctica no-canónica, de tal manera, que la no-conmutatividad surge de manera natural. Otro de los resultados obtenidos de la aplicación de este método es eliminar los problemas con el estado de mínima energía.

Como es bien sabido, la no-conmutatividad rompe con la simetría de Lorentz. Otro de los propósitos es estudiar un modelo que presenta dicho rompimiento. Específicamente se muestra que dicho modelo, cuando se extienden las simetrías, tales como la simetría de Lorentz y Poincaré, se obtienen el Hamiltoniano de la física de dos tiempos y la acción de la cuerda bosónica. Todo el estudio se realiza a través de formalismo de Dirac.

Por otra parte, la mayor parte de las teorías importantes de la física son sistemas contrañidos, dichos sistemas son analizados con el formalismo de Dirac, para entender esto, en el primer capítulo está dedicado a introducir brevemente la teoría de Dirac para sistemas singulares. Se presenta también, un par de ejemplos de cómo se utiliza dicho formalismo, uno para el caso de la teoría de cuerdas, la cual posee constricciones de primera clase y un sistema mecánico con constricciones de segunda clase. La importancia en la clasificación de las constricciones, radica en el hecho de que la estructura de Poisson es modificada. Las constricciones de segunda clase requieren de la introducción del paréntesis de Dirac, este hecho es utilizado en este trabajo para introducir la no-conmutatividad en las teorías con derivadas superiores.

Las teorías de orden superior, poseen ciertos problemas y quizá el más importante de estos problemas es que no son acotados por abajo, es decir, no poseen estado de mínima energía. En el segundo capítulo se hace una pequeña introducción al formalismo de Ostrogradski, el cual es la extensión del formalismo Hamiltoniano de teorías de orden superior. En este capítulo se muestra de manera detallada como éstas teorías son no-acotadas por abajo. Sin embargo, una manera en que se puede superar el problema de la cota inferior en la energía es, en principio, eliminando las derivadas de orden superior. Se muestra un método perturbativo que consiste en utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange, y con estas poder sustituir las derivadas de orden superior por derivadas de primer orden o por las coordenadas dependiendo de la paridad del orden de la derivada.

En el tercer capítulo se muestra, como a partir de una estructura simpléctica arbitraria se puede definir varias opciones de variables canónicas tan sólo con resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales, las cuales tienen su origen en el concepto de potencial simpléctico. Como consecuencia de las diferentes opciones de variables canónicas, resultan diferentes teorías cuánticas, las cuales no son unitariamente equivalentes. Además se realizan algunos ejemplos con diferentes estructuras simplécticas.

En el cuarto capítulo se estudian un par de modelos que presentan no-conmutatividad. El primer de los modelos presentados, presenta no-conmutatividad en sus coordenadas,



sólo cuando se considera el límite de masa cero o equivalentemente campos magnéticos muy intensos. En el caso del segundo modelo la no-conmutatividad es introducida a través de una estructura simpléctica no-canónica. Es decir, en los dos modelos presentados la no-conmutatividad no surge de manera natural, en el sentido de que ya sea se tienen que tomar límites en los parámetros de la teoría o de postular la no-conmutatividad en las variables del sistema.

Como ya se mencionó la no-conmutatividad presentada en los modelos estudiados en el capítulo cuatro, se presenta de manera por decirlo de alguna forma no-natural. En el capítulo cinco se realiza la extensión del modelo de Chern-Simons presentado en el capítulo cuatro, de primer orden en las derivadas temporales a segundo orden en las derivadas temporales. Con este modelo se muestra de manera explícita que la no-conmutatividad surge de manera natural, sin tomar ninguna clase de límite o de considerar estructuras simplécticas no-canónicas. No obstante, que las teorías de orden superior poseen problemas con el estado de mínima energía, éste problema se elimina por la implementación del método perturbativo desarrollado en el segundo capítulo. Si embargo, tal y como se explicó en el segundo capítulo. La implementación del método perturbativo elimina las derivadas de orden superior y las reemplaza por derivadas de primer orden o por las coordenadas, dado este hecho la no-conmutatividad no pudo ser eliminada una vez hecha la perturbación.

En el capítulo seis se introduce el método de bases cruzadas, este método tiene como principal característica tomar en cuenta la no-conmutatividad de la teoría. Es decir, la base en que el sistema cuántico estará descrito se sigue de considerar la estructura simpléctica que las variables del espacio fase satisfacen, explícitamente se elige un conjunto completo de observables que conmutan. Se muestra que la elección de la base, hecha a partir de la estructura simpléctica clásica, es completamente equivalente a la elección de la representación del álgebra de conmutadores. La demostración de este hecho es a partir de la acción clásica, específicamente, se calculan las ecuaciones de movimiento de las variables auxiliares, una vez obtenidas estas se introducen en la acción, de aquí resulta un Lagrangiano que está descrito por las variables que fueron elegidas como base. El Lagrangiano final, por construcción estará descrito en variables que satisfacen relaciones de conmutación canónica, por lo cual la cuantización se realiza de manera directa. Esta cuantización es completamente equivalente a la elección de la representación de observables cuánticos que satisfacen las relaciones de conmutación no-canónicas. Por último se cuántiza el modelo que resultó de la aplicación de la aproximación perturbativa, aplicando el método de bases cruzadas. El resultado de la cuantización muestra que los espectros resultantes de la aplicación del mapeo de Darboux y el de bases cruzadas son completamente diferentes, concretamente debido a que se están empleando bases diferentes.

En el capítulo siete se hace una vez más una extensión al modelo de Chern-Simons, nuevamente esta extensión es en el orden de las derivadas temporales, explícitamente el orden de las derivadas son  $n$ . Esta extensión muestra básicamente los mismos resultados

que su contraparte de segundo orden, además los resultados se pueden recuperar considerando  $n = 2$ . Se muestra que, tanto el Hamiltoniano como la estructura simpléctica sólo difieren del modelo de segundo orden en las potencias de los parámetros de la teoría.

En el capítulo ocho se hace una breve introducción a la física de dos tiempos y al concepto de violación de Lorentz. Este capítulo servirá como un preámbulo para el último capítulo de este trabajo. En éste se construye la acción de la física de dos tiempos, se muestra la existencia de tres constricciones, que bajo la clasificación de Dirac corresponden a constricciones de primera clase. Se demuestra que esta teoría tiene sólo sentido con dos coordenadas temporales. Además se realiza un ejemplo de como funciona esta teoría. Se muestran además algunos aspectos importantes del concepto de rompimiento de la simetría de Lorentz, en particular, nos enfocamos en el sector fermiónico del Modelo Estándar Extendido SME. Este sector contiene una extensión de la relación de dispersión de la partícula libre relativista. Esta relación de dispersión será objeto de estudio en el capítulo nueve.

En el capítulo nueve, se estudia la relación de dispersión construida en el capítulo ocho. El estudio de esta relación de dispersión no se hace sobre la relación de dispersión misma, sino de la acción que la contiene. Se muestra que esta acción, posee un rompimiento explícito de la simetría de Lorentz, a partir de este hecho, se demuestra que al recuperar las simetrías que esta relación de dispersión viola, se obtienen como resultado dos teorías muy importantes de la física teórica. Una de las teorías que se recuperan, cuando se considera el régimen ultrarrelativista y haciendo que los vectores constantes que contiene la acción inicial sean dependientes de los campos, es la física de dos tiempos. Para recuperar la simetría de Poincaré, se debe considerar una extensión más en los vectores constantes ya mencionados, además de la dependencia de los campos. Esto es, se tiene que hacer que estos dependan no sólo del tiempo sino también de un parámetro más, extendiendo de esta manera su espacio de parámetros. Esta extensión es a nivel de la dimensión de los parámetros de los campos, es decir, además de la dependencia temporal de los campos ahora se considera un nuevo parámetro, el cual define ya no una trayectoria unidimensional sino más bien una trayectoria bidimensional, es decir, se está tratando con cuerdas en la hoja del mundo. Con esto la acción que se obtiene es la acción de Nambu-Goto para la cuerda bosónica.

# Capítulo 1

## Formalismo de Dirac

Las teorías que describen interacciones fundamentales son teorías de norma, dichas teorías son sistemas que poseen Lagrangianos singulares, es decir, Lagrangianos para las cuales no se puede definir el momento canónico en términos de las velocidades. Sin embargo, estas teorías pueden ser tratadas con el formalismo desarrollado por Paul M. Dirac [37]. En este capítulo, se hace una breve introducción al formalismo de Dirac, además se presentan un par de ejemplos con constricciones; uno con constricciones de primera clase y otro con constricciones de segunda clase. Estos ejemplos servirán para preparar el terreno de los siguientes capítulos, en los cuales se aplica dicho formalismo.

### 1.1. Formalismo de Dirac

Uno de los conceptos fundamentales de la física teórica, es el concepto de acción en la cual los movimientos clásicos de algún sistema son aquellos que hacen que ésta

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt, \quad (1.1)$$

sea estacionaria bajo variaciones  $\delta q^n(t)$  de las variables del Lagrangiano  $q^n (n = 1, \dots, N)$ , las cuales son nulas en los puntos extremos  $t_i, t_f$ .

Las condiciones bajo las cuales la acción es estacionaria, son las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (1.2)$$

Las cuales pueden ser escritas de manera más explícita como

$$\ddot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial q^{n'} \partial \dot{q}^n}. \quad (1.3)$$

Inmediatamente de esta expresión puede verse que las aceleraciones en un tiempo dado están determinadas por las posiciones y las velocidades en este tiempo, si y sólo si, la matriz  $\partial^2 L / \partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n$  puede ser invertida, es decir, si el determinante

$$\det \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \right) \neq 0, \quad (1.4)$$

es diferente de cero. De otra manera, si el determinante es cero, las aceleraciones no pueden ser determinadas de manera única por las posiciones y las velocidades, en consecuencia, las soluciones de las ecuaciones de movimiento pueden contener funciones arbitrarias del tiempo. Tal es el caso de interés para sistemas que contienen grados de libertad de norma y son aquellos para los cuales la matriz  $\partial^2 L / \partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n$  no puede ser invertida. Por lo tanto, se tiene que adoptar otro punto de vista ya que se poseen funciones de las coordenadas y los momentos, las cuales hacen que el sistema sufra una reducción en los grados de libertad.

El punto de partida del formalismo Hamiltoniano para teorías de primer orden en derivadas temporales, es definir el momento canónico por

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}, \quad (1.5)$$

del cual se observa, que el hecho de que el determinante (1.4) sea nulo, es justo la condición para lo no-invertibilidad de las velocidades como función de los momentos y las posiciones. En otras palabras, los momentos (1.5) en este caso no son todos independientes, sino más bien, existen algunas relaciones

$$\phi_n(q, p) = 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad (1.6)$$

que se siguen de la definición (1.5) de los momentos. Es decir, cuando los momentos en (1.6) son reemplazados por su definición (1.5) en términos de las  $q^n$  y las  $\dot{q}^n$ . La ecuación (1.6) se reduce a una identidad. Las condiciones (1.6) son llamadas constricciones primarias para enfatizar el hecho de que las ecuaciones de movimiento no son usadas para obtener dicha relación y que además estas no implican ninguna restricción en las coordenadas  $q^n$  y sus velocidades  $\dot{q}^n$ .

Asumiendo por simplicidad que el rango de la matriz  $\partial^2 L / \partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n$  es constante a través del espacio fase  $(q, p)$  y que las ecuaciones (1.6) definen una subvariedad suavemente inmersa en el espacio fase. Esta subvariedad es conocida como la superficie de constricción primaria. Si el rango de la matriz  $\partial^2 L / \partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n$  es igual a  $N - M'$ , donde,  $M'$  son las ecuaciones independientes de (1.6), y la superficie de constricción primaria es una subvariedad del espacio fase de dimensión  $2N - M'$ . Es decir, tal como se mencionó anteriormente existe una reducción en los grados de libertad.

Se sigue de (1.6) que la transformación inversa de las  $p^n$  y las  $\dot{q}^n$  es multivaluada. Dado un punto  $(q^n, p^n)$  que satisface las ecuaciones de constricción (1.6), la imagen

inversa  $(q^n, \dot{q}^n)$  que resuelve (1.5) no es única, entonces, (1.5) define un mapeo de una variedad  $2N$ -dimensional de las  $q^n$  y las  $\dot{q}^n$  a una variedad más pequeña definida por (1.6) de dimensión  $2N - M'$ . Por lo tanto, las imágenes inversas de un punto dado de (1.6) forman una variedad de dimensión  $M'$ . A fin de que la transformación sea univaluada se necesita introducir parámetros extras, al menos  $M'$  de ellos, que indiquen la localización de las  $\dot{q}^n$  en la variedad inversa. Estos parámetros serán introducidos en el Hamiltoniano como multiplicadores de Lagrange.

Ahora bien, como se sabe el Hamiltoniano canónico está definido por la transformación de Legendre

$$H = \dot{q}^n p^n - L. \quad (1.7)$$

En esta definición el Hamiltoniano  $H$  es función de las posiciones y las velocidades. Sin embargo, el hecho de que las  $\dot{q}^n$  entren en  $H$  sólo a través de la combinación  $p(q, \dot{q})$  definida por (1.5). Esta propiedad general de las transformaciones de Legendre es lo que hace  $H$  interesante. Y este hecho es verificado por la evaluación del cambio  $\delta H$  inducido por variaciones independientes de las posiciones y las velocidades

$$\delta H = \dot{q}^n \delta p^n + \delta \dot{q}^n p^n - \delta \dot{q}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} - \delta q^n \frac{\partial L}{\partial q^n} = \dot{q}^n \delta p^n - \delta q^n \frac{\partial L}{\partial q^n}. \quad (1.8)$$

Aquí  $\delta p^n$  no es una variación independiente, sino, que es considerada como una combinación lineal de las  $q^n$  y las  $\dot{q}^n$ . Se puede apreciar además que las  $\dot{q}^n$  aparecen en (1.8) sólo a través de una precisa combinación lineal y no de alguna otra manera. Esto significa que  $H$  es una función de las  $q^n$  y las  $p^n$ .

El Hamiltoniano definido por (1.7), sin embargo, no está determinado únicamente como función de  $q^n$  y las  $p^n$ . Esto puede ser entendido por notar que las  $\delta p^n$  en (1.8) no son todos independientes, sino que están restringidos a preservar las constricciones primarias  $\phi_m \approx 0$ .

En consecuencia, se tiene que el Hamiltoniano canónico está bien definido sólo en la subvariedad definida por las constricciones primarias y puede ser extendido arbitrariamente a toda la variedad. Se sigue que el formalismo debe ser invariante por el reemplazo

$$H \rightarrow H + c^n(q, p)\phi_n. \quad (1.9)$$

Es claro entonces que de la forma del principio de acción, que la teoría es invariante bajo  $H \rightarrow H + c^n(q, p)\phi_n$ , entonces este cambio resulta únicamente en una forma de renombrar los multiplicadores de Lagrange  $u^n \rightarrow u^n + c^n$ .

Por otra parte las ecuaciones de movimiento derivadas del formalismo Hamiltoniano pueden ser escritas de la forma

$$\dot{F} = [F, H] + u^n [F, \phi_n], \quad (1.10)$$

donde,  $F(q, p)$  es una función arbitraria de las variables canónicas y los paréntesis de Poisson están definidos de la manera usual, es decir,

$$[F, G] = \frac{\partial F}{\partial q^n} \frac{\partial G}{\partial p^n} - \frac{\partial F}{\partial p^n} \frac{\partial G}{\partial q^n}. \quad (1.11)$$

Ahora se analizará algunas de las consecuencias de las ecuaciones de movimiento (1.9). Un requerimiento básico de consistencia es que las constricciones primarias sean preservadas en el tiempo. Es decir, si se sustituye  $\phi_n$  por  $F$  en la ecuación (1.9) se tiene que cumplir que  $\dot{\phi}_n = 0$ . Y esto da lugar a las condiciones de consistencia siguientes

$$[\phi_n, H] + u^n [\phi_n, \phi_m] = 0. \quad (1.12)$$

Las ecuaciones (1.12) pueden ya sea reducirse a una relación independiente de las  $u^n$  o pueden imponer restricciones en las  $u^n$ . En el caso anterior, si la relación entre las  $q^n$  y las  $p^n$  son independientes de las constricciones primarias, estas son llamadas constricciones secundarias. Las constricciones secundarias difieren de las constricciones primarias, en que las segundas sólo hacen uso de la definición de momento canónico y las primeras en que son una consecuencia de las ecuaciones de movimiento. Si existen constricciones secundarias estas pueden definir nuevas constricciones secundarias  $\chi_n$ , es decir, imponen nuevas condiciones de consistencia,

$$[\chi_n, H] + u^n [\chi_n, \phi_m] = 0. \quad (1.13)$$

Después de hacer esto, se checa que las ecuaciones (1.13) implican nuevas constricciones secundarias o sólo restringen los valores de  $u^n$ . Después de que el proceso está terminado, se obtiene un conjunto de constricciones secundarias, las cuales son denotadas como

$$\chi_k, \quad k = M + 1, \dots, M + K, \quad (1.14)$$

donde,  $k$  es el número de constricciones secundarias.

Por otra parte, la presencia de las funciones arbitrarias  $u^n$  en el Hamiltoniano total dice que no todas las  $q_n$  y las  $p_n$  son observables. En otras palabras, el estado físico está definido para más de un conjunto de  $q_n$  y  $p_n$ . Por tanto, existen más de un conjunto de valores de las variables canónicas representando un estado físico dado. Para ver como se obtiene esta conclusión, nótese que si se toma un conjunto de variables canónicas en el tiempo  $t_1$  y por lo tanto, define completamente un estado físico en ese tiempo, entonces, las ecuaciones de movimiento determinan los estados físicos en otros tiempos.

Ahora bien, los coeficientes  $u^n$  son funciones arbitrarias del tiempo, lo cual significa entonces que el valor de la variable canónica en  $t_2$  dependerá de la elección de las  $u^n$  en el intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Considérese, en particular,  $t_2 = t_1 + \delta t$ . La diferencia entre los valores de una variable canónica  $F$  en el tiempo  $t_2$  para dos diferentes elecciones de  $u^n$  y  $\hat{u}^n$  de funciones arbitrarias en el tiempo  $t_1$ , toma la forma

$$\delta F = \delta u^n [F, \phi_n], \quad (1.15)$$

con  $\delta u^n = (u^n - \hat{u}^n)\delta t$ . Por lo tanto, la transformación (1.15) no altera el estado físico en el tiempo  $t_2$ . Se puede decir entonces, extendiendo la terminología usada en teoría de campos de norma, que las constricciones de primera clase generan transformaciones de norma. Además se sabe las teorías físicas que pretendan describir la realidad natural, deben ser invariantes de norma.

Ahora considérese nuevamente las constricciones de segunda clase, las cuales surgen cuando la matriz  $\Delta_{nm} = [\phi_n, \phi_m]$  es diferente de cero en la superficie de restricción, entonces como se dijo anteriormente que sólo las constricciones de primer clase generan transformaciones de norma, entonces se tiene que idear una forma de eliminarlas del Hamiltoniano extendido. La manera de eliminar las constricciones de segunda clase fue ideada por Dirac a través de introducir un nuevo paréntesis el cual está definido como

$$[F, G]_D = [F, G] - [F, \chi_n]\Delta^{nm}[F, \chi_m]. \quad (1.16)$$

Como se puede observar estos paréntesis contienen una parte que vincula las variables del sistema y otra parte que relaciona las variables del sistema con las constricciones. Además como ya se mencionó estos sólo tienen sentido si y solo si la matriz que definen las constricciones es diferente de cero. Otra cosa interesante acerca de estos paréntesis, es que se puede obtener un sistema con variables no-conmutativas si las variables del sistema poseen paréntesis no-triviales con las constricciones.

## 1.2. Cuerda Bosónica

Como es bien sabido, la trayectoria de una partícula en el espacio-tiempo es la llamada línea universo. Además se sabe que su acción es proporcional a la longitud de la línea universo, es decir,

$$S = -m \int d\tau \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}, \quad (1.17)$$

donde  $\dot{x}_\mu$  es un vector tangente a la línea universo y representa la velocidad de la partícula con respecto a la coordenada  $\tau$  que parametriza la línea universo.

Ahora bien, cuando se trata con objetos extendidos unidimensionales, el concepto de partícula debe ser abandonado y ser remplazado por el concepto de cuerda. En consecuencia, ya no se puede hablar de una trayectoria como en el caso de una partícula puntual, sino de la llamada hoja del mundo, por lo tanto, tal como en el caso de la partícula puntual relativista traza la línea universo al cambiar de posición y su acción es proporcional a la longitud de esta, las cuerdas barren la hoja del mundo y como consecuencia la acción de la cuerda será proporcional al área de la hoja del mundo, esta acción es lo que se conoce como la acción de Nambu-Goto.

Denótese como  $\sigma$  la posición a lo largo de la cuerda. Sea  $\tau$  el parámetro de la evolución temporal de la cuerda. Además considérese a  $X(\sigma, \tau)$  como el mapeo del espacio de

parámetros a la hoja del mundo. La acción de la partícula relativista es proporcional a la longitud de la línea universo. La acción de la cuerda es una generalización natural a dimensiones extras de este resultado. En consecuencia, la acción de la cuerda será proporcional al área de la hoja del mundo. De la geometría Riemanniana, dicha área está dada por la expresión

$$Area(\Sigma) = \int d\sigma d\tau \sqrt{-g}, \quad (1.18)$$

donde  $\Sigma$  y  $g$ , denotan la superficie de la hoja del mundo y el determinante de la métrica respectivamente.

A fin de derivar la forma explícita de la anterior acción, se puede considerar el elemento de línea siguiente:

$$(ds)^2 = G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.19)$$

Si los desplazamientos permanecen en la superficie  $\Sigma$ , se tiene

$$dx^\mu = \frac{\partial X^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial X^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.20)$$

Sin embargo, si los desplazamientos permanecen en la superficie, luego se puede escribir la ecuación (1.19) en términos de la métrica definida por la relación

$$h_{ab} = G_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu(\sigma, \tau)}{\partial \xi^b}. \quad (1.21)$$

Sustituyendo (1.21) en (1.19) y regresando a la notación original  $(\tau, \sigma)$ , se encuentra que la acción de la cuerda toma la forma

$$S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X_M}{\partial \sigma} \frac{\partial X^M}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial X_M}{\partial \sigma} \frac{\partial X^M}{\partial \sigma}\right) \left(\frac{\partial X_M}{\partial \tau} \frac{\partial X^M}{\partial \tau}\right)}, \quad (1.22)$$

donde  $T$  es la tensión de la cuerda.

De la acción (1.22) se infiere la densidad Lagrangiana, la cual está dada por

$$\mathcal{L} = -T \sqrt{\left(\frac{\partial X_M}{\partial \sigma} \frac{\partial X^M}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial X_M}{\partial \sigma} \frac{\partial X^M}{\partial \sigma}\right) \left(\frac{\partial X_M}{\partial \tau} \frac{\partial X^M}{\partial \tau}\right)}. \quad (1.23)$$

Para simplificar la notación se hará las siguientes definiciones

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X_M}{\partial \tau} \quad \text{y} \quad X'_{\mu} = \frac{\partial X_M}{\partial \sigma}. \quad (1.24)$$

En consecuencia, la densidad (1.23) toma la forma

$$\mathcal{L} = -T \sqrt{(\dot{X}^\mu X'_{\mu})^2 - (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)(X'^{\mu} X'_{\mu})}. \quad (1.25)$$



Esta densidad define los momentos

$$\mathcal{P}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_\mu} = -T \frac{(\dot{X}^\mu X'_\mu) X'^\mu - (X'^\mu X'_\mu) \dot{X}^\mu}{\sqrt{(\dot{X}^\mu X'_\mu)^2 - (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)(X'^\mu X'_\mu)}}, \quad (1.26)$$

De la forma de estas ecuaciones, se sigue que

$$\mathcal{P}^\mu \dot{X}_\mu = 0, \quad \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}_\mu + T^2 (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu) = 0. \quad (1.27)$$

Este conjunto de ecuaciones definen las siguientes constricciones, las cuales escritas de manera explícita están dadas por

$$\Phi_1 = \mathcal{P}_\mu \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}, \quad \Phi_2 = \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}_\mu + T^2 \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right), \quad (1.28)$$

Ambas constricciones son de primera clase, ya que

$$\begin{aligned} \{\Phi_1(\sigma, \tau), \Phi_2(\sigma', \tau)\} &= \int d\sigma'' \left[ \frac{\delta \Phi_1(\sigma, \tau)}{\delta X^\mu(\sigma'', \tau)} \frac{\delta \Phi_2(\sigma', \tau)}{\delta \mathcal{P}^\mu(\sigma'', \tau)} - \frac{\delta \Phi_2(\sigma, \tau)}{\delta X^\mu(\sigma'', \tau)} \frac{\delta \Phi_1(\sigma', \tau)}{\delta \mathcal{P}^\mu(\sigma'', \tau)} \right] \\ &= \int d\sigma'' \left[ \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'') \delta(\sigma' - \sigma'') - T^2 \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'') \delta(\sigma' - \sigma'') \right] \end{aligned} \quad (1.29)$$

Si se utiliza la siguiente identidad

$$f(x) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x') = -\frac{\partial f(x)}{\partial x} \delta(x - x') + f(x') \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x'), \quad (1.30)$$

se obtienen términos de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi_1(\sigma, \tau)}{\delta X^\mu(\sigma'', \tau)} \frac{\delta \Phi_2(\sigma', \tau)}{\delta \mathcal{P}^\mu(\sigma'', \tau)} &= -\partial_\sigma [P_M(\sigma) \delta(\sigma - \sigma'')] P^M(\sigma') \delta(\sigma' - \sigma'') + \\ &[P_M(\sigma) P^M(\sigma') \delta(\sigma' - \sigma'') + P_M(\sigma') P^M(\sigma'') \delta(\sigma' - \sigma'')] \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma''). \end{aligned}$$

La otra parte de los paréntesis, está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi_2(\sigma, \tau)}{\delta X^\mu(\sigma'', \tau)} \frac{\delta \Phi_1(\sigma', \tau)}{\delta \mathcal{P}^\mu(\sigma'', \tau)} &= T^2 \partial_\sigma [\partial_\sigma X_M(\sigma) \delta(\sigma - \sigma'')] \partial_\sigma X^M(\sigma') \delta(\sigma' - \sigma'') - \\ &T^2 [\partial_\sigma X_M(\sigma) \partial_\sigma X^M(\sigma') \delta(\sigma' - \sigma'') + \partial_\sigma X_M(\sigma') \partial_\sigma X^M(\sigma'') \delta(\sigma' - \sigma'')] \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma''). \end{aligned}$$

El primer término de estas relaciones es cero cuando es realizada la integración, por lo tanto, se obtiene finalmente

$$\{\Phi_1(\sigma, \tau), \Phi_2(\sigma', \tau)\} = [\Phi_1(\sigma, \tau) + \Phi_2(\sigma', \tau)] \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma').$$

Los otros paréntesis de Poisson se obtienen de manera análoga. Finalmente resultan los paréntesis

$$\{\Phi_1(\sigma, \tau), \Phi_1(\sigma', \tau)\} = 4T^2 [\Phi_2(\sigma, \tau) + \Phi_2(\sigma', \tau)] \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'),$$

$$\{\Phi_2(\sigma, \tau), \Phi_2(\sigma', \tau)\} = [\Phi_2(\sigma, \tau) + \Phi_2(\sigma', \tau)] \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma').$$

El lector interesado en la cuantización de este sistema, puede consultar en una gran variedad de libros de texto dedicados al tema. En esta sección sólo se mostró la existencia de las constricciones (1.28), además de mostrar que se trata de constricciones de primera clase.

### 1.3. Modelo con Constricciones de Segunda Clase

Para tratar las constricciones de segunda clase considérese el siguiente modelo mecánico

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}q_3(q_1^2 + q_2^2 - r^2). \quad (1.31)$$

Es fácil ver que se trata de una partícula de masa  $m$  que se mueve en un círculo de radio  $r$ , en un espacio bidimensional generado por  $q_1$  y  $q_2$  sujeta a una fuerza  $q_3$  que la mantiene en el círculo. Los momentos están dados por las expresiones

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{q}_2, \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = 0. \quad (1.32)$$

Nótese que el tercero de estos momentos define una restricción, la cual está dada por

$$\psi_1 = p_3. \quad (1.33)$$

Para poder encontrar el Hamiltoniano, se resuelve  $\dot{q}_1$  y  $\dot{q}_2$  en términos de  $p_1$  y  $p_2$ , e insertando estas soluciones en la transformación de Legendre  $H = p_i q_i - L$ . El valor de  $\dot{q}_3$  se trata de manera diferente, tal como lo vio en las secciones anteriores. Dicho lo anterior se obtiene el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}q_3(q_1^2 + q_2^2 - r^2) + \lambda_1 \psi_1 \quad (1.34)$$

Estrictamente hablando, de las definiciones hechas en la sección anterior este Hamiltoniano en realidad no es el Hamiltoniano canónico, sino el Hamiltoniano total. La condición de consistencia exige que la evolución de la restricción (1.33), sea constante en la superficie de restricción. Se tiene que pedir como consecuencia de esta condición

$$\dot{\psi}_1 = \{\psi_1, H\} = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 - r^2) \approx 0. \quad (1.35)$$

Esta condición define otra constricción, la cual se puede escribir como

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 - r^2). \quad (1.36)$$

El proceso tiene que continuar, hasta que dejen de existir más constricciones o que la evolución de las constricciones determine los multiplicadores de Lagrange. Por lo tanto, la evolución de la última de las constricciones, se tiene

$$\dot{\psi}_2 = \{\psi_2, H\} = \frac{1}{m}(p_1 q_1 + p_2 q_2) \approx 0. \quad (1.37)$$

La cual define nuevamente una constricción

$$\psi_3 = p_1 q_1 + p_2 q_2. \quad (1.38)$$

Evolucionando nuevamente ésta, se obtiene

$$\dot{\psi}_3 = \{\psi_3, H\} = -q_3(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{m}(p_1^2 + p_2^2) \approx 0. \quad (1.39)$$

Esta ecuación nuevamente como en el caso anterior es una constricción, sin embargo, esta puede ser simplificada utilizando la constricción  $\psi_2$

$$\psi_4 = q_3 \psi_2 - \frac{1}{mr^2}(p_1^2 + p_2^2). \quad (1.40)$$

Utilizando el mismo procedimiento, resulta

$$\dot{\psi}_4 = \{\psi_4, H\} = \lambda_1 + \frac{2q_3}{mr^2}(p_1 q_1 + p_2 q_2) \approx 0. \quad (1.41)$$

Sin embargo, esta condición ya no define una nueva constricción. Esta condición determina el multiplicador de Lagrange  $\lambda_1$ .

En consecuencia el sistema queda de la forma

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}q_3(q_1^2 + q_2^2 - r^2) + \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \lambda_3 \psi_3 + \lambda_4 \psi_4, \quad (1.42)$$

donde los paréntesis de las constricciones son

$$\begin{aligned} \{\psi_1, \psi_2\} = 0, \quad \{\psi_1, \psi_3\} = 0, \quad \{\psi_1, \psi_4\} = -1, \quad \{\psi_2, \psi_4\} = -\frac{1}{mr^2}\psi_3 \approx 0, \\ \{\psi_2, \psi_3\} = 2\psi_2 + r^2 \approx r^2, \quad \{\psi_3, \psi_4\} = 2\psi_4 - \frac{1}{2}q_3 \approx -\frac{1}{2}q_3. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Como se mencionó al principio de este capítulo, el hecho de que la evolución de las constricciones sea diferente de cero y sus paréntesis sean no-triviales. Indica entonces

que se trata de constricciones de segunda clase, los cuales definen los paréntesis de Dirac siguientes, entre las diferentes variables

$$\begin{aligned} \{q_3, p_1\}_D &= -\frac{q_1 q_3}{2r^2}, & \{q_3, p_2\}_D &= -\frac{q_2 q_3}{2r^2}, & \{q_3, q_1\}_D &= -\frac{2q_3 p_1}{mr^2}, \\ \{q_3, q_2\}_D &= -\frac{2q_3 p_2}{mr^2}, & \{q_3, p_3\}_D &= 2, & \{p_1, p_2\}_D &= \frac{q_1 p_1}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Además los multiplicadores de Lagrange, están dados por

$$\lambda_1 = -\frac{2q_3}{mr^2}\psi_3, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\frac{\psi_3 - mr^2}{mr^2(2\psi_2 + r^2)}\psi_3, \quad \lambda_4 = \psi_2. \quad (1.45)$$

La importancia de los paréntesis de Dirac, radica en que estos serán promovidos a conmutadores en la teoría cuántica y el hecho de que estos no sean constantes, implica una barrera práctica importante para lograr la cuantización de la teoría. Más adelante se construirán dos modelos: uno en el cual los paréntesis de Dirac son constantes y otro en el cual no lo son, implicando problemas para llevar a cabo la cuantización del sistema.

# Capítulo 2

## Teorías de Orden Superior

Para poder llevar a cabo la cuantización de algún sistema físico, uno de los caminos en que dicha cuantización puede realizarse es construir el Hamiltoniano. Dicho Hamiltoniano estará escrito en variables del espacio fase, estas variables satisfacen ciertas relaciones de conmutación. La cuantización se lleva a cabo encontrando una representación de esta álgebra. No obstante, en este trabajo se necesita construir versiones Hamiltonianas de teorías de orden superior en derivadas temporales. El formalismo que permite construir el Hamiltoniano de una teoría de orden superior se conoce como formalismo de Ostrogradski. A continuación se presenta una breve introducción al tema. Además se muestra que los Hamiltonianos resultantes de aplicar dicho formalismo no están acotados por abajo, lo cual produce problemas con el estado de mínima energía. Para solucionar el problema con el estado de mínima energía, se describe un método perturbativo, el cual permite eliminar las derivadas de orden superior a través de las ecuaciones de movimiento y con ello eliminar el problema.

### 2.1. Teorías de Orden Superior y Formalismo de Ostrogradski

El formalismo de Ostrogradski trata con teorías que contienen derivadas de orden superior en su versión Hamiltoniana, no obstante, estas teorías tienen el inconveniente de ser no acotadas por abajo, como se mostrará más adelante. Una de las posibles vías para eliminar el problema con el estado de mínima energía, como se verá más adelante es con el método perturbativo presentado al final de este capítulo, este método permite eliminar el problema de las energías, si y sólo si, el potencial resultante es acotado una vez hecha la perturbación.

Una teoría local es una teoría en la cual la acción puede ser escrita como la integral del Lagrangiano, el cual depende hasta algún orden finito de las derivadas de  $q(t)$

$$S[q] = \int dt L(q, \dot{q}, \dots, q^{(N)}), \quad (2.1)$$

donde, el entero  $N$  es conocido como el orden de la teoría. Se dice que el Lagrangiano es no-degenerado si la siguiente relación puede ser invertida, de otra manera se dice que la teoría es singular:

$$P_N = \frac{\partial L}{\partial q^{(N)}}. \quad (2.2)$$

El hecho más importante de esta sección es que al menos  $N - 1$  de las  $2N$  soluciones independientes de cada una de las teorías tiene energía negativa. Para poder demostrar esto se empezará definiendo las ecuaciones de Euler-Lagrange.

En estas teorías las ecuaciones de Euler-Lagrange están definidas por

$$\sum_{n=0}^N \left( -\frac{d}{dt} \right)^n \frac{\partial L}{\partial q^{(n)}} = 0. \quad (2.3)$$

Como se observa estas ecuaciones, proporcionarán ecuaciones diferenciales de orden  $n+2$ . Las cuales en principio necesitan  $n + 2$  condiciones iniciales. No obstante, aquí no se tratará con la naturaleza de las ecuaciones de Euler-Lagrange, sino más bien el esquema Hamiltoniano. A continuación se hace algunas definiciones al respecto, con motivo de mostrar la premisa principal de este capítulo.

Como se puede inferir del tipo de Lagrangianos, estas teorías poseen muchos más grados de libertad, para ser precisos el doble del orden de la teoría en cuestión. El método para tratar este tipo de teorías fue desarrollado por Ostrogradski hace más de un siglo. Se definen  $N$  variables de posición como

$$Q_n = q^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.4)$$

obsérvese que las  $n - 1$  diferentes derivadas temporales ahora se convierten en variables de posición.

Los momentos conjugados por otra parte se definen como:

$$P_N = \sum_{k=n}^N \left( -\frac{d}{dt} \right)^{(k-n)} \frac{\partial L}{\partial q^{(k)}} \quad (2.5)$$

En lo que resta de esta sección se asumirá que el Lagrangiano es no-degenerado, no obstante, se aplicará este formalismo a teorías degeneradas, pero por lo pronto en esta sección sólo es importante mostrar el problema con el estado de mínima energía. Cuando se dice que una teoría es no-degenerada, implica que es posible invertir la relación (2.5) para  $P_N$  y obtener

$$q^{(N)} = Q_{N+1}(Q_1, Q_2, \dots, Q_N, P_N). \quad (2.6)$$

Aquí debe notarse que sólo un momento es requerido para escribir esta relación. El Hamiltoniano, por otra parte, es obtenido a través de la transformación de Legendre

$$H = \sum_{n=1}^N P_n q^{(n)} - L$$

$$= \sum_{n=1}^N P_n Q_{n+1} - L(Q_1, Q_2, \dots, Q_{N+1}). \quad (2.7)$$

De aquí se sigue de manera inmediata, que las ecuaciones de evolución están dadas por

$$\dot{Q}_n = \frac{\partial H}{\partial P_n}, \quad \dot{P}_n = -\frac{\partial H}{\partial Q_n}. \quad (2.8)$$

Con este par de ecuaciones se puede, de manera directa reproducir las definiciones canónicas del momento (2.5) y las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.3). De esta manera es fácil ver que  $H$  genera la evolución temporal. Entonces la invariancia bajo traslaciones temporales muestra que el Hamiltoniano es conservado y en efecto, se puede identificar  $H$  como la energía.

El punto clave de este capítulo, que es evidente en la expresión (2.7). Como consecuencia de la definición de  $H$ , este es lineal en los momentos  $P_1, P_2, \dots, P_{N-1}$ , en vista de que los momentos pueden tomar valores tanto positivos como negativos la energía es, por lo tanto, no-acotada por abajo. Este mismo hecho se cumple para todas las teorías no-degeneradas con derivadas de orden superior. Un hecho importante a remarcar, es que esta propiedad no depende del tipo de interacción utilizado y por lo que este problema no se puede superar ajustando parámetros en la teoría o introducir nuevas interacciones.

## 2.2. Teoría Perturbativa

Como se mencionó anteriormente, se pueden eliminar las derivadas de orden superior y de alguna manera eliminar los estados de energía negativa, sin embargo, con la eliminación de las derivadas de orden superior se pierde información sobre altas energías, pero se eliminan los estados de energía negativa, bajo algunas restricciones impuestas en el potencial que se obtiene una vez hecha la perturbación.

En muchas aplicaciones de las teorías de orden superior, la parte que contiene dichos términos aparecen en los Lagrangianos como correcciones de bajas energías en la teoría efectiva. Sin embargo, de acuerdo con la formulación canónica del Hamiltoniano vista en la sección anterior, cuando términos de esta especie son agregados, la dimensión del espacio fase se incrementa, sin importar que tan pequeña sea la corrección. Intuitivamente, parece ser entonces que el salto en la dimensión, parece no ser compatible con la definición de corrección de alguna teoría perturbativa.

Para resolver este aparente conflicto conceptual, nótese que la nueva dimensión del espacio fase corresponde a aquellos grados de libertad los cuales no son accesibles a bajas energías. Si todo lo que se desea es tener algún conocimiento de cómo estos estados de alta anergía afectan el comportamiento de los modos de baja energía, se elige restringir los grados de libertad a bajas energías en el espacio fase. Por lo tanto, la principal idea para comenzar esta aproximación es proyectar la estructura simpléctica de todo el espacio fase dentro de espacio fase de estados de baja energía y luego inducir la

formulación Hamiltoniana para el espacio fase reducido. Esta aproximación puede ser también generalizada a casos en los cuales se prefiere trabajar en un espacio fase más grande con un número finito de derivadas de orden superior.

Esta aproximación se puede ilustrar por considerar tan sólo una teoría en  $(0 + 1)$  dimensiones con un Lagrangiano general de la forma

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{m}{2}q^2 - gV(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots). \quad (2.9)$$

Considérese el caso en la cual la teoría contiene derivadas de orden infinito. Bajo variaciones, la acción está dada por

$$\delta S = - \int dt (EOM) \delta q + \left[ \sum_{k=0}^{\infty} P_k \delta q^{(k)} \right]_{t_i}^{t_f}, \quad (2.10)$$

donde, las ecuaciones de movimiento son

$$EOM = \ddot{q} + m^2 q + g \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{d}{dt} \right)^n \frac{\partial V}{\partial q^{(n)}} = 0, \quad (2.11)$$

y  $P_k$  es el momento canónico para  $q^{(n)}$

$$P_k = \dot{q} \delta_{k0} - g \sum_{n=k+1}^{\infty} \left( -\frac{d}{dt} \right)^{n-k-1} \frac{\partial V}{\partial q^{(n)}}. \quad (2.12)$$

La dos-forma simpléctica está dada por

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} dP_k \wedge dq^{(k)}. \quad (2.13)$$

Habiendo hecho las definiciones anteriores, se desarrollará la aproximación perturbativa a primer orden. En el tratamiento exacto, todas las derivadas de orden superior  $q^{(n)}$  son independientes. En la aproximación de bajas energías, sólo sobreviven  $q$  y  $\dot{q}$ . Usando las ecuaciones de movimiento, se reemplaza las derivadas de  $q$  por derivadas de menor orden. En la aproximación a orden más bajo se hacen las sustituciones

$$q^{(n)} \approx (-m^2)^{n/2} q \quad n = \text{par} \quad (2.14)$$

y

$$q^{(n)} \approx (-m^2)^{(n-1)/2} \dot{q} \quad n = \text{impar}. \quad (2.15)$$

Los términos de frontera de  $\delta S$  (2.10) se reducen a

$$[\Pi_0 \delta q + \Pi_1 \delta \dot{q}]_{t_i}^{t_f} = [(\dot{q} - g\xi_0) \delta q - g\xi_1 \delta \dot{q}]_{t_i}^{t_f}, \quad (2.16)$$



donde,

$$\xi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2k+1}^{\infty} (-m^2)^k \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n-2k-1} \frac{\partial V}{\partial q^{(n)}}, \quad (2.17)$$

$$\xi_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2k+2}^{\infty} (-m^2)^k \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n-2k-2} \frac{\partial V}{\partial q^{(n)}}. \quad (2.18)$$

Se debe enfatizar el hecho de que  $\xi_0$  y  $\xi_1$  ambas son funciones de  $q$  y  $\dot{q}$  via las sustituciones (2.14) y (2.15).

Con todo esto la dos-forma simpléctica, resulta según (2.13) como

$$\Omega = d\Pi_0 \wedge dq + d\Pi_1 d \wedge \dot{q} = \left(-1 + g \frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}} - g \frac{\partial \xi_1}{\partial q}\right) dq \wedge d\dot{q}. \quad (2.19)$$

De aquí se sigue que los paréntesis de Poisson, están dados por

$$(q, \dot{q}) \simeq 1 + g \frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}} - g \frac{\partial \xi_1}{\partial q}. \quad (2.20)$$

Esto muestra que dada la modificación de la estructura simpléctica puede aparecer no-conmutatividad como resultado de la proyección a bajas energías de una teoría de orden superior. Así la clave de este trabajo será considerar la cuantización de sistemas de orden superior a este nivel. Ya que así se tendrá una teoría no-conmutativa. Un camino para llevar a cabo la cuantización del sistema, es realizando el mapeo de Darboux (En otro capítulo utilizaremos bases cruzadas). Este mapeo permite pasar clásicamente a una estructura simpléctica usual; es decir, esto es hacer a orden más bajo en  $g$  simplemente escribiendo este paréntesis como

$$(x, p) = 1, \quad (2.21)$$

donde,

$$x = q + g\xi_1, \quad p = \dot{q} - g\xi_0. \quad (2.22)$$

Con estas definiciones el Hamiltoniano está dado por

$$H = \Pi_0 \dot{q} + \Pi_1 \ddot{q} - L, \quad (2.23)$$

donde, se reemplaza todas las derivadas de orden superior por las definiciones (2.14) y (2.15). Entonces el Hamiltoniano queda de la forma

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{m^2}{2}x^2 + g\hat{V}(x, p), \quad (2.24)$$

donde,  $\hat{V}(x, p) = V(x, p, -m^2x, \dots)$ . De esta última relación se observa que si  $\hat{V}(x, p)$  es acotado por abajo el Hamiltoniano también lo es.

Es fácil checar que las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q} = (q, H), \quad \ddot{q} = (\dot{q}, H), \quad (2.25)$$

reproducen las ecuaciones de movimiento (2.11) a primer orden en  $g$ . El correspondiente Lagrangiano está dado por

$$\hat{L} = p\dot{x} - H = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{m^2}{2}x^2 - g\hat{V}(x, \dot{x}). \quad (2.26)$$

Sus ecuaciones de Euler-Lagrange concuerdan con las ecuaciones de movimiento originales a primer orden en  $g$ . En consecuencia, la expresión final sólo contiene derivadas de primer orden y su cuantización se puede obtener de manera directa. Así, uno de los objetivos de este proyecto será comparar la cuantización en variables originales y la cuantización en variables de Darboux y ver que diferencias físicas aparecen entre dichos procedimientos.

Para correcciones de orden superior, primero se iteran las ecuaciones de Euler-Lagrange hasta cierto orden en  $g$ . Por ejemplo, a primer orden

$$q^2 \rightarrow -m^2q - g \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \frac{\partial V}{\partial q^{(n)}}, \quad (2.27)$$

donde se debe usar las sustituciones (2.14) y (2.15), de tal manera que el último término sea una función únicamente de  $q$  y  $\dot{q}$ . Derivadas de orden superiores de  $q$  pueden ser sustituidas de igual manera por las definiciones (2.14) y (2.15) y con este obtener una expresión que sea función de  $q$  y  $\dot{q}$ , al menos, hasta algún orden en  $g$ . Diferenciando (2.27) con respecto al tiempo repetidamente, se obtiene

$$q^{(n)} \approx (-m^2)^{n/2}q - g \sum_{l=1}^{n/2} \sum_{k=0}^{\infty} (-m^2)^{n/2-l} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{k+l-1} \frac{\partial V}{\partial q^{(k)}} \quad (n = \text{par}), \quad (2.28)$$

$$q^{(n)} \approx (-m^2)^{(n-1)/2}\dot{q} - g \sum_{l=1}^{(n-1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} (-m^2)^{(n-1)/2-l} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{k+l-1} \frac{\partial V}{\partial q^{(k)}} \quad (n = \text{impar}). \quad (2.29)$$

En general, se puede expresar todas las derivadas de orden superior en  $q$  como funciones de  $q$  y  $\dot{q}$  sólo hasta cierto orden en  $g$ . Esto ayuda a construir la dos-forma simpléctica más general

$$\Omega = \sum_n dP_n \wedge dq^{(n)} = d\Pi_0 \wedge dq + d\Pi_1 \wedge d\dot{q} = \left(-\frac{\partial \Pi_0}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial q}\right) dq \wedge d\dot{q}. \quad (2.30)$$

El Hamiltoniano final está definido por (2.23) con todas las derivadas de orden superior expresadas como función de  $q$  y  $\dot{q}$ . Las ecuaciones Hamiltonianas dan las ecuaciones de movimiento hasta un orden  $g^{n+1}$ .

Una Lagrangiana efectiva puede ser definida como

$$\hat{L} = p\dot{x} - H, \quad (2.31)$$

para un par de variables conjugadas  $(x, p) = 1$ . Para tales Lagrangianas no se espera que se viole la unitariedad ya que estas sólo dependen de primeras derivadas. Para entender de manera más coherente el método, en la siguiente sección se hará un ejemplo.

### 2.3. Ejemplo

Para aclarar ideas, se propone el siguiente modelo como una simple aplicación de la teoría perturbativa desarrollada en la sección anterior

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{a}{2}q^2 + gq\ddot{q}^2. \quad (2.32)$$

La ecuación de Euler-Lagrange se sigue

$$\ddot{q} = aq + g\ddot{q}^2 + 2g(q\ddot{q})^{(2)}, \quad (2.33)$$

donde (2) significa la segunda derivada con respecto al tiempo. Los momentos, por otra parte, están dados por el siguiente par de expresiones

$$p = \dot{q} - 2g(q\ddot{q})^{(1)}, \quad \pi = 2gq\ddot{q}. \quad (2.34)$$

Considerando que  $g$  es el parámetro de perturbación (este parámetro es mucho menor que uno), se utilizará el método desarrollado en la sección anterior. Lo primero por hacer es iterar las ecuaciones (2.33). Hecha la iteración se obtiene a primer orden en  $g$

$$\ddot{q} \approx aq + g(5a^2q^2 + 4a\dot{q}^2) + \mathcal{O}(g^2). \quad (2.35)$$

Introduciendo esta aproximación en los momentos (2.34). Estos a primer orden en  $g$ , quedan de la forma siguiente:

$$p = \dot{q} - 4g(aq\dot{q}) + \mathcal{O}(g^2), \quad \pi = 2g(aq^2) + \mathcal{O}(g^2). \quad (2.36)$$

Se puede ver de este par de momentos que únicamente dependen de  $q$  y  $\dot{q}$ , tal como lo se había mencionado anteriormente. El Hamiltoniano por otro lado según el formalismo de Ostrogradski está dado por

$$H = p\dot{q} + \pi\ddot{q} - L. \quad (2.37)$$

Introduciendo la aceleración (2.35) y los momentos (2.36), se obtiene el siguiente Hamiltoniano a primer orden en  $g$

$$H = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{a}{2}q^2 + g(aq^3 - 4aq\dot{q}^2) + \mathcal{O}(g^2). \quad (2.38)$$

Para poder obtener los paréntesis de Poisson, se tiene que construir la dos forma simpléctica. Esta está dada a primer orden en  $g$  dada por

$$\Omega \approx [1 + 8agq + \mathcal{O}(g^2)]dq \wedge d\dot{q}. \quad (2.39)$$

En consecuencia los paréntesis están dados por

$$\{q, \dot{q}\} \approx 1 + 8agq + \mathcal{O}(g^2). \quad (2.40)$$

Sin embargo, el Hamiltoniano está definido en términos de los momentos y no de las velocidades, por lo cual definimos el momento como

$$p \approx \dot{q} - 8agq\dot{q} + \mathcal{O}(g^2). \quad (2.41)$$

Esta definición se sigue de

$$\{q, p\} = 1. \quad (2.42)$$

De la ecuación (2.41), se puede despejar las velocidades en términos de  $q$  y  $p$ , es decir,

$$\dot{q} \approx p + 8agqp + \mathcal{O}(g^2). \quad (2.43)$$

Introduciendo esta ecuación en el Hamiltoniano (2.38), se tiene

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{a}{2}q^2 + g(aq^3 - 4aqp^2) + \mathcal{O}(g^2). \quad (2.44)$$

Obsérvese que este Hamiltoniano depende únicamente de  $p$  y de  $q$ , los cuales satisfacen relaciones de conmutación canónica. Con lo cual, en principio, se puede promover estas variables a operadores Hermiticos y obtener la teoría cuántica. En los próximos capítulos se utilizará este formalismo para mostrar la relación entre la no-conmutatividad y las teorías de orden superior.

# Capítulo 3

## Estructuras No-canónicas

En este capítulo, se hace una breve introducción de teorías no-conmutativas, desde el punto de vista del potencial simpléctico. La no-conmutatividad en este sentido se introduce por medio de una estructura simpléctica no trivial. Por otra parte, la solución de la teoría cuántica con el método que se describirá a continuación, proporcionará una teoría en variables que satisfacen las relaciones de conmutación canónica, sin embargo, estas variables inducen nuevos géneros de interacciones proporcionales a los parámetros de conmutatividad en el sistema.

### 3.1. No-conmutatividad y Paréntesis de Dirac

Considérese el siguiente conjunto de variables  $z^a = \{q^0, q^i, p_0, p_i\}$ , con  $a = 1, \dots, 2N + 2$  hasta las  $2N + 2$  variables del espacio fase, de un sistema reparametrizado en la formulación Hamiltoniana. En este caso no se tiene una acción de segundo orden. Sin embargo, se puede considerar la acción de primer orden, dada por

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [A_a(z)\dot{z}^a - \lambda\phi(z)], \quad (3.1)$$

donde  $A_a(z)$  es el vector potencial, el cual se usará para generar una estructura simpléctica arbitraria, asociada con los paréntesis de Poisson en la formulación Hamiltoniana.

Para analizar este sistema se utilizará el método de Dirac para sistemas constreñidos. De manera inmediata se puede inferir de la forma de la acción que el Hamiltoniano canónico está dado por

$$H_c = \lambda\phi(z). \quad (3.2)$$

Los momentos, por otra parte,

$$p_{za} = A_a(z), \quad (3.3)$$

es decir, dado el hecho de que los potenciales simplécticos no dependen de las derivadas temporales de las variables, se concluye que se trata de constricciones del sistema. Por consecuencia, estos momentos guían al conjunto de constricciones siguientes:

$$\chi_a = p_{za} - A_a(z). \quad (3.4)$$

Consecuentemente, el Hamiltoniano total para esta teoría es

$$H_T = \lambda\phi(z) + \mu^a \chi_a. \quad (3.5)$$

Por otra parte, de la evolución de las constricciones se obtienen las siguientes condiciones de consistencia

$$\dot{\chi}_a = \{p_{za} - A_a(z), H_T\} = -\lambda \frac{\partial\phi(z)}{\partial z^a} + \mu^b \omega_{ab} \approx 0, \quad (3.6)$$

donde,

$$\omega_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a = \{\chi_a, \chi_b\}. \quad (3.7)$$

Esta matriz antisimétrica, jugará el papel de la estructura simpléctica de la teoría. Se asumirá en lo que sigue, que la matriz  $\omega_{ab}$  es invertible, de manera que se determinará todos los multiplicadores de Lagrange  $\mu^a$ , se sigue entonces que todas las constricciones  $\chi_a$ , son de segunda clase. Nótese que en el caso en el que la estructura simpléctica es degenerada, al menos una de las  $\chi_a$  es de primera clase, pero en este caso el número de grados de libertad de la teoría generalizada, no corresponderá a los grados de libertad de la teoría original. En consecuencia, en lo que sigue se asumirá que las constricciones  $\chi_a$  son de segunda clase.

Ahora, a fin de imponer estas constricciones como condiciones fuertes en la cuantización, se debe construir los paréntesis de Dirac asociados a dichas constricciones

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \chi_a\} \omega^{ab} \{\chi_b, B\}, \quad (3.8)$$

donde  $\omega^{ab}$ , es la matriz inversa de  $\omega_{ab}$ . Calculando los paréntesis de Dirac de las coordenadas con la anterior expresión, se obtiene

$$\{z^a, z^b\}_D = \omega^{ab}. \quad (3.9)$$

es decir, cuántizar una teoría con un potencial simpléctico no trivial, resulta en la no-conmutatividad de los operadores cuánticos correspondientes a las coordenadas del espacio fase:

$$[z^a, z^b] = i\hbar\omega^{ab}. \quad (3.10)$$

El caso más simple corresponde, a la usual álgebra de Heisenberg de la mecánica cuántica ordinaria, para la cual la matriz inversa de la estructura simpléctica, toma la forma

$$\omega^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Es decir, se ha construido un procedimiento general para cuantizar una teoría con una estructura simpléctica arbitraria. Una interesante característica del formalismo es que por incluir al tiempo como una variable canónica, permite considerar la no-conmutatividad entre el tiempo y las coordenadas del espacio. Además, dada una estructura simpléctica se puede construir la correspondiente acción y luego cuantizarla ya sea por uso de la integral de trayectoria con constricciones de primera y segunda clase, o por uso del método de Dirac, donde las constricciones de primera clase actúan como operadores en los estados, imponiendo condiciones suplementarias sobre ellos. Es interesante notar que dada una estructura simpléctica la solución para los potenciales  $A_a$ , no son determinados de manera única, entonces todos estos sistemas tienen la misma estructura simpléctica, todas las teorías posibles están conectadas por una transformación canónica. La cual puede no ser unitaria dando lugar a mecánicas cuánticas no equivalentes.

## 3.2. No-conmutatividad del Espacio Tiempo

### 3.2.1. Momento Conmutativo

Como primer ejemplo del formalismo desarrollada en la sección anterior, considérese el caso en el cual los momentos conmutan, es decir, un álgebra de Heisenberg generada por

$$[t, x] = i\hbar\theta, \quad [x, p_x] = i\hbar, \quad [t, p_t] = i\hbar, \quad [p_t, p_x] = 0. \quad (3.12)$$

La estructura simpléctica es

$$\omega^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

con inversa, dada por

$$\omega_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

De la ecuación (3.7), obsérvese que se tiene que resolver el siguiente conjunto de ecuaciones, para el potencial simpléctico

$$\frac{\partial A_1}{\partial p_t} - \frac{\partial A_3}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial A_2}{\partial p_x} - \frac{\partial A_4}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial A_4}{\partial p_t} - \frac{\partial A_3}{\partial p_x} = \theta. \quad (3.15)$$

Ahora, es fácil ver que la solución de estas ecuaciones no es única, ya que se tiene la misma estructura simpléctica relacionada vía una transformación canónica. Se tienen las siguientes dos posibles soluciones

$$A_1 = p_t, \quad A_2 = p_x, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = \theta p_t. \quad (3.16)$$

$$A_1 = p_t, \quad A_2 = p_x, \quad A_3 = -\frac{\theta}{2}p_x, \quad A_4 = \frac{\theta}{2}p_t.$$

Con el primer conjunto de ecuaciones (3.16), la acción canónica toma la forma

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p_t(t + \theta p_x)^\circ + p_x \dot{x} - \lambda(p_t + H(t, x, p_x))]. \quad (3.17)$$

De esta ecuación se puede ver que es natural introducir la variable canónica asociada al tiempo, luego se define

$$\check{t} = t + \theta p_x. \quad (3.18)$$

Para esta nueva variable, la estructura simpléctica es reducida a la estructura usual. Éste nuevo tiempo es conmutativo y satisface

$$[\check{t}, p_t] = i\hbar, \quad [\check{t}, x] = 0. \quad (3.19)$$

Sin embargo, ahora introduciendo este nuevo tiempo en la acción, se tiene una modificación para el Hamiltoniano. La acción resultante es

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p_t \dot{\check{t}} + p_x \dot{x} - \lambda(p_t + H(\check{t} - \theta p_x, x, p_x))]. \quad (3.20)$$

Obsérvese que si el Hamiltoniano depende del tiempo, se introduce un nuevo género de interacción que es proporcional al parámetro de conmutatividad  $\theta$  y al momento en la dirección espacial. En esta teoría tiene un conjunto completo de observables que conmutan, dado por  $(\check{t}, x)$ . De manera tal, que en la representación de coordenadas definen los estados

$$|\check{t}, x\rangle. \quad (3.21)$$

La condición de cuantización de Dirac, se vuelve ahora en

$$\left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial \check{t}} - \hat{H}(\check{t} - \theta p_x, x, p_x) \right) \psi(x, \check{t}) = 0. \quad (3.22)$$

Aquí, se observa que en el caso en el que el Hamiltoniano no depende del tiempo, la ecuación de Schrödinger no ha sido modificada.



Otra forma de cuantizar la teoría (3.20) es por medio de la integral de trayectoria. Usando la base (3.21), es muy fácil ya que se sigue el procedimiento usual. Por ejemplo, si se desea calcular el propagador

$$\langle \check{t}_2, x_2 | \check{t}_1, x_1 \rangle. \quad (3.23)$$

Se puede usar el procedimiento normal para cuantizar una teoría con constricciones de primera clase. Se tienen tan sólo dos puntos extras a considerar: primero se tiene que imponer una condición de norma. Para este caso se puede usar una norma canónica usual, por ejemplo,  $t = f(\tau)$ . Por lo tanto, se impone la no-conmutatividad a nivel de la acción usando la estructura simpléctica y no a nivel de la condición de norma. El segundo punto que se tiene que tomar en cuenta, es que cuando se tiene una teoría dependiente del tiempo, el Hamiltoniano aparecerá en la misma manera una dependencia extra en el momento  $p_x$ , que puede implicar la imposibilidad de calcular la integral de trayectoria sobre el momento. Sin embargo, estos son los problemas usuales que se tiene al calcular integrales de trayectoria con acciones en términos de variables con potencias más grandes que dos.

Ahora, si se considera las otras posibles soluciones a las ecuaciones (3.15) la acción resultante está dada por

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[ p_t \left( t + \frac{\theta}{2} p_x \right) + p_x \left( t - \frac{\theta}{2} p_x \right) - \lambda(p_t + H(t, x, p_x)) \right]. \quad (3.24)$$

En esta ecuación, es natural introducir un nuevo conjunto de variables, correspondientes a un nuevo tiempo y una nueva coordenada espacial  $\check{t} = t + \frac{\theta}{2} p_x$  y  $\check{x} = t - \frac{\theta}{2} p_x$ . En este caso la acción (3.24) se reduce a

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[ p_t \dot{\check{t}} + p_x \dot{\check{x}} - \lambda \left( p_t + H \left( t + \frac{\theta}{2} p_x, t - \frac{\theta}{2} p_x, p_x \right) \right) \right]. \quad (3.25)$$

Este nuevo conjunto de variables satisface las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\check{t}, \check{x}] = 0, \quad [\check{t}, p_t] = i\hbar, \quad [\check{x}, p_x] = i\hbar. \quad (3.26)$$

Usando como conjunto completo de observables que conmutan  $(\check{t}, \check{x})$ , la nueva ecuación de Schrödinger es

$$\left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial \check{t}} - \hat{H} \left( \check{t} - \frac{\theta}{2} p_x, \check{t} + \frac{\theta}{2} p_x, p_x \right) \right) \psi(\check{x}, \check{t}) = 0. \quad (3.27)$$

Para esta ecuación de Schrödinger se ve que, inclusive en el caso en el que el Hamiltoniano no dependa del tiempo, existen modificaciones originadas por la no-conmutatividad. En consecuencia, se puede ver que la nueva teoría puede ser no-unitaria, entonces, las parciales con respecto a  $\check{t}$  y que dependen de algún género de interacción. Este tipo de cuantización es producido usando el producto de Moyal para teorías con no-conmutatividad espacio-temporal.

Sumarizando, obsérvese que dependiendo el tipo de soluciones que se propongan para las ecuaciones (3.15), se tienen teorías cuánticas completamente diferentes, pero las teorías clásicas son equivalentes en el sentido de que están relacionadas por transformaciones canónicas en el espacio fase extendido. Un punto a notar es que para ambos tipos de soluciones de las ecuaciones (3.15), las constricciones no son modificadas, entonces en ambos casos el nuevo tiempo es la variable canónicamente conjugada a el original  $p_t$  y entonces las constricciones generadas por la invariancia bajo reparametrizaciones. Se verá en la próxima sección que este no es el caso cuando los momentos no conmutan con ellos mismos.

### 3.2.2. Momentos No-conmutativos

Considérese el caso en el cual los momentos no conmutan. Si se asume que la estructura simpléctica está dada por

$$[t, x] = i\hbar\theta, \quad [x, p_x] = i\hbar, \quad [t, p_t] = i\hbar, \quad [p_t, p_x] = i\hbar\beta. \quad (3.28)$$

Para este caso la estructura simpléctica está dada por la siguiente matriz:

$$\omega^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & -1 & -\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

con inversa, dada por

$$\omega_{ab} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & \delta & \gamma & 0 \\ -\delta & 0 & 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 & 0 & \rho \\ 0 & -\gamma & -\rho & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Donde los parámetros  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$  y  $\rho$ , dependen sólo de los parámetros no-conmutativos  $\theta$  y  $\beta$ , de la siguiente forma:

$$\alpha = 1 - 2\beta\theta + \beta^2\theta^2, \quad \gamma = -1 + \beta\theta, \quad \delta = \beta - \beta^2\theta, \quad \rho = \theta - \beta\theta^2. \quad (3.31)$$

Ahora se resuelven las ecuaciones (3.7), obteniendo la solución más simple, la cual está dada por

$$A_1 = -\frac{1}{\alpha}(\gamma p_t + \delta x), \quad A_2 = -\frac{\gamma}{\alpha}p_x, \quad A_3 = -\frac{\rho}{\alpha}p_x, \quad A_4 = 0. \quad (3.32)$$

Introduciendo esta solución dentro de la acción, se tiene

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left( (-\gamma p_t - \delta x) \frac{\dot{t}}{\alpha} + \frac{p_x}{\alpha} (-\gamma x - \rho p_t) - \lambda \phi \right). \quad (3.33)$$

Para esta acción se observa que las coordenadas simplécticas naturales son

$$\bar{p}_t = -\frac{1}{\alpha}(\gamma p_t + \delta x), \quad \bar{x} = -\frac{1}{\alpha}(\gamma x + \rho p_t). \quad (3.34)$$

El conjunto de variables del espacio fase  $(t, \bar{x}, \bar{p}_t, p_x)$  satisface las relaciones de conmutación canónica. En términos de estas variables la acción (3.33) es

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\bar{p}_t \dot{t} + p_x \dot{\bar{x}} - \lambda \phi(t, \bar{x}, \bar{p}_t, p_x)). \quad (3.35)$$

Ya que, el momento conjugado al tiempo es ahora  $\bar{p}_t$ , la forma funcional de la constricción cambia, en vista de que se necesita escribir la constricción en términos de las nuevas variables. La nueva constricción está dada por,

$$\phi(t, \bar{x}, \bar{p}_t, p_x) = \bar{p}_t + \beta \bar{x} + H(t, \bar{x} + \theta \bar{p}_t, p_x). \quad (3.36)$$

En este caso se ve que la nueva constricción adquiere un término extra, el cual es nulo para el caso de la conmutatividad del momento. También en el Hamiltoniano se obtienen modificaciones, inclusive en el caso de Hamiltonianos independientes del tiempo. Sin embargo, si se considera una transformación canónica generada por  $F = -\frac{1}{\alpha}(\rho p_x p_t + \delta x t)$ , las nuevas variables canónicas son,

$$\bar{p}_x = -\frac{1}{\alpha}(\gamma p_x - \delta t), \quad \bar{t} = -\frac{1}{\alpha}(\gamma t - \rho p_x). \quad (3.37)$$

De (3.34), se sigue que para este caso la constricción toma la forma

$$\phi(\bar{t}, x, p_t, \bar{p}_x) = p_t + H(\bar{t} - \theta \bar{p}_x, x, \bar{p}_x - \beta \bar{t}). \quad (3.38)$$

A nivel cuántico se observa que en el caso de  $\bar{t} - \theta \bar{p}_x$ , es independiente de la constricción, de lo cual se sigue que ésta adquirirá una dependencia temporal en el nuevo tiempo  $\bar{t}$ , pero la teoría será unitaria, se tienen entonces derivadas lineales en  $\bar{t}$ .

Tal que, la no-conmutatividad del espacio tiempo en el sentido de la mecánica cuántica será unitaria o no dependerá esencialmente en la selección de la base en la que se cuantiza la teoría. A nivel clásico todas estas bases son relacionadas por medio de una transformación canónica, pero a nivel cuántico cada selección producirá diferentes teorías cuánticas. Sin embargo, aún se tiene un tipo de base extra que se puede elegir, donde el uso de la integral de trayectoria en una teoría no-conmutativa en dos dimensiones  $[x, y] = i\hbar$ , una base cruzada, que se puede usar como un conjunto completo de observables de los operadores  $(x, p_y)$ . En el caso que se trata aquí implicará usar la base  $|t, p_x \rangle$  o la base  $|x, p_t \rangle$ .

### 3.2.3. Bases Cruzadas

Para entender más claramente la diferencia entre el uso de bases cruzadas y las bases usadas en las secciones anteriores, se asumirá que la estructura simpléctica (3.29) y el Hamiltoniano son de la forma

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + V(x, t). \quad (3.39)$$

Asúmase, ahora que se desea una teoría cuántica en la base  $|t, p_x\rangle$ , esto implica que a nivel clásico se considerará una acción donde se fijen las condiciones de frontera en las variables  $t$  y  $p_x$ . Con esto en mente, la acción equivalente a (3.17) está dada por

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p_t \dot{t} + \theta p_t \dot{p}_x - x \dot{p}_x - \lambda(p_t + H(t, x, p_x))]. \quad (3.40)$$

Se observa que esta ecuación difiere de (3.17) por una derivada total. Para cuántizar la teoría se pueden seguir dos procedimientos de las secciones anteriores, por uso de la ecuación de evolución cuántica se necesita realizar los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}_x$  en la base  $|t, p_x\rangle$ , esto puede ser hecho muy fácilmente dando el resultado

$$\hat{x}\psi(t, p_x) = i\hbar(\partial_{p_x} - \theta\partial_t)\psi(t, p_x), \quad \hat{p}_t\psi(t, p_x) = -i\hbar\partial_t\psi(t, p_x). \quad (3.41)$$

A fin de obtener la evolución cuántica, sustitúyanse (3.41) dentro de las constricciones para obtener

$$\left(-i\hbar\partial_t + \frac{p_x^2}{2m} + V(t, i\hbar(\partial_{p_x} - \theta\partial_t))\right)\psi(t, p_x) = 0. \quad (3.42)$$

Se ve que la teoría cuántica que aparece en la base cruzada  $|t, p_x\rangle$  no es equivalente ni a (3.22) ni a (3.27). Pero desde luego todas son equivalentes en  $\theta = 0$ . También se tiene que el mapeo de la acción (3.40) a la acción (3.20) es un mapeo no-canónico, mapeo dado por (3.18). En consecuencia, la teoría cuántica (3.41) puede ser no-unitaria por una simple dependencia en la coordenada  $x$ , porque está realizada como en (3.40).

Una posibilidad extra es construir la teoría cuántica para la estructura simpléctica (3.29) es usar la base  $|x, p_t\rangle$ , en este caso la acción será

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p_x \dot{x} - \theta p_x \dot{p}_t - t \dot{p}_t - \lambda(p_t + H(t, x, p_x))]. \quad (3.43)$$

y la ecuación de la evolución cuántica resulta,

$$\left(p_t - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(t, i\hbar(\partial_{p_t} + \theta\partial_x))\right)\psi(t, p_t) = 0. \quad (3.44)$$

Un punto interesante para esta base, es que para un potencial independiente de  $t$ , la teoría cuántica no da correcciones de la no-conmutatividad del espacio-tiempo.

En el capítulo seis se mostrará ampliamente el uso de bases cruzadas, se mostrarán los puntos más importantes del uso de bases cruzadas a través de varios ejemplos, los cuales demuestran con gran amplitud los alcances del uso de bases cruzadas.

# Capítulo 4

## Modelos Mecánicos de Teorías No-conmutativas

En este capítulo se realiza un resumen de algunos modelos que muestran no-conmutatividad, sin embargo, los modelos presentados aquí muestran que la no-conmutatividad surge de tomar ciertos límites de los parámetros de la teoría o bien ésta se postula como una propiedad intrínseca del espacio fase. En el próximo capítulo se contrasta con los resultados obtenidos de los modelos presentados en este capítulo.

### 4.1. Modelo de Chern-Simons de Primer Orden

El estudio de la teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo tridimensional (2+1), especialmente en modelos de norma, fue iniciado en los años ochenta y en la actualidad es un amplio campo de investigación, no sólo por razones pedagógicas y matemáticas, sino que son teorías importantes en la dinámica planar [40, 42], cuerdas cosmológicas [31] y efecto Hall cuántico [38]. Estos modelos son de particular interés ya que contienen una estructura especial. Esta estructura está contenida en los términos de Chern-Simons, que son convenientes en tres dimensiones (más generalmente en dimensiones impares), ya que dan lugar a fenómenos topológicamente intrincados sin análogos en dimensiones pares. Los modelos que estudian dichos fenómenos están descritos, en el caso general, por Lagrangianos que surgen como consecuencias de las fuerzas de Lorentz

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}) - eV(\mathbf{q}). \quad (4.1)$$

Este Lagrangiano describe una partícula de masa  $m$  y carga  $e$  que se mueve en un campo magnético externo  $B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$  y un campo eléctrico,  $E_i = \partial_i V$ , respectivamente. Considérese el caso más simple, donde, el movimiento es bidimensional  $i = 1, 2$  y posee simetría rotacional,  $A^i(\mathbf{q}) = \epsilon^{ij} q^j A(q)$ ,  $V(\mathbf{q}) = V(q)$ . Sin embargo, si se resuelve el modelo simplificado del modelo anterior, tomando un campo magnético constante,  $A(q) = -B/2 \leq 0$  y un potencial escalar cuadrático  $V(q) = kq^2/2 \geq 0$ . Es decir, se

estudiará el Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + \frac{B}{2}\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} - \frac{k}{2}\mathbf{q}^2, \quad (4.2)$$

donde se ha hecho  $e$ ,  $c$  y  $\hbar$  iguales a la unidad.

Es claro que la ecuación (4.2) es análoga a la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  de la electrodinámica tridimensional topológicamente masiva en la norma de Weyl ( $\mathbf{A}^0 = 0$ ):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{A}}^2 + \frac{\mu}{2}\mathbf{A} \times \dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A})^2. \quad (4.3)$$

Las correspondientes variables dinámicas son  $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$  y  $\mathbf{q}(t)$  de (4.2) y (4.3) respectivamente; los términos potencial y cinético en (4.2) son análogos a los términos de Maxwell (primero y último) en (4.3); la dependencia de la velocidad, campo magnético e interacción de Lorentz en (4.2) son términos de Chern-Simons proporcionales a  $\mu$  en (4.3). Reescalando  $\mathbf{A} \rightarrow \sqrt{\kappa/\mu}\mathbf{A}$  y haciendo tender  $\mu \rightarrow \infty$ , los términos de Maxwell desaparecen de (4.3), dejando sólo el término de Chern-Simons en un espacio fase reducido:

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2}\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{A}. \quad (4.4)$$

Para el correspondiente límite en (4.2) se considera  $m$  y  $k$  iguales a cero; en efecto, la reducción del espacio-fase ha sido llevada a cabo sólo con  $m = 0$ :

$$L_0 = \frac{B}{2}\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} - \frac{k}{2}\mathbf{q}^2. \quad (4.5)$$

Como se mostrará más adelante la reducción en las variables del espacio fase altera la estructura simpléctica.

Para la teoría (4.2), el momento canónico está dado por

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = m\dot{q}^i - \frac{B}{2}\epsilon^{ij}q^j, \quad (4.6)$$

y su Hamiltoniano

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2m} \left[ p^i + \frac{B}{2}\epsilon^{ij}q^j \right] \left[ p^i + \frac{B}{2}\epsilon^{ik}q^k \right] + \frac{k}{2}q^i q^i. \quad (4.7)$$

Los conmutadores de las variables anteriores son:

$$[q^i, q^j] = 0, \quad [p^i, p^j] = 0, \quad [q^i, p^j] = i\delta^{ij}. \quad (4.8)$$

De estos conmutadores las ecuaciones de Hamilton pueden ser escritas como

$$\dot{p}^i = i[H, p^i] = \frac{B}{2m}\epsilon^{ij} \left[ p^j + \frac{B}{2}\epsilon^{jk}q^k \right] - kq^i,$$

$$\dot{q}^i = i[H, q^i] = \frac{1}{m} \left[ p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j \right]. \quad (4.9)$$

Estas son resueltas vía la sustitución

$$\begin{aligned} z(t) &= q^1(t) + iq^2(t) \\ &= e^{-i(B/2m)t} \left[ z(0) \cos \Omega t + \frac{p(0)}{m\Omega} \sin \Omega t \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} p(t) &= p^1(t) + ip^2(t) \\ &= e^{-i(B/2m)t} [p(0) \cos \Omega t - mz(0)\Omega \sin \Omega t], \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\Omega = \left[ \frac{B^2}{4m^2} + \frac{k}{m} \right]^{1/2}. \quad (4.12)$$

De otra manera, la teoría (4.5) está descrita por un Lagrangiano de primer orden. Los pasos formales que efectúan la reducción a nivel de operadores puede ser hecha considerando lo siguiente: de (4.6) y (4.7) se ve que tomando el límite  $m \rightarrow 0$  requiere constreñir a cero las siguientes cantidades

$$\chi^i = p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j \quad (= m\dot{q}^i). \quad (4.13)$$

En el formalismo de Dirac descrito en secciones anteriores, estas constricciones son de segunda clase, ya que se tiene

$$[\chi^i, \chi^i] = iB\epsilon^{ij} \neq 0, \quad (4.14)$$

lo cual indica que la estructura simpléctica debe ser modificada por los paréntesis de Dirac entre el par de operadores  $A$  y  $B$ :

$$[A, B]_D = [A, B] - i[A, \chi_i] \frac{\epsilon^{ij}}{B} [\chi_j, B], \quad (4.15)$$

Por otra parte, el Hamiltoniano para ésta teoría reducida está dado por

$$H_0 = \frac{k}{2} q^2. \quad (4.16)$$

Con la ayuda del conmutador (4.15), se obtiene lo siguiente:

$$[q^i, q^j] = -\frac{k}{B} \epsilon^{ij}, \quad (4.17)$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange de (4.5) son reproducidas

$$\dot{q}^i = i[H_0, q^i] = -\frac{k}{B} \epsilon^{ij} q^j, \quad (4.18)$$

y resueltas por la siguiente función:

$$z(t) = q^1(t) + iq^2(t) = z(0)e^{i(K/B)t}. \quad (4.19)$$

De esta manera el conmutador (4.17) de la teoría reducida permite construir la estructura simpléctica vía el paréntesis de Dirac del modelo constreñido.

Finalmente, nótese que en el límite  $m \rightarrow 0$  las soluciones (4.11) de las ecuaciones dinámicas, satisfacen la constricción (4.13) y pasan a ser (4.19). Esto se observa, cuando se reconoce que en el límite de masa cero se tiene

$$\Omega \sim \frac{B}{2m} + \frac{k}{B}, \quad (4.20)$$

y aquellos términos que oscilan cuando  $m \rightarrow 0$  deben ser despreciados.

Todos los operadores se comportan suavemente en el límite  $m \rightarrow 0$ , los valores propios y las funciones propias poseen un comportamiento interesante. Los estados que se consideran son estados propios simultáneos del Hamiltoniano y del operador de momento angular.

Para la teoría completa, el momento angular está dado por

$$\mathbf{M} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}, \quad (4.21)$$

el cual genera rotaciones bajo conmutación, con la ayuda de (4.9)

$$i[\mathbf{M}, q^i] = -\epsilon^{ij} q^j. \quad (4.22)$$

En la teoría reducida, el operador de momento angular, obtenido del teorema de Noether de (4.5) o por imponer la constricción (4.13) en (4.21), es dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{M}_0 = \frac{B}{2} \mathbf{q}^2, \quad (4.23)$$

la cual también genera rotaciones con el conmutador (4.17)

$$i[\mathbf{M}_0, q^i] = -\epsilon^{ij} q^j. \quad (4.24)$$

Los estados propios simultáneos de  $\mathbf{M}$  y  $H$ , son los siguientes:

$$\mathbf{M}|N, m \rangle = n|N, m \rangle \quad (4.25)$$

$$H|N, m \rangle = E(N, n)|N, m \rangle \quad (4.26)$$

$$E(N, n) = \Omega(2N + |n| + 1) - \frac{B}{2m}n, \quad (4.27)$$

y están dadas en la representación de coordenadas por normalización de las funciones de onda como

$$\langle \mathbf{q} | N, n \rangle = \left[ \frac{N!}{\pi(N + |n|)!} \right]^{1/2} (m\Omega)^{(1+|n|)/2} r^{|n|} e^{in\theta} e^{-(m/2)\Omega r^2} L_N^{|n|}(m\Omega r^2)$$



$$(4.28)$$

Aquí  $L_N^{|n|}$  está asociada con los polinomios de Laguerre, que satisfacen la ecuación diferencial

$$\omega \frac{d^2}{d\omega^2} L_N^{|n|}(\omega) + (|n| + 1 - \omega) \frac{d}{d\omega} L_N^{|n|}(\omega) + N L_N^{|n|}(\omega) = 0. \quad (4.29)$$

donde  $N$  es un entero no-negativo que asegura la normalización.

En la teoría reducida  $H_0$  (4.16) y  $M_0$  (4.23), esencialmente coinciden. Del conmutador (4.17) y las expresiones cuadráticas para el Hamiltoniano (4.16), se puede reconocer que  $H_0$  tiene la estructura de un oscilador armónico. (Identificando  $q^1$  y  $-Bq^2$  con el momento canónico conjugado del par de variables) Entonces el espectro de energía es

$$H_0 |n\rangle = E_0(n) |n\rangle$$

$$E_0(n) = \frac{k}{B} \left[ n + \frac{1}{2} \right], \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.30)$$

Sin embargo, el espectro del momento angular consiste de semienteros positivos

$$M_0 |n\rangle = (n + 1/2) |n\rangle. \quad (4.31)$$

Para describir estos estados propios de la teoría reducida por funciones de onda, una dirección debe ser elegida, de tal manera, que se elige una o dos coordenadas que conmuten. Para el presente caso, es conveniente usar la representación holomórfica. Esta representación está definida como

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{B}{2}} (q^1 - iq^2), \quad (4.32)$$

junto con su conjugado

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{B}{2}} (q^1 + iq^2), \quad (4.33)$$

los cuales satisfacen

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (4.34)$$

Por lo tanto, si se elige los estados  $\langle \alpha |$  tal que

$$\langle \alpha | \hat{a} = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger = \langle \alpha | \sqrt{B/2} r e^{i\theta}, \quad (4.35)$$

luego los estados  $|\psi\rangle$  pueden ser descritos por funciones de onda que dependen de  $\alpha$

$$\langle \alpha | \psi \rangle = \psi(\alpha), \quad (4.36)$$

El operador  $\hat{a}^\dagger$  actúa en estas funciones por multiplicación y  $\hat{a}$  por diferenciación; la relación adjunta entre los dos operadores sigue siendo mantenida por virtud de la medida.

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{a}^\dagger | \psi \rangle &= \alpha \psi(\alpha), \\ \langle \alpha | \hat{a} | \psi \rangle &= \frac{d}{d\alpha} \psi(\alpha), \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int d\alpha^* d\alpha | \alpha \rangle \langle \alpha | e^{-|\alpha|^2} &= I, \\ \frac{1}{2i\pi} d\alpha^* d\alpha &= \frac{B}{2\pi} dq^1 dq^2 = \frac{B}{2\pi} r dr d\theta. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dentro de la representación holomórfica, se tiene

$$\langle \alpha | n \rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \quad (4.39)$$

La energía y las funciones propias del momento angular son las funciones de onda del oscilador armónico, las cuales involucran los polinomios de Hermite  $H_n$  y la frecuencia  $k/B$ :

$$u_n(x) = \left[ \left[ \frac{k}{\pi B} \right]^{1/2} \frac{1}{2^n n!} \right]^{1/2} H_n(\sqrt{k/B} x) e^{-(k/2B)x^2}. \quad (4.40)$$

Ahora se examinarán como todas las cantidades de la teoría completa en el límite  $m \rightarrow 0$  y las correspondientes cantidades de la teoría reducida son obtenidas en este límite.

El espectro de energía (4.27) diverge conforme  $m \rightarrow 0$ :

$$E(N, n) \rightarrow \frac{B}{2m} (2N + |n| - n + 1) + \frac{k}{B} (2N + |n| + 1). \quad (4.41)$$

Sin embargo, se puede remover esta cantidad infinita en  $N = 0$ ,  $n \geq 0$  estados, de lo cual se tiene

$$E(0, |n|) \rightarrow \frac{B}{2m} + \frac{k}{B} (|n| + 1). \quad (4.42)$$

Es decir, en el límite  $m \rightarrow 0$  todos los estados con  $N > 0$ , así como aquellos con  $N = 0$  y  $n < 0$  son separados por una banda infinita que separa los estados con  $N = 0$  y  $n \geq 0$ . Los estados sobrevivientes, en los cuales el momento angular está alineado con un campo magnético externo están en correspondencia uno a uno con los estados de la teoría reducida.

Una similar discrepancia está presente en el espectro de momento angular para la teoría completa. El espectro del operador  $M$  contiene sólo valores enteros; en la teoría reducida  $M_0$  posee sólo valores semienteros.

Las funciones de onda que sobreviven, en el límite de masa cero son

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}|0, |n\rangle &\rightarrow \left[\frac{B}{2\pi}\right]^{1/2} \left[\frac{B}{2}\right]^{|n|/2} \frac{1}{\sqrt{|n|!}} r^{|n|} e^{i|n|\theta} e^{-(B/4)r^2} \\ &= \left[\frac{B}{2\pi}\right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{|n|!}} \alpha^{|n|} e^{-\alpha^* \alpha/2} = \left[\frac{B}{2\pi}\right]^{1/2} \langle \alpha|n\rangle e^{-\alpha^* \alpha/2}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Es decir, las funciones de onda de la teoría completa no se aproximan a las de la teoría reducida. No se puede de otra manera, formar una dependencia en las dos variables  $q^1$  y  $q^2$  (o  $\alpha$  y  $\alpha^*$ ), únicamente por la elección de la polarización. Sin embargo, las funciones de onda están normalizadas y su correspondencia en sus argumentos no puede desaparecer. Nótese, sin embargo, que en la representación holomórfica la normalización de la polarización está relacionada en el límite de masa cero por

$$d^2 \mathbf{q} \langle \mathbf{q}|0, |n\rangle \rightarrow dq^1 dq^2 \frac{B}{2\pi} \frac{1}{n!} \alpha^* \alpha^{|n|} e^{-\alpha^* \alpha} = \frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i} |\langle \alpha|n\rangle|^2 e^{-\alpha^* \alpha}. \quad (4.44)$$

Desde luego, las relaciones que se obtienen del límite de masa cero entre las funciones de onda toman diferentes formas en las diferentes representaciones. Como es bien sabido, el Hamiltoniano (4.7) es equivalente a dos osciladores desacoplados unidimensionales, descritos por el par de variables canónicas  $(p_{\pm}, q_{\pm})$  y frecuencias  $\omega_{\pm}$ :

$$\begin{aligned} p_{\pm} &= \left[\frac{\omega_{\pm}}{2m\Omega}\right]^{1/2} p^1 \pm \left[\frac{m\Omega\omega_{\pm}}{2}\right]^{1/2} q^2, \\ q_{\pm} &= \left[\frac{m\Omega}{2\omega_{\pm}}\right]^{1/2} q^1 \mp \frac{1}{\sqrt{2m\Omega\omega_{\pm}}} p^2, \\ \omega_{\pm} &= \Omega \pm \frac{B}{2m}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Es decir, las funciones de onda del problema completo pueden ser representadas en las coordenadas modificadas:

$$\begin{aligned} \langle q_{\pm}|N, n\rangle &= u_{n_+}^+(q_+) u_{n_-}^-(q_-), \\ n_{\pm} &= N + \frac{|n| \pm n}{2}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde  $u_n^{\pm}$  son las funciones de onda de los osciladores armónicos (4.40) con frecuencia  $\omega_{\pm}$ . En el límite de masa cero,  $\omega_+ \sim B/m + k/B$ ,  $\omega_- \sim k/B$ , sólo los osciladores con

signo menos sobreviven y las relaciones límite ahora conectan las funciones de onda (4.49) y (4.40), en una manera consistente con la preservación de las normas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_+ | \langle q_+ | 0, |n\rangle |^2 \rightarrow |u_{|n|}(q_-)|^2. \quad (4.47)$$

Alternativamente, uno puede usar las versiones holomórficas de (4.49),

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{\omega_{\pm}} q_{\pm} + \frac{i}{\sqrt{\omega_{\pm}}} p_{\pm} \right]$$

$$\langle \alpha_{\pm} | a_{\pm}^{\dagger} = \langle \alpha_{\pm} | \alpha_{\pm}, \quad (4.48)$$

y las funciones de onda son simplemente

$$\langle \alpha_{\pm} | N, n \rangle = \frac{\alpha_{+}^{n_{+}}}{\sqrt{n_{+}!}} \frac{\alpha_{-}^{n_{-}}}{\sqrt{n_{-}!}}. \quad (4.49)$$

entonces, se tiene

$$\langle \alpha_{\pm} | 0, |n\rangle = \frac{\alpha_{-}^{|n|}}{\sqrt{|n|!}}.$$

En consecuencia, se observa que la relación entre (4.49) y (4.39) es directa. Por otra parte, la normalización propia está asegurada por el factor de medida holomórfica.

En el capítulo siguiente se hace una extensión del modelo presentado en esta sección, la extensión consiste en incrementar el orden de la teoría, es decir, en el término de Chern-Simons se introduce una segunda derivada con respecto al tiempo. El motivo de esta extensión es mostrar la relación de la no-conmutatividad y el orden de la teoría.

## 4.2. Oscilador Armónico Anisotrópico

En la sección anterior se mostró que la no-conmutatividad en las variables espaciales, surgía de tomar el límite de masa cero o equivalentemente de tomar un campo magnético intenso. En esta sección se considerará la no-conmutatividad desde otra perspectiva. Dicha perspectiva será considerar el álgebra:

$$[x_k, x_j] = i\Theta_{kj}, \quad (4.50)$$

$$[p_k, p_j] = iB_{kj}, \quad (4.51)$$

$$[x_k, p_j] = i\delta_{kj}, \quad (4.52)$$

donde  $\Theta_{kj}$  y  $B_{kj}$  son matrices antisimétricas, dichas matrices generalizan la no-conmutatividad de la geometría del espacio fase. No obstante, lo interesante de esta generalización

de las relaciones de conmutación, es que estas no satisfacen las relaciones de conmutación canónicas, en el caso canónico como se sabe, la forma para construir la teoría cuántica, es considerar operadores Hermiticos en un espacio de Hilbert que satisfacen relaciones de conmutación canónicas, sin embargo, también es posible construir representaciones para el caso no-canónico considerando bases asociadas a los observables. En esta sección sólo se está interazado por representaciones del álgebra canónica, para ello, se tiene que construir el mapeo de Darboux y hacer que se cumplan las relaciones de conmutación canónicas. Explícitamente el mapeo de Daboux está dado por el mapeo lineal siguiente:

$$x_i = a_{ij}\alpha_j + b_{ij}\beta_j, \quad (4.53)$$

$$p_i = c_{ij}\beta_j + d_{ij}\alpha_j. \quad (4.54)$$

donde las variables  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  satisfacen

$$[\alpha_k, \alpha_j] = 0, \quad (4.55)$$

$$[\beta_k, \beta_j] = 0, \quad (4.56)$$

$$[\alpha_k, \beta_j] = i\delta_{kj}. \quad (4.57)$$

además,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{d}$  son matrices de  $N \times N$ . Antes de iniciar en los detalles del método, primero se tienen que determinar las condiciones que estas matrices deben satisfacer. Estas condiciones son obtenidas por requerir la preservación de las relaciones de conmutación (4.50), (4.51), (4.52) y (4.55), (4.56), (4.57). Los resultados de preservar las relaciones de conmutación son los siguientes:

$$\mathbf{ab}^T - \mathbf{ba}^T = \mathbf{\Theta}, \quad (4.58)$$

$$\mathbf{cd}^T - \mathbf{dc}^T = -\mathbf{B}, \quad (4.59)$$

$$\mathbf{ca}^T - \mathbf{bd}^T = \mathbf{I}. \quad (4.60)$$

Las ecuaciones (4.58), (4.59) y (4.60) determinan la estructura de las matrices de transformación. A fin, de ilustrar como el procedimiento precedente trabaja, considérese un oscilador bidimensional no-conmutativo, descrito por el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}[p_i^2 + x_i^2]. \quad (4.61)$$

Por simplicidad, se ha elegido la masa y la frecuencia como unitaria. Introduciendo las ecuaciones (4.53) y (4.54) en el Hamiltoniano (4.61), se encuentra una forma equivalente del oscilador armónico en variables canónicas

$$H = \frac{1}{2}(a_{ik}a_{im} + d_{ik}d_{im})\alpha_k\alpha_m + \frac{1}{2}(c_{ki}c_{im} + b_{ki}b_{im})\beta_k\beta_m + \frac{1}{2}(c_{ik}b_{im} + c_{im}d_{ik})(\alpha_k\beta_m + \beta_m\alpha_k). \quad (4.62)$$

Nótemos algunas cosas interesantes con respecto a este Hamiltoniano: la primera de ellas es que aparece un término mezclado debido a la naturaleza cuadrática del Hamiltoniano y al hecho de que los mapeos (4.53) y (4.53) son lineales en las variables  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ . Este es un punto fundamental de la no-conmutatividad, ésta introduce interacciones sin que las teorías originales las posean. La segunda de ellas, es que bajo una elección adecuada de las matrices  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{d}$  el Hamiltoniano puede tomar una expresión menos compleja que la que aparece en (4.62).

Resolviendo las ecuaciones (4.58), (4.59) y (4.60), se tiene una de las soluciones más simples que se pueden encontrar y el Hamiltoniano toma la forma

$$H = \frac{1}{2}\Omega_1[\alpha_1^2 + \beta_1^2] + \frac{1}{2}\Omega_2[\alpha_2^2 + \beta_2^2], \quad (4.63)$$

donde

$$\Omega_1 = \frac{1}{2n}[\theta + B + nt\sqrt{4 + (\theta - B)^2}], \quad (4.64)$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2n}[\theta + B - nt\sqrt{4 + (\theta - B)^2}], \quad (4.65)$$

además  $t$  y  $n$  pueden tomar los valores de  $\pm 1$ . Estos parámetros toman el valor de 1 si  $B < 1/\theta$  y  $-1$  si  $B > 1/\theta$ . Hasta este punto, se ha encontrado una solución con un oscilador armónico isotrópico. No obstante, no es la única solución que existe y en realidad dichas soluciones son infinitas, pero lo sorprendente es que todas las soluciones tienen el mismo espectro cuántico.

Otra elección de matrices, proporciona el siguiente Hamiltoniano

$$H = h_1\alpha_i^2 + h_1\beta_i^2 - \frac{\theta + B}{2}\epsilon_{ij}\alpha_i\beta_j, \quad (4.66)$$

$$h_1 = \frac{a^2}{2}\left[1 + \frac{1}{\theta^2}(1 \mp \sqrt{\kappa})^2\right], \quad (4.67)$$

$$h_2 = \frac{\theta^2}{8a^2}\left[1 + \frac{1}{\theta^2}(1 \pm \sqrt{\kappa})^2\right]. \quad (4.68)$$

Se puede reconocer el Hamiltoniano (4.66), como el Hamiltoniano para un oscilador armónico conmutativo e isotrópico en dos dimensiones con un término adicional proporcional al momento angular bidimensional  $L = \epsilon_{ij}\alpha_i\beta_j$ . Éste término es un remanente de la no-conmutatividad, uno de los efectos más importantes de la no-conmutatividad. Un término similar surge del acoplamiento del momento angular con un campo magnético externo.

La solución cuántica de este sistema es

$$E_{n_r, m} = 2\sqrt{h_1 h_2}(2n_r + |m| + 1) + \frac{m}{2}(\theta + B), \quad (4.69)$$

con los números cuánticos tomando los valores  $n_r = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Insertando los valores de  $h_1$  y  $h_2$  en

$$\omega = 2\sqrt{h_1 h_2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + (\theta - B)^2}. \quad (4.70)$$

Esta ecuación nos muestra la independencia del espectro del parámetro  $a$  y tal como se mencionó anteriormente, el espectro cuántico queda determinado de manera única por los parámetros iniciales de la teoría.

Como ya se mencionó, uno de los principales motivos de la presente tesis es mostrar la relación entre la no-conmutatividad y el orden de la teoría. En los capítulos 5 y 6 se muestra este hecho, sin embargo, la cuantización de estos sistemas no se puede hacer de manera directa ya que estas no satisfacen las relaciones de conmutación canónicas, que como se sabe son cruciales para llevar a cabo la cuantización. No obstante, este obstáculo puede ser superado llevando a cabo el mapeo presentado en esta sección (mapeo de Darboux) y pasar a variables con relaciones de conmutación canónica. Después de realizado el mapeo la cuantización es directa, tan sólo con identificar las variables con operadores Hermiticos y los paréntesis de Dirac con conmutadores.





# Capítulo 5

## Teoría No-conmutativa a partir de una Teoría de Orden Superior

Hasta este punto se ha mostrado que, la no-conmutatividad para el caso del modelo de Chern-Simons de primer orden, sólo se presenta para el caso del límite de masa cero. Para el caso del oscilador armónico la no-conmutatividad se introducía a mano, es decir, de alguna manera se forzaba a que las variables del sistema fueran no-conmutativas. En este capítulo se introduce una extensión del modelo de Chern-Simons. Esta extensión se hace en el contexto del orden de las derivadas temporales. La extensión mostrará que la no-conmutatividad surge de manera natural como consecuencia del modelo de orden superior. Además se cuantiza el sistema a través del uso del mapeo de Darboux. Esta cuantización muestra un espectro cuántico con un estado de mínima energía bien definido.

### 5.1. Ecuaciones de Movimiento Clásicas

Con motivo de mostrar la relación entre las teorías de orden superior en derivadas temporales y la no-conmutatividad, tómesese como ejemplo la extensión del modelo de Chern-Simons de primer orden en derivadas temporales a orden superior (segundo orden en derivadas temporales). La teoría será estudiada en el contexto de la teoría de Dirac. La extensión se hará sustituyendo las derivadas de primer orden por derivadas de segundo orden y las variables espaciales por derivadas de primer orden, todo esto en el término de Chern-Simons, de tal manera, que el Lagrangiano por estudiar será

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{\kappa}{2}x^2 + \alpha\epsilon_{ij}\dot{x}_i\ddot{x}_j, \quad i = 1, 2. \quad (5.1)$$

Un punto importante debe destacarse en este Lagrangiano, este punto es que el término con derivadas de orden mayor no es una derivada total por lo cual no se puede eliminar, ya que contendrá resultados importantes en la teoría. Como es bien sabido en las teorías de orden superior, las ecuaciones de Euler-Lagrange son diferentes de las

usuales de primer orden. Estas ecuaciones involucran derivadas temporales relacionadas con el orden de la teoría y derivadas parciales de las diferentes derivadas temporales, es decir, para una teoría de orden  $(n)$ , estas se escriben como

$$\sum_{n=0}^k \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \frac{\partial L}{\partial x_i^{(n)}} = 0, \quad (5.2)$$

donde  $k$  denota el orden de la teoría y  $(n)$  es la derivada temporal de las variables de configuración.

En particular, para teorías de segundo orden estas ecuaciones son:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i} \right) = 0. \quad (5.3)$$

Las cuales como ya se mencionó, tienen tanto derivadas totales temporales como parciales de las aceleraciones, velocidades y de las posiciones.

En particular, para el caso de el Lagrangiano (5.1), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$2\alpha\epsilon_{ij} \frac{d^3 x_j}{dt^3} + \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \kappa x_i = 0. \quad (5.4)$$

No obstante, que estas ecuaciones son lineales en las variables, no pueden ser resueltas de manera inmediata, ya que están acopladas. Sin embargo, existe una forma simple de resolverlas, esto es, se puede definir una nueva variable  $z = x_1 + ix_2$  y escribir una sola ecuación diferencial en la variable  $z$ . Utilizando la nueva variable, la ecuación a resolver toma la siguiente forma:

$$-2i\alpha \frac{d^3 z}{dt^3} + \frac{d^2 z}{dt^2} + \kappa z = 0. \quad (5.5)$$

Esta es una ecuación de tercer orden lineal en  $z$ , que tiene por solución

$$x_1 = c_1 \cos Bt + [c_2 e^{Ct} + c_3 e^{-Ct}] \cos Dt, \quad (5.6)$$

$$x_2 = c_1 \sin Bt - [c_2 e^{Ct} + c_3 e^{-Ct}] \sin Dt, \quad (5.7)$$

donde, las diferentes constantes están dadas por

$$A = (-1 + 54\kappa\alpha^2 + 6\sqrt{3}\sqrt{-\kappa\alpha^2 + 27\alpha^4\kappa^2})^{1/3}, \quad (5.8)$$

$$B = -\frac{1}{6\alpha} + \frac{1}{6\alpha A} + \frac{A}{6\alpha}, \quad (5.9)$$

$$C = \frac{\sqrt{3}}{12\alpha A} - \frac{\sqrt{3}A}{12\alpha}, \quad (5.10)$$

$$D = \frac{1}{6\alpha} + \frac{1}{12\alpha A} + \frac{A}{12\alpha}. \quad (5.11)$$

Como se puede observar, la solución de la ecuación diferencial ha dado un par de soluciones con tres constantes de integración, para resolverla de manera única es necesario definir tres condiciones iniciales.

## 5.2. Constricciones y Hamiltoniano

El Lagrangiano (5.1) contiene derivadas de orden dos, por lo tanto, el formalismo canónico no puede ser ya utilizado. Sin embargo, como se vio en el capítulo dos, se puede utilizar el formalismo de Ostrogradsky. En este capítulo se mostró que esta teoría requiere de una mayor cantidad de momentos, en particular para el caso que se está tratando se tiene el siguiente par de momentos:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i} \right) \quad \text{y} \quad \pi_i = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i}, \quad (5.12)$$

es decir, se han aumentado los grados de libertad de la teoría. Estos grados de libertad están dados por el par de variables conjugadas  $(x_i, p_i)$  y  $(\dot{x}_i, \pi_i)$ , con lo cual, se puede observar que las velocidades  $\dot{x}_i$  pasan a ser variables conjugadas de  $\pi_i$  y variables de configuración del sistema.

En particular, para el caso del Lagrangiano (5.1), los momentos están dados por

$$p_i = m\dot{x}_i + 2\alpha\epsilon_{ij}\ddot{x}_j \quad \text{y} \quad \pi_i = -\alpha\epsilon_{ij}\dot{x}_j. \quad (5.13)$$

De estos dos momentos se observa que el segundo de estos es proporcional a su variable conjugada, implicando que se requieren un par de constricciones del tipo de Dirac, tal como fue tratado en el capítulo dos. Según este formalismo, como la segunda de estas ecuaciones no depende de las aceleraciones se está hablando de una restricción de la teoría, la cual se define como:

$$\phi_i = \pi_i + \alpha\epsilon_{ij}\dot{x}_j. \quad (5.14)$$

Por otra parte, de acuerdo con el formalismo de Ostrogradsky el Hamiltoniano canónico queda de la siguiente forma

$$H_c = \frac{p_i \dot{x}_i}{2} + \frac{\kappa}{2} x_i^2 + \frac{m}{2\alpha} \epsilon_{ij} \pi_i \dot{x}_j - \frac{\epsilon_{ij}}{2\alpha} \pi_i p_j. \quad (5.15)$$

Obsérvese que este Hamiltoniano sólo depende de las variables canónicas ya mencionadas, además se verifica que el primer término es lineal en los momentos, indicando que el Hamiltoniano no es acotado, ni por arriba ni por abajo.

Hasta este punto únicamente se ha definido el Hamiltoniano canónico. Sin embargo, las constricciones aun no han sido consideradas, no obstante, tal como fue tratado en el capítulo uno, la manera de introducir las constricciones en la teoría es agregarlas como multiplicadores de Lagrange al Hamiltoniano canónico y con esto obtener el llamado Hamiltoniano total, el cual en el caso presente está dado por

$$H = \frac{p_i \dot{x}_i}{2} + \frac{\kappa}{2} x_i^2 + \frac{m}{2\alpha} \epsilon_{ij} \pi_i \dot{x}_j - \frac{\epsilon_{ij}}{2\alpha} \pi_i p_j + \lambda_i \phi_i. \quad (5.16)$$

Con este Hamiltoniano, se puede calcular la evolución de las constricciones, es decir, lo que se desea observar es si esta evolución define nuevas constricciones o bien determina los multiplicadores de Lagrange. Con esto en mente, se tiene la evolución de las constricciones

$$\dot{\phi}_i = \{\phi_i, H\} = \frac{\epsilon_{ij}}{2\alpha}\phi_j + 2\alpha\epsilon_{ik}\lambda_k. \quad (5.17)$$

Como se observa, estas ecuaciones definen dos términos: el primero de ellos es proporcional a las constricciones y el segundo a los multiplicadores de Lagrange. De esta combinación, se infiere que dichas ecuaciones ya no definen nuevas constricciones sino más bien determinan los multiplicadores de Lagrange, los cuales tienen la forma

$$\lambda_i \approx -\frac{\phi_i}{4\alpha^4}.$$

De esta manera se muestra que ya no existen más constricciones. Un punto importante aquí es que una vez determinado el número de constricciones, tal como se vio en el capítulo dos, se debe determinar a que clase pertenecen, para realizar esto se tiene que calcular el paréntesis de Poisson entre las mismas. Bajo esta consideración estos paréntesis son:

$$\{\phi_i, \phi_j\} = 2\alpha\epsilon_{ij}, \quad (5.18)$$

Consecuentemente, puesto que los paréntesis de Poisson son diferente de cero se trata de constricciones de segunda clase. Fue este hecho el que permitió obtener los multiplicadores de Lagrange de la ecuación (5.17). Como se vio en el capítulo dos, la importancia de clasificar las constricciones, son las importantes consecuencias que se reflejan en la estructura simpléctica. Dado que las constricciones resultaron ser de segunda clase, la estructura simpléctica es definida por los paréntesis de Dirac. De acuerdo a este formalismo estos paréntesis se definen de manera general por el siguiente paréntesis

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_i\}\{\phi_i, \phi_j\}^{-1}\{\phi_j, B\}. \quad (5.19)$$

Para el caso de la teoría que se trata aquí  $\{\phi_i, \phi_j\}^{-1}$  está dado por

$$\{\phi_i, \phi_j\}^{-1} = -\frac{\epsilon_{ij}}{2\alpha}, \quad (5.20)$$

por lo tanto, el paréntesis de Dirac toma la forma

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} + \frac{1}{2\alpha}\{A, \phi_i\}\epsilon_{ij}\{\phi_j, B\}. \quad (5.21)$$

Habiendo obtenido el Hamiltoniano total y los multiplicadores de Lagrange, se puede seguir por obtener los paréntesis de Dirac para las diferentes variables del espacio fase,

esto se puede hacer con el paréntesis definido en la ecuación (5.21). Identificando las diferentes variables con  $A$  y  $B$ , resulta la siguiente álgebra

$$\{x_i, p_j\}_D = \delta_{ij}, \quad \{\dot{x}_i, \dot{x}_j\}_D = -\frac{1}{2\alpha}\epsilon_{ij}, \quad \{\dot{x}_i, \pi_j\}_D = \frac{1}{2}\delta_{ij}, \quad \{\pi_i, \pi_j\}_D = -\frac{\alpha}{2}\epsilon_{ij}. \quad (5.22)$$

De esta álgebra se observa lo siguiente: las variables de posición y el momento asociado satisfacen las relaciones de conmutación usual. Sin embargo, las velocidades y los momentos asociados a estas son no-conmutativas. Tal como se mencionó en capítulos anteriores la no-conmutatividad y el orden de la teoría poseen una relación estrecha. No obstante, el hecho de que se hayan considerado las constricciones (5.14) es que se ha supuesto la extensión de nuestro espacio a toda la variedad. Por otra parte, si se considera la dos-forma simpléctica que definen estos paréntesis, esta resulta ser degenerada. Para evitar esta degeneración se tienen que hacer fuertes las constricciones y con esto reducir los grados de libertad de  $z^B = \{x_i, \dot{x}_i, p_i, \pi_i\}$  a  $z^A = \{x_i, \dot{x}_i, p_i\}$ . De tal manera que, la dos-forma simpléctica ya no es degenerada. Los paréntesis una vez hecha la reducción del espacio fase, están dados por

$$\{x_i, p_j\}_D = \delta_{ij}, \quad \{\dot{x}_i, \dot{x}_j\}_D = -\frac{1}{2\alpha}\epsilon_{ij}. \quad (5.23)$$

Con estos paréntesis la dos-forma simpléctica resulta no-degenerada. De estos últimos paréntesis se puede apreciar una no-conmutatividad en las velocidades, derivada de los paréntesis de Dirac, sin embargo, esta no-conmutatividad es presente en todos los casos en que se tengan constricciones de segunda clase, esto en realidad sucede en general con los sistemas que poseen derivadas de orden superior. Lo que hace interesante esta no-conmutatividad es cuando se proyecta el sistema a los estados de mínima energía, dando como resultado una no-conmutatividad en todas las variables del espacio fase reducido. Esta no-conmutatividad surge de manera natural como consecuencia de esta proyección, de tal manera, que dicha proyección a los estados de mínima energía, tiene como finalidad eliminar los problemas con el estado de mínima energía, por consecuencia para remediar dicho problema, parece plausible concluir que al remediar el problema con el estado de mínima energía el sistema resultante directamente será no-conmutativo en todos los casos.

### 5.2.1. Aproximación Perturbativa y Espectro Cuántico

Con la finalidad de obtener una teoría sin derivadas de segundo orden en el modelo aquí tratado y con esto poder cuantizarla sin los problemas inherentes de las teorías con derivadas superiores. Se utilizará el método perturbativo propuesto y desarrollado en el capítulo dos. Este método permitirá escribir los términos con derivadas de orden superior en términos de las coordenadas.

En la aproximación a orden más bajo en  $\alpha$ , las segundas derivadas temporales están dadas por la aproximación

$$\ddot{x}_i \approx -\frac{\kappa}{m}x_i + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (5.24)$$

Antes de hacer las aproximaciones en los momentos, se construirá la dos-forma simpléctica; la cual se define como

$$\Omega = \frac{\omega_{AB}}{2} dz^A \wedge dz^B. \quad (5.25)$$

Como ya se mencionó para que la dos-forma no sea degenerada, se tiene que eliminar  $\pi_i$  del sistema, esto se logra haciendo fuertes las constricciones, con lo que los grados de libertad se reducen a  $z^A = \{x_i, \dot{x}_i, p_i\}$ . Los paréntesis (5.23) definen la matriz

$$\omega^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

La cual es no-degenerada, implicando la existencia de la inversa, la cual está dada por

$$\omega_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Por lo tanto, la dos-forma simpléctica en el espacio reducido está definida por

$$\Omega = \frac{\omega_{AB}}{2} dz^A \wedge dz^B = -\delta_{ij} dx_i \wedge dp_j + \alpha \epsilon_{ij} d\dot{x}_i \wedge d\dot{x}_j, \quad (5.28)$$

Introduciendo la aproximación (5.24), los momentos (5.13) a primer orden en  $\alpha$  toman la forma

$$p_i = m\dot{x}_i - \frac{2\kappa\alpha}{m}\epsilon_{ij}x_j + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad \text{y} \quad \pi_i = -\alpha\epsilon_{ij}\dot{x}_j. \quad (5.29)$$

introduciendo los momentos (5.29) en la dos-forma (5.28), se obtiene

$$\Omega = -m\delta_{ij} dx_i \wedge d\dot{x}_j + \frac{2\alpha\kappa}{m}\epsilon_{ij} dx_i \wedge dx_j + \alpha\epsilon_{ij} d\dot{x}_i \wedge d\dot{x}_j + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (5.30)$$

Ahora para definir la dos-forma simpléctica de la manera canónica y con ello resaltar que los términos restantes son parte de las correcciones a ésta, defínase  $\rho_i = m\dot{x}_i$ , con lo cual se obtiene lo siguiente:

$$\Omega = d\rho_i \wedge dx_i + \frac{2\alpha\kappa}{m}\epsilon_{ij}dx_i \wedge dx_j + \frac{\alpha}{m^2}\epsilon_{ij}d\rho_i \wedge d\rho_j + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (5.31)$$

Se debe poner énfasis que esta dos-forma es una aproximación a primer orden en  $\alpha$ , ya que proviene de las correcciones a primer orden de los momentos. Nótese que en este paso se ha realizado una reducción adicional a la dimensión del espacio fase, el cual es ahora de dimensión cuatro con variables  $z_a = (x_i, \rho_i)$ . En consecuencia, la matriz simpléctica será

$$\omega_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4\alpha\kappa}{m} & -1 & 0 \\ -\frac{4\alpha\kappa}{m} & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2\alpha}{m^2} \\ 0 & 1 & -\frac{2\alpha}{m^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

y su inversa a primer orden en  $\alpha$  como

$$\omega^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\alpha}{m^2} & 1 & 0 \\ -\frac{2\alpha}{m^2} & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{4\alpha\kappa}{m} \\ 0 & -1 & -\frac{4\alpha\kappa}{m} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Como ya se había mencionado la importancia de la dos-forma, es que permite obtener la estructura de Dirac que satisfacen las variables del sistema. En efecto, de esta última matriz cada una de las entradas permiten leer los paréntesis de Dirac  $\omega^{ab} = \{z_i, z_j\}$ , los cuales escritos explícitamente son:

$$\{x_i, x_j\}_D = \frac{2\alpha}{m^2}\epsilon_{ij}, \quad \{\rho_i, \rho_j\}_D = \frac{4\alpha\kappa}{m}\epsilon_{ij}, \quad \{x_i, \rho_j\}_D = \delta_{ij}. \quad (5.34)$$

Estos paréntesis muestran que no importa, que se haya eliminado las derivadas de segundo orden de la teoría, la no-conmutatividad permanece y así de manera natural se ha generado a partir de la teoría inicial de orden superior, una no-conmutatividad tanto en los momentos como en las coordenadas definida en el espacio fase reducido  $(x_i, \rho_i)$ . Tal como se mencionó anteriormente esta álgebra fue postulada como una característica inherente al espacio fase en el caso del oscilador armónico, en el caso aquí tratado surge de manera natural. Esto representa un gran cambio en comparación de las teorías usualmente investigadas. Además, se puede observar que no existe el límite de masa cero, ya que, la dependencia de la masa en los paréntesis es proporcional a  $1/m$ , implicando la inexistencia de tal límite. Si se toma el límite  $\alpha$  cero la no-conmutatividad desaparece volviendo la teoría trivial.

Por otra parte, si se introduce la aproximación (5.24) en el Hamiltoniano

$$H = p_i \dot{x}_i + \pi_i \ddot{x}_i - L,$$

y la definición de la variable  $\rho_i$ , se obtiene el Hamiltoniano a primer orden en  $\alpha$

$$H = \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 + \frac{\kappa}{2} x_i^2 + \frac{3\alpha\kappa}{m} \epsilon_{ij} x_i \dot{x}_j = \frac{\rho_i^2}{2m} + \frac{\kappa}{2} x_i^2 + \frac{3\alpha\kappa}{m^2} \epsilon_{ij} x_i \rho_j + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (5.35)$$

Como se puede ver este Hamiltoniano tiene un término que se puede identificar con un oscilador armónico y otro término proporcional al momento angular. Aproximaciones a ordenes más altos en  $\alpha$ , sólo proporcionan correcciones en el tercer término de este Hamiltoniano, dejando la forma general de este invariante. En la próxima sección se cuantizará este sistema utilizando el mapeo de Darboux. Además, en el próximo capítulo se resolverá este mismo sistema, pero bajo el método de bases cruzadas, se mostrará que la solución de este sistema con el método de bases cruzadas, es completamente diferente del resultado de la aplicación del mapeo de Darboux.

### 5.3. Cuantización del Sistema

Con todo lo ya hecho hasta aquí, se podría pensar que se puede realizar la cuantización del Hamiltoniano (5.35). Sin embargo, sucede que este Hamiltoniano está escrito en variables no-conmutativas. Para poder cuantizar este Hamiltoniano se puede proceder de dos maneras diferentes: i) La primera es definir un mapeo de las coordenadas no-conmutativas a un nuevo sistema de coordenadas canónicas, con las relaciones de conmutación usuales, es decir, se construye el mapeo de Darboux de la estructura simpléctica (5.32) a la usual. ii) La otra alternativa será considerar una base cruzada, es decir, tomar un conjunto completo de observables que conmutan, por ejemplo, las variables  $(x_1, \rho_2)$  ó  $(x_2, \rho_1)$ . La ventaja de utilizar el primer procedimiento es que una vez hecho el mapeo de Darboux, los pasos para realizar la cuantización son los mismos de la mecánica cuántica usual. Este procedimiento ya fue hecho en el capítulo cuatro. El método de bases cruzadas fue tratado de manera muy breve en el capítulo tres; el desarrollo explícito se hará en el siguiente capítulo, aquí sólo se tratará con el mapeo de Darboux.

El mapeo de Darboux de manera general, tal como se vio en el capítulo dos, se define como

$$x_i = a_{ij} \bar{x}_j + b_{ij} \bar{\rho}_j, \quad \rho_i = c_{ij} \bar{x}_j + d_{ij} \bar{\rho}_j, \quad (5.36)$$

donde, las nuevas variables satisfacen las relaciones canónicas

$$\{\bar{x}_i, \bar{x}_j\} = \{\bar{\rho}_i, \bar{\rho}_j\} = 0, \quad \{\bar{x}_i, \bar{\rho}_j\} = \delta_{ij}. \quad (5.37)$$



Puede destacarse de esta álgebra, que la finalidad de construir el mapeo de Darboux es construir las observables del sistema, en particular en este caso se tratará con las coordenadas como una base del sistema, desde luego, también pueden ser utilizados los momentos. Introduciendo las ecuaciones (5.36) en los paréntesis (5.34), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$A_{ik}B_{jk} - B_{ik}A_{jk} = \frac{2\alpha}{m^2}\epsilon_{ij}, \quad C_{ik}D_{jk} - D_{ik}C_{jk} = \frac{4\alpha\kappa}{m}\epsilon_{ij}, \quad A_{ik}D_{jk} - B_{ik}C_{jk} = \delta_{ij}. \quad (5.38)$$

Si se hacen las matrices  $A_{ij} = a\delta_{ij}$  y  $D_{ij} = b\delta_{ij}$  proporcionales a la identidad resulta

$$a(B_{ji} - B_{ij}) = \frac{2\alpha}{m^2}\epsilon_{ij}, \quad b(C_{ij} - C_{ji}) = \frac{4\alpha\kappa}{m}\epsilon_{ij}, \quad ab\delta_{ij} - B_{ik}C_{jk} = \delta_{ij}. \quad (5.39)$$

Para poder resolver estas ecuaciones, lo que se hace es pedir que tanto  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  sean matrices anti-simétricas, por lo tanto,

$$B_{ij} = -\frac{\alpha}{m^2a}\epsilon_{ij}, \quad C_{ij} = \frac{2\alpha\kappa}{bm}\epsilon_{ij}, \quad B_{ik}C_{jk} = (ab - 1)\delta_{ij}, \quad (5.40)$$

introduciendo los valores de las matrices  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  en la última de estas ecuaciones, se tiene

$$ab - 1 = -\frac{2\alpha^2\kappa}{abm^3}, \quad (5.41)$$

esto implica, que

$$ab = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{8\alpha^2\kappa}{m^3}}, \quad (5.42)$$

resolviendo para  $b$  a orden cuadrático en  $\alpha$ , se tiene

$$b \approx \frac{1}{a} - \frac{2\alpha^2\kappa}{am^3} + \dots \quad (5.43)$$

Por lo tanto, las transformaciones toman la forma siguiente

$$x_i = a\bar{x}_i - \frac{\alpha}{m^2a}\epsilon_{ij}\bar{p}_j, \quad \rho_i = \frac{\bar{\rho}_i}{a} + \frac{2\alpha\kappa a}{m}\epsilon_{ij}\bar{x}_j - \frac{2\alpha^2\kappa}{am^3}\bar{\rho}_i + \dots \quad (5.44)$$

Habiendo calculado las constantes del mapeo (5.36) se puede proceder a cuantizar el Hamiltoniano (5.35), para poder lograr esto primero exprese este Hamiltoniano en términos de las nuevas variables. Introduciendo las transformaciones (5.44) en el Hamiltoniano (5.35), este toma la forma

$$H = A(\alpha, \kappa, m)\bar{\rho}_i^2 + B(\alpha, \kappa, m)\bar{x}_i^2 + C(\alpha, \kappa, m)\epsilon_{ij}\bar{x}_i\bar{\rho}_j, \quad (5.45)$$

donde, las constantes hasta orden cubico en  $\alpha$  son

$$\begin{aligned} A(\alpha, \kappa, m) &= \frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{2m} - \frac{9\alpha^2 \kappa}{2m^4} + \dots \right), & B(\alpha, \kappa, m) &= a^2 \left( \frac{\kappa}{2} - \frac{4\alpha^2 \kappa^2}{m^3} + \dots \right), \\ C(\alpha, \kappa, m) &= \frac{8\alpha^3 \kappa^3}{m^8} + \dots \end{aligned} \quad (5.46)$$

Cabe la pena observar algunas propiedades sobre estas constantes. Quizá las más importantes de ellas son que  $A$  es proporcional a  $a^{-2}$  y  $B$  es proporcional a  $a^2$ , por lo cual, es de esperarse que el espectro sea proporcional al producto de  $A$  y  $B$ , de tal manera, que este no dependa de  $a$ . De esta forma se determinará el espectro de energías de manera única. Otra característica importante, es que la forma de dichas constantes proporcionan un Hamiltoniano muy similar al Hamiltoniano resultante de la aproximación perturbativa, sólo que a diferencia del caso del Hamiltoniano perturbado, en este nuevo Hamiltoniano la masa, la frecuencia y la constante de interacción han sufrido una modificación debido al mapeo de Darboux.

Como ya se mencionó las nuevas variables satisfacen las relaciones de conmutación canónicas. Para poder hacer que el Hamiltoniano (5.45) sea un operador cuántico, se tiene que pasar de números que satisfacen el álgebra de Poisson (5.37) a operadores Hermitianos que satisfacen las relaciones de conmutación siguiente:

$$[\bar{x}_i, \bar{x}_j] = [\bar{\rho}_i, \bar{\rho}_j] = 0, \quad [\bar{x}_i, \bar{\rho}_j] = i\delta_{ij}, \quad (5.47)$$

donde, se ha hecho  $\hbar = 1$ . Los operadores explícitamente están identificados por

$$\bar{x}_i \rightarrow \bar{x}_i, \quad \bar{\rho}_i \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}, \quad (5.48)$$

y en consecuencia el Hamiltoniano (5.45) queda de la forma siguiente:

$$\hat{H} = -A \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_i^2} + B \bar{x}_i^2 - iC \epsilon_{ij} \bar{x}_i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}, \quad (5.49)$$

además se puede reconocer el último término de este operador como el operador de momento angular, es decir,

$$\hat{L} = -i \epsilon_{ij} \bar{x}_i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}. \quad (5.50)$$

Las coordenadas más naturales en las que se puede escribir este operador: es en coordenadas polares, de tal manera, que este toma la forma siguiente:

$$\hat{H} = A \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right) - Br^2 - C\hat{L}, \quad (5.51)$$

aplicando la función de onda  $\psi(r, \theta)$  al operador se tiene

$$\left[ A \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right) - Br^2 - C\hat{L} \right] \psi(r, \theta) = E\psi(r, \theta). \quad (5.52)$$

Esta ecuación puede ser resuelta de manera más fácil si se introduce el siguiente cambio de variable [11]

$$z = \sqrt{\frac{B}{A}} r^2. \quad (5.53)$$

Antes de hacer el cambio de variable, se tiene que aplicar  $\psi(r, \theta)$  al operador de momento angular, de lo cual se tiene

$$\hat{L}\psi(r, \theta) = m\psi(r, \theta), \quad (5.54)$$

donde  $m$  toma los valores  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , por lo tanto, la ecuación (5.33) queda de siguiente forma

$$\left[ A \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \right) - Br^2 - Cm \right] \psi(r, \theta) = E\psi(r, \theta). \quad (5.55)$$

Haciendo el cambio de variable mencionado, la ecuación anterior queda como

$$4\sqrt{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{m^2}{4z} - \frac{z}{4} \right] \psi(z, \theta) = [E + Cm]\psi(z, \theta), \quad (5.56)$$

y la función de onda  $\psi(z, \theta)$  es de la forma

$$\psi(z, \theta) = Z(z) \exp\left(-\frac{z}{2} + im\theta\right), \quad (5.57)$$

donde, la función  $Z(z)$  está sujeta a satisfacer la ecuación

$$zZ''(z) + (1-z)Z'(z) + \left[\hat{E} - \frac{m^2}{4z}\right]Z(z) = 0, \quad (5.58)$$

con  $\hat{E}$  dada por

$$\hat{E} = \frac{1}{4\sqrt{AB}}[E - mC] - \frac{1}{2}. \quad (5.59)$$

Además la ecuación (5.58) puede ser resuelta con los polinomios asociados de Laguerre, los cuales son:

$$\psi_{n_r, m}(z, \theta) = N z^{|m|/2} L_{n_r}^{|m|}(z) \exp\left(-\frac{z}{2} + im\theta\right). \quad (5.60)$$

$$L_n^r(z) = z^{-r} \exp(z) \frac{d^n}{dz^n} \left( z^{n+r} \exp(-z) \right). \quad (5.61)$$

donde,  $N$  es la constante de normalización de los polinomios y  $n_r$  es el numero cuántico radial. Por lo tanto, en general el espectro del sistema está dado por

$$E_{n_r, m} = 2\sqrt{AB}(2n_r + |m| + 1) - mC, \quad (5.62)$$

donde las correcciones solo están dadas en las constantes del Hamiltoniano. Además los números cuánticos toman los valores  $n_r = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Obsérvese que este espectro no depende de la constante  $a$ , únicamente de las constantes  $\kappa$ ,  $\alpha$ , de la masa  $m$  y de potencias de estas constantes contenidas en las constantes del Hamiltoniano, lo cual determina el espectro del sistema de manera única. Además este espectro tiene un estado de mínima energía bien definido, sin embargo, tal como está escrito este hecho no es evidente. Para poder hacer evidente esto, defínanse los siguiente números positivos  $n_+, n_- = 0, 1, 2, 3, \dots$ , los cuales están determinados de la siguiente forma

$$n_r = n_+ + \frac{m - |m|}{2}, \quad m = n_+ - n_-. \quad (5.63)$$

Introduciendo estos nuevos números cuánticos y los valores de las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  se obtiene

$$E_{n_+, n_-} = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \left[ 1 - \frac{17\alpha^2 \kappa}{2m^3} + \frac{36\alpha^4 \kappa^2}{m^6} + \mathcal{O}(\alpha^{2n}) \right] (n_+ + n_- + 1) - \left[ \frac{8\alpha^3 \kappa^3}{m^8} + \mathcal{O}(\alpha^{2n+1}) \right] \hbar(n_+ - n_-). \quad (5.64)$$

Por lo tanto, para el estado de mínima energía se tiene

$$E_{0,0} = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \left[ 1 - \frac{17\alpha^2 \kappa}{2m^3} + \frac{36\alpha^4 \kappa^2}{m^6} + \mathcal{O}(\alpha^{2n}) \right], \quad (5.65)$$

el cual es positivo ya que  $\alpha$  es mucho menor que la unidad. Cuando se toma  $\alpha = 0$ , se recupera el caso usual de dos osciladores armónicos desacoplados.

## 5.4. Relaciones de Conmutación con Parámetro de Conmutatividad Local

Como se mostrará brevemente en el capítulo ocho, la simetría de Lorentz no se conserva debido a que, en las relaciones de conmutación el parámetro de no-conmutatividad es constante. En el modelo considerado en las secciones anteriores de este capítulo, dicha simetría no tiene importancia, ya que no se está tratando con un sistema relativista. Sin

embargo, se puede considerar una extensión del modelo anterior el cual, en principio, puede servir de ejemplo para una posible extensión a un sistema relativista que no viole la simetría de Lorentz. Dicho modelo está dado por el siguiente Lagrangiano:

$$L = \frac{m_r \dot{r}^2}{2} - V(r) + \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 - \frac{k}{2} x_i^2 + \frac{\theta f(r)}{2} \epsilon_{ij} \dot{x}_i \ddot{x}_j. \quad (5.66)$$

Donde, debe destacarse que a diferencia de la teoría con parámetro de conmutatividad constante, en esta nueva teoría se ha agregado a la dinámica la variable  $r$  y además se ha hecho  $\alpha = \theta f(r)/2$ , en el cual existe una dependencia explícita de la variable  $r$ . Esto implicará posteriormente un parámetro de conmutatividad local.

Por otro lado, los momentos asociados a este Lagrangiano están dados por

$$p_r = m_r \dot{r}, \quad p_i = m \dot{x}_i + \theta f(r) \epsilon_{ij} \ddot{x}_j + \frac{\theta f'(r)}{2m_r} p_r \epsilon_{ij} \dot{x}_j, \quad \pi_i = -\frac{\theta f(r)}{2} \epsilon_{ij} \dot{x}_j. \quad (5.67)$$

Del último de estos momentos se infiere que se trata de una constricción, de acuerdo con el formalismo de Dirac. Ésta se define como

$$\chi_i = \pi_i + \frac{\theta f(r)}{2} \epsilon_{ij} \dot{x}_j. \quad (5.68)$$

El paréntesis de Poisson entre las constricciones, por otra parte, está dado por

$$\{\chi_i, \chi_j\} = \theta f(r) \epsilon_{ij}, \quad (5.69)$$

además puede observarse que estos paréntesis tienen una estructura muy similar a los paréntesis en los cuales el parámetro de conmutatividad era constante. De la no-nulidad de este paréntesis, se infiere que las constricciones son de segunda clase. Por lo tanto, se tienen que construir los paréntesis de Dirac, los cuales tienen la forma:

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} + \{A, \chi_i\} \frac{\epsilon_{ij}}{\theta f(r)} \{\chi_j, B\}. \quad (5.70)$$

Antes de pasar a construir el álgebra de las diferentes variables del espacio fase, se construirá el Hamiltoniano de la teoría. Esto puede ser hecho despejando las aceleraciones de la segunda de las ecuaciones (5.67), lo cual resulta en

$$\ddot{x}_i = \frac{m}{\theta f(r)} \epsilon_{ij} \dot{x}_j - \frac{1}{\theta f(r)} \epsilon_{ij} p_j - \frac{f'(r) p_r}{2m_r f(r)} \dot{x}_i. \quad (5.71)$$

Introduciendo esta relación en el Lagrangiano (5.66), se tiene

$$L = \frac{p_r}{2m_r} - V(r) + \frac{p_i \dot{x}_i}{2} - \frac{k}{2} x_i^2. \quad (5.72)$$

Ahora bien el Hamiltoniano de manera general se define como

$$H = p_r \dot{r} + p_i \dot{x}_i + \pi_i \ddot{x}_i - L. \quad (5.73)$$

Nuevamente introduciendo las aceleraciones en el Hamiltoniano anterior, resulta

$$H = \frac{p_r^2}{2m_r} + V(r) + \frac{p_i \dot{x}_i}{2} + \frac{k}{2} x_i^2 + \frac{m}{\theta f(r)} \epsilon_{ij} \pi_i \dot{x}_j - \frac{\epsilon_{ij}}{\theta f(r)} \pi_i p_j - \frac{f'(r) p_r}{2m_r f(r)} \pi_i \dot{x}_i. \quad (5.74)$$

Este hamiltoniano está escrito en las variables  $z^B = \{r, x_i, \dot{x}_i, p_r, p_i, \pi_i\}$ . Sin embargo, para poder superar la degeneración de la matriz simpléctica, se tiene que hacer, tal como en el caso anterior las constricciones (5.68) fuertes. Esto hará una reducción en el espacio fase a  $z^A = \{r, x_i, \dot{x}_i, p_r, p_i\}$ . Tal como en el anterior caso este espacio define la siguiente álgebra

$$\{r, p_r\}_D = 1, \quad \{x_i, p_j\}_D = \delta_{ij}, \quad \{\dot{x}_i, \dot{x}_j\}_D = -\frac{\epsilon_{ij}}{\theta f(r)}, \quad \{p_r, \dot{x}_i\}_D = \frac{f'(r)}{2f(r)} \dot{x}_i, \quad (5.75)$$

Además de manera análoga al sistema de parámetro de conmutatividad constante, esta álgebra define la matriz  $\omega^{AB}$  la cual es no-degenerada, consecuentemente se puede calcular la inversa. Esta está dada por

$$\omega_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\theta f'(r) \dot{x}_2/2 & \theta f'(r) \dot{x}_1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \theta f'(r) \dot{x}_2/2 & 0 & 0 & 0 & \theta f(r) & 0 & 0 & 0 \\ -\theta f'(r) \dot{x}_1/2 & 0 & 0 & -\theta f(r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.76)$$

Esta matriz define la dos-forma simpléctica, siguiente:

$$d\Omega = \frac{\omega_{AB}}{2} dz^A \wedge dz^B = -dr \wedge dp_r - \delta_{ij} dx_i \wedge dp_j + \frac{\theta f(r)}{2} \epsilon_{ij} d\dot{x}_i \wedge d\dot{x}_j - \frac{\theta f'(r)}{2} \epsilon_{ij} \dot{x}_j dr \wedge d\dot{x}_i \quad (5.77)$$

Antes de proseguir con el análisis, se calcularán las ecuaciones de movimiento, de tal manera, que estas ecuaciones proporcionen las derivadas de segundo orden en las variables  $x_i$  y poderlas eliminar del Lagrangiano y del Hamiltoniano. Estas ecuaciones están dadas por

$$\ddot{r} + V'(r) - \frac{\theta f'(r)}{2} \epsilon_{ij} \dot{x}_i \ddot{x}_j = 0, \quad (5.78)$$

y

$$\left[ \frac{3\theta f'(r)p_r}{2m_r} \epsilon_{ij} + m\delta_{ij} \right] \ddot{x}_j = A_{ij} \ddot{x}_j = -kx_i - \frac{\theta f''(r)p_r^2}{2m_r^2} \epsilon_{ij} \dot{x}_j - \frac{\theta f'(r)\dot{p}_r}{2m_r} \epsilon_{ij} \dot{x}_j - \theta f(r) \epsilon_{ij} x_j^{(3)}. \quad (5.79)$$

Multiplicando la ecuación anterior por

$$A_{ij}^{-1} = \frac{4m\delta_{ij} - 6\theta f' p_r / m_r \epsilon_{ij}}{4m^2}. \quad (5.80)$$

Debe ponerse énfasis en que la ecuación anterior es una aproximación a primer orden en  $\theta$ . Una vez multiplicado se tiene la ecuación siguiente a primer orden en  $\theta$

$$\ddot{x}_i = -\frac{k}{m} x_i + \frac{\theta k f(r)}{m^2} \epsilon_{ij} \dot{x}_j - \frac{3\theta k f'(r)p_r}{2m^2 m_r} \epsilon_{ij} x_j - \frac{\theta f''(r)p_r^2}{2m m_r^2} \epsilon_{ij} \dot{x}_j - \frac{\theta f'(r)\dot{p}_r}{2m m_r} \epsilon_{ij} \dot{x}_j + \dots \quad (5.81)$$

El momento canónico queda a primer orden en  $\theta$  como

$$p_i = m\dot{x}_i - \frac{\theta k f(r)}{m} \epsilon_{ij} x_j + \frac{\theta f'(r)p_r}{2m_r} \epsilon_{ij} \dot{x}_j + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (5.82)$$

En consecuencia, el Hamiltoniano toma la forma

$$H = \frac{p_r^2}{2m_r} + V(r) + \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 + \frac{k}{2} x_i^2 + \frac{\theta k f(r)}{2m} \epsilon_{ij} x_i \dot{x}_j + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (5.83)$$

Por otra parte, la dos-forma simpléctica a primer orden en  $\theta$ , está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} d\Omega = & \frac{1}{2} dp_r \wedge dr + \frac{1}{2} \left[ \delta_{ij} - \frac{\theta f'(r)p_r}{2m m_r} \epsilon_{ij} \right] \rho_i \wedge dx_j + \frac{1}{2} \left[ \frac{\theta k f'(r)}{m} x_i - \frac{\theta f''(r)p_r}{2m m_r} \rho_i \right] \epsilon_{ij} dr \wedge \dot{x}_j \\ & + \frac{\theta k f(r)}{2m} \epsilon_{ij} dx_i \wedge dx_j + \frac{\theta f'(r)}{4m m_r} \epsilon_{ij} \rho_i dp_r \wedge dx_j - \frac{\theta f'(r)}{4m^2} \epsilon_{ij} \rho_i dr \wedge d\rho_j + \frac{\theta f(r)}{4m^2} \epsilon_{ij} d\rho_i \wedge d\rho_j, \end{aligned} \quad (5.84)$$

donde se ha hecho  $\rho_i = m\dot{x}_i$ . De esta dos-forma se pueden leer las componentes de  $\omega_{AB}$ , además tomando su inversa se obtienen los paréntesis de Dirac, los cuales están dados por

$$\begin{aligned} \{r, p_r\}_D = 1, \quad \{x_i, \rho_j\}_D = \delta_{ij} + \frac{\theta f'(r)p_r}{2m_r m} \epsilon_{ij}, \quad \{p_r, \rho_i\}_D = \frac{\theta f''(r)p_r}{2m m_r} \epsilon_{ij} \rho_j - \frac{\theta k f'(r)}{m} \epsilon_{ij} x_j, \\ \{x_i, x_j\}_D = \frac{\theta f(r)}{m^2} \epsilon_{ij}, \quad \{p_r, x_i\}_D = -\frac{\theta f'(r)}{2m^2} \epsilon_{ij} \rho_j, \\ \{r, \rho_i\}_D = -\frac{\theta f'(r)}{2m m_r} \epsilon_{ij} \rho_j, \quad \{\rho_i, \rho_j\}_D = \frac{\theta k f(r)}{m} \epsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Se puede notar que en esta álgebra, el parámetro de conmutatividad posee dependencia de algunas de las variables del sistema. Sin embargo, en este caso no existe una manera simple de implementar el mapeo de Darboux, de manera que no se puede realizar la cuantización del sistema como en el caso del parámetro de conmutatividad constante.





# Capítulo 6

## Cuantización No-canónica y Bases Cruzadas

El principal punto mostrado en el capítulo anterior, fue la relación entre la no-conmutatividad y la teoría de orden superior. Además se realizó la cuantización utilizando el mapeo de Darboux. Dicho mapeo relaciona las variables no-conmutativas a variables que satisfagan las relaciones de conmutación canónicas, de tal manera, que una vez realizado el mapeo la cuantización del sistema se llevo a cabo de la forma usual. Sin embargo, este esquema no es la única manera de realizar la cuantización del sistema. En este capítulo, se realizará la cuantización utilizando una base cruzada. De esta manera, el punto inicial es seleccionar un conjunto completo de observables conmutativas y dado que las teorías de interés en este capítulo son teorías con álgebras no-canónicas, por consecuencia el conjunto de observables será una combinación de coordenadas y momentos. Este método proporciona diferentes resultados a los obtenidos para el caso del mapeo de Darboux, fundamentalmente debido a que se está empleando un conjunto de observables distinto.

### 6.1. Potencial Simpléctico

En el capítulo anterior, se mostró la relación entre la no-conmutatividad y la teoría de orden superior, por otra parte, bajo el método perturbativo pudieron ser eliminados los problemas con el estado de mínima energía, como se sabe dicho problema es inherente a las teorías de orden superior. Sin embargo, la teoría Hamiltoniana resultante, una vez realizada la aproximación perturbativa, se encontraba en un espacio fase no-conmutativo, lo que motivo la utilización del mapeo de Darboux, este mapeo permitió construir las observables de la teoría. En el presente capítulo, se utilizará otro enfoque de cuantización, dicho enfoque se basa en la elección de un conjunto completo de observables que conmutan, es decir, a diferencia del mapeo de Darboux en el cual las observables fueron construídas, en este esquema las observables son elegidas directamente a partir de las observables originales.

Antes de empezar a describir el método de manera general que se propone en este capítulo, primero se hará un breve sumario acerca de la descripción Hamiltoniana desde el punto de vista de su estructura simpléctica. En el formalismo Hamiltoniano la descripción de un sistema con  $n$  grados de libertad es determinado por  $2n$  ecuaciones de movimiento. Denotense por  $z^\alpha$  los grados de libertad, donde  $\alpha = 1, 2, \dots, 2n$ . La estructura simpléctica  $J$  asociada con este formalismo define los paréntesis de Poisson

$$\{f, g\} = J^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} \frac{\partial g}{\partial z^\beta}, \quad (6.1)$$

donde, se ha asumido la convención de suma sobre los índices repetidos. Además los paréntesis son reales antisimétricos y lineales. Se sigue de manera inmediata de (6.1), que los paréntesis que satisfacen las variables del sistema definen la matriz simpléctica

$$\{z^\alpha, z^\beta\} = J^{\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha}. \quad (6.2)$$

Hasta este punto no se ha asumido nada acerca de la matriz  $J$ , simplemente que se trata de una matriz real antisimétrica y lineal. El punto clave aquí es introducir estructuras simplécticas no-canónicas. Tomando esto en cuenta, defínase la matriz inversa de la matriz simpléctica para su futura utilización, como:

$$J^{\alpha\gamma} \omega_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha. \quad (6.3)$$

Las ecuaciones de movimiento descritas por el Hamiltoniano  $H(z)$ , en un espacio fase con estructura simpléctica  $J$  están dadas por

$$\dot{z}^\alpha = \{z^\alpha, H(z)\} = J^{\alpha\beta} \frac{\partial H(z)}{\partial z^\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 2n. \quad (6.4)$$

de aquí se deduce inmediatamente que las  $z^\alpha$  contienen únicamente posiciones y momentos. Sin embargo, el punto general de interés son estructuras simplécticas no-canónicas, introducidas a través de los paréntesis de Dirac y estudiar sus posibles representaciones cuánticas dadas diferentes elecciones de bases.

La forma en que se introduce el concepto de potencial simpléctico es a través de la acción

$$S[z(t)] = \int d\tau [A_\alpha(z) \dot{z}^\alpha - H(z)], \quad (6.5)$$

donde, se está asumiendo que dichos potenciales son funciones de las variables del sistema. Por otra parte, tomando variaciones virtuales, se obtiene

$$\delta S[z(t)] = \int d\tau \left[ \frac{\partial A_\alpha(z)}{\partial z^\beta} \dot{z}^\alpha \delta z^\beta + A_\alpha(z) \frac{d\delta z^\alpha}{dt} - \frac{\partial H(z)}{\partial z^\beta} \delta z^\beta \right]. \quad (6.6)$$

Ahora para obtener la estructura simpléctica, considérese la siguiente relación:

$$\frac{d(A_\alpha(z)\delta z^\alpha)}{dt} = \frac{\partial A_\beta(z)}{\partial z^\alpha} \dot{z}^\alpha \delta z^\beta + A_\alpha(z) \frac{d\delta z^\alpha}{dt}, \quad (6.7)$$

despejando el segundo término y sustituyéndolo en la relación (6.6), se sigue que

$$\delta S[z(t)] = \int d\tau \left[ \frac{\partial A_\alpha(z)}{\partial z^\beta} \dot{z}^\alpha \delta z^\beta - \frac{\partial A_\beta(z)}{\partial z^\alpha} \dot{z}^\alpha \delta z^\beta + \frac{d(A_\alpha(z)\delta z^\alpha)}{dt} - \frac{\partial H(z)}{\partial z^\beta} \delta z^\beta \right]. \quad (6.8)$$

Factorizando  $\delta z^\beta$  y observando que se tiene una derivada total, se obtiene

$$\delta S[z(t)] = \int d\tau \left[ \omega_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha - \frac{\partial H(z)}{\partial z^\beta} \right] \delta z^\beta + (A_\alpha(z)\delta z^\alpha) \Big|_{t_i}^{t_f}. \quad (6.9)$$

donde

$$\omega_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta(z) - \partial_\beta A_\alpha(z), \quad (6.10)$$

además se obtienen las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas, esto es

$$\omega_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha = \frac{\partial H(z)}{\partial z^\beta}, \quad (6.11)$$

aquí como se mencionó anteriormente  $\omega$  es la inversa de la matriz simpléctica  $J$ .

Se concluye entonces, que dada una matriz simpléctica arbitraria  $J$  con tan sólo calcular su inversa  $\omega$ , e igualar cada una de las componentes de ésta a través de la ecuación (6.10), se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales para que relacionan los potenciales simplécticos.

Un punto importante a destacar es, que el camino seguido aquí fue ligeramente diferente del camino seguido en el capítulo tres, no obstante, los resultados son exactamente lo mismos. La razón de seguir este camino se debe a que se quiso resaltar el hecho de que el formalismo desarrollado en el capítulo tres, no sólo es útil para Hamiltonianos que son proporcionales a sus constricciones, sino para toda clase de Hamiltonianos, sin importar si estos sean proporcionales a sus constricciones o no.

## 6.2. Cuantización Canónica

Dada un estructura simpléctica, que modele la mecánica clásica de un sistema físico, considérese el álgebra de los observables correspondiente. El proceso de cuantización comienza por encontrar un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y una representación de dicha álgebra, la cual está contenida en el álgebra de operadores autoadjuntos actuando sobre  $\mathcal{H}$ . Una vez identificados, el espacio de Hilbert y la representación del álgebra de observables, la mecánica cuántica del sistema puede llevarse a cabo de múltiples maneras, ya sea con

funciones de onda que evolucionan en el tiempo o con evolución temporal de operadores. Por otra parte, una teoría cuántica admisible debe asociar a cada observable clásico  $f$  un observable cuántico  $\widehat{f}$  (actuando sobre  $\mathcal{H}$  y perteneciendo al álgebra correspondiente con conmutador  $[\widehat{f}, \widehat{g}] = \widehat{f\hat{g}} - \widehat{g\hat{f}}$ ), además debe verificarse que

1. La aplicación  $f \rightarrow \widehat{f}$  es lineal.
2. Si  $f$  es constante, entonces  $\widehat{f}$  debe ser el operador multiplicación (por la constante  $f$ ).
3. Debe haber una correspondencia entre la mecánica clásica y cuántica en el siguiente sentido: Si  $\{f, g\} = h$ , entonces

$$[\widehat{f}, \widehat{g}] = -i\hbar\widehat{\{f, g\}}, \quad (6.12)$$

donde  $\hbar$  es la constante de Planck.

La tercera condición también llamada principio de correspondencia, es quizá la más importante (físicamente) y difícil de satisfacer (matemáticamente). Matemáticamente significa que la no-conmutatividad del álgebra de observables sobre el espacio de Hilbert es una característica de la descripción cuántica.

Por otro parte, es bien sabido que en formulación Hamiltoniana de sistemas dinámicos, que el conjunto de ecuaciones de evolución para las variables del espacio fase, están dadas por

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.13)$$

donde  $H$  es el Hamiltoniano del sistema y  $(q_i, p_i)$  son variables canónicamente conjugadas una a otra en el sentido de los paréntesis de Poisson (de ahí que se le llame cuantización canónica).

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad (6.14)$$

Si el sistema clásico admite la formulación Hamiltoniana previamente mencionada, luego de manera directa se puede obtener, a partir de la descripción clásica la descripción cuántica. La receta fue desarrollada en los tres puntos citados previamente. Según este esquema se tienen que identificar las variables canónicas clásicas con operadores auto-adjuntos en un espacio de Hilbert y los paréntesis de Poisson con conmutadores, es decir, se tiene que cumplir

$$[\widehat{q}_i, \widehat{q}_j] = 0, \quad [\widehat{q}_i, \widehat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = 0. \quad (6.15)$$

Por otra parte, las posiciones y los momentos son cantidades físicas medibles (observables). Además, es bien sabido que para poder encontrar una base de la representación de observables, dichos conmutadores asociados a la representación tienen que ser nulos. La idea fundamental de este hecho es: dado un operador, por ejemplo,  $\widehat{x}_1$  se puede encontrar un estado propio  $|x_1\rangle$  para este, el cual genera el espacio de Hilbert de estados propios,

lo mismo es cierto para  $\hat{x}_2$ . Es bien conocido el hecho de que si dos operadores conmutan, se puede encontrar un estado propio común a ambos operadores, dicho de otro modo se puede formar el estado  $|x_1, x_2\rangle = |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle$ , el cual es estado propio común de  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$ . En el presente contexto, se desea encontrar únicamente bases asociadas a las posiciones ó a los momentos. Para poder llevar a cabo la cuatización en estas bases, se tiene que pedir tanto la relación de completez como la relación de ortogonalidad, las cuales poseen respectivamente las siguientes expresiones

$$\mathbf{1} = \int dx_1 dx_2 |x_1, x_2\rangle \langle x_1, x_2| \quad \langle x_1, x_2 | x'_1, x'_2 \rangle = \delta(x'_1 - x_1) \delta(x'_2 - x_2), \quad (6.16)$$

donde, por razones de simplicidad se está tratando con un espacio bidimensional. Lo mismo puede demostrarse para la base representada en los momentos

$$\mathbf{1} = \int dp_1 dp_2 |p_1, p_2\rangle \langle p_1, p_2| \quad \langle p_1, p_2 | p'_1, p'_2 \rangle = \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2). \quad (6.17)$$

Aquí es donde el hecho de que se halla pedido conmutadores nulos toma relevancia, ya que de no ser nulos estos, la medida asociada a la relación de completez tanto de (6.16) como de (6.17) no podría definirse sin problemas de ordenamiento, así como tampoco los estados propios comunes a ambos observables.

Ahora bien, las relaciones de completez junto con sus relaciones de ortogonalidad, son cruciales para la definición de la representación del álgebra de observables, además del producto punto de estados y los valores esperados de las observables. Considérese lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2) &= \langle x_1, x_2 | \Psi \rangle = \int dx'_1 dx'_2 \langle x_1, x_2 | x'_1, x'_2 \rangle \langle x'_1, x'_2 | \Psi \rangle \\ &= \int dx'_1 dx'_2 \langle x_1, x_2 | x'_1, x'_2 \rangle \Psi(x'_1, x'_2). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Donde, como puede observarse este hecho es relevante para la definición de producto punto y valores esperados de los observables físicos y de la propia función de onda en la representación de las coordenadas. Lo mismo puede demostrarse, para el caso en que la función de onda dependa de los momentos  $\Psi(p_1, p_2)$ .

Hasta este punto, se han desarrollado las funciones de onda en la representación de las coordenadas ó de los momentos, sin embargo, las relaciones (6.16) y (6.17) también pueden relacionar estas dos representaciones a través de una transformada de Fourier, es decir,

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_1 dp_2 e^{\frac{i}{\hbar}(p_1 x_1 + p_2 x_2)} \Psi(p_1, p_2), \quad (6.19)$$

$$\Psi(p_1, p_2) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx_1 dx_2 e^{\frac{i}{\hbar}(p_1 x_1 + p_2 x_2)} \Psi(x_1, x_2). \quad (6.20)$$

Aquí se ha utilizado lo siguiente:

$$\langle x_1, x_2 | p_1, p_2 \rangle = \langle p_1, p_2 | x_1, x_2 \rangle^* = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}(p_1x_1 + p_2x_2)}. \quad (6.21)$$

Por razones de simplicidad se asumirá que se está tratando con el caso estacionario, es decir, las funciones de onda sólo dependerán de las posiciones o de los momentos. Utilizando la relación (6.16), del álgebra (6.15) se puede inferir que la representación se logra a través de la identificación

$$\hat{p}_i \Psi(x_1, x_2) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \Psi(x_1, x_2), \quad \hat{x}_i \Psi(x_1, x_2) = x_i \Psi(x_1, x_2), \quad (6.22)$$

Con estas dos identificaciones se puede construir la ecuación de Schrödinger, una vez hecho esto, ésta sólo dependerá de las posiciones y derivadas de estas para el caso en que se ha elegido la representación en las coordenadas.

Como ejemplo, de la aplicación de la realización (6.22) considérese la partícula libre no-relativista en dos dimensiones, cuyo Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}, \quad (6.23)$$

donde las variables del sistema poseen la estructura algebraica canónica. Elijase la representación en las coordenadas, esto es, la función de onda será  $\Psi(x_1, x_2)$ . En consecuencia, dada la representación (6.22) el Hamiltoniano cuántico tomará la forma siguiente:

$$\hat{H} \Psi(x_1, x_2) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = E \Psi(x_1, x_2). \quad (6.24)$$

donde,  $E$  es la energía del sistema.

Como se mencionó anteriormente, otra posible elección de una base, es considerar la representación en los momentos. Dicha representación tendrá una función de onda de la forma  $\Psi(p_1, p_2)$ . La representación del álgebra de observables es la siguiente:

$$\hat{p}_i \Psi(p_1, p_2) = p_i \Psi(p_1, p_2), \quad \hat{x}_i \Psi(p_1, p_2) = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p_i} \Psi(p_1, p_2). \quad (6.25)$$

De manera directa se puede obtener el Hamiltoniano del sistema, el cual tiene la siguiente forma:

$$\hat{H} \Psi(p_1, p_2) = \left[ \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} \right] \Psi(p_1, p_2) = E \Psi(p_1, p_2). \quad (6.26)$$

Como se puede observar de las dos elecciones de observables anteriores, en principio, parece que se trata de dos teorías cuánticas distintas, sin embargo, como se mencionó anteriormente se puede conectar una representación con otra a través de (6.19) y (6.20). Por lo tanto, lo que parecía en un principio diferente, a través de estas transformadas de Fourier resultan ser la misma teoría cuántica.

## 6.3. Partícula Libre

### 6.3.1. Base $(x_1, p_2)$

En esta sección se empezará a mostrar el método de bases cruzadas. Aquí se propone una elección de base cruzada, luego partiendo de la acción clásica se demuestra que la teoría cuántica resultante de este procedimiento, es equivalente a la de elegir una representación de los operadores cuánticos. Por simplicidad, los cálculos serán realizados en dos dimensiones. Para empezar a mostrar el método se partirá del modelo de la partícula libre no-relativista, además se considerará en lo que sigue de este capítulo que la estructura simpléctica, está dada por

$$\{x_1, x_2\} = \theta, \quad \{p_1, p_2\} = \gamma, \quad \{x_1, p_1\} = 1, \quad \{x_2, p_2\} = 1, \quad (6.27)$$

con  $\theta$  y  $\gamma$  constantes. Esta álgebra es muy ampliamente usada en mecánica planar, como una generalización de un espacio fase no-conmutativo. Por otra parte, en el capítulo cinco se obtuvo esta misma álgebra de manera natural como una consecuencia del modelo de orden superior. Para mostrar el método de bases cruzadas, se considerarán dos modelos: el de la partícula libre no-relativista y la partícula en caída libre. Para el caso de la partícula libre no-relativista sólo se considerarán los momentos conmutativos, por otra parte, para el modelo de la partícula en caída libre serán contempladas otras posibilidades.

El primer caso a considerar, como ya se mencionó anteriormente, es cuando los momentos conmutan. Para este caso la matriz simpléctica está dada por

$$\omega^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.28)$$

con inversa

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

Por otra parte, como se vio en la primera sección de este capítulo, las componentes de esta matriz definen ecuaciones diferenciales para los potenciales simplécticos  $A(z)$ , donde  $z^\alpha = \{x_1, x_2, p_1, p_2\}$ . Explícitamente, las componentes no triviales de esta matriz proporcionan el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{\partial A_1}{\partial p_1} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial A_2}{\partial p_2} - \frac{\partial A_4}{\partial x_2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial A_4}{\partial p_1} - \frac{\partial A_3}{\partial p_2} = \theta. \quad (6.30)$$

Una solución está dada por los potenciales

$$A_1 = p_1, \quad A_2 = p_2, \quad A_3 = -\frac{\theta}{2}p_2 \quad \text{y} \quad A_4 = \frac{\theta}{2}p_1, \quad (6.31)$$

donde, estos potenciales están definidos hasta una transformación de norma. En consecuencia, estos potenciales definen según (6.5), la acción

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ p_1 \dot{x}_1 + p_2 \dot{x}_2 - \frac{\theta}{2} p_2 \dot{p}_1 + \frac{\theta}{2} p_1 \dot{p}_2 - H \right]. \quad (6.32)$$

Un punto importantísimo de esta acción, es que dado que aparecen derivadas temporales en todas las variables del sistema y dado que la estructura de los potenciales simplécticos es no-trivial, se sigue que todas las variables son elevadas a variables de configuración del sistema. Por otra parte, con esta acción se mostrará que dada una elección de una base cruzada, la mecánica cuántica resultante es completamente equivalente a la obtenida de la elección de la representación de operadores cuánticos del álgebra no-canónica. El punto clave de esta equivalencia es, que dada el álgebra (6.27) se puede elegir una base para el conjunto de observables, si y sólo si, los observables conmutan, en el presente contexto esto sólo sucede para el caso de los momentos, sin embargo, bajo una breve inspección del álgebra, se concluye que también se pueden elegir  $x_1$  y  $p_2$  ó  $x_2$  y  $p_1$  como el conjunto completo de observables que conmutan. Una vez elegida la base, lo que sigue es fijarla en la frontera y hacer la variación en las restantes variables del sistema (variables auxiliares), todo esto a nivel de la acción clásica. La variación de la acción, tiene como finalidad obtener las ecuaciones de movimiento para las variables auxiliares. Con las ecuaciones de movimiento, se puede despejar estas variables y sustituirlas en la acción. Una vez realizado esto, el sistema resultante estará descrito únicamente en las variables o sus derivadas temporales elegidas como la base del posible sistema cuántico. Este hecho será crucial ya que, dependiendo de si la variable tiene asociado un término cinético o no, esta proporcionará un momento canónico conjugado asociado a dicha variable. De no contar con un término cinético, la variable sólo jugará el papel de término de potencial. Para justificar lo dicho anteriormente tómese el caso de un oscilador armónico bidimensional, el cual está definido por la siguiente acción Hamiltoniana

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \frac{p_x^2}{2m} - \frac{p_y^2}{2m} - \frac{\kappa}{2} x^2 - \frac{\kappa}{2} y^2 \right]. \quad (6.33)$$

Para este caso considérese las posiciones como la base del sistema cuántico, consecuentemente los momentos serán las variables auxiliares, por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para los momentos están dadas por

$$m\dot{x} = p_x, \quad m\dot{y} = p_y, \quad (6.34)$$

introduciendo los valores de estos momentos en la acción (6.33), se tiene el Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{y}^2 - \frac{\kappa}{2} x^2 - \frac{\kappa}{2} y^2. \quad (6.35)$$



El cual resulta ser el Lagrangiano usual del oscilador armónico bidimensional, por lo tanto, de este Lagrangiano se desprende que bajo este procedimiento, se está construyendo el Lagrangiano de la versión Hamiltoniana en las variables elegidas como la base, para el caso en el que se toman los momentos como base se tiene el Lagrangiano

$$L = \frac{\dot{p}_x^2}{2\kappa} + \frac{\dot{p}_y^2}{2\kappa} - \frac{p_x^2}{2m} - \frac{p_y^2}{2m}, \quad (6.36)$$

el cual luce completamente diferente del Lagrangiano (6.35), sin embargo, si se considera la simetría que posee esta teoría  $p_x \rightarrow x$ ,  $p_y \rightarrow y$  y  $\kappa \rightarrow 1/m$ , se tiene que el Lagrangiano (6.35) es exactamente el mismo que (6.36).

Por otra parte en este ejemplo se encontró dos ecuaciones de movimiento algebraicas y en el caso anterior sólo se tiene una sólo ecuación algebraica, para justificar el por qué se toma sólo la ecuación de movimiento algebraica y se ignora la no-algebraica, nuevamente considérese un oscilador armónico unidimensional que se desplaza en alguna dirección del plano, es decir, se considerará la acción Hamiltoniana

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \frac{p_x^2}{2m} - \frac{p_y^2}{2m} - \frac{\kappa}{2} y^2 \right]. \quad (6.37)$$

Si se consideran las posiciones como la base del sistema, se tiene el Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{y}^2 - \frac{\kappa}{2} y^2. \quad (6.38)$$

En este caso la simetría mencionada anteriormente ya no se cumple, debido a que se suprimió  $x$  de la acción. Si ahora se consideran los momentos como la base del sistema, la acción por estudiar está dada por

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ -\dot{p}_x x - \dot{p}_y y - \frac{p_x^2}{2m} - \frac{p_y^2}{2m} - \frac{\kappa}{2} y^2 \right]. \quad (6.39)$$

Si se calculan las ecuaciones de movimiento de las variables auxiliares, considerando los momentos como las variables físicas, se tiene

$$\dot{p}_x = 0, \quad \dot{p}_y = -\kappa y. \quad (6.40)$$

Ahora se mostrarán las inconsistencias que surgen de tomar las dos ecuaciones de movimiento, es decir, la algebraica y la no-algebraica. Introduciendo estas en la acción el Lagrangiano resultante está dado por

$$L = \frac{\dot{p}_y^2}{2\kappa} - \frac{p_x^2}{2m} - \frac{p_y^2}{2m}, \quad (6.41)$$

si se calculan los momentos se obtiene

$$\Pi_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_x} = 0, \quad \Pi_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_y} = \frac{\dot{p}_y}{\kappa}, \quad (6.42)$$

esto da lugar a una restricción  $\chi_1 = \Pi_x$ . El Hamiltoniano total está dado por

$$H_T = \frac{\kappa}{2}\Pi_y^2 + \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \lambda_1\chi_1, \quad (6.43)$$

Desde el punto de vista variacional la primera de las ecuaciones (6.40), es incorrecta ya que implica que se está fijando en los extremos a  $\dot{p}_x$ , mientras que el principio variacional (6.39) dice que lo que está fijo en los extremos es  $p_x$  y  $p_y$ .

Ahora se considerará la evolución de la restricción. La condición de consistencia da como resultado la segunda restricción  $\chi_2 = p_x$ . El paréntesis de Poisson entre estas dos restricciones es  $\{\chi_1, \chi_2\} = -1$ , lo que implica que se trata de restricciones de segunda clase, como consecuencia el paréntesis de Dirac tiene que ser construido, sin embargo, una vez construido el paréntesis de Dirac este asegura que las restricciones se vuelven cero, dejando el Hamiltoniano total como

$$H_T = \frac{\kappa}{2}\Pi_y^2 + \frac{p_y^2}{2m}. \quad (6.44)$$

Una breve inspección de este Hamiltoniano muestra que el hecho de poseer restricciones de segunda clase, hizo que redujera las variables del espacio fase, lo cual es inconsistente con lo esperado. Ahora se considerará sólo la ecuación (6.39) algebraica de movimiento, es decir, que una vez introducida en la acción, el Lagrangiano resultante está dado por

$$L = \frac{\dot{p}_y^2}{2\kappa} - \dot{p}_x x - \frac{p_x^2}{2m} - \frac{p_y^2}{2m}. \quad (6.45)$$

Nuevamente calcúlense los momentos, los cuales son

$$\Pi_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_x} = -x, \quad \Pi_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_y} = \frac{\dot{p}_y}{\kappa}, \quad P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0, \quad (6.46)$$

estos momentos definen un par de restricciones  $\chi_1 = \Pi_x + x$  y  $\chi_2 = P_x$ , las cuales tienen paréntesis de Poisson diferente de cero, esto implica que la estructura simpléctica estará dada por la estructura de Dirac. El Hamiltoniano canónico está dado por

$$H_C = \Pi_x \dot{p}_x + \Pi_y \dot{p}_y - \frac{\kappa}{2\kappa}\Pi_y^2 + \dot{p}_x x + \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}. \quad (6.47)$$

Ahora se tiene que tomar la  $\chi_1$  restricción como fuerte, con esta consideración se tiene el Hamiltoniano

$$H_C = \frac{\kappa}{2\kappa}\Pi_y^2 + \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}. \quad (6.48)$$

Las restricciones se agregan como multiplicadores de Lagrange para formar el Hamiltoniano total, sin embargo, sólo se tomó el Hamiltoniano canónico ya que una vez construidos los paréntesis de Dirac las restricciones automáticamente se vuelven cero. En

conclusión dado que sólo se posee una sólo ecuación algebraica de movimiento, sólo esta se sustituye en la acción, la restante generará una constricciones en el sistema lo cual permitirá eliminar la variable auxiliar del sistema con dicha constricción, esto dará como resultado el Hamiltoniano esperado, ya que el sistema será consistente con las condiciones de borde del principio variacional.

Para extender lo hecho con el caso del oscilador armónico para el caso en que se tiene una estructura no-canónica, se considerará el modelo de la partícula libre no-relativista, cuyo Hamiltoniano está dado por la expresión

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}, \quad (6.49)$$

Para la base  $(x_1, p_2)$  la acción a considerar está dada por

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ (\dot{x}_1 + \theta \dot{p}_2) p_1 - \dot{p}_2 x_2 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} \right], \quad (6.50)$$

donde, se ha hecho una integración por partes en el segundo y tercer términos de la acción (6.32), esto tiene como finalidad obtener un principio variacional en el cual las variables que quedan fijas son precisamente  $(x_1, p_2)$ . Por otra parte, la derivada total puede ser eliminada ya que no contribuye a la dinámica del sistema.

Ahora tómesese la variación de esta acción en la viaribles  $x_2$  y  $p_1$ . La finalidad de tomar la variación es obtener las ecuaciones de movimiento, dichas ecuaciones están dadas por

$$p_1 = m(\dot{x}_1 + \theta \dot{p}_2) \quad y \quad \dot{p}_2 = 0. \quad (6.51)$$

El punto clave aquí es que dadas las ecuaciones de movimiento, se puede despejar las variables auxilires del sistema (para esta base las variables auxilires son  $x_2$  y  $p_1$ ), y con ello dejar el sistema escrito en términos sólo de las variables elegidas como la base y derivadas temporales de estas variables. Sin embargo, de estas dos ecuaciones se desprende que existe una ecuación algebraica de movimiento para  $p_1$  pero no existe para  $x_2$ , en consecuencia,  $x_2$  no podrá ser eliminada de la acción (6.50) algebraicamente. No obstante, se mostrará que dicha variable puede ser eliminada, si se considera a  $\dot{p}_2$  diferente de cero, esto es posible ya que como se mostrará esta variable define una constricción en el sistema. Sustituyendo  $p_1$  en la acción (6.50), se sigue que el Lagrangiano resultante está dado por

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1 + \theta \dot{p}_2)^2 - \dot{p}_2 x_2 - \frac{p_2^2}{2m}. \quad (6.52)$$

Además tal como se mencionó anteriormente el último término de este Lagrangiano no definirá ningún momento, en consecuencia este será únicamente término de potencial. De este Lagrangiano se puede apreciar que los momentos pueden ser calculados de la

manera usual, es decir, esto puede ser logrado tan sólo con tomar las derivadas parciales del Lagrangiano con respecto a las derivadas temporales de las variables. Explícitamente, se tiene

$$\Pi_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m(\dot{x}_1 + \theta \dot{p}_2), \quad \Pi_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0 \quad \text{y} \quad \Pi_4 = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_2} = m\theta(\dot{x}_1 + \theta \dot{p}_2) - x_2. \quad (6.53)$$

Aquí se ha considerado el momento asociado con  $x_2$ , ya que esta es una variable del sistema. Por otra parte, de estos momentos se puede ver que se trata de constricciones del sistema, es decir, estas son de la forma

$$\chi_2 = \Pi_2 \quad \text{y} \quad \chi_4 = \Pi_4 - \theta \Pi_1 + x_2. \quad (6.54)$$

Del Lagrangiano (6.52), puede observarse que de no haber tomado diferente de cero  $\dot{p}_2$ , el momento asociado a esta variable y el asociado a  $x_2$  no habrían existido y en consecuencia tampoco las constricciones (6.54) asociadas. Estas constricciones serán cruciales para eliminar las variables auxiliares como será mostrado más adelante, además este hecho será muy recurrente en las diferentes elecciones de bases. Por otro lado, como se vio en el capítulo uno, una vez obtenidas las constricciones lo que sigue es clasificarlas. La importancia de la clasificación radica en la estructura simpléctica que estas definen. Para las constricciones encontradas el paréntesis de Poisson está dado por

$$\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} = -\epsilon_{\alpha\beta}, \quad \text{donde,} \quad \alpha, \beta = 2, 4. \quad (6.55)$$

consecuentemente de este paréntesis, se concluye que se tratan de constricciones de segunda clase. Más adelante se construirán los paréntesis de Dirac asociados a estas constricciones.

Antes de construir los paréntesis de Dirac primero se construirá el Lagrangiano y el Hamiltoniano del sistema. Para el presente sistema, el Lagrangiano y el Hamiltoniano canónico en términos de los momentos, son respectivamente

$$L = \frac{\Pi_1^2}{2m} - \dot{p}_2 x_2 - \frac{p_2^2}{2m}, \quad (6.56)$$

y

$$H_c = \Pi_1 \dot{x}_1 + \Pi_4 \dot{p}_2 - \frac{\Pi_1^2}{2m} + \dot{p}_2 x_2 + \frac{p_2^2}{2m}. \quad (6.57)$$

Haciendo fuerte la segunda restricción (6.54), se obtiene  $x_2 = \theta \Pi_1 - \Pi_4$ . Ahora con esta relación se sustituye en (6.57). Dado este hecho, el Hamiltoniano se reduce a:

$$H_c = \frac{\Pi_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}. \quad (6.58)$$

En consecuencia, el Hamiltoniano total es

$$H_T = \frac{\Pi_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \lambda_2 \chi_2 + \lambda_4 \chi_4. \quad (6.59)$$

Aquí puede destacarse el hecho de que el sistema final sólo depende de una las variables elegidas como base, no obstante, como se mostrará mas adelante la realización cuántica del sistema proporcionará una derivada parcial con respecto a  $x_2$ , lo cual deja el sistema en términos de las variables de la base ó al menos a través de una derivada de estas. Un punto clave en la obtención del Hamiltoniano, fue la existencia de las constricciones, esto se siguió de tomar  $\dot{p}_2$  diferente de cero. Por otra parte, con el Hamiltoniano total se puede calcular la evolución de las constricciones, sin embargo, esta evolución únicamente determina los multiplicadores de Lagrange, es decir, ya no existen más constricciones. Para este caso los mutiplicadores tienen los valores  $\lambda_2 = p_2/m$  y  $\lambda_4 = 0$ . Ahora bien, dado que el paréntesis de Poisson resultó ser no-nulo, se trata de constricciones de segunda clase, por lo cual se tienen que construir los paréntesis de Dirac asociados a estas constricciones, éstos fueron definidos en el capítulo uno. Para el sistema bajo estudio estos paréntesis tienen la forma

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \chi_2\}\{\chi_4, B\} + \{A, \chi_4\}\{\chi_2, B\}, \quad (6.60)$$

donde, se ha tomado la inversa de (6.55) para obtener la forma explícita de estos paréntesis.

Indentificando las variables del sistema, con  $A$  y  $B$  se llega a que los únicos paréntesis no-triviales están dados por

$$\{x_1, x_2\}_D = \theta, \quad \{x_2, p_2\}_D = 1, \quad \{x_1, \Pi_1\}_D = 1, \quad \{p_2, \Pi_4\}_D = 1. \quad (6.61)$$

Sin embargo, dado que se está tratando con un sistema que contiene constricciones, estas se tienen que considerar en la teoría. En un principio la teoría inicial contaba con los grados de libertad  $(x_1, x_2, p_2, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_4)$ , entonces dadas las constricciones estos grados de libertad se reducen a  $(x_1, p_2, \Pi_1, \Pi_4)$ , es decir, haciendo fuertes las constricciones se ha efectuado esta reducción del espacio fase. Como una consecuencia de hacer fuertes las constricciones, resulta que dos de los paréntesis son redundates, explícitamente los únicos paréntesis que sobreviven al momento de tomar fuertes las constricciones son

$$\{x_1, \Pi_1\}_D = 1, \quad \{p_2, \Pi_4\}_D = 1. \quad (6.62)$$

Desde luego, el paréntesis de Dirac entre  $x_1$  y  $p_2$  es cero, esto es consistente con el hecho de que es el conjunto completo de observables. La consecuencia que se sigue directamente de estos paréntesis es que la cuantización canónica puede ser implementada. Estrictamente se tiene la identificación

$$\hat{\Pi}_1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \hat{\Pi}_4 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Consecuentemente la teoría cuántica que resulta de tal identificación es

$$\hat{H}\Psi(x_1, p_2) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x_1, p_2)}{\partial x_1^2} + \frac{p_2^2}{2m} \Psi(x_1, p_2) = E\Psi(x_1, p_2). \quad (6.63)$$

Como se mencionó anteriormente, una vez obtenido el Hamiltoniano partiendo de la acción clásica, lo único que resta es representar los momentos bajo la acción sobre la base. La cuantización por tanto se lleva de la manera usual. Otro punto importante a notar, es que las constricciones ya no aparecen a la teoría cuántica final, esto se debe a que en el esquema de Dirac las constricciones son cero tanto como constricciones clásicas como cuánticas  $\widehat{\chi}_2 = 0$  y  $\widehat{\chi}_4 = 0$ , una vez construido el paréntesis de Dirac como la estructura simpléctica de la teoría.

Antes de elegir otra base, se relizará la cuantización del sistema pero tomando una realización del álgebra de conmutadores. Esto tiene como finalidad el contrastar los dos métodos. El álgebra de conmutadores de la estructura canónica (6.27), está dada por

$$[\widehat{x}_1, \widehat{x}_2] = i\hbar\theta, \quad [\widehat{p}_1, \widehat{p}_2] = 0, \quad [\widehat{x}_1, \widehat{p}_1] = [\widehat{x}_2, \widehat{p}_2] = i\hbar, \quad (6.64)$$

donde, se han tomado los momentos conmutativos. La elección de base será la misma, es decir,  $x_1$  y  $p_2$ . Por lo tanto, en analogía con el esquema de cuantización canónico, dado que se ha elegido la base  $x_1$  y  $p_2$ . La función de onda dependerá de estas variables  $\Psi(x_1, p_2)$ , donde ahora el momento de la teoría inicial juega el papel de coordenada, esto ya se había mencionado cuando se dijo que dado el hecho de que los cuatro potenciales hubieran sido diferentes de cero, eleva a todas las variables del sistema a variables de configuración, por tal motivo, las variables que en el sistema original jugaban el papel de momentos, en el nuevo sistema ya no lo son más. Elegida la base, la representación que satisfacen los operadores cuánticos, es la siguiente:

$$\begin{aligned} \widehat{x}_1 \Psi(x_1, p_2) &= x_1 \Psi(x_1, p_2). \\ \widehat{x}_2 \Psi(x_1, p_2) &= -i\hbar\theta \frac{\partial}{\partial x_1} \Psi(x_1, p_2) + i\hbar \frac{\partial}{\partial p_2} \Psi(x_1, p_2). \\ \widehat{p}_1 \Psi(x_1, p_2) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1} \Psi(x_1, p_2). \\ \widehat{p}_2 \Psi(x_1, p_2) &= p_2 \Psi(x_1, p_2). \end{aligned} \quad (6.65)$$

Por otra parte, se sigue que la ecuación de Schödinger dada esta realización, toma la siguiente forma:

$$\widehat{H} \Psi(x_1, p_2) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x_1, p_2)}{\partial x_1^2} + \frac{p_2^2}{2m} \Psi(x_1, p_2) = E \Psi(x_1, p_2). \quad (6.66)$$

Como puede observarse, la teoría resultante de la realización del álgebra de conmutadores (6.65) es exactamente la misma que la teoría cuántica resultante de la acción clásica. En conclusión, se ha mostrado que los dos métodos son completamente equivalentes a nivel cuántico. Otro punto importante a destacar es que los efectos de la no-conmutatividad no son visibles, dada la simplicidad del sistema.

### 6.3.2. Base $(x_2, p_1)$

La mayor parte del método propuesto en este capítulo ha sido ya mostrada, sin embargo, la base elegida en la sección anterior no es la única posible. Para esta sección se elige la base  $(x_2, p_1)$ . Los pasos a seguir serán los mismos de la sección anterior. Con esto en mente, la acción apropiada es

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ (\dot{x}_2 - \theta \dot{p}_1) p_2 - \dot{p}_1 x_1 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} \right], \quad (6.67)$$

ya que para esta se tienen fijados en los extremos de la base  $(x_2, p_1)$ . Ahora bien se tienen que calcular las ecuaciones de movimiento, sin embargo, de estas ecuaciones sólo se podrá utilizar la que tenga una expresión algebraica, la ecuación restante se ignorará. No obstante, la ecuación ignorada generará constricciones en el sistema. Tomando la variación en  $x_1$  y  $p_2$ , se tiene

$$p_2 = m(\dot{x}_2 - \theta \dot{p}_1) \quad \text{y} \quad \dot{p}_1 = 0. \quad (6.68)$$

De manera que por lo discutido anteriormente, se considerará que  $\dot{p}_1$  es diferente de cero y se hará la sustitución de  $p_2$  en la acción (6.67). Bajo esta consideración, se obtiene el Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_2 - \theta \dot{p}_1)^2 - \dot{p}_1 x_1 - \frac{p_1^2}{2m}. \quad (6.69)$$

Los momentos pueden ser calculados de manera directa. Dicho cálculo da como resultado

$$\Pi_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0, \quad \Pi_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m(\dot{x}_2 - \theta \dot{p}_1) \quad \text{y} \quad \Pi_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_1} = -m\theta(\dot{x}_2 - \theta \dot{p}_1) - x_1. \quad (6.70)$$

Como se mencionó anteriormente, el hecho de que se haya tomado  $\dot{p}_1$  diferente de cero es lo que originó la existencia de los momentos  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ . Tal como se anticipó, estos momentos definen las constricciones

$$\chi_1 = \Pi_1 \quad \text{y} \quad \chi_3 = \Pi_3 + \theta \Pi_2 + x_1, \quad (6.71)$$

cuyo paréntesis de Poisson está dado por  $\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} = -\epsilon_{\alpha\beta}$ , donde los índices toman únicamente los dos valores  $\alpha, \beta = 1, 3$ . De aquí se sigue que la forma de los paréntesis de Dirac está dada por

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \chi_1\}\{\chi_3, B\} + \{A, \chi_3\}\{\chi_1, B\}. \quad (6.72)$$

Antes de calcular los paréntesis de las variables del sistema, primero se construirá el Lagrangiano y el Hamiltoniano, los cuales en términos de los momentos son respectivamente

$$L = \frac{\Pi_2^2}{2m} - \dot{p}_1 x_1 - \frac{p_1^2}{2m}, \quad (6.73)$$

70  
y

$$H_c = \Pi_2 \dot{x}_2 + \Pi_3 \dot{p}_1 - \frac{\Pi_2^2}{2m} + \dot{p}_1 x_1 + \frac{p_1^2}{2m}. \quad (6.74)$$

Nuevamente tomando en cuenta la relación que define  $\Pi_3$ , se obtiene  $x_1 = -\Pi_3 - \theta\Pi_2$ , en consecuencia, el Hamiltoniano canónico toma la forma

$$H_c = \frac{\Pi_2^2}{2m} + \frac{p_1^2}{2m}. \quad (6.75)$$

El Hamiltoniano total, se forma únicamente agregando las constricciones como multiplicadores de Lagrange, este tiene la forma

$$H_T = \frac{\Pi_2^2}{2m} + \frac{p_1^2}{2m} + \lambda_1 \chi_1 + \lambda_3 \chi_3. \quad (6.76)$$

La evolución de las constricciones de igual manera, que en el caso anterior únicamente determinan los multiplicadores de Lagrange, para este caso están dados por  $\lambda_1 = p_1/m$  y  $\lambda_3 = 0$ . Los paréntesis de Dirac, por otra parte tienen la estructura (6.72), de lo cual se sigue que los únicos paréntesis no-nulos son

$$\{x_1, x_2\}_D = \theta, \quad \{x_1, p_1\}_D = 1, \quad \{x_2, \Pi_2\}_D = 1, \quad \{p_1, \Pi_3\}_D = 1, \quad (6.77)$$

Nuevamente se tiene el mismo hecho que en el caso anterior, por lo cual en un principio el espacio fase constaba de  $(x_1, x_2, p_1, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$  y una vez que se consideran las constricciones como fuertes, este se reduce a  $(x_2, p_1, \Pi_2, \Pi_3)$ , con paréntesis de Dirac

$$\{x_2, p_1\}_D = 0, \quad \{x_2, \Pi_2\}_D = 1, \quad \{p_1, \Pi_3\}_D = 1. \quad (6.78)$$

Por lo tanto, llevando a cabo las identificaciones cuánticas, se sigue de manera directa la cuantización.

En este caso también se encontrará una realización para el álgebra de conmutadores de la estructura canónica (6.64). Esta nueva realización está dada por

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 \Psi(x_2, p_1) &= i\hbar\theta \frac{\partial}{\partial x_2} \Psi(x_2, p_1) + i\hbar \frac{\partial}{\partial p_1} \Psi(x_2, p_1). \\ \hat{x}_2 \Psi(x_2, p_1) &= x_2 \Psi(x_2, p_1). \\ \hat{p}_1 \Psi(x_2, p_1) &= p_1 \Psi(x_2, p_1). \\ \hat{p}_2 \Psi(x_2, p_1) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2} \Psi(x_2, p_1). \end{aligned} \quad (6.79)$$

La ecuación de Schrödinger dada esta base es:

$$\hat{H} \Psi(x_2, p_1) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x_2, p_1)}{\partial x_2^2} + \frac{p_1^2}{2m} \Psi(x_2, p_1) = E \Psi(x_2, p_1). \quad (6.80)$$



Consecuentemente al igual que la base  $x_1, p_2$ , se tiene que los resultados obtenidos de los dos esquemas son equivalentes a nivel cuántico. Puede verse además que las teorías cuánticas resultantes de la elección de las dos bases, son muy parecidas. Esto se debe fundamentalmente, a que el hamiltoniano de la partícula libre posee una simetría bien definida, dicho hamiltoniano es invariante ante el intercambio de momentos, es decir, se puede cambiar  $p_1$  por  $p_2$  y el Hamiltoniano preserva su forma, esto también es cierto si se multiplica por un signo negativo ambos momentos, lo mismo se verifica para el sistema cuántico.

### 6.3.3. Base $(p_1, p_2)$

Por último para este Hamiltoniano se elegirá la base  $p_1$  y  $p_2$ . Otras elecciones de base ya no son posibles, ya que no existen más pares de variables que conmuten. Para este caso también pueden tomarse las coordenadas conmutativas y los momentos no-conmutativos, sin embargo, con este Hamiltoniano ya no se harán estos casos, esto se hará para el caso de la partícula en caída libre. Para esta base la acción está dada por la siguiente expresión:

$$S = \int d\tau \left[ -\dot{p}_1 x_1 - \dot{p}_2 x_2 - \frac{\theta}{2} p_2 \dot{p}_1 + \frac{\theta}{2} p_1 \dot{p}_2 - H \right]. \quad (6.81)$$

Como en los dos casos anteriores, la variación tiene que ser tomada en las variables auxiliares, una vez elegida la base, con lo cual la variación tiene que ser hecha con respecto a  $x_1$  y  $x_2$ . Esta variación proporciona las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = 0, \quad (6.82)$$

Aquí puede verse que no existe ninguna ecuación algebraica para las variables auxiliares. Por lo tanto, para tener una teoría consistente se tienen que tomar diferente de cero las dos ecuaciones de movimiento. Por lo visto en los dos casos anteriores, esta consideración generará constricciones. En vista de esto se obtiene el Lagrangiano

$$L = -\dot{p}_1 x_1 - \dot{p}_2 x_2 - \frac{\theta}{2} p_2 \dot{p}_1 + \frac{\theta}{2} p_1 \dot{p}_2 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m}, \quad (6.83)$$

De este Lagrangiano puede verse que depende de todas las variables del sistema, por consecuencia, tendrá momentos asociados a todas las variables. Estos momentos son

$$\Pi_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0, \quad \Pi_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0, \quad \Pi_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_1} = -x_1 - \frac{\theta}{2} p_2 \quad \text{y} \quad \Pi_4 = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_2} = -x_2 + \frac{\theta}{2} p_1. \quad (6.84)$$

A diferencia de los dos casos anteriores, estos momentos definen cuatro constricciones (recuérdese que en los casos anteriores sólo se tenían dos constricciones), las cuales tienen

la forma

$$\chi_1 = \Pi_1, \quad \chi_2 = \Pi_2, \quad \chi_3 = \Pi_3 + x_1 + \frac{\theta}{2}p_2 \quad \text{y} \quad \chi_4 = \Pi_4 + x_2 - \frac{\theta}{2}p_1, \quad (6.85)$$

los paréntesis no-nulos entre estas constricciones son

$$\{\chi_1, \chi_3\} = -1, \quad \{\chi_2, \chi_4\} = -1, \quad \{\chi_3, \chi_4\} = \theta. \quad (6.86)$$

Por otra parte, el Lagrangiano en términos de los momentos toma la forma

$$L = \Pi_3\dot{p}_1 + \Pi_4\dot{p}_2 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m}, \quad (6.87)$$

consecuentemente el Hamiltoniano total

$$H_T = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \lambda_1\chi_1 + \lambda_2\chi_2 + \lambda_3\chi_3 + \lambda_4\chi_4. \quad (6.88)$$

Si se toma la evolución de la constricciones, se tiene bajo la condición de consistencia que estas determinan los multiplicadores de Lagrange, concretamente tienen los valores  $\lambda_1 = p_1/m$ ,  $\lambda_2 = p_2/m$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ . Ahora bien, de la no-nulidad del  $\det\{\chi_\alpha, \chi_\beta\}$  se sigue que se trata de constricciones de segunda clase, por lo cual se tiene que construir los paréntesis de Dirac, los cuales tienen la forma definida en el capítulo uno, con  $C^{\alpha\beta}$  como

$$C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.89)$$

De manera explícita los paréntesis de Dirac están dados por la expresión

$$\begin{aligned} \{A, B\}_D &= \{A, B\} - \theta\{A, \chi_1\}\{\chi_2, B\} + \theta\{A, \chi_2\}\{\chi_1, B\} - \{A, \chi_1\}\{\chi_3, B\} \\ &+ \{A, \chi_3\}\{\chi_1, B\} - \{A, \chi_2\}\{\chi_4, B\} + \{A, \chi_4\}\{\chi_2, B\} \end{aligned} \quad (6.90)$$

De los paréntesis (6.90) se deduce bajo la identificación de cada una de las variables del sistema con  $A$  y  $B$ , que los únicos paréntesis no-nulos de Dirac son:

$$\{x_1, x_2\}_D = \theta, \quad \{x_1, p_1\}_D = \{x_2, p_2\}_D = \{p_1, \Pi_3\}_D = \{p_2, \Pi_4\}_D = 1. \quad (6.91)$$

Nuevamente como en los casos anteriores se van a tomar en cuenta las constricciones fuertes, por lo que con esto se concluye que la cuantización canónica se realizará de manera directa, es decir, el espacio fase estaba constituido por  $(x_1, x_2, p_1, p_2, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$ , una vez tomadas las constricciones fuertes, este se reduce a  $(p_1, p_2, \Pi_3, \Pi_4)$ . Este espacio fase reducido tiene paréntesis de Dirac canónicos

$$\{p_1, p_2\}_D = 0, \quad \{p_1, \Pi_3\}_D = \{p_2, \Pi_4\}_D = 1. \quad (6.92)$$

Sin embargo, el Hamiltoniano resultante no depende de ninguno de los momentos  $(\Pi_3, \Pi_4)$ , por lo cual únicamente se trató de un número positivo.

Para el caso de esta base la realización del álgebra de conmutadores (6.64) está dada por

$$\begin{aligned}\widehat{x}_1\Psi(p_1, p_2) &= i\hbar\frac{\partial\Psi(p_1, p_2)}{\partial p_1} - \frac{\theta}{2}p_2\Psi(p_1, p_2). \\ \widehat{x}_2\Psi(p_1, p_2) &= i\hbar\frac{\partial\Psi(p_1, p_2)}{\partial p_2} + \frac{\theta}{2}p_1\Psi(p_1, p_2). \\ \widehat{p}_1\Psi(x_1, p_2) &= p_1\Psi(x_1, p_2). \\ \widehat{p}_2\Psi(x_1, p_2) &= p_2\Psi(x_1, p_2).\end{aligned}\tag{6.93}$$

Se sigue que la ecuación de Schödinger dada esta base, toma la siguiente forma:

$$\widehat{H}\Psi(p_1, p_2) = \left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}\right)\Psi(p_1, p_2) = E\Psi(p_1, p_2).\tag{6.94}$$

A manera de resumen, se puede decir que las tres bases tratadas aquí coinciden completamente con la realización del álgebra de conmutadores a nivel cuántico. Además puede observarse que la no-conmutatividad no tuvo gran efecto en el sistema aquí tratado, esto se debe principalmente a que el sistema tratado era muy simple, además de que dicho sistema sólo dependía de los momentos y estos se consideraron conmutativos, se puede mostrar que los efectos de la no-conmutatividad son más evidentes si se consideran los momentos no-conmutativos, sin embargo, este caso ya no será tratado.

En la próxima sección se tratará con un sistema más complejo, con este sistema se considerarán otras posibilidades no tratadas en este sistema. En este modelo los efectos de la no-conmutatividad serán más evidentes.

## 6.4. Partícula en Caída Libre

### 6.4.1. Base $(x_1, p_2)$

Como se mostró en las secciones anteriores los efectos de la no-conmutatividad, en realidad no fueron observados debido a la simplicidad del modelo considerado. Ahora se abordará el formalismo desarrollado en las secciones anteriores, para el caso de una partícula en caída libre. Este modelo mostrará evidencias explícitas de la no-conmutatividad. Por otro lado, es bien sabido que el Hamiltoniano para este modelo está dado por la expresión

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + mgx_2.\tag{6.95}$$

Para este Hamiltoniano se empezará con el caso en que los momentos conmutan. Bajo esta consideración la acción a tratar será la misma dada por la ecuación (6.49). Aquí también se considerarán las tres bases del caso de la partícula libre, salvo que a diferencia de este caso, también se considerarán las coordenadas conmutativas, esto se abordará en la próxima sección. Todo lo hecho para el anterior caso se puede utilizar en este caso, ya que las ecuaciones de movimiento se pueden obtener de las mismas acciones que para el caso de la partícula libre. Esto puede ser hecho con tan sólo considerar el Hamiltoniano aquí propuesto. Con esto en mente la acción a estudiar está dada por

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ (\dot{x}_1 + \theta \dot{p}_2) p_1 - \dot{p}_2 x_2 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} - mgx_2 \right], \quad (6.96)$$

Como se ha mostardo reiteradamente, ahora se tienen que obtener las ecuaciones de movimiento, si estas proporcionan ecuaciones algebraicas que involucren las variables auxiliares, estas ecuaciones permitirán eliminar dichas variables de la acción, de otra manera definirán constricciones en el sistema; estas también ayudarán a eliminar estas variables. Para encontrar las ecuaciones de movimiento tómesese la variación en  $x_2$  y  $p_1$ , al hacer esto se tienen las ecuaciones

$$p_1 = m(\dot{x}_1 + \theta \dot{p}_2) \quad \text{y} \quad \dot{p}_2 = -mg. \quad (6.97)$$

De estas dos ecuaciones se desprende, que se cuenta con una sola ecuación algebraica de movimiento, específicamente sólo se cuenta con la ecuación relativa a  $p_1$ , pero no existe una para  $x_2$ , en consecuencia,  $x_2$  no podrá ser eliminada de la acción (6.96) de manera algebraica. Por lo pronto, considérese que  $\dot{p}_2$  es diferente de  $-mg$ . Sustituyendo  $p_1$  en la acción (6.96), se sigue que el Lagrangiano está dado por

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1 + \theta \dot{p}_2)^2 - \dot{p}_2 x_2 - \frac{p_2^2}{2m} - mgx_2. \quad (6.98)$$

Aquí como en los casos anteriores el hecho de no tomar la ecuación no algebraica, es lo que propiciará la existencia de los momentos asociados a las restantes variables auxiliares que no poseían ecuaciones algebraicas. Concretamente este Lagrangiano tiene asociados los momentos

$$\Pi_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m(\dot{x}_1 + \theta \dot{p}_2), \quad \Pi_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0, \quad \text{y} \quad \Pi_4 = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_2} = m\theta(\dot{x}_1 + \theta \dot{p}_2) - x_2. \quad (6.99)$$

Estos momentos definen las constricciones

$$\chi_2 = \Pi_2 \quad \text{y} \quad \chi_4 = \Pi_4 - \theta \Pi_1 + x_2. \quad (6.100)$$

Lo que sigue es calcular el paréntesis entre las constricciones, sin embargo, estas son exactamente las mismas que para el caso de la partícula libre con esta misma base. Por consecuencia, los paréntesis de Dirac son idénticos a ese caso. Para tal caso se obtuvo

$$\{x_1, p_2\}_D = 0, \quad \{x_1, \Pi_1\}_D = 1, \quad \{p_2, \Pi_4\}_D = 1, \quad (6.101)$$

donde, se tomarón las constricciones fuertes para eliminar los grados de libertad redundantes y con esto reducir el número de paréntesis no-triviales. No obstante, aquí se incluyo el paréntesis entre las variables de la base, esto con motivo de resaltar el hecho de que estas bajo el paréntesis de Dirac siguen conmutando, lo cual es consistente con el hecho de que forman un conjunto completo de observables. Más adelante con esta álgebra se mostrará la cuantización del sistema.

Por otro lado, el Lagrangiano en términos de los momentos está dado por

$$L = \frac{\Pi_1^2}{2m} - \dot{p}_2 x_2 - \frac{p_2^2}{2m} - mgx_2. \quad (6.102)$$

El Hamiltoniano canónico, se sigue de manera directa

$$H_c = \Pi_1 \dot{x}_1 + \Pi_4 \dot{p}_2 - \frac{\Pi_1^2}{2m} + \dot{p}_2 x_2 + \frac{p_2^2}{2m} + mgx_2. \quad (6.103)$$

Haciendo fuerte la segunda de las constricciones se tiene,  $x_2 = \theta\Pi_1 - \Pi_4$ , además considerando  $\dot{x}_1 = \Pi_1/m - \theta\dot{p}_2$ . Se deduce que el Hamiltoniano canónico es

$$H_c = \frac{\Pi_1^2}{2m} + mg(\theta\Pi_1 - \Pi_4) + \frac{p_2^2}{2m}. \quad (6.104)$$

Ahora bien, dada la existencia de constricciones el Hamiltoniano total está dado por

$$H_T = \frac{\Pi_1^2}{2m} + mg(\theta\Pi_1 - \Pi_4) + \frac{p_2^2}{2m} + \lambda_2\chi_2 + \lambda_4\chi_4. \quad (6.105)$$

Con este Hamiltoniano se puede explorar la evolución de las constricciones para encontrar posibles constricciones secundarias. Sin embargo, la evolución de estas sólo fija los valores de los multiplicadores de Lagrange, de tal manera que los valores de dichos multiplicadores son  $\lambda_2 = p_2/m$  y  $\lambda_4 = mg$ . La cuantización del sistema es ahora inmediata como una realización del álgebra (6.101), con esta realización se obtiene (6.106). Por otra parte, si se realiza la cuatización usando una realización del álgebra (6.64) en la base  $(x_1, p_2)$  se obtiene el mismo resultado. Es decir, que de las dos realizaciones resulta

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x_1, p_2)}{x_1^2} - imgh \left( \theta \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial p_2} \right) \Psi(x_1, p_2) + \frac{p_2^2}{2m} \Psi(x_1, p_2) = E\Psi(x_1, p_2). \quad (6.106)$$

Como se dijo anteriormente los efectos de la no-conmutatividad surgen en este operador Hamiltoniano. Esto puede verse en el segundo término del operador, ya que este posee una dependencia del parámetro de no-conmutatividad.

### 6.4.2. Base $(x_2, p_1)$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, la acción apropiada para la base  $(x_2, p_1)$  es

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ (\dot{x}_2 - \theta\dot{p}_1)p_2 - \dot{p}_1 x_1 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} - mgx_2 \right]. \quad (6.107)$$

Tomando la variación en  $x_1$  y  $p_2$ , se tiene

$$p_2 = m(\dot{x}_2 - \theta\dot{p}_1) \quad \text{y} \quad \dot{p}_1 = 0. \quad (6.108)$$

De igual manera que en el caso anterior se considerará que  $\dot{p}_1$  es diferente de cero y se hará la sustitución de  $p_2$  en la acción (6.107). Bajo esta premisa, se obtiene el Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_2 - \theta\dot{p}_1)^2 - \dot{p}_1 x_1 - \frac{p_1^2}{2m} - mgx_2. \quad (6.109)$$

Con los momentos

$$\Pi_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0, \quad \Pi_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m(\dot{x}_2 - \theta\dot{p}_1) \quad \text{y} \quad \Pi_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_1} = -m\theta(\dot{x}_2 - \theta\dot{p}_1) - x_1. \quad (6.110)$$

Nuevamente como en los casos anteriores estos momentos definen constricciones, las cuales están dadas por

$$\chi_1 = \Pi_1 \quad \text{y} \quad \chi_3 = \Pi_3 + \theta\Pi_1 + x_1. \quad (6.111)$$

Este par de constricciones son exactamente las mismas que las resultantes del tratamiento de la partícula libre bajo el estudio de la misma base, en consecuencia, los paréntesis de Dirac poseen la misma estructura. Aquí también deben tomarse las constricciones fuertes, lo cual reduce los paréntesis de Dirac a los canónicos, por lo cual la cuantización usual puede ser implementada.

Por otro lado, el Lagrangiano y el Hamiltoniano en términos de los momentos  $\Pi_2$  y  $\Pi_3$  son

$$L = \frac{\Pi_2^2}{2m} - \dot{p}_1 x_1 - \frac{p_1^2}{2m} + mgx_2, \quad (6.112)$$

el Hamiltoniano

$$H_c = \Pi_2 \dot{x}_2 + \Pi_3 \dot{p}_1 - \frac{\Pi_2^2}{2m} + \dot{p}_1 x_1 + \frac{p_1^2}{2m} + mgx_2. \quad (6.113)$$

Para este caso también se hace la segunda restricción fuerte, donde se obtiene  $x_1 = -\Pi_3 - \theta\Pi_2$ , además se tiene que considerar  $\dot{x}_2 = \Pi_2/m + \theta\dot{p}_1$ . Haciendo estas sustituciones el segundo y tercer término del Hamiltoniano se anulan, reduciendo el Hamiltoniano a

$$H_c = \frac{\Pi_2^2}{2m} + \frac{p_1^2}{2m} + mgx_2. \quad (6.114)$$

El hamiltoniano total, por otro lado,

$$H_T = \frac{\Pi_2^2}{2m} + \frac{p_1^2}{2m} + mgx_2 + \lambda_1 \chi_1 + \lambda_4 \chi_4. \quad (6.115)$$

En suma, se mostró que dada una elección de base cruzada, la teoría cuántica resultante de fijar la base en la acción clásica es completamente equivalente a la teoría obtenida de la realización del álgebra de conmutadores. Concretamente para la base elegida en esta sección las teorías cuánticas resultantes, están dadas por

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x_2, p_1)}{x_2^2} + \frac{p_1^2}{2m} \Psi(x_2, p_1) + mgx_2 \Psi(x_2, p_1) = E \Psi(x_2, p_1). \quad (6.116)$$

De la teoría resultante, puede verse que los efectos de la no-conmutatividad son nulos, ya que se trata de la teoría cuántica usual de la partícula en caída libre. Los efectos son más evidentes en la base anterior, en el cual la no-conmutatividad se refleja en derivadas extras en la teoría final.

### 6.4.3. Base $(p_1, p_2)$

Como última base para los momentos conmutativos se tratará con  $p_1$  y  $p_2$ . Se mostrará que para esta elección no existe una sólo ecuación algebraica de movimiento, al igual que en la partícula libre, no obstante, por lo expuesto anteriormente existirán constricciones debido a este hecho. Para esta base una acción es

$$S = \int d\tau \left[ -\dot{p}_1 x_1 - \dot{p}_2 x_2 - \frac{\theta}{2} p_2 \dot{p}_1 + \frac{\theta}{2} p_1 \dot{p}_2 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} - mgx_2 \right]. \quad (6.117)$$

La variación con respecto a  $x_1$  y  $x_2$  proporciona las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = -mg. \quad (6.118)$$

Como se mencionó para esta base no existe ninguna ecuación algebraica, sin embargo, se hará lo hecho en los casos anteriores. Se ignorarán estas ecuaciones, dado esto se tiene el Lagrangiano

$$L = -\dot{p}_1 x_1 - \dot{p}_2 x_2 - \frac{\theta}{2} p_2 \dot{p}_1 + \frac{\theta}{2} p_1 \dot{p}_2 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} - mgx_2. \quad (6.119)$$

Para este Lagrangiano existen los cuatro momentos, debido que se ignoraron las ecuaciones de movimiento. Explícitamente los momentos son

$$\Pi_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0, \quad \Pi_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0, \quad \Pi_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_1} = -x_1 - \frac{\theta}{2} p_2 \quad \text{y} \quad \Pi_4 = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_2} = -x_2 + \frac{\theta}{2} p_1. \quad (6.120)$$

El hecho de haber ignorado las ecuaciones de movimiento, hace que existan constricciones. Para el presente caso se pasarón por alto las dos ecuaciones de movimiento,

esto tiene como consecuencia más constricciones en la teoría. Dichas constricciones están dadas por

$$\chi_1 = \Pi_1, \quad \chi_2 = \Pi_2, \quad \chi_3 = \Pi_3 + x_1 + \frac{\theta}{2}p_2 \quad \text{y} \quad \chi_4 = \Pi_4 + x_2 - \frac{\theta}{2}p_1, \quad (6.121)$$

los paréntesis no-nulos entre estas constricciones son

$$\{\chi_1, \chi_3\} = -1, \quad \{\chi_2, \chi_4\} = -1, \quad \{\chi_3, \chi_4\} = \theta. \quad (6.122)$$

Por otra parte, el Lagrangiano en términos de los momentos toman la forma

$$L = \Pi_3\dot{p}_1 + \Pi_4\dot{p}_2 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} + mg\left(\Pi_4 + \frac{\theta}{2}p_1\right), \quad (6.123)$$

donde se ha hecho la cuarta restricción fuerte, consecuentemente el Hamiltoniano total

$$H_T = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - mg\left(\Pi_4 - \frac{\theta}{2}p_1\right) + \lambda_1\chi_1 + \lambda_2\chi_2 + \lambda_3\chi_3 + \lambda_4\chi_4. \quad (6.124)$$

Si se toma la evolución de la constricciones, se tiene bajo la condición de consistencia que estas determinan los multiplicadores de Lagrange. Ahora bien, de la no-nulidad de las constricciones se sigue que se trata de constricciones de segunda clase, por lo cual se tiene que construir los paréntesis de Dirac, no obstante, dado que las constricciones son las mismas que las encontradas para el caso de la partícula libre y que las variables del sistema son las mismas, nada nuevo se obtiene de estos paréntesis. Si se consideran las constricciones fuertes únicamente los paréntesis  $\{p_1, \Pi_3\}_D = 1$  y  $\{p_2, \Pi_4\}_D = 1$  sobreviven, los restantes son los triviales. Con estos paréntesis se concluye que la cuantización canónica se realizó de manera directa.

Para el caso de esta base la realización del álgebra de conmutadores (6.64) está dada por

$$\begin{aligned} \hat{x}_1\Psi(p_1, p_2) &= i\hbar\frac{\partial\Psi(p_1, p_2)}{\partial p_1} - \frac{\theta}{2}p_2\Psi(p_1, p_2). \\ \hat{x}_2\Psi(p_1, p_2) &= i\hbar\frac{\partial\Psi(p_1, p_2)}{\partial p_2} + \frac{\theta}{2}p_1\Psi(p_1, p_2). \\ \hat{p}_1\Psi(x_1, p_2) &= p_1\Psi(x_1, p_2). \\ \hat{p}_2\Psi(x_1, p_2) &= p_2\Psi(x_1, p_2). \end{aligned} \quad (6.125)$$

Se sigue que la ecuación de Schödinger dada esta base, toma la siguiente forma:

$$\hat{H}\Psi(p_1, p_2) = \left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + mgi\hbar\frac{\partial}{\partial p_2} + mg\frac{\theta}{2}p_1\right)\Psi(p_1, p_2) = E\Psi(p_1, p_2). \quad (6.126)$$

Para los casos antes tratados y el caso presente, los dos esquemas coinciden completamente con la realización del álgebra de conmutadores. En la próxima sección se tratará con el caso en que las coordenadas conmutan.



#### 6.4.4. Coordenadas Conmutativas y Momentos No-conmutativos

#### 6.4.5. Base $(x_1, p_2)$

En las secciones anteriores se trató con el caso en el cual las coordenadas eran no-conmutativas y los momentos conmutativos, para estudiar los efectos de la no-conmutatividad en otras variables del sistema, ahora se considerarán las coordenadas conmutativas, pero con momentos no-conmutativos. En esta sección se tratará también con el Hamiltoniano de la partícula en caída libre. Para este caso se tiene la siguiente estructura simpléctica

$$\{x_1, x_2\} = 0, \quad \{p_1, p_2\} = \gamma, \quad \{x_1, p_1\} = 1, \quad \{x_2, p_2\} = 1. \quad (6.127)$$

Estos paréntesis definen la matriz simpléctica siguiente:

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & -1 & \gamma & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.128)$$

con la inversa como

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & -1 & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.129)$$

Para esta matriz, se concluye fácilmente de las componentes no-triviales, las ecuaciones diferenciales para los potenciales simplécticos siguientes:

$$\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \gamma, \quad \frac{\partial A_1}{\partial p_1} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial A_2}{\partial p_2} - \frac{\partial A_4}{\partial x_2} = 1. \quad (6.130)$$

Una solución hasta una libertad de norma es

$$A_1 = -\frac{\gamma}{2}x_2, \quad A_2 = \frac{\gamma}{2}x_1, \quad A_3 = -x_1 \quad \text{y} \quad A_4 = -x_2. \quad (6.131)$$

En consecuencia, estos potenciales definen según (6.5), la acción

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ -\frac{\gamma}{2}x_2\dot{x}_1 + \frac{\gamma}{2}x_1\dot{x}_2 - x_1\dot{p}_1 - x_2\dot{p}_2 - H \right]. \quad (6.132)$$

Primero se empezará por la base  $x_1$  y  $p_2$ . Para obtener una acción apropiada, primero intégrese por partes el segundo y tercer términos en (6.132). Por lo tanto, la acción a considerar está dada por

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ -(\dot{p}_2 + \gamma\dot{x}_1)x_2 + \dot{x}_1p_1 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} - mgx_2 \right]. \quad (6.133)$$

Ahora tómesese la variación de esta acción en la variables  $x_2$  y  $p_1$ . La finalidad de tomar la variación es obtener las ecuaciones de movimiento, dichas ecuaciones están dadas por

$$\dot{p}_2 + \gamma \dot{x}_1 = -mg \quad \text{y} \quad \dot{p}_1 = m\dot{x}_1. \quad (6.134)$$

De estas dos ecuaciones se desprende, que existe una ecuación algebraica de movimiento para  $p_1$ , pero no para  $x_2$ , en consecuencia  $x_2$  no podrá ser eliminada algebraicamente de la acción (6.133). Por lo pronto, considérese sólo el caso de  $p_1$  en la acción. Sustituyendo  $p_1$  en la acción (6.133), se sigue de esta que el Lagrangiano está dado por

$$L = -(\dot{p}_2 + \gamma \dot{x}_1)x_2 + \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 - \frac{p_2^2}{2m} - mgx_2. \quad (6.135)$$

Este Lagrangiano tiene asociados los momentos

$$\Pi_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 - \gamma x_2, \quad \Pi_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0, \quad \text{y} \quad \Pi_4 = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_2} = -x_2. \quad (6.136)$$

De una breve inspección de estos momentos, se desprende que se tienen dos constricciones en el sistema. Explícitamente estas son:

$$\chi_2 = \Pi_2, \quad \chi_4 = \Pi_4 + x_2. \quad (6.137)$$

Más adelante se mostrará que se trata de constricciones de segunda clase. Por el momento el punto importante es construir el Hamiltoniano canónico. Para esto, se tiene que despejar  $\dot{x}_1$  y  $x_2$ , del primero y cuarto de los momentos (6.136) respectivamente, e introduciendo estas en el Lagrangiano. De tal forma que resulta

$$L = \frac{1}{2m}(\Pi_1 - \gamma\Pi_4)^2 + \dot{p}_2\Pi_4 + \frac{\gamma}{m}\Pi_4(\Pi_1 - \gamma\Pi_4) - \frac{p_2^2}{2m} - mg\Pi_4. \quad (6.138)$$

El Hamiltoniano canónico, por otra parte, está dado por

$$H_c = \Pi_1\dot{x}_1 + \Pi_4\dot{p}_2 - L. \quad (6.139)$$

Nuevamente sustituyendo la condición  $\dot{x}_1 = \Pi_1/m - \gamma\Pi_4/m$ . Se sigue que el Hamiltoniano se reduce a

$$H_c = \frac{1}{2m}(\Pi_1 - \gamma\Pi_4)^2 + \frac{p_2^2}{2m} - mg\Pi_4. \quad (6.140)$$

Y consecuentemente el Hamiltoniano total

$$H_T = \frac{1}{2m}(\Pi_1 - \gamma\Pi_4)^2 + \frac{p_2^2}{2m} + mg\Pi_4 + \lambda_2\chi_2 + \lambda_4\chi_4. \quad (6.141)$$

Para completar el análisis se tiene que calcular el paréntesis entre las constricciones, estos están dados por

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \chi_2\}\{\chi_4, B\} + \{A, \chi_4\}\{\chi_2, B\}$$

al momento de identificar  $A$  y  $B$  con las variables de espacio fase  $(x_1, x_2, p_2, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_4)$ , se llega a que los únicos paréntesis de Dirac no-triviales son  $\{x_2, p_2\}_D = 1$ ,  $\{x_1, \Pi_1\}_D = 1$  y  $\{p_2, \Pi_4\}_D = 1$ . Sin embargo, si se toman las constricciones como fuertes, el espacio fase se reduce a  $(x_1, p_2, \Pi_1, \Pi_4)$ , con paréntesis de Dirac  $\{x_1, p_2\}_D = 0$ ,  $\{x_1, \Pi_1\}_D = 1$  y  $\{p_2, \Pi_4\}_D = 1$ , es decir, dados estos paréntesis la cuantización usual puede ser llevada a cabo de manera directa. De (6.141) se obtiene que el operador Hamiltoniano en la base  $(x_1, p_2)$  es

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - \gamma \frac{\partial}{\partial p_2} \right)^2 + \frac{p_2^2}{2m} + imgh \frac{\partial}{\partial p_2}, \quad (6.142)$$

Otra manera de obtener el mismo resultado es encontrar una realización directa del álgebra

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = 0, \quad [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = i\gamma\hbar, \quad [\hat{x}_1, \hat{p}_1] = i\hbar, \quad [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\hbar. \quad (6.143)$$

Esta realización es de la forma

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 \Psi(x_1, p_2) &= x_1 \Psi(x_1, p_2). \\ \hat{x}_2 \Psi(x_1, p_2) &= i\hbar \frac{\partial \Psi(x_1, p_2)}{\partial p_2}. \\ \hat{p}_1 \Psi(x_1, p_2) &= -i\hbar \frac{\partial \Psi(x_1, p_2)}{\partial x_1} + i\hbar \gamma \frac{\partial \Psi(x_1, p_2)}{\partial p_2}. \\ \hat{p}_2 \Psi(x_1, p_2) &= p_2 \Psi(x_1, p_2). \end{aligned} \quad (6.144)$$

Por lo tanto, los dos procedimientos son equivalentes a nivel cuántico. En este caso también pueden apreciarse de manera explícita los efectos de la no-conmutatividad, contenidos en la derivada del operador.

#### 6.4.6. Base $(x_2, p_1)$

Para el caso en que las coordenadas conmutan existe también la base  $x_2$  y  $p_1$ . Para esta base se seguirá el mismo procedimiento realizado para la base  $(x_1, p_2)$ . La acción a considerar será

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ (\gamma \dot{x}_2 - \dot{p}_1) x_1 + \dot{x}_2 p_2 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} - mgx_2 \right]. \quad (6.145)$$

Tomando la variación en  $x_1$  y  $p_2$ , se tiene

$$\gamma\dot{x}_2 - \dot{p}_1 = 0 \quad \text{y} \quad p_2 = m\dot{x}_2. \quad (6.146)$$

De igual manera que en el caso anterior se hará la sustitución de  $p_2$  en la acción (6.145). Bajo esta consideración, se obtiene el Lagrangiano

$$L = (\gamma\dot{x}_2 - \dot{p}_1)x_1 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{p_1^2}{2m} - mgx_2. \quad (6.147)$$

Con los momentos

$$\Pi_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0, \quad \Pi_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 + \gamma x_1 \quad \text{y} \quad \Pi_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_1} = -x_1. \quad (6.148)$$

De la primera y la tercera relaciones, se puede concluir de manera directa que se trata de constricciones de la teoría. Las cuales se pueden definir como

$$\chi_1 = \Pi_1 \quad \text{y} \quad \chi_3 = \Pi_3 + x_1. \quad (6.149)$$

Inmediatamente se puede encontrar que  $\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} = -\epsilon_{\alpha\beta}$ , donde  $\alpha, \beta = 1, 3$ .

Las relaciones siguientes son necesarias, para la construcción del Hamiltoniano canónico

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(\Pi_2 + \gamma\Pi_3), \quad x_1 = -\Pi_3, \quad (6.150)$$

el cual está definido como

$$H_c = \Pi_2\dot{x}_2 + \Pi_3\dot{p}_1 - (\gamma\dot{x}_2 - \dot{p}_1)x_1 - \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{p_1^2}{2m} + mgx_2. \quad (6.151)$$

Introduciendo las relaciones (6.150) en este Hamiltoniano, se obtiene

$$H_c = \frac{1}{2m}(\Pi_2 + \gamma\Pi_3)^2 + \frac{p_1^2}{2m} + mgx_2. \quad (6.152)$$

El Hamiltoniano total, por otro lado, está dado por

$$H_T = \frac{1}{2m}(\Pi_2 + \gamma\Pi_3)^2 + \frac{p_1^2}{2m} + mgx_2 + \lambda_1\Pi_1 + \lambda_3\Pi_3. \quad (6.153)$$

Si se consideran la evolución de las constricciones, resulta que ya no existen más constricciones. Éstas sólo determinan los multiplicadores de Lagrange. Dado que los paréntesis entre las constricciones resultarán ser diferentes de cero, se está tratando con constricciones de segunda clase. Los paréntesis de Dirac son

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \chi_1\}\{\chi_3, B\} + \{A, \chi_3\}\{\chi_1, B\}$$

con este paréntesis se pueden identificar  $A$  y  $B$  con las variables de espacio fase, el cual está dado por  $(x_1, x_2, p_1, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$ , de aquí se llega a que los únicos paréntesis de Dirac no-nulos son  $\{x_1, p_1\}_D = 1$ ,  $\{x_2, \Pi_2\}_D = 1$  y  $\{p_1, \Pi_3\}_D = 1$ . Sin embargo, si se toman las constricciones como fuertes, el espacio fase se reduce a  $(x_2, p_1, \Pi_2, \Pi_3)$ , con paréntesis de Dirac  $\{x_2, p_1\}_D = 0$ ,  $\{x_2, \Pi_2\}_D = 1$  y  $\{p_1, \Pi_3\}_D = 1$ , es decir, los paréntesis de Dirac se han reducido a los usuales, de manera que la realización cuántica se sigue de manera inmediata.

La realización del álgebra de conmutadores para esta base, está dada por

$$\begin{aligned}\widehat{x}_1\Psi(x_2, p_1) &= i\hbar\frac{\partial\Psi(x_2, p_1)}{\partial x_1}. \\ \widehat{x}_2\Psi(x_2, p_1) &= x_2\Psi(x_2, p_1). \\ \widehat{p}_1\Psi(x_2, p_1) &= p_1\Psi(x_2, p_1). \\ \widehat{p}_2\Psi(x_2, p_1) &= -i\hbar\frac{\partial\Psi(x_2, p_1)}{\partial x_2} - i\hbar\gamma\frac{\partial\Psi(x_2, p_1)}{\partial p_1}.\end{aligned}\tag{6.154}$$

La teoría cuántica resultante de esta realización se sigue de manera inmediata, resultando la ecuación de Schrödinger siguiente:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\Psi(x_2, p_1)}{\partial x_2} + \gamma\frac{\partial\Psi(x_2, p_1)}{\partial p_1}\right)^2 + \frac{p_1^2}{2m}\Psi(x_2, p_1) + mgx_2\Psi(x_2, p_1) = E\Psi(x_2, p_1).\tag{6.155}$$

Para el presente caso en el cual se consideró las coordenadas conmutativas, los efectos de la no-conmutatividad son más evidentes que en el caso de los momentos conmutativos. Esto puede verse incluso desde el Hamiltoniano clásico en el cual aparecen los parámetros de conmutatividad.

#### 6.4.7. Base $(x_1, x_2)$

Como última base se seguirá considerando que las coordenadas son conmutativas, es decir, que dado este hecho se puede elegir como base las coordenadas. Para esta base la acción está dada por

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ -\frac{\gamma}{2}x_2\dot{x}_1 + \frac{\gamma}{2}x_1\dot{x}_2 + \dot{x}_1p_1 + \dot{x}_2p_2 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} - mgx_2 \right].\tag{6.156}$$

Tomando las variaciones en  $p_1$  y  $p_2$ , se tiene

$$p_1 = m\dot{x}_1 \quad y \quad p_2 = m\dot{x}_2.\tag{6.157}$$

Aquí puede observarse que por primera vez se han encontrado dos ecuaciones algebraicas de movimiento, a diferencia de los casos anteriores en los cuales sólo se contaba con

una sólo ecuación algebraica, esto mostrará que no existen constricciones en el sistema. Introduciendo estas dos relaciones en la acción (6.156), resulta el siguiente Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{\gamma}{2}x_2\dot{x}_1 + \frac{\gamma}{2}x_1\dot{x}_2 - mgx_2. \quad (6.158)$$

Con momentos dados por

$$\Pi_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 - \frac{\gamma}{2}x_2 \quad \text{y} \quad \Pi_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 + \frac{\gamma}{2}x_1. \quad (6.159)$$

De estas relaciones se puede observar que no existen constricciones, tal como se había anticipado. Si se despejan las velocidades de los momentos, se obtiene

$$\dot{x}_1 = \frac{\Pi_1}{m} + \frac{\gamma}{2m}x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{\Pi_2}{m} - \frac{\gamma}{2m}x_1. \quad (6.160)$$

Introduciendo estas relaciones en el Lagrangiano, se obtiene el Hamiltoniano a través de la transformada de Legendre

$$H = \frac{1}{2m}(\Pi_1 + \frac{\gamma}{2}x_2)^2 + \frac{1}{2m}(\Pi_2 - \frac{\gamma}{2}x_1)^2 + mgx_2. \quad (6.161)$$

donde,  $x_1$  y  $\Pi_1$  y  $x_2$  y  $\Pi_2$  por construcción satisfacen los paréntesis  $\{x_2, \Pi_2\} = \{p_1, \Pi_1\} = 1$ . De manera que la cuantización canónica puede realizarse sin problemas. Además esta cuantización será totalmente equivalente a la obtenida de la realización del álgebra de conmutadores.

Explícitamente la realización del álgebra de conmutadores para esta base está dada por

$$\begin{aligned} \hat{x}_1\Psi(x_1, x_2) &= x_1\Psi(x_1, x_2). \\ \hat{x}_2\Psi(x_1, x_2) &= x_2\Psi(x_1, x_2). \\ \hat{p}_1\Psi(x_1, x_2) &= -i\hbar\frac{\partial\Psi(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\gamma}{2}x_2\Psi(x_1, x_2). \\ \hat{p}_2\Psi(x_1, x_2) &= -i\hbar\frac{\partial\Psi(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \frac{\gamma}{2}x_1\Psi(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (6.162)$$

De la cual se deduce que la teoría cuántica resultante es equivalente a la obtenida del Hamiltoniano.

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\gamma}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\gamma}{2}x_1\right)^2 + mgx_2. \quad (6.163)$$

Este operador muestra que las dos teorías cuánticas son equivalentes. Nuevamente lo efectos de la no-conmutatividad son apreciables en el resultado final, en la próxima sección se tratará el caso general en el cual tanto las coordenadas como en el cual los momentos no-conmutan.

## 6.5. Momentos y Coordenadas No-conmutativas

### 6.5.1. Base $(x_1, p_2)$

En esta sección se seguirá tratando con el Hamiltoniano de la partícula en caída libre. Sin embargo, aquí se tratará con el caso en que las coordenadas y los momentos son no-conmutativos. Para este caso se tiene la estructura simpléctica

$$\{x_1, x_2\} = \theta, \quad \{p_1, p_2\} = \gamma, \quad \{x_1, p_1\} = \{x_2, p_2\} = 1. \quad (6.164)$$

Estos paréntesis definen la matriz simpléctica

$$\omega^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & -1 & \gamma & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.165)$$

con inversa

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & \gamma & -1 & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.166)$$

donde,  $\alpha = 1 - \gamma\theta$ . De esta matriz se deduce de sus componentes no-triviales, las ecuaciones diferenciales para los potenciales simplécticos siguientes:

$$\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial p_1} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{\partial A_4}{\partial p_1} - \frac{\partial A_3}{\partial p_2} = \frac{\theta}{\alpha}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial p_2} - \frac{\partial A_4}{\partial x_2} = \frac{1}{\alpha}. \quad (6.167)$$

Una solución a este sistema de ecuaciones es

$$A_1 = -\frac{\gamma}{2\alpha}x_2, \quad A_2 = \frac{\gamma}{2\alpha}x_1, \quad A_3 = -\frac{x_1}{\alpha}, \quad A_4 = \frac{\theta}{\alpha}p_1 - \frac{x_2}{\alpha}. \quad (6.168)$$

En consecuencia, estos potenciales definen según (6.5), la acción

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ -\frac{\gamma}{2\alpha}x_2\dot{x}_1 + \frac{\gamma}{2\alpha}x_1\dot{x}_2 - \frac{1}{\alpha}x_1\dot{p}_1 + \frac{\theta}{\alpha}p_1\dot{p}_2 - \frac{1}{\alpha}x_2\dot{p}_2 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} - mgx_2 \right]. \quad (6.169)$$

En este caso sólo existen dos bases  $x_1$  y  $p_2$  ó  $x_2$  y  $p_1$ . El primer caso a estudiar será  $x_1$  y  $p_2$ , para esta base la acción más apropiada está dada por

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ -\frac{1}{\alpha}(\gamma\dot{x}_1 + \dot{p}_2)x_2 + \frac{1}{\alpha}(\dot{x}_1 + \theta\dot{p}_2)p_1 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} - mgx_2 \right], \quad (6.170)$$

donde, se han realizado algunas integraciones por partes, para dejar la acción lineal en las variables  $x_2$  y  $p_1$ . Haciendo la variación en estas variables, se tienen las ecuaciones de movimiento

$$p_1 = \frac{m}{\alpha}(\dot{x}_1 + \theta\dot{p}_2), \quad \frac{1}{\alpha}(\gamma\dot{x}_1 + \dot{p}_2) = -mg. \quad (6.171)$$

Nuevamente como en los casos anteriores, sólo se cuenta con una ecuación algebraica, esto indica que la única variable que será introducida en la acción será la asociada a dicha variable. Introduciendo  $p_1$  en la acción (6.170), resulta el Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2} \left( \frac{\dot{x}_1}{\alpha} + \frac{\theta}{\alpha} \dot{p}_2 \right)^2 - \left( \frac{\gamma}{\alpha} \dot{x}_1 + \frac{1}{\alpha} \dot{p}_2 \right) x_2 - \frac{p_2^2}{2m} - mgx_2. \quad (6.172)$$

Para este Lagrangiano, se puede apreciar que depende de las variables  $x_1$ ,  $x_2$  y  $p_2$ , consecuentemente tendrá asociados momentos o bien constricciones con dichas variables. Haciendo el cálculo se obtienen los siguientes momentos

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{m}{\alpha} \left( \frac{\dot{x}_1}{\alpha} + \frac{\theta}{\alpha} \dot{p}_2 \right) - \frac{\gamma}{\alpha} x_2, & \Pi_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0, \\ \Pi_4 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_2} = \frac{m\theta}{\alpha} \left( \frac{\dot{x}_1}{\alpha} + \frac{\theta}{\alpha} \dot{p}_2 \right) - \frac{x_2}{\alpha}. \end{aligned} \quad (6.173)$$

Como ya se mencionó, de estos momentos se pueden encontrar las siguientes constricciones

$$\chi_2 = \Pi_2, \quad \chi_4 = \Pi_4 - \theta\Pi_1 + x_2. \quad (6.174)$$

El Hamiltoniano canónico por otra parte está dado por

$$H_c = \Pi_1\dot{x}_1 + \Pi_4\dot{p}_2 - \frac{m}{2} \left( \frac{\dot{x}_1}{\alpha} + \frac{\theta}{\alpha} \dot{p}_2 \right)^2 + \left( \frac{\gamma}{\alpha} \dot{x}_1 + \frac{1}{\alpha} \dot{p}_2 \right) x_2 + \frac{p_2^2}{2m} + mgx_2, \quad (6.175)$$

de los momentos (6.173) se pueden despejar las relaciones

$$\frac{\dot{x}_1}{\alpha} + \frac{\theta}{\alpha} \dot{p}_2 = \frac{\alpha}{m} \Pi_1 + \frac{\gamma}{m} x_2, \quad x_2 = \theta\Pi_1 - \Pi_4. \quad (6.176)$$

Introduciendo éstas en el hamiltoniano canónico

$$H_c = \frac{1}{2m} (\Pi_1 + \gamma x_2)^2 + \frac{p_2^2}{2m} + mg(\theta\Pi_1 - \Pi_4). \quad (6.177)$$

Ahora utilizando la relación

$$\alpha\Pi_1 + \gamma x_2 = \Pi_1 - \gamma\Pi_4, \quad (6.178)$$



e introduciendola en el Hamiltoniano, se tiene

$$H_c = \frac{1}{2m} (\Pi_1 - \gamma\Pi_4)^2 + \frac{p_2^2}{2m} + mg(\theta\Pi_1 - \Pi_4). \quad (6.179)$$

En vista de este resultado se tiene el Hamiltoniano total

$$H_T = \frac{1}{2m} (\Pi_1 - \gamma\Pi_4)^2 + \frac{p_2^2}{2m} + mg(\theta\Pi_1 - \Pi_4) + \lambda_2\chi_2 + \lambda_4\chi_4. \quad (6.180)$$

Para terminar con el análisis de las constricciones, aún falta por definir los paréntesis de Dirac y construir la realización del álgebra de conmutadores. No obstante, de una breve inspección de la forma de las constricciones se deduce que el paréntesis entre estas es diferente de cero, como consecuencia se desprende que estas son de segunda clase, por lo tanto, los paréntesis de Dirac tienen que ser construidos, estos son

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \chi_2\}\{\chi_4, B\} + \{A, \chi_4\}\{\chi_2, B\}. \quad (6.181)$$

Identificando las variables del sistema, con  $A$  y  $B$  se llega a que los únicos paréntesis no-triviales están dados por

$$\{x_1, x_2\}_D = \theta, \quad \{x_2, p_2\}_D = 1, \quad \{x_1, \Pi_1\}_D = 1, \quad \{p_2, \Pi_4\}_D = 1. \quad (6.182)$$

Aquí se tiene que considerar que en un principio la teoría inicial contaba con los grados de libertad  $(x_1, x_2, p_2, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_4)$ , entonces tomando las constricciones fuertes estos grados de libertad se reducen a  $(x_1, p_2, \Pi_1, \Pi_4)$ , es decir, se ha efectuado esta reducción del espacio fase. Como una consecuencia de hacer fuertes las constricciones, resulta que dos de los paréntesis son redundantes, de esto se sigue que los únicos paréntesis que sobreviven al momento de tomar fuertes las constricciones son

$$\{x_1, \Pi_1\}_D = 1, \quad \{p_2, \Pi_4\}_D = 1. \quad (6.183)$$

Desde luego, el paréntesis de Dirac entre  $x_1$  y  $p_2$  es cero. La consecuencia que se sigue directamente de estos paréntesis es que la cuantización canónica puede ser implementada.

Por otra parte, la realización de las observables cuánticas se deducen de los siguientes conmutadores:

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\hbar\theta, \quad [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = i\hbar\gamma, \quad [\hat{x}_1, \hat{p}_1] = [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\hbar. \quad (6.184)$$

La realización de esta álgebra, toma la forma

$$\begin{aligned} \hat{x}_1\Psi(x_1, p_2) &= x_1\Psi(x_1, p_2). \\ \hat{x}_2\Psi(x_1, p_2) &= -i\hbar\theta\frac{\partial\Psi(x_1, p_2)}{\partial x_1} + i\hbar\frac{\partial\Psi(x_1, p_2)}{\partial p_2}. \end{aligned}$$

$$\hat{p}_1 \Psi(x_1, p_2) = i\hbar\gamma \frac{\partial \Psi(x_1, p_2)}{\partial p_2} - i\hbar \frac{\partial \Psi(x_1, p_2)}{\partial x_1}. \quad (6.185)$$

$$\hat{p}_2 \Psi(x_1, p_2) = p_2 \Psi(x_1, p_2).$$

Con estos operadores, se concluye de manera directa que las dos teorías cuánticas resultantes son completamente equivalentes, dando como resultado el operador Hamiltoniano siguiente:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - \gamma \frac{\partial}{\partial p_2} \right)^2 + \frac{p_2^2}{2m} - i\hbar mg \left( \theta \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial p_2} \right). \quad (6.186)$$

En este operador se puede apreciar que los dos parámetros de conmutatividad aparecen explícitamente, es decir, los efectos de la no-conmutatividad son apreciables. Sin embargo, la cuantización del sistema se vuelve mucho más compleja que los casos anteriores precisamente, debido a la no-conmutatividad.

### 6.5.2. Base $(x_2, p_1)$

Hasta este momento se han mostrado todos los posibles casos de bases, en los cuales los momentos conmutan y las coordenadas conmutan, además se ha estudiado una de las posibles bases para el caso en que ni los momentos ni las coordenadas conmutan. Las principales características del método han sido analizadas, se ha mostrado que cuando existe sólo una ecuación algebraica de movimiento, la ecuación relacionada a la variable restante genera constricciones en el sistema, además el número de constricciones depende del número de ecuaciones de movimiento no-algebraicas. Es decir, se tienen dos posibilidades para despejar las variables auxiliares, una de ellas es a través de las ecuaciones algebraicas de movimiento y la otra es a través de las constricciones. Por último se analizará la base  $(x_2, p_1)$ . Para esta base, una acción más conveniente es

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ -\frac{1}{\alpha} (\gamma \dot{x}_2 - \dot{p}_1) x_2 + \frac{1}{\alpha} (\dot{x}_2 - \theta \dot{p}_1) p_1 - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} - mgx_2 \right], \quad (6.187)$$

Tomando la variación en las variables  $x_1$  y  $p_2$ , se tiene

$$p_2 = \frac{m}{\alpha} (\dot{x}_2 - \theta \dot{p}_1), \quad \frac{1}{\alpha} (\gamma \dot{x}_2 - \dot{p}_1) = 0. \quad (6.188)$$

Introduciendo  $p_2$  en la acción (6.187), resulta el Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2} \left( \frac{\dot{x}_2}{\alpha} - \frac{\theta}{\alpha} \dot{p}_1 \right)^2 - \left( \frac{\gamma}{\alpha} \dot{x}_2 - \frac{1}{\alpha} \dot{p}_1 \right) x_1 - \frac{p_1^2}{2m} - mgx_2. \quad (6.189)$$

De este Lagrangiano se obtienen los siguiente momentos:

$$\Pi_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0, \quad \Pi_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{m}{\alpha} \left( \frac{\dot{x}_2}{\alpha} - \frac{\theta}{\alpha} \dot{p}_1 \right) + \frac{\gamma}{\alpha} x_1,$$

$$\Pi_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_1} = -\frac{m\theta}{\alpha} \left( \frac{\dot{x}_2}{\alpha} - \frac{\theta}{\alpha} \dot{p}_1 \right) - \frac{x_1}{\alpha}. \quad (6.190)$$

De estos momentos se pueden encontrar las siguientes constricciones:

$$\chi_1 = \Pi_1, \quad \chi_4 = \Pi_3 + \theta\Pi_2 + x_1. \quad (6.191)$$

El Hamiltoniano canónico por otra parte está dado por

$$H_c = \Pi_2 \dot{x}_2 + \Pi_3 \dot{p}_1 - \frac{m}{2} \left( \frac{\dot{x}_2}{\alpha} - \frac{\theta}{\alpha} \dot{p}_1 \right)^2 - \left( \frac{\gamma}{\alpha} \dot{x}_2 - \frac{1}{\alpha} \dot{p}_1 \right) x_1 + \frac{p_1^2}{2m} + mgx_2, \quad (6.192)$$

Dados los momentos (6.190), se pueden despejar las relaciones

$$\frac{\dot{x}_2}{\alpha} - \frac{\theta}{\alpha} \dot{p}_1 = \frac{\alpha}{m} \Pi_2 - \frac{\gamma}{m} x_1, \quad x_1 = -\theta\Pi_2 - \Pi_3. \quad (6.193)$$

Introduciendo éstas en el hamiltoniano canónico, resulta

$$H_c = \frac{1}{2m} (\Pi_2 + \gamma\Pi_3)^2 + \frac{p_1^2}{2m} + mgx_2. \quad (6.194)$$

En vista de este resultado se tiene el Hamiltoniano total

$$H_T = \frac{1}{2m} (\Pi_2 + \gamma\Pi_3)^2 + \frac{p_1^2}{2m} + mgx_2 + \lambda_1 \chi_1 + \lambda_3 \chi_3. \quad (6.195)$$

La evolución de las constricciones de igual manera, que en el caso anterior únicamente determinan los multiplicadores de Lagrange, para este caso están dados por  $\lambda_1 = p_1/m$  y  $\lambda_3 = 0$ . Los paréntesis de Dirac, por otra parte tienen la estructura (6.72), de lo cual se sigue que los únicos paréntesis no-nulos son

$$\{x_1, x_2\}_D = \theta, \quad \{x_1, p_1\}_D = 1, \quad \{x_2, \Pi_2\}_D = 1, \quad \{p_1, \Pi_3\}_D = 1, \quad (6.196)$$

Nuevamente se tiene el mismo hecho que en el caso anterior, por lo cual en un principio el espacio fase constaba de  $(x_1, x_2, p_1, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$  y una vez que se consideran las constricciones como fuertes, este se reduce a  $(x_2, p_1, \Pi_2, \Pi_3)$ , con paréntesis de Dirac

$$\{x_2, p_1\}_D = 0, \quad \{x_2, \Pi_2\}_D = 1, \quad \{p_1, \Pi_3\}_D = 1. \quad (6.197)$$

Por lo tanto, llevando a cabo las identificaciones cuánticas, se sigue de manera directa la cuantización.

Para la realización de las observables cuánticas, por otra parte se deducen de los siguientes conmutadores:

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\hbar\theta, \quad [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = i\hbar\gamma, \quad [\hat{x}_1, \hat{p}_1] = [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\hbar. \quad (6.198)$$

La concreta realización de esta álgebra tiene la forma

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1\Psi(x_2, p_1) &= i\hbar\theta\frac{\partial\Psi(x_2, p_1)}{\partial x_2} + i\hbar\frac{\partial\Psi(x_2, p_1)}{\partial p_1}. \\
\hat{x}_2\Psi(x_2, p_1) &= x_2\Psi(x_2, p_1). \\
\hat{p}_1\Psi(x_2, p_1) &= p_1\Psi(x_2, p_1). \\
\hat{p}_2\Psi(x_2, p_1) &= -i\hbar\gamma\frac{\partial\Psi(x_2, p_1)}{\partial p_1} - i\hbar\frac{\partial\Psi(x_2, p_1)}{\partial x_2}.
\end{aligned} \tag{6.199}$$

Con estos operadores, se concluye de manera directa que las dos teorías cuánticas resultantes son completamente equivalentes, ya que de las dos teorías cuánticas, están dadas por el operador Hamiltoniano

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma\frac{\partial}{\partial p_1}\right)^2 + \frac{p_1^2}{2m} + mgx_2. \tag{6.200}$$

A diferencia de la base anterior en este operador Hamiltoniano, sólo aparece un parámetro de conmutatividad, específicamente el asociado a los momentos. De tal forma, que como se mencionó anteriormente los efectos de la no-conmutatividad son más evidentes en este caso que los casos anteriores.

## 6.6. Cuantización de los Sistemas

### 6.6.1. Partícula en Caída Libre (Coordenadas No-conmutativas)

Como se mencionó en las secciones anteriores, uno de los objetivos de este trabajo es cuantizar los sistemas aquí tratados con el mapeo de Darboux y las bases cruzadas y comparar los resultados obtenidos de ambos esquemas. Para empezar a realizar la cuantización, se considerará el álgebra

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta\hbar, \quad [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = 0, \quad [\hat{x}_1, \hat{p}_1] = [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\hbar. \tag{6.201}$$

El mapa de Darboux que se considerará para esta álgebra, está dado por

$$\hat{x} = \hat{x}_1, \quad \hat{y} = \hat{x}_2 - \theta\hat{p}_1, \quad \hat{p}_x = \hat{p}_1, \quad \hat{p}_y = \hat{p}_2, \tag{6.202}$$

donde, las nuevas variables satisfacen las relaciones de conmutación canónica

$$[\hat{x}, \hat{y}] = [\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0, \quad [\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar. \tag{6.203}$$

El sistema por estudiar, está dado por el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + mg\hat{x}_2, \tag{6.204}$$

con las nuevas variables este Hamiltoniano toma la forma

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + mg\hat{y} + mg\theta\hat{p}_x. \quad (6.205)$$

Como puede observarse en estas nuevas variables aparece un término extra proporcional al parámetro de conmutatividad.

Para estudiar la cuantización del sistema primero se estudiará el sistema en variables de Darboux. Para ello primero se considerarán las coordenadas  $(x, y)$  como el conjunto completo de observables, para este caso el Hamiltoniano toma la forma

$$E\psi(x, y) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} - img\theta\hbar \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} + mgy\psi(x, y). \quad (6.206)$$

Ahora se puede resolver la ecuación de valores propios, tomando el ansatz  $\psi(x, y) = e^{ikx}\phi(y)$  [43], introduciendo este ansatz en (6.206), se tiene

$$\frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} + \frac{2m^2 g}{\hbar^2} \left( \frac{\mathcal{E}_\theta}{mg} - y \right) \phi(y) = 0, \quad (6.207)$$

donde,  $\mathcal{E}_\theta = E - \hbar^2 k^2 / 2m - mgk\theta$ . Si se redefine  $\eta = (y - b_\theta)/a$ ,  $a = (\hbar^2 / 2m^2 g)^{1/3}$  y  $b_\theta = \mathcal{E}_\theta / mg$ , se tiene

$$\frac{d^2 \phi(\eta)}{d\eta^2} - \eta \phi(\eta) = 0. \quad (6.208)$$

Esta ecuación es la ecuación de Airy, con solución

$$\phi(y) = AAi\left(\frac{y - b_\theta}{a}\right) + BBi\left(\frac{y - b_\theta}{a}\right). \quad (6.209)$$

Las condiciones en la frontera son  $\phi(0) = 0$  y  $\phi(y) = 0$  cuando  $y \rightarrow \infty$ . Con estas condiciones se tiene

$$\phi(y) = AAi\left(\frac{y - b_\theta}{a}\right). \quad (6.210)$$

Con esta función de onda se tiene el espectro

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + mgk\theta + \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{3\pi m^2 g}{2\hbar^2} \left( 2n - \frac{1}{2} \right) \right]^{2/3}, \quad (6.211)$$

con  $n \gg 1$ .

Las restantes bases se pueden conectar con las transformaciones de Fourier siguientes:

$$\psi(p_x, p_y) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{i(p_x x + p_y y)/\hbar} \psi(x, y),$$

$$\psi(x, p_y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{ip_y y/\hbar} \psi(x, y), \quad (6.212)$$

$$\psi(x, p_x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ip_x x/\hbar} \psi(x, y).$$

Es decir, que con estas transformaciones de Fourier las teorías en las cuatro diferentes bases son completamente equivalentes.

Ahora se considerarán los sistemas pero escritos en bases cruzadas. Para estos casos se tienen los sistemas

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x_1, p_2)}{\partial x_1^2} - img\theta\hbar \frac{\partial \psi(x_1, p_2)}{\partial x_1} + img\hbar \frac{\partial \psi(x_1, p_2)}{\partial p_2} + \frac{p_2^2}{2m} = E\psi(x_1, p_2), \quad (6.213)$$

$$\frac{p_1^2}{2m} \psi(x_2, p_1) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x_2, p_1)}{\partial x_2^2} + mgx_2 \psi(x_2, p_1) = E\psi(x_2, p_1), \quad (6.214)$$

$$\frac{p_1^2}{2m} \psi(p_1, p_2) + mg\frac{\theta}{2} p_1 + mgi\hbar \frac{\partial \psi(p_1, p_2)}{\partial p_2} + \frac{p_2^2}{2m} \psi(p_1, p_2) = E\psi(p_1, p_2). \quad (6.215)$$

Para el caso de las variables de Darboux, se encontraron sistemas completamente solubles de la ecuación de Schrödinger, dada la existencia de las transformaciones de Fourier. Para el presente caso en el que se están considerando bases cruzadas, se puede hacer lo mismo ya que para este caso las transformaciones de Fourier que conectan las dos representaciones están dadas por

$$\begin{aligned} \psi(x_1, p_2) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{ip_2 y/\hbar} \psi(x, y), \\ \psi(x_2, p_1) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ip_1 x/\hbar} \psi(x, y), \\ \psi(p_1, p_2) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{i(p_1 x + p_2 y)/\hbar} \psi(x, y). \end{aligned} \quad (6.216)$$

Los espectros cuánticos para estas tres bases, están dados por

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + mgk\theta + \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{3\pi m^2 g}{2\hbar^2} \left( 2n - \frac{1}{2} \right) \right]^{2/3}, \quad (6.217)$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{3\pi m^2 g}{2\hbar^2} \left( 2n - \frac{1}{2} \right) \right]^{2/3}, \quad (6.218)$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{mgk\theta}{2} + \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{3\pi m^2 g}{2\hbar^2} \left( 2n - \frac{1}{2} \right) \right]^{2/3}, \quad (6.219)$$

con  $n \gg 1$ . De estos espectros se desprende que la parte asociada con la ecuación de Airy permanece intacta, la parte asociada al parámetro de conmutatividad es la que cambia para el caso de la base  $(x_2, p_1)$ , en el cual la dependencia de dicho parámetro desaparece, dejando el espectro del caso usual de la partícula en caída libre.

### 6.6.2. Partícula en Caída Libre (Momentos No-conmutativas)

Ahora se considerará el caso en el cual los momentos no conmutan, para este caso el álgebra a considerar será

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = 0, \quad [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = i\gamma\hbar, \quad [\hat{x}_1, \hat{p}_1] = [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\hbar. \quad (6.220)$$

Para este caso no será necesario considerar el mapeo de Darboux ya que la cuantización en la que se toman las coordenadas como base del sistema puede ser resuelta, al menos de manera aproximada. Nuevamente como en el caso de coordenadas no-conmutativas, el sistema por estudiar, está dado por el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + mg\hat{x}_2, \quad (6.221)$$

Para estudiar la cuantización del sistema primero se estudiará el sistema en las coordenadas como base. Para ello primero se considerarán las coordenadas  $(x_1, x_2)$  como el conjunto completo de observables, para este caso el Hamiltoniano toma la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2)}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma^2}{8m} x_i^2 \psi(x_1, x_2) + \frac{i\hbar\gamma}{2m} \epsilon_{ij} x_i \frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_j} + mgx_2 \psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2). \quad (6.222)$$

Esta ecuación ya fue resuelta en el capítulo cinco, para el caso en el que no existía campo gravitacional. En el presente caso se considerará este término como una perturbación, por lo que se puede utilizar el método de perturbación usual para encontrar la corrección a orden más bajo. Por otra parte las soluciones encontradas en el capítulo cinco están dadas por los polinomios asociados de Laguerre, es decir tienen la forma

$$\psi_{n_r, n}(z, \theta) = Nz^{|n|/2} e^{in\theta} e^{-z/2} L_{n_r}^{|n|}(z), \quad (6.223)$$

donde,  $z = (\gamma/2\hbar)r^2$  y los números cuánticos toman los valores  $n_r = 0, 1, 2, \dots$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Con estas funciones de onda se puede calcular el valor esperado de  $V(x_2) = mgx_2 = mgr \sin \theta$ , en términos de  $z$  este potencial de perturbación está dado por  $V(z) = mg\sqrt{2\hbar/\gamma}z^{1/2} \sin \theta$ . Calculando el valor esperado de este potencial, dadas las funciones de onda (6.223), se tiene la energía

$$E_{n_r, n} = \frac{\gamma\hbar}{2m}(2n_r + |n| + n + 1) + mg\sqrt{\frac{2\hbar}{\gamma}}(2n_r + |n| + 1/2). \quad (6.224)$$

Recuérdese que estos números cuánticos se pueden definir a través de número cuánticos no-negativos como

$$n_r = n_- + \frac{n - |n|}{2}, \quad n = n_+ - n_-. \quad (6.225)$$

Con estos nuevos números cuánticos el espectro toma la forma

$$E_{n_r, n} = \frac{\gamma \hbar}{2m} (2n_- + 1) + \frac{mg}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{\gamma}} (2n_+ + 2n_- + 1). \quad (6.226)$$

Puede observarse que este espectro depende completamente del parámetro de conmutatividad en sus dos términos que lo constituyen, no obstante, cuando se quiere tomar el límite en el que este parámetro tiende a cero, se encuentra que el límite del segundo término no existe.

Las restantes bases se pueden conectar con las transformaciones de Fourier siguientes:

$$\begin{aligned} \psi(x_1, p_2) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 e^{ip_2 x_2 / \hbar} \psi(x_1, x_2), \\ \psi(x_2, p_1) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 e^{ip_1 x_1 / \hbar} \psi(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (6.227)$$

Es decir, que con estas transformaciones de Fourier las teorías en las cuatro diferentes bases pueden ser conectadas.

## 6.7. Modelo de Chern-Simons Mecánico

### 6.7.1. Acción del Sistema

En esta sección se utilizará el formalismo desarrollado en las secciones anteriores. Para el presente caso el Hamiltoniano es más complicado que los casos antes tratados, explícitamente dicho Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{\rho_i^2}{2m} + \frac{\kappa}{2} x_i^2 + \frac{3\alpha\kappa}{m^2} \epsilon_{ij} x_i \rho_j + O(\alpha^2), \quad (6.228)$$

en este caso también se tratará con coordenadas y momentos no-conmutativos. La estructura simpléctica a estudiar es

$$\{x_i, x_j\}_D = \frac{2\alpha}{m^2} \epsilon_{ij}, \quad \{\rho_i, \rho_j\}_D = \frac{4\alpha\kappa}{m} \epsilon_{ij}, \quad \{x_i, \rho_j\}_D = \delta_{ij}. \quad (6.229)$$

Esta estructura simpléctica fue obtenida en el capítulo anterior como consecuencia de la teoría de orden superior.

Ahora bien, para poder construir la acción del sistema tal como en los casos anteriores se tiene que construir la acción. Lo primero que se debe hacer, es calcular las componentes del potencial simpléctico. Para ello obsérvese que de las ecuaciones diferenciales que relacionan los potenciales simplécticos y de los paréntesis (6.229), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales para potencial simpléctico a orden más bajo en  $\alpha$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \frac{4\alpha\kappa}{m}, \quad \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \rho_1} = 1,$$



$$\frac{\partial A_4}{\partial \rho_1} - \frac{\partial A_3}{\partial \rho_2} = \frac{2\alpha}{m^2}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \rho_2} = 1. \quad (6.230)$$

Para este conjunto de ecuaciones, se puede elegir un conjunto que simplifiquen de la manera más adecuada el sistema, dicha elección arroja el siguiente conjunto de soluciones:

$$A_1 = -\frac{4\alpha\kappa}{m}x_2 - \rho_1, \quad A_2 = -\rho_2, \quad A_3 = 0, \quad \text{y} \quad A_4 = \frac{2\alpha}{m^2}\rho_1. \quad (6.231)$$

Por otra parte, la acción está dada por

$$S = \int d\tau [A_1 \dot{z}^1 + A_2 \dot{z}^2 + A_3 \dot{z}^3 + A_4 \dot{z}^4 - H].$$

Introduciendo el conjunto de soluciones (6.231) en la acción, esta toma la forma

$$S = \int d\tau \left[ -\left( \frac{4\alpha\kappa}{m}x_2 + \rho_1 \right) \dot{x}_1 - \rho_2 \dot{x}_2 + \frac{2\alpha}{m^2} \rho_1 \dot{\rho}_2 - \frac{\rho_1^2}{2m} - \frac{\rho_2^2}{2m} - \frac{\kappa}{2}x_1^2 - \frac{\kappa}{2}x_2^2 - \frac{3\alpha\kappa}{m^2}x_1\rho_2 + \frac{3\alpha\kappa}{m^2}x_2\rho_1 \right]. \quad (6.232)$$

Para este sistema se elegirá la base  $x_1$  y  $\rho_2$ . Con esta elección, la acción a considerar será

$$S = \int d\tau \left[ \left( \dot{\rho}_2 - \frac{4\alpha\kappa}{m}\dot{x}_1 \right) x_2 + \left( \frac{2\alpha}{m^2}\dot{\rho}_2 - \dot{x}_1 \right) \rho_1 - \frac{\rho_1^2}{2m} - \frac{\rho_2^2}{2m} - \frac{\kappa}{2}x_1^2 - \frac{\kappa}{2}x_2^2 - \frac{3\alpha\kappa}{m^2}x_1\rho_2 + \frac{3\alpha\kappa}{m^2}x_2\rho_1 \right]. \quad (6.233)$$

donde, se han realizado integraciones por partes para dejar la acción lineal en las variables sobre las que se realizará la variación. Esta acción aún contiene dependencia de las variables auxiliares, estas como ya se mencionó pueden ser eliminadas algebraicamente de la acción, con las ecuaciones de movimiento. En la próxima sección se realiza dicha eliminación.

## 6.7.2. Variables Auxiliares

Tomando la variación de la acción (6.233), con respecto a la variables  $x_2$  y  $\rho_1$ , resultan las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \kappa x_2 - \frac{3\alpha\kappa}{m^2}\rho_1 &= -\frac{4\alpha\kappa}{m}\dot{x}_1 + \dot{\rho}_2, \\ -\frac{3\alpha\kappa}{m^2}x_2 + \frac{\rho_1}{m} &= -\dot{x}_2 + \frac{2\alpha}{m^2}\dot{\rho}_2. \end{aligned} \quad (6.234)$$

Resolviendo estas ecuaciones para  $x_2$  y  $\rho_1$ , se obtiene

$$\begin{aligned} x_2 &= -\left(\frac{7\alpha}{m} + \frac{49\alpha^3\kappa}{m^4}\right)\dot{x}_1 + \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{15\alpha^2}{m^3} + \frac{54\alpha^4\kappa}{m^6}\right)\dot{\rho}_2, \\ \rho_1 &= -\left(m + \frac{21\alpha^2\kappa}{m^2} + \frac{108\alpha^4\kappa^2}{m^5}\right)\dot{x}_1 + \left(\frac{5\alpha}{m} + \frac{45\alpha^3\kappa}{m^4}\right)\dot{\rho}_2. \end{aligned} \quad (6.235)$$

Introduciendo este conjunto de ecuaciones en la acción (6.233). Ésta toma la forma

$$S = \int d\tau \left[ A\dot{x}_1^2 + B\dot{\rho}_2^2 + C\dot{x}_1\dot{\rho}_2 - \frac{\kappa}{2}x_1^2 - \frac{\rho_2^2}{2m} - \frac{3\alpha\kappa}{m^2}x_1\rho_2 \right]. \quad (6.236)$$

Por lo tanto, se tiene por resultado un Lagrangiano escrito en términos de  $x_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\dot{x}_1$  y  $\dot{\rho}_2$ , el cual está dada por

$$L = A\dot{x}_1^2 + B\dot{\rho}_2^2 + C\dot{x}_1\dot{\rho}_2 - \frac{\kappa}{2}x_1^2 - \frac{\rho_2^2}{2m} - \frac{3\alpha\kappa}{m^2}x_1\rho_2, \quad (6.237)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son funciones de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $m$ . A octavo y noveno orden en  $\alpha$ , estas constantes son

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{m}{2} + \frac{49\alpha^2\kappa}{2m^2} + \frac{441\alpha^4\kappa^2}{2m^5} + \frac{3773\alpha^6\kappa^3}{2m^8} + \frac{10044\alpha^8\kappa^4}{m^{11}} + \mathcal{O}(\alpha^{2n}), \\ B &\approx \frac{1}{2\kappa} + \frac{25\alpha^2}{2m^3} + \frac{225\alpha^4\kappa}{2m^6} + \frac{1620\alpha^6\kappa^2}{m^9} + \frac{5832\alpha^8\kappa^3}{m^{12}} + \mathcal{O}(\alpha^{2n}), \\ C &\approx -\frac{9\alpha}{m} - \frac{115\alpha^3\kappa}{m^4} - \frac{945\alpha^5\kappa^2}{m^7} - \frac{11763\alpha^7\kappa^3}{m^{10}} - \frac{17496\alpha^9\kappa^4}{m^{13}} + \mathcal{O}(\alpha^{2n+1}). \end{aligned} \quad (6.238)$$

Dos puntos importantes pueden destacarse de estas constantes: i) El primero de ellos es que, se puede observar que las dos primeras constantes únicamente poseen términos en potencias pares de  $\alpha$  y dos términos que son independientes de este. ii) El segundo de ellos es que, la tercera de las constantes únicamente posee potencias impares en  $\alpha$ , además de no poseer término independiente de potencias del parámetro de perturbación. En consecuencia si se hace  $\alpha$  igual a cero, la tercera de las constantes es la única que desaparece del sistema, dejando el Lagrangiano como un par de osciladores armónicos desacoplados.

### 6.7.3. Lagrangiano y Método de Diagonalización

Del Lagrangiano (6.237), se puede concluir inmediatamente que se trata de un sistema cuadrático en las variables, una forma más conveniente de escribir este Lagrangiano es eliminar los términos cruzados. Una forma muy común de eliminar los términos cruzados es diagonalizar el Lagrangiano, de tal forma que el sistema se convierta en un par

de osciladores desacoplados en las variables  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{\rho}_2$ ,  $x_1$  y  $\rho_2$ . Para poder eliminar esos dos términos se debe utilizar el método conocido como modos normales, con este método se logra escribir el Lagrangiano en forma matricial, es decir,

$$L = \dot{\mathbf{x}}\mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}^T - \mathbf{x}\mathbf{V}\mathbf{x}^T, \quad (6.239)$$

donde

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{pmatrix}, \quad (6.240)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \kappa/2 & 3\alpha\kappa/2m^2 \\ 3\alpha\kappa/2m^2 & 1/2m \end{pmatrix}, \quad (6.241)$$

con los vectores  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{\rho}_2)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \rho_2)$  y sus transpuestos  $\dot{\mathbf{x}}^T$  y  $\mathbf{x}^T$ , respectivamente. Este Lagrangiano puede ser diagonalizado utilizando modos normales, como ya se había mencionado. Es decir, se puede definir la matriz siguiente con eigenfrecuencia  $\omega$

$$\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{2} + \omega^2 A & \frac{3\alpha\kappa}{2m^2} + \omega^2 \frac{C}{2} \\ \frac{3\alpha\kappa}{2m^2} + \omega^2 \frac{C}{2} & \frac{1}{2m} + \omega^2 B \end{pmatrix}, \quad (6.242)$$

Tomando el determinante de esta matriz, resulta una ecuación de cuarto orden en  $\omega$ . Explícitamente se tiene que resolver la ecuación

$$\det(\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{T}) = \left(AB - \frac{C^2}{2}\right)\omega^4 + \left(\frac{A}{2m} + \frac{\kappa B}{2} - \frac{3\alpha\kappa C}{2m^2}\right)\omega^2 + \frac{\kappa}{4m} - \frac{9\alpha^2\kappa^2}{4m^4} = 0. \quad (6.243)$$

Si se redefine las constantes, como

$$\bar{A} = AB - \frac{C^2}{2} \quad \bar{B} = \frac{A}{2m} + \frac{\kappa B}{2} - \frac{3\alpha\kappa C}{2m^2} \quad \bar{C} = \frac{\kappa}{4m} - \frac{9\alpha^2\kappa^2}{4m^4}, \quad (6.244)$$

e introduciendo los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$ , se tiene

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{m}{4\kappa} - \frac{7\alpha^2}{4m^2} - \frac{179\alpha^4\kappa}{4m^5} - \frac{1172\alpha^6\kappa^2}{4m^8} + \frac{130991\alpha^8\kappa^3}{m^{11}} + \frac{1984833\alpha^{10}\kappa^4}{4m^{11}}, \\ \bar{B} &= \frac{1}{2} + \frac{32\alpha^2\kappa}{m^3} + \frac{339\alpha^4\kappa^2}{m^6} + \frac{12683\alpha^6\kappa^3}{4m^9} + \frac{51165\alpha^8\kappa^4}{2m^{12}}, \\ \bar{C} &= \frac{\kappa}{4m} - \frac{9\alpha^2\kappa^2}{4m^4}. \end{aligned} \quad (6.245)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación (6.243), está dada por

$$\omega^2 = -\frac{\bar{B}}{2\bar{A}} \pm \frac{\sqrt{\bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C}}}{2\bar{A}}, \quad (6.246)$$

introduciendo cada uno de los valores de las constantes (6.245), se obtiene

$$\begin{aligned}\sqrt{\bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C}} &\approx \frac{6\alpha}{m} \sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \\ \bar{A}^{-1} &\approx \frac{4\kappa}{m} \left[ 1 + \frac{7\alpha^2\kappa}{m^3} + \frac{179\alpha^4\kappa^2}{m^6} + \dots \right], \\ \frac{\bar{B}}{2} &\approx \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{64\alpha^2\kappa}{m^3} + \frac{678\alpha^4\kappa^2}{m^6} + \dots \right], \\ \frac{\bar{B}}{2\bar{A}} = \frac{\bar{B}\bar{A}^{-1}}{2} &\approx \frac{\kappa}{m} \left[ 1 + \frac{71\alpha^2\kappa}{m^3} + \frac{857\alpha^4\kappa^2}{m^6} + \dots \right], \\ \frac{\sqrt{\bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C}}}{2\bar{A}} = \frac{\sqrt{\bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C}}\bar{A}^{-1}}{2} &\approx \frac{\kappa}{m} \left[ \frac{12\alpha}{m} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} + \frac{84\alpha^3\kappa}{m^4} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} + \frac{2148\alpha^5\kappa^2}{m^7} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} + \dots \right].\end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtienen las frecuencias

$$\begin{aligned}\omega_{1,2} &\approx \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \left[ 1 + \frac{71\alpha^2\kappa}{2m^3} + \frac{857\alpha^4\kappa^2}{2m^6} \right. \\ &\quad \mp \left. \frac{6\alpha}{m} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \mp \frac{42\alpha^3\kappa}{m^4} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \mp \frac{1074\alpha^5\kappa^2}{m^7} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \mp \dots \right].\end{aligned}\quad (6.247)$$

Con estas dos frecuencias, se puede obtener un par de osciladores desacoplados que oscilan a dichas frecuencias. En consecuencia, la cuantización del sistema se vuelve trivial. No obstante, como se verá más adelante el espectro es completamente diferente del obtenido de la utilización del mapeo de Darboux, pues supuesto los dos espectros coinciden en el caso en que tiene el parámetro de conmutatividad igual a cero.

#### 6.7.4. Espectro Cuántico

Como se mencionó anteriormente, una vez utilizado el método de modos normales, se obtienen un par de osciladores armónicos desacoplados y de esta manera se puede llevar a cabo la cuantización de manera trivial. Como una consecuencia simple, se sabe dichos osciladores tienen las energías cuánticas siguientes

$$E_{n_1, n_2} = \omega_1(n_1 + 1/2) + \omega_2(n_2 + 1/2).\quad (6.248)$$

Introduciendo las frecuencias (6.247), se obtiene

$$\begin{aligned}E_{n_1, n_2} &\approx \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \left[ 1 + \frac{71\alpha^2\kappa}{2m^3} + \frac{857\alpha^4\kappa^2}{2m^6} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6\alpha}{m} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} - \frac{42\alpha^3\kappa}{m^4} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} - \frac{1074\alpha^5\kappa^2}{m^7} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} - \dots \right] (n_1 + 1/2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \left[ 1 + \frac{71\alpha^2\kappa}{2m^3} + \frac{857\alpha^4\kappa^2}{2m^6} \right. \\
& \left. + \frac{6\alpha}{m} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} + \frac{42\alpha^3\kappa}{m^4} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} + \frac{1074\alpha^5\kappa^2}{m^7} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} + \dots \right] (n_2 + 1/2).
\end{aligned}$$

Desarrollando, resulta

$$\begin{aligned}
E_{n_1, n_2} & \approx \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \left[ 1 + \frac{71\alpha^2\kappa}{2m^3} + \frac{857\alpha^4\kappa^2}{2m^6} + \dots \right] (n_1 + n_2 + 1) \\
& + \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \left[ \frac{6\alpha}{m} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} - \frac{42\alpha^3\kappa}{m^4} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} - \frac{1074\alpha^5\kappa^2}{m^7} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} - \dots \right] (n_2 - n_1)
\end{aligned}$$

Puede observarse que el espectro contiene una energía mínima bien definida. Sin embargo, los términos que contienen las potencias del parámetro de conmutatividad son completamente diferentes del caso de la energía obtenida por el mapeo de Darboux, esto se debe a que para este caso las transformaciones de Fourier que conectan a una representación con otra no existen, como en el caso de la partícula en caída libre en el cual se pueden conectar ambos esquemas. Para el caso  $\alpha = 0$ , las dos teorías; la resuelta con el mapeo de Darboux y la resuelta con modos normales coinciden, lo cual es de esperarse ya que en este caso la no-conmutatividad desaparece, reduciendo el sistema a un par de osciladores armónicos desacoplados.



# Capítulo 7

## Modelo de Chern-Simons de Orden

$n$

En vista de que en el capítulo cinco se mostró que la no-conmutatividad surge de manera natural en teorías de orden superior. En este capítulo se hace nuevamente una extensión al modelo de Chern-Simons a ordenes más altos que dos. El procedimiento seguido en este capítulo es exactamente al mismo seguido en el capítulo cinco y los resultados son básicamente los mismos del modelo con derivadas de segundo orden.

### 7.1. Modelo con Derivadas Mayores que 2

En los capítulos anteriores se trabajó con el modelo mecánico de Chern-Simons con derivadas temporales de orden dos. En este capítulo se construirá la extensión de este modelo, al modelo con derivadas temporales de orden  $n$ . También se mostrará que los resultados obtenidos de las teorías de orden superior, específicamente ordenes más grandes que dos, son en esencia equivalentes a los resultados que se siguen de la teoría de orden dos, por supuesto la dimensión es más grande en estos casos, sin embargo, una vez llevada a cabo la aproximación perturbativa los resultados son básicamente idénticos y la dimensión es la misma. Tal como en el caso de orden dos, sólo se tiene que sustituir las derivadas de orden  $n$  en el término de Chern-Simons; de tal manera que el Lagrangiano por estudiar es la siguiente:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 + \frac{\kappa}{2} x_i^2 + \alpha \epsilon_{ij} x_i^{(n-1)} x_j^{(n)}, \quad i = 1, 2, \quad (7.1)$$

donde, de igual manera que con en el caso de segundo orden,  $\alpha$  es el parámetro que de conmutatividad y jugará el papel de parámetro de perturbación, una vez hecha la aproximación, se asumirá que es mucho menor que la unidad. El tensor  $\epsilon_{ij}$  es el tensor de Levi-Civita bidimensional. Las  $(n)$  significan el orden de las derivadas temporales.

Con este modelo se pretende investigar la no-conmutatividad, en el mismo sentido que se hizo en el caso de su contraparte de orden dos. Como se vio en los capítulos

anteriores, la no-conmutatividad surge de manera muy natural en esta clase de teorías, con esta extensión se desea probar que no importa que tan grande sea el orden de las derivadas, los paréntesis de Dirac preservan una estructura muy similar a la teoría de orden dos. Además de que, por supuesto la no-conmutatividad es inherente a la teoría.

### 7.1.1. Momentos y Constricciones

Como se vio en el capítulo dos, la teoría de Ostrogradski tiene un número mayor de momentos que el formalismo canónico. En efecto, la relación general para teorías de orden  $(n)$  los momentos están dados por

$$P_{mi} = \sum_{k=m}^n \left( -\frac{d}{dt} \right)^{k-m} \frac{\partial L}{\partial x_i^{(k)}}. \quad (7.2)$$

En particular para el caso  $m = n$ , de nuestra teoría tenemos

$$P_{ni} = -\alpha \epsilon_{ij} x_j^{(n-1)}. \quad (7.3)$$

Como puede observarse esta ecuación es una restricción, de acuerdo con el formalismo de Dirac, esto se sigue del hecho de que en este caso el espacio fase está constituido por  $\{x_i, P_{1i}, \dot{x}_i, P_{2i}, \ddot{x}_i, P_{3i}, \dots, x_i^{(n-1)}, P_{ni}\}$ . Consecuentemente, dado que el momento resulto proporcional a su variable conjugada, por lo tanto, la restricción se define como:

$$\phi_i = P_{ni} + \alpha \epsilon_{ij} x_j^{(n-1)}. \quad (7.4)$$

Obsérvese que esta restricción es muy parecida a la restricción del modelo de orden dos. Como se vio en el caso de la teoría de orden dos, la restricción era proporcional a sus velocidades. Las velocidades para la teoría de orden dos eran variables del espacio fase. En el caso que se está tratando las derivadas temporales  $x_i^{(n-1)}$ , también son variables del espacio fase. En este sentido, se puede decir que se está hablando de una generalización de la teoría de orden 2, ya que si se hace  $n = 2$  se recupera la restricción para el caso de la teoría de orden dos. Este tipo de resultados se encontrarán en lo que sigue del capítulo, es decir, se pueden recuperar muchos de los resultados obtenidos para el caso de la teoría de orden dos, únicamente tomando  $n = 2$ .

Por otra parte, los paréntesis de Poisson entre las restricciones tiene la siguiente forma:

$$\{\phi_i, \phi_j\} = 2\alpha \epsilon_{ij}. \quad (7.5)$$

Los cuales tienen exactamente la misma forma que para el caso de orden dos. No obstante, en esta teoría existen más paréntesis de Dirac, ya que el espacio fase en este caso es mucho más grande. Sin embargo, los paréntesis no-triviales son tan sólo los paréntesis asociados a la variable  $x_i^{(n-1)}$ , esto se puede ver fácilmente de la forma de las restricciones. Tal como en el caso de orden dos, la no-nulidad de estos paréntesis indica que se trata de restricciones de segunda clase. Por lo tanto, se tienen que construir los paréntesis de Dirac, estos se construirán en la siguiente sección.



## 7.2. Paréntesis de Dirac y Dos-forma Simpléctica

Hasta este punto se ha mostrado que la teoría de orden  $(n)$ , contiene los mismos resultados de la teoría de orden dos, esto puede ser verificado tomando  $n = 2$ . Ahora se construirán, los paréntesis de Dirac y se mostrará que estos tienen una estructura similar a los obtenidos de la teoría de orden dos. Como se vio en el capítulo dos, los paréntesis de Dirac de manera general están definidos de la siguiente forma:

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_i\} \{\phi_i, \phi_j\}^{-1} \{\phi_j, B\}. \quad (7.6)$$

Para el sistema que se está tratando, estos paréntesis están dados por

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} + \frac{1}{2\alpha} \{A, \phi_i\} \epsilon_{ij} \{\phi_j, B\}. \quad (7.7)$$

Esto se sigue del hecho de que ambas teorías poseen constricciones con la misma estructura, únicamente difieren en la dimensión del espacio fase.

Para poder obtener el álgebra que satisfacen las variables del espacio fase, se tienen que identificar cada una de las diferentes variables del espacio fase con  $A$  y  $B$ . Antes de hacer esta identificación, se tienen que hacer fuertes las constricciones (7.4), ya que de no hacerlo se encuentra un problema con la degeneración de la matriz simpléctica. Con esta observación, el álgebra del espacio fase reducido es:

$$\{x_i^{(n-2)}, P_{n-1i}\}_D = \delta_{ij} \quad \{x_i^{(n-1)}, x_j^{(n-1)}\}_D = -\frac{\epsilon_{ij}}{2\alpha}. \quad (7.8)$$

Aquí nuevamente puede observarse que la estructura de Poisson es muy parecida a la del modelo de orden dos. En efecto, si se toma  $n = 2$  se tiene exactamente la misma estructura. Tal como se mencionó anteriormente el modelo está mostrando los mismos resultados anteriormente obtenidos para el caso de la teoría de orden dos. Además es posible obtener a partir de la teoría presentada aquí, los resultados obtenidos de la teoría de orden dos con tan sólo tomar  $n = 2$ .

Las constricciones reducen el espacio fase, significa que si se está considerando las constricciones (7.4) y además si el espacio fase en un principio estaba constituido por  $2n$  variables y cuando se toma en cuenta las constricciones se tienen  $2n - 2$  variables, por ejemplo, si el sistema posee  $2n$  variables con  $n = 2$ , este se reduce a dos grados de libertad.

Por otra parte, tal como su contraparte de orden dos, el álgebra (7.8) define la matriz  $\omega^{AB}$  y la inversa de ésta define la dos-forma simpléctica, la cual tiene la forma

$$d\Omega = \frac{1}{2} \omega_{AB} dz^A \wedge dz^B. \quad (7.9)$$

La cual escrita explícitamente está definida como

$$d\Omega = \sum_{m=2}^n dx_i^{(m-2)} \wedge dP_{n-1i} + \alpha \epsilon_{ij} dx_i^{(m-1)} \wedge dx_j^{(n-1)}. \quad (7.10)$$

Esta dos-forma más adelante proporcionará los paréntesis de Dirac para el caso de la teoría perturbada. Además se verá más adelante que esta perturbación la cual será tomada en  $\alpha$  como parámetro de perturbación, da como resultado de la perturbación el espacio fase resultará no-conmutativo.

### 7.3. Aproximación Perturbativa

Tal como en el caso de la teoría de orden dos, se tienen que eliminar las derivadas temporales de orden superior, de tal manera, que se supere el problema con el estado de mínima energía cuando se realice la cuantización. Sin embargo, esta perturbación reducirá los grados de libertad de manera dramática. Para el caso aquí tratado con  $2n - 2$  grados de libertad, una vez hecha la perturbación ésta se reducirá a 4 grados de libertad.

En la aproximación a primer orden en  $\alpha$ , tal se vio en el segundo capítulo, dependiendo de la paridad del orden de la derivada, las correcciones serán o por derivadas de primer orden o por las coordenadas. Específicamente hablando cuando la paridad es par tenemos que aproximar por las coordenadas, cuando la paridad es impar la aproximación es por las primeras derivadas de estas. En consecuencia, las correcciones a los momentos están dadas por

$$\begin{aligned} P_{1i} &\approx m\dot{x}_i + \alpha A_1(\kappa, m)\epsilon_{ij}x_j & P_{2i} &\approx \alpha A_2(\kappa, m)\epsilon_{ij}\dot{x}_j, \\ P_{3i} &\approx \alpha A_3(\kappa, m)\epsilon_{ij}x_j, \end{aligned} \quad (7.11)$$

y en general para ( $n$ ) mayor que tres, se tiene

$$P_{2ni} \approx \alpha A_{2n}(\kappa, m)\epsilon_{ij}\dot{x}_j \quad P_{2n+1i} \approx \alpha A_{2n+1}(\kappa, m)\epsilon_{ij}x_j, \quad (7.12)$$

donde,  $A_{2n}$  y  $A_{2n+1}$  son polinomios de los parámetros  $\kappa$  y  $m$ , además  $n = 1, 2, \dots$ . En el caso de las derivadas se tiene

$$\begin{aligned} x_i^{(2n)} &\approx \alpha B_{2n}(\kappa, m)x_i + \alpha C_{2n}\epsilon_{ij}\dot{x}_j \\ x_i^{(2n+1)} &\approx B_{2n+1}(\kappa, m)\dot{x}_i + \alpha C_{2n+1}(\kappa, m)\epsilon_{ij}x_j, \end{aligned} \quad (7.13)$$

donde  $B_{2n}$ ,  $C_{2n}$  y  $B_{2n+1}$ ,  $C_{2n+1}$  son polinomios de los parámetros  $\kappa$  y  $m$ , además  $n = 1, 2, \dots$ .

La dos forma simpléctica a orden  $\alpha$  queda de la forma

$$d\Omega = -m\delta_{ij}dx_i \wedge d\dot{x}_j + \alpha A(\kappa, m)\epsilon_{ij}dx_i \wedge dx_j + \alpha B(\kappa, m)\epsilon_{ij}d\dot{x}_i \wedge d\dot{x}_j, \quad (7.14)$$

donde  $A(\kappa, m)$  y  $B(\kappa, m)$  son polinomios en  $\kappa$  y  $m$ . Si se redefine tal como en el caso de orden dos, la nueva variable  $\rho_i = m\dot{x}_i$ . La dos-forma se reduce a

$$d\Omega = d\rho_i \wedge dx_i + \alpha A(\kappa, m)\epsilon_{ij}dx_i \wedge dx_j + \frac{\alpha B(\kappa, m)}{m^2}\epsilon_{ij}d\rho_i \wedge d\rho_j. \quad (7.15)$$

Esta dos-forma define la matriz

$$\omega_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha A(\kappa, m) & -1 & 0 \\ -2\alpha A(\kappa, m) & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2\alpha \frac{B(\kappa, m)}{m^2} \\ 0 & 1 & -2\alpha \frac{B(\kappa, m)}{m^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.16)$$

con inversa

$$\omega^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha D(\kappa, m) & 1 & 0 \\ -\alpha D(\kappa, m) & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \alpha E(\kappa, m) \\ 0 & -1 & -\alpha E(\kappa, m) & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.17)$$

cada una de las entradas de ésta matriz proporcionan los paréntesis de Dirac, es decir, se obtienen paréntesis a primer orden en  $\alpha$  de la forma

$$\{x_i, x_j\}_D = \alpha D(\kappa, m)\epsilon_{ij}, \quad \{\dot{x}_i, \dot{x}_j\}_D = \alpha E(\kappa, m)\epsilon_{ij}, \quad \{x_i, \rho_j\}_D = \delta_{ij}. \quad (7.18)$$

Donde  $D(\kappa, m)$  y  $E(\kappa, m)$  son polinomios en  $\kappa$  y  $m$ .

El Hamiltoniano por otra parte, es de la forma

$$H = F(\alpha, \kappa, m)\dot{x}_i^2 + G(\alpha, \kappa, m)x_i^2 + J(\alpha, \kappa, m)\epsilon_{ij}x_i\dot{x}_j, \quad (7.19)$$

donde  $F$ ,  $G$ , y  $J$  son nuevamente polinomios en los parámetros de la teoría. Estos polinomios como se recordará para el caso de  $n = 2$ , tienen una forma bien específica y únicamente dependen de los parámetros de la teoría.

## 7.4. Modelo con Derivadas de Orden 3

En la sección anterior se trató con la teoría de orden ( $n$ ), sin embargo, los resultados obtenidos fueron considerados en abstracto, de tal manera que la mayor parte de los resultados no son del todo obvios. Por tal motivo, para aclarar los resultados y mostrar con precisión la analogía con la teoría de orden dos, se tratará con la teoría de orden tres. Para ello considérese el Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}_i^2 + \frac{\kappa}{2}x_i^2 + \alpha\epsilon_{ij}x_i^{(2)}x_j^{(3)}. \quad (7.20)$$

Los momentos asociados a esta teoría son:

$$P_{1i} = \frac{\partial L}{\partial x_i^{(1)}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i^{(2)}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i^{(3)}} \right) = mx_i^{(1)} - 2\alpha\epsilon_{ij}x_j^{(4)}. \quad (7.21)$$

$$P_{2i} = \frac{\partial L}{\partial x_i^{(2)}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i^{(3)}} \right) = 2\alpha\epsilon_{ij}x_j^{(3)}. \quad (7.22)$$

$$P_{3i} = \frac{\partial L}{\partial x_i^{(3)}} = -\alpha \epsilon_{ij} x_j^{(2)}. \quad (7.23)$$

Tal como se anticipó, del último de los momentos se puede inferir que se trata de una constricción, ya que se puede ver que ésta es proporcional a su variable conjugada. Por lo tanto, se define la constricción como:

$$\phi_i = P_{3i} + \alpha \epsilon_{ij} x_j^{(2)}. \quad (7.24)$$

Los paréntesis de Poisson entre las constricciones son:

$$\{\phi_i, \phi_j\} = 2\alpha \epsilon_{ij}. \quad (7.25)$$

De manera que tal como se ha anticipado reiteradamente, no importa el orden de la teoría la estructura de los paréntesis entre las constricciones es la misma y por tanto sus paréntesis de Dirac que de estas se siguen tienen una estructura equivalente, salvo supuesto la dimensión del espacio fase.

### 7.4.1. Hamiltoniano Canónico y Hamiltoniano Total

Por definición el Hamiltoniano Canónico está dado por

$$\begin{aligned} H_c &= P_{1i} x_i^{(1)} + P_{2i} x_i^{(2)} + P_{3i} x_i^{(3)} - L \\ &= P_{1i} x_i^{(1)} + \frac{1}{2} P_{2i} x_i^{(2)} - \frac{\epsilon_{ij}}{2\alpha} P_{3i} P_{2j} - \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 + \frac{\kappa}{2} x_i^2. \end{aligned} \quad (7.26)$$

El Hamiltoniano total, por otra parte, se encuentra agragando las constricciones como multiplicadores de Lagrange

$$H_T = H_c + \lambda_i \phi_i. \quad (7.27)$$

Con el Hamiltoniano total se puede encontrar otras constricciones o se obtiene el valor de  $\lambda_i$ . Para el caso de la teoría que se está tratando, se encuentra el valor del multiplicador de Lagrange, es decir, si se evoluciona la constricción, resulta

$$\dot{\phi}_k = \{\phi_k, H_T\} = -\frac{P_{2k}}{2} + 2\epsilon_{ki} \lambda_i \approx 0. \quad (7.28)$$

En consecuencia, el valor del multiplicador está dado por

$$\lambda_i \approx -\frac{\epsilon_{ij}}{4\alpha} P_{2j}. \quad (7.29)$$

En suma, dado que el paréntesis de Poisson es diferente de cero y la evolución de las constricciones determinan los multiplicadores de Lagrange, se concluye que se trata de constricciones de segunda clase. Por lo tanto, hay que construir los paréntesis de Dirac,

los cuales de manera genérica se definen como en la ecuación (7.7) y en particular para la teoría aquí estudiada son

$$\{x_i, P_{1j}\}_D = \{\dot{x}_i, P_{2j}\}_D = \delta_{ij} \{\ddot{x}_i, \ddot{x}_j\}_D = -\frac{\epsilon_{ij}}{2\alpha}. \quad (7.30)$$

Estos paréntesis definen la matriz

$$\omega^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.31)$$

la inversa de esta matriz

$$\omega_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

Esta matriz define la dos-forma siguiente:

$$d\Omega = -\delta_{ij} dx_i \wedge dP_{1j} - \delta_{ij} d\dot{x}_i \wedge dP_{2j} + \alpha \epsilon_{ij} d\ddot{x}_i \wedge \ddot{x}_j. \quad (7.33)$$

Las aproximaciones para los momentos y las aceleraciones a primer orden en  $\alpha$ , son

$$\begin{aligned} P_{1i} &\approx m\dot{x}_i - \frac{2\alpha\kappa^2}{m^2}\epsilon_{ij}x_j, \\ P_{2i} &\approx -\frac{2\alpha\kappa}{m}\epsilon_{ij}\dot{x}_j, \\ \ddot{x}_i &\approx -\frac{\kappa}{m}x_i + \frac{2\alpha\kappa^2}{m^3}\epsilon_{ij}\dot{x}_j. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Introduciendo las diferenciales de estas ecuaciones en la dos-forma, se tiene la dos-forma a primer orden en  $\alpha$

$$d\Omega = -m\delta_{ij}dx_i \wedge d\dot{x}_j + \frac{3\alpha\kappa^2}{m^2}\epsilon_{ij}dx_i \wedge dx_j + \frac{2\alpha\kappa}{m}\epsilon_{ij}d\dot{x}_i \wedge d\dot{x}_j. \quad (7.35)$$

Redefiniendo  $\rho_i = m\dot{x}_i$ , resulta

$$d\Omega = -\delta_{ij}dx_i \wedge d\rho_j + \frac{3\alpha\kappa^2}{m^2}\epsilon_{ij}dx_i \wedge dx_j + \frac{2\alpha\kappa}{m^3}\epsilon_{ij}d\rho_i \wedge d\rho_j. \quad (7.36)$$

Por lo tanto, la matriz  $\omega_{AB}$  es

$$\omega_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{6\alpha\kappa^2}{m^2} & -1 & 0 \\ -\frac{6\alpha\kappa^2}{m^2} & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{4\alpha\kappa}{m^3} \\ 0 & 1 & -\frac{4\alpha\kappa}{m^3} & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.37)$$

la inversa de esta matriz está dada por

$$\omega^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\alpha\kappa}{m^3} & 1 & 0 \\ -\frac{2\alpha\kappa}{m^3} & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{6\alpha\kappa^2}{m^2} \\ 0 & -1 & -\frac{6\alpha\kappa^2}{m^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.38)$$

Por lo tanto, los paréntesis de Dirac están dados por

$$\{x_i, x_j\}_D = \frac{2\alpha\kappa}{m^3}\epsilon_{ij} \quad \{\rho_i, \rho_j\}_D = \frac{6\alpha\kappa^2}{m^2}\epsilon_{ij} \quad \{x_i, \rho_j\}_D = \delta_{ij}. \quad (7.39)$$

Por otra parte, el Hamiltoniano es de la forma (7.19). Tal como se mencionó todos los resultados son similares al caso de orden  $n = 2$ , no importa el orden de la teoría. Porsupuesto este es un efecto del método perturbativo usado, ya que este reduce la dimensión del espacio fase.

# Capítulo 8

## Física de Dos Tiempos y Violación de Lorentz

Como un preámbulo al siguiente capítulo, en este capítulo se hará una breve introducción a la física de dos tiempos y al concepto de violación de Lorentz. Para el caso de la física de dos tiempos, se muestran los puntos fundamentales de tal teoría. Por otra parte, para la violación de Lorentz se presenta una relación de dispersión que será crucial para el próximo capítulo.

### 8.1. Dualidad de Norma

Las reglas de cuantización de la mecánica son simétricas bajo el intercambio de coordenadas y momentos. Esto es conocido como la simetría simpléctica  $Sp(2)$  que transforma  $(x, p)$  como un doblete. Las ecuaciones de Maxwell para la electricidad y magnetismo son simétricas bajo el intercambio del campo magnético y eléctrico sin fuentes. Los campos eléctricos y magnéticos son coordenadas generalizadas y momentos generalizados. En presencia de partículas con cargas eléctricas y magnéticas la simetría es una versión discreta de  $Sp(2)$ . Esta simetría, conocida como dualidad *electro-magnética*, la cual es aparentemente rota en nuestra parte del universo por la ausencia de monopolos magnéticos y diones. En este capítulo se introduce un modelo que introduce la física de dos tiempos, este se basa en la implementación local de la simetría simpléctica.

En esta sección se estudiará un sistema elemental con simetría local dual continua  $Sp(2)$ . Como inicio se partirá por la reformulación de la línea universo de la descripción de la partícula puntual no-masiva, considerando la simetría de norma  $Sp(2)$ . Con este nuevo modelo se puede hacer una teoría más general capaz de describir no sólo la partícula relativista, sino otros sistemas físicos duales a este, tal como la partícula no-relativista, oscilador armónico y otros.

Se harán algunas definiciones, estas servirán para remover la distinción entre  $x$  y  $p$ . Renómbrese  $X_1^M = X^M$  y  $X_2^M = P^M$ . Defínase el doblete  $X_i^M = (X_1^M, X_2^M)$ . La simetría

local actuá de la manera siguiente:

$$\delta_\omega X_i^M(\tau) = \epsilon_{ik} \omega^{kl}(\tau) X_l^M(\tau), \quad (8.1)$$

en este caso, se tiene que  $\omega^{kl}(\tau) = \omega^{lk}(\tau)$  es una matriz simétrica definida con tres parámetros locales de  $Sp(2, R)$  y  $\epsilon_{ik}$  es el símbolo de Levi-Civita el cual es invariante de  $Sp(2, R)$ , además éste sirve para bajar y subir índices. El  $Sp(2, R)$  campo  $A^{ij}(\tau)$  es simétrico en los índices ( $ij$ ) y transforma de la manera estándar como

$$\delta A^{ij} = \partial_\tau \omega^{ij} + \omega^{ik} \epsilon_{kl} A^{lj} + \omega^{jk} \epsilon_{kl} A^{il}. \quad (8.2)$$

La derivada covariante, por otra parte, está dada por

$$D_\tau X_i^M = \partial_\tau X_i^M - \epsilon_{ik} A^{kl} X_l^M. \quad (8.3)$$

Con todos estos ingredientes, una acción que es invariante bajo esta simetría de norma, está dada por

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2} \int_0^T d\tau (D_\tau X_i^M) \epsilon^{ij} X_j^N \eta_{MN} = \int_0^T d\tau \left[ \partial_\tau X_1^M X_2^N - \frac{1}{2} A^{ij} X_i^M X_j^N \right] \eta_{MN} = . \quad (8.4) \\ &= \int_0^T d\tau \left[ \partial_\tau X^M P^M - \frac{e}{2} P^M P^M - A X^M P^M - \frac{k}{2} X^M X^M \right] \eta_{MN}, \end{aligned}$$

donde se ha elegido el campo de norma como  $A^{11} = k$ ,  $A^{12} = A^{21} = A$ , y  $A^{22} = e$ .

Eliminando los  $P^M$  por sus ecuaciones de movimiento se obtiene

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_0^T d\tau \left[ \frac{e}{2} (\partial_\tau X - A X)^2 - \frac{k}{2} X^2 \right] = \\ &= \int_0^T d\tau \left[ \frac{e}{2} (\partial_\tau X)^2 - \frac{K}{2} X^2 \right], \quad K = k - \frac{A^2}{e} = -\partial_\tau \left( \frac{A}{e} \right), \end{aligned}$$

Hasta este punto la métrica es considerada como plana en  $d + 2$  dimensiones. La signatura de dicha métrica no ha sido especificada en esta etapa, posteriormente se mostrará que se debe imponer la signatura, en la cual se consideran dos dimensiones temporales. De la forma explícita de la acción se puede identificar las variables canónicas conjugadas como  $X_1^M = X^M$  y  $\partial S_0 / \partial \dot{X}_1^M = X_2^M = P^M$ , de tal manera, que la acción es consistente con la idea de que  $(X_1^M, X_2^M)$  es el doblete  $(X^M, P^M)$  que describe dos partículas.

Además de la simetría local  $Sp(2, R)$  existe una simetría manifiestamente global  $SO(d, 2)$  que actúa en las variables espacio-temporales  $X_i^M$  con  $d$  variables espaciales y 2 temporales, etiquetadas con el índice  $M$ . Esta simetría contiene la simetría  $d$ -dimensional de Poincaré  $ISO(d - 1, 1)$  como un subgrupo, pero no existe simetría de



traslación en  $d+2$  dimensiones. Usando el teorema de Noëther se puede mostrar que los generadores del grupo de simetría  $SO(d, 2)$ , son:

$$L^{NM} = \epsilon^{ij} X_i^M X_j^N = X^M P^N - X^N P^M. \quad (8.5)$$

Estos generadores, son manifiestamente invariantes de norma bajo las transformaciones locales  $Sp(2, R)$ .

Hasta aquí se ha definido la acción y las posibles simetrías que esta posee. Lo que se desea hacer ahora es desarrollar la teoría desde el punto de vista de su dinámica. De la acción (8.4) se puede observar que tal y como está escrita, ésta acción posee un término cinético y un término proporcional a  $X_i \cdot X_j$ . Este término está multiplicado por los campos de norma, los cuales tal y como están elegidos actúan como multiplicadores de Lagrange. Dicho término proporciona el siguiente conjunto de constricciones de primera clase

$$X^2 = P^2 = X \cdot P = 0. \quad (8.6)$$

Las cuales se pueden definir como:

$$\Phi_1 = X^2, \quad \Phi_2 = P^2, \quad \Phi_3 = X \cdot P. \quad (8.7)$$

Algo interesante sucede con este conjunto de constricciones, por ejemplo, si la signatura de  $\eta_{NM}$  corresponde a una sola coordenada temporaloides, se deduce que la única solución clásica es que  $X^N$  y  $P^M$  son paralelos. Esta solución es trivial en el sentido de que no existe momento angular. Entonces para considerar soluciones no-triviales, se tienen que al menos dos dimensiones temporaloides son requeridas, una mayor cantidad de coordenadas temporaloides no son posibles ya que la simetría de norma no permite más que sólo dos dimensiones temporaloides, para no incurrir en problemas de estados de energías negativas. Esto es, el sistema únicamente tiene existencia física si se elige la métrica con signatura  $(d, 2)$ .

Estas constricciones poseen la siguiente álgebra de Poisson

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = 4\Phi_3, \quad \{\Phi_1, \Phi_3\} = 2\Phi_1, \quad \{\Phi_2, \Phi_3\} = -2\Phi_2. \quad (8.8)$$

Esta álgebra muestra que se tratan de constricciones de primera clase, ya que sus paréntesis son proporcionales a las constricciones mismas. Lo que implica, que dichas constricciones son los generadores del grupo de norma. Es evidente además que de cada sistema del cuales son derivados los sistemas, éstos son duales entre si.

Se tiene la libertad de elegir hasta tres funciones, ya que  $Sp(2)$  tiene tres parámetros de norma. A continuación se describirá de manera general como el procedimiento opera: (1) Se hacen  $n$  elecciones de norma (usando  $n = 2$  o  $n = 3$ ) para las  $2d + 4$  funciones  $X^M(\tau)$ ,  $P^M(\tau)$ . (2) Se resuelven las  $n$  constricciones, las cuales determinan  $n$  funciones adicionales, es decir, se ha encontrado un sistema con la configuración de norma fija

$X_0^M(\tau)$ ,  $P_0^M(\tau)$  parametrizada en términos de  $2(d + 2 - n)$  funciones independientes  $x^\mu(\tau)$  y  $p^\mu(\tau)$ . (3) La dinámica para los restantes grados de libertad  $x^\mu(\tau)$  y  $p^\mu(\tau)$  están determinados por insertar  $X_0^M(\tau)$  y  $P_0^M(\tau)$  en la acción (8.4), esto es, se ha construido un sistema con una sola coordenada temporal  $\tau$ .

$$S(x, p) = S_0(X_0^M(\tau), P_0^M(\tau)) = \int d\tau L(x(\tau), p(\tau), A(\tau)). \quad (8.9)$$

Para poder ver de manera muy clara el alcance de esta teoría, se hará el ejemplo de la partícula relativista no-masiva. Para poder obtener dicho sistema, considérese la siguiente base de coordenadas  $X^M = (X^+, X^-, x^\mu)$ , con la métrica  $\eta^{MN}$  que toma los valores  $\eta^{+-} = -1$  y  $\eta^{\mu\nu} = \text{Minkowski}$ . Elíjase dos normas  $X^+ = 1$ , y  $P^M = 0$ , con estas dos normas se puede realizar las constricciones  $X^2 = X \cdot P = 0$ , es decir, se ha elegido

$$M = (+, -, \mu), \quad (8.10)$$

$$X_0^M(\tau) = \left(1, \frac{x^2(\tau)}{2}, x^\mu(\tau)\right), \quad (8.11)$$

$$P_0^M(\tau) = (0, x^\mu(\tau) \cdot p^\mu(\tau), p^\mu(\tau)). \quad (8.12)$$

Introduciendo estas ecuaciones en la acción (8.4), se obtiene

$$S(x, p) = \int_0^T d\tau \left( -\dot{X}^- P^- - \dot{X}^- P^+ + \dot{x}^\mu p_\mu - \frac{e}{2} p^2 \right). \quad (8.13)$$

$$= \int_0^T d\tau \left( \dot{x}^\mu p_\mu - \frac{e}{2} p^2 \right). \quad (8.14)$$

La cual se reduce a

$$S(x, p) = \frac{1}{2} \int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{e}, \quad (8.15)$$

la cual es obviamente la acción de la partícula relativista no masiva.

Este es tan sólo un ejemplo de los posibles modelos que produce este formalismo, tan sólo con hacer diferentes elecciones de norma y resolviendo las constricciones. Por ejemplo, la elección de  $x^-(\tau) = \tau$  como norma y resolviendo la restricción  $P^2 = 0$ , proporciona la partícula relativista no masiva, pero escrita en la norma del cono de luz.

## 8.2. Violación de Lorentz

La simetría de Lorentz es la invariancia de las leyes físicas bajo rotaciones y empujones. Como una simetría global en el espacio-tiempo de Minkowski, la cual es importante en la relatividad especial y el Modelo Estándar de la física de partículas, donde también

implica la invariancia CPT. Como una simetría local en los marcos en caída libre, el cual es esencial en la Relatividad General. Sin embargo, desviaciones de dicha simetría pueden presentarse y estas pueden ser utilizadas como señales potenciales de una nueva física al nivel de escalas de Planck y teorías unificadas.

Una manera simple de estudiar sistemas que violen la simetría de Lorentz, es modificar las transformaciones de Lorentz. Una implementación de esto es estudiar versiones alternativas a las relaciones de dispersión. Sin embargo, modificaciones de las relaciones de dispersión pueden solo describir cambios en la propagación de partículas libres. No obstante, la física en realidad es más que solo propagación libre de partículas y es necesario considerar las interacciones. En particular, cálculos con modificaciones de las relaciones de dispersión, guían a cambios aparentes que son insuficientes para demostrar la violación de Lorentz. Un simple ejemplo de una modificación de una relación de dispersión, que no tiene consecuencias observables en el espacio-tiempo de Minkowski es  $p_\mu p^\mu = m^2 + a_\mu p^\mu$ , donde  $a_\mu$  es un vector de cuatro números en un marco dado. Cálculos directos con esta relación de dispersión parecen dar propiedades que implican violación de Lorentz que dependen de un vector  $a_\mu$ , pero que son inobservables, ya que,  $a_\mu$  puede ser eliminado por la redefinición de la energía y el momento. Se ve entonces, que idealmente para obtener una teoría satisfactoria que describa la violación de Lorentz, debe comprender un tratamiento con interacciones y partículas libres de todas las especies de partículas.

Iniciando desde el Modelo Estándar acoplado a la Relatividad General, se pueden agregar a la acción todos los posibles términos escalares, formados por la contracción de operadores que violan la simetría de Lorentz con coeficientes que controlan la intensidad de los efectos. La teoría efectiva resultante es la llamada Extensión del Modelo Estándar (SME). Sin embargo, el SME maneja simultáneamente todas las especies de partículas, incluyendo interacciones y propagación, de tal manera, que sus ecuaciones de movimiento contienen todas las modificaciones de las relaciones de dispersión. El SME permite tanto violaciones locales como globales de la simetría de Lorentz, bajo interesantes efectos que surgen en la Relatividad General.

Otra de las teorías importantes en las que se viola la simetría de Lorentz, son las teorías no-conmutativas. La idea de que el espacio-tiempo pueda intrínsecamente involucrar no-conmutatividad, posee ciertos inconvenientes que se varán más adelante en esta sección. La no-conmutatividad del espacio-tiempo satisface

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (8.16)$$

donde  $\theta^{\mu\nu}$  es real y antisimétrico.

La violación de la simetría de Lorentz es intrínseca a las teorías no-conmutativas por virtud de que  $\theta^{\mu\nu}$  es diferente de cero y constante en la mayoría de los casos. Tomando en cuenta este hecho, en el capítulo cinco se introdujo un tipo de no-conmutatividad dependiente de las coordenadas, que quizás podría restaurar la simetría de Lorentz.

Una de las aproximaciones para construir teorías de campo cuánticas no-conmutativas, es promover la teoría conmutativa ordinaria a una teoría no-conmutativa por reemplazar

el producto normal de los campos, por el producto de Moyal, definido como

$$f \star g(x) = \exp\left(\frac{1}{2}i\theta^{\mu\nu}\partial_{x^\mu}\partial_{y^\nu}\right)f(x)g(y)\Big|_{x=y}, \quad (8.17)$$

A manera de ejemplo, de como se utiliza este producto considérese teorías de norma, tal como la electrodinámica cuántica (QED), las transformaciones ordinarias de norma deben ser modificadas por sus generalizaciones no-conmutativas. Para la teoría no-conmutativa QED, el Lagrangiana está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}i\bar{\hat{\psi}} \star \gamma^\mu \widehat{D}_\mu - m\bar{\hat{\psi}} \star \hat{\psi} - \frac{1}{4q^2}\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu}. \quad (8.18)$$

Donde cada uno de los siguientes términos significan  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_\star$ , y  $\hat{D}_\mu \hat{\psi} = \partial \hat{\psi} - i\hat{A}_\nu \star \hat{\psi}$  con  $\hat{f} \star \widehat{D}_\mu \hat{g} = \hat{f} \star \hat{D}_\mu \hat{g} - \hat{D}_\mu \hat{f} \star \hat{g}$ .

La implementación de las transformaciones de Lorentz en una teoría no-conmutativa es más complicada que la teoría usual, ya que el tensor  $\theta^{\mu\nu}$  contiene índices de Lorentz. Existen dos tipos de transformaciones de Lorentz, por ejemplo la densidad Lagrangiana (8.18) es completamente covariante bajo las transformaciones de Lorentz; rotaciones o empujones del marco de un observador inercial deja la física invariante, ya que ambos el campo y el tensor  $\theta^{\mu\nu}$  transforman covariantemente. Sin embargo, estos cambios de coordenadas difieren profundamente de las rotaciones o empujones de una partícula o dentro de una configuración localizada de un campo dentro del marco de un observador fijo. En lo que sigue se llamará a los casos anteriores, transformaciones de partícula de Lorentz las cuales dejan  $\theta^{\mu\nu}$  inafectada y en consecuencia modifica la física. Por lo tanto, cualquier teoría de campo no-conmutativa viola la simetría de Lorentz.

El procedimiento que permitió obtener la densidad Lagrangiana (8.18), pierde directa información acerca de la identificación de variables físicas realistas con sus específicos operadores. Por ejemplo, el campo de los electrones en la versión no-conmutativa de QED, es así mismo no-conmutativo y obedece a las convencionales leyes de transformación de norma, tal que la identificación con su contraparte cuántica no es trivial. Aunque es presumiblemente factible, en principio, calcular las observables físicas via campos no-conmutativas, aquí se puede usar una correspondencia entre una teoría no-conmutativa y la teoría de norma convencional, llamada mapeo de Seiberg-Witten, este mapeo permite la construcción de una teoría ordinaria con transformaciones ordinarias, las cuales garantizan el contenido físico equivalentes a la teoría no-conmutativa.

Como se mencionó al inicio de esta sección, la combinación de la teoría de la Relatividad General y el Modelo Estándar de la física de partículas provee una extraordinaria y exitosa descripción de la naturaleza. Sin embargo, incorporando a este modelo términos adicionales independientes de las coordenadas que violan la simetría de Lorentz, guían a una teoría de campos efectiva, este modelo conocido como modelo estándar extendido (SME). En este capítulo únicamente se estudiará, el sector fermiónico, dicho sector

lo estudiaremos con algún detalle como preámbulo del siguiente capítulo, la parte que interesa aquí es únicamente la relación de dispersión que posee dicho sector.

Una forma general para el sector cuadrático de un Lagrangiano renormalizable, que viola la simetría de Lorentz y que describe un fermión masivo con espín un medio es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^\nu\partial_\nu\psi - \bar{\psi}M\psi. \quad (8.19)$$

donde

$$\Gamma^\nu := \gamma^\nu + a^{\mu\nu}\gamma_\nu + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\nu + e^\nu + if^\nu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\lambda\mu\nu}\sigma_{\lambda\mu}, \quad (8.20)$$

y

$$M := a + a_\mu\gamma^\mu + b_\mu\gamma_5\gamma^\mu + \frac{1}{2}H^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}. \quad (8.21)$$

En las anteriores ecuaciones las matrices gamma 1,  $\gamma_5$ ,  $\gamma^\mu$ ,  $\gamma_5\gamma^\mu$  y  $\sigma^{\mu\nu}$  tienen las propiedades convencionales de las matrices gamma de Dirac.

La Hermiticidad del Lagrangiano (8.19) implica que los coeficientes que violan la simetría de Lorentz son todos reales. Sin embargo, los coeficientes  $c_{\mu\nu}$  y  $d_{\mu\nu}$  pueden ser considerados que poseen traza cero,  $g_{\lambda\mu\nu}$  antisimétrico en los dos primeros índices y  $H_{\mu\nu}$  antisimétrica. Todos los anteriores coeficientes violan la simetría de Lorentz, además los coeficientes de la ecuación (8.20) y (8.21) son adimensionales y tienen dimensiones de masa respectivamente.

La construcción del Hamiltoniano de la densidad Lagrangiana (8.19) en el contexto de la teoría cuántica relativista, requiere cierto cuidado ya que (8.19) contiene derivadas temporales además de los usuales. En un marco concordante y una larga clase de observadores asociados a diferentes marcos de referencia, esta dificultad puede ser resuelta por la elección de un nuevo espinor y con ello eliminar los acoplamientos de las derivadas temporales. Escribiendo  $\psi = A\chi$ , donde  $A$  es una matriz singular independiente de las coordenadas espacio-temporales, la cual satisface

$$A^\dagger\gamma^0\Gamma^0A = I, \quad (8.22)$$

donde  $A$  es la matriz unitaria de  $4 \times 4$ . Con esta elección la densidad Lagrangiana no posee derivadas temporales fuera de las conocidas.

Entonces, con la definición del nuevo espinor, las ecuaciones de Euler-Lagrange generan una ecuación de Dirac modificada que depende del nuevo espinor  $\chi$ . Esta puede ser escrita como

$$(i\partial_0 - H)\chi = 0, \quad (8.23)$$

donde el Hamiltoniano es

$$H = -A^\dagger\gamma^0(i\Gamma^j\partial_j - M)A. \quad (8.24)$$

Como es usual, una solución de la ecuación (8.23) es una superposición de ondas planas de la forma

$$\chi(x) = e^{-i\lambda_\mu x^\mu} w(\vec{\lambda}). \quad (8.25)$$

Aquí el 4-espinor  $w(\vec{\lambda})$  debe satisfacer

$$(\lambda_0 - H)w(\vec{\lambda}) = 0, \quad (8.26)$$

donde  $H$  está definido ahora en el espacio  $\lambda$ -momento y  $\vec{\lambda}$  debe satisfacer la relación de dispersión

$$\det(\lambda_0 - H) = 0. \quad (8.27)$$

Una forma alternativa de esta relación de dispersión es

$$\det(\Gamma^\mu \lambda_\mu - M) = 0. \quad (8.28)$$

Para obtener de manera explícita la relación de dispersión, escríbanse  $\Gamma^\mu \lambda_\mu - M$  como

$$\Gamma^\mu \lambda_\mu - M = S + iP\gamma_5 + V^\mu \gamma_\mu + A^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + T^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}, \quad (8.29)$$

donde se ha introducido

$$\begin{aligned} S &= e^\mu \lambda_\mu - m, & P &= f^\mu \lambda_\mu, & V^\mu &= \lambda^\mu + c^{\mu\nu} \lambda_\nu - a^\mu, \\ A^\mu &= d^{\mu\nu} \lambda_\nu - b^\mu, & T^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu\rho} \lambda_\rho - \frac{1}{2} H^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

La expansión explícita del determinante (8.28), da la siguiente relación de dispersión

$$4(V_\mu A_\nu - A_\mu V_\nu - V_\mu V_\nu + A_\mu A_\nu + PT_{\mu\nu} - S\bar{T}_{\mu\nu} + T_{\mu\alpha} T_\nu^\alpha + \bar{T}_{\mu\alpha} \bar{T}_\nu^\alpha)^2 \quad (8.31)$$

$$(V^2 - S^2 - A^2 - P^2)^2 - 4(V^2 - A^2)^2 + 6(\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} A^\alpha V^\beta)^2 = 0,$$

donde  $\bar{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$  denota el tensor dual. Esta relación de dispersión permite obtener la energías en términos de los momentos espaciales. Además esta relación de dispersión será crucial en el siguiente capítulo, ésta mostrará como al recuperar las simetrías que esta viola, se obtienen algunas teorías importantes de la física desde el punto de vista de la unificación.

# Capítulo 9

## Violación de Lorentz, Física de Dos Tiempos y Cuerdas

En este último capítulo se muestra algunas características importantes de la relación de dispersión presentada en el capítulo anterior. El punto importante es que esta relación de dispersión viola la simetría de Lorentz. El estudio de esta relación de dispersión se hace a partir de su acción. Se muestra como al considerar ciertos límites y al restablecer las simetrías de la misma se recuperan dos modelos importantes de la física teórica.

### 9.1. Sistema

El sector para un sólo fermión de extensiones del Modelo Estandar, contiene todos los operadores cuadráticos que violan la simetría de Lorentz, para un fermión masivo de dimensiones tres y cuatro. Dichos términos son controlados por coeficientes con dimensión  $a_\mu$ ,  $b_\mu$  y  $H_{\mu\nu}$  y por coeficientes adimensionales  $c_{\mu\nu}$ ,  $d_{\mu\nu}$ ,  $e_\mu$ ,  $f_\mu$  y  $g_{\mu\nu}$ , respectivamente. La correspondiente relación de dispersión exacta puede ser obtenida de la generalización de la ecuación de Dirac para ondas planas de cuadrimomento  $p_\mu$ . Esta relación puede ser escrita en forma compacta como

$$\frac{1}{4}(V^2 - S^2 - A^2 - B^2)^2 + 4[B(VTA) - S(V\bar{T}A) - VTTA + ATTA] \quad (9.1)$$
$$+ V^2 A^2 - (V \cdot A)^2 - X(V^2 - S^2 - A^2 - B^2) - 2YSB + X^2 + Y^2 = 0.$$

donde la cantidad escalar es  $S = -m + e \cdot p$ , el pseudoescalar  $B = f \cdot P$ , el vector  $V_\mu = P_\mu + (cP)_\mu$ , el vector axial es  $A_\mu = (dP)_\mu - b_\mu$  y el tensor  $T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(gP - H)_{\mu\nu}$ . Las dos cantidades invariantes de  $T_{\mu\nu}$  son,  $X = T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$  y  $Y = T_{\mu\nu}\bar{T}^{\mu\nu}$ , con el dual definido como  $\bar{T} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}T^{\alpha\beta}$ . Nótese que para los coeficientes que violan la simetría de Lorentz la relación de dispersión (9.1) se reduce a la forma usual  $(P^2 - m^2)^2 = 0$ . La naturaleza cuadrática es retenida únicamente cuando los  $a_\mu$ ,  $c_{\mu\nu}$ ,  $e_\mu$  y  $f_\mu$  son cero. Sin embargo, la relación de dispersión es generalmente cuadrática si  $b_\mu$ ,  $d_{\mu\nu}$ ,  $g_{\lambda\mu\nu}$  y  $H_{\mu\nu}$  son diferentes de cero.

Ahora bien, como se sabe la relación de dispersión  $P^2 - m^2 = 0$  se sigue de un Lagrangiano bien definido. Éste Lagrangiano porsupuesto es el de la partícula libre relativista. Sin embargo, de la relación de dispersión (9.1) no es obvio cual es su Lagrangiano. No obstante en [15] se desarrolla un método que permite obtener el Lagrangiano a partir de su relación de dispersión y dos condiciones extras sobre ésta. A manera de ejemplo, considérese el Lagrangiano de la partícula libre relativista. La partícula relativista posee la siguiente relación de dispersión

$$\mathcal{R}(p) = (P_\mu P^\mu - m^2)^2 = 0, \quad (9.2)$$

Sin embargo, este Lagrangiano depende de las derivadas temporales, para poder obtener de la relación de dispersión las velocidades, se pueden considerar las velocidades clásicas, dichas velocidades se pueden obtener de la siguiente fórmula

$$U^i = -U^0 \frac{\partial P_0}{\partial P_i}. \quad (9.3)$$

Por otra parte, el Lagrangiano de la partícula relativista es de primer orden e invariante bajo reparametrizaciones, esto significa que el Hamiltoniano es cero. En consecuencia, el Lagrangiano es de la forma

$$L = -P_\mu U^\mu. \quad (9.4)$$

de la relación de dispersión (9.2) se despeja  $P_0$ , es decir

$$P_0 = \sqrt{P_i^2 - m^2}, \quad (9.5)$$

si se toma la parcial de  $P_0$  con respecto a  $P_i$ , se tiene

$$\frac{\partial P_0}{\partial P_i} = \frac{P^i}{\sqrt{P^i^2 - m^2}}, \quad (9.6)$$

por lo tanto, la tres-velocidad está dada por

$$U^i = -U^0 \frac{P^i}{\sqrt{P^i^2 - m^2}}, \quad (9.7)$$

de esta ecuación se puede despejar el tres-momento, el cual está dado por

$$P_i = m \frac{U_i}{\sqrt{-U_\mu U^\mu}}, \quad (9.8)$$

si se introduce estos momentos en la relación de dispersión (9.2) se obtiene  $P_0$

$$P_0 = m \frac{U_0}{\sqrt{-U_\mu U^\mu}}. \quad (9.9)$$



En consecuencia, el momento general está dado por

$$P_\mu = m \frac{U_\mu}{\sqrt{-U_\mu U^\mu}}. \quad (9.10)$$

Introduciendo este momento en el Lagrangiano (9.4), se encuentra

$$L = -m\sqrt{-U_\mu U^\mu}. \quad (9.11)$$

La cual, como puede observarse este resultado es precisamente el Lagrangiano para la partícula libre relativista. Porsupuesto por razones de simplicidad se utilizó una relación de dispersión muy simple, para relaciones de dispersión mas complicadas las cosas se complican debido a que para poder despejar los momentos se tienen que resolver ecuaciones algebraicas más complicadas.

En resumen, se puede decir que con el siguiente conjunto de ecuaciones, se obtiene la acción de la partícula asociada con alguna relación de dispersión

$$\mathcal{R}(P) = 0, \quad U^i = -U^0 \frac{\partial P^0}{\partial P_i}, \quad L = -P_\mu U^\mu. \quad (9.12)$$

De la relación de dispersión (9.1) se puede ver que está en general es intratable, sin embargo, para su estudio en este capítulo se considerarán ciertas simplificaciones. Ahora considérese el caso cuando los únicos coeficientes que violan la simetría de Lorentz son  $a_\mu$  y  $b_\mu$ . Para este caso, el escalar se reduce a  $S = -m$ , el vector  $V_\mu = P_\mu$  y el vector axial  $A_\mu = -b_\mu$  son las únicas cantidades que no se reducen a cero, todos los demás términos son nulos.

Por lo tanto, la relación de dispersión (9.1) se reduce a la siguiente expresión

$$\mathcal{R}(P) = [-(P - a)^2 + b^2 + m^2]^2 - 4[b \cdot (P - a)]^2 + 4b^2(P - a)^2 = 0. \quad (9.13)$$

Por el mismo procedimiento seguido para obtener el Lagrangiano para la partícula relativista, la siguiente acción fue obtenida en [15]

$$S = \int d\tau \left( -m\sqrt{-\dot{X} \cdot \dot{X}} - a \cdot \dot{X} \pm \sqrt{(b \cdot \dot{X})^2 - (b \cdot b)(\dot{X} \cdot \dot{X})} \right), \quad (9.14)$$

donde  $A \cdot A = A_M A^M = \eta_{NM} A^N A^M$  con  $N, M = 0, 1, 2, \dots, D$  y  $sig(\eta_{NM}) = (-1, 1, \dots, 1)$ , además  $a_M$  y  $b_M$  son vectores constantes. Nótese que la acción es invariante bajo reparametrizaciones  $\frac{dX}{d\tau} = \frac{d\bar{\tau}}{d\tau} \frac{dX}{d\bar{\tau}}$ , además se puede observar que el primero de los términos es el de la partícula libre relativista. El segundo de los términos, dado que  $a_M$  es constante se trata de una derivada total, más adelante se discutirá a este respecto. El tercer término es el que proporcionará los modelos de la física teórica al momento de tomar ciertas consideraciones, esto se vará más adelante.

Por otra parte, los momentos canónicos del sistema son

$$P_M = m \frac{\dot{X}_M}{\sqrt{-\dot{X} \cdot \dot{X}}} - a_M \pm \frac{(b \cdot \dot{X})b_M - (b \cdot b)\dot{X}_M}{\sqrt{(b \cdot \dot{X})^2 - (b \cdot b)(\dot{X} \cdot \dot{X})}}. \quad (9.15)$$

Una breve inspección de este momento, muestra que si se toma el producto de este por el vector velocidad  $\dot{X}^M$ , este producto es precisamente el Lagrangiano, por lo cual deduce que el Hamiltoniano cumple con

$$H_c = P \cdot X - L = 0. \quad (9.16)$$

Es plausible asumir que los momentos (9.15) definirán constricciones, ya que el Hamiltoniano resultó ser nulo. Concretamente, puede verse que se cumplen las relaciones para estos

$$(P + a) \cdot b = m \frac{\dot{X} \cdot b}{\sqrt{-\dot{X} \cdot \dot{X}}}, \quad (9.17)$$

$$(P_M + a_M)^2 = -m^2 \pm 2m \frac{\sqrt{(b \cdot \dot{X})^2 - (b \cdot b)(\dot{X} \cdot \dot{X})}}{\sqrt{-\dot{X} \cdot \dot{X}}} - b \cdot b, \quad (9.18)$$

sustituyendo (9.17) en (9.18), se encuentra

$$(P_M + a_M)^2 + m^2 + b \cdot b \pm 2\sqrt{(P \cdot b + a \cdot b)^2 + m^2(b \cdot b)} = 0. \quad (9.19)$$

Esta relación de dispersión es consistente con varios modelos construidos para probar una posible violación de la simetría de Lorentz. Esto se sigue del hecho de que los coeficientes de la violación de Lorentz aparecen de manera explícita.

Dado el hecho de que el Hamiltoniano resultó nulo, se sigue del formalismo de Dirac que el Hamiltoniano total es proporcional a la restricción

$$H_T = \lambda \Phi, \quad (9.20)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[ (P_M + a_M)^2 + m^2 + b \cdot b \pm 2\sqrt{(P \cdot b + a \cdot b)^2 + m^2(b \cdot b)} \right], \quad (9.21)$$

donde  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange. La acción Hamiltoniana, en consecuencia, es

$$S = \int d\tau (P \cdot \dot{X} - \lambda \Phi). \quad (9.22)$$

Esta acción es una simple consecuencia de la transformación de Legendre. El caso en que el Hamiltoniano es cero, es común en los casos en que se tienen Lagrangianos de orden uno. Una de las teorías más importantes en las que se presenta este tipo de situación, es en la Relatividad General, en el capítulo tres también se mostró esta situación.

## 9.2. Acción Cuadrática

Para la partícula relativista e inclusive para cuerdas y membranas una acción más conveniente para describir principios variacionales es evitar raíces cuadradas, con la inclusión de multiplicadores de Lagrange. En el caso de la partícula (9.14) se tienen dos raíces cuadradas independientes, de tal manera, que se necesita introducir un par de multiplicadores de Lagrange. La acción resultante está dada por

$$S = \int d\tau \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\dot{X}^2}{\lambda} - \lambda m^2 - 2a \cdot \dot{X} \pm \frac{(b \cdot X)^2 - (b \cdot b)(X \cdot X)}{\beta} \pm \beta \right] \right\}. \quad (9.23)$$

Esta acción es equivalente a (9.14), esto puede demostrarse utilizando las ecuaciones de movimiento de los dos multiplicadores de Lagrange, explícitamente si se toma la variación en los dos multiplicadores de Lagrange y se introducen los resultados de esta, la acción se reduce a (9.14). La acción (9.23), puede ser escrita en una forma más conveniente como

$$S = \int d\tau \left\{ \frac{1}{2} \left[ g_{NM} \dot{X}^N \dot{X}^M - \lambda m^2 - 2a \cdot \dot{X} \pm \beta \right] \right\}, \quad (9.24)$$

donde la métrica  $g_{NM}$  es una deformación de la métrica estándar de Minkowski, la cual está dada por

$$g_{NM} = \left( \frac{\beta \mp \lambda b^2}{\lambda \beta} \right) \eta_{NM} \pm \frac{b_N b_M}{\beta}. \quad (9.25)$$

Usando la acción (9.24), es fácil ver que tomando el límite  $b \rightarrow 0$  se recupera la partícula relativista acoplada a un campo magnético externo  $a$ . Para calcular el Hamiltoniano canónico, primero se tiene que calcular el momento, el cual está dado por

$$p_M = g_{NM} \dot{X}^N - a_M. \quad (9.26)$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano canónico está dado por

$$H_C = \frac{g^{NM}}{2} (p_N + a_N)(p_M + a_M) + \frac{1}{2} (\lambda m^2 \mp \beta), \quad (9.27)$$

con la métrica inversa  $g^{NM}$

$$g^{NM} = \frac{\lambda \beta}{\beta \mp b^2 \lambda} \eta^{NM} \mp \frac{\lambda^2}{\beta \mp \lambda b^2} b^N b^M. \quad (9.28)$$

Por otro lado, ya que no existe término cinético asociado a los multiplicadores de Lagrange, se concluye que se tienen el siguiente par de constricciones

$$p_\lambda \approx 0 \quad p_\beta \approx 0. \quad (9.29)$$

Como consecuencia, el Hamiltoniano total resulta

$$H_T = H_C + \mu_1 p_\lambda + \mu_2 p_\beta, \quad (9.30)$$

De la evolución de las constricciones primarias, resulta

$$\dot{p}_\lambda = \{p_\lambda, H_T\} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{NM}}{\partial \lambda} (p_N + a_N)(p_M + a_M) - \frac{1}{2} m^2, \quad (9.31)$$

$$\dot{p}_\beta = \{p_\beta, H_T\} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{NM}}{\partial \beta} (p_N + a_N)(p_M + a_M) \pm \frac{1}{2}.$$

De la condición de consistencia que estas dos ecuaciones deben satisfacer, se siguen las dos siguientes condiciones

$$[\beta^2 \eta^{NM} + (b^2 \lambda^2 \mp 2\lambda\beta) b^N b^M] (p_N + a_N)(p_M + a_M) + m^2 (\beta \mp b^2 \lambda)^2 \approx 0, \quad (9.32)$$

$$[\pm b^2 \eta^{NM} \mp b^N b^M] (p_N + a_N)(p_M + a_M) + (\beta \mp b^2 \lambda)^2 \approx 0, \quad (9.33)$$

resolviendo (9.33) para  $\beta$ , se tiene

$$\beta = \lambda(\pm b^2 + \sqrt{A}), \quad (9.34)$$

con  $A$  dada por

$$A = [-b^2 \eta^{NM} + b^N b^M] (p_N + a_N)(p_M + a_M). \quad (9.35)$$

Debe ser notado, que es posible reescribir la métrica en términos del momento o las velocidades. Para la métrica se obtiene

$$g_{NM} = \frac{1}{\lambda(\pm b^2 + \sqrt{A})} (\sqrt{A} \eta_{NM} \pm b_N b_M). \quad (9.36)$$

Además debe destacarse el hecho de que si usa (9.34) en (9.32), se obtiene la restricción (9.21). Lo cual muestra que ambas teorías son equivalentes.

### 9.3. Límite de Perturbación Fuerte

En esta sección se estudiará la acción (9.14), para el rompimiento de la simetría de Lorentz que se encuentra en esta. Sin embargo, los términos que en esta se encuentran, no todos violan dicha simetría, a decir verdad, sólo el segundo y tercer término rompen con esta simetría, no obstante, como se había mencionado anteriormente, noté que el término  $a \cdot \dot{X}$  en la acción (9.14) es una derivada total, en consecuencia, este término es irrelevante para la dinámica clásica del sistema e intracendente para el estudio de la violación de Lorentz. En efecto, si  $a \neq 0$  sólo se tiene que efectuar el cambio de variable

$P + a \rightarrow P$ , implicando sólo una redefinición del momento. Además la métrica (9.25) no depende de  $a_\mu$ .

Ahora, la acción (9.14) ha sido empleada para estudiar sistemas con rompimiento de la simetría de Lorentz, donde el término usual es más grande que el término que rompe con dicha simetría. Pero es interesante estudiar a la inversa, es decir, si se toma el término de corrección más grande que término usual relativista. En otras palabras, se está considerando el régimen ultrarelativista, donde se ha asumido que los  $b_M$  son tales que

$$\left| m\sqrt{-\dot{X}\dot{X}} \right| \ll \left| \pm\sqrt{(b \cdot \dot{X})^2 - (b \cdot b)(\dot{X} \cdot \dot{X})} \right|. \quad (9.37)$$

Luego, en este régimen el Lagrangiano está dada por

$$L = \pm\sqrt{(b \cdot \dot{X})^2 - (b \cdot b)(\dot{X} \cdot \dot{X})}, \quad (9.38)$$

y por consecuencia, su acción es

$$S = \pm \int d\tau \sqrt{(b \cdot \dot{X})^2 - (b \cdot b)(\dot{X} \cdot \dot{X})}. \quad (9.39)$$

Para el momento canónico se tiene

$$P_M = \pm \frac{(b \cdot \dot{X})b_M - (b \cdot b)\dot{X}_M}{\sqrt{(b \cdot \dot{X})^2 - (b \cdot b)(\dot{X} \cdot \dot{X})}}. \quad (9.40)$$

Estos momentos, por otra parte, satisfacen las siguientes constricciones

$$\Phi_1 = P \cdot b = 0, \quad (9.41)$$

$$\Phi_2 = P \cdot P + b \cdot b = 0. \quad (9.42)$$

De tal manera, que el Hamiltoniano del sistema, está dado por

$$H = \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2. \quad (9.43)$$

Las constricciones anteriores son de primera clase, ya que

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = 0. \quad (9.44)$$

Esto muestra que la acción (9.39) tiene más simetrías locales que la acción original (9.14). En este caso las simetrías de norma están dadas por

$$\begin{aligned} \delta_1 X_M &= \epsilon_1(\tau) b_M, & \delta_1 P_M &= 0, & \lambda_1 &= \dot{\epsilon}_1(\tau), \\ \delta_2 X_M &= 2\epsilon_2(\tau) P_M, & \delta_2 P_M &= 0, & \lambda_2 &= \dot{\epsilon}_2(\tau). \end{aligned} \quad (9.45)$$

De esta manera se muestra que al tomar el límite ultrarelativista, el sistema resultante posee más simetrías que el original. Este tipo de fenómenos son los que interesan en lo que resta de este capítulo.

## 9.4. Simetría de Lorentz y Física de dos Tiempos

Por la eliminación del término  $m\sqrt{-\dot{X} \cdot \dot{X}}$  de la acción (9.14) se pierde la partícula relativista usual. Sin embargo, se poseen más simetrías locales. Ahora se verá que al recobrar la simetría de Lorentz se obtendrá más simetrías locales y se puede relacionar este sistema con la acción de la física de dos tiempos.

Para restaurar la simetría de Lorentz considérese el vector constante  $b^M$  como un campo local  $b^M = B^M(X)$ , que transforma bajo las transformaciones de Lorentz como un campo vectorial propio, en este caso la acción llega a ser

$$S = -m \int d\tau \sqrt{(B \cdot \dot{X})^2 - (B \cdot B)(\dot{X} \cdot \dot{X})}, \quad (9.46)$$

la cual es invariante de Lorentz.

Ahora este sistema tiene las siguientes constricciones primarias

$$\Phi_1 = P_M B^M = 0, \quad (9.47)$$

$$\Phi_2 = P_M B^M + B_M B^M = 0. \quad (9.48)$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano total es

$$H = \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2. \quad (9.49)$$

Además nótese que

$$\{P_M B^M, P_M B^M + B_M B^M\} = 2(P_M P^M - B_M B^M) \partial^M B^L. \quad (9.50)$$

De la cual, inmediatamente se sigue que se obtendrán más constricciones y que estas dependerán de la forma de  $B^M$ .

Una correspondencia interesante sucede, si se asume que  $B^M = X^M$ , luego la acción está dada por

$$S = -m \int d\tau \sqrt{(X \cdot \dot{X})^2 - (X \cdot X)(\dot{X} \cdot \dot{X})}, \quad (9.51)$$

con constricciones primarias

$$\Phi_1 = P_M X^M = 0, \quad (9.52)$$

$$\Phi_2 = P_M X^M + X_M X^M = 0, \quad (9.53)$$

y álgebra

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = \Phi_3, \quad \Phi_3 = (P_M P^M - X_M X^M). \quad (9.54)$$

Por el uso del método de Dirac, se obtiene

$$\Phi_3 = (P_M P^M - X_M X^M) = 0. \quad (9.55)$$

Estas tres constricciones satisfacen el álgebra

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = \Phi_3, \quad \{\Phi_1, \Phi_3\} = 2\Phi_2, \quad \{\Phi_2, \Phi_3\} = 8\Phi_1. \quad (9.56)$$

Luego se sigue que estas constricciones son de primera clase y que no existen más constricciones. Es decir, el Hamiltoniano extendido toma la forma

$$H_E = \lambda_1(P_M P^M + X_M X^M) + \lambda_2 P_M X^M + \lambda_3(P_M P^M - X_M X^M). \quad (9.57)$$

Redefiniendo

$$\phi_1 = \frac{1}{2}P_M P^M, \quad \phi_2 = P_M X^M, \quad \phi_3 = \frac{1}{2}X_M X^M, \quad (9.58)$$

$$\gamma_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \quad \gamma_2 = \lambda_2, \quad \gamma_3 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}. \quad (9.59)$$

Con lo cual, el Hamiltoniano (9.57) queda de la forma

$$H_E = \gamma_1 \phi_1 + \gamma_2 \phi_2 + \gamma_3 \phi_3. \quad (9.60)$$

Se puede observar que este es el Hamiltoniano de la física de dos tiempos. Se sabe que el Lagrangiano de la física de dos tiempos tiene una simetría local del grupo  $Sp(2)$  y como simetría global el grupo conforme. Luego, la acción Hamiltoninana de este sistema tiene más simetrías que la acción original (9.14), como ya se había mencionado.

Obsérvese, finalmente que la física de dos tiempos contiene diferentes sistemas cuando se consideran una sola coordenada temporal y actúa como un modelo que unifica la dinámica de diferentes sistemas. En particular, contiene la partícula libre relativista. En consecuencia, al restaurar la simetría de Lorentz a el Lagrangiano (9.38) se obtiene un modelo que unifica varios sistemas a nivel de partícula puntual. Tal como se menciona en el capítulo anterior.

Finalmente, se debe enfatizar que por consistencia, este sistema requiere dos coordenadas temporales y la signatura debe de ser de la forma  $sig(\eta) = (-, -, +, +, \dots, +)$ . Es decir, para dar consistencia a este sistema se debe hacer la transición de  $sig(\eta) = (-, +, +, \dots, +)$  a  $sig(\eta) = (-, -, +, +, \dots, +)$ .

## 9.5. Simetría de Poincaré y Teoría de Cuerdas

La acción (9.51) es invariante de Lorentz, pero no es invariante bajo el grupo de Poincaré. Ahora, lo que se desea es hacer explícita dicha invariancia, para lograr esto se tiene que hacer que  $B^M$  sea invariante bajo traslaciones. Nótese, que si se hace  $B^M =$

$\frac{\partial C^M}{\partial \tau}$ , el Lagrangiano (9.38) es invariante de Poincaré. Sin embargo, las ecuaciones de movimiento no serán independientes y en consecuencia habrán constricciones. Otro caso en el cual se restablece la invariancia de Poincaré, es en el caso en que se trabaja con  $B^M = \dot{X}^M$ . Sin embargo, en este caso se tiene Lagrangiano nulo.

Otra manera de recobrar la invariancia de Poincaré, es considerar que la acción (9.14), que fue construida tomando como punto de partida la relación de dispersión obtenida en la teoría de campos. Esta acción fue establecida de la simplificación de la teoría de campos a una partícula puntual. Debe enfatizarse que la acción de la física de dos tiempos fue obtenida de la misma forma. Luego para recobrar la invariancia de Poincaré se tomará el camino inverso, es decir, se considerará el modelo de partícula, dentro de una teoría de campos. En efecto, asumiendo que las coordenadas dependen de un parámetro extra  $\sigma$ , es decir,  $X^M = X^M(\tau, \sigma)$ , es equivalente a suponer que las partículas no son puntos, sino que son objetos lineales extendidos. En este caso se puede tomar  $B^M = T \frac{\partial X^M}{\partial \sigma}$ , donde  $T$  es una constante. Bajo estas consideraciones el Lagrangiano (9.38) será invariante bajo transformaciones de Poincaré.

Se pueden considerar las expresiones  $B^M = T \frac{\partial X^M}{\partial \sigma}$ , dentro de las constricciones (9.52) y (9.53). Haciendo esto, las constricciones son ahora

$$\Phi_1 = P_M \frac{\partial X^M}{\partial \sigma} = 0, \quad (9.61)$$

$$\Phi_2 = P_M P^M + T^2 \frac{\partial X_M}{\partial \sigma} \frac{\partial X^M}{\partial \sigma} = 0. \quad (9.62)$$

Las ecuaciones (9.61) y (9.62) son las constricciones del Hamiltoniano de la acción de la cuerda relativista. Por ejemplo, si se usa  $B^M = T \frac{\partial X^M}{\partial \sigma}$  en el Lagrangiano (9.38) resulta

$$L = -T \sqrt{\left( \frac{\partial X_M}{\partial \sigma} \frac{\partial X^M}{\partial \tau} \right)^2 - \left( \frac{\partial X_M}{\partial \sigma} \frac{\partial X^M}{\partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial X_M}{\partial \tau} \frac{\partial X^M}{\partial \tau} \right)}. \quad (9.63)$$

De esta expresión, la acción toma la forma

$$S = - \int d\tau d\sigma T \sqrt{\left( \frac{\partial X_M}{\partial \sigma} \frac{\partial X^M}{\partial \tau} \right)^2 - \left( \frac{\partial X_M}{\partial \sigma} \frac{\partial X^M}{\partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial X_M}{\partial \tau} \frac{\partial X^M}{\partial \tau} \right)}, \quad (9.64)$$

la cual resulta ser la acción de Nambu-Goto de la cuerda relativista.

De esta manera, por imponer las simetrías de Lorentz y Poincaré a el Lagrangiano (9.48), se obtiene la acción de la cuerda bosónica. Debe mencionarse que para hacer invariante el espacio de Snyder, Yang propuso una dimensión extra. En el caso aquí tratado se uso un proceso similar, es decir, se introdujo la dependencia en el espacio de parámetros de  $\sigma$  y con esto se restableció las simetrías de Lorentz y Poincaré.



Ahora, se puede usar la acción de Nambu-Goto (9.64) para poder recobrar la acción (9.51), en efecto, para poder hacer esto, se empleará la expresión

$$\frac{\partial X^M}{\partial \sigma} = \alpha X^M, \quad (9.65)$$

luego

$$X^M(\tau, \sigma) = e^{\alpha\sigma} u(\tau). \quad (9.66)$$

Introduciendo este resultado en la acción 9.64, se sigue

$$S = -\beta \int d\tau \sqrt{(u \cdot \dot{u})^2 - (u \cdot u)(\dot{u} \cdot \dot{u})}, \quad (9.67)$$

con  $\beta = T|\alpha| \int d\sigma e^{2\alpha\sigma}$ . Esta acción es equivalente a (9.51).

De esta manera, puede verse que al restaurar simetrías del sistema original, resulta en modelos importantes de la física teórica. Recuérdese que la cuerda bosónica es una generalización de la partícula puntual relativista, esta generalización es a nivel de las dimensiones.



# Capítulo 10

## Conclusiones

Las teorías de orden superior en derivadas temporales, son naturalmente no-conmutativas, tal como se mostró en este trabajo. Sin embargo, estas teorías tienen el inconveniente de no tener un estado de mínima energía. La solución a este problema, fue realizado a través de la proyección a los estados de mínima energía, esto con la implementación del método perturbativo propuesto por Tai-Chung Cheng, Pei-Ming Ho y Mao-Chuang Yeh [8]. Esta proyección, produjo una dos-forma no-canónica, la cual extendió la no-conmutatividad a todas las variables del sistema. No obstante, las amplias aplicaciones de la no-conmutatividad esta rompe con la simetría de Lorentz. Una de las posibles soluciones a esta ruptura, es pedir que el parámetro de no-conmutatividad sea dependiente de las variables de la teoría bajo estudio. La violación de Lorentz tiene su mayor aplicación a la Extensión del Modelo Estándar SME. Este modelo posee una relación de dispersión para el sector fermiónico. Esta relación de dispersión para un caso muy particular, posee un Lagrangiano propuesto por Kostelecký. Este Lagrangiano es una extensión de la partícula relativista, los términos de corrección rompen con la simetría de Lorentz, al restaurar la simetría de Lorentz del modelo se encuentra el modelo de la física de dos-tiempos, además al restaurar la simetría de Poincaré se obtiene la acción de la cuerda Bosónica.

Por otra parte, los modelos que son no-conmutativos tienen problemas para realizar la cuantización debido precisamente a esta no-conmutatividad, dos de las posibles soluciones son: i) La utilización del mapeo de Darboux, el cual mapea la estructura simpléctica no-canónica a una estructura simpléctica canónica, de tal forma que una vez encontrada la forma explícita de dicho mapeo, la cuantización se lleva a cabo de manera usual. Concretamente en este mapeo las observables del sistema son construidas por tal mapeo. ii) En el contexto de la cuantización canónica, el esquema inicia por elegir la base en la cual estará descrito el sistema, esto se sigue de considerar las relaciones de conmutación que satisfacen los observables del sistema, específicamente la base es elegida a partir de los observables que conmutan. Sin embargo, cuando se trata con sistemas con relaciones no-conmutativas, es más complicada dicha elección. No obstante, existen posibles bases tal como fue mostrado en este trabajo. Una vez elegida la base, lo que

sigue es encontrar una representación del álgebra de conmutadores, dicha representación tal y como fue mostrado únicamente contiene a las variables elegidas como la base del sistema o de derivadas de estas variables, lo que resulta en una ecuación de Schrödinger que describe el sistema cuántico. El método de bases cruzadas propuesto aquí, tiene como resultado el mismo sistema cuántico que resulta de la representación del álgebra de conmutadores. El método consiste en lo siguiente: dada una estructura simpléctica no-canónica, tal como fue mostrado se puede calcular la acción a través del potencial simpléctico. El hecho de que se este tratando con una estructura simpléctica no-canónica, tiene como principal efecto el elevar todas las variables del sistema a variables de configuración. Una vez construida la acción, lo que sigue es elegir de manera consistente con la estructura simpléctica un conjunto completo de observables conmutativas. Con el conjunto de variables elegidas, estas se fijan en la frontera y se hace la variación en las variables restantes, estas variables dada la base jugarán el papel de variables auxiliares, en consecuencia, estas tienen que ser eliminadas algebraicamente del sistema a través de las ecuaciones de movimiento. Se mostró que si existen ecuaciones algebraicas de movimiento, las variables auxiliares se pueden eliminar de la acción. Cuando no existen ecuaciones algebraicas de movimiento, lo que sucede es que estas generan constricciones en el sistema ya que cuando se ignoran estas, el sistema resultante se encuentra en un espacio extendido, sin embargo, aún se tiene que hacer una extensión en el espacio fase, es decir, se construye la representación Hamiltoniana, la cual duplica el número de grados de libertad. Esta duplicación tiene como una consecuencia inmediata constricciones en el sistema, las cuales tienen expresiones algebraicas bien definidas para las variables auxiliares. Estas constricciones en todos los casos son de segunda clase, ya que provienen de un Lagrangiano de primer orden, para eliminar estas constricciones se tiene que implementar el paréntesis de Dirac, el cual hace que todas éstas sean nulas, de manera que se pueden despejar las restantes variables auxiliares que no poseían una expresión algebraica en la representación Lagrangiana. Los paréntesis de Dirac resultantes, una vez hechas las constricciones fuertes, son los paréntesis canónicos, por consecuencia, la cuantización puede ser llevada a cabo de manera usual.

A lo largo de este trabajo se mostró que la no-conmutatividad y el orden de la teoría guardan una relación directa, es decir, las teorías de orden superior son naturalmente no-conmutativas. La demostración de éste hecho fue realizado, con la extensión del modelo de Chern-Simon de orden superior, en particular, se utilizo el modelo de segundo orden con el cual se hizo un análisis profundo del sistema. Este análisis mostró que la no-conmutatividad se producía en las velocidades, las cuales en este caso son variables del espacio fase del sistema. No obstante, que la demostración de la relación entre la no-conmutatividad y el orden de la teoría se realizo en base a un ejemplo, este ejemplo contiene todos los ingredientes que poseen las teorías con derivadas de orden superior, es decir, en general estas teorías poseen constricciones de segunda clase, lo que requiere de la modificación de los paréntesis de Poisson a los paréntesis de Dirac. Dichos paréntesis son una modificación de los usuales, a otros paréntesis con un término que es proporcional

a los paréntesis de las constricciones con las diferentes variables de nuestro sistema. Por otra parte, las teorías de orden superior como se sabe poseen problemas con el estado de mínima energía. En el análisis aquí tratado, la manera en que se supero este problema fue con la utilización del método perturbativo mostrado en este trabajo. Este método no sólo ayudo a superar el problema del estado de mínima energía, sino, que mostró que la no-conmutatividad permanecía en este modelo y no sólo eso sino que esta no-conmutatividad era extendida a todas las variables del sistema. Esta no-conmutatividad surge como consecuencia, de la modificación de la dos-forma canónica a una no-canónica, es decir, se obtuvo los paréntesis canónicos más paréntesis no-triviales entre las variables. De tal manera que la proyección a los estados de mínima energía de sistemas con derivadas de orden superior, tiene como principal efecto producir una no-conmutatividad de manera natural, porsupuesto también la eliminación de los problemas con el estado de mínima energía.

Para complementar el trabajo, la cuantización del sistema se realizó a través del mapeo de Darboux. Con el mapeo las observables del sistema fueron construidas, de manera que una vez escrito el sistema en estas variables, la cuantización se llevo de manera directa. La cuantización del sistema mostró que las energías, en efecto, no poseen los problemas con el estado de mínima energía. Además de estar determinadas de manera única, es decir, éstas sólo dependen de los parámetros de la teoría. Otra de las características importantes del modelo de segundo orden, es que la no-conmutatividad no depende de tomar alguna clase de límite, como sucede en el caso de la teoría de primer orden. Además de que la estructura simpléctica no-canónica surge de manera natural. En vista de los resultados obtenidos del modelo con derivadas de orden dos, se realiza una extensión más de dicho modelo, esta vez la extensión fue hecha a un modelo con derivadas de orden  $n$ . Los resultados obtenidos de dicha extensión, fueron básicamente los mismos que los resultados de su contraparte de orden dos. Concretamente los resultados obtenidos de la teoría de orden  $n$ , recuperan los resultados de la teoría de segundo orden, esto se logra con tan sólo tomar  $n = 2$ .

No obstante, como se sabe la cuantización de algún sistema físico se puede realizar de diferentes formas. Se realizó la cuantización del sistema utilizando bases cruzadas. En particular, se cuantizó el modelo de la partícula libre, la partícula en caída libre y el sistema resultante de aplicar el método perturbativo (modelo de Chern-Simons de segundo orden). De la utilización de las bases cruzadas, dio como resultado un Lagrangiano que describía un par de osciladores armónicos acoplados, la forma de resolver dicho sistema fue, a través de la diagonalización del sistema, de tal manera que resultarán un par de osciladores armónicos desacoplados. La cuantización de este sistema una vez hecho esto se vuelve trivial. Además dicha cuantización, muestra un espectro sin problemas con el estado de mínima energía. Sin embargo, el espectro resultante de usar bases cruzadas, con respecto al espectro encontrado utilizando el mapeo de Darboux, era completamente diferente, dicho espectro coincide en el límite de parámetro de conmutatividad cero.

Se estudio un modelo con violaciones explícitas a la simetría de Lorentz, la cual

unifica la propagación libre de partículas a nivel relativista, es decir, la acción contiene un término que es explícitamente la partícula libre relativista, más términos que corrigen a ésta. Los términos que corrigen a la partícula libre relativista son lo que contienen las violaciones a la simetría de Lorentz. Específicamente estos términos contienen vectores constantes, los cuales requieren de marcos de referencia privilegiados, para no perder este carácter. El estudio de este sistema se realizó, desde el punto de vista de la extensión de las simetrías del modelo, por ejemplo, cuando se restaura la simetría de Lorentz se obtiene el Hamiltoniano de la física de dos tiempos. Dicha restauración, requiere que los vectores constantes que contienen los términos que la violan, pierdan esta constancia. Esto se logra pidiendo que estos dependan de manera local en los campos de la teoría, en particular, que estos vectores sean los propios campos. Con estos ingredientes se obtiene la física de dos tiempos. Este mismo hecho fue el que se consideró en el capítulo cinco, es decir, se eligió que el parámetro de conmutatividad fuera dependiente de las variables del sistema, esta dependencia como se mencionó puede ser utilizado en sistemas que sean realmente relativistas, el cual no fue el caso tratado en el capítulo cinco. Ahora bien, cuando se restauró la simetría de Poincaré y de Lorentz de manera conjunta, se obtiene la Lagrangiana de Nambu-Goto de la teoría de cuerdas. La manera en que se recupera la simetría de Poincaré, es por hacer un incremento en las dimensiones del espacio de parámetros. La teoría originalmente sólo dependía de un parámetro que describía la evolución temporal del sistema, este sistema dada esta dependencia en el parámetro, es un objeto unidimensional que se desplaza en la línea universo, con el incremento en la dependencia de los parámetros de la teoría ahora, dichos objetos son bidimensionales que se desplazan en la hoja del mundo. Tales objetos, son las llamadas cuerdas, en consecuencia, cuando se restaura la simetría de Poincaré, resulta la acción de la cuerda bosónica.

Posibles extensiones del presente trabajo, para el caso de las teorías de orden superior. Son, por ejemplo, extensiones a teorías de campos de la teoría de Chern-Simons, está en principio podría darnos una teoría de campos no-conmutativa. Para el caso de el Lagrangiano propuesto por Kostelecký, se puede estudiar también una extensión a campos, desde otro punto de vista diferente al caso de las cuerdas. Como se sabe para el caso de la partícula libre relativista, se obtiene la ecuación de Klein-Gordon. Esta extensión, proporcionaría una ecuación generalizada de Klein-Gordon. Para el caso de las bases cruzadas, la extensión puede ser hecha para el caso de un parámetro de no-conmutatividad local. Para el caso de parámetro de no-conmutatividad constante, se pueden clasificar los Hamiltonianos para los cuales se tienen ecuaciones algebraicas y no-algebraicas de movimiento, lo cual como vimos en este trabajo da lugar a constricciones para el caso de las ecuaciones de movimiento no-algebraicas.

# Bibliografía

- [1] M. R. Douglas, and N. A. Nekrasov, *Rev. Mod. Phys.* **73** (2001) 977.
- [2] R. Szabo, *Phys. Rept.* **378** (2003) 207.
- [3] Corneliu Sochichiu, A Note on Noncommutative and False Noncommutative Spaces, [hep-th/0604025v2].
- [4] H. S. Snyder, 1947, Quantized space-time, *Phys. Rev.* **71**, 38.
- [5] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, Noncommutative Perturbative Dynamics, *J. High Energy Phys.* **0002** (2000) 020.
- [6] N. Seiberg and E. Witten. String Theory and noncommutative geometry, *JHEP* **9909** (1999) 032, hep-th/9908142.
- [7] Y. S. Myung and H. W. Lee, Noncommutative Space-time and Fractional Quantum Hall Effect, [hep-th/9911031].
- [8] Tai-Chung Cheng, Pei-Ming Ho, Mao-Chuang Yeh, *Nucl. Phys. B* **625** (2002) 151.
- [9] Merced Montesinos and G. F. Torres del Castillo, *Phys. Rev. A*, 032104 (2004).
- [10] G. V. Dunne, R. Jackiw, and C. A. Trugenberger, *Phys. Rev. D* **41**, 661 (1990).
- [11] A. Smailagic and E. Spallucci, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 107701.
- [12] D. A. Eliezer and R. P. Woodard, *Nucl. Phys.* **B325**, 389 (1989).
- [13] C. Grosse-Knetter, *Phys. Rev. D* **49** (1993) 6709-6719.
- [14] J. Z. Simon, *Phys. Rev. D* **41** (1989) 3720-3733.
- [15] V. Alan Kostelecký and Neil Russell, *Phys. Lett.* **B** (2010) 443-447.
- [16] V. Alan Kostelecký, *Phys. Rev. D* **79**, 105009 (2004).
- [17] V. Alan Kostelecký, *Phys. Rev. D* **63**, 065008 (2001).

- [18] V. Alan Kostelecký, Perspectives on Lorentz and CPT Violation 2008, [hep-th/0802.0581v1].
- [19] C. N. Yang, Phys. Rev. **72**, 874 (1947).
- [20] Juan M. Romero and Adolfo Zamora, Phys. Rev. D **70** 105004 (2004).
- [21] E. Witten, Bound States of Strings and p-Branes, Nucl. Phys. **B460** (1996) 33, [hep-th/9510135].
- [22] I. Bars, C. Deliduman and O. Andreev, Gauged Duality, Conformal Symmetry and Spacetime with two Times, [hep-th/9803188].
- [23] I. Bars, Two-Time Physics with Gravitational and Gauge Fields Backgrounds, [hep-th/0003100].
- [24] I. Bars, Two-Time Physics Field Theory, [hep-th/0002140].
- [25] I. Bars, Conformal Symmetry and Duality between Free Particle, H-atom and Harmonic Oscillator, [hep-th/9804028].
- [26] I. Bars, Shih-Hung Chen and Guillaume Quélin Dual Field in  $(d - 1) + 1$  Emergentes Spacetimes From A Unifying Field Theory in  $d + 1$  Spacetime, H-atom and Harmonic Oscillator, [hep-th/07052834].
- [27] I. Bars, Two-Time Physics, [hep-th/9809034].
- [28] I. Bars, Survey Two-Time Physics, [hep-th/0008164].
- [29] Juan M. Romero, Oscar Sánchez-Santos and J. D. Vergara, Phys. Lett. A **375** (2011) 3017-3820.
- [30] S. W. Hawking and T. Hertog, Phys. Rev. D **65** (2002) 103515.
- [31] T. L. Curtright, G. I. Ghandour and C. K. Zachos, Phys. Rev. D **43**, 3811 (1986).
- [32] K. Maeda and N. Turok Phys. Lett. B **202**, 376 (1998).
- [33] Juan M. Romero and J. D. Vergara, Phys. Rev. D **75** 065008 (2007).
- [34] J. Lukierski, P. C. Stichel and W. J. Zakrzewski, Galilean-Invariant  $(2 + 1)$ -Dimensional Models with a Chern-Simons-Like Term and  $D= 2$  Noncommutative Geometry, [hep-th/9612017].
- [35] Jian Jing, Feng-Hua Liu and Jiang-Feng Chen, Phys. Rev. D **78**, 125004 (2008).
- [36] Ahmed Farag Ali, Saurya Das and Elias C. Vagenas, Phys. Lett. **B 678** (2009) 497-499.



- [37] A. J. Hanson , T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976.
- [38] G. Dunne and R. Jackiw, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **33 (Issue 3)** (1993) 114.
- [39] Marcos Rosenbaum, J. David Vergara and L. Roman Juarez, Non canonical structures and Dirac Constrains.
- [40] A. Horvaty, Luigi Martina and Peter C. Stichel, Exotic Galilean Symmetry and Non-Commutative Mechanics, [hep-th/1002.4772].
- [41] M. Gomes and V. G. Kupriyanov, Phys. Rev. D **79**, 125011 (2009).
- [42] C. Duval and P. A. Horváthy, Exotic Galilean Simmetry in the Non-commutative and Hall effect (2008), [hep-th/9510135].
- [43] K. H. C. Castello-Branco and A. G. Martins, J. Math. Phys. **51**, 102106 (2010).