



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE FÍSICA

EFFECTOS DE INESTABILIDAD Y
DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DIPOLAR
MAGNÉTICO DEL MESÓN ρ .

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

Presenta:
DAVID GARCÍA GUDIÑO.

TUTOR O TUTORES PRINCIPALES
Dr. GENARO TOLEDO SÁNCHEZ.
(INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM.)
MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
Dr. JENS ERLER.
(INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM.)
Dr. JUAN CARLOS D'OLIVO.
(INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM.)

México, D.F. FEBRERO 2012

A MIS PADRES,
A MI HERMANA,
A STEPHANIA
Y A MIS AMIGOS.

Agradecimientos

Es imposible describir todo el trabajo que una tesis realmente encierra; al verla terminada uno no puede evitar el recordar todo lo que realmente dió lugar a cada capítulo, sección y resultado presentado en ella. Durante su realización adquieres muchas clases de conocimiento, y lejos de lo que se plasma en el papel, quedan miles de experiencias que son realmente las que te forman; y tanto llegan a ser tuyas algunas de estas memorias que te definen el resto de tu vida. Es en la adquisición de estas memorias en donde surgen personas, a las que indudablemente tienes que agradecer, no sólo por haber compartido contigo dichas experiencias, sino muchas veces por ayudarte a superarlas. Así pues, quiero agradecer a todos aquellos que en alguna forma me ayudaron no sólo a culminar mi trabajo de doctorado, sino que cambiaron mi vida de forma definitiva.

Antes que nada quiero agradecer a mis padres, quienes con todo esfuerzo y dedicación me han apoyado en todo momento y de manera incondicional. Es gracias a ellos y al inmenso amor que tienen por mí y por mi hermana, que hoy en día soy el hombre que soy. Gracias por todo mis viejos...los amo.

Agradezco a mi hermana por todo su apoyo durante el desarrollo de este trabajo y su cariño para con nosotros, te quiero mucho chamaca.

Uno nunca sabe lo que la vida le tiene reservado, y en particular durante este periodo de mi vida conocí a una mujer con quién he compartido de las cosas mas hermosas de la vida, por lo mismo, te quiero agradecer Fanny, por todo lo que hemos vivido, por tu cariño y apoyo.

Cuando entre a la universidad lo hice conociendo a tres personas que al principio fueron buenos compañeros; conforme avanzó la carrera se convirtieron en grandes amigos y ahora no puedo imaginar mi vida sin ellos. Se transformaron en compañeros inseparables de este camino largo y sinuoso llamado vida. Desde que viajamos juntos no sólo han estado presentes en todo momento, sino la han transformado siempre para bien. Gracias a Héctor, Víctor y Mago; les deseo lo mejor en esta vida, la cual nos tiene deparado un gran futuro. Y aún cuando éste no sea necesariamente juntos, sé que sabremos buscar la manera de permanecer unidos. En particular a Héctor: te agradezco tu amistad fiel y sincera y tu siempre sabio consejo. A Vic: igualmente agradezco toda tu amistad incondicional y tu ayuda incuestionable y pronta en todo momento. A Mago: agradezco toda tu amistad y tu trato siempre cariñoso para conmigo, a pesar de cualquier cosa.

Quiero agradecer muy en especial a mi asesor el Dr. Genaro Toledo, por su infinita paciencia durante la realización de este trabajo, así como por la amistad que se fue formando gracias a las oportunidades que se nos presentaron durante su asesoría. Y de igual forma a su familia con la que tuve la oportunidad de convivir y a quienes les agradezco muy buenos recuerdos.

La experiencia del posgrado es única en muchos sentidos, en especial con las amistades

que uno forma dentro de él, debido a que el tiempo que se tiene para conocer a las personas es poco; sin embargo a mí me resultó en amistades muy fuertes, sin las cuales seguro estoy de que no hubiera sido la gran experiencia que fue esta etapa de mi vida, por lo mismo quiero agradecerles en especial a Emmanuel, Adiv, Marcelino, Joel, Irving, Erick y a todos los cuates del taller del IF-UNAM, a Fer y muy en especial a Orietta por todo lo que viví a su lado.

A mis amigos de toda mi vida por el apoyo que siempre tendré de ellos y por su amistad durante ya tantos años. Gracias a Arturo H., Juan Luis A., Elena C., Montse F., Carlos N., César N., Cynthia O., Pável S., Pedro (aka Wassssaaaaaa), Peter S., Yoshino.

A mis maestros que se convirtieron en amigos, y a quienes les guardo un profundo respeto: en especial a mi querida Dra. Vivi, quien fue mi asesora de licenciatura y a quién le guardo un enorme cariño; a su hermano el Dr. Pepe, persona admirable en todo sentido y de la más alta calidad humana que conozco y a su hermana Marili, por su gran apoyo desde que la conocí en la Olimpiada de Física, al igual que el M. en C. Raúl G. que siempre me ha brindado su tiempo y apoyo cuando lo he necesitado. También a la maestra Rosalia, por sus palabras de aliento, a José Luis y Manolo. A mis maestros de prepa, que me iniciaron en este camino de asombroso descubrimiento: Manuel C., Ana Elena A., Yotzeline V., Bernardo T., Lourdes T. y Heriberto G.

A mis asesores Dr. Jens Erler, Dr. Juan Carlos D'Olivo (miembros de mi comite tutorial) y a mis sinodales Dr. Matías Moreno, Dr. Roelof Bijker, Dr. Gabriel López, Dr. Eleazar Cuautle y Dra. Myriam Mondragón, por los comentarios realizados, ya que éstos enriquecieron mi trabajo.

Al Dr. Alejandro Ayala, por brindarme una oportunidad única en la vida y al Dr. Chumin Wang Chen, por haber despertado en mí la idea de realizar un posgrado.

A CONACYT por el apoyo brindado para la realización de esta tesis.

Quiero además agradecer de la manera más atenta a Blizzard Entertainment Inc., por haber retrasado el lanzamiento de Diablo 3 hasta una fecha que me permitió terminar la tesis, debido a que de otra manera no sé que habría sucedido.

Finalmente, doy gracias a todos aquellos que me dieron su apoyo y que de manera directa o indirecta ayudaron a la realización de este trabajo, y que por falta de espacio y/o buena memoria del autor no fueron mencionados en este apartado.

Summary

In this work we have determined a value of the magnetic dipole moment (mdm) of the ρ meson, which is an important property for this class of particles (the vector mesons) because it can give us information about the internal dynamic of the constitutive quarks. Until now, there are several models based in QCD or effective theories which predict a value for this quantity, but there is no experimental measurement (direct or indirect) to confront these predictions.

With the purpose of extracting the mdm for the ρ meson in an indirect form, we have performed an analysis of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ cross section in an energy range from 0.65 to 2.5 GeV under the Vector Meson Dominance (VMD) scheme, because one of the channels for this process includes a vertex of 3 ρ mesons, which can be related to the $\rho\rho\gamma$ vertex, and this last one can be parametrized with the electromagnetic multipoles of this meson.

The channels that we have considered here, through which the production process can be fulfilled include the exchange of the π , ω , a_1 , σ , ρ and ρ' mesons. In recent works, it has been found that the inclusion of the ρ' meson is necessary to avoid a bad behavior of the cross section of the 4 pion production process; but under the VMD approximation this meson is included in a natural way.

To work out the 4-pion process it was necessary to fix the coupling constants involved in the different channels, some of which were already fixed by the VMD approximation. In the case of the coupling between the ω , ρ and π mesons ($g_{\omega\rho\pi}$); we performed a complete analysis to determine this constant under different scenarios. The triple vector meson coupling for the ρ' was assumed to be the same as for the ρ meson. Once the coupling constants were established for all the channels considered here, we computed the cross section. We have found that the two main channels for the process $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ are the ω channel, for energies between 0.65 and 1.5 GeV; and the one that contains the 3- ρ meson vertex for energies between 1.5 and 2.5 GeV. This fact allowed us to make a fit between our results and the experimental data from the BaBar Collaboration for the cross section of the 4-pion process. By tuning the mdm parameter inside the $\rho\rho\gamma$ vertex we have found that the mdm for the ρ meson has a value of

$$|\bar{\mu}| = 2.27 \pm .17 \left[\frac{e}{2m_\rho} \right].$$

This result is of great importance because is the first attempt to determine this property for a vector meson; in order to establish a more precise value for this property is necessary to reduce the uncertainty in the cross section for the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ process; and also to perform more detailed experiments for the ρ' meson, so we can have a better knowledge of its coupling constants.

Índice general

1. Introducción.	1
2. Mesones Vectoriales y el Esquema de Dominancia Vectorial.	5
2.1. Interacciones Fundamentales.	5
2.2. Partículas Elementales.	7
2.3. El Modelo de Quarks y los Mesones Ligeros.	8
2.4. El Esquema de Dominancia Vectorial.	10
3. Modificación a los Multipolos por Efectos de Ancho de Decaimiento.	13
3.1. Vértice Electromagnético $VV\gamma$	14
3.2. Estructura Multipolar.	16
3.3. Esquemas para incluir el carácter inestable de las partículas.	19
3.4. Modificaciones a la Estructura Multipolar del Mesón ρ	23
3.4.1. Resultados Numéricos y Comparación para el mesón $\rho(770)$	27
3.4.2. El Esquema de Lazos y el Esquema de Masa Compleja.	28
4. Efectos del mdm del mesón ρ en el proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$.	31
4.1. El proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$	32
4.1.1. Distribución Angular.	33
4.1.2. Sección eficaz total.	35
5. Extracción del acoplamiento $\rho\omega\pi$.	39

5.1. Decaimientos Radiativos.	40
5.2. El Decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$	43
5.2.1. El canal de la ρ'	46
5.3. Proceso $e^+ e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$	49
6. El Proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$.	53
6.1. Canales del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$	56
6.2. Sección Eficaz para el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$	63
6.2.1. Resultados de la Sección Eficaz para el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$. . .	65
6.2.2. El factor de forma eléctrico y el mdm.	68
6.3. Distribución Angular del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$	70
6.4. La razón de decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$	72
7. Conclusiones.	75
A. Identidades de Ward.	83
B. Funciones para la corrección del Vértice $\rho\rho\gamma$ a un lazo.	87
C. Correcciones a los multipolos del bosón W y del mesón K^{*+}.	89
D. Reglas de Feynman.	91
E. Constantes de Acoplamiento.	95
F. El proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$ a altas energías.	103
G. Dependencia en energía del ancho de decaimiento para el mesón $\rho(770)$.	105
H. Promedios Pesados y El parámetro χ^2.	107
I. Cinemática.	109

Capítulo 1

Introducción.

En la actualidad, para estudiar las propiedades de las partículas elementales contamos con un conjunto de teorías, conocidas como teorías de norma, las cuales describen las interacciones fundamentales entre ellas. Estas teorías constituyen lo que se conoce como el *Modelo Estándar de las Partículas Elementales* (MS); y han tenido gran éxito, no sólo por el poder descriptivo que tienen, sino además por las predicciones que se han obtenido, las cuáles en muchos casos han sido comprobadas experimentalmente con un alto grado de precisión. Un ejemplo de esto es la cantidad conocida como el momento dipolar magnético (mdm) de algunas partículas como el electrón o el muón, las cuales tienen hoy en día un error del orden de 10^{-13} y 10^{-11} respectivamente[1].

El hecho de que estas partículas tengan un tiempo de vida relativamente grande ^a nos permite utilizar un método conocido como **precesión de espín** (ver Fig. 1.1) para medir su mdm, el cuál consiste en hacer pasar a la partícula polarizada a través de una región de campo magnético constante. Esto se hace midiendo la diferencia entre la dirección original de espín con la que ésta entra en la región de campo magnético y con la que sale después de un cierto tiempo, pues dicha diferencia está relacionada directamente con esta propiedad [3].

El caso del momento anómalo del muón es un caso muy famoso debido a que se ha encontrado una diferencia importante entre las predicciones teóricas y las experimentales, las cuales hasta ahorita no se han conciliado del todo y hay un gran esfuerzo detrás para entender esta aparente incompatibilidad. El entender esta diferencia nos daría información sobre si las partículas del MS involucradas en el cálculo teórico de dicha cantidad son suficientes o necesitamos de contribuciones adicionales mas allá de las que admite dicho modelo (nueva física).

Hay partículas como el bosón W ($\tau \sim 10^{-25}s.$), o el mesón ρ , de los cuales no se puede tener una medición directa de esta propiedad, debido a que tienen tiempos de vida medio

^aAunque la vida media del electrón no se ha medido, se sabe que debe ser mayor a 10^{26} , por lo cual decimos que es una partícula estable. Por el contrario el muón tiene una vida del orden de 10^{-6} segundos.

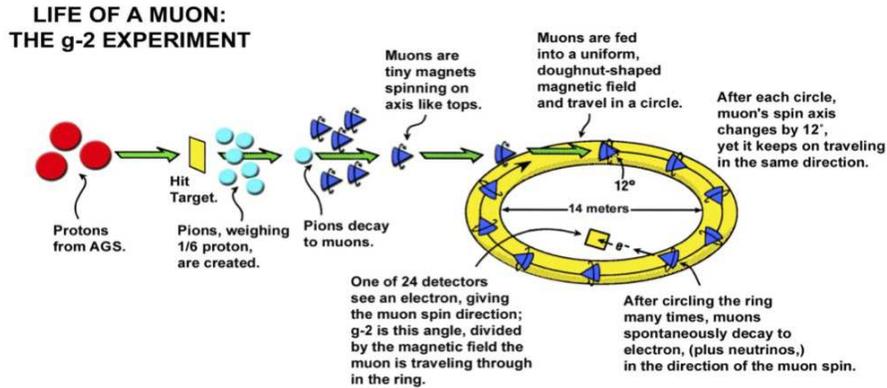


Figura 1.1: *Experimento para medir el mdm de una partícula por el método de precesión de espín.*

mucho más pequeños. Sin embargo, conocer el mdm de partículas como estas es importante, ya que en el caso del bosón W permitiría reafirmar el poder predictivo de la teoría, debido a que en el MS se predice un valor para esta cantidad. En el caso de partículas como los mesones vectoriales (entre las que se encuentra el mesón ρ) es importante debido a que esta propiedad nos da información sobre la estructura de la partícula y de la dinámica interna que pueden tener sus componentes. Hay que hacer notar que el hecho de que esta cantidad no pueda ser medida directamente no limita la posibilidad de que haya modelos teóricos que predigan un valor para ésta; y también siempre existe la posibilidad de utilizar procesos alternos, que nos ayuden a medir propiedades de las partículas.

En este trabajo nos ocupamos en particular del estudio del mdm del mesón $\rho(770)^b$; para lo cual nos auxiliaremos del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, ya que dicho proceso incluye, entre sus posibles canales, uno que contiene un vértice de interacción entre dos mesones ρ cargados y un fotón γ , el cual puede ser parametrizado en los diversos multipolos electromagnéticos de dicho mesón. Con esto en mente calcularemos la sección eficaz del proceso de producción de 4 piones en el esquema de dominancia vectorial, lo que nos permitirá tener una expresión de la sección eficaz que dependa de un parámetro (al cual llamaremos β) que es directamente proporcional al mdm del mesón ρ . Entonces, variando este parámetro β para que reproduzca datos experimentales obtenidos por BaBar para esta sección eficaz podremos determinar cual es el mdm del mesón ρ .

Hay que señalar que hasta el día de hoy no se cuenta con ninguna medida directa o indirecta para el mdm del mesón ρ y tampoco ninguno de los modelos con los que se cuentan han considerado el efecto del ancho de decaimiento para esta propiedad, con lo que el presente trabajo es el primero en utilizar datos experimentales para determinar un valor para el mdm incluyendo su naturaleza

^bAunque el método descrito aplica para cualquier mesón vectorial, con los correspondientes cambios de masas y acoplamientos.

inestable.

El orden del trabajo será el siguiente: En el capítulo 2, daremos una pequeña revisión de las partículas en el MS, y pondremos en contexto al mesón ρ , dentro de todo el mar de partículas que se conocen. Luego, en el capítulo 3 presentaremos el esquema de lazos bosónicos y veremos cómo se ven modificados los multipolos de este mesón debido a la inclusión del ancho finito de decaimiento. A continuación, en el capítulo 4 examinaremos al proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$, que es el sub-proceso del de 4 piones que incluye el vértice $VV\gamma$, debido a esto al calcular su sección eficaz tendremos una idea de la magnitud en la que este canal contribuye a la sección eficaz del proceso a 4 piones; también al estudiar su distribución angular veremos si hay una dirección preferida para la emisión de piones, por lo que en caso de heredarse esta dinámica al canal del proceso de 4 piones esperaríamos un comportamiento similar. En el capítulo 5, estudiaremos el proceso $\omega \rightarrow 3$ piones, que también es un sub-proceso del de 4 piones y que requiere una especial atención debido a que la constante de acoplamiento entre los mesones $\rho - \omega - \pi$ es sensible a la inclusión de un término de contacto o a la de distintas resonancias y se tiene que determinar con cuidado. Continuamos con el capítulo 6, en donde estudiaremos al proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, para el cual calcularemos su sección eficaz la cual se comparará con datos experimentales de BaBar; con lo que determinaremos un valor para el mdm del mesón ρ ; además estudiaremos la distribución angular del canal que incluya al vértice $\rho\rho\gamma$ para ver si hay una relación con la dinámica del proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$ y ver si existe una dirección preferencial para la emisión de piones. En este capítulo también calcularemos la razón de decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ como un resultado adicional. Finalmente presentaremos las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Mesones Vectoriales y el Esquema de Dominancia Vectorial.

En este capítulo hacemos una breve revisión de las partículas y las interacciones elementales que constituyen lo que conocemos como Modelo Estándar de las partículas fundamentales. Presentamos algunas características de los mesones ligeros, entre los cuales se halla el mesón ρ poniéndolo en contexto dentro del Modelo de quarks. Presentamos además el modelo de Dominancia Vectorial.

★ ★ ★

El MS plantea que toda materia está formada por tres tipos esenciales de partículas: los quarks, los leptones y los bosones de norma. Y que éstas interactúan entre ellas –gracias a que poseen diferentes tipos de “cargas”^a– por medio de cuatro fuerzas básicas: la fuerte, la débil, la electromagnética y la gravitacional (que en el contexto general de partículas elementales es despreciable en comparación a las otras fuerzas y de la cuál no se tiene aún una teoría cuántica y relativista aceptada como para las otras interacciones).

2.1. Interacciones Fundamentales.

Cuando hablamos de fuerzas en el contexto de partículas elementales, nos referimos a toda una teoría cuántica de campo que respeta ciertas simetrías llamadas *de norma*^b, en las cuáles las partículas conocidas como bosones de norma sirven para transmitir la interacción.

^aEn analogía al caso electromagnético.

^bDecimos que una teoría es de norma cuando su Lagrangiano es invariante bajo un grupo continuo de transformaciones locales.

Actualmente, la interacción entre partículas cargadas eléctricamente está descrita por la teoría conocida como Electrodinámica Cuántica o QED, por sus siglas en inglés. Esta teoría tiene un grupo de simetría $U(1)$, que da origen a un bosón de norma conocido como *fotón*, que es una partícula no masiva, de espín 1 y sin carga eléctrica.

Los indicios de que hay una interacción fuerte fueron desarrollados para explicar la estabilidad del núcleo atómico, pues a pesar de estar compuesto de protones que como sabemos se repelen eléctricamente, están unidos dentro del mismo; consecuentemente se introdujo esta fuerza que actualmente está descrita por la Cromodinámica Cuántica (QCD). Esta teoría está basada en un grupo de simetría $SU(3)$, lo que da lugar a un grupo de 8 bosones de norma conocidos como *gluones*, que al igual que el fotón son no masivos, pero por el contrario ellos poseen un análogo a la carga eléctrica llamada carga de *color*^c, esta nueva propiedad que, en contraste al caso electromagnético existe en tres clases distintas: rojo, verde y azul; es la responsable de la interacción entre quarks (los cuales también poseen *color*). La teoría de QCD impone el hecho de que la naturaleza es “blanca”, es decir, que todos los estados (conjuntos de partículas) que podemos observar tienen una suma de color que da por resultado el blanco; por lo que podemos tener estados de tres partículas (*bariones*) que tengan cada una un color distinto; o un estado de partícula-antipartícula (*mesones*) donde una de ellas posea un color y la otra su “anti-color”, de manera que al combinarlos nos den blanco.

Los efectos de una interacción débil fueron por primera vez observados en el decaimiento β nuclear ($n \rightarrow pe\bar{\nu}$); es llamada fuerza débil debido a que la magnitud de esta interacción pareciera ser varios ordenes menor que la interacción fuerte o incluso que la electromagnética; sin embargo la constante de acoplamiento^d resulta de hecho ser mas grande que la de la interacción electromagnética, pero es debido al hecho de que sus mediadores son tan masivos que parece ser tan débil; dichos mediadores son los bosones de norma conocidos como W^\pm y Z^0 (cuyas masas son $m_W = 80.403 \pm 0.029$ GeV y $m_Z = 91.1876 \pm 0.0021$ GeV, respectivamente^e), los cuales provienen de una simetría $SU(2)$ y tienen carga eléctrica $\pm e$ y cero según lo marcan sus índices. Esta fuerza se suele describir en conjunto con la interacción electromagnética, dando por resultado lo que se conoce como una teoría unificada llamada *electrodébil*, que fue desarrollada por Glashow, Weinberg y Salam (GWS).

El gran éxito de la anterior unificación ha motivado a los científicos para desarrollar un tipo de teorías, las cuales se conocen como *Teorías de Gran Unificación*, donde tratan de describir de manera conjunta a todas las interacciones conocidas, incluyendo la gravedad; sin embargo no hablaremos más de ellas, por estar fuera del propósito de este trabajo.

El hecho de que los bosones de la teoría electrodébil tengan masa conlleva ciertas dificultades con la estructura de norma, que predice que deben ser partículas de masa cero; por lo que para el desarrollo de esta teoría resulta necesario la introducción de una partícula extra, que se propone debe tener espín cero, la cuál es llamada el bosón de Higgs y para la cual, la

^cEste término no tiene que ver con el concepto común de color.

^dLas constantes de acoplamiento como veremos más adelante están asociadas con la magnitud de la interacción.

^eDatos obtenidos del PDG [1].

Sabores	Carga [e]	Masa ^f
u	$\frac{2}{3}$	$1.5 - 3.0 \text{ MeV}$
d	$-\frac{1}{3}$	$3 - 7 \text{ MeV}$
s	$-\frac{1}{3}$	$95 \pm 25 \text{ MeV}$
c	$\frac{2}{3}$	$1.25 \pm 0.09 \text{ GeV}$
b	$-\frac{1}{3}$	$4.20 \pm 0.07 \text{ GeV}$
t	$\frac{2}{3}$	$174.2 \pm 3.3 \text{ GeV}$

Tabla 2.1: Los Quarks y algunas de sus propiedades.

detección y verificación de sus propiedades es una de las tareas más importantes en la Física de nuestros días.

2.2. Partículas Elementales.

A continuación describiremos a las partículas que en la actualidad consideramos como fundamentales: los quarks, los leptones y los bosones de norma.

Los quarks son partículas con espín $\frac{1}{2}$ (fermiones) que tienen carga de color. Hay seis clases distintas o sabores de quarks, los cuáles son llamados por razones históricas: up (u), down (d), strange (s), charmed (c), botton (b) y top (t). En la actualidad solo se les nombra por su inicial y son arreglados en familias según se muestra en la Tabla 2.1. Los quarks también poseen un número cuántico conocido como número bariónico B , cuyo valor es de $\frac{1}{3}$ para cada uno de ellos.

Los leptones también son fermiones de espín $\frac{1}{2}$, pero éstos no tienen carga de color. Están organizados en tres familias –de manera similar a los quarks–, según se muestra en la Tabla 2.2. Dichas familias están compuestas por el electrón (e), el muón (μ) y el tau (τ); y sus correspondientes neutrinos. Para los leptones también es definido un número leptónico por familia que, experimentalmente se ha visto, es conservado.

Finalmente, a cada partícula le corresponde una antipartícula que tiene los números cuánticos opuestos de carga eléctrica, color y sabor; pero tiene el mismo espín y masa que su contraparte.

Podemos decir que éstos son a grandes rasgos los elementos de lo que hoy conocemos como el *Modelo Estándar de las Partículas Elementales*, donde hay que señalar que el término “modelo” debe ser entendido como todo un conjunto de teorías de norma autoconsistente.

^fValores obtenidos del PDG [1].

Leptón	Carga [e]	Masa
e	-1	$0.51099892 \pm 0.00000004 \text{ MeV}$
ν_e	0	$m < 2 \text{ eV}$
μ	-1	$105.658369 \pm 0.000009 \text{ MeV}$
ν_μ	0	$m < 2 \text{ eV}$
τ	-1	$1776.99 \pm 0.29 \text{ MeV}$
ν_τ	0	$m < 2 \text{ eV}$

Tabla 2.2: Los Leptones y algunas de sus propiedades.

2.3. El Modelo de Quarks y los Mesones Ligeros.

Cuando las partículas Λ y k fueron descubiertas se encontró que aún cuando eran producidas en el mismo número, decaían con un tiempo de vida muy distinto. Por lo que se propuso que estas partículas tenían un nuevo numero cuántico llamado *extrañeza* S ; el cual era conservado en la interacción fuerte, pero no así en la débil. A la extrañeza, como la carga eléctrica Q , se le asocia con una simetría $U(1)$. De hecho se encontró una combinación lineal entre estas cantidades (S y Q), y el generador diagonal de isospín T_3 (Gell-Mann 1953; Nishijima y Nakano 1953),

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (2.1)$$

con $Y = B + S$, donde B es el número bariónico y Y es llamada la *hipercarga*. Entonces, isospín y extrañeza son conservadas aproximadamente, mientras que una combinación de ellas, la carga eléctrica, es preservada por todas las interacciones que conocemos.

En 1961, Murray Gell-Mann y Yuval Ne'eman, de manera independiente, señalaron que los bariones y mesones podían ser arreglados en grupos (llamados *multipletes*) que tuvieran el mismo espín en el plano T_3 - Y .

La existencia de tantos hadrones hacía pensar que estos no fueran realmente fundamentales y sin estructura, lo cual llevo a la concepción del *modelo de quarks*, desarrollado por Gell-Mann y Zweig en 1964. En dicho modelo se proponía que todo hadrón era construido por partículas de espín $\frac{1}{2}$, que eran miembros de una simetría $SU(3)$. Los bariones, eran un estado ligado de 3 de estos quarks (u,d y s) y los mesones eran formados por una par quark-antiquark. En el caso particular de los mesones más ligeros esto daba posibilidad de tener dos valores para el espín final de las partículas; sí los espines están alineados de forma antiparalela forman estados con espín cero y si lo están de manera paralelas forman estados con espín 1. Es a estos últimos a los que pertenece el mesón ρ , como se puede ver en la Figura 2.1.

Hay que notar que en el caso de los multipletes de mesones las correspondientes anti-

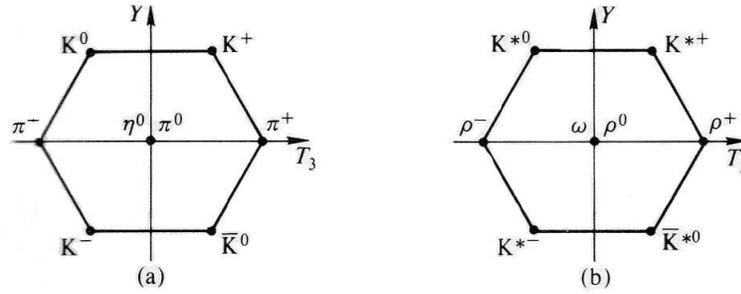


Figura 2.1: a) Octete de Mesones Pseudo-escalares ($s=0$). b) Octete de Mesones Vectoriales ($s=1$).

partículas pertenecen al mismo diagrama, en contraste con los correspondientes diagramas para bariones en donde es necesario hacer un diagrama diferente para la clasificación de sus anti-partículas⁸.

El hecho de que haya dos o mas partículas en el centro de los multipletes, es debido a que éstas tienen los mismos números cuánticos de Y y T_3 , como el caso de las partículas π^0 y η en el caso de espín 0 y los mesones ρ^0 y ω en el caso de $s=1$. Esto se ve reflejado en la práctica como una “mezcla” entre los diferentes mesones [2]. Estos efectos pueden ser identificados experimentalmente, de forma tal que los datos corresponden a canales individuales. En caso contrario, pueden agregarse de manera directa considerando una fase entre las partículas.

A continuación presento una lista con los datos generales del mesón $\rho(770)$ según el catálogo del PDG:

$$J^{PC} = 1^{--}$$

$$\text{Masa} = 775.49 \pm 0.34 \text{ MeV}$$

$$\text{Ancho de decaimiento } (\Gamma) = 149.1 \pm 0.8 \text{ MeV}$$

$$\text{Tiempo de vida media } \tau = 4.41 \times 10^{-24} \text{ s.}$$

$$\text{Principal modo de decaimiento: } \rho \rightarrow \pi\pi (\sim 100 \%)$$

El primer renglón se refiere al momento angular de la partícula, donde $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, en el caso del mesón ρ tenemos que $L = 0$ y $S = 1$. Los superíndices P y C refieren a las operaciones de paridad y conjugación de carga.

El mesón ρ es un ejemplo de las partículas conocidas como *resonancias hadrónicas*, por su tiempo de vida tan corto, por lo cual es necesario considerar que el parámetro de ancho de decaimiento Γ puede modificar algunas de sus propiedades; en particular sus momentos multipolares y la manera correcta de incluir este parámetro debe respetar la invariancia de norma electromagnética.

⁸Véase por ejemplo la Figura 2.8 del libro *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* de F. Halzen y A. D. Martin.

En el caso de las resonancias existen partículas que tienen la misma composición de quarks y que además comparten el mismo momento angular total J del estado base pero no L y S , que los llamados estados base, por lo que se les llama *resonancias radiales*. Estos estados difieren del estado base en otras cantidades físicas como en su masa o en el ancho de decaimiento. En el caso específico del mesón ρ podemos mencionar diferentes excitaciones radiales como el mesón ρ' ($m = 1465 \pm 25$ MeV, $\Gamma = 400 \pm 60$ MeV), o el ρ'' ($m = 1720 \pm 20$ MeV, $\Gamma = 250 \pm 100$ MeV).

Para poder realizar un estudio sobre cómo incluir el ancho de decaimiento, así como para trabajar el proceso de producción a 4 piones nos basaremos en el esquema conocido como Dominancia Vectorial, el cual presentamos a continuación.

2.4. El Esquema de Dominancia Vectorial.

En general el estudio de la producción de hadrones, por medio de la aniquilación electrón-positrón ha jugado un papel muy importante en el desarrollo de la física de partículas moderna ya que estos estudios tienen relación con problemas fundamentales como el momento magnético anómalo del muón [3], o el estudio de cómo varían las constantes de estructura fina a energías del orden de la masa del bosón Z para el análisis de precisión de la teoría electrodébil [4]. En particular la producción de 4 piones ya sea por el decaimiento del τ o por aniquilación e^+e^- ha recibido una considerable atención tanto teórica como experimentalmente ya que la relación entre la sección eficaz y los anchos de decaimiento de los diferentes estados finales de carga ($\pi^+\pi^-2\pi^0$, $2\pi^+2\pi^-$, $\pi^+2\pi^-\pi^0$ y $\pi^-3\pi^0$) validaría la simetría de isoespín, la cual permite relacionar a los dos mecanismos de producción; o daría idea de la magnitud que tiene el romper esta simetría [5]-[8].

A altas energías la sección eficaz inclusiva de la producción hadrónica puede ser calculada por la teoría de QCD; sin embargo conforme uno va bajando en energía no puede valerse de esta teoría y el reto teórico consiste en cómo modelar estos procesos de manera que sean consistentes con QCD. A muy bajas energías ($E \ll 1$ GeV), la aproximación más socorrida es la Teoría Quiral (o ChPT por sus siglas en inglés) pero aun ésta no puede aplicarse del todo a ordenes de energía de la masa del mesón ρ y superiores.

En 1960 Sakurai [9] propuso una teoría de interacción fuerte basada en una simetría de norma local, donde la interacción estaba mediada por mesones vectoriales. En este escenario la interacción electromagnética de los hadrones era introducida por una mezcla entre el fotón y los mesones vectoriales neutros (V). Este modelo, conocido como Dominancia Vectorial o (VMD) por sus siglas en inglés, es el que utilizaremos para nuestro trabajo.

En este modelo se asume que la componente hadrónica de la polarización del vacío de un fotón, que según la teoría de QCD se presentaría en forma de lazos, consiste exclusivamente de mesones vectoriales conocidos, según se muestra en la figura 2.2. Las diferentes contribuciones de lazos son resumadas en constantes de acoplamiento efectivas que ligan al fotón con los

diferentes mesones vectoriales.

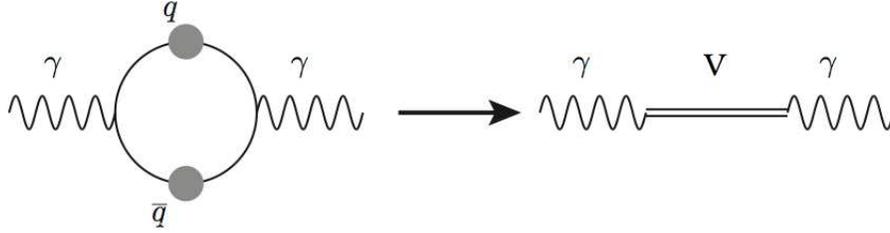


Figura 2.2: La contribución proveniente de lazos, según la teoría de QCD, reemplazada por un mesón vectorial conocido (V).

Históricamente, dos Lagrangianos de VMD han sido desarrollados, los cuales se puede demostrar que son equivalentes [10]. El primero, debido a Kroll, Lee y Zumino [11], describe la mezcla entre el fotón y los mesones vectoriales (V) a través de un término de la forma

$$\mathcal{L}_{\gamma V} = \frac{e}{2g_{1V}} V_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

donde V_μ es el vector de polarización del mesón, $V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, con A el campo del fotón y g_{1V} , una constante de acoplamiento de transmutación entre el mesón y el fotón. Este es visto como el desarrollo más elegante de la teoría porque el Lagrangiano es explícitamente consistente con la invariancia de norma electromagnética; pero con este planteamiento uno tiene que trabajar con propagadores no diagonales. Por ello se ha desarrollado otro Lagrangiano, que es más popular que el anterior y está dado por un Lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L}_{\gamma V} = -\frac{em_V^2}{g_V} V_\mu A^\mu; \quad (2.3)$$

el problema de este Lagrangiano es que introduce un término de masa para el fotón, por lo que es necesario añadir un contratérmino para cancelar este efecto[10]. En el caso de este Lagrangiano la constante de acoplamiento g_V es calculada a partir del ancho de decaimiento del mesón V en un par e^+e^- y tiene la expresión

$$g_V = 2\alpha \sqrt{\frac{\pi m_V}{3\Gamma_{V \rightarrow e^+e^-}}}; \quad (2.4)$$

en este trabajo hemos utilizado la cantidad $\Gamma_{V \rightarrow e^+e^-}$, aunque en general se puede usar el decaimiento inclusivo $\Gamma_{V \rightarrow l+l^-}$ con $l = e, \mu, \tau$.

El hecho de que podamos hacer este reemplazo de los lazos por el propagador del mesón vectorial viene de asumir que el operador de corriente electromagnética hadrónica, que podemos escribir como $j_\mu^{EM} = j_\mu^{(3)} + \frac{1}{2}j_\mu^Y$, tiene una componente proporcional al campo vectorial; esto es lo que se conoce como la Identidad Campo-Corriente (Ec. 2.5) [12]. Por ejemplo para el caso del mesón ρ tenemos la expresión

$$j_\mu^{(3)}(x) = \frac{m_\rho^2}{g_\rho} \rho_\mu(x), \quad (2.5)$$

en donde la componente $j^{(3)}$ se asocia al mesón ρ^0 .

Gracias a este esquema podremos tener interacciones efectivas no sólo entre un mesón vectorial y un fotón, sino entre diferentes mesones, lo cual nos permitirá tener los diagramas con los que calcularemos todos los procesos presentes en este trabajo, por lo que es una pieza fundamental en nuestra descripción.

En el capítulo a continuación, estudiaremos los diferentes esquemas que se han desarrollado para incluir los efectos de ancho finito sobre los momentos multipolares y compararemos estos efectos con los valores para los diferentes momentos predichos por otros modelos en la literatura.

Capítulo 3

Modificación a los Multipolos por Efectos de Ancho Finito de Decaimiento.

En este capítulo presentamos la estructura multipolar del vértice $VV\gamma$, veremos la manera de incluir los efectos debidos al ancho finito de decaimiento y analizaremos cómo son modificados los multipolos por considerar este parámetro. Calcularemos los distintos multipolos ya modificados y los compararemos con diferentes resultados de la literatura.

* * *

Entre los modelos para el estudio de los mesones vectoriales, al mesón ρ lo han propuesto como un bosón de norma dinámico de una simetría local oculta [13], por lo que es tratado de manera muy semejante al bosón W en la teoría electrodébil. Además, debido a que los vértices $WW\gamma$ y $\rho\rho\gamma$ (los cuales, como veremos a continuación, pueden parametrizarse en los momentos multipolares de la partícula correspondiente) tienen la misma estructura ^a, se podría pensar de manera ingenua, que ambas partículas pudieran tener los mismos momentos multipolares. Sin embargo, hay que considerar un hecho fundamental, mientras que el bosón W es una partícula elemental cuyo valor para sus multipolos es predicho por la teoría; el mesón ρ es un estado ligado de quarks, regido por interacción fuerte y la teoría no predice ningún valor para estas propiedades. De hecho, el poder conocer cual es el valor de los multipolos para un mesón nos daría información sobre la dinámica interna de la partícula vectorial.

A continuación estudiaremos la estructura del vértice $VV\gamma$ (Figura 3.1) y cómo podemos obtener a partir de él la información de los multipolos para una partícula.

^aVéase la ec. 3.16 más adelante.

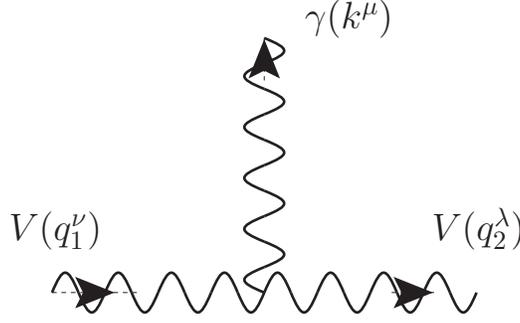


Figura 3.1: Convención de momentos para el vértice electromagnético $VV\gamma$.

3.1. Vértice Electromagnético $VV\gamma$.

Al vértice electromagnético $VV\gamma$ (Fig. 3.1) se le puede asociar de manera directa con los distintos multipolos de la partícula V . Para establecer dicha relación se considera una parametrización de la manera más general posible de dicho vértice y después se imponen restricciones debidas a las simetrías de la teoría, como las simetrías discretas C, P y T; esto se ha hecho en gran detalle en particular para el vértice $WW\gamma$ [14].

Para mostrar cómo se produce la identificación de las estructuras multipolares [15], comenzaremos con la expresión para la amplitud asociada al proceso $V(q_1) \rightarrow V(q_2) + \gamma(k)$, que es descrita por el elemento de matriz de la corriente electromagnética dado por

$$\langle V(q_2) | J_\mu^{em}(0) | V(q_1) \rangle = \eta_{1\nu} \eta_{2\lambda}^* \Gamma_\mu^{\nu\lambda}(q_1, k) \equiv J_\mu(q_1, k), \quad (3.1)$$

donde $\Gamma_\mu^{\nu\lambda}$ denota al vértice $VV\gamma$ y η_β es el 4-vector de polarización asociado a V , y los estados satisfacen la condición de normalización,

$$\langle V(q_2) | V(q_1) \rangle = (2\pi)^3 2q_0 \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{q}_2). \quad (3.2)$$

Usando la condición de invariancia de Lorentz para obtener la expresión más general para el vértice, éste puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\nu\lambda\mu}(Q, k) = & g^{\nu\lambda}(C_1 Q + C_2 k)^\mu + C_3(g^{\mu\nu} k^\lambda - g^{\mu\lambda} k^\nu) + C_4(g^{\mu\nu} k^\lambda + g^{\mu\lambda} k^\nu) \\ & + C_5 g^{\mu\nu} Q^\lambda + C_6 g^{\mu\lambda} Q^\nu + Q^\mu [C_7 Q^\nu Q^\lambda + C_8 Q^\nu k^\lambda + C_9 k^\nu Q^\lambda + C_{10} k^\nu k^\lambda] \\ & + k^\mu [C_{11} Q^\nu Q^\lambda + C_{12} Q^\nu k^\lambda + C_{13} k^\nu Q^\lambda + C_{14} k^\nu k^\lambda] \\ & + i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\alpha} (C_{15} Q + C_{16} k)_\alpha + i\varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} Q_\alpha k_\beta (C_{17} Q + C_{18} k)^\mu \\ & + i\varepsilon^{\mu\lambda\alpha\beta} Q_\alpha k_\beta (C_{19} Q + C_{20} k)^\nu + i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} Q_\alpha k_\beta (C_{21} Q + C_{22} k)^\lambda, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $Q = q_1 + q_2$ y C_i son factores de forma que dependen de k^2 .

Si ahora aplicamos las restricciones provenientes de las simetrías discretas tenemos los siguientes resultados:

- **Inversión Espacial P.**

Esta operación implica que

$$\Gamma^{\nu\lambda\mu}(Q_0, \vec{Q}; k_0, \vec{k}) \rightarrow \Gamma^{P\nu\lambda\mu}(Q_0, -\vec{Q}; k_0, -\vec{k}) \quad (3.4)$$

entonces, si lo aplicamos a la expresión 3.3 tenemos que:

$$C_{15} = C_{16} = C_{17} = C_{18} = C_{19} = C_{20} = C_{21} = C_{22} = 0 \quad (3.5)$$

- **Conjugación de Carga C y CP.**

La operación de conjugación de carga, junto con la simetría de cruce nos ayudan a describir el proceso para antipartículas $\bar{V}(q_1) \rightarrow \bar{V}(q_2) + \gamma(k)$ y aplicando sucesivamente las operaciones C y P al vértice 3.3 tenemos que este transforma como:

$$\Gamma^{\nu\lambda\mu}(Q, k) \rightarrow -\Gamma^{CP\nu\lambda\mu}(-Q, k) \quad (3.6)$$

de donde encontramos que cumplen las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} C_2 = C_4 = C_{11} = C_{14} = C_{16} = C_{17} = 0; \\ C_5 = C_6, \quad C_8 = -C_9, \quad C_{12} = C_{13}, \quad C_{19} = C_{21}, \quad C_{20} = -C_{22}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por lo tanto, la invariancia de las interacciones electromagnéticas ante transformaciones C y CP, nos deja finalmente con la expresión más general para el vértice dada por

$$\begin{aligned} \Gamma^{\nu\lambda\mu}(Q, k) = & C_1 g^{\nu\lambda} Q^\mu + C_3 (g^{\mu\nu} k^\lambda - g^{\mu\lambda} k^\nu) + C_5 (g^{\mu\nu} Q^\lambda + g^{\mu\lambda} Q^\nu) \\ & + Q^\mu [C_7 Q^\nu Q^\lambda + C_8 (Q^\nu k^\lambda - k^\nu Q^\lambda) + C_{10} k^\nu k^\lambda] \\ & + C_{12} k^\mu (Q^\nu k^\lambda + k^\nu Q^\lambda). \end{aligned} \quad (3.8)$$

- **Hermiticidad.**

Otra restricción que debe satisfacer el vértice está dada por la Hermiticidad, la cuál implica que

$$\Gamma^{\nu\lambda\mu}(Q, k) \rightarrow -\Gamma^{*\lambda\nu\mu}(-k, Q) \quad (3.9)$$

y como consecuencia se tiene que:

$$\begin{aligned} C_1, C_3, C_7, C_{10}, C_{15}, C_{18} \quad \text{son reales y} \\ C_2, C_4, C_{11}, C_{14}, C_{16}, C_{17} \quad \text{son imaginarios.} \end{aligned}$$

Por último, para poder relacionar los términos del vértice con los multipolos de la partícula tenemos que hacer la consideración de que ésta se encuentra en capa de masa y que el fotón emitido es real, consideraciones que dan las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}
\eta_1 \cdot q_1 &= 0 \\
\eta_2 \cdot q_2 &= 0 \\
q_1^2 &= m^2 \\
q_2^2 &= m^2.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Con lo que el vértice 3.8 se reduce a

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\nu\lambda\mu}(Q, k) &= C_1 g^{\nu\lambda} (q_1 + q_2)^\mu + (C_3 + C_5) (g^{\mu\nu} k^\lambda - g^{\mu\lambda} k^\nu) \\
&\quad - (q_1 + q_2)^\mu (C_7 + 2C_8 - C_{10}) k^\nu k^\lambda.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2. Estructura Multipolar.

Para relacionar los factores de forma de este vértice con los momentos multipolares, la referencia [16] muestra un método de hacerlo, en el cuál se parte de las expresiones clásicas para los carga eléctrica \mathcal{Q} , momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ y momento cuadrupolar eléctrico X_E , dadas por

$$\mathcal{Q} = \int d^3x \rho^{em}(x), \tag{3.12}$$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{x} \times \vec{J}^{em}(x), \tag{3.13}$$

$$X_E^{ij} = \int d^3x x^i x^j \rho^{em}(x), \tag{3.14}$$

con el 4-vector de corriente dado por

$$J_\mu^{em}(x) = (\rho^{em}(x), \vec{J}^{em}(x)); \tag{3.15}$$

y el correspondiente valor cuántico de éstos se obtiene convirtiéndolos en operadores y tomando su valor esperado entre los estados $|V(q_1)\rangle$ y $\langle V(q_2)|$ (Véase la Ec. 3.1).

Además de seguir el procedimiento presentado en [16], se tiene que tomar en cuenta que *para tener bien definidos los momentos multipolares las partículas del vértice electromagnético deben estar en capa de masa y el 3-momento del fotón (\vec{k}) emitido debe ser considerado en el límite $\vec{k} \rightarrow 0$ (límite estático)*. Como resultado de este desarrollo, es posible identificar a las partes independientes de k_λ en el vértice con la estructura asociada a la carga eléctrica; las partes proporcionales a la primera potencia de k_λ , con el momento dipolar magnético y

las partes proporcionales a la segunda potencia de k_λ con el cuadrupolo eléctrico; por lo que el vértice 3.11 se puede reescribir de la siguiente manera

$$\Gamma^{\nu\lambda\mu} = \alpha(k^2)g^{\nu\lambda}(q_1 + q_2)^\mu + \beta(k^2)(g^{\mu\nu}k^\lambda - g^{\mu\lambda}k^\nu) - \gamma(k^2)(q_1 + q_2)^\mu k^\nu k^\lambda. \quad (3.16)$$

en donde los factores $\alpha(k^2)$, $\beta(k^2)$ y $\gamma(k^2)$, están directamente relacionados con los multipolos electromagnéticos.

Un procedimiento análogo, que es muy utilizado en la literatura para el bosón W [14], muestra que el Lagrangiano mas general puede ser parametrizado de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} L_{\text{WWV}}/g_{\text{WWV}} &= ig_1^V (W_{\mu\nu}^\dagger W^\mu V^\nu - W_\mu^\dagger V_\nu W^{\mu\nu}) + i\kappa_V W_\mu^\dagger W_\nu V^{\mu\nu} + \frac{i\lambda_V}{m_W^2} W_{\lambda\mu}^\dagger W_\nu^\mu V^{\nu\lambda} \\ &\quad - g_4^V W_\mu^\dagger W_\nu (\partial^\mu V^\nu + \partial^\nu V^\mu) + g_5^V \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(W_\mu^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\rho W_\nu \right) V_\sigma + i\tilde{\kappa}_V W_\mu^\dagger W_\nu \tilde{V}^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{i\tilde{\lambda}_V}{m_W^2} W_{\lambda\mu}^\dagger W_\nu^\mu \tilde{V}^{\nu\lambda}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

–en donde W es el campo de los bosones cargados y V puede ser el tanto el fotón como el bosón Z . $W^{\mu\nu} = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu$ y análogamente para $V^{\mu\nu}$, $\tilde{V}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}V_{\rho\sigma}$ y $A\overleftrightarrow{\partial}_\mu B = A(\partial_\mu B) - (\partial_\mu A)B$. Las constantes g_1^V , g_4^V , g_5^V , κ_V , λ_V , $\tilde{\kappa}_V$ y $\tilde{\lambda}_V$ son constantes de acoplamiento entre las partículas–, también puede ser relacionado con los momentos multipolares. Las expresiones correspondientes a la relación entre los parámetros de esta parametrización y la nuestra (expresión 3.16) con los multipolos electromagnéticos están dadas por

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}| &\equiv \alpha(k^2) \\ |\vec{\mu}| &= \beta(k^2) \equiv 1 + \kappa_\gamma + \lambda_\gamma \\ |X_E| &= \kappa_\gamma - \gamma(k^2)M_V^2 \equiv \kappa_\gamma - \lambda_\gamma; \end{aligned} \quad (3.18)$$

aquí la carga eléctrica está en unidades de e ; el momento dipolar magnético, en unidades de $\frac{e}{2m}$ y el cuadrupolo eléctrico en unidades de $\frac{e}{m^2}$.

Predicciones del MS para los multipolos del bosón W ^b.

En el caso del bosón W , la expresión para el vértice $WW\gamma$, obtenida de la estructura de norma del MS [17] puede ser escrito como

$$\Gamma^{\mu\nu\lambda} = g^{\mu\nu}(q_1 + q_2)^\lambda + 2(k^\mu g^{\nu\lambda} - k^\nu g^{\mu\lambda}) - g^{\mu\lambda}q_2^\nu - g^{\nu\lambda}q_1^\mu, \quad (3.19)$$

^bLos resultados mostrados aquí para el mesón W son utilizados sólo para ejemplificar la identificación de los multipolos.

donde hemos utilizado la conservación de momento en el vértice y la condición de transversalidad ($\eta_1 \cdot q_1 = \eta_2 \cdot q_2 = 0$). Una comparación directa con la expresión 3.16 nos permite identificar que los multipolos para este bosón a nivel árbol, predichos por el MS, están dados por: $\alpha(0) = 1$, $\beta(0) = 2$ y $\gamma(0) = 0$; lo cual corresponde a $|\mathcal{Q}| = 1$, $|\vec{\mu}| = 2$ y $|X_E| = 1$; y correspondientemente a valores de $\kappa = 1$ y $\lambda = 0$.

Experimentalmente los multipolos electromagnéticos para este bosón se han medido indirectamente a través de procesos como $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}q\bar{q}$ o $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}l\bar{\nu}_l$ [18]-[21], en donde el vértice $WW\gamma$ se suele parametrizar según la expresión 3.17. Para obtener los multipolos (a partir de las expresiones 3.18), los parámetros κ y λ son estudiados dejando uno fijo y variando el otro de modo que reproducen la sección eficaz experimental para los procesos mencionados; esto da un rango de valores para los parámetros κ y λ , los cuales mostramos en la Tabla 3.1. Los cuales están en acuerdo con los valores mencionados anteriormente.

Referencia	κ_γ	λ_γ
[18]	0.68 ± 0.17	0.16 ± 0.13
[19]	1.11 ± 0.25	0.10 ± 0.20
[20]	0.88 ± 0.09	-0.06 ± 0.034
[21]	1.013 ± 0.072	-0.021 ± 0.039

Tabla 3.1: Valores experimentales para las constantes κ_γ y λ_γ , con los cuales es posible determinar un rango para los diferentes multipolos electromagnéticos.

Predicciones de modelos de QCD para los multipolos del mesón ρ .

En contraste con el caso del bosón W, hasta la fecha no existen medidas experimentales de parámetros análogos al κ y λ , mostrados anteriormente, que nos permitan conocer el valor de los distintos multipolos para esta partícula (ni para ningún otro mesón vectorial).

En el caso de los mesones vectoriales no hay una simetría que imponga valores a los multipolos; por lo que los factores de forma reflejan los efectos de la estructura interna que poseen los mesones. En la literatura se puede encontrar una vasta cantidad de modelos basados en QCD que intentan dar una predicción para los diferentes multipolos electromagnéticos. En la Tabla 3.2 mostramos algunos de estos resultados para el mdm y el cuadrupolo eléctrico, en donde ocupan diferentes aproximaciones: [22] y [23] utilizan una aproximación covariante basada en las ecuaciones de Dyson-Schwinger. [24], [25] y [26] utilizan un esquema conocido como *light-front* y quarks constituyentes y finalmente [27] son resultados utilizando *lattice*-QCD.

Referencia	$ \vec{\mu} \left[\frac{e}{2m_\rho} \right]$	$ X_E \left[\frac{e}{m_\rho^2} \right]$
[22]	$2 + 0.69$	$1 + 1.81$
[23]	$2 + 0.01$	$1 - 1.41$
[24]	$2 - 0.08$	$1 - 0.57$
[25]	$2 + 0.26$	$1 + 0.22$
[26]	$2 + 0.14$	$1 + 1.65$
[27]	$2 + 0.25$	$1 - 0.75$

Tabla 3.2: Predicciones para el mdm y el cuadrupolo eléctrico del mesón ρ , basado en diferentes modelos. Los valores para los multipolos están referidos a los números cuánticos del bosón W , a los cuales se les suma o resta alguna cantidad para ver claramente en cuanto difieren de estos.

3.3. Esquemas para incluir el carácter inestable de las partículas.

Para desarrollar un marco teórico que describa los valores multipolares del mesón ρ conservando la invariancia de norma electromagnética se han desarrollado diferentes esquemas, en los cuales el ancho de decaimiento de estas partículas es incluido en las reglas de Feynman; en particular, dentro del vértice anteriormente presentado, por lo que los factores de forma del momento dipolar magnético y del cuadrupolo eléctrico también se ven modificados. Para ver cómo se puede incluir el parámetro de ancho finito se han elaborado los siguientes esquemas:

- **El esquema de ancho de decaimiento fijo.** [28]

Consiste en introducir el ancho de decaimiento (Γ) en cada propagador de la partícula de masa M en la siguiente manera

$$(k^2 - M^2)^{-1} \rightarrow (k^2 - M^2 + iM\Gamma)^{-1}; \quad (3.20)$$

donde Γ es una constante. Debido a que solo el propagador es corregido y no los vértices esto automáticamente hace que se violen las identidades de Ward ^c.

- **El esquema de ancho de decaimiento variable.** [28]

Aquí se realiza la misma sustitución que en el esquema pasado, pero ahora se considera a $\Gamma(k^2)$, con esto se logra una mejor descripción sobre todo a energías del orden de la masa de los mesones vectoriales, pero aun así continúa con el problema de la invariancia de norma perdida.

- **El esquema de masa compleja.** [28]

^cVer el Apéndice A.

En este esquema se pide la sustitución consistente $M^2 \rightarrow M^2 - iM\Gamma$ en cualquier lugar donde aparezca una masa del bosón V . Aún cuando este esquema funciona bien, pues conserva las identidades de Ward, generalmente se hace la observación de que debe ser usado con cuidado, pues su total consistencia aún no ha sido totalmente entendida. En este trabajo veremos que una descripción en términos de lazos es consistente con el esquema de masa compleja, proporcionando así una base sólida a este esquema.

- **El esquema de lazos.**

Con el fin de tener un esquema que preserve la invariancia de norma electromagnética tenemos que tener en cuenta dos cosas: primero, en la teoría cuántica de campos, cuando se hace la resumación de todos los ordenes perturbativos de los diagramas de autoenergía de las partículas, los anchos de decaimiento son naturalmente incluidos en la parte absorptiva de los lazos en dichos diagramas; y segundo, las identidades de Ward, se cumplen orden por orden en la teoría de perturbaciones. Este procedimiento, que es completamente formal, se tiene que formular de acuerdo con los posibles decaimientos de las partículas, por ejemplo el bosón W puede decaer en un par quark-antiquark creando un *lazo fermiónico*; pero el mesón ρ por otra parte decae principalmente en un par de piones formando ahora un *lazo bosónico*; y aunque en esencia es el mismo procedimiento, hay diferencias que se tienen que considerar como mostraremos a continuación.

- **Lazo Fermiónico.** [29]

En este esquema no solo se requiere de un cálculo a nivel árbol, sino hacer la corrección tanto de los propagadores como de los vértices electromagnéticos por medio de la inclusión de lazos de fermiones. Empecemos recordando el propagador del bosón W ($D_0^{\mu\nu}(q)$) a nivel árbol, en la norma unitaria

$$\begin{aligned} D_0^{\mu\nu}(q) &= i \left(\frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m^2}}{q^2 - m^2} \right) \\ &= -\frac{iT^{\mu\nu}(q)}{q^2 - m^2} + \frac{iL^{\mu\nu}(q)}{m^2}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde $T^{\mu\nu}(q) \equiv g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / q^2$ y $L^{\mu\nu}(q) \equiv q^\mu q^\nu / q^2$, son los proyectores transversal y longitudinal, respectivamente. El vértice $WW\gamma$ a nivel árbol ($\Gamma_0^{\mu\nu\lambda}$), está dado por

$$\Gamma_0^{\mu\nu\lambda} = g^{\mu\nu}(q_1 + q_2)^\lambda - g^{\mu\lambda}(q_1 + k)^\nu - g^{\nu\lambda}(q_2 - k)^\mu; \quad (3.22)$$

donde se siguen las convenciones de la figura 3.2.

Es fácil checar que las ecuaciones 3.21 y 3.22 obedecen la identidad de Ward dada por

$$k_\mu \Gamma_0^{\mu\nu\lambda} = \left[iD_0^{\mu\lambda}(q_1) \right]^{-1} - \left[iD_0^{\mu\lambda}(q_2) \right]^{-1}; \quad (3.23)$$

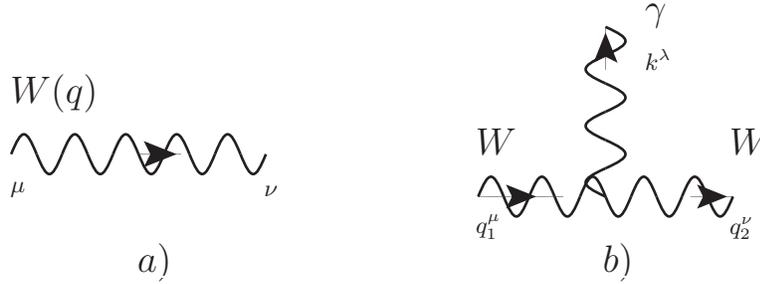


Figura 3.2: a) Propagador del bosón W en la norma unitaria y b) Vértice $WW\gamma$ a nivel árbol.

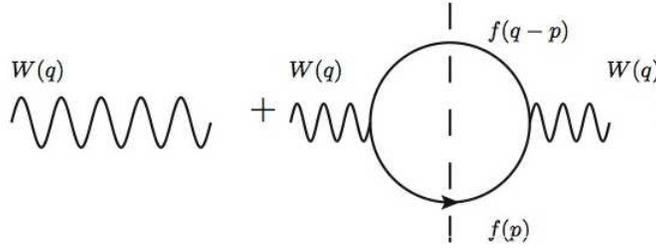


Figura 3.3: Corrección del propagador del bosón W a un lazo fermiónico.

aquí $[D_0^{\mu\lambda}]^{-1} = g^{\mu\lambda}(-q^2 + m^2) + q^\mu q^\lambda$, es el inverso del propagador, el cual se encuentra a partir de la condición $D_0^{\mu\nu}[D_0^{\mu\lambda}]^{-1} = g^{\nu\lambda}$.

Para introducir el ancho de decaimiento del bosón W es necesario incluir diagramas de más alto orden, los cuales involucran lazos, como se muestra en la Figura 3.3 para el caso del propagador y en la Figura 3.4 para el caso del vértice electromagnético. Al hacer la suma de estos diagramas uno puede obtener el siguiente resultado para el propagador

$$D_{\mu\nu}(q) = -\frac{iT^{\mu\nu}(q)}{q^2 - m^2 + i\text{Im}\Pi^T(q^2)} + \frac{iL^{\mu\nu}(q)}{m^2 - i\text{Im}\Pi^L(q^2)}. \quad (3.24)$$

Donde $\text{Im}\Pi^T(q^2)$ y $\text{Im}\Pi^L(q^2)$, son las partes transversa y longitudinal de la parte absorbiva de la auto-energía inducida por los fermiones.

Podemos escribir al vértice en términos de las contribuciones a nivel árbol $\Gamma_0^{\mu\nu\lambda}$ y las provenientes de los lazos $\Gamma_1^{\mu\nu\lambda}$ de la siguiente manera

$$ie\Gamma^{\mu\nu\lambda} = ie(\Gamma_0^{\mu\nu\lambda} + \Gamma_1^{\mu\nu\lambda}), \quad (3.25)$$

$\Gamma_1^{\mu\nu\lambda}$ son las partes absorbivas debidas a los lazos, cuya expresión está dada por

$$\Gamma_1^{\mu\nu\lambda} = ic(V^{\mu\nu\lambda} + iA^{\mu\nu\lambda}); \quad (3.26)$$

las expresiones para $V^{\mu\nu\lambda}$ y $A^{\mu\nu\lambda}$ están dadas en el apéndice de la referencia [29] y $c = -\frac{g^2}{64\pi(k \cdot q_1)}$; dichas expresiones son calculadas para fermiones en la capa de

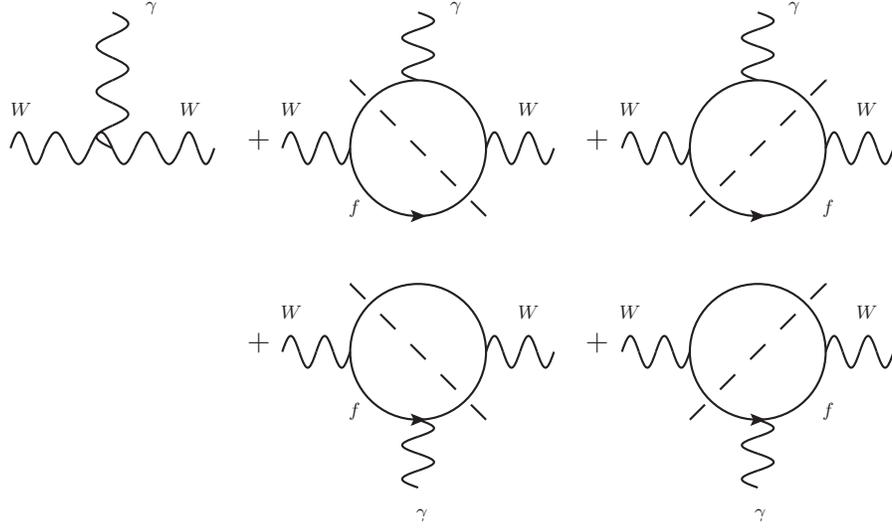


Figura 3.4: Corrección del vértice $WW\gamma$ a un lazo.

masa, y la nomenclatura se debe a que la contribución proveniente de los lazos se puede dividir en sus partes vectorial y axial.

La identidad de Ward, nos proporciona una relación entre el vértice $\Gamma_1^{\mu\nu\lambda}$ y la polarización del vacío $\Pi^{\mu\nu}$, cantidad que veremos más adelante es proporcional al ancho de decaimiento; la relación resultante está dada por

$$k_\lambda \Gamma_1^{\mu\nu\lambda} = i \text{Im} \Pi^{\mu\nu}(q_1) - i \text{Im} \Pi^{\mu\nu}(q_2). \quad (3.27)$$

- **Lazos bosónicos.** [30]

Para el caso del mesón ρ puede hacerse un análogo de este procedimiento para incluir su ancho finito de decaimiento, con la diferencia de que por el tipo de partículas en las que decae el mesón no se tienen fermiones dentro de los lazos, sino bosones; las correcciones del propagador dan lugar a diagramas similares a los mostrados en la figura 3.3 y por lo mismo, éstas dan un resultado análogo al de la expresión 3.24; sin embargo, las expresiones para las partes imaginarias de las autoenergías cambian debido a que las partículas en los lazos son distintas. Para el vértice en este caso si hay una diferencia, pues además de los diagramas donde el fotón es emitido por las partículas en el lazo, hay la posibilidad de que salgan del vértice $\rho\pi\pi$ (términos de contacto) según se ve en la Figura 3.5.

Aún cuando se tienen diferentes diagramas para el mesón, es importante señalar que todavía es posible escribir al vértice de la misma manera que la mostrada en la ecuación 3.25 [30], con la salvedad de que ahora la expresión para $\Gamma_1^{\mu\nu\lambda}$ es diferente a la obtenida en el caso de lazos fermiónicos. Así mismo es importante señalar que las expresiones obtenidas para el propagador y el vértice con las correcciones pertinentes también satisfacen la identidad 3.27.

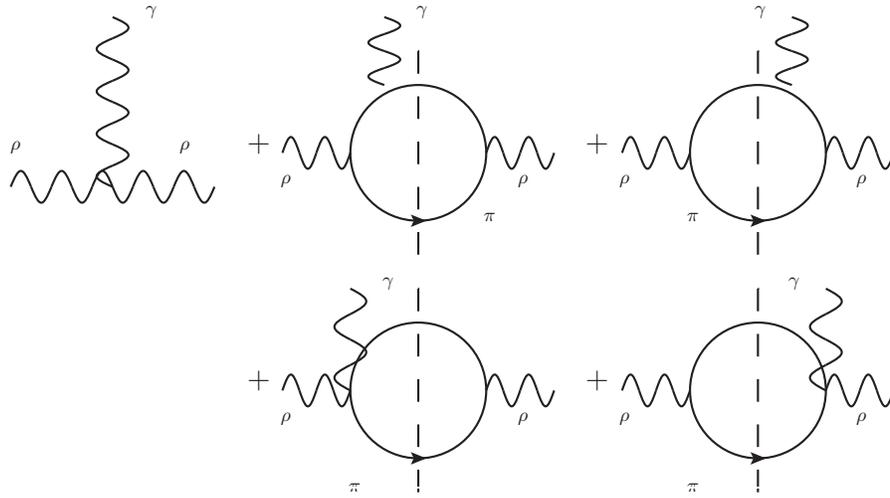


Figura 3.5: Corrección del vértice $\rho\rho\gamma$ a un lazo.

3.4. Modificaciones a la Estructura Multipolar del Mesón ρ debidas a Efectos de Ancho Finito de Decaimiento

Para estudiar cómo se modifican las expresiones para los multipolos del mesón ρ a orden de un lazo, como nos indica el esquema de lazos bosónicos, partimos de las expresiones en la referencia [30], en los que se seguirá la convención del diagrama mostrado en la Figura 3.1; a partir de ellos arreglaremos los términos de manera que recuperemos la estructura de Lorentz mostrada en la expresión 3.16 con lo que podremos identificar las estructuras multipolares.

De la referencia [30] se obtiene directamente que las correcciones a un lazo del vértice están dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}\Gamma_1^{\alpha\beta\mu} &= g^{\alpha\beta} \{2U_2 f_1(q_2^2) q_2^\mu - 2U_1 f_1(q_1^2) q_1^\mu\} \\
&+ g^{\alpha\mu} \left\{ -U_2 b_1(q_2^2) q_2^\beta + 2U_2 f_2(q_2^2) k^\beta + 2U_2 f_1(q_2^2) q_2^\beta \right. \\
&+ U_1 b_1(q_1^2) (q_1 + k)^\beta - 2U_1 f_2(q_1^2) k^\beta - 2U_1 f_1(q_1^2) q_1^\beta - \frac{2\pi U_2 \Delta^2}{q_2^2} q_2^\beta \left. \right\} \\
&+ g^{\beta\mu} \left\{ U_2 b_1(q_2^2) (k - q_2)^\alpha + 2U_2 f_2(q_2^2) k^\alpha + 2U_2 f_1(q_2^2) q_2^\alpha \right. \\
&+ U_1 b_1(q_1^2) q_1^\alpha - 2U_1 f_2(q_1^2) k^\alpha - 2U_1 f_1(q_1^2) q_1^\alpha - \frac{2\pi U_1 \Delta^2}{q_1^2} q_1^\alpha \left. \right\} \\
&+ \frac{q_2^\mu k^\alpha}{k \cdot q_2} \left\{ U_2 b_1(q_2^2) q_2^\beta - 2U_2 f_2(q_2^2) k^\beta - 2U_2 f_1(q_2^2) q_2^\beta + \frac{2\pi U_2 \Delta^2}{q_2^2} q_2^\beta \right\} \\
&+ \frac{q_2^\mu k^\beta}{k \cdot q_2} \left\{ -U_2 b_1(q_2^2) (k - q_2)^\alpha - 2U_2 f_2(q_2^2) k^\alpha - 2U_2 f_1(q_2^2) q_2^\alpha \right\} \\
&+ \frac{q_2^\alpha q_2^\beta q_2^\mu}{q_2^2} \left\{ \frac{2\pi U_2 \Delta^4}{(k \cdot q_2) q_2^2} - 2U_2 f_1(q_2^2) \right\} \\
&+ \frac{q_1^\mu k^\alpha}{k \cdot q_1} \left\{ -U_1 b_1(q_1^2) (k + q_1)^\beta + 2U_1 f_2(q_1^2) k^\beta + 2U_1 f_1(q_1^2) q_1^\beta \right\} \\
&+ \frac{q_1^\mu k^\beta}{k \cdot q_1} \left\{ -U_1 b_1(q_1^2) q_1^\alpha + 2U_1 f_2(q_1^2) k^\alpha + 2U_1 f_1(q_1^2) q_1^\alpha - \frac{2\pi U_1 \Delta^2}{q_1^2} q_1^\alpha \right\} \\
&+ \frac{q_1^\alpha q_1^\beta q_1^\mu}{q_1^2} \left\{ \frac{2\pi U_1 \Delta^4}{(k \cdot q_1) q_1^2} + 2U_1 f_1(q_1^2) \right\}, \tag{3.28}
\end{aligned}$$

donde las expresiones para las funciones $U_{1,2}$, $f_{1,2}$ y $b_{1,2}$ están dadas en el Apéndice B y $\Delta \equiv m_\pi^2 - m_{\pi'}^2$, donde los subíndices de las masas se refieren a los piones dentro de los lazos.

Para continuar es necesario hacer la sustitución

$$\begin{aligned}
q_1^\beta &\rightarrow (k + q_2)^\beta, \\
q_2^\alpha &\rightarrow (q_1 - k)^\alpha, \tag{3.29}
\end{aligned}$$

que proviene de la conservación del 4-momento en el vértice. Una vez hecho dicho cambio y arreglando los términos de manera que las estructuras de Lorentz de los multipolos se puedan identificar, resulta la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}\Gamma_1^{\alpha\beta\mu} &= g^{\alpha\beta} (q_1 + q_2)^\mu \{U_2 f_1(q_2^2) - U_1 f_1(q_1^2)\} \\
&+ 2g^{\beta\mu} k^\alpha \{U_2 b_1(q_2^2) + U_2 f_2(q_2^2) - U_1 f_2(q_1^2) - U_2 f_1(q_2^2)\} \\
&- 2g^{\alpha\mu} k^\beta \{U_1 f_2(q_1^2) + U_1 f_1(q_1^2) - U_2 f_2(q_2^2) - U_1 b_1(q_1^2)\} \\
&+ \frac{2}{(q_1^2 - q_2^2)} k^\alpha k^\beta (q_1 + q_2)^\mu \{2U_1 f_2(q_1^2) - 2U_2 f_2(q_2^2) + U_2 f_1(q_2^2) - U_1 b_1(q_1^2) \\
&+ U_1 f_1(q_1^2) - U_2 b_1(q_2^2)\}; \tag{3.30}
\end{aligned}$$

en donde se han ignorado los términos proporcionales a q_1^α , q_2^β y k^μ debido a la condición de transversalidad ^d; además $q_1^\mu = q_2^\mu = \frac{1}{2}(q_1^\mu + q_2^\mu)$ por la misma condición.

Ahora, tomando el límite $k \rightarrow 0$, o equivalentemente el límite $q_2 \rightarrow q_1$ en la expresión anterior tenemos las siguientes expresiones para los factores de forma de los multipolos:

- Modificación al Factor de Forma de la Carga Eléctrica

A partir del término

$$g^{\alpha\beta} (q_1 + q_2)^\mu \{U_2 f_1 (q_2^2) - U_1 f_1 (q_1^2)\}, \quad (3.31)$$

en la ecuación 3.30 se tiene la siguiente expresión para el factor de forma de la carga eléctrica

$$\alpha_\rho(0) = 1 + i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \left(1 - \frac{3(\Delta^4 - \Sigma^2 M_\rho^2)}{M_\rho^4 \lambda} \right). \quad (3.32)$$

donde $\frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} = \frac{g^2 \lambda^{3/2}}{48\pi}$, $\lambda = \frac{(M_\rho^4 + \Delta^4 - 2\Sigma^2 M_\rho^2)}{M_\rho^4}$, $\Sigma^2 = m_\pi^2 + m_\pi^2$, y g es la constante de acoplamiento entre los piones y el mesón ρ .

- Modificación al Factor de Forma del Dipolo Magnético

Los términos que dan origen a la estructura de Lorentz del mdm son

$$\begin{aligned} & 2g^{\beta\mu} k^\alpha \{U_2 b_1 (q_2^2) + U_2 f_2 (q_2^2) - U_1 f_2 (q_1^2) - U_2 f_1 (q_2^2)\} \\ & - 2g^{\alpha\mu} k^\beta \{U_1 f_2 (q_1^2) + U_1 f_1 (q_1^2) - U_2 f_2 (q_2^2) - U_1 b_1 (q_1^2)\}; \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde al parecer no se puede recuperar el término $(k^\alpha g^{\beta\mu} - k^\beta g^{\alpha\mu})$; sin embargo, al tomar el límite $q_2 \rightarrow q_1$ se recupera la estructura de Lorentz para este multipolo, lo que resulta en el siguiente factor de forma para el mdm

$$\beta_\rho(0) = 2 + i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \left(2 + \frac{3(\Sigma^2 - \Delta^2)}{M_\rho^2 \lambda} \right). \quad (3.34)$$

- Modificación al Factor de Forma del Cuadrupolo Eléctrico

Finalmente para el caso del cuadrupolo, el término que contribuye es

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(q_1^2 - q_2^2)} k^\alpha k^\beta (q_1 + q_2)^\mu \{2U_1 f_2 (q_1^2) - 2U_2 f_2 (q_2^2) + U_2 f_1 (q_2^2) - U_1 b_1 (q_1^2) \\ & + U_1 f_1 (q_1^2) - U_2 b_1 (q_2^2)\}; \end{aligned} \quad (3.35)$$

^dLa condición de transversalidad establece que el producto escalar entre el momento de una partícula y su propio vector de polarización es idénticamente nulo.

cabe mencionar que un término como éste que es proporcional a $k^\alpha k^\beta$ no existe a nivel árbol. En esta expresión se podría pensar que el tomar el límite $q_1 \rightarrow q_2$ llevaría a una divergencia, sin embargo sucede una cancelación no trivial que nos da por resultado la siguiente expresión para el factor de forma del cuadrupolo eléctrico

$$\gamma_\rho(0) = i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \frac{M_\rho^2 \lambda (2\Delta^4 - M_\rho^2 (\Sigma^2 + \Delta^2)) + (\Sigma^2 - \Delta^2) (\Delta^4 - \Sigma^2 M_\rho^2)}{M_\rho^6 \lambda^2}. \quad (3.36)$$

Veamos ahora algunos casos límites para estas expresiones.

- **Límite Quiral.**

Hacemos el ejercicio de tomar este límite –el cuál se obtiene al considerar las masas de las partículas en el lazo (en este caso piones) iguales a cero–, porque es un resultado conocido [30] y que logramos recuperar en este desarrollo. En este límite las expresiones para los factores de forma dan por resultado:

$$\Gamma^{\alpha\beta\mu} = (1 + i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho}) \Gamma_0^{\alpha\beta\mu}. \quad (3.37)$$

- **Límite de Isoespín.**

Para el caso en que las masas de ambos piones sean iguales tenemos los siguientes resultados

- Carga Eléctrica

$$\alpha_\rho(0) = 1 + i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \left(1 + \frac{3\Sigma^2}{M_\rho^2 \lambda_I} \right). \quad (3.38)$$

- Dipolo Magnético

Para el caso del mdm tenemos que el límite de isoespín reduce la expresión 3.34 a

$$\beta_\rho(0) = 2 + i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \left(2 + \frac{3\Sigma^2}{M_\rho^2 \lambda_I} \right). \quad (3.39)$$

- Cuadrupolo Eléctrico

Para el momento cuadrupolar tenemos que la expresión 3.36 se reduce a

$$\gamma_\rho(0) = -i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \frac{\Sigma^2 (M_\rho^2 \lambda_I + \Sigma^2)}{M_\rho^4 \lambda_I^2}, \quad (3.40)$$

donde $\lambda_I = \frac{(M_\rho^4 - 2\Sigma^2 M_\rho^2)}{M_\rho^4}$.

3.4.1. Resultados Numéricos y Comparación para el mesón $\rho(770)$

Antes de presentar nuestros resultados es necesario aclarar que estos son una corrección a los multipolos del mesón, debida a los efectos de ancho finito de éste; y es independiente de cualquier aproximación que se haga para predecir dichos multipolos; por lo mismo este efecto debe ser considerado como una corrección a todos los resultados presentados en [22] -[27], pues en dichos trabajos no consideran los efectos de ancho de la partícula. Hemos comparado las correcciones debidas puramente al ancho de decaimiento con ellos para ilustrar qué tan grande es esta corrección con respecto a las contribuciones que ellos presentan, las cuales están asociadas a la dinámica interna entre quarks.

Los resultados obtenidos en la sección anterior parecen dar una corrección al factor de forma para la carga eléctrica; pero, debido a que las identidades de Ward son satisfechas, la modificación al vértice es acompañada por una modificación en el propagador, las cuales se cancelan mutuamente anulando la modificación de la carga eléctrica. Esto se puede ver como una renormalización de los campos precisamente por la corrección a la carga eléctrica, lo que garantiza que esta se mantiene sin modificación alguna.

Para aclarar este punto veamos lo siguiente: El propagador de una partícula masiva de espín 1 se puede escribir como [30, 31]

$$D^{\mu\nu}(q) = \frac{i}{(1+i\gamma)} \left(\frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{M_v^2 - iM_v\Gamma}}{q^2 - \bar{M}_v + i\bar{M}_v\bar{\Gamma}} \right) \quad (3.41)$$

$$\equiv \int \langle 0 | T A'^{\mu\dagger}(x) A'^\nu(y) | 0 \rangle e^{-iq(x-y)} dx dy,$$

en donde $\bar{M}_v = M_v$, $\bar{\Gamma} = \Gamma/\sqrt{1+\gamma^2}$ y $\gamma = \Gamma/M$; es decir, podemos verlo como una renormalización del campo vectorial por un factor que incluye el ancho de decaimiento.

$$A'^\mu = Z^{1/2} A^\mu, \quad (3.42)$$

con $Z = (1+i\gamma)^{-1}$, tal que satisface la forma del propagador de masa compleja.

La observable que define la estructura multipolar es realmente la corriente electromagnética; por lo que al calcularse ésta usando los campos renormalizados y el vértice corregido obtenemos

$$J_{em}^\mu = A_\nu'^\dagger(q_2) A_\lambda'(q_1) \Gamma^{\mu\nu\lambda} = Z A_\nu^\dagger(q_2) A_\lambda(q_1) (\alpha(k^2) g^{\nu\lambda} (q_1 + q_2)^\mu + \dots). \quad (3.43)$$

La unidad de carga eléctrica requiere que $Z\alpha(0) = 1$; recordando que $\alpha(0) = 1 + i\gamma$ (véase la ec. 3.38, haciendo las masas iguales a cero ^e), esta condición se satisface automáticamente y por lo tanto la carga no recibe ninguna modificación. Un análisis de la modificación de los multipolos en el caso de partículas inestables de espín 1/2 se encuentra en la referencia

^eAquí por claridad hemos usado el límite quiral, pero lo mismo aplica para el caso general con los factores de forma obtenidos para el mesón ρ en las ecuaciones 3.32, 3.34 y 3.36.

[32]; allí ellos también han encontrado la necesidad de la renormalización y de la correcta definición de las cantidades físicas. En [33] se encuentra un análisis más detallado en el tema de la renormalización de la función de onda.

Así pues, nuestro resultado en general para los diferentes momentos multipolares son los que se obtienen de las ecuaciones 3.32, 3.34 y 3.36, divididos por la expresión 3.32. En la Tabla 3.3 presentamos dichos valores, donde se ha hecho explícita la desviación con respecto a los valores predichos por el MS para el bosón W para cada uno de los multipolos, esto con el fin de comparar con diferentes resultados encontrados en la literatura en la Tabla 3.2.

Multipolo	
Carga Eléctrica $ Q $	1 [e]
Dipolo Magnético $ \vec{\mu} $	$2 - 0.0091 \left[\frac{e}{2m_\rho} \right]$
Cuadrupolo Eléctrico $ X_E $	$1 - 0.0387 \left[\frac{e}{m_\rho^2} \right]$

Tabla 3.3: Momentos multipolares del mesón ρ incluyendo las correcciones a un lazo bosónico.

Otras partículas para las cuales hemos estudiado las modificaciones de sus multipolos son el bosón W y el mesón K^* , cuyos resultados los mostramos en el Apéndice C; así como en el artículo publicado por nosotros en la referencia [34].

Hemos graficado los valores para el mdm en la Figura 3.6 para comparar sobre todo el rango que esos valores presentan, que como podemos observar es relativamente grande. En dicha figura podemos apreciar que los resultados obtenidos por [23], en donde utilizan un modelo basado en ecuaciones de Dyson-Schwinger, son del orden de la corrección que representa nuestro resultado. Hemos dejado como variable a la masa del pión para obtener el resultado mostrado como la línea negra en esta figura, esto sólo es un ejercicio para ver la evolución que tiene nuestro resultado para poder comparar con resultados de lattice-QCD [27], los cuales los presentan como función de la masa del pión.

3.4.2. El Esquema de Lazos y el Esquema de Masa Compleja.

Debido a que en el esquema de lazos las Identidades de Ward son satisfechas, hemos visto que una modificación en el vértice electromagnético, conlleva una modificación en el propagador. Considerando que la renormalización de los campos es necesaria para garantizar que la carga no sufra correcciones, el propagador se ve modificado por la inclusión del parámetro de ancho de decaimiento, justamente en la forma que lo describe el Esquema de Masa Compleja, tal que la corriente electromagnética está bien definida. Esto nos dice que si trabajamos con los campos primados podemos utilizar el vértice a nivel árbol (ec. 3.22) y que toda la contribución debida al ancho de decaimientos vendría de la modificación en los propagadores, que es esencialmente lo que dice el esquema de masa compleja. Por lo mismo es este último el que utilizaremos para desarrollar el resto de este trabajo, sabiendo que

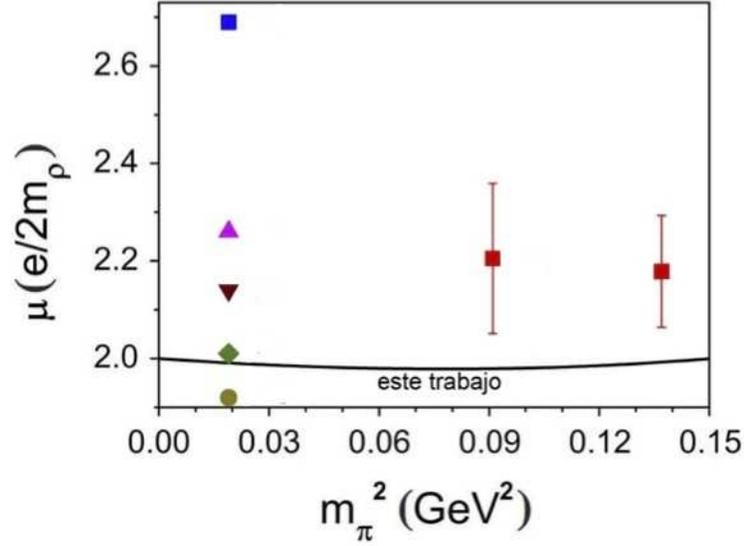


Figura 3.6: Predicciones para el Dipolo Magnético del mesón ρ por diferentes modelos: F. T. Hawes [22]: \square (azul), M. S. Bhagwat [23]: \diamond , Ho-Meoyng [24]: \circ , F. Cardarelli [25]: \triangle , J. P. Melo[26]: ∇ , J. N. Hedditch [27]: \square (rojos con barras de error).

tenemos una base firme para utilizarlo.

Con ésto terminamos el análisis de la modificación para los momentos electromagnéticos para el mesón $\rho(770)$. En donde hemos encontrado una expresión general para los distintos multipolos, las cuáles se obtuvieron incluyendo correcciones a un lazo por medio del esquema de lazos bosónicos; aprendimos que el renormalizar los campos da por resultado lo mismo que se obtendría con el esquema de masa compleja. Un resultado importante que hemos encontrado es que, debido a la renormalización que deben sufrir los campos para conservar invariancia de norma, ninguno de los multipolos recibe una modificación en la aproximación quiral, al contrario de lo que se marca comúnmente en la literatura, que dice deberían verse modificados por un factor $1 + i\gamma$ [29]. Fuera de este límite la corrección debida al parámetro Γ , modifica la estructura de Lorentz induciendo una corrección al $|X_E|$. Además, como ya se ha mencionado las correcciones encontradas en este trabajo, son comparables a los efectos dinámicos encontrados por [23] utilizando un modelo basado en ecuaciones de Dyson-Schwinger.

Para proceder en el estudio del proceso a 4 piones es conveniente primero hacer un estudio sobre un proceso mas simple, que nos de idea sobre algunos resultados que nos interesan, por lo mismo dedicamos el siguiente capítulo al estudio del proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$.

Capítulo 4

Efectos del mdm del mesón ρ en el proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$.

El proceso de producción $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ incluye en uno de sus canales al proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$. En este capítulo presentaremos un estudio del mismo ya que como es un proceso mas sencillo, cinemáticamente hablando, nos podemos valer de él para tener una idea de la magnitud de la sección eficaz del canal particular que lo incluye; así mismo podemos estudiar si existe una configuración angular en la cual los mesones ρ sean emitidos preferentemente, dando una indicación de que éstos al decaer también emitan a los piones en la misma dirección. Finalmente, estudiaremos la sensibilidad que este proceso tiene con respecto al mdm del mesón ρ .

★ ★ ★

Como hemos visto en el capítulo anterior, para poder estudiar el mdm del mesón ρ es necesario estudiar el vértice $\rho\rho\gamma$. El diagrama más simple que podemos pensar, que incluye dicho vértice es precisamente el que describe al proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$; pero como los mesones ρ decaen en piones (ver Fig. 4.1), esto nos permite estudiar el vértice $\rho\rho\gamma$ a través del estudio del proceso de producción de 4 piones.

Sin embargo, antes de estudiar el proceso de 4 piones, es conveniente estudiar el proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$, que es un subproceso mas simple, debido a que en el proceso de 4 piones están presentes muchos mas canales. En particular nos interesa saber si el canal que contiene este vértice (Fig. 4.1) es importante en la producción de 4 piones. Para ello estudiaremos la sección eficaz del proceso a 2 ρ determinando la región cinemática en donde es importante.

Otro aspecto que podemos estudiar en este proceso es la distribución de su sección eficaz con respecto al ángulo que forman las partículas salientes (mesones ρ) con respecto a las partículas incidentes (e^+ y e^-), en el marco de referencia del centro de masa. En particular, estudiaremos si ésta tiene un máximo, lo que indicaría una dirección preferente para

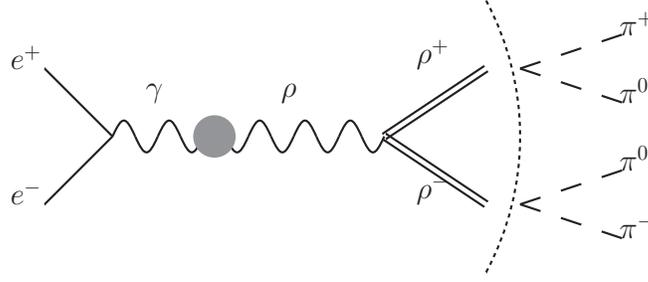


Figura 4.1: El proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$ y el sucesivo decaimiento de éstos en piones.

la producción de los mesones ρ . Esto nos interesa, porque si esta cinemática se hereda al decaimiento de los mesones, también tendríamos una dirección preferente en la producción de los piones.

Algo importante que también nos interesa conocer es qué tan grande es el efecto del mdm del mesón ρ , tanto en la sección eficaz como en la distribución angular del proceso a 4 piones. En esto también nos puede ayudar el proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$, para estudiar este efecto, dada la parametrización que hemos visto del vértice $\rho\rho\gamma$, dejaremos el parámetro del momento dipolar magnético β y lo variaremos entre tres constantes (1, 2 y 3) para ver en cuanto difieren las secciones eficaces y si esta variación es perceptible.

El estudio del proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$ lo haremos de la siguiente manera: utilizaremos la aproximación de Dominancia Vectorial para obtener la amplitud del proceso; y con ello calcularemos la sección eficaz diferencial con respecto al ángulo que forman las partículas entrantes con las salientes, a ésta la graficaremos para diferentes valores del momento dipolar magnético (β) a una energía dada y con ello determinaremos si esta función tiene un máximo. Finalmente calcularemos la sección eficaz total para diferentes valores de β para ver cuál es el efecto de este parámetro en dicha cantidad.

4.1. El proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$.

El proceso $e^+(p')e^-(p) \rightarrow \rho^+(k', \epsilon)\rho^-(k, \eta)$ mostrado en la Figura 4.2, tiene una amplitud dada por ^a

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2 m_\rho^2}{g_\rho} g_{\rho\pi\pi} \bar{V} \gamma_\alpha U \frac{1}{q^2} \left(\frac{g^{\alpha\mu}}{q^2 - m_\rho^2} \right) [(k - k')_\mu g_{\nu\lambda} + \beta (q_\lambda g_{\mu\nu} - q_\nu g_{\lambda\mu})] \epsilon^\nu \eta^{*\lambda}, \quad (4.1)$$

donde \bar{V} y U son los campos del positrón y electrón correspondientemente; γ_α , las matrices de Dirac; $g_{\mu\nu}$, el tensor métrico; $q = p + p' = k + k'$ el momento del $\gamma - \rho$ creado en la

^aLas reglas de Feynman con las que se obtuvieron ésta y las demás amplitudes están en el Apéndice D.

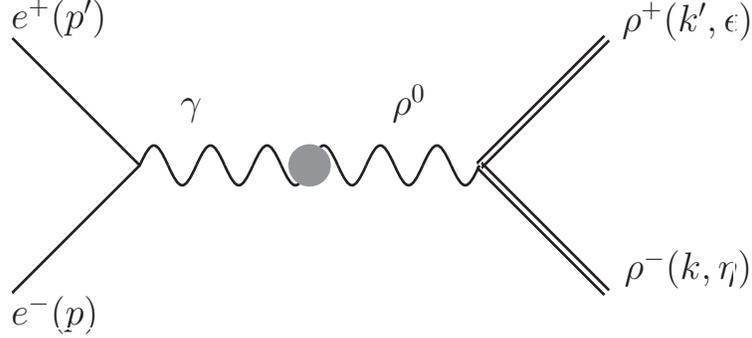


Figura 4.2: Proceso $e^+(p')e^-(p) \rightarrow \rho^+(k', \epsilon)\rho^-(k, \eta)$.

aniquilación, m_ρ la masa del ρ ; ϵ y η son los vectores de polarización de los mesones ρ del estado final, g_ρ y $g_{\rho\pi\pi}$ son las constantes de acoplamiento según lo indican los subíndices.

A partir de esta expresión podemos obtener la sección eficaz en el centro de masa gracias a la relación

$$d\sigma = \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{2s} \frac{1}{16\pi^2\sqrt{s}} \sqrt{\frac{s}{4} - m_\rho^2} \delta(s - 4E'^2) d(\cos\theta)d\phi ds, \quad (4.2)$$

donde $s = (p' + p)^2$ es la variable de Mandelstam referente a la energía, ϕ es el ángulo polar y θ el ángulo formado entre los momentos p y k en el marco de referencia del centro de masa; y E' la energía de alguno de los mesones ρ cargados del estado final. Para calcular el cuadrado de la expresión 4.1 multiplicamos por su complejo conjugado; y luego hacemos la suma sobre polarizaciones de los estados finales. Tomando en cuenta que para este cálculo hemos trabajado en el sistema de referencia del centro de masa, obtenemos la siguiente expresión para la sección diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\alpha^2 g_{\rho\pi\pi}^2 \sqrt{s - 4m_\rho^2}}{64g_\rho^2 s^2 \sqrt{s}} \frac{\sin(\theta)}{(s - m_\rho^2)^2} (4m_\rho^2 - s) (-12m_\rho^4 - 2m_\rho^2 s(\beta(3\beta + 2) - 2) + \cos(2\theta) (12m_\rho^4 - 2m_\rho^2 s((\beta - 2)\beta + 2) + s^2(\beta - 1)^2) - s^2(\beta - 1)^2), \quad (4.3)$$

con $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, siendo e la carga del positrón.

Ahora veamos cómo se comporta la distribución angular de la sección eficaz y la sección eficaz total, para diferentes valores de β .

4.1.1. Distribución Angular.

Para ver la distribución de la sección eficaz diferencial con respecto al ángulo que forman los momentos del electrón (p) y el mesón ρ^- (k), fijaremos la energía en un valor de $\sqrt{s} = \sqrt{5}$ GeV, que es una energía arbitraria lo suficientemente grande para la producción de los dos mesones ρ como estado final, pero no así otras resonancias.

La figura 4.3 muestra cómo se ve la sección eficaz diferencial con respecto al ángulo que forman los momentos p y k . Es claro ver que para los diferentes valores de β utilizados se presenta un máximo para un ángulo de $\frac{\pi}{2}$, es decir, cuando los mesones ρ son emitidos en una dirección perpendicular al de las partículas incidentes. Es importante señalar que las gráficas para distintos valores del mdm son claramente distinguibles entre ellas a esta escala ([nb]), de hecho si el experimento tuviera una precisión de $\pm 0.034 \text{ nb/rad}$ podríamos asegurar que las curvas difieren entre sí por 3 desviaciones estándar. Esta cantidad fue calculada a partir de dividir la mínima diferencia entre los máximos de la sección eficaz diferencial por un factor de 6.

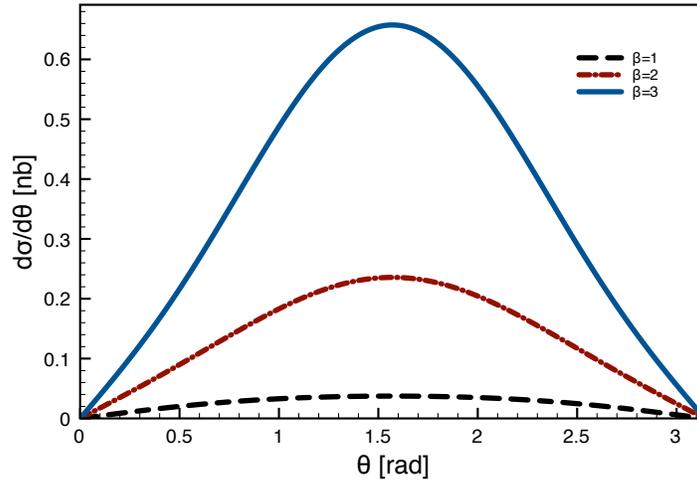


Figura 4.3: Sección eficaz diferencial vs ángulo de producción de los mesones rho para un valor de $\sqrt{s} = \sqrt{5} \text{ GeV}$.

En la Figura 4.4 presentamos ahora la sección eficaz diferencial en función de la energía tomando un ángulo fijo de $\frac{\pi}{2}$, vemos que para una energía de alrededor de 2 GeV se tiene un máximo para la misma (Ver Tabla 4.1) y luego decrece monótonamente, por lo que de poder realizarse un experimento que midiera esta sección eficaz esta sería la energía ideal para poder identificar mas fácilmente cual valor del mdm es el correcto entre los resultados aquí presentados.

	$\sqrt{s} \text{ [GeV]}$	$d\sigma/d\theta _{\theta=\frac{\pi}{2}} \text{ [nb/rad]}$
$\beta = 1$	1.911	0.048
$\beta = 2$	2.032	0.259
$\beta = 3$	2.091	0.675

Tabla 4.1: Valores de los máximos para la sección eficaz diferencial y la energía correspondiente.

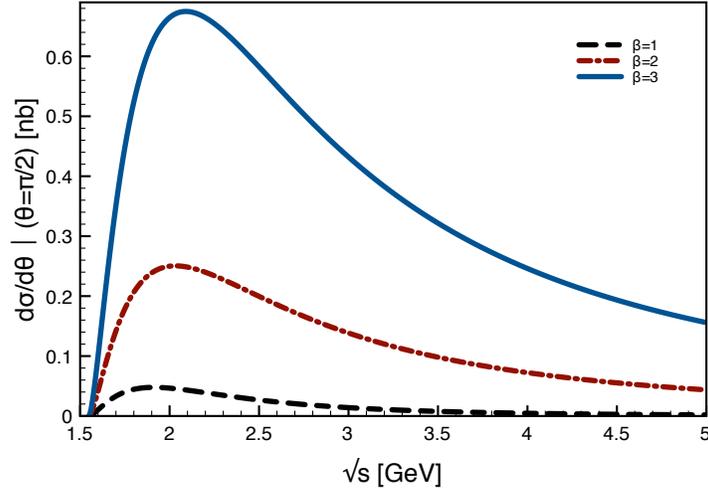


Figura 4.4: Sección eficaz diferencial vs energía, con un valor para el ángulo fijo en $\frac{\pi}{2}$.

	\sqrt{s} [GeV]	σ [nb]
$\beta = 1$	1.933	0.096
$\beta = 2$	2.017	0.464
$\beta = 3$	2.058	1.188

Tabla 4.2: Valores de los máximos para la sección eficaz total y las energías correspondientes a la cual ocurren.

4.1.2. Sección eficaz total.

Analicemos ahora la sección eficaz total como función de la energía; para ello partimos de la expresión (4.3) e integrando sobre el ángulo obtenemos

$$\sigma = \frac{\alpha^2 g_{\rho\pi\pi}^2 (s - 4m_\rho^2)^{3/2} (4s(\beta^2 + \beta - 1)m_\rho^2 + 12m_\rho^4 + s^2(\beta - 1)^2)}{24s^{5/2}g_\rho^2 (s - m_\rho^2)^2}. \quad (4.4)$$

En la Figura 4.5 presentamos la sección eficaz total como función de la energía en donde, al igual que en el caso anterior, también se puede apreciar una clara diferencia entre las curvas resultantes para los diferentes valores del parámetro β . Una vez más, si encontramos la diferencia entre los máximos y la dividimos por un factor 6 podemos establecer que la incertidumbre que necesita el experimento para poder diferenciar entre ellas en 3 desviaciones estándar, es de ± 0.061 nb. Los valores para los máximos en este caso son presentados en la Tabla 4.2.

Para concluir este capítulo recapitularemos los resultados que hemos obtenido para la sección eficaz diferencial y total. Encontramos que la emisión de los mesones ρ se da princi-

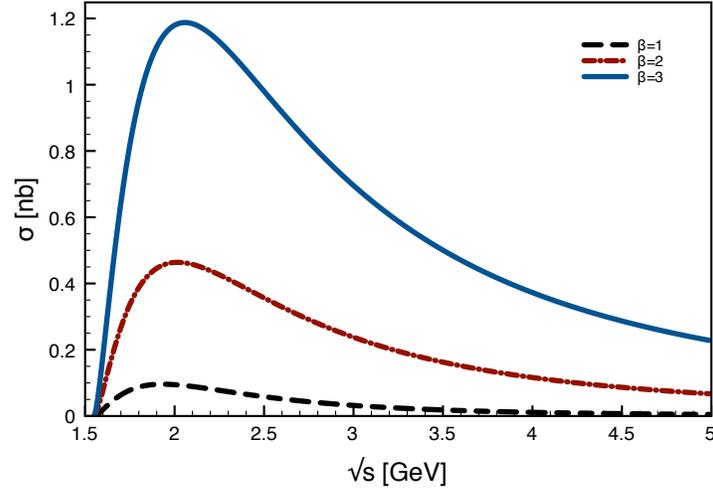


Figura 4.5: Sección eficaz como función de la energía para diferentes valores de β .

palmente en el plano transversal al de las partículas incidentes, por lo cual esperamos que la emisión de los 4 piones sea igualmente más abundante en este plano. Hemos mostrado que la magnitud de la sección eficaz para este proceso –tanto la diferencial, como la total– tiene un orden de magnitud de nanobarns; por lo que esperamos que la contribución del canal que contiene este proceso en la producción de 4 piones, sea de un orden semejante. Además, pudimos establecer que la magnitud de precisión que deben tener los datos experimentales en el mejor de los casos para poder distinguir entre los diferentes valores para el momento dipolar magnético del mesón ρ es del orden de $\pm 0.034 \text{ nb/rad}$ cuando se considera la sección eficaz diferencial y de $\pm 0.061 \text{ nb}$ cuando es considerada la sección eficaz total, por lo que la diferencia entre curvas sería más fácil de medir en este último caso.

Con esto en mente cuando analicemos el proceso a 4 piones pondremos especial atención en el canal mostrado en la Figura 4.1, para el cual estudiaremos si el efecto de cambiar el parámetro β , de igual manera como se ha hecho en este capítulo, conserva la misma tendencia y si las gráficas correspondientes siguen siendo distinguibles unas de otras. Además estudiaremos la distribución angular de la sección eficaz diferencial con respecto a un ángulo que nos permita comparar los resultados obtenidos aquí y ver si la emisión de piones tiene igualmente una dirección preferencial.

Recientemente en [35], se ha estudiado el mdm del mesón ρ a altas energías, usando funciones dependientes de la energía de tipo propagador para la parametrización de los factores de forma de los multipolos electromagnéticos; este estudio utiliza datos de BaBar para una energía de 10.5 GeV, lo cual hace que su modelo tenga un buen comportamiento a altas energías pero desafortunadamente no ocurre lo mismo para las energías que aquí tratamos (0.65-2.5 GeV), por lo que nuestros resultados no son directamente comparables.^b

^bEsto lo mostramos en detalle en el Apéndice F.

El decaimiento del mesón ω en 3 piones también es un subdiagrama en el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$. Este decaimiento involucra la constante de acoplamiento entre los mesones ρ , ω y π ; la cual es necesario estudiar para tener control de la región de parámetros permitidos para el proceso a 4 piones. A esto dedicaremos el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Extracción del acoplamiento $\rho\omega\pi$.

En este capítulo determinaremos el valor de la constante de acoplamiento entre los mesones ρ , ω y π en el contexto del modelo de VMD; para lo cual analizaremos procesos radiativos, el decaimiento del mesón ω en 3 piones y la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow 3\pi$. Para los últimos dos observables hemos estudiado el efecto que tendría la introducción ya sea de una resonancia mayor ($\rho'(1450)$) o un término de contacto.

★ ★ ★

Como sabemos, en el esquema de Dominancia Vectorial, la interacción fuerte entre los mesones ρ , ω y π puede ser codificada en la constante de acoplamiento entre estos tres mesones denotada por $g_{\omega\rho\pi}$. Este acoplamiento es importante porque puede tener implicaciones en diferentes observables, como por ejemplo en el momento magnético del muón [36]. Sin embargo la determinación de manera directa de este acoplamiento no puede hacerse debido a que un decaimiento directo de un mesón ω en uno ρ y π no puede darse físicamente ya que no hay suficiente energía para que ambas partículas en el estado final estén en capa de masa. Por lo mismo debe ser extraída de manera indirecta, por ejemplo con ayuda de los procesos de aniquilación o decaimiento antes mencionados.

Es necesario tener un marco teórico que nos permita la descripción de estos procesos; podemos recurrir a la aproximación Quiral, basada en simetrías para bajas energías de la teoría de la Cromodinámica Cuántica (QCD) o, como en nuestro caso, podemos valernos del esquema de la Dominancia Vectorial. Aún cuando estas teorías tengan diferentes bases deben de describir las interacciones fuertes congruentemente, como lo veremos en este capítulo.

En el esquema de VMD los términos del Lagrangiano relevantes para describir la interacción entre los mesones ρ , ω y π están dados por^a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & g_{\rho\pi\pi}\epsilon_{abc}\rho_\mu^a\pi^b\partial^\mu\pi^c + g_{\omega\rho\pi}\delta_{ab}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\partial_\mu\omega_\nu\partial_\lambda\rho_\sigma^a\pi^b \\ & + g_{3\pi}\epsilon_{abc}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\omega_\mu\partial_\nu\pi^a\partial_\lambda\pi^b\partial_\sigma\pi^c + \frac{em_V^2}{g_V}V_\mu A^\mu + \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

términos con derivadas de mas alto orden, que son necesarios para la invariancia de norma también están presentes pero estos quedan fuera de los motivos del presente trabajo, estos términos pueden ser vistos con detalle en [37]. Aquí V refiere en general a los mesones vectoriales y A al fotón; g_V está dada por la expresión 2.4. En principio se podría tener una mezcla entre los mesones ρ y ω , pero en este trabajo no hemos considerado dicho efecto; también se podría tener una interacción con mesones como el K^* o el ϕ , pero estas son fuertemente suprimidas por la regla de Okubo-Zweig-Iizuka (OZI).

En este estudio determinaremos la contante de acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$ en diferentes escenarios para lo cual procederemos de la siguiente forma: bajo el contexto del esquema de Dominancia Vectorial analizaremos i) procesos radiativos de la forma $V \rightarrow \pi\gamma$, donde V será el mesón ρ u ω según lo señalemos en cada caso, ii) estudiaremos el decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$, para el cual consideraremos la presencia de un término de contacto, así como la de la resonancia $\rho'(1450)$, y iii) la sección eficaz para el proceso de producción $e^+e^- \rightarrow 3\pi$, en donde igual que en el caso anterior se considerarán los términos mencionados.

5.1. Decaimientos Radiativos.

Los decaimientos de mesones vectoriales V en una partícula pseudoescalar P (como el pión) y un fotón ($V \rightarrow \gamma P$) nos ayuda a relacionar las constantes de acoplamiento del estilo $g_{V\gamma P}$, con las constantes del tipo $g_{V\rho P}$. Esto se hace suponiendo que el decaimiento radiativo realmente se lleva a cabo por la emisión de otro mesón vectorial que después transmuta en un fotón según las reglas de VMD, esto se puede ver en la Figura 5.1.

Existen diferentes procesos que nos permiten relacionar la constante $g_{\omega\rho\pi}$ con otras radiativas; en particular aquí analizaremos los procesos: $\omega \rightarrow \gamma\pi$, $\rho \rightarrow \gamma\pi$ y $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Esta relación entre constantes es el resultado de comparar las amplitudes para cada uno de estos procesos en dos canales: el que se obtiene a partir de la Figura 5.1-a) y contiene el acoplamiento del estilo $g_{V\gamma P}$ y otro bajo el esquema de VMD (Fig. 5.1-b)), que contiene la constante $g_{V\rho P}$. A continuación veremos con mas detalle cada uno de estos procesos y el resultado de comparar dichas amplitudes.

- $\omega \rightarrow \gamma\pi$

^aPara construir un Lagrangiano efectivo se tiene que tomar en cuenta varios aspectos importantes: el Lagrangiano debe satisfacer las simetrías globales de QCD (simetrías de sabor), debe respetar los teoremas anómalos de teoría quiral y que incorpore VMD de manera natural.

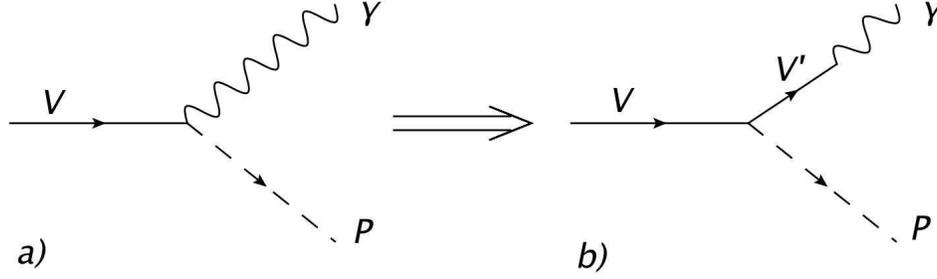


Figura 5.1: *Decaimiento radiativo de mesones vectoriales en el esquema de Dominancia Vectorial.*

Si escribimos las amplitudes de este proceso según los canales presentados en la Figura 5.1 tomando a V como el mesón ω y a V' , como el ρ tenemos las siguientes expresiones:

$$\mathcal{M}_a = g_{\omega\gamma\pi}\eta^\nu\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}q^\mu k^\alpha\epsilon^{*\beta}, \quad (5.2)$$

para el diagrama Fig.5.1-a), donde η y ϵ son los vectores de polarización y q y k los 4-momentos para el mesón ω y el fotón correspondientemente. Para el diagrama Fig.5.1-b) tenemos

$$\mathcal{M}_b = \frac{eg_{\omega\rho\pi}}{g_\rho}\eta^\nu\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}q^\mu k^\alpha\epsilon^{*\beta}. \quad (5.3)$$

Debido a que ambas amplitudes describen el mismo proceso, estas deben ser iguales, por lo tanto encontramos que las constantes de acoplamiento están relacionadas por

$$g_{\omega\rho\pi} = g_{\omega\gamma\pi}\frac{g_\rho}{e}, \quad (5.4)$$

con e la carga del positrón; $g_\rho = 4.96 \pm 0.02$ y $g_{\omega\gamma\pi} = 0.696 \text{ GeV}^{-1b}$.

- $\rho \rightarrow \gamma\pi$.

A diferencia del caso anterior, en donde sólo existe un canal para el decaimiento del mesón ω , aquí tenemos un canal extra $\rho \rightarrow \pi\omega \rightarrow \pi\gamma$ o bien $\rho \rightarrow \pi\phi \rightarrow \pi\gamma$, en donde la presencia del mesón ϕ (que tiene una interferencia destructiva con el ω) puede hacer una contribución considerable [38]. Procediendo de manera análoga al caso anterior, por medio de la comparación de las amplitudes de estos canales, podemos establecer que las constantes de acoplamiento se relacionan por

$$g_{\omega\rho\pi} = \frac{g_\omega}{e} \left(g_{\rho\pi\gamma} - g_{\phi\rho\pi} \frac{e}{g_\phi} \right), \quad (5.5)$$

con $g_{\rho\gamma\pi} = 0.252 \text{ GeV}^{-1}$ [38]. La constante $g_{\phi\rho\pi} = 0.815 \pm 0.021 \text{ GeV}^{-1}$ fue obtenida en [39] por medio del ajuste de datos experimentales del decaimiento $\phi \rightarrow 3\pi$ en donde utilizaron

^bEn el Apéndice E se muestra en detalle cómo se calcula la constante $g_{\omega\gamma\pi}$ y otras presentadas en este capítulo.

que dicho procedimiento se lleva a cabo por el canal $\rho\pi$ seguido del decaimiento del mesón ρ en 2 piones, pues en otros trabajos como [40]-[42] se ha señalado que otros canales son despreciables.

- $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

En este proceso tenemos un caso parecido al anterior, pues los canales por los que puede suceder este proceso son $\pi^0 \rightarrow \rho\omega(\phi) \rightarrow \gamma\gamma$. Debido a la interferencia destructiva entre los mesones $\rho - \omega$ y $\rho - \phi$ [43] ahora las constantes de acoplamiento se pueden relacionar por

$$|g_{\pi\gamma\gamma}| = \frac{2}{g_\rho} \left(\frac{|g_{\omega\rho\pi}|}{g_\omega} - \frac{|g_{\phi\rho\pi}|}{g_\phi} \right), \quad (5.6)$$

el factor 2 viene del hecho de que podemos intercambiar los fotones. Las constantes han sido puestas en valores absolutos porque sólo se conoce la fase entre los mesones ya mencionados. Finalmente la constante $g_{\pi\gamma\gamma} (= 2.76 \times 10^{-4} \text{ GeV}^{-1})$ es obtenida también con ayuda del ancho experimental para el proceso de decaimiento del pión a los dos fotones según la expresión

$$\Gamma(\pi \rightarrow \gamma\gamma) = g_{\pi\gamma\gamma}^2 \frac{\alpha^2 \pi m_\pi^3}{4} = 7.84 \pm 0.44 \times 10^{-6} \text{ MeV}. \quad (5.7)$$

Los resultados de estos procesos para la constante de acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$ son mostrados en la Tabla 5.1, para los cuales mostramos un promedio normal cuyo error fue calculado por cuadraturas, el cual como se puede ver presenta un rango bastante amplio, como reflejo de las incertidumbres de algunos procesos y de la aparente discrepancia entre algunos de estos resultados. Esto se debe a que en cada uno de los procesos se tienen que considerar no solo a los mesones ω y ρ sino, como hemos visto también es necesario tener mucho control sobre las posibles mezclas que puedan tener con otros mesones como el ϕ . Por lo mismo hemos hecho el ejercicio de calcular un promedio pesado^c, el cual favorece a las cantidades que han sido más precisamente medidas, lo que indica que tienen menos error por otras fuentes o que se ha tenido más control sobre ellas; además de que este promedio reduce la incertidumbre que se obtiene para esta cantidad.

El acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$ en el esquema de VMD vs Quiral.

A modo de comparación, vamos a calcular cual sería el valor esperado de este acoplamiento exigiendo el acuerdo entre la teoría de VMD y la teoría quiral [44]-[48] para el proceso $\pi \rightarrow \gamma\gamma$. Considerando solo el canal $\omega - \rho$ (por propósitos de claridad despreciamos el canal $\phi - \rho$), los acoplamientos de ambas descripciones están relacionados por medio de

$$|g_{\omega\rho\pi}| = \frac{g_\rho g_\omega}{8\pi^2 f_\pi} = 11.5 \text{ GeV}^{-1}, \quad (5.8)$$

^cLas formulas explícitas de cómo fue calculado este promedio y su incertidumbre aparecen en el Apéndice H.

Decaimiento	$ g_{\omega\rho\pi} $ [GeV^{-1}]
$\omega \rightarrow \pi^0\gamma$	11.4 ± 0.2
$\rho^- \rightarrow \pi^-\gamma$	11.3 ± 0.9
$\rho^0 \rightarrow \pi^0\gamma$	13.1 ± 0.9
$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	12.8 ± 0.3
Promedio Normal	12.2 ± 1.3
Promedio Pesado	11.9 ± 0.2

Tabla 5.1: Valores para la constante $g_{\omega\rho\pi}$ obtenidos por procesos radiativos.

lo cual está en acuerdo con el valor obtenido por decaimientos radiativos. Sí además de esto imponemos la condición de universalidad ($g_\rho = g_{\rho\pi\pi}$) y la simetría SU(3) ($g_\omega = 3g_\rho$), entonces podemos escribir que

$$|g_{\omega\rho\pi}| = \frac{3g_{\rho\pi\pi}^2}{8\pi^2 f_\pi} = 14.4 \text{ GeV}^{-1}. \quad (5.9)$$

A partir de este resultado y usando la relación de Kawarabayashi, Suzuki, Fayyazudin y Riazuddin, convenientemente abreviada como KSFR^d [49]

$$\frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{m_\rho^2} = \frac{1}{2f_\pi^2}, \quad (5.10)$$

en donde $f_\pi = 0.093 \text{ GeV}$ es la constante de decaimiento del pion, obtenemos que

$$|g_{\omega\rho\pi}| = \frac{3m_\rho^2}{16\pi^2 f_\pi^3} = 14.2 \text{ GeV}^{-1}, \quad (5.11)$$

que tiene una desviación significativa con el resultado estimado por decaimientos radiativos.

5.2. El Decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$

Gell-Mann, Sharper y Wagner [50] desde la década de los 60's sugirieron que el proceso de decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$ está dominado por la transición $\omega\rho\pi$ seguida del decaimiento $\rho \rightarrow \pi\pi$ (Fig. 5.2a-c) y esto ha sido confirmado extensamente por los experimentos [51]-[56], sin embargo esto no niega la posibilidad de que otras contribuciones como un término de contacto (Fig. 5.2d) o que resonancias de mas alto orden como el mesón $\rho'(1450)$ estén presentes; y su inclusión, puede tener un efecto importante en la determinación de la contante de acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$. De hecho en [57] encontraron que el término de contacto es necesario

^dLa relación KSFR relaciona las propiedades del mesón ρ con las del pión haciendo las siguientes suposiciones: que tanto las corrientes axiales parcialmente conservadas y el álgebra de corrientes son válidas; el acoplamiento del mesón ρ es universal y los procesos que vayan a través del canal ρ , sólo van a través de esta resonancia.

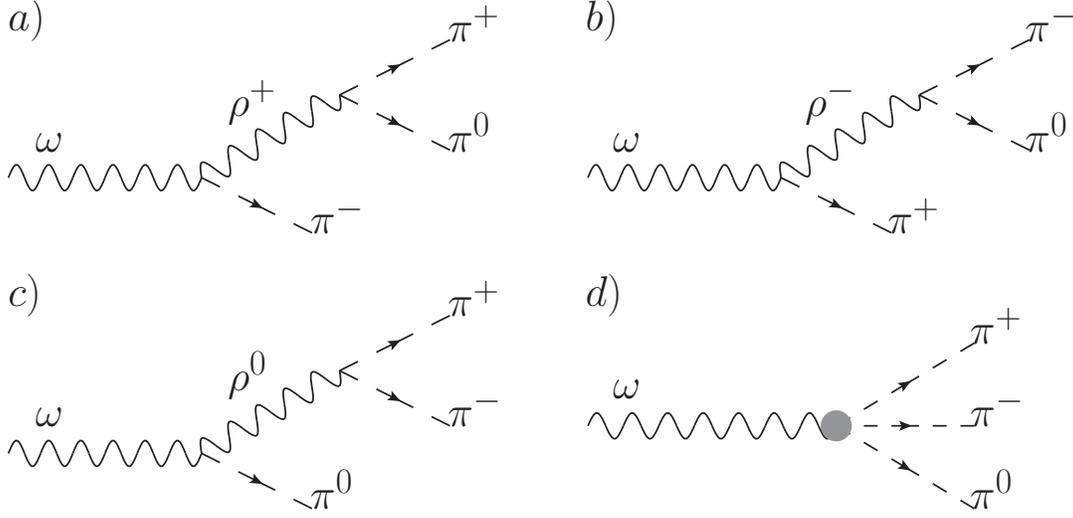


Figura 5.2: Proceso $\omega \rightarrow 3\pi$ por medio del canal del mesón ρ a-c) y el término de contacto d).

para poder recuperar la relación KSFR a bajas energías, sin embargo en dicho estudio no les fue posible determinar la existencia de dicho término de manera definitiva debido a las incertidumbres, tanto experimentales como teóricas, con las que se contaba para diferentes propiedades de las partículas consideradas.

Para nuestro estudio, consideremos el proceso de decaimiento $\omega(\eta, q) \rightarrow \pi^+(p_1)\pi^-(p_2)\pi^0(p_3)$ mostrado gráficamente en la Figura 5.2, en donde los momentos p_i se refieren a los 4-momentos de los piones y η es el vector de polarización del mesón ω .

La amplitud para este proceso está dada de forma genérica por

$$\mathcal{M}_D = i\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\eta^\mu p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma \mathcal{A}, \quad (5.12)$$

en donde \mathcal{A} tiene la expresión

$$\mathcal{A} = 6g_{3\pi} + 2g_{\omega\rho\pi}g_{\rho\pi\pi} \left(D^{-1}[\rho^0, p_1 + p_2] + D^{-1}[\rho^+, p_1 + p_3] + D^{-1}[\rho^-, p_2 + p_3] \right), \quad (5.13)$$

donde $D[\rho, Q] = Q^2 - m_\rho^2 + im_\rho\Gamma_\rho$; los factores 6 y 2 en esta expresión provienen de las permutaciones de los piones y de la conservación del momento, necesarias para poder escribir la expresión para \mathcal{M}_D en la forma presentada en 5.12. En la expresión 5.13 el término $g_{3\pi}$ es el acoplamiento del término de contacto proveniente del diagrama Fig.5.2d), y el resto de la expresión es lo que llamamos el canal del mesón ρ correspondiente a los diagramas Fig.5.2a-c). El acoplamiento efectivo entre el mesón ρ y los piones en los que éste decae $g_{\rho\pi\pi} = 5.95 \pm 0.02$, es fijado precisamente por el valor del ancho de decaimiento del mesón ρ , $\Gamma_\rho = 149.1 \pm 0.8$ MeV, considerando que éste decae en un 100 % en piones.

Para calcular el ancho de decaimiento utilizamos la siguiente expresión

$$\Gamma = \int du \int dv \frac{1}{(2\pi)^3 32m_\omega^2} |\overline{\mathcal{M}_D}|^2, \quad (5.14)$$

donde $u = (p_1 + p_3)^2$, $v = (p_2 + p_3)^2$ y con la región de integración dada por

$$\begin{aligned} 4m_{\pi^+}^2 &\leq u \leq (m_\omega - m_{\pi^0})^2 \\ v_-(u) &\leq v \leq v_+(u), \end{aligned} \quad (5.15)$$

con

$$\begin{aligned} v_\pm(u) &= \frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{-2m_\omega^2(u + m_{\pi^0}{}^2) + (u - m_{\pi^0}{}^2)^2 + m_\omega^4} \right. \\ &\quad \left. \sqrt{1 - \frac{4m_{\pi^+}{}^2}{u} - u + 2m_{\pi^+}{}^2 + m_{\pi^0}{}^2 + m_\omega^2} \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Si usamos estos valores, junto con el valor encontrado para la constante $g_{\omega\rho\pi} = 11.9 \pm 0.2 \text{ GeV}^{-1}$ obtenido de procesos radiativos y consideramos que el término de contacto no está presente, i.e. $g_{3\pi} = 0$, se obtiene un valor para el ancho de decaimiento del mesón ω en 3 piones $\Gamma_{\omega \rightarrow 3\pi}^\rho = 4.4 \pm 0.2 \text{ MeV}$, correspondiente a un 58 % del valor experimental [1] $\Gamma_{\omega \rightarrow 3\pi}^{exp} = 7.56 \pm 0.13 \text{ MeV}$. La corrección que este valor sufre haciendo la consideración de un ancho de decaimiento dependiente de la energía para el mesón ρ es despreciable en comparación con las barras de error^e, así como las correcciones radiativas [51].

Para poder reproducir el valor experimental del ancho de decaimiento, podríamos proceder de formas distintas: podríamos incrementar la constante $g_{\omega\rho\pi}$ hasta un valor de 15.7 GeV^{-1} , dicho valor fue obtenido dejando como parámetro libre el acoplamiento y ajustandolo para reproducir el ancho experimental. O bien, podemos conservar el valor del acoplamiento proveniente de procesos radiativos y añadir contribuciones como un término de contacto o una resonancia adicional como el mesón ρ' . Para estimar cuánto debe valer la constante de acoplamiento de un término de contacto podemos incluir a dicho término como se muestra en la ecuación 5.13 dejando al acoplamiento como parámetro libre, con lo que se obtiene una ecuación de segundo grado para $g_{3\pi}$, que al resolverla nos da por resultado

$$g_{3\pi} = \begin{cases} -62 \pm 7 \text{ GeV}^{-3} \\ 406 \pm 10 \text{ GeV}^{-3}. \end{cases} \quad (5.17)$$

Sin embargo la inclusión de este término no es arbitraria. Este término está fuertemente relacionado a la anomalía de Wess-Zumino-Witten (WZW) [47, 48] como lo ilustramos a continuación:

La anomalía de WZW fija la amplitud del proceso $\gamma^* \rightarrow 3\pi$ según

$$e\mathcal{A}^{WZW} = \frac{\alpha}{\pi f_\pi^3}, \quad (5.18)$$

^eVéase el Apéndice G para más detalle en cómo se realiza esta consideración.

siguiendo la notación de la ecuación 5.12.

Desde el punto de vista de VMD, este decaimiento se lleva a cabo por medio de la transmutación del fotón en un mesón ω , que después decae en $\rho\pi$, seguido del decaimiento del ρ en dos piones. La amplitud para este proceso \mathcal{A}^ρ tiene la misma forma que la ecuación 5.13 para el canal del ρ , si uno considera en dicha expresión que: $g_{3\pi} = 0$, la aproximación de momento cero ($Q^2 = 0$), $\Gamma_\rho = 0$ para los propagadores del ρ y un factor global e/g_ω , dando por resultado

$$\mathcal{A}^\rho = \frac{6e}{g_\omega} \frac{g_{\omega\rho\pi} g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2} = \frac{3}{2} \frac{e}{4\pi^2 f_\pi^3} = \frac{3}{2} \mathcal{A}^{WZW}, \quad (5.19)$$

es decir, el canal del mesón ρ es $\frac{3}{2}$ de la amplitud predicha por la teoría Quiral, por lo que el término de contacto debe contribuir con $-\frac{1}{2} \mathcal{A}^{WZW}$. Si pedimos además que se respete la relación KSFR (Ec.(5.10)) como se hace en otros trabajos [58, 59], se encuentra la siguiente relación para $g_{3\pi}$

$$\frac{-1}{2} \mathcal{A}^{WZW} = \frac{6e g_{3\pi}}{g_\omega} \rightarrow g_{3\pi} = -\frac{g_{\rho\pi\pi}}{16\pi^2 f_\pi^3} = -47 \text{ GeV}^{-3}, \quad (5.20)$$

en donde hemos hecho uso de las ecuaciones 5.8, 5.9 y 5.11.

Así pues, si utilizamos este valor para la constante de acoplamiento del término de contacto $g_{3\pi}$ y volvemos a calcular el ancho para el decaimiento ω en 3 piones, haciendo uso de la constante $g_{\omega\rho\pi}$ obtenida de procesos radiativos, tenemos como resultado $\Gamma_{\omega \rightarrow \rho\pi\pi} = 6.8 \pm 0.2$ MeV, que está en mejor acuerdo con el experimento. Queremos hacer notar que el resultado obtenido aquí para $g_{3\pi}$ es cercano a uno de los resultados obtenido en la ecuación 5.17, en donde la inclusión de este parámetro fue directa.

Este procedimiento establece una manera apropiada de incluir contribuciones adicionales en el esquema de VMD, manteniendo acuerdo con los teoremas de bajas energías. En otros estudios [60] han tratado también este problema desde el esquema de la teoría quiral y han encontrado de igual manera que el canal del mesón ρ no explica por completo el ancho de decaimiento del mesón ω en tres piones; y también han señalado que el introducir un término de contacto de manera adecuada es necesario.

5.2.1. El canal de la ρ' .

Hasta ahora hemos considerado que el proceso de decaimiento del mesón ω a 3 piones sólo se puede llevar a cabo por el canal del mesón ρ y el término de contacto fijado por la anomalía WZW. Sin embargo, decaimientos por medio de excitaciones radiales también pueden ser importantes, por lo que es importante ver como incluirlas.

En nuestro estudio nos enfocaremos sólo en la resonancia ρ' ($m_{\rho'} = 1465$ MeV, $\Gamma_{\rho'} = 400$ MeV), la cual tiene una contribución dada por una expresión exactamente igual a la que mostramos en las expresiones 5.12 y 5.13, pero con los parámetros de masa y ancho

correspondientes al mesón ρ' y sin el término de contacto; debido a que la masa de este mesón es grande nos permite simplificar su propagador, lo cual nos lleva a poder considerar la contribución de este término como un término efectivo de contacto al cual denotaremos $g'_{3\pi}$, y tiene la expresión:

$$|g'_{3\pi}| \approx \frac{g_{\omega\rho'\pi}g_{\rho'\pi\pi}}{m_{\rho'}^2}. \quad (5.21)$$

Debido a que las constantes de acoplamiento que involucran al mesón ρ' no han sido bien medidas o se desconocen por completo tanto teórica como experimentalmente [53, 61], tenemos que hacer una suposición sobre la razón de constantes de acoplamiento de este mesón; para esto ocupamos nuestro conocimiento de las constantes del mesón ρ . Debido a que estas resonancias son excitaciones radiales una de la otra, asumiremos que la información sobre a qué resonancia pertenecen los acoplamientos está totalmente ligada a la parte angular de cada partícula, por lo que al hacer la razón entre acoplamientos se pierde dicha información; con eso podemos escribir que $\frac{g_{\omega\rho'\pi}}{g_{\rho'\pi\pi}} = \frac{g_{\omega\rho\pi}}{g_{\rho\pi\pi}} = 2 \text{ GeV}^{-1}$.

Se han realizado estudios sobre la constante de acoplamiento $g_{\omega\rho'\pi}$ [61], en donde han encontrado que su valor está en un rango entre 10 y 18 GeV^{-1} . Bajo estas suposiciones se encuentra que $|g'_{3\pi}| \approx 46 \pm 23 \text{ GeV}^{-3}$ ^f.

Hemos evaluando las correcciones que este valor debe sufrir debido a la dependencia en el momento del ancho de decaimiento del mesón ρ' , lo cual dá un aumento de un 6%, por lo que nuestra estimación para este acoplamiento es

$$|g'_{3\pi}| = 49 \pm 24 \text{ GeV}^{-3}. \quad (5.22)$$

Hay que notar que esta contribución debida al ρ' no puede ser tomada al mismo tiempo que el término de contacto, pues el canal del mesón ρ y el contacto fueron tomadas como las únicas contribuciones en la sección anterior y eso fija los factores de peso en las ecuaciones 5.19 y 5.20; para incluirlo sería necesario un estudio mucho mas detallado, además de que requeriríamos información mas detallada de las resonancias que deseáramos agregar, información que al día de hoy no se tiene disponible ni por parte de la teoría, ni se ha medido experimentalmente. En [62] hemos realizado un estudio mas detallado de como se incluyen de manera coherente las contribuciones debidas a resonancias de mas alto orden junto con el término de contacto.

Haciendo el ejercicio de calcular el ancho de decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$ ignorando el término de contacto presentado en la sección anterior y sustituyéndolo con el obtenido aquí por medio del canal del mesón ρ' obtenemos que la contribución de este “contacto” es solo de un $4 \pm 5\%$ del valor experimental, pero la interferencia con el canal del mesón ρ es de un $29 \pm 14\%$, lo cual acerca el resultado total a un 91% del valor experimental, tal como se puede ver en la Tabla 5.2.

^fEl error para la constante $|g'_{3\pi}|$ es reflejo del rango que presenta la contante $g_{\omega\rho'\pi}$, para la cual hemos utilizado un valor de $14 \pm 4 \text{ GeV}^{-1}$.

Canal	Contribución a $\Gamma_{\omega \rightarrow 3\pi}$ [MeV]	Porcentaje (Γ_i/Γ_{exp})
ρ	4.37 ± 0.15	57.7 ± 2
ρ'	0.31 ± 0.38	4.1 ± 5
Interferencia	2.2 ± 1.1	29.2 ± 14.2
Total	6.88 ± 1.2	91 ± 15.2

Tabla 5.2: Contribuciones al ancho de decaimiento del mesón ω a 3 piones, calculado a partir del canal del mesón ρ y un término de contacto efectivo generado por el mesón ρ' .

Referencia	$ g_{3\pi} $ [GeV^{-3}]
Kuraev [57]	123
Kaymakcalan [63]	37
Rudaz [58], Cohen [59]	47
Domínguez [64]	29 ± 3
Este trabajo de $\Gamma(\omega \rightarrow 3\pi)$	65 ± 7
Este trabajo de ρ'	49 ± 24

Tabla 5.3: Valores del término de contacto $g_{3\pi}$ en diferentes aproximaciones.

En la Tabla 5.3 presentamos una colección de los valores para la constante de acoplamiento para los términos de tipo contacto que hemos obtenido, junto con otros valores para la misma encontrados en la literatura en donde utilizan diferentes aproximaciones: Kuraev [57] utiliza un lagrangiano quiral efectivo que incluye VMD; Rudaz [58] y Cohen [59] emplean un esquema de VMD congruente con teoremas de bajas energías; Kaymakcalan [63] trabaja en el contexto de una extensión del lagrangiano quiral para incluir campos de espín 1 y finalmente Domínguez [64] extiende la idea planteada en la sección del mesón ρ' e incluye una infinidad de excitaciones radiales.

Debido a la diferente naturaleza de estas aproximaciones no nos es posible comparar directamente cada uno de estos resultados; sin embargo, es interesante ver que a pesar de la dependencia de modelo esta constante muestra estar en un rango de alrededor de unos 30-60 GeV^{-3} .

A partir de la expresión para calcular el ancho de decaimiento del mesón ω en 3 piones, realizamos un ajuste para la constante de acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$ en dos casos: *i)* considerando el canal del mesón ρ más el término de contacto proveniente de la descripción quiral, y *ii)* el canal del mesón ρ más el canal del mesón ρ' considerándolo como un contacto efectivo, tal como se ha hecho en la sección correspondiente. Este ajuste se hizo dejando como parámetro libre dicha constante y hallando su magnitud para poder reproducir el valor experimental

del ancho de decaimiento. Como resultado para cada caso obtuvimos los siguientes valores:

$$\begin{aligned} i) \quad g_{\omega\rho\pi} &= 12.8 \pm 0.1 \text{ GeV}^{-1} \\ ii) \quad g_{\omega\rho\pi} &= 12.6 \pm 1.3 \text{ GeV}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

La incertidumbre para estos casos fue obtenida variando la constante $g_{\omega\rho\pi}$ reproduciendo el rango experimental de valores para el ancho de decaimiento. En el segundo caso se considero la región permitida por las incertidumbres de la ρ'

Con esto terminamos esta sección; en la siguiente analizaremos ahora el proceso de producción de 3 piones por el canal del mesón ω para el cual calcularemos la sección eficaz y compararemos con datos experimentales para poder extraer el valor de la constante $g_{\omega\rho\pi}$.

5.3. Proceso $e^+ e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$.

En esta sección exploraremos la implicación que tiene el incluir los términos de contacto estudiados en la sección pasada en la sección eficaz para el proceso de producción $e^+ e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$; para ello comencemos calculando la sección eficaz de dicho proceso.

Siguiendo la notación de la sección anterior, podemos escribir la amplitud para este proceso de la siguiente manera

$$\mathcal{M} = \frac{e^2 m_\omega^2 \bar{V} \gamma^\mu U \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma}{g_\omega q^2 (q^2 - m_\omega^2 + im_\omega \Gamma_\omega)} \mathcal{A}; \quad (5.24)$$

en donde e es la carga del positrón, m_ω y Γ_ω son la masa y el ancho de decaimiento del mesón ω respectivamente. El término $\bar{V} \gamma^\mu U$ es la parte leptónica del proceso y las demás variables siguen la misma convención del proceso anterior como se describe en la ecuación 5.12. La expresión para \mathcal{A} resulta ser la misma que aparece en la ecuación 5.13.

La sección eficaz de este proceso y el decaimiento anterior están íntimamente relacionados en cuanto a la región de integración, ya que es posible demostrar que utilizando la sección eficaz definida por

$$\sigma(s) = \int du \int dv \frac{1}{32s^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \overline{|\mathcal{M}|^2}, \quad (5.25)$$

donde u y v son definidas igual que en el proceso anterior y s es la variable de Mandelstam para la energía, entonces la región de integración tiene los mismos límites que en el caso anterior (ecs. 5.15 y 5.16) [57], pero haciendo el cambio de la masa del mesón ω por \sqrt{s} .

En la Figura 5.3 mostramos los resultados para la sección eficaz calculada a partir de esta expresión como función de la energía del centro de masa, la cual hemos comparado con los datos del experimento CMD2 [52]. En dicha figura mostramos el resultado que obtendríamos de calcular la sección eficaz considerando sólo el canal del mesón ρ y el valor de $g_{\omega\rho\pi}$ obtenida a partir de procesos radiativos (VMD_r), dicho resultado es mostrado como una línea continua,

la cual se puede ver queda por debajo de los datos experimentales. Luego, considerando el canal del mesón ω más el término de contacto quiral obtenemos el resultado mostrado como una línea segmentada, el cual podemos observar que se aleja mucho de los datos experimentales. Debido a que no tenemos una incertidumbre para el acoplamiento quiral, el resultado mostrado en la gráfica para este caso tiene una incertidumbre del alrededor de un 10 %, debido sólo al acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$ (lo cual no hemos mostrado aquí) y esto no es suficiente para reproducir los datos experimentales dentro de los márgenes de error. Por último en el caso del mesón ρ junto con el contacto proveniente del mesón ρ' se tiene un resultado que se parece mucho al anterior, sin embargo debido a la incertidumbre que presenta el acoplamiento $|g'_{3\pi}|$, tenemos un margen de error en el resultado de la sección eficaz que nos permite acercarnos a los datos experimentales; el resultado que mostramos en la línea punteada es precisamente el que obtenemos considerando el valor de la constante $|g'_{3\pi}|$ menos una desviación estándar.

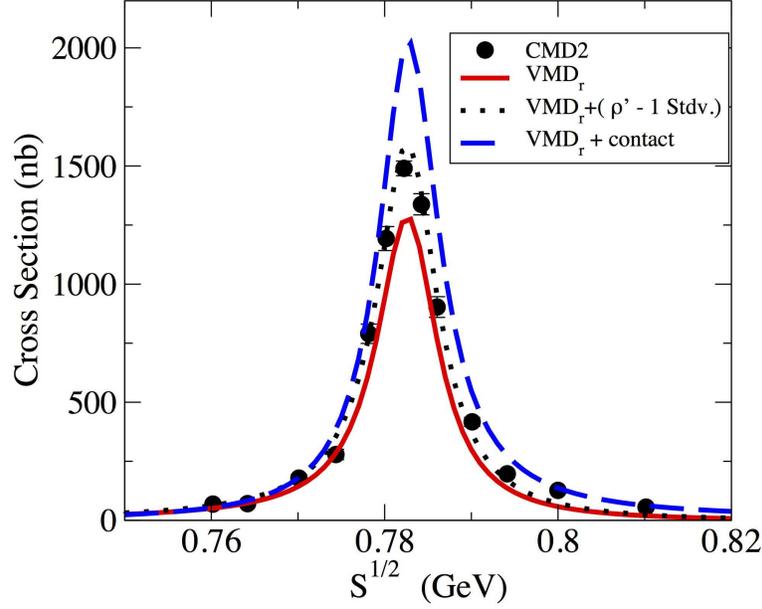


Figura 5.3: Proceso $e^+ e^- \rightarrow 3\pi$ usando $g_{\omega\rho\pi}$ obtenida por procesos radiativos entre casos: i) solo el canal del mesón ρ , ii) el canal del mesón ρ más el término de contacto quiral y iii) el canal del mesón ρ más el canal del mesón ρ' - 1 desviación estándar.

Al igual que en el proceso de decaimiento, hemos realizado un ajuste para la constante $g_{\omega\rho\pi}$ para los casos anteriormente mencionados; para esto utilizamos datos experimentales de CMD2 [52] y de SND [56] y el parámetro $\chi^2/\#$ *grados de libertad* (bondad de ajuste). El resultado obtenido para este parámetro en el caso del experimento CMD2 fue $\chi^2/\#$ *grados de libertad* ≈ 4 y para SND, $\chi^2/\#$ *grados de libertad* ≈ 1 y los resultados para el ajuste son presentados en la Tabla 5.4 y graficados en la Figura 5.4. Las barras de error que hemos considerado toman en cuenta los rangos de valores para la masa y el ancho del mesón ω ,

Canal	CMD2	SND	Promedio
ρ	13.1 ± 0.3	13.4 ± 0.2	13.3 ± 0.2
ρ + contacto quiral	10.3 ± 0.1	10.6 ± 0.1	10.5 ± 0.1
ρ + ρ'	10.1 ± 1.5	10.5 ± 1.6	10.3 ± 1.6

Tabla 5.4: Valores obtenidos para la constante $g_{\omega\rho\pi}$ en GeV^{-1} para el ajuste de los experimentos de CMD2 y SND.

tomando como valores centrales las cantidades que cada experimento reporta. Finalmente, hemos tomado como valor final para nuestro reporte un promedio entre los valores obtenidos de cada experimento.

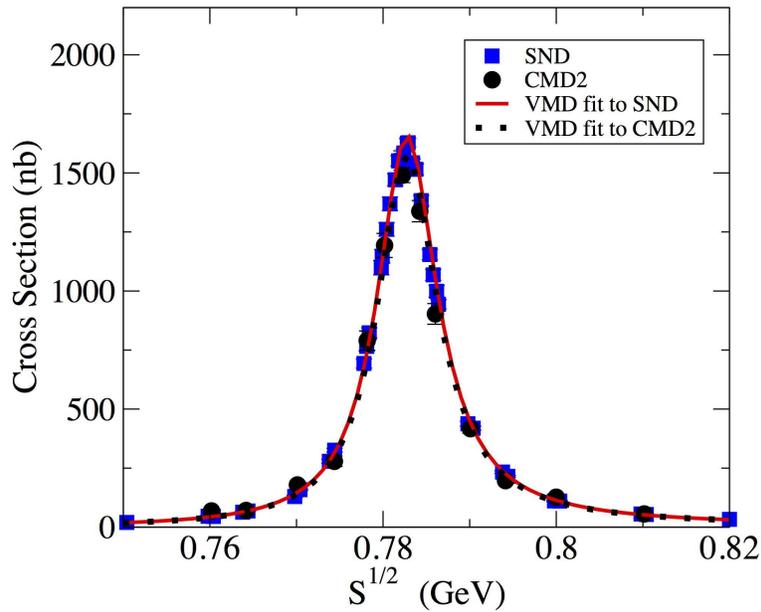


Figura 5.4: Resultados de los ajustes para los experimentos CMD2 y SND.

Para terminar, hagamos un resumen de lo que realizamos en este capítulo: Hemos hecho un análisis para obtener el valor de las constantes $g_{\omega\rho\pi}$ en el contexto del esquema de VMD utilizando los siguientes procesos: decaimientos radiativos, el decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$ y el proceso de producción $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$. En la Tabla 5.5, presentamos nuestros resultados finales, los cuales se obtuvieron en los siguientes escenarios:

i) Sí asumimos que tanto el decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$, como el proceso de producción $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$, sólo se llevan a cabo por el canal del mesón ρ , obtenemos los resultados mostrados en la columna marcada como “Canal del ρ ” en la Tabla 5.5, con lo que se tiene un promedio final de $g_{\omega\rho\pi} = 14.7 \pm 0.1 \text{ GeV}^{-1}$.

ii) Considerando el canal del mesón ρ más un término de contacto proveniente de la teoría quiral, tenemos los resultados mostrados en la columna llamada “ $\rho + \text{contacto quiral}$ ” en la Tabla 5.5 cuyos valor promedio es $g_{\omega\rho\pi} = 11.7 \pm 0.1 \text{ GeV}^{-1}$ al considerar los mismo procesos que en el caso anterior.

iii) Finalmente, tomando el canal del mesón ρ más el canal del mesón ρ' obtenemos un resultado final para $g_{\omega\rho\pi} = 11.9 \pm 0.2 \text{ GeV}^{-1}$, mostrado en la columna denotada como “ $\rho + \rho'$ ” en la Tabla 5.5; que al igual que en los casos anteriores se obtiene de considerar los procesos de decaimiento y de producción antes mencionados.

	Canal del ρ	$\rho + \text{contacto quiral}$	$\rho + \rho'$
VMD _{τ}	11.9 ± 0.2	11.9 ± 0.2	11.9 ± 0.2
$\Gamma(\omega \rightarrow 3\pi)$	15.7 ± 0.1	12.8 ± 0.1	12.6 ± 1.3
$\sigma(e^+e^- \rightarrow 3\pi)$	13.3 ± 0.2	10.5 ± 0.1	10.3 ± 1.6
Promedio	14.7 ± 0.1	11.7 ± 0.1	11.9 ± 0.2

Tabla 5.5: Valores para la constante $g_{\omega\rho\pi} [\text{GeV}^{-1}]$ en los diferentes escenarios presentados en este capítulo.

Estos resultados los podemos comparar con otros encontrados en la literatura en donde se utilizan otras aproximaciones: En [65] se obtiene un valor para $g_{\omega\rho\pi}$ de 7.35 GeV^{-1} , usando un esquema de bosones de Goldstone y mesones vectoriales ligeros. Existen también estimaciones basadas en reglas de sumas de QCD [66, 67] en donde ellos obtienen un valor de 9 GeV^{-1} , mientras que en [68]-[71] tienen un rango de entre 15 a 17 GeV^{-1} . Un valor similar de 16 GeV^{-1} es encontrado en la referencia [64] por medio de la inclusión de una infinidad de excitaciones radiales, al igual que en [72] y [73] donde usan la simetría SU(3). Efectos de rompimiento de esta simetría han sido considerados por [74] y [75]. [76] obtiene para este acoplamiento un valor de 15.8 GeV^{-1} utilizando solo el canal del mesón ρ y ajustando a la sección eficaz del proceso de producción de 3 piones. Un modelo sigma lineal a nivel de quarks usado en [77] obtiene un rango de 10.3 a 14.7 GeV^{-1} . Finalmente podemos mencionar que en [78] en el marco de Dyson-Schwinger, usando una aproximación *rainbow-ladder* obtienen un valor de 10.3 GeV^{-1} . Dada la diferencia entre las aproximaciones consideradas en los demás trabajos, no podemos señalar la causa de esta discrepancia. En nuestro trabajo hemos mostrado que la inclusión de los términos de contacto o una resonancia mas pesada, puede tener efectos importantes en la estimación de este acoplamiento bajando su valor desde aproximadamente 16 GeV^{-1} hasta casi 11 GeV^{-1} .

Con esto terminamos el estudio de la constante de acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$, del cual hemos visto que es sensible a los diferentes escenarios presentados aquí. Sobre todo el resultado más importante es que el canal del mesón ρ puede absorber de manera efectiva las contribuciones debidas al término de contacto quiral, así como las contribuciones provenientes de resonancias de mas alto orden; lo cual será un punto importante cuando estudiemos la producción de 4 piones en el capítulo siguiente.

Capítulo 6

El Proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$.

Nuestro estudio se enfoca en encontrar un valor para el mdm del mesón ρ , para ello es necesario calcular la sección eficaz para el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, que como veremos está en función del parámetro β . En el presente capítulo realizamos el cálculo de dicha sección eficaz, para la cual presentamos los diferentes canales por los que se puede dar este proceso. Una vez teniendo dicha expresión y con ayuda de datos experimentales seremos capaces de ver la sensibilidad que presenta esta observable ante el parámetro β . Ajustando nuestros resultados a datos experimentales de la sección eficaz determinaremos el valor del mdm para el mesón ρ . Así mismo, analizaremos la distribución angular del canal que incluye al vértice $\rho\gamma\gamma$ y veremos si conserva una preferencia en la dirección en la cual los piones son producidos. Por último calcularemos la razón de decaimiento del $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ a su ancho total.

★ ★ ★

Para el presente estudio hemos considerado que las correcciones radiativas son despreciables [51], y además no hemos tomado en cuenta la simetría de isospín proveniente de las masas de los piones, a diferencia de otros trabajos como [79, 80], pues deseamos tener en cuenta los efectos del rompimiento de esta simetría. Aún cuando en dichos trabajos se reporta que la simetría de isospín es válida dentro de la precisión actual, es necesario tener en cuenta que está rota para que en un futuro, cuando la precisión experimental nos lo permita, podamos verificar estos efectos.

Para estudiar el proceso de producción $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, primero presentaremos los canales que dan origen a este proceso. Es necesario verificar que cada diagrama es parte de un conjunto invariante de norma, o lo es por sí mismo, por lo que cuando presentemos cada canal corroboraremos este hecho. Una vez fijados los canales, calcularemos la amplitud al cuadrado y luego la sección eficaz total para el proceso de producción de 4 piones, la cual dejaremos como función del parámetro β . A partir de esto estudiaremos qué tan sensible es la sección eficaz al variar dicho parámetro, por lo que variaremos este parámetro dentro de

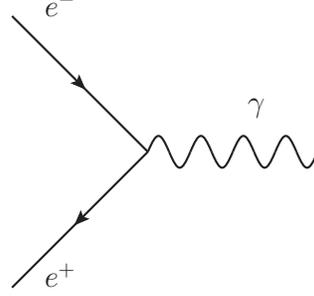


Figura 6.1: Parte leptónica de los canales para el proceso de producción de 4 piones.

un rango de valores. Finalmente por medio de un ajuste a datos preliminares de BaBar [81] para la sección eficaz determinaremos un valor para el mdm del mesón ρ .

La convención de momentos que utilizaremos para el proceso de producción de cuatro piones será la siguiente:

$$e^+(k_1)e^-(k_2) \rightarrow \pi^+(p_1)\pi^0(p_2)\pi^-(p_3)\pi^0(p_4). \quad (6.1)$$

Y las reglas de Feynman que utilizaremos para el desarrollo de nuestro trabajo, así como las constantes de acoplamiento están mostradas con detalle en el Apéndice D.

Para el mesón ρ usaremos un ancho de decaimiento dependiente de la energía y no un valor constante de $\Gamma_\rho = 149.1$ MeV. Los detalles de como se ha hecho la función para el ancho son mostrados en el Apéndice G.

La amplitud de los procesos presentados a continuación pueden escribirse como una parte hadrónica h_μ y una parte leptónica l^μ

$$\mathcal{M} = h_\mu l^\mu. \quad (6.2)$$

Esta última es común a todos los procesos, por lo que se puede calcular su cuadrado como un factor por separado que posteriormente se puede contraer con el cuadrado de la amplitud hadrónica, para con ello obtener la expresión final para el cuadrado de la amplitud del proceso.

Para calcular el cuadrado de la amplitud leptónica partimos de

$$l^\mu = -ie\bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1); \quad (6.3)$$

en donde \bar{v} y u , son los campos del positrón y electrón respectivamente, e es la carga del positrón y γ_μ las matrices de Dirac.

Al hacer el promedio sobre estados de espín y la suma sobre polarizaciones, tenemos que

$$l^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}l^\mu l^{\nu*} = \frac{e^2}{4} \sum_{\text{espines}} [\bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1)][\bar{u}(k_1)\gamma^\nu v(k_2)], \quad (6.4)$$

que por reglas de trazas ^a se traduce en

$$l^{\mu\nu} = e^2(k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - k_1 \cdot k_2 g^{\mu\nu}), \quad (6.5)$$

este es el factor común de la parte leptónica por el cual tenemos que contraer al resultado de cada uno de los cuadrados de las amplitudes de los diagramas que presentamos en seguida; cabe aclarar, que para llegar al resultado presentado en la Ec. 6.5 fue necesario despreciar los términos proporcionales a la masa del electrón.

El fotón que se muestra en la Figura 6.1 se transmuta en un mesón ρ^0 o ρ'^0 , y es a partir de estos que se originan los diferentes canales, de los cuales a continuación mostramos los diagramas genéricos; estos diagramas sólo muestran cómo es que los diferentes decaimientos de las partículas se deben llevar a cabo para construir el canal, pero lo muestran de una manera muy específica. A partir de estos es necesario considerar todas las combinaciones en las que las partículas involucradas pueden decaer, por ejemplo en la Figura 6.2 (mostrada a continuación) el mesón ρ (ρ'^0) decae dos piones cargados, esta figura muestra que el π^- decae en otras partículas para completar el diagrama; sin embargo, pudiera ser que en lugar de este pión decayera el π^+ , lo cual no mostramos.

La forma en la que obtenemos las expresiones para las amplitudes de todas estas combinaciones de cargas es por medio de escribir una amplitud reducida $\mathcal{M}_r(p_1, p_2, p_3, p_4)$, la cual es específica para la elección de momentos que presentaremos en la figura correspondiente a cada canal; y a continuación consideramos los siguientes intercambios de momentos ^b

i) Para obtener la amplitud que implica el intercambio de los dos piones neutros, se debe considerar la simetría de Bose-Einstein, es decir se debe cumplir que

$$\mathcal{M}_r(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathcal{M}_r(p_1, p_4, p_3, p_2). \quad (6.6)$$

ii) Para obtener la amplitud que implica el intercambio de los dos piones cargados, se debe considerar la conjugación de carga, lo cual se traduce en la restricción

$$\mathcal{M}_r(p_1, p_2, p_3, p_4) = -\mathcal{M}_r(p_3, p_2, p_1, p_4). \quad (6.7)$$

De manera que la amplitud total para cada canal se encuentra a partir de

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{canal}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \mathcal{M}_r(p_1, p_2, p_3, p_4) + \mathcal{M}_r(p_1, p_4, p_3, p_2) \\ &\quad - \mathcal{M}_r(p_3, p_2, p_1, p_4) - \mathcal{M}_r(p_3, p_4, p_1, p_2). \end{aligned} \quad (6.8)$$

En la sección a continuación se presentan los diagramas de Feynman para los canales que hemos considerado en el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, y con los que se ha calculado la sección eficaz.

^aEspecíficamente se ha utilizado que $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$.

^bEl intercambio de las partículas cargadas no es de ninguna manera porque éstas sean indistinguibles, como en el caso de las neutras, sino que es necesario considerar todas las combinaciones de los posibles decaimientos y ésta sólo es una manera práctica de resumir todas las expresiones de las amplitudes.

6.1. Canales del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$.

- Canal A.

Llamaremos canal A al proceso mostrado en la Figura 6.2, en la cual mostramos cómo el mesón ρ (ρ')^c decae en dos piones, uno de ellos emite luego un pion y otro mesón ρ que posteriormente decae en dos piones mas.

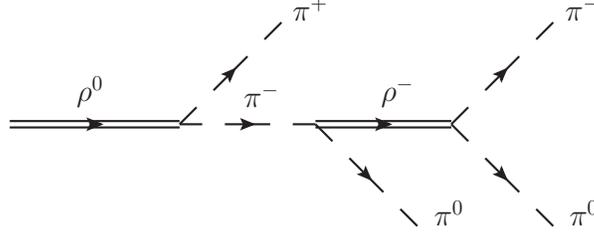


Figura 6.2: Canal A para la producción de 4 piones: $\rho \rightarrow \pi\pi \rightarrow \pi\rho\pi \rightarrow 4\pi$.

Para la configuración de cargas mostrada en la Figura 6.2 la amplitud reducida $\mathcal{M}_{rA\mu}$ está dada por la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{rA\mu} = & \left(-\frac{iem_\rho^2}{g_\rho} \delta_{\mu\beta} \right) (-ig^{\beta\gamma}) \left(\frac{1}{q^2 - m_\rho^2 + im_\rho\Gamma_\rho} - \frac{1}{q^2 - m_{\rho'}^2 + im_{\rho'}\Gamma_{\rho'}} \right) \\ & (-2ig_{\rho\pi\pi} p_{1\gamma}) \frac{i}{(q - p_1)^2 - m_\pi^2} \\ & (ig_{\rho\pi\pi} (q - p_1 + p_2)_\delta) i \left(\frac{-g^{\delta\eta} + \frac{(p_3+p_4)^\delta (p_3+p_4)^\eta}{m_\rho^2 - im_\rho\Gamma_\rho}}{(p_3 + p_4)^2 - m_\rho^2 + im_\rho\Gamma_\rho} \right) (ig_{\rho\pi\pi} (p_4 - p_3)_\eta), \end{aligned} \quad (6.9)$$

en donde $q = \sqrt{s} = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ es el momento del mesón ρ inicial; m_ρ y Γ_ρ su masa y su ancho; $g_{\rho\pi\pi}$, el acoplamiento entre los mesones según lo indica los subíndices y $g^{\alpha\beta}$, el tensor métrico. Nótese que la fase con la que es introducida la resonancia del mesón ρ' es negativa; esto se puede ver claramente en la resta de propagadores en el primer renglón de la expresión anterior^d.

Hay que recordar que esta amplitud no representa la totalidad del proceso, sino que falta hacer las permutaciones de momentos según lo indica la Ecuación 6.8.

^cDebido al rango de energías que estamos considerando para nuestro estudio (de 0.65 a 2.5 GeV, el fotón puede transmutar no solo en un mesón ρ , sino en otras resonancias; de estas posibles resonancias solo hemos considerado al mesón ρ' , pues consideramos que las demás resonancias no contribuyen de manera significativa.

^dPara nuestro estudio hemos seguido los trabajos de H. Czyz[79] y G. Ecker[80] en donde ellos muestran que la fase entre los mesones ρ y ρ' es negativa. Nosotros hemos revisado este hecho variando dicha fase y encontramos que al considerarla de esta manera se obtiene el mejor acuerdo con los datos experimentales para la sección eficaz.

Para simplificar la escritura definimos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
s_{ij} &\equiv p_i + p_j, \\
r_{ij} &\equiv p_i - p_j, \\
P[q, \rho] &\equiv \frac{i}{q^2 - m_\rho^2 + i m_\rho \Gamma_\rho}, \\
PS[q] &\equiv \frac{i}{q^2 - m_\pi^2}, \\
F[\rho] &\equiv \frac{1}{m_\rho^2 - i m_\rho \Gamma_\rho}.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Con ayuda de esto podemos escribir la expresión (6.9) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{rA\mu} = & -2 \left(-\frac{iem_\rho^2}{g_\rho} \right) (ig_{\rho\pi\pi})^3 (P[q, \rho] - P[q, \rho']) PS[q - p_1, \pi] P[s_{34}, \rho] \\
& [(q - p_1 + p_2) \cdot r_{34} - F[\rho] s_{34} \cdot r_{34} (q - p_1 + p_2) \cdot s_{34}] p_{1\mu}.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

El primer factor entre paréntesis es el factor de VMD para la transmutación de un fotón a un mesón ρ ; pero no se ha tomado en cuenta el propagador del fotón asociado a la parte leptónica.

En particular para este diagrama se podría dar la siguiente combinación de momentos

$$\rho^0 \rightarrow \pi^+(\pi^-) \rightarrow \pi^+\pi^-(\rho^0) \rightarrow \pi^+\pi^-(2\pi^0); \tag{6.12}$$

es decir que en el diagrama se tuviera que considerar el decaimiento $\rho^0 \rightarrow 2\pi^0$. Según se puede ver en [1] el ancho de decaimiento de este proceso es dos ordenes de magnitud menor que el correspondiente a piones cargados por lo que no consideraremos en este trabajo a dicho vértice, por considerarlo un proceso subdominante. Lo que da un total de 4 diagramas distintos para este canal.

- Canal B.

En la Figura 6.3 mostramos el canal que llamaremos B, este se da por medio del decaimiento del mesón ρ inicial en otros dos mesones ρ , dando lugar a un vértice de tres mesones ρ , que podemos ligar con el vértice que nos interesa ($\rho\rho\gamma$), según el esquema de VMD, por la transmutación de uno de estos a un fotón. Luego, cada uno de estos mesones decae en dos piones. La amplitud de este proceso está dada por la expresión

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{rB\mu} = & \left(-\frac{iem_\rho^2}{g_\rho} \delta_{\mu\nu} \right) (ig_{\rho\pi\pi})^3 (P[q, \rho] - P[q, \rho']) P[s_{12}, \rho] P[s_{34}, \rho] (-g^{\nu\alpha}) \\
& [g_{\lambda\gamma} (s_{34} - s_{12})_\alpha + \beta (q_\gamma g_{\lambda\alpha} - q_\lambda g_{\gamma\alpha}) + s_{12\lambda} g_{\gamma\alpha} - s_{34\gamma} g_{\lambda\alpha}] \\
& (-g^{\lambda\delta} + F[\rho] s_{12}^\lambda s_{12}^\delta) r_{12\delta} (-g^{\gamma\eta} + F[\rho] s_{34}^\gamma s_{34}^\eta) r_{43\eta},
\end{aligned} \tag{6.13}$$

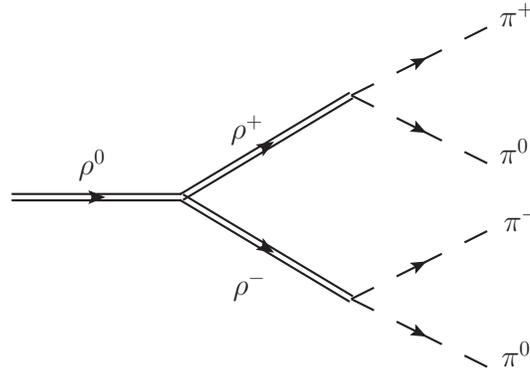


Figura 6.3: Canal B para la producción de 4 piones: $\rho \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$.

en donde el parámetro β está directamente relacionado con el dipolo magnético del mesón ρ (Ec. 3.18). Una vez más para tener todos los diagramas de este canal se tiene que realizar tanto el intercambio de piones cargados como el de piones neutros.

- Canal C.

El canal C se muestra en la Figura 6.4, el cual parte del mesón ρ y sigue con la emisión de otro mesón ρ y dos piones mas por parte de éste, para finalizar con el decaimiento del segundo mesón ρ en otros dos piones.

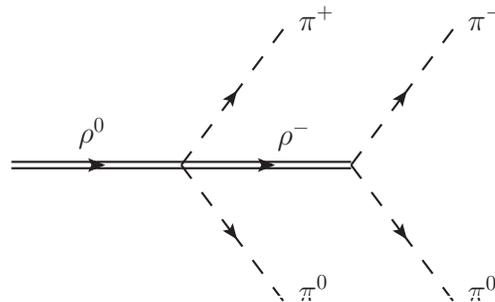


Figura 6.4: Canal C para la producción de 4 piones: $\rho \rightarrow \pi\rho\pi \rightarrow 4\pi$.

El esquema de VMD, no nos dice cuanto debería valer el vértice entre dos piones y dos mesones ρ , pero es gracias a que sabemos que este canal junto con los anteriores forman un conjunto invariante de norma que lo podemos conocer. Para ello propongamos que la

amplitud de este proceso es

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{rC\mu} = & \left(-\frac{iem_\rho^2}{g_\rho} \delta_{\mu\beta} \right) (ig_{\rho\pi\pi}) (P[q, \rho] - P[q, \rho']) P[s_{34}, \rho] (-g^{\beta\gamma}) (ig_{\rho\rho\pi\pi} T_{\gamma\delta}) \\ & (-g^{\delta\eta} + F[\rho] s_{34}^\delta s_{34}^\eta) r_{43\eta}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

en donde desconocemos a la constante de acoplamiento $g_{\rho\rho\pi\pi}$ (acoplamiento entre dos piones y dos ρ) así como al tensor $T_{\gamma\delta}$, que es la estructura del vértice para estas 4 partículas. Ahora bien, invariancia de norma nos dice que si consideramos la amplitud del decaimiento del mesón ρ^0 inicial por los canales A , B y C , sí sustituimos su vector de polarización por su momento (q^μ), se debe cumplir que

$$q^\mu (\mathcal{M}_{rA\mu} + \mathcal{M}_{rB\mu} + \mathcal{M}_{rC\mu}) = 0. \quad (6.15)$$

Haciendo la operación $q^\mu (\mathcal{M}_{rA\mu} + \mathcal{M}_{rB\mu})$ sin tomar los factores que vienen del ρ^0 inicial en las expresiones 6.11 y 6.13, se obtiene como resultado

$$\begin{aligned} q^\mu (\mathcal{M}_{rA\mu} + \mathcal{M}_{rB\mu}) = & g_{\rho\pi\pi}^3 [2\text{PS}[q - p_1] q \cdot p_1 (q - p_1 + p_2)_\delta - P[s_{12}, \rho] \\ & \{q \cdot (s_{34} - s_{12}) (r_{12\delta} + F[\rho] \Delta s_{12\delta}) + q_\delta (-\Delta + F[\rho] \Delta s_{12}^2) - q \cdot (r_{12} + F[\rho] \Delta s_{12}) s_{34\delta}\}] D_{34}^\delta; \end{aligned} \quad (6.16)$$

aquí $\Delta \equiv m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2$ y $D_{34}^\delta = P[s_{34}, \rho] (-r_{43}^\delta + F[\rho] \Delta s_{34}^\delta)$. Igualando esto, gracias a la ecuación 6.15, con $-q^\mu (\mathcal{M}_{rC\mu})$ y tomando en cuenta la expresión (6.14) encontramos que

$$\begin{aligned} g_{\rho\rho\pi\pi} T_{\gamma\delta} = & g_{\rho\pi\pi}^2 [2\text{PS}[q - p_1] p_{1\gamma} (q - p_1 + p_2)_\delta - P[s_{12}, \rho] \\ & \left\{ (s_{34} - s_{12})_\gamma (r_{12\delta} + F[\rho] \Delta s_{12\delta}) + (-\Delta + F[\rho] \Delta s_{12}^2) g_{\gamma\delta} - (r_{12\gamma} + F[\rho] \Delta s_{12\gamma}) s_{34\delta} \right\}]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Con esto tenemos una expresión para la amplitud de este diagrama, pues conocemos todos los elementos para la expresión 6.14 y por la misma construcción garantizamos que los tres canales anteriores cumplen con la invariancia de norma; y debido a que cada combinación de cargas, resultante del intercambio de las partículas tiene su correspondiente contraparte en cada uno de los tres diagramas presentados hasta ahora, también estas permutaciones son invariantes de norma.

- Canal D.

El canal D, presentado en la Figura 6.5, según los datos presentados por BaBar [79] es el canal más importante para energías menores de 1 GeV. Este canal se lleva a cabo por el decaimiento del mesón ρ inicial en un mesón ω y un pión, posteriormente el mesón ω emite otro pión y un segundo mesón ρ , el cual finalmente decae en los dos últimos piones. Este canal, al cual nos referiremos también como canal de la ω , se ha visto que podría tener otro diagrama que involucrara un término de contacto; pero no lo consideraremos en este trabajo, pues como lo hemos estudiado extensamente en el capítulo 5, podemos incluir de manera

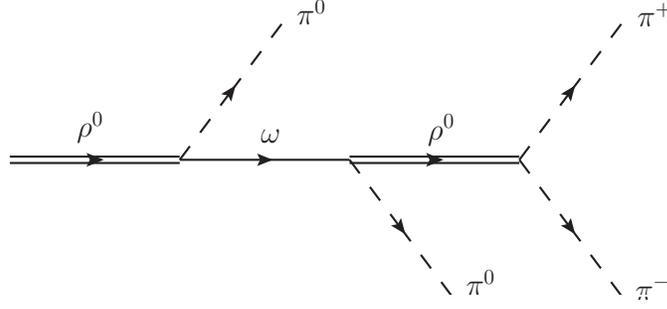


Figura 6.5: Canal D para la producción de 4 piones: $\rho \rightarrow \pi\omega \rightarrow \pi\rho\pi \rightarrow 4\pi$.

efectiva en la constante de acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$ la contribución de este diagrama y las demás contribuciones debidas a otras resonancias [82].

La amplitud para este canal está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{rD\mu} = & -2 \left(-\frac{iem_\rho^2}{g_\rho} \delta_{\mu\alpha} \right) (ig_{\rho\pi\pi}) ((ig_{\omega\rho\pi}) P[q, \rho] - (ig_{\omega\rho'\pi}) P[q, \rho']) P[q - p_2, \omega] \\ & \{P[s_{13}, \rho] + P[s_{14}, \rho] + P[s_{34}, \rho]\} \epsilon^\alpha_{\xi\theta\gamma} \epsilon_{\phi\eta\sigma}^\gamma q^\xi p_1^\phi p_2^\theta p_3^\eta p_4^\sigma. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Es evidente que esta expresión es invariante de norma por sí misma; fijemos nuestra atención en los tensores Levi-Civita; al contraer esta expresión con el momento q^μ tendríamos que

$$q^\mu \mathcal{M}_{rD\mu} \propto \epsilon_{\mu\xi\theta\gamma} \epsilon_{\phi\eta\sigma}^\gamma q^\mu q^\xi p_1^\phi p_2^\theta p_3^\eta p_4^\sigma, \quad (6.19)$$

como podemos apreciar el momento q es par ante el intercambio de los índices μ y ξ , sin embargo estos índices pertenecen al mismo Levi-Civita, que es impar ante el intercambio de cualquiera de sus cuatro índices, por lo que esta expresión es automáticamente cero.

- Canal E.

El canal E, presentado en la Figura 6.6, se efectúa por la emisión de un pión y un mesón a_1 , el cual emite a su vez un pión y un mesón ρ , que finalmente decae en otros dos piones. La expresión para la amplitud de este canal es

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{rE\mu} = & \left(-\frac{iem_\rho^2}{g_\rho} \delta_{\mu\xi} \right) (ig_{a\rho\pi})^2 (ig_{\rho\pi\pi}) (P[q, \rho] - P[q, \rho']) P[q - p_1, a] P[s_{34}, \rho] \\ & (-g^{\xi\alpha}) \{q \cdot (q - p_1) g_{\alpha\beta} - q_\beta (q - p_1)_\alpha\} (-g^{\beta\gamma} + F[a] (q - p_1)^\beta (q - p_1)^\gamma) \\ & \{s_{34} \cdot (q - p_1) g_{\gamma\delta} - s_{34\gamma} (q - p_1)_\delta\} (-g^{\delta\eta} + F[\rho] s_{34}^\delta s_{34}^\eta) r_{43\eta}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Al hacer de nuevo la contracción con el momento del mesón ρ^0 para checar invariancia de norma tenemos que

$$\begin{aligned} q^\mu \mathcal{M}_{rE\mu} \propto & [(s_{34} \cdot (q - p_1)) (q \cdot (q - p_1)) (q \cdot r_{43}) - (r_{43} \cdot (q - p_1)) (q \cdot (q - p_1)) (q \cdot s_{34}) + \\ & ((s_{34} \cdot p_1) (q \cdot r_{43}) - (r_{43} \cdot p_1) (q \cdot s_{34})) (q \cdot (q - p_1))], \end{aligned} \quad (6.21)$$

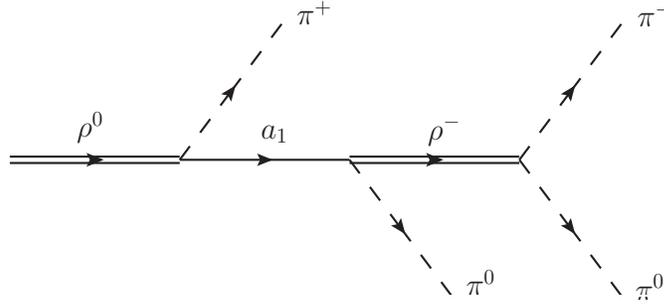


Figura 6.6: Canal E para la producción de 4 piones: $\rho \rightarrow \pi a_1 \rightarrow \pi \rho \pi \rightarrow 4\pi$.

que puede verificarse de manera directa que es idénticamente igual a cero.

- Canal F.

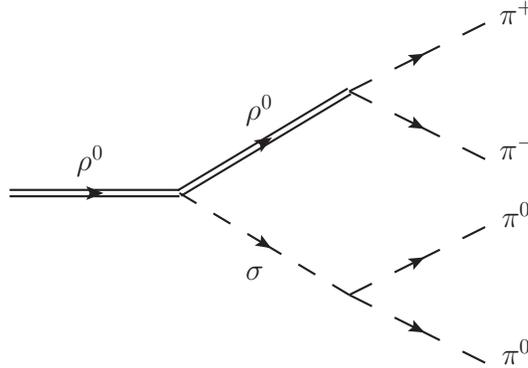


Figura 6.7: Canal F para la producción de 4 piones: $\rho \rightarrow \rho\sigma(f_0) \rightarrow 4\pi$.

En la Figura 6.7 presentamos el diagrama correspondiente al canal F, que procede por la emisión de un mesón ρ y un mesón $\sigma(600)$ (o $f_0(980)$) por parte del mesón ρ original, y luego por el decaimiento de ambos a dos piones cada uno. Este canal en particular carece de intercambios de momento debido a que los dos piones neutros provienen del mismo vértice y además hemos ignorado el vértice del mesón ρ^0 en piones neutros. Para este canal la amplitud viene dada por

$$\mathcal{M}_{rF\mu} = \left(-\frac{iem_\rho^2}{g_\rho} \delta_{\mu\alpha} \right) (ig_{\rho\rho\sigma}) (ig_{\rho\pi\pi}) (ig_{\sigma\pi\pi}) (P[q, \rho] - P[q, \rho']) P[s_{13}, \rho] P[s_{24}, \sigma] \{q \cdot s_{13} r_{31}^\alpha - q \cdot r_{31} s_{31}^\alpha\}. \quad (6.22)$$

Es evidente, sí se considera el último renglón, que la expresión 6.22 es invariante de norma pues si hacemos la contracción con q^μ tenemos

$$q^\mu \mathcal{M}_{rE\mu} \propto \{q \cdot s_{13} q \cdot r_{31} - q \cdot r_{31} q \cdot s_{31}\} = 0. \quad (6.23)$$

- Canal G.

El último canal considerado en este trabajo lo presentamos en la Figura 6.8, que se realiza por la emisión de dos piones por parte del fotón correspondiente a la parte leptónica, seguido de la emisión de un pión y un mesón σ , seguido del decaimiento del mesón σ en dos piones mas. Siguiendo el trabajo de G. Ecker, et al. [80] en este diagrama no hemos considerado la transmutación del fotón en un mesón ρ (o ρ').

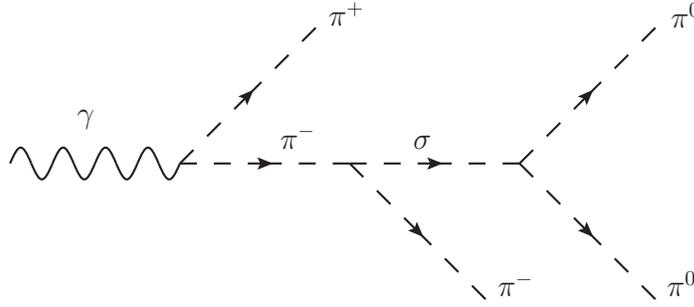


Figura 6.8: Canal G para la producción de 4 piones: $\pi\pi \rightarrow \pi\pi\sigma(f_0) \rightarrow 4\pi$.

La expresión para su amplitud está dada por

$$\mathcal{M}_{rG\mu} = 2 (ig_{\sigma\pi\pi})^2 (ie) (P[q, \rho] - P[q, \rho']) PS[q - p_1] P[s_{24}, \sigma] \left(p_{1\mu} - \frac{q \cdot p_1}{q \cdot p_3} p_{3\mu} \right), \quad (6.24)$$

el cual se ha construido explícitamente invariante de norma. Este hecho es trivial, fíjese en el último factor en dicha expresión, el cuál al ser contraído con el momento del fotón q^μ da por resultado

$$q^\mu \mathcal{M}_{rG\mu} \propto \left(q \cdot p_1 - \frac{q \cdot p_1}{q \cdot p_3} q \cdot p_3 \right), \quad (6.25)$$

que evidentemente se anula. El término $-\frac{q \cdot p_1}{q \cdot p_3} p_{3\mu}$ no aparece en las reglas de Feynman que nosotros hemos considerado, sin embargo éste debe ser introducido porque, como podemos ver en [80] este diagrama pertenece a un conjunto de procesos que es invariante de norma, los cuales en el esquema de VMD no pueden reproducirse; sin embargo, podemos considerar un término de contacto que al sumar con el diagrama aquí presentado lo vuelva invariante de norma, y éste es precisamente el término que hemos introducido.

Además, tenemos la posibilidad de que el canal G se lleve a cabo por un mesón $f_0(980)$, en lugar del mesón $\sigma(600)$; debido a que el proceso para este mesón es exactamente igual que el diagrama presentado aquí, hemos nombrado a este último canal como G'.

En este estudio hemos considerado que el ancho del mesón $\rho(770)$ es dependiente de la energía, lo cual en principio es valido para las demás partículas, sin embargo en el caso del mesón ω el ancho es demasiado pequeño como para tener un efecto importante, y en los casos de los mesones σ , f_0 y a_1 se tiene un error más importante debido a las incertidumbres experimentales de los anchos correspondientes.

6.2. Sección Eficaz para el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$.

A continuación calculamos la sección eficaz (σ) para el proceso de producción $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$. Para ello partiremos de la expresión [1]

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4\sqrt{(k_1 \cdot k_2)}} |\mathcal{M}_T|^2 d\Phi, \quad (6.26)$$

en donde $d\Phi$ es la diferencial de espacio fase. $|\mathcal{M}_T|^2$ está dada por

$$|\mathcal{M}_T|^2 = \frac{1}{s^2} l^{\mu\nu} h_{\mu\nu}; \quad (6.27)$$

en donde el factor $\frac{1}{s^2}$ es debido al propagador del fotón; $l^{\mu\nu}$ es el tensor proveniente de la parte leptónica dado por la expresión 6.5, y $h_{\mu\nu}$ es la parte hadrónica que se calcula a partir de las amplitudes de los diagramas anteriormente presentados.

La elección para las variables cinemáticas que hicimos, está basada en el trabajo de Kumar [83], en donde se hace un análisis completo del espacio fase covariante para la producción y el decaimiento en n cuerpos (en nuestro caso $n = 4$). En dicho trabajo se trabaja con variables cinemáticas del tipo Mandelstam para poder hacer una integración sistemática para el caso general. Sin embargo, hay que notar que entre la definición para sección eficaz dada en 6.26 y el espacio fase definido en [83] hay un factor de $\frac{1}{(2\pi)^{12}}$ por el cual tenemos que multiplicar los resultados en esta ultima referencia para poder trabajar con la ecuación que presentamos arriba. Esto nos lleva finalmente a tener la siguiente expresión para la sección eficaz total

$$\begin{aligned} \sigma(s) = & \int_{s_{1-}}^{s_{1+}} ds_1 \int_{s_{2-}}^{s_{2+}} ds_2 \int_{u_{1-}}^{u_{1+}} du_1 \int_{u_{2-}}^{u_{2+}} du_2 \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} dt_0 \int_{t_{1-}}^{t_{1+}} dt_1 \\ & \int_{t_{2-}}^{t_{2+}} dt_2 \frac{1}{4(2\pi)^8 \sqrt{k_1 \cdot k_2}} |\mathcal{M}_T|^2 FEF. \end{aligned} \quad (6.28)$$

En esta expresión las variables t_2 , t_1 , t_0 , u_2 , u_1 , s_2 y s_1 son las variables que se proponen en [83] para trabajar con el espacio fase ^e y FEF es un factor debido a esta elección de variables^f.

^eLas definición de variables y límites que se utilizaron se muestran de manera explicita en el Apéndice I.

^fVéase la ecuación I-2.

Finalmente, para poder obtener un resultado numérico de la sección eficaz total de este proceso se hizo un programa en FORTRAN, el cual puede calcular la integral de la ecuación 6.28 con ayuda de una sub-rutina llamada VEGAS [84].

Hemos dicho que en los diagramas necesarios para calcular la sección eficaz del proceso de producción a 4 piones es necesario incluir la presencia del mesón ρ' junto con el mesón ρ resultante de la aniquilación de par electrón-positrón; lo que resulta en la necesidad de conocer las constantes de acoplamiento del primero con las demás partículas. Dichas cantidades, como hemos mencionado anteriormente, no se conocen en la actualidad. Para continuar con nuestro estudio, al igual que en el capítulo anterior, hemos hecho la hipótesis de que las razones de constantes de acoplamiento anulan la información de la resonancia a la que pertenecen y por lo tanto son iguales para las diferentes resonancias. Por ejemplo en el diagrama B, las constantes que refieren a la unión del fotón con el mesón ρ y el vértice entre los 3 mesones ρ (véase ec. 6.13) y las correspondientes para el mesón ρ' , cumplen la relación

$$\frac{m_{\rho'}^2}{g_{\rho'}} g_{\rho'\pi\pi} = \frac{m_{\rho}^2}{g_{\rho}} g_{\rho\pi\pi}. \quad (6.29)$$

Similarmente, hemos supuesto que los vértices triples entre mesones ρ' y $\rho' - \rho$, son iguales al de los mesones ρ .

El proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ a través del canal del mesón ω .

Gracias a resultados de las colaboraciones BaBar (preliminares) [81] y SND [56], de la sección eficaz para el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ exclusivamente por el canal del mesón ω (canal D, en nuestra notación), hemos sido capaces de encontrar un valor para la constante $g_{\omega\rho'\pi}$. Para esto hemos dejado el parámetro $g_{\omega\rho'\pi}$ en la expresión 6.18 como parámetro libre, fijando el acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$. Ajustado nuestros resultados para la sección eficaz con los datos experimentales, hemos obtenido los resultados presentados en la Figura 6.9, en donde se muestran los resultados de ambos experimentos, junto con los ajustes realizados.

En nuestro estudio hemos encontrado que $g_{\omega\rho'\pi} = 10.2 \text{ GeV}^{-1}$ da el mejor ajuste para los datos de BaBar, y $g_{\omega\rho'\pi} = 10.8 \text{ GeV}^{-1}$ reproduce mejor datos de SND. Los ajustes fueron realizados por medio del parámetro χ^2 para la bondad de ajuste (véase Apéndice H). La constante $g_{\omega\rho'\pi}$ que hemos reportado, es para la que encontramos un valor mínimo del parámetro χ^2 . La calidad de ajuste, dada por la razón $\chi^2/\# \text{ grados de libertad}$, que obtuvimos para los experimentos SND y BaBar correspondientemente fue de 0.119 y 0.386 ^g.

Dado que los datos de SND no cubren el rango de energía utilizado por nosotros, hemos decidido utilizar el valor proveniente del ajuste a los datos de BaBar, pero asignando una

^gLa incertidumbre de los datos experimentales para SND son del orden del 20% y no son mostrados aquí, por lo que pareciera que su χ^2 debería ser mucho mayor pero no lo es.

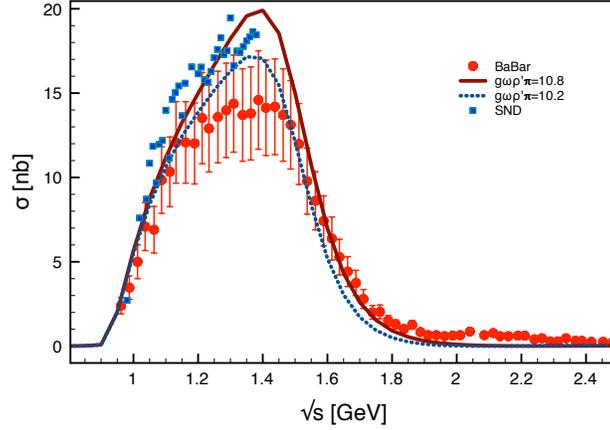


Figura 6.9: Ajuste a la sección eficaz para el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ debida exclusivamente al canal D .

incertidumbre que abarque también el valor obtenido para SND; así nuestro valor definitivo para esta constante es

$$g_{\omega\rho'\pi} = 10.2 \pm 0.6 \text{ GeV}^{-1}. \quad (6.30)$$

6.2.1. Resultados de la Sección Eficaz para el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$.

El primer resultado que presentamos es la sección eficaz total por canal. En la Figura 6.10, mostramos la sección eficaz obtenida para los canales A, C, E, F, G y G' y su respectiva suma (considerando la interferencia que existe entre los canales). Como se puede ver en dicha figura, estos canales contribuyen en la región de bajas energías (menos de 1 GeV), pero son muy suprimidos para el resto de las energías. La comparación con datos de BaBar muestra que la contribución de la suma de estos canales (línea marcada con el símbolo \diamond) tiene una contribución que es alrededor de un orden de magnitud menor.

Como se muestra en dicha figura, hemos encontrado que el canal que presenta las barras de error más grandes (alrededor del 200 %) es el canal G (marcado con el símbolo \blacktriangledown), el cual contiene a la partícula $\sigma(600)$, esto se debe a que los parámetros de la misma (masa y ancho) presentan una incertidumbre considerable y esto se ve reflejado en la incertidumbre de la sección eficaz. Los siguientes canales en presentar una incertidumbre importante son los canales F y G' (señalados con \blacklozenge y $+$) con un valor del 67% y 90% respectivamente; sin embargo, debido a que son los dos canales mas fuertemente suprimidos este hecho no es relevante al considerar la suma de todos ellos.

Los canales A, C y E tienen una incertidumbre del 14.6, 14.7 y 15.7% respectivamente, la cual se encontró variando los parámetros de masas y anchos de las partículas involucradas.

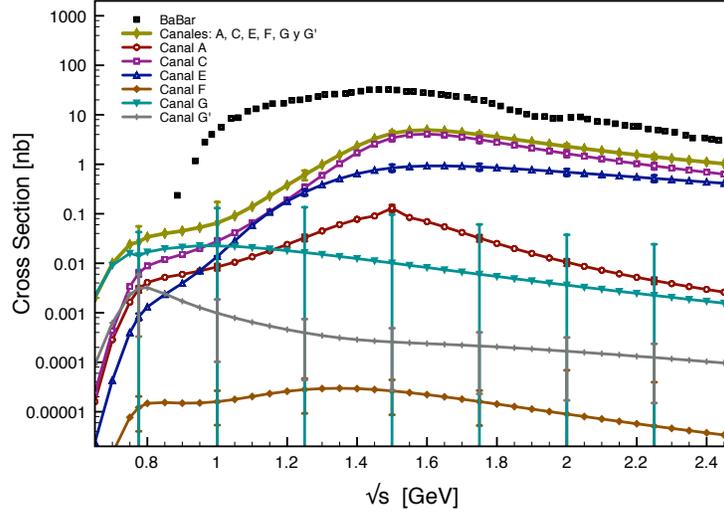


Figura 6.10: Resultados para la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ para los canales A, C, E, F, G y G'.

Los canales B y D los mostramos en la Figura 6.11. Como se puede ver en dicha figura el canal del mesón ω (D), es el que mas contribuye a bajas energías (entre 0.65 y 1.4 GeV); mientras que el canal B –el cual mostramos aquí para diferentes valores del parámetro β – es el que contribuye de manera mas importante en altas energías (entre 1.4 y 2.5 GeV).

En el caso del canal del mesón ω (D), se puede ver que la contribución del mesón ρ y el ρ' tienen una interferencia destructiva, la cual hace que la sección eficaz decaiga rápidamente, hasta llegar a un mínimo para una energía alrededor de 2.1 GeV, después crece uno o dos ordenes de magnitud, pero queda muy por debajo de todos los demás canales a ese orden de energías (entre 2.1 y 2.5 GeV), por lo que es irrelevante. Debido a la combinación de constantes de acoplamiento que tiene este canal ($g_{\omega\rho\pi}$ y $g_{\omega\rho'\pi}$), las cuales tienen diferentes barras de error asociadas, la incertidumbre de este canal depende de la energía, y ésta varía entre un 8% y un 15% para el rango total de energías que hemos considerado.

En lo referente al canal B, podemos ver que en particular para la elección de $\beta = 2$ se asemeja a los datos experimentales dentro de un rango de energías entre 1.8 y 2.5 GeV, y debido a que este es el canal que mas contribuye a altas energías esperaríamos que al sumar todos los canales este resultado no varíe mucho del presentado aquí. El error encontrado para este canal es de un 13%. Para determinar con una mayor exactitud que valor de β reproduce los datos experimentales se realizó un ajuste sobre este parámetro; el cual es nuestro valor definitivo para este parámetro. El resultado de este ajuste es

$$\beta = 1.95 \pm 0.15; \quad (6.31)$$

con un parámetro $\chi^2/\# \text{ grados de libertad} = 0.30$.

En [79] han estudiado el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ por una aproximación diferente, en

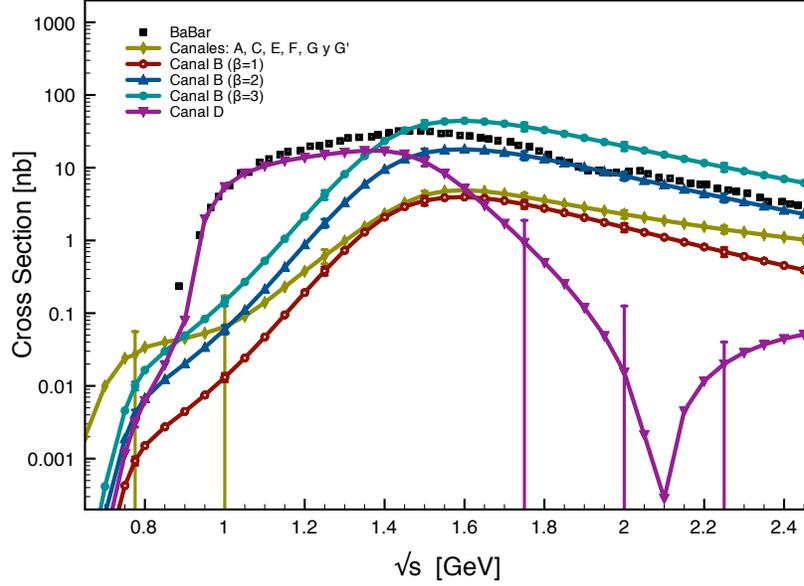


Figura 6.11: Resultados para la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ para los canales B (para varios valores del parámetro β), D y la suma de los canales anteriores.

particular lo que ellos llaman la contribución del canal ρ es dado por diagramas similares a los presentados aquí para el canal B y C, con diferentes constantes de acoplamiento (véase la ecuación A.8 del mismo). En este trabajo Czyz, et al. muestran la contribución de su llamado canal ρ en comparación con los datos de BaBar [81] obtenidos para la sección eficaz. En su aproximación ellos utilizan una constante de acoplamiento global la cual ajustan a los datos experimentales, así como el ancho de decaimiento tanto del mesón ρ como del ρ' . Nuestros resultados no son directamente comparables con ellos, debido a que nuestras constantes de acoplamiento están fijas por otros procesos, según el esquema de VMD y por el hecho de que la contribución de los canales B y C, en nuestra aproximación no estaría completa sin el proceso A, ya que estos tres diagramas son un conjunto invariante de norma y no podemos presentarlos separados. Sin embargo, en la Figura 6.12 mostramos nuestro resultado para la suma de los diagramas A, B (con $\beta = 1.95$) y C; con lo que en [79] llaman la contribución del canal ρ . La diferencia podría provenir del hecho de que en [79] se menciona que han tenido problemas al extraer esta contribución y que no les es clara la interferencia de ésta con los demás canales; a pesar de esto se puede observar un comportamiento similar para ambos resultados, ambas gráficas llegan a un máximo alrededor de los 1.6 GeV de energía después de lo cual decrecen monótonamente.

El resultado final para la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ está dada en la Figura 6.13, en donde las barras de error fueron calculadas en cuadraturas. Aquí se puede apreciar que el resultado para la sección eficaz es sensible al cambio del parámetro β de manera similar a lo que observamos en el proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$.

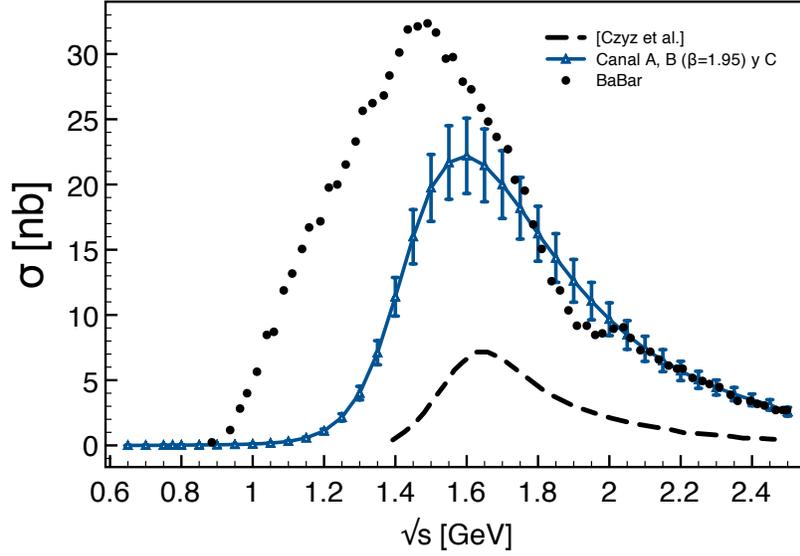


Figura 6.12: Resultados de la contribución para la sección eficaz diferencial del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ de la suma de los canales A, B (con $\beta = 1.95$) y C en nuestra aproximación y la contribución obtenida por [79], a la cual llaman el canal del ρ .

En dicha figura se puede ver que la elección para el valor $\beta = 1.95$ reproduce dentro de las barras de error los resultados experimentales en donde este canal es importante (entre 1.6 y 2.5 GeV). Sin embargo para el rango entre 1.1 y 1.6 GeV no se ha logrado reproducir los resultados dados por BaBar en valor central, pero si lo hace dentro de las barras de error. Debido a que en esta región el canal B, que es el que depende del parámetro β no es el canal dominante, el cambiar dicho parámetro no ayudaría a que nuestro resultado se acercara a los datos centrales de BaBar; podemos pensar que la diferencia se debe a que no hemos incluido otras resonancias ya sea en conjunto con el mesón ρ y ρ' provenientes del fotón, o también en lugares como en el decaimiento del mesón ω en un mesón ρ y un π en el canal del mesón ω (canal D). La interferencia de estas resonancias pudiera ser considerable y podría mejorar nuestros resultados. Otra opción es que los resultados utilizados para el ajuste de la constante $g_{\omega\rho'\pi}$ en la sección correspondiente pudieran diferir en un estudio experimental mas refinado, y esto podría causar que la constante $g_{\omega\rho'\pi}$ variara de manera que mejorara nuestro resultado para la sección eficaz.

Finalmente, en la Figura 6.14 se puede observar que para la región de energías menores a 1 GeV, los datos son bien reproducidos por nuestros resultados.

6.2.2. El factor de forma eléctrico y el mdm.

De la Ecuación 3.18, sabemos que la magnitud del dipolo magnético está relacionada directamente al parámetro β en unidades de $\frac{e}{2m_\rho}$, sin embargo para garantizar que el parámetro

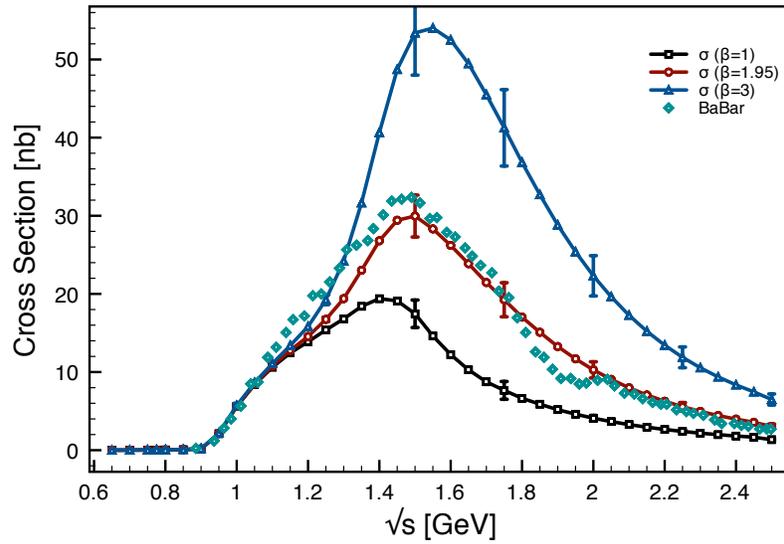


Figura 6.13: Resultados para la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, obtenida por la suma de todos los canales presentados anteriormente y comparada con datos experimentales de BaBar [81].

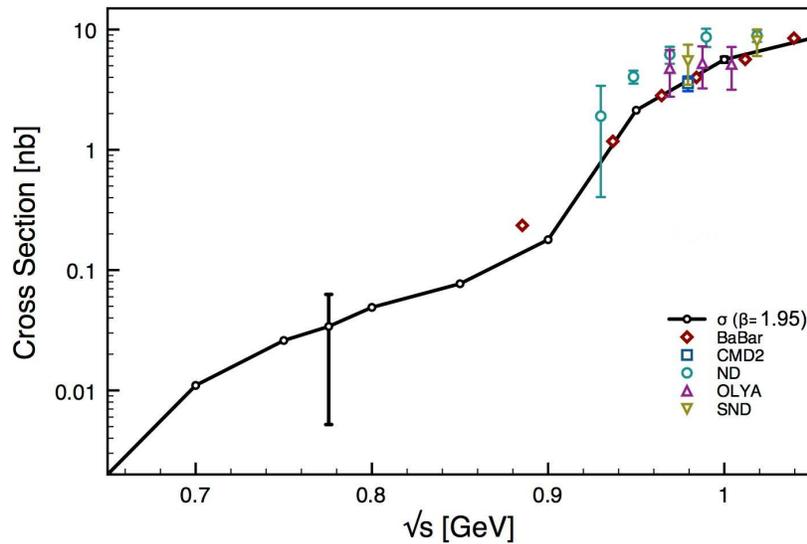


Figura 6.14: Nuestro resultado para la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ en la región de energías entre 0.65 y 1 GeV, comparado con datos de diversos experimentos [81].

β esté en unidades de e necesitamos hacer una renormalización. Para esto nos ayudaremos del factor de forma de la carga eléctrica. Este factor de forma para el mesón ρ ($F_\rho(q^2)$) se obtiene a partir de las reglas de Feynman utilizadas en la expresión 6.13, utilizando sólo el primer término del vértice entre 3 mesones ρ , y tiene la forma

$$F_\rho(q^2) = \frac{g_{\rho\pi\pi}m_\rho^2}{g_\rho} \left[\frac{1}{q^2 - m_\rho^2 + im_\rho\Gamma_\rho} - \frac{1}{q^2 - m_{\rho'}^2 + im_{\rho'}\Gamma_{\rho'}} \right]. \quad (6.32)$$

Dicha expresión debe cumplir que en el límite cuando $q^2 \rightarrow 0$, $F_\rho(q^2) \rightarrow -1$; lo cual nos da la siguiente relación entre las constantes de acoplamiento y las masas de las partículas

$$\frac{g_{\rho\pi\pi}}{g_\rho} \left(\frac{m_{\rho'}^2 - m_\rho^2}{m_{\rho'}^2} \right) = 1. \quad (6.33)$$

En nuestro caso esta igualdad no se cumple definitivamente, usando las cantidades listadas en el Apéndice E, obtenemos que el lado izquierdo de la expresión 6.33 es igual a 0.86. Por lo que debemos realizar una renormalización sobre el grupo de canales A, B y C, que sabemos son invariantes de norma. Esto garantiza que la carga eléctrica es exactamente 1 y que tanto el parámetro β , como los demás multipolos están en unidades de e . Por lo tanto nuestro resultado final para el mdm es

$$|\bar{\mu}| = \frac{1}{.86}\beta = \frac{1}{.86} * (1.95 \pm 0.15) = 2.27 \pm .17 \left[\frac{e}{2m_\rho} \right]. \quad (6.34)$$

Las barras de error para esta cantidad han sido obtenidas por medio de estimar cual sería el valor de β para reproducir los extremos de las barras de error de la sección eficaz total para el proceso de producción de los 4 piones, considerando el valor central de todas las otras constantes de acoplamiento y demás parámetros como masas y anchos para las demás partículas.

6.3. Distribución Angular del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$.

Como hemos visto el canal B es el proceso más importante para energías de mas de 1.5 GeV en el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$. Así mismo, podemos darnos cuenta que a una energía de 1.6 GeV este canal tiene un máximo, por lo que si queremos ver la distribución angular del proceso de producción a 4 piones a esta energía, basta con hacer el estudio sobre este canal, pues las contribuciones de los demás es despreciable. Este estudio lo hacemos debido a que, como se estudió en el capítulo 4, los mesones ρ producidos en este canal tienen una dirección preferida; por lo que esperamos encontrar un máximo en la distribución angular para la sección eficaz en el proceso de 4 piones de la misma manera que en la emisión de los 2 mesones ρ .

Para realizar este estudio haremos primero un cambio de variable para introducir el ángulo entre el 4-momento del positrón (k_1) y el momento que lleva el mesón ρ^- , que se obtiene de la suma de los 4-momentos de los piones (en este caso de la suma de $(p_3 + p_4)$). Una vez hecho este cambio calcularemos la sección eficaz diferencial con respecto a este ángulo, la cual veremos si presenta un máximo con respecto a ésta; esto lo haremos para diferentes valores del parámetro β para ver también la sensibilidad de la sección eficaz diferencial tiene antes este parámetro.

La relación que nos permite hacer el cambio de variable está dada por

$$k_1 \cdot (p_3 + p_4) = E_e(E_3 + E_4) - |\vec{k}_1| |\vec{p}_3 + \vec{p}_4| \cos\theta, \quad (6.35)$$

aquí E_i son las energías del positrón, y los piones correspondientes; \vec{k}_1 es el 3-momento del positrón; \vec{p}_3 y \vec{p}_4 los 3-momentos correspondientes a los piones y θ es el ángulo que forman los momentos del positrón y del mesón ρ^- (Fig. 6.3). Con ayuda de las variables definidas en la sección anterior y considerando que estamos en el marco de centro de masa, podemos obtener la siguiente expresión para la variable θ

$$\cos\theta = \frac{m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^0}^2 - 2s + s_1 - 2(t_0 + t_1) + u_1}{\sqrt{-4ss_2 + (m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^0}^2 - s_1 - u_1)^2}}. \quad (6.36)$$

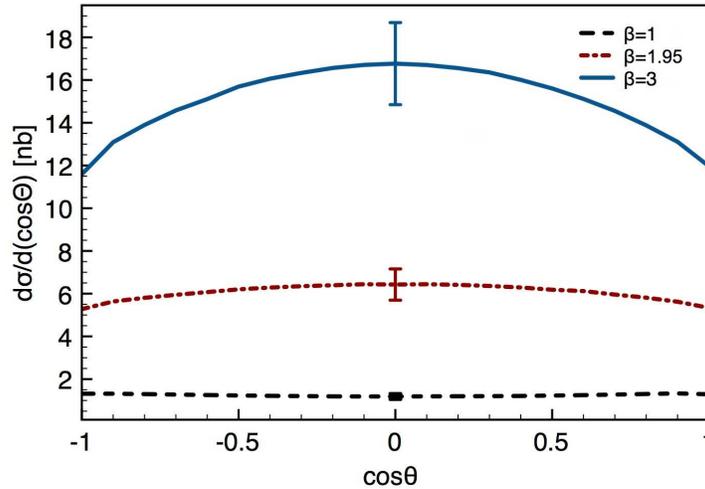


Figura 6.15: Resultados para la sección eficaz diferencial del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$.

A partir de esta expresión podemos despejar en favor de la variable t_1 debido a que es la más interna en la expresión 6.37. Esto permite modificar el programa de manera que la integral sobre t_1 sea reemplazada por una integral sobre la variable $\cos\theta$, la cual, al no realizarse da por resultado la sección diferencial con respecto a esta última variable. Entonces

podemos escribir que dicha sección eficaz diferencial está dada por ^h

$$\frac{\partial \sigma(q^2)}{\partial \cos\theta} = \int_{s_{1-}}^{s_{1+}} ds_1 \int_{s_{2-}}^{s_{2+}} ds_2 \int_{u_{1-}}^{u_{1+}} du_1 \int_{u_{2-}}^{u_{2+}} du_2 \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} dt_0 \int_{t_{2-}}^{t_{2+}} dt_2 \frac{1}{4(2\pi)^8 \sqrt{k_1 \cdot k_2}} |\mathcal{M}_T(t_1 \rightarrow \cos\theta)|^2 FEF. \quad (6.37)$$

Considerando una energía fija de $\sqrt{s} = 1.6$ GeV; la cual fue elegida debido a que en la gráfica de la sección eficaz total el canal B tiene su máximo al rededor de este valor, tenemos como resultado la Figura 6.15. Podemos ver en dicha figura que la distribución angular presenta un máximo a un ángulo de $\frac{\pi}{2}$, como se esperaba.

Si hacemos el mismo ejercicio que en el capítulo 4 de dividir la diferencia de máximos entre 6, encontramos que sí el experimento tuviera una precisión de 0.9nb podríamos distinguir las curvas por un factor de 3 desviaciones estándar. El valor para la incertidumbre es el mismo encontrado en la sección anterior para el canal B, que es de un 13% del valor central.

En el capítulo 4, se encontró que para poder distinguir experimentalmente las curvas para el proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$ para diferentes valores del parámetro β la precisión debía ser del orden de 0.06nb. Es decir en el proceso analizado en el capítulo 4, la precisión que debiera alcanzarse experimentalmente es de un orden de magnitud mayor, por lo que es preferible medir la sección eficaz diferencial $\frac{\partial \sigma(q^2, \cos\theta)}{\partial \cos\theta}$ en el proceso aquí presentado, que en el que involucra solo a los mesones ρ como estado final.

6.4. La razón de decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$.

La importancia de conocer las razones de decaimiento entre diferentes canales, como por ejemplo las de los canales $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ y $\rho^0 \rightarrow 2\pi^+2\pi^-$ (estudiado en [85] y [86]), radica en el hecho de que a partir de ellas se puede concluir qué tan validos son modelos que consideran la simetría de isoespín y qué tan grandes pueden ser los efectos del rompimiento de dicha simetría.

Si uno quisiera hacer el cálculo explícito del proceso de decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, éste procedería por los mismos canales presentados en la sección 6.1. Esto nos lleva a la conclusión de que las cantidades $BR(\rho^0 \rightarrow f)$ y $\sigma(e^+e^- \rightarrow f)$, donde f representa un estado final cualquiera, deben estar relacionadas de manera muy cercana, y de hecho lo están por medio de la expresión 6.38 presentada en [80]

$$BR(\rho^0 \rightarrow f) = \frac{m_\rho^2 \sigma(e^+e^- \rightarrow f)|_{E=m_\rho}}{12\pi BR(\rho^0 \rightarrow e^+e^-)}, \quad (6.38)$$

^hCompárese esta expresión con la ecuación 6.37, y note que aquí se ha suprimido la integración sobre la variable t_1 y al cambiar la dependencia de \mathcal{M}_T en dicha variable por la nueva $\cos\theta$ obtenemos la sección diferencial deseada.

en donde se ve que para conocer la cantidad $BR(\rho^0 \rightarrow f)$ es necesario conocer la sección eficaz $\sigma(e^+e^- \rightarrow f)$, evaluada en una energía igual a la masa de la partícula que decae (en este caso el mesón ρ). La cantidad $BR(\rho^0 \rightarrow e^+e^-) = 4.72 \pm 0.05 \times 10^{-5}$ es una cantidad conocida, medida por varios experimentos (véase [1] y referencias dentro del mismo).

Como se menciona en [85] la cantidad $BR(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0)$ es un poco más complicada que otras (como por ejemplo la correspondiente a $BR(\rho^0 \rightarrow 2\pi^+2\pi^-)$) debido a que en ésta se incluye precisamente el vértice de 3 ρ (canal B). También se dice explícitamente que esta cantidad debe tener una gran contribución del canal del mesón ω , que como sabemos de nuestros resultados para la sección eficaz, es el dominante a bajas energías, sin embargo como vemos en las Figuras 6.10 y 6.11, otros canales también tienen una contribución apreciable en este orden de energía, según nuestro modelo.

Los resultados para la sección eficaz total evaluada en el polo del mesón ρ son presentados en la Tabla 6.1, en donde especificamos las contribuciones por canal y el total para la misma. Para este cálculo sólo se ha usado el caso del canal B con el parámetro $\beta = 1.95$. Debido a que lo que analizamos en esta parte es solo el decaimiento del mesón ρ , no hemos considerado en esta parte que el fotón proveniente de la aniquilación pueda transmutar en un ρ' .

Canal	σ [nb]
A	0.00301 ± 0.00045
B ($\beta = 1.95$)	0.00415 ± 0.0005
C	0.00634 ± 0.001
D	0.00313 ± 0.0004
E	0.00083 ± 0.00013
F	$1.22 \times 10^{-5} \pm 8.2 \times 10^{-6}$
G	0.0141 ± 0.0286
G'	0.00313 ± 0.0028
Total	0.0347 ± 0.028

Tabla 6.1: Contribuciones por canal y σ total para el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ evaluada a $\sqrt{s} = 775.5$ MeV.

Utilizando el dato para la sección eficaz total mostrado en la Tabla 6.1 y la Ecuación (6.38) obtenemos que la razón de decaimiento tiene un valor de

$$BR(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0) = 2.86 \pm 2.36 \times 10^{-5}; \quad (6.39)$$

el cual está en acuerdo con lo reportado experimentalmente $BR(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0) = 1.6 \pm 0.76 \times 10^{-5}$ [1]. En este caso las grandes barras de error son debidas a la presencia del mesón $\sigma(600)$ (canal G), del cual sabemos no se tiene gran control sobre sus parámetros de masa y anchura. Podemos hacer el ejercicio de determinar cuánto sería el valor de esta razón sin considerar el canal G, esto con el fin de tener una idea de cómo se afecta en la incertidumbre de nuestro resultado este canal y de cuánto podría mejorar nuestro resultado de tener mas

restringidos los parámetros para el mesón $\sigma(600)$. El resultado para la sección eficaz sin dicho canal tiene un valor de

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0)|_{E=m_\rho} = 0.0206 \pm 0.003 \quad (\text{sin } \sigma(600)), \quad (6.40)$$

con lo cual, la razón de decaimiento tiene un valor de

$$BR(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0) = 1.78 \pm 0.3 \times 10^{-5} \quad (\text{sin } \sigma(600)); \quad (6.41)$$

que cómo se puede observar también está en acuerdo con el valor experimental; lo cual nos hace pensar que el canal de la $\sigma(600)$ no es necesario, pues no aporta nada que los otros canales no puedan explicar, sería necesario un estudio más detallado en este aspecto para ver bajo que condiciones se tiene que considerar el canal de la $\sigma(600)$ y si existen contratérminos que no hayamos considerado aquí y que limiten la aportación de este canal, además de que se necesita refinar las mediciones de los parámetros de esta partícula para poder determinar si efectivamente podemos descartar la contribución de este canal.

En [80] obtienen un resultado para esta razón dado por $BR(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0) = 5 \pm 2 \times 10^{-6}$; el cual queda por debajo del obtenido aquí y del presentado en el PDG; además de que sus barras de error son grandes, ya que asignaron un 40 % debido a las interferencias entre canales.

Con esto terminamos nuestro análisis del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, para el cual hemos encontrado, al igual que en trabajos previos como [79, 80], que este proceso puede llevarse a cabo por medio del intercambio de los siguientes mesones: π , $\sigma(600)$, $\rho(775)$, $\omega(782)$, $f_0(980)$, $a_1(1260)$ y $\rho'(1450)$; según los diagramas que hemos presentado. En [79] se comenta que la resonancia $\rho'(1450)$ fue introducida porque su modelo presentaba un mal comportamiento tanto a bajas (entre 0.65 y 1.6 GeV), como a altas energías (de 1.6 a 2.5 GeV); a diferencia de ellos, el esquema de VMD aquí utilizado, incluye a esta resonancia desde un principio y por lo mismo no observamos ningún mal comportamiento en nuestros resultados de la sección eficaz. Las conclusiones para este capítulo las presentamos en la sección a continuación como las conclusiones generales de nuestro estudio, en donde además hacemos una reseña de los resultados obtenidos en el presente trabajo.

Capítulo 7

Conclusiones.

En el presente trabajo hemos estudiado el proceso $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ con el fin de establecer un valor para el momento dipolar magnético del mesón ρ en el contexto del esquema de Dominancia Vectorial.

Con este fin hemos analizado el vértice electromagnético $VV\gamma$, en donde hemos visto que es necesario hacer la inclusión del parámetro de ancho de decaimiento (Γ) del mesón V de una manera congruente con la invariancia de norma electromagnética, para lo que hemos utilizado el esquema conocido como *Lazos Bosónicos*.

Como resultado de incluir el parámetro Γ , obtenemos una corrección a la estructura multipolar del vértice antes mencionado, y por lo tanto una corrección a los factores de forma del mesón ρ , tanto para el mdm como para la carga eléctrica y el cuadrupolo eléctrico; sin embargo, debido a que la carga eléctrica no puede recibir modificaciones, es necesario hacer una renormalización del vértice; con lo que obtenemos que mientras la carga eléctrica no sufre modificaciones, el mdm y el cuadrupolo eléctrico se ven modificados de la siguiente manera:

- Modificación al Factor de Forma del Dipolo Magnético

$$\beta_\rho(0) = 2 + i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \left(2 + \frac{3(\Sigma^2 - \Delta^2)}{M_\rho^2 \lambda} \right). \quad (7.1)$$

- Modificación al Factor de Forma del Cuadrupolo Eléctrico

$$\gamma_\rho(0) = i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \frac{M_\rho^2 \lambda (2\Delta^4 - M_\rho^2 (\Sigma^2 + \Delta^2)) + (\Sigma^2 - \Delta^2) (\Delta^4 - \Sigma^2 M_\rho^2)}{M_\rho^6 \lambda^2}. \quad (7.2)$$

Ambos divididos por la modificación al factor de forma para la carga eléctrica dado por

$$\alpha_\rho(0) = 1 + i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \left(1 - \frac{3(\Delta^4 - \Sigma^2 M_\rho^2)}{M_\rho^4 \lambda} \right). \quad (7.3)$$

Un resultado importante que hemos encontrado es que, debido a la renormalización que deben sufrir los campos para conservar invariancia de norma, ninguno de los multipolos recibe una modificación en la aproximación quiral, al contrario de lo que se marca comúnmente en la literatura, que dice deberían verse modificados por un factor $1 + i \frac{\Gamma}{m}$ [29]. Fuera de este límite la corrección debida al parámetro Γ , modifica la estructura de Lorentz induciendo una corrección al mdm y al $|X_E|$. Los resultados numéricos obtenidos para estos momentos multipolares del mesón ρ , son mostrados en la Tabla 7.1.

Multipolo	
Carga Eléctrica $ Q $	1 [e]
Dipolo Magnético $ \vec{\mu} $	$2 - 0.0091 \left[\frac{e}{2m_\rho} \right]$
Cuadrupolo Eléctrico $ X_E $	$1 - 0.0387 \left[\frac{e}{m_\rho^2} \right]$

Tabla 7.1: Momentos multipolares del mesón ρ incluyendo las correcciones a un lazo bosónico.

Antes de abordar el proceso de producción de 4 piones analizamos el proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$, ya que es un proceso más simple cinemáticamente hablando, que contiene al vértice $\rho\rho\gamma$, por lo que el proceso de 4 piones lo incluye como un subproceso en uno de sus canales. Para este proceso estudiamos la distribución angular entre los momentos del electrón y el mesón ρ^- , la cual encontramos presenta un máximo cuando dichos momentos son perpendiculares, es decir que los mesones ρ son preferentemente emitidos en un plano perpendicular al momento con el que incide el electrón. También encontramos que la sensibilidad de esta distribución ante la variación del parámetro β entre valores de 1, 2 y 3; era suficiente para poder distinguir las gráficas correspondientes a escala de *nanobarns* y que en particular la diferencia entre estas gráficas es mucho mas apreciable a una energía de alrededor de 2 GeV, si el ángulo se mantiene fijo en $\frac{\pi}{2}$.

En lo referente a la sección eficaz total para el proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$, encontramos que también se presenta un máximo para energías alrededor de 2 GeV. Al igual que en el caso de la distribución angular, se observó que las gráficas correspondientes a los distintos valores del parámetro β son distinguibles entre si en una escala de nanobarns.

Así como el proceso a dos mesones ρ es un subproceso del proceso a 4 piones, también el proceso de decaimiento del mesón ω en 3 piones es parte de éste; por lo que era necesario analizar con detalles cuales eran las constantes de acoplamiento entres los mesones ρ , ω y π ; y discutir si era necesario la inclusión de un término de contacto, o sí podíamos absorber de

manera efectiva su contribución (así como la de resonancias más pesadas) dentro de lo que llamamos el canal de la ρ ($\omega \rightarrow \rho\pi \rightarrow 3\pi$).

El estudio de las constantes de acoplamiento entre los mesones ρ , ω y π se realizó con el análisis de varios procesos:

- Procesos Radiativos.

Gracias al esquema de VMD pudimos relacionar los procesos $\omega \rightarrow \gamma\pi$, $\rho \rightarrow \gamma\pi$ y $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ con el decaimiento $\omega \rightarrow \rho\pi$. Con esto obtuvimos un rango de valores para la constante $g_{\omega\rho\pi}$, cuyo promedio pesado es igual a $11.9 \pm 0.2 \text{ GeV}^{-1}$.

- El decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$.

En nuestro estudio calculamos la razón de decaimiento del mesón ω en 3 piones considerando que este proceso podría ocurrir de tres maneras: a través del decaimiento del mesón ω en un mesón ρ y un π , seguido del decaimiento del mesón ρ a otros dos piones (canal del ρ). O por medio del canal del ρ más canales que requirieran de resonancias de más alto orden (en este trabajo sólo hemos considerado al mesón ρ'). O bien por medio del canal del ρ más un término de contacto.

Utilizando los diagramas correspondientes para cada caso se calculó la expresión para el ancho de decaimiento del mesón ω en 3 piones y se prosiguió de la siguiente manera. En el caso del canal ρ , se dejó como parámetro libre la constante de acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$, la cual se ajustó para reproducir el valor experimental del ancho de decaimiento. Al considerar que el decaimiento ω en 3 piones, se podía dar por medio del canal del ρ más un término de contacto, se calculó un valor para la constante de acoplamiento para el término de contacto con ayuda de la teoría quiral, dando por resultado $g_{3\pi} = -47 \text{ GeV}^{-3}$; usando esto se volvió a dejar como parámetro libre la constante $g_{\omega\rho\pi}$, la cual fue de nuevo ajustada para reproducir el valor experimental del decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$. Por último, cuando consideramos que el proceso $\omega \rightarrow 3\pi$ se podía llevar a cabo a través del canal del ρ más la resonancia ρ' , fue necesario considerar a esta última resonancia como un término de contacto efectivo, lo cual nos permitió obtener una constante de acoplamiento para este “término de contacto” en función de los acoplamientos de VMD, dando por resultado

$$|g'_{3\pi}| \approx \frac{g_{\omega\rho'\pi}g_{\rho'\pi\pi}}{m_{\rho'}^2}; \quad (7.4)$$

en donde fue necesario utilizar la aproximación $\frac{g_{\omega\rho'\pi}}{g_{\rho'\pi\pi}} = \frac{g_{\omega\rho\pi}}{g_{\rho\pi\pi}} = 2 \text{ GeV}^{-1}$, junto con el hecho de que $g_{\omega\rho'\pi}$ tiene un valor entre 10 y 18 GeV^{-1} [61]. Esto dio un valor numérico para $|g'_{3\pi}| = 49 \pm 24 \text{ GeV}^{-3}$. Al igual que en el caso anterior esto nos dejó con la constante $g_{\omega\rho\pi}$ como parámetro libre, y de nuevo se ajustó al ancho experimental $\Gamma(\omega \rightarrow 3\pi)$.

- El proceso $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$.

Al igual que en el caso del decaimiento del punto anterior, se consideró que este proceso se podía llevar a cabo por el canal del ρ , por el canal del ρ más un término de contacto, o por el canal del ρ más un término de contacto efectivo dado por resonancias mayores (ρ').

Considerando cada uno de los posibles canales y utilizando los valores arriba mencionados para las constantes de acoplamiento de los diferentes términos de contacto se obtuvo una expresión para la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$ que tenía como parámetro libre la constante de acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$, la cual fue ajustada a datos experimentales obtenidos por CMD2 [52] y SND [56].

Estos procesos nos dan como resultado final los valores mostrados en la Tabla 7.2, en los siguientes escenarios:

i) Sí asumimos sólo el canal del mesón ρ ; el cual corresponde a tomar los términos de contacto como nulos, obtenemos un promedio final de $g_{\omega\rho\pi} = 14.7 \pm 0.1 \text{ GeV}^{-1}$.

ii) Considerando el canal del mesón ρ más un término de contacto proveniente de la teoría quiral, tenemos que el promedio pesado de las columnas mostradas en la Tabla 7.2 son respectivamente $g_{\omega\rho\pi} = 11.7 \pm 0.1 \text{ GeV}^{-1}$.

iii) Finalmente tomando el canal del mesón ρ más el canal del mesón ρ' obtenemos un resultado final para $g_{\omega\rho\pi} = 11.9 \pm 0.2 \text{ GeV}^{-1}$.

	Canal del ρ	ρ + contacto quiral	$\rho + \rho'$
VMD _{τ}	11.9 ± 0.2	11.9 ± 0.2	11.9 ± 0.2
$\Gamma(\omega \rightarrow 3\pi)$	15.7 ± 0.1	12.8 ± 0.1	12.6 ± 1.3
$\sigma(e^+e^- \rightarrow 3\pi)$	13.3 ± 0.2	10.5 ± 0.1	10.3 ± 1.6
Promedio	14.7 ± 0.1	11.7 ± 0.1	11.9 ± 0.2

Tabla 7.2: Valores para la constante $g_{\omega\rho\pi} [\text{GeV}^{-1}]$ en los diferentes escenarios presentados en este trabajo.

Teniendo estos resultados claros, procedimos al estudio del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, del cual calculamos su sección eficaz en función del parámetro β , para posteriormente compararla con datos experimentales obtenidos por BaBar [81], lo que nos permitió obtener un valor para el momento dipolar magnético del mesón ρ . Esto es el propósito fundamental del trabajo, recordamos que en la actualidad no se posee ninguna medida de esta cantidad y que muchos modelos son capaces de predecir un valor para ella, pero hasta la fecha ninguno ha sido comparado con datos experimentales para confirmar su veracidad.

Para realizar este análisis primero fueron presentados los distintos canales a través de los cuales se lleva a cabo este proceso, en donde encontramos que los mesones π , ω , a_1 , σ , f_0 , ρ y ρ' son las partículas que participan. Todos los diagramas presentados son invariantes de

norma electromagnética por si mismos o bien forman parte de un conjunto de diagramas que lo es.

Según se discute en [79], la sección eficaz solo través del mesón ρ a bajas energías (< 1.5 GeV) está muy por debajo de los resultados experimentales y por el contrario a altas energías (> 1.5 GeV) se tiene un exceso. La importancia de considerar al mesón ρ' radica en el hecho de que al incluir esta resonancia ambos problemas son resueltos. En nuestro modelo esta resonancia es incluida de manera natural por el rango de energías que estamos manejando; sin embargo para poder trabajar con este mesón es necesario conocer las distintas constantes de acoplamiento que se presentan en los canales; debido a que al día de hoy no se tienen medidas para ellas, fue necesario considerar que las combinaciones entre constantes de acoplamiento entre el mesón ρ y ρ' son iguales. Dado que con estos diagramas la sección eficaz experimental es casi en su totalidad reproducida, se podría esperar que la contribución de las resonancias mayores fuera pequeña en comparación con estas.

El único acoplamiento que nos fue posible estimar fue el $g_{\omega\rho'\pi}$. Esto fue posible gracias a que se han presentado datos para el proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ exclusivos del canal del mesón ω de parte de BaBar [81] y de SND [56]. Para poder determinarlo, se calculó la expresión de la sección eficaz debida exclusivamente al canal del mesón ω , fijando la constante $g_{\omega\rho\pi} = 13.3 \text{ GeV}^{-1}$ según se estudió en el Capítulo 5, dejando libre el parámetro $g_{\omega\rho'\pi}$. Esto nos permitió hacer un ajuste de nuestra expresión con los datos experimentales, con lo que obtuvimos un valor para esta constante de $10.2 \pm 0.6 \text{ GeV}^{-1}$.

En la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ hemos encontrado que el canal que mas contribuye en el rango de 0.65 a 1.4 GeV es el canal del mesón ω (canal D); y que en el rango de 1.4 a 2.5 GeV el canal que tiene la mayor aportación es precisamente el que incluye al vértice de 3 mesones ρ (canal B), del cual hemos visto es posible extraer los multipolos de dicho mesón. En particular el parámetro β , que está directamente relacionado con el mdm del mesón ρ ha sido ajustado a datos de BaBar [81], con lo que hemos encontrado que dicho parámetro tiene un valor de

$$\beta = 1.95 \pm 0.15; \quad (7.5)$$

con un factor de $\chi^2/\# \text{ puntos} = 0.30$. Lo cual da un resultado final para el mdm de

$$|\bar{\mu}| = 2.27 \pm .17 \left[\frac{e}{2m_\rho} \right]. \quad (7.6)$$

Este es el resultado mas importante de nuestro trabajo, pues es la primera determinación de esta propiedad que se tiene para el mesón ρ ; de hecho, cabe la pena mencionar que es la primera determinación del mdm para un mesón vectorial en general.

En lo concerniente a la sección eficaz diferencial, hemos tenido los resultados que esperábamos, en particular el canal que incluye al vértice de 3 mesones ρ (canal B) también muestra una clara preferencia a emitir los piones en el plano transversal al de las partículas incidentes, de la misma manera como se encontró que el proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$ tiene una preferencia para emitir a los mesones ρ en un plano trasverso al de las partículas incidentes. Se puede ver además que los resultados tanto para la sección eficaz diferencial y la total para

los diferentes casos de β difieren entre si de manera apreciable en escala de nanobarns; de hecho si el experimento tuviera una precisión de 0.9 nb ($\approx 15\%$) podríamos distinguir las curvas por un factor de 3 desviaciones estándar.

Como un resultado adicional, hemos encontrado un valor para la razón de decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, la cual es importante conocer junto con otras razones como $\rho^0 \rightarrow 2\pi^+2\pi^-$ (estudiado en [85] y [86]), ya que a partir de ellas se puede concluir que tan válidos son los modelos que consideran la simetría de isoespín y que tan grandes pueden ser los efectos del rompimiento de dicha simetría.

En [80], se muestra que para conocer la razón de decaimiento $BR(\rho^0 \rightarrow f)$, es necesario conocer la sección eficaz $\sigma(e^+e^- \rightarrow f)$, evaluada en una energía igual a la masa de la partícula que decae; en nuestro modelo encontramos que

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0)|_{E=m_\rho} = 0.0347 \pm 0.028. \quad (7.7)$$

Lo que implica un valor para la razón de decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ dado por

$$BR(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0) = 2.86 \pm 2.36 \times 10^{-5}; \quad (7.8)$$

valor que está en acuerdo con lo reportado experimentalmente $BR(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0) = 1.6 \pm 0.76 \times 10^{-5}$ [1]. Las grandes barras de error son debidas a la presencia del mesón $\sigma(600)$ (canal G), del cual sabemos no se tiene gran control sobre sus parámetros de masa y anchura. Esto nos llevó a hacer el ejercicio de calcular la razón $BR(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0)$ sin considerar este canal, lo que da por resultado una sección eficaz de

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0)|_{E=m_\rho} = 0.0206 \pm 0.003 \quad (\text{sin } \sigma(600)), \quad (7.9)$$

que conlleva a un valor para la razón de decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ dado por

$$BR(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0) = 1.78 \pm 0.3 \times 10^{-5} \quad (\text{sin } \sigma(600)); \quad (7.10)$$

que como se puede observar también está en acuerdo con el valor experimental. Esto nos hace pensar que el canal del mesón $\sigma(600)$ no es necesario, pues aún sin considerarlo podemos obtener un valor para esta razón de decaimiento congruente con el reportado experimentalmente; sería necesario un estudio más detallado en este aspecto para ver bajo que condiciones se tiene que considerar el canal de la $\sigma(600)$ y si existen contratérminos que no hayamos considerado aquí y que limiten la aportación de este canal, además de que es necesario un refinamiento de las mediciones de los parámetros de esta partícula para poder determinar si efectivamente podemos descartar la contribución de este canal.

Para terminar presentamos una lista de las aportaciones de este trabajo:

- Para hacer una correcta descripción de los momentos multipolares del mesón ρ es necesario incluir su ancho de decaimiento (Γ), de manera consistente con la invariancia de norma electromagnética. Esto se logra por medio del esquema de lazos bosónicos.

- Es necesario hacer una renormalización de los factores de forma de los multipolos para garantizar que la carga eléctrica no sufra modificaciones.
- Debido a esta renormalización, ningún multipolo sufre modificaciones en la aproximación quirral, al contrario de lo que comúnmente se encuentra en la literatura.
- Usando el esquema de lazos mostramos que esta lleva, por consistencia con la no modificación a la carga eléctrica, al esquema de masa compleja.

Estos resultados son parte de nuestro artículo: **D. García Gudiño y G. Toledo Sánchez, Phys. Rev. D 81, 073006 (2010).**

- En el proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$ se encontró que los mesones ρ son emitidos preferentemente en un plano perpendicular al de las partículas incidentes.
- Hemos encontrados que la constante $g_{\omega\rho\pi}$ puede ser obtenida por diferentes procesos como: decaimientos radiativos, el decaimiento $\omega \rightarrow 3\pi$ y el proceso $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$.
- Estos últimos dos procesos se llevan a cabo a través del canal del mesón ρ ($\omega \rightarrow \rho\pi \rightarrow 3\pi$) y además por un termino de contacto o bien por canales que incluyen resonancias mas pesadas.
- Los diagramas que incluyen resonancias mas pesadas pueden ser tratados como un término efectivo de contacto. La contribución de estos canales como el término de contacto pueden ser absorbidos en la constante $g_{\omega\rho\pi}$ en el canal del mesón ρ . Lo que da como resultado una constante

$$g_{\omega\rho\pi} = 14.7 \pm 0.1 \text{ GeV}^{-1}. \quad (7.11)$$

Estos resultados son parte de nuestro artículo: **D. García Gudiño, G. Toledo Sanchez, Int. J. Mod. Phys. A 27, 1250101(2012).**

- En lo referente al proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$, encontramos que los canales mas importantes por los que se lleva a cabo son: el canal del mesón ω a bajas energías (< 1.5 GeV) y el canal que incluye el vértice de 3 mesones ρ a altas energías (> 1.5 GeV).
- La inclusión del mesón ρ' como resultado de la aniquilación del par electrón-positrón es necesaria para evitar que la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$ presente un mal comportamiento como lo indica [79]. En el esquema de VMD este mesón es incluido de manera natural en el estudio.
- Con ayuda de datos experimentales del BaBar [81], se realizó un ajuste para el parámetro β , el cual esta directamente ligado al mdm del mesón ρ . Los resultados de dicho ajuste son

$$\beta = 1.95 \pm 0.15 \Rightarrow |\bar{\mu}| = 2.27 \pm .17 \left[\frac{e}{2m_\rho} \right]. \quad (7.12)$$

Este es nuestro resultado mas importante, ya que éste es el primer valor extraído de una observable para el mdm del mesón ρ .

- El canal que incluye al vértice de 3 mesones ρ también muestra una clara preferencia a emitir los piones en un plano trasverso al de las partículas incidentes, resultado de la cinemática heredada del proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$.
- Para la razón de decaimiento $BR(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0)$ se obtuvo un valor de

$$BR(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0) = 2.86 \pm 2.36 \times 10^{-5}, \quad (7.13)$$

utilizando todos los canales aquí presentados para el proceso de producción a 4 piones. Las grandes barras de error provienen del canal que contiene al mesón $\sigma(600)$, ya que sus parámetros de masa y ancho de decaimiento no están bien medidos al día de hoy. Esto nos llevó a hacer el ejercicio de calcular esta razón sin considerar este canal, lo que da por resultado

$$BR(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0) = 1.78 \pm 0.3 \times 10^{-5} \quad (\text{sin } \sigma(600)). \quad (7.14)$$

Debido a que ambos resultados están en acuerdo con el valor reportado por el PDG, pensamos que el canal de la $\sigma(600)$ no es necesario pues podemos reproducir bien esta cantidad sin considerarlo. Faltarían mediciones mas precisas de los diferentes parámetros de este mesón para poder determinar si efectivamente puede ser excluido.

Al momento de la conclusión de este trabajo se encuentra en elaboración el artículo con estos resultados.

También esta enviado para su publicación el trabajo en donde presentamos un modelo para incluir un número infinito de resonancias en los procesos asociados con la anomalía quiral (Véase el último artículo presentado en el trabajo.).

Apéndice A

Identidades de Ward.

El cuantizar teorías de norma presenta algunos problemas (como el tratar de encontrar directamente del Lagrangiano un propagador^a para el bosón de norma), los cuáles tienen su origen en el hecho de que los bosones de norma no masivos poseen sólo dos componentes independientes, pero son descritos por un campo vectorial A_μ con cuatro componentes. Para resolver este problema se tiene que imponer alguna restricción al campo de norma para así poder introducir alguna relación entre sus componentes y gracias a ello reducir el número de componentes independientes a dos; a continuación mostramos cómo se hace esto utilizando el método de la integral de trayectoria. Este método representa la transición entre estados iniciales y finales como una suma de todos los posibles estados intermedios que el sistema de partículas pudiera tener y parte de la función generatriz^b dada por

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu e^{i \int \mathcal{L}_A dx}, \quad (\text{A-1})$$

donde $\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

La integral en la expresión de arriba involucra a todos los campos A_μ , incluyendo también aquellos que están relacionados por una transformación de norma. Es aquí en donde, para imponer las restricciones sobre el campo de norma, introducimos el término $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$; dichas restricciones se imponen dando un valor numérico ya sea al parámetro ξ , o directamente al factor $\partial_\mu A^\mu$. El hecho de dar un valor a alguno de estos factores automáticamente impone restricciones al parámetro de la transformación de norma, por lo que a esto se le conoce como *fixar la norma*; y esto hace que la función generatriz tenga un resultado finito.

^aEl propagador está definido como el inverso del operador cuadrático diferencial que aparece en el Lagrangiano, o bien como la función de Green de dos puntos.

^bVéase el libro de *Quantum Field Theory* de L. Ryder.

Para obtener el propagador del fotón utilizaremos el Lagrangiano

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_A &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &= \frac{1}{2}A^\mu[g_{\mu\nu}\square + (\frac{1}{\xi} - 1)\partial_\mu\partial_\nu]A^\nu.\end{aligned}\tag{A-2}$$

A partir de este Lagrangiano obtenemos que el operador cuadrático diferencial del Lagrangiano en espacio de momentos está dado por

$$-k^2 g_{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi})k_\mu k_\nu,\tag{A-3}$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio^c y k el 4-momento del fotón. Finalmente tenemos que el propagador $D_{\mu\nu}$ del fotón es

$$iD(k)_{\mu\nu} = -\frac{i}{k^2}[g_{\mu\nu} + (\xi - 1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}].\tag{A-4}$$

Algunas nomenclaturas para valores especiales de ξ son:

- $\xi \rightarrow 1$: Propagador (en la norma) de Feynman.
- $\xi \rightarrow 0$: Norma de Landau.

Hay que remarcar que dado que ξ es un parámetro libre, la física que se obtenga de esto no puede depender de él.

La expresión para el propagador del electrón $S_F(p)$ puede ser obtenida directamente del operador diferencial que aparece en la expresión $\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x)$, pues en este caso el operador cuadrático diferencial está dado por

$$i\gamma^\mu\partial_\mu - m,$$

que en espacio de momentos se transforma en

$$\gamma^\mu p_\mu - m$$

donde p es el momento del electrón; de esta expresión se tiene que el propagador para el electrón está dado por

$$iS_F(p) = \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m}.\tag{A-5}$$

La representación de los propagadores tanto del electrón como del fotón se muestran en la Figura A.1; en donde a cada figura se le asigna la expresión matemática anteriormente obtenida para cada caso.

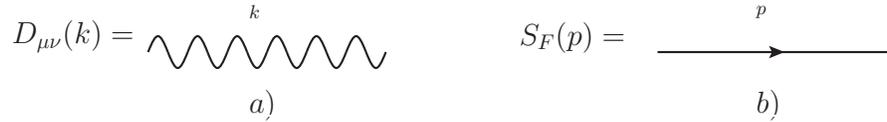


Figura A.1: Propagadores a) del fotón y b) del electrón.

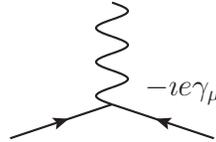


Figura A.2: Vértice de QED.

Para el vértice de QED, que relaciona la interacción entre los fermiones y el fotón tenemos la siguiente regla de Feynman $ie\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi$, la cual está representada en la Figura A.2.

Ahora que tenemos ya definidas las reglas de Feynman para los propagadores y el vértice, podemos presentar la *identidad de Ward*, que es una relación entre los propagadores fermiónicos exactos y la función de vértice en QED; su importancia radica en el hecho de que esta relación es condición necesaria y suficiente para garantizar la invariancia de norma en la teoría y representa esencialmente el hecho de que la corriente de Dirac $j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ asociada al vértice es conservada, lo cual implica que $\partial_\mu j^\mu = 0$ o lo que es lo mismo en espacio de momentos $k_\mu j^\mu = 0$.

Cuando hablamos de un propagador de fermiones “exacto” S'_F nos referimos al hecho de que éste incluye todas las contribuciones provenientes de la polarización del vacío, lo que puede ser representado mediante el diagrama de la Figura A.3.



Figura A.3: Propagador fermiónico “exacto” en QED.

Así mismo cuando hablamos del vértice “exacto” $\Gamma[p, q, p + q]$, queremos dar a entender la siguiente expresión diagramática de la figura A.4.

Con todo esto aclarado podemos presentar la identidad de Ward (Figura A.5), cuya expresión matemática, entre otras maneras, puede ser deducida a partir de plantear la función

^cEn nuestro caso es la métrica de Minkowski.

Figura A.4: *Vértice “exacto”.*

Figura A.5: *Representación gráfica de la Identidad de Ward.*

generatriz Z para un sistema de fotones y fermiones con sus respectivos términos de fuentes, ésto se hace sabiendo que ésta debe ser invariante ante transformaciones de norma, pues la física resultante de ella no puede depender del parámetro de la transformación; al realizar entonces una transformación de este estilo e imponer la invariancia de la función Z , se tiene como resultado una ecuación diferencial para dicha función, la cuál se puede poner en términos del vértice de interacción y los correspondientes propagadores dando por resultado^d

$$q^\mu \Gamma_\mu[p, q, p + q] = S_F'^{-1}[p + q] - S_F'^{-1}[p]. \quad (\text{A-6})$$

Hay que señalar que esta relación se cumple a todo orden perturbativo (es decir considerando el mismo número finito de sumandos de los términos exactos de las Figuras A.3 y A.4).

^dLa derivación formal por este método viene presentada por ejemplo en el libro *Quantum Field Theory* de L. Ryder.

Apéndice B

Funciones para la corrección del Vértice $\rho\rho\gamma$ a un lazo.

Las expresiones para las funciones $U_{1,2}$, $f_{1,2}$ y $b_{1,2}$ están dadas en la referencia [30] por:

$$\lambda[x] = x^2 + m_\pi^4 + m_\pi'^4 - 2xm_\pi^2 - 2xm_\pi'^2 - 2m_\pi^2m_\pi'^2 \quad (\text{B-1})$$

$$U_i [q_i^2] = \frac{g^2}{32\pi^2 q_i^2} \sqrt{\lambda [q_i^2]} \quad (\text{B-2})$$

$$\text{En} [q_i^2] = \frac{(q_i^2 + \Delta^2)}{2\sqrt{q_i^2}} \quad (\text{B-3})$$

$$v [q_i^2] = \frac{\sqrt{\lambda [q_i^2]}}{(q_i^2 + \Delta^2)} \quad (\text{B-4})$$

$$b_1 [q_i^2] = \frac{2\pi \text{En} [q_i^2] \sqrt{q_i^2}}{(q_1^2 - q_2^2)} \left\{ \frac{(1 - (v [q_i^2])^2)}{v [q_i^2]} \text{Log} \left[\frac{1 + v [q_i^2]}{1 - v [q_i^2]} \right] - 2 \right\} \quad (\text{B-5})$$

$$b_2 [q_i^2] = \frac{8\pi \text{En} [q_i^2]}{(q_1^2 - q_2^2) \sqrt{q_i^2}} \quad (\text{B-6})$$

$$f_1 [q_i^2] = -\frac{8\pi (\text{En} [q_i^2])^2 (v [q_i^2])^2}{3(q_1^2 - q_2^2)} \quad (\text{B-7})$$

$$f_2 [q_i^2] = \frac{4\pi (\text{En} [q_i^2])^2 q_i^2}{(q_1^2 - q_2^2)^2} \left\{ \frac{4(v [q_i^2])^2}{3} + \frac{(1 - (v [q_i^2])^2)}{v [q_i^2]} \text{Log} \left[\frac{1 + v [q_i^2]}{1 - v [q_i^2]} \right] - 2 \right\} \quad (\text{B-8})$$

Apéndice C

Correcciones a los multipolos del bosón W y del mesón K^{*+} .

El procedimiento mostrado en el capítulo 3 para el cálculo de las modificaciones a los diferentes multipolos para el mesón ρ es general para cualquier mesón vectorial, por lo que puede aplicarse al caso del mesón K^{*+} considerando que éste tiene su decaimiento principal (casi en un 100 %) en un kaón y un pión. Utilizando las mismas expresiones de la sección 3.4 tenemos los resultados mostrados en la Tabla C.1, los cuales comparamos con la predicción de algunos modelos encontrados en la literatura. En dicha tabla podemos ver que las correcciones debidas al ancho de decaimiento son de uno o dos ordenes menor que las desviaciones esperados por otras aproximaciones podrían ser medidas con la suficiente precisión de parte del experimento.

Referencia	MDM $[\frac{e}{2m_\rho}]$	Cuadrupolo Elec. $[\frac{e}{m_\rho^2}]$
Este trabajo	$2 - 0.0047$	$1 - 0.097$
[27]	$2 + 0.14$	$1 - 0.62$
[22]	$2 + 0.37$	$1 + 0.96$

Tabla C.1: Predicciones para el mdm y el cuadrupolo eléctrico del mesón K^{*+} comparados con la corrección de ancho finito.

Por otra parte para el caso del bosón W es necesario utilizar el esquema de lazos fermiónicos debido a que los decaimientos de este bosón son quarks; dado que el esquema requiere que las partículas dentro de los lazos estén en capa de masa sólo hemos considerado la contribución de los quarks u , d , s y c . Para este caso hemos considerado la expresión para el vértice obtenido en [87]. Con lo que si hacemos la identificación de la estructura de Lorentz para conocer los factores de forma de los multipolos, tomando en cuenta transversalidad, el hecho de que las partículas deben estar en capa de masa y el limite del momento del fotón a cero tenemos las siguientes expresiones para los diferentes momentos:

- Carga Eléctrica.

$$\alpha(0) = 1 + i \sum_i Q_i \frac{\Gamma_i}{M_W} \left(1 - 3 \frac{M_W^2 \Sigma^2 (3\Sigma^2 - 2M_W^2) + \Delta^4 (M_W^2 - 2\Sigma^2)}{2M_W^6 \lambda^2} \right), \quad (\text{C-1})$$

donde $\Sigma^2 \equiv m^2 + m'^2$ con m y m' las masas de los quarks y anti-quarks correspondientes, $\Delta^2 \equiv m^2 - m'^2$ y Q_i es la carga de la partícula que radia el fotón en el lazo (véase Figura 3.4); $\Gamma_i/M_W \equiv g_i^2 \lambda^{3/2}/48\pi$ es el ancho de decaimiento parcial para cada uno de los modos de las partículas presentes en el lazo; g_i denota la constante de acoplamiento y $\lambda \equiv (M_W^4 + \Delta^4 - 2\Sigma^2 M_W^2)/M_W^4$.

- Dipolo Magnético.

$$\beta(0) = 2 + i \sum_i Q_i \frac{\Gamma_i}{M_W} \left(2 - 3 \frac{\Sigma^2 (6\Sigma^2 - 4M_W^2) + \Delta^2 (\Sigma^2 + 3\Delta^2) + \frac{\Delta^4}{M_W^4} (2\Delta^4 - M_W^2 (\Delta^2 + 7\Sigma^2))}{2M_W^4 \lambda^2} \right). \quad (\text{C-2})$$

- Cuadrupolo Eléctrico

$$\gamma_\rho(0) = -i \sum_i Q_i \frac{\Gamma_i}{M_W} \frac{M_W^2 \lambda (2\Delta^4 - M_W^2 (\Sigma^2 + \Delta^2)) + (\Sigma^2 - \Delta^2) (\Delta^4 - M_W^2 \Sigma^2)}{M_W^6 \lambda^2}. \quad (\text{C-3})$$

Con estas expresiones obtenemos los resultados mostrados en la Tabla C.2.

Referencia	MDM $[\frac{e}{2m_\rho}]$	Cuadrupolo Elec. $[\frac{e}{m_\rho^2}]$
Este trabajo	2.0	$1 - 4.23 \times 10^{-7}$
[88]	$2 - 0.0151$	--
[89]	$2 + 0.0026$	--

Tabla C.2: Predicciones para el mdm y el cuadrupolo eléctrico del bosón W comparados con la corrección de ancho finito.

En la referencia [88] se utiliza una corrección por medio de lazos de Higgs inducidos y en [89] utilizan lazos de quarks, leptones y Higgs dentro del Modelo Estándar. Podemos observar que nuestros resultados no indican una corrección con respecto a lo que se obtiene considerando al bosón W como una partícula estable.

Apéndice D

Reglas de Feynman.

Lineas Externas.

Fermión Entrante:  u

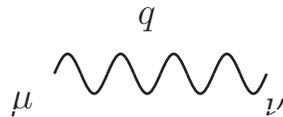
Anti-Fermión Entrante:  \bar{v}

Escalar Saliente:  1

Propagadores.

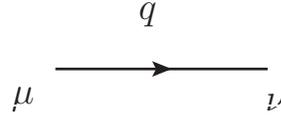
Propagador del Fotón:

$$-i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2}$$



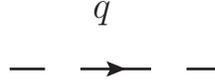
Propagador Vectorial:

$$i \left(\frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m_V^2 - im_V \Gamma_V}}{q^2 - m_V^2 + im_V \Gamma_V} \right)$$



Propagador Escalar:

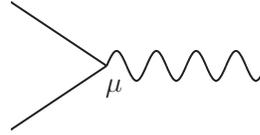
$$\frac{i}{q^2 - m_S^2}$$



Vértices.

$e^+e^-\gamma$:

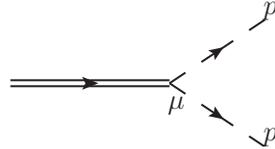
$$-ie\gamma^\mu$$



$\rho\pi\pi$:

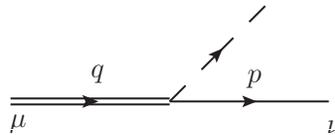
Este vértice depende de los momentos de las partículas involucradas según sus cargas, por lo que tenemos diferentes casos.

$$\begin{aligned} \rho^- \pi^- \pi^0: & \quad ig_{\rho\pi\pi}(p_0 - p_-)^\mu \\ \rho^+ \pi^+ \pi^0: & \quad ig_{\rho\pi\pi}(p_+ - p_0)^\mu \\ \rho^0 \pi^- \pi^+: & \quad ig_{\rho\pi\pi}(p_- - p_+)^\mu \end{aligned}$$



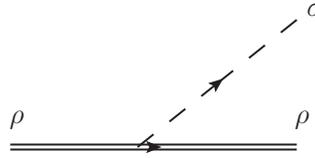
$\rho a_1 \pi$:

$$ig_{\rho a_1 \pi}(q \cdot p g^{\mu\nu} - q^\nu p^\mu)$$

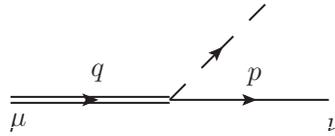


$\rho\rho\sigma$:

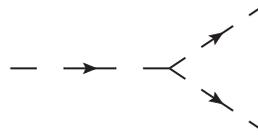
$$ig_{\rho\rho\sigma}(q \cdot p g^{\mu\nu} - q^\nu p^\mu)$$

 $\rho\omega\pi$:

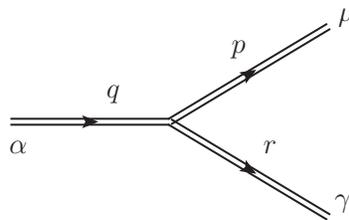
$$ig_{\rho\omega\pi}\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}q_\alpha p_\beta$$

 $\sigma\pi\pi$:

$$ig_{\sigma\pi\pi}$$

 $\rho\rho\rho$:

$$ig_{\rho\rho\rho}(g^{\mu\gamma}(r-p)^\alpha + \beta(q^\gamma g^{\mu\alpha} - q^\mu g^{\gamma\alpha}) + p^\mu g^{\gamma\alpha} - r^\gamma g^{\mu\alpha})$$



Apéndice E

Constantes de Acoplamiento.

Antes de revisar las constantes de acoplamiento usadas en el presente trabajo presentamos una lista de los valores experimentales de las diferentes cantidades físicas, como la masa de las partículas y los anchos de decaimiento que son usados a través de esta tesis. Todos ellos fueron obtenidos de la referencia [1], que puede ser vista para mayor detalle.

Las masas de las partículas.

$$\begin{aligned}m_\rho &= 775.5 \pm 0.34 \text{ MeV} \\m_{\rho'} &= 1465 \pm 25 \text{ MeV} \\m_\omega &= 782.65 \pm 0.12 \text{ MeV} \\m_{\pi^\pm} &= 139.57 \text{ MeV} \\m_{\pi^0} &= 134.98 \text{ MeV} \\m_\sigma &= 350 - 500 \text{ MeV} \\m_{a_1} &= 1230 \pm 40 \text{ MeV}\end{aligned}$$

Anchos de decaimiento para diferentes procesos.

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\rho} &= 149.1 \pm 0.8 \text{ MeV} \\
 \Gamma_{\rho'} &= 400 \pm 60 \text{ MeV} \\
 \Gamma_{\rho \rightarrow e^+e^-} &= 7.04 \pm 0.06 \text{ keV} \\
 \Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi} &\approx 100 \% \\
 \Gamma_{\rho^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm}\gamma} &= 4.5 \pm 0.5 \times 10^{-4} \% \\
 \Gamma_{\rho^0 \rightarrow \pi^{\pm}\gamma} &= 9.9 \pm 1.6 \times 10^{-3} \% \\
 \Gamma_{\rho^0 \rightarrow \pi^0\gamma} &= 6.0 \pm 0.8 \times 10^{-4} \% \\
 \Gamma_{\omega} &= 8.49 \pm 0.08 \text{ MeV} \\
 \Gamma_{\omega \rightarrow e^+e^-} &= 0.6 \pm 0.02 \text{ keV} \\
 \Gamma_{\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0} &= 89.2 \pm 0.7 \% \\
 \Gamma_{\omega \rightarrow \pi^0\gamma} &= 8.28 \pm 0.28 \% \\
 \Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma} &= 98.82 \pm 0.034 \% \\
 \Gamma_{\sigma} &= 600 \text{ MeV} \\
 \Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} &\approx 100 \% \\
 \Gamma_{a_1} &= 250 - 600 \text{ MeV} \\
 \Gamma_{a_1 \rightarrow \rho\pi} &\approx 100 \%
 \end{aligned}$$

Constantes de Acoplamiento.

El espíritu del método de la Dominancia Vectorial es resumir las posibles contribuciones de más alto orden dentro de constantes de acoplamiento efectivas (Fig. E.1). Siguiendo este método hemos calculado las diferentes constantes de acoplamiento según se presenta a continuación:

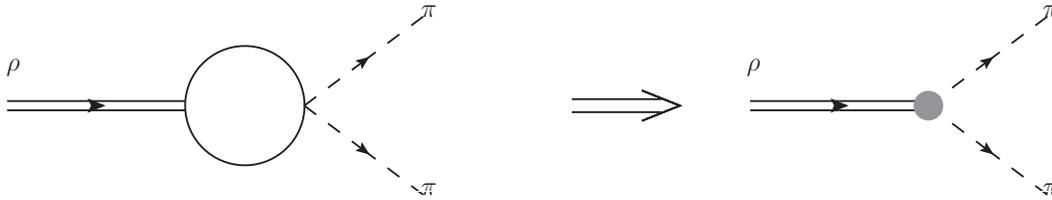


Figura E.1: Contribuciones de alto orden resumadas en el acoplamiento efectivo.

Acoplamiento $\gamma - V$: g_V .

Esta constante de acoplamiento es el corazón de la dominancia vectorial ya que es la que nos indica la probabilidad de transición de un fotón (γ) en un mesón vectorial (V). El término del lagrangiano relevante para esta constante está dado por la ecuación (E-1)

$$\mathcal{L} = \dots + \frac{em_V^2}{g_V} V_\mu A^\mu + \dots \quad (\text{E-1})$$

donde e es la carga del positrón, m_V es la masa del mesón vectorial, y V_μ y A^μ los campos del mesón y del fotón correspondientemente.

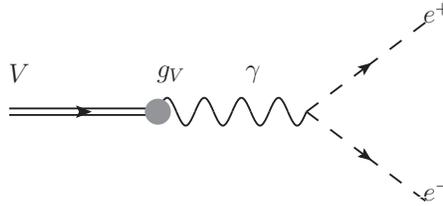


Figura E.2: Proceso $V \rightarrow e^+e^-$.

Esta constante es determinada por medio del decaimiento del mesón a un par electrón-positrón (Fig. E.2), cuyo elemento de matriz está dado por

$$\mathcal{M} = \frac{e^2 m_V^2}{g_V} \frac{1}{q^2} \epsilon_\mu \bar{u} \gamma^\mu v, \quad (\text{E-2})$$

aquí q , ϵ_μ son el momento del mesón y su vector de polarización; $\bar{u} \gamma^\mu v$ es la parte leptónica del proceso y refiere a los campos del electrón y del positrón respectivamente.

El ancho de decaimiento a dos cuerpos según la referencia [1] está dada por la ecuación (E-3)

$$\Gamma_{(P,M) \rightarrow (p_1, m_1); (p_2, m_2)} = \frac{|\bar{p}_1|}{32\pi^2 M^2} \int |\bar{\mathcal{M}}|^2 d\Omega. \quad (\text{E-3})$$

A partir de esta expresión es posible conocer el valor de la constante de acoplamiento g_V , si se conoce el valor experimental de $\Gamma_{V \rightarrow e^+e^-}$.

Con los valores experimentales que aparecen en la sección anterior obtenemos que los valores numéricos para g_ρ y g_ω son

$$\begin{aligned} g_\rho &= 4.96 \pm 0.02 \\ g_\omega &= 17.06 \pm 0.3. \end{aligned} \quad (\text{E-4})$$

$g_{\rho^- \pi \gamma}$	0.22 ± 0.02
$g_{\rho^0 \pi \gamma}$	0.24 ± 0.02
$g_{\omega \pi \gamma}$	0.69 ± 0.07

Tabla E.1: Valores para las constantes $g_{V\pi\gamma}$ de diferentes procesos.

Acoplamiento $g_{V\pi\gamma}$.

La constante de acoplamiento $g_{V\pi\gamma}$ puede ser calculada de manera análoga al caso anterior utilizando el proceso $V \rightarrow \pi\gamma$ (Fig. E.3), el cuál tiene un elemento de matriz dado por

$$\mathcal{M} = -g_{\rho\pi\gamma} \eta_\mu \varepsilon^{\beta\nu\alpha\mu} k_\beta q_\alpha \epsilon_\nu^*, \quad (\text{E-5})$$

donde η_μ , q y ϵ_ν^* , k son los vectores de polarización y los momentos del mesón vectorial (V) y del fotón correspondientemente. Realizando el cálculo del ancho de decaimiento del proceso

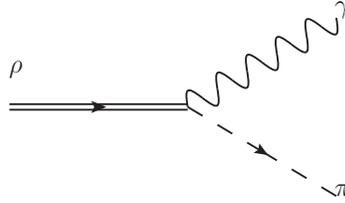


Figura E.3: Proceso $V \rightarrow \pi\gamma$.

$V \rightarrow \pi\gamma$ se obtiene la expresión (E-6) para la constante de acoplamiento.

$$g_{V\pi\gamma} = \sqrt{12\pi\Gamma_{V\rightarrow\pi\gamma} \left(\frac{2m_V}{m_V^2 - m_\pi^2} \right)^3}, \quad (\text{E-6})$$

con la cuál obtenemos los valores mostrados en la Tabla E.1.

Acoplamiento $\sigma - \pi - \pi$: $g_{\sigma\pi\pi}$.

Este es un acoplamiento de tres partículas escalares que tiene el siguiente elemento de matriz

$$\mathcal{M} = -g_{\sigma\pi\pi}. \quad (\text{E-7})$$

Al igual que en los casos anteriores, a partir del cálculo del decaimiento a dos cuerpos del mesón σ , se obtiene la siguiente expresión para la constante de acoplamiento $g_{\sigma\pi\pi}$:

$$g_{\sigma\pi^+\pi^-} = \left(16\pi\Gamma(\sigma \rightarrow \pi^+\pi^-) \frac{m_\sigma^2}{\sqrt{m_\sigma^2 - 4m_\pi^2}} \right)^{1/2}. \quad (\text{E-8})$$

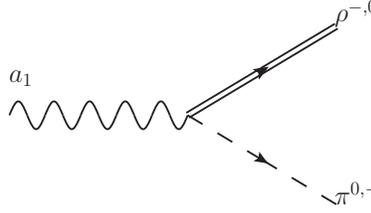


Figura E.4: Proceso $a_1 \rightarrow \rho^{-,0}\pi^{0,-}$.

Debido que queremos la constante de acoplamiento para el caso general, tenemos que considerar la relación

$$\Gamma(\sigma \rightarrow \pi\pi) = \frac{3}{2}\Gamma(\sigma \rightarrow \pi^+\pi^-), \quad (\text{E-9})$$

por lo que nuestro resultado final es

$$g_{\sigma\pi\pi} = \left(\frac{32}{3}\pi\Gamma(\sigma \rightarrow \pi\pi) \frac{m_\sigma^2}{\sqrt{m_\sigma^2 - 4m_\pi^2}} \right)^{1/2}. \quad (\text{E-10})$$

Lo que nos da un valor numérico de

$$g_{\sigma\pi\pi} = 3.69 \pm 1.6 \text{ GeV}. \quad (\text{E-11})$$

Acoplamiento $a_1 - \rho - \pi$: $g_{a_1\rho\pi}$.

Para la obtención de esta constante de acoplamiento hemos considerado el proceso de decaimiento $a_1 \rightarrow \rho^{-,0}\pi^{0,-}$ (Fig. E.4) y hemos trabajado en la aproximación de isoespín^a, esto debido a que la masa de los mesones ρ cargados y neutros han sido considerados con la misma masa.

Este proceso tiene el elemento de matriz

$$\mathcal{M} = -2g_{a_1\rho\pi}(k \cdot q\eta_\mu\epsilon^{*\mu} - k^\mu q^\nu\eta_\mu\epsilon_\nu^*), \quad (\text{E-12})$$

en donde q , k son los momentos de los mesones a_1 y ρ respectivamente y η_μ y $\epsilon^{*\nu}$ sus correspondientes vectores de polarización.

Al igual que en los casos anteriores utilizando la formula para el ancho de decaimiento a dos cuerpos (Ec. E-3), uno puede despejar la constante de acoplamiento y obtener la siguiente ecuación

$$g_{a_1\rho\pi} = \left(\frac{12\pi\Gamma_{a_1 \rightarrow \rho^{-,0}\pi^{0,-}}}{\sqrt{(m_{a_1}^2 + m_\rho^2 - m_\pi^2)^2 - 4m_{a_1}^2 m_\rho^2}} \frac{m_{a_1}^3}{\frac{1}{2}(m_{a_1}^2 + m_\rho^2 - m_\pi^2)^2 + m_{a_1}^2 m_\rho^2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{E-13})$$

^aMasas de piones cargados y neutros iguales.

Utilizando los valores experimentales que presentamos anteriormente, tenemos un valor numérico para esta constante que va de los 2.55 a los 3.95 GeV, esto es debido al rango en el ancho de decaimiento del mesón a_1 . Tomando un promedio de estos valores obtenemos como resultado

$$g_{a_1\rho\pi} = 3.25 \pm 0.3 \text{ GeV}. \quad (\text{E-14})$$

Acoplamiento $\rho - \pi - \pi$: $g_{\rho\pi\pi}$.

El proceso a considerar en este caso, es el decaimiento del mesón ρ a dos piones (Fig. E.5), ya sean cargados o neutros; sin embargo, debido a que el decaimiento de un mesón ρ neutro a dos piones igualmente neutros tiene una probabilidad de un orden de magnitud menor que la correspondiente al caso cargado, se ha ignorado este decaimiento durante el cálculo.

El elemento de matriz para este proceso está dado por

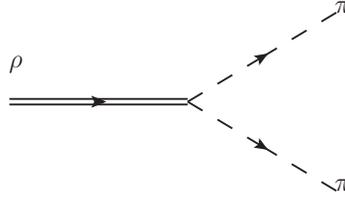


Figura E.5: Proceso $\rho \rightarrow \pi\pi$.

$$\mathcal{M} = -g_{\rho\pi\pi}\epsilon_\mu(p_1 - p_2)^\mu; \quad (\text{E-15})$$

donde ϵ_μ es el vector de polarización del mesón ρ y ahora p_1 y p_2 son los momentos de los piones emitidos. Utilizando la ecuación (E-3) podemos despejar en favor de la constante de acoplamiento para obtener

$$g_{\rho\pi\pi} = \left(\frac{48\pi m_\rho^2 \Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}}{\lambda(m_\rho^2, m_{\pi^+}^2, m_{\pi^0}^2)^{5/2}} \right)^{1/2}, \quad (\text{E-16})$$

con $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$. Usando los valores experimentales, obtenemos que el valor numérico de esta constante es

$$g_{\rho\pi\pi} = 5.96 \pm 0.02. \quad (\text{E-17})$$

Acoplamiento $\rho - \rho - \sigma$: $g_{\rho\rho\sigma}$.

Esta constante a diferencia de otras no puede ser obtenida por un decaimiento, sin embargo podemos considerar que en el proceso $\rho \rightarrow \rho\sigma$ uno de los mesones ρ viene por la

hadronización del fotón en el proceso $\rho \rightarrow \sigma\gamma$ como se puede ver en la Figura (E.6). Por medio de la igualdad de los elementos de matriz de los procesos a) y b) en dicha figura podemos identificar cuanto vale la constante de acoplamiento $g_{\rho\rho\sigma}$ en términos de las constantes $g_{\rho\sigma\gamma}$ y g_ρ .

El elemento de matriz del proceso $\rho \rightarrow \rho\sigma$ en la Figura (E.6a)) está dado por

$$\mathcal{M}_a = -g_{\rho\rho\sigma}\epsilon_\mu\eta^{*\mu}, \quad (\text{E-18})$$

donde ϵ_μ y $\eta^{*\mu}$ son los vectores de polarización de los mesones ρ ; mientras que el elemento de matriz del proceso $\rho \rightarrow \sigma\gamma$ mas la hadronización del fotón a un mesón ρ , como aparece en la Figura (E.6b)), está dado por

$$\mathcal{M}_b = g_{\rho\sigma\gamma} \left(\frac{em_\rho^2}{g_\rho q^2} \right) \epsilon_\mu\eta^{*\mu}, \quad (\text{E-19})$$

en donde q es el momento del mesón ρ inicial.

Al igualar estos elementos de matriz podemos entonces identificar que la constante $g_{\rho\rho\sigma}$ está dada por

$$g_{\rho\rho\sigma} = - \left(\frac{em_\rho^2}{g_\rho q^2} \right) g_{\rho\sigma\gamma}. \quad (\text{E-20})$$

La expresión para la constante $g_{\rho\sigma\gamma}$ puede obtenerse, al igual que las anteriores, por medio del decaimiento $\rho \rightarrow \sigma\gamma$ y utilizando el ancho de decaimiento experimental de este proceso, lo que da por resultado

$$g_{\rho\sigma\gamma} = \frac{3}{\alpha} \Gamma_{\rho \rightarrow \sigma\gamma} \left(\frac{2m_\rho}{m_\rho^2 - m_\sigma^2} \right)^3, \quad (\text{E-21})$$

aquí $\alpha \approx \frac{1}{137}$, es la constante de estructura fina. El valor numérico de esta constante es

$$g_{\rho\sigma\gamma} = 0.63 \pm 0.15 \text{ GeV}^{-1}. \quad (\text{E-22})$$

Las constantes de acoplamiento $g_{\omega\rho\pi}$, $g_{\omega\rho'\pi}$ y $g_{\rho\rho\pi\pi}$, han sido obtenidas con detalle dentro del texto en los capítulos 5 y 6 correspondientemente.

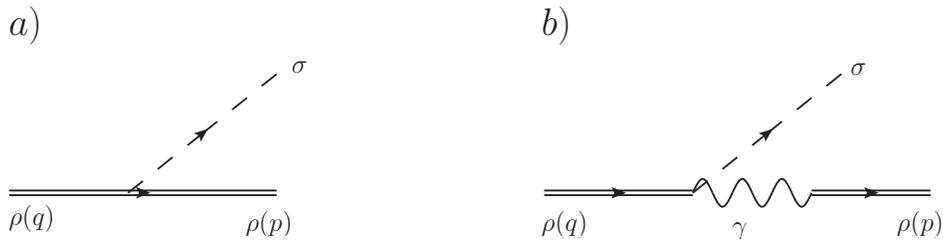


Figura E.6: Proceso $\rho \rightarrow \rho\sigma$, visto desde el punto de vista de dominancia vectorial como el proceso radiativo $\rho \rightarrow \sigma\gamma$ seguido de la hadronización del fotón en un mesón ρ .

Apéndice F

El proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$ a altas energías.

En este trabajo hemos parametrizado el vértice $\gamma\rho\rho$ como lo indica la ecuación (3.16) para poder extraer los diferentes momentos multipolares del mesón ρ , pero no es la única manera de hacerlo; por ejemplo en la referencia [35] utilizan una función compleja dependiente de la energía para los diferentes multipolos que, aunque en dicho trabajo se menciona no es válida para todo rango de energías, lo es al menos para altas energías (10.58 GeV).

En lo que refiere al mdm, su parametrización está dada por

$$\beta(q^2) = \frac{\beta(0)m_M^4}{(m_M^4 - q^2 + im_M\Gamma_M)^2}, \quad (\text{F-1})$$

donde los valores $\beta(0) = 2.14$ y $m_M = 1.42$ GeV, son utilizados para estar en acuerdo con los resultados en [26], en donde además se explica que la forma de parametrizar el vértice consta de estas funciones reguladoras tipo propagador, que garantizan que la corriente hadrónica sea finita. Tanto el valor de m_M , como el de Γ_M no hacen referencia a una partícula física y por lo mismo el ancho de decaimiento sólo se toma en un rango de 1 a 10% del valor de m_M , aunque este efecto es despreciable para el rango de energías que ellos emplean.

En la Figura (F.1) presentamos la comparación de nuestro resultado para la sección eficaz en el caso $\beta = 1.95$ y el obtenido por [35]. En este trabajo explican que sus resultados no coinciden con el resultado experimental de la sección eficaz dada por BaBar a una energía de 10.58 GeV ($\sigma(10.58) = 19.5 \pm 4.8$ fb), por lo que tienen que multiplicar por un factor para corregirlo. Nosotros tampoco podemos reproducirlo, según se puede observar en dicha figura, pero en nuestro caso es debido al hecho de que se tendrían que considerar resonancias de más alto orden.

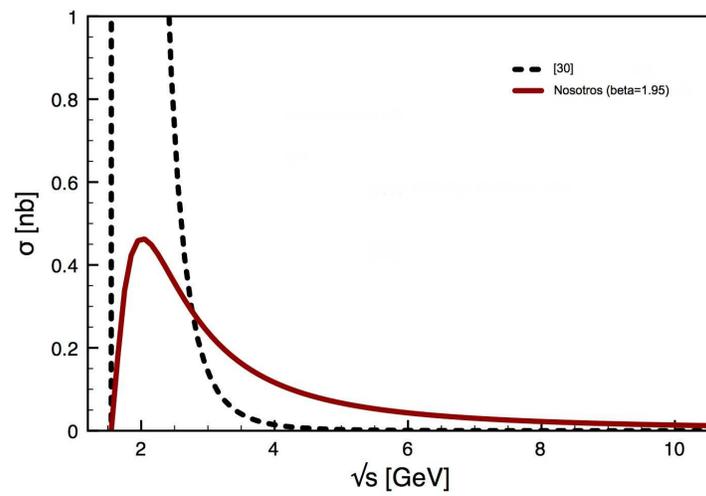


Figura F.1: Comparación de la sección eficaz para el proceso $e^+e^- \rightarrow \rho^+\rho^-$ a altas energías entre nuestro resultado, considerando $\beta = 1.95$, y el resultado en la referencia [35].

Apéndice G

Dependencia en energía del ancho de decaimiento para el mesón $\rho(770)$.

Lo que buscamos es hacer al ancho de decaimiento Γ una función de la energía que tenga la siguiente forma

$$\Gamma_\rho(q^2) = f(q^2)\Gamma_\rho, \quad (\text{G-1})$$

y que cumpla con el límite

$$\lim_{q^2 \rightarrow m_\rho^2} \Gamma_\rho(q^2) = \Gamma_\rho, \quad \text{o bien} \quad \lim_{q^2 \rightarrow m_\rho^2} f(q^2) = 1; \quad (\text{G-2})$$

donde $q^2 = s$, con s la variable de Mandelstam para la energía y Γ_ρ es el valor teórico (constante) para este parámetro. Para hacerlo, partimos de la expresión del decaimiento del mesón ρ^0 a dos piones (cargados)

$$\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi} = \frac{|\bar{p}_1|}{32\pi^2 m_\rho^2} \int |\bar{\mathcal{M}}_{\rho \rightarrow \pi\pi}|^2 d\Omega, \quad (\text{G-3})$$

donde \bar{p}_1 es el 3-momento de uno de los piones; $\bar{\mathcal{M}}_{\rho \rightarrow \pi\pi}$, la amplitud de este decaimiento y Ω , el ángulo sólido. $\bar{\mathcal{M}}_{\rho \rightarrow \pi\pi}$ está dada por la expresión

$$\bar{\mathcal{M}}_{\rho \rightarrow \pi\pi} = -g_{\rho\pi\pi} \epsilon_\mu (p_1 - p_2)^\mu; \quad (\text{G-4})$$

con ϵ_μ el vector de polarización del mesón ρ y p_1 y p_2 son los 4-momentos de los piones emitidos.

La integral de la expresión G-3 da como resultado

$$\Gamma_\rho = \frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{48\pi} m_\rho^{-5} (\lambda [m_\rho^2, m_\pi^2, m_\pi^2])^{3/2}, \quad (\text{G-5})$$

con $\lambda[a, b, c] \equiv a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$; debido a que hemos considerado que el mesón ρ^0 sólo puede decaer en piones cargados, la masa m_π es precisamente la de los piones cargados.

Si en esta ecuación hacemos el reemplazo $m_\rho^2 \rightarrow q^2$ obtenemos

$$\Gamma_\rho(q^2) = \frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{48\pi} \left(\sqrt{q^2}\right)^{-5} (\lambda [q^2, m_\pi^2, m_\pi^2])^{3/2}. \quad (\text{G-6})$$

Sustituyendo (G-5) y (G-6) en (G-1) encontramos que

$$f(q^2) = \frac{\left(\sqrt{q^2}\right)^{-5} (\lambda [q^2, m_\pi^2, m_\pi^2])^{3/2}}{m_\rho^{-5} (\lambda [m_\rho^2, m_\pi^2, m_\pi^2])^{3/2}}, \quad (\text{G-7})$$

que cumple el límite en (G-2). Con lo que podemos escribir

$$\Gamma_\rho(q^2) = \frac{\left(\sqrt{q^2}\right)^{-5} (\lambda [q^2, m_\pi^2, m_\pi^2])^{3/2}}{m_\rho^{-5} (\lambda [m_\rho^2, m_\pi^2, m_\pi^2])^{3/2}} \Gamma_\rho. \quad (\text{G-8})$$

Esta es la función para el ancho de decaimiento del mesón ρ , que hemos considerado a lo largo de todo este trabajo.

Apéndice H

Promedios Pesados y El parámetro χ^2 .

Promedios Pesados y Varianza.

Para calcular un promedio pesado de una serie de datos de la forma $x_i \pm \sigma_i$, se utiliza la expresión

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (\text{H-1})$$

La varianza para este promedio está dada por

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (\text{H-2})$$

Este estilo de promedio no considera todo el rango de valores posibles de los datos de los cuales se obtiene sino que da un factor de peso debido a la incertidumbre de cada dato y señala al más precisamente medido como el más probable.

Bondad de Ajuste.

La prueba estadística de χ^2 para una muestra se emplea frecuentemente como prueba de bondad de ajuste; la eficacia de la prueba está de acuerdo con el tamaño de la muestra. La función χ^2 está dada por la expresión

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{\text{exp}})^2}{\sigma_i}. \quad (\text{H-3})$$

En nuestro caso los valores x_i fueron los valores teóricos calculados a partir de nuestro modelo, x_{exp} son los valores experimentales de la sección eficaz y σ_i la incertidumbre experimental

asociada a cada punto. Para nuestro ajuste lo que hicimos fue calcular esta función para distintos valores de la constante $g_{\omega\rho\pi}$ y tomar el que arrojaba el valor mínimo para dicha función, dividida por el número de grados de libertad, los cuales son iguales al número de puntos utilizados para calcular la función χ^2 menos el número de parámetros ajustados.

Apéndice I

Cinemática.

Las expresiones que utilizamos aquí están basadas en el trabajo realizado por R. Kumar y puede ser encontrado con mayor detalle en la referencia [83], donde se desarrolla el decaimiento y la producción de n partículas en el estado final. Lo que nosotros presentamos aquí son las expresiones explícitas para el caso de la producción de 4 partículas como estado final.

Si uno considera el proceso de producción de n cuerpos $A_1(q_1) + A_2(q_2) \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i(p_i)$, el espacio fase que se presenta en la referencia [83] está dado por la expresión

$$\mathcal{P}_n = \left[\prod_{i=1}^n \int d^4 p_i \delta(p_i^2 + m_i^2) \right] \delta^4 \left(q_1 + q_2 - \sum_{i=1}^n p_i \right). \quad (\text{I-1})$$

La expresión I-1 difiere de la que presentan en el Compendio de Partículas [1] en un factor de $(2\pi)^{-3n}$ por lo que para poder comparar con datos o referencias que utilizan esta convención es necesario dividir por este factor nuestros resultados.

Utilizando la expresión (5) del artículo de Kumar para el caso específico de 4 cuerpos en el estado final uno obtiene que el espacio fase está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4 = & \frac{\pi}{2s} \int_{s_{1-}}^{s_{1+}} ds_1 \int_{s_{2-}}^{s_{2+}} ds_2 \int_{u_{1-}}^{u_{1+}} du_1 [\lambda(s, s_1, s'_1) \lambda(s, m_{\pi^0}^2, u_1)]^{-1/2} \\ & \int_{u_{2-}}^{u_{2+}} du_2 [\lambda(s, s_2, s'_2) \lambda(s, m_{\pi^+}^2, u_2)]^{-1/2} \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} dt_0 \\ & \int_{t_{1-}}^{t_{1+}} [(1 - \xi_1^2) (1 - \eta_1^2) (1 - \zeta_1^2)]^{-1/2} dt_1 \\ & \int_{t_{2-}}^{t_{2+}} [(1 - \xi_2^2) (1 - \eta_2^2) (1 - \zeta_2^2)]^{-1/2} dt_2, \end{aligned} \quad (\text{I-2})$$

con la función $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$, en donde también hemos utilizado la aproximación de que la masa del electrón es igual a cero. El factor de espacio fase FEF

utilizado en la ecuación 6.37 está dado por todas las funciones entre corchetes en la expresión anterior y el factor $\frac{\pi}{2s}$.

Para definir las demás variables, considérese el proceso $e^+(k_1)e^-(k_2) \rightarrow \pi^+(p_1)\pi^0(p_2)\pi^-(p_3)\pi^0(p_4)$; tal que $k_1 + k_2 = q = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$. Entonces

$$\begin{aligned}
s_1 &= (q - p_1)^2 \\
s_2 &= (q - p_1 - p_2)^2 \\
u_1 &= (q - p_2)^2 \\
u_2 &= (q - p_3)^2 \\
t_0 &= (k_1 - p_1)^2 \\
t_1 &= (k_1 - p_2)^2 \\
t_2 &= (k_1 - p_3)^2
\end{aligned} \tag{I-3}$$

$$\begin{aligned}
s'_1 &= m_{\pi^+}^2 \\
s'_2 &= s_2 + s + m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^0}^2 - s_1 - u_1 \\
\xi_1 &= [s(s + s'_1 - s_1) - 2s(m_{\pi^+}^2 - t_0)] [\lambda(s, 0, 0)\lambda(s, s_1, s'_1)]^{-1/2} \\
\xi_2 &= [s(s + s'_2 - s_2) - 2s(m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^0}^2 - t_0 - t_1)] [\lambda(s, 0, 0)\lambda(s, s_2, s'_2)]^{-1/2} \\
\eta_1 &= [2s(s_1 + m_{\pi^0}^2 - s_2) - (s + m_{\pi^0}^2 - u_1)(s + s_1 - s'_1)] [\lambda(s, m_{\pi^0}^2, u_1)\lambda(s, s_1, s'_1)]^{-1/2} \\
\eta_2 &= [2s(s_2 + m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2) - (s + m_{\pi^+}^2 - u_2)(s + s_2 - s'_2)] [\lambda(s, m_{\pi^+}^2, u_2)\lambda(s, s_2, s'_2)]^{-1/2} \\
\zeta_i &= (\omega_i - \xi_i\eta_i) [(1 - \xi_i^2)(1 - \eta_i^2)]^{-1/2}
\end{aligned} \tag{I-4}$$

con la función $\omega_i = [s(s + m_{i+1}^2 - u_i) - 2s(m_{i+1}^2 - t_i)] [\lambda(s, 0, 0)\lambda(s, m_{i+1}^2, u_i)]^{-1/2}$.

Los límites de integración según esta referencia están dados por

$$\begin{aligned}
s_{1-} &= (m_{\pi^+} + 2m_{\pi^0})^2 \\
s_{1+} &= (\sqrt{s} - m_{\pi^+})^2
\end{aligned} \tag{I-5}$$

$$\begin{aligned}
s_{2-} &= (m_{\pi^+} + m_{\pi^0})^2 \\
s_{2+} &= (\sqrt{s_1} - m_{\pi^0})^2
\end{aligned} \tag{I-6}$$

$$u_{1\pm} = s + m_{\pi^0}^2 - \frac{(s_1 + m_{\pi^0}^2 - s_2)(s + s_1 - s'_1)}{2s_1} \pm \frac{[\lambda(s_1, m_{\pi^0}^2, s_2)\lambda(s, s_1, s'_1)]^{1/2}}{2s_1} \tag{I-7}$$

$$u_{2\pm} = s + m_{\pi^+}^2 - \frac{(s_2 + m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2)(s + s_2 - s'_2)}{2s_2} \pm \frac{[\lambda(s_2, m_{\pi^+}^2, m_{\pi^0}^2) \lambda(s, s_2, s'_2)]^{1/2}}{2s_2} \quad (\text{I-8})$$

$$t_{0\pm} = m_{\pi^+}^2 - \frac{(s + m_{\pi^+}^2 - s_1)}{2} \pm \frac{[\lambda(s, 0, 0) \lambda(s, m_{\pi^+}^2, s_1)]^{1/2}}{2s} \quad (\text{I-9})$$

$$t_{1\pm} = m_{\pi^0}^2 - \frac{(s + m_{\pi^0}^2 - u_1)}{2} + \frac{[\lambda(s, 0, 0) \lambda(s, m_{\pi^0}^2, u_1)]^{1/2}}{2s} (\xi_1 \eta_1 \pm [(1 - \xi_1^2)(1 - \eta_1^2)]^{1/2}) \quad (\text{I-10})$$

$$t_{2\pm} = m_{\pi^+}^2 - \frac{(s + m_{\pi^+}^2 - u_2)}{2} + \frac{[\lambda(s, 0, 0) \lambda(s, m_{\pi^+}^2, u_2)]^{1/2}}{2s} (\xi_2 \eta_2 \pm [(1 - \xi_2^2)(1 - \eta_2^2)]^{1/2}). \quad (\text{I-11})$$

Con ayuda de estas expresiones para los límites de integración y habiendo definido las variables según se presentaron en este apéndice, es como fuimos capaces de realizar un programa de computo que nos auxiliara en el cálculo de la sección eficaz para el proceso de producción de cuatro piones.

Bibliografía

- [1] K. Nakamura et al., Journal of Physics G37 075021 (2010).
- [2] Heath B. O'Connell, Austral. J. Phys.50:255-262,1997.
- [3] F. Jegerlehner, Acta Phys.Polon.B38:3021 (2007).
- [4] F. Jegerlehner; J. Phys. G29:101-110 (2003).
- [5] J. Juran y P. Lichard, Phys. Rev. D 78, 017501 (2008).
- [6] H. Czyz, J. H. Khun y A. Wapienik, Phys. Rev D77, 114005 (2008).
- [7] A. Bramon, A. Grau y G. Pancheri, Phys. Lett. B317, (1993) 190-194.
- [8] S. I. Eidelman, Z. K. Silagadze y E. A. Kuraev., Phys. Lett. B346 (1995) 186-189.
- [9] J.J. Sakurai, Ann. of Physics 11 (1960) 1.
- [10] A. R. Zerwekh, ActaPhys.Polon.B38:2077-2082, 2007.
- [11] N. M. Kroll, T. D. Lee y B. Zumino, Phys. Rev. 157, 1376 (1967).
- [12] M. Gell-Mann, D. Sharp, W. G. Wagner, Phys. Rev. Lett. 8 (1962) 460.
- [13] M, Bando, et al., Phys. Rev. Lett. 54, 1215-1218 (1985)
- [14] K. Hagiwara, R. D. Peccei, D. Zeppenfeld y K. Hikasa, Nucl. Phys. B282, 253 (1987).
- [15] Genaro Toledo Sánchez; Tesis Doctoral; Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, 1999.
- [16] J. F. Nieves y P. B. Pal, Phys. Rev. D55 3118 (1997).
- [17] Ta-Pei Cheng y Ling-Fong Li; Gauge Theory of Elementary Particle Physics; Clarendon Press, Oxford, 1984.
- [18] J. Abdallah et al., European Physical Journal C54 345 (2008).
- [19] S. Schael et al., Phys. Lett. B614 7, (2005).

- [20] G. Abbiendi et al., *European Physical Journal C* 33 463 (2004).
- [21] P. Achard et al., *Phys Lett. B* 586 151 (2004).
- [22] F. T. Hawes y M.A. Pichowsky; *Phys. Rev. C* 59 1743 (1999).
- [23] M.S. Bhagwat y P. Maris; *Phys. Rev. C* 77 025203 (2008).
- [24] Ho-Meoyng Choi y Chueng-Ryong Ji, *Phys. Rev. D* 70 053015 (2004).
- [25] F. Cardarelli, I. L. Grach, I. M. Narodetskii, G. Salme y S. Simula; *Phys. Lett. B* 349, 393 (1995).
- [26] J. P. B. C. Melo y T. Frederico; *Phys Rev. C* 55 2043 (1997).
- [27] J. N. Hedditch, W. Kamleh, B. G. Lasscock, D. B. Leinweber, A. G. Williams y J. M. Zanotti, *Phys. Rev. D* 75 094504 (2007).
- [28] S. Dittmaier hep-ph/9811434 y referencias dentro del mismo.
- [29] U. Baur and D. Zeppenfeld, *Phys. Rev. Lett.* 75, 1002 (1995).
E. N. Argyres et al., *Phys. Lett. B* 358, 339 (1995).
M. Beuthe, R. Gonzales Felipe, G. López Castro, and J. Pestieau, *Nucl. Phys. B* 498, 55 (1997).
- [30] G. López Castro and G. Toledo Sánchez, *Phys. Rev. D* 61, 033007 (2000).
- [31] D. Yu. Bardin, A. Leike, T. Riemann, y M. Sachwitz, *Phys. Lett. B* 206, 546 (1988);
G. López Castro, J. L. M. Lucio, and J. Pestieau, *Mod. Phys. Lett. A* 6, 3679 (1991).
- [32] J. Gegelia and S. Scherer, arXiv:0910.4280v1.
- [33] B. A. Kniehl and A. Sirlin, *Phys. Lett. B* 530, 129 (2002), y referencias dentro del mismo.
- [34] D. García Gudino y G. Toledo Sánchez, *Phys. Rev. D* 81, 073006 (2010).
- [35] A. Dbeyssi, E. Tomasi-Gustafsson, G. I. Gakh y C. Adamuscín, arXiv:1112.6248v1 [hep-ph] (2011).
- [36] M. Benayoun, P. David, L. DelBuono, O. Leitner, *Eur. Phys. Jour C* 65, 211(2010) y
M. Benayoun, P. David, L. DelBuono, O. Leitner, *Eur. Phys. Jour C* 68, 355(2010).
- [37] N. M. Kroll, T.D. Lee and B. Zumino, *Phys. Rev.* 157 1376(1967).
- [38] P. Lichard, *Phys. Rev. D* 49, 5812(1994).
- [39] M. N. Achasov et al., *Phys. Rev. D* 63 (2001)072002.
- [40] M. N. Achasov et al. *Phys. Rev. D* 63, 072002(2001).

-
- [41] M. Benayoun and H. B. O'Connell, Eur. Phys. Jour C 22, 503(2001).
- [42] A. Flores Tlalpa y G. Lopez Castro Phys. Rev. D 77 113011(2008).
- [43] P. Lichard, Phys. Rev. D 83 037503 (2011).
- [44] T. Fujiwara et al. , Prog. Theor. Phys. 73, 92(1985).
- [45] S.Adler, B.W.Lee, S.Treiman, A.Zee, Phys. Rev. D 4, 3497(1971).
- [46] M.V. Terentev, JETP Lett. 14, 40(1971). y M.V. Terentev, Phys. Lett. B 38, 419(1972).
- [47] J. Wess , B. Zumino , Phys. Lett. B 37, 95(1971).
- [48] E. Witten , Nucl. Phys. B 223, 422(1983).
- [49] K.Kawarayabashi and M.Suzuki , Phys. Rev. Lett. 16, 255(1966); Riazuddin and Fayyazuddin, Phys. Rev. 147, 1071(1966).
- [50] M. Gell-Mann y F. Zachariasen, Phys. Rev. 124 (1961) 953.
- [51] R.R. Akhmetshin et al. Phys. Lett. B 476, 33(2000).
- [52] R.R. Akhmetshin, et al. Phys. Lett. B 578, 285(2004).
- [53] K. W. Edwards et al. Phys. Rev. D 61, 072003 (2000).
- [54] F. Ambrosino, et al. Phys. Lett. B 669, 223(2008).
- [55] V. M. Aulchenko, et al Jour. Exp. Theo. Phys. 90, 927(2000).
- [56] M. N. Achasov et al. Phys. Rev. D 68 052006 (2003). y M. N. Achasov et al. Phys. Rev. D 65 032002(2002).
- [57] E. A. Kuraev, Z. Silagadze, Phys. Atom. Nucl. 58, 1589(1995).
- [58] S. Rudaz, Phys. Lett. 145 B (1984) 281.
- [59] T. D. Cohen, Phys. Lett. B 233 467(1989).
- [60] Véase por ejemplo: Pedro D. Ruiz-Femenía, A.Pichand y J.Portolés, JHEP 07, 003(2003).
- [61] N. N. Achasovand, A. A. Kozhevnikov, Phys. Rev. D62,117503 (2000) y referencias dentro del mismo.
- [62] D. Garcia Gudiño, G. Toledo Sanchez, arXiv:1209.6565 [nucl-th], 2012.
- [63] O. Kaymakcalan, S. Rajeev, J. Schechter, Phys. Rev. D 30, 594(1984).
- [64] C. A. Dominguez, Mod. Phys. Lett. A 12 983(1987).

- [65] S. Leupold and M.F.M. Lutz, *Eur. Phys. Jour.* A39, 205(2009).
- [66] V. M. Khathimovsky, *Yad. Fiz.* 41, 519 (1985).
- [67] M. V. Margvelashvili and M. E. Shaposhnikov, *Z. Phys. C* 38, 467 (1988).
- [68] V.L. Eletsky, B.L. Ioffe, Ya.I. Kogan, *Phys. Lett. B* 122 423(1983).
- [69] S. Narison and N. Paver, *Z. Phys. C* 22, 69(1984).
- [70] V. M. Braun and I. E. Filyanov, *Z. Phys. C* 44, 157 (1989).
- [71] M. Lublinsky, *Phys. Rev. D* 55, 249(1997).
- [72] P. Rotelli and M.D. Scadron, *Il Nuovo Cimento A* 15,643 (1973).
- [73] P.G.O. Freund and S. Nandi, *Phys. Rev. Lett.* 32, 181(1974).
- [74] A. Bramon, A. Grau, G. Pancheri *Phys. Lett. B* 344, 240(1995).
- [75] M. Hashimoto, *Phys. Lett. B* 381 465(1996).
- [76] H.Czyz,A.Grzelinska,J.H.Kuhn,andG.Rodrigo,*Eur.Phys.Jour.C*47,617(2006).
- [77] J. L. Lucio et al. *Phys. Rev. D* 61, 034013(2000).
- [78] Stephen R. Cotanch and Pieter Maris *Phys. Rev. D* 68, 036006 (2003).
- [79] H. Czyz, J. H. Kuhn y A. Wapienik, *Phys. Rev. D* 77, 114005 (2008) y referencias dentro del mismo.
- [80] G. Ecker y R. Unterdorfer, *Eur. Phys. J. C* 24, 535 (2002).
- [81] V. P. Druzhinin, arxiv: 0710.3455 (2007).
- [82] D. García Gudiño, G. Toledo Sanchez, *Int. J. Mod. Phys. A* 27, 1250101(2012).
- [83] R. Kumar, *Phys. Rev.* 185, 1865-1875 (1969).
- [84] G.P. Lepage, VEGAS: An Adaptive Multi-dimensional Integration Program, Cornell preprint CLNS 80-447, March 1980.
- [85] A. Bramon, A. Grau y G. Pancheri, *Phys. Lett. B* 317, 190-194 (1993).
- [86] S. I. Eidelman, Z. K. Silagadze y E. A. Kuraev; *Phys. Lett. B* 346, 186-189 (1995).
- [87] M. Beuthe, R. Gonzales Felipe, G. López Castro, and J. Pestieau, *Nucl. Phys. B*498, 55 (1997).
- [88] B. A. Arbuzov, *Eur. Phys. J. C* 61, 51 (2009).
- [89] J. Papavassiliou, arXiv:hep-ph/9504382.

Los siguientes artículos fueron producto de este trabajo y ya han sido enviados para su publicación o han sido publicados.

Finite width induced modification to the electromagnetic form factors of spin-1 particles

D. García Gudiño

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, AP 20-364, México D.F. 01000, México

G. Toledo Sánchez

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, AP 20-364, México D.F. 01000, México
and Department of Physics, Florida State University, Tallahassee, Florida 32306, USA*

(Received 13 January 2010; revised manuscript received 17 March 2010; published 16 April 2010)

The inclusion of the unstable features of a spin-1 particle, without breaking the electromagnetic gauge invariance, can be properly accomplished by including higher order contributions as done in the so-called fermion loop scheme (for the W gauge boson) and the boson loop scheme (for vector mesons). This induces a nontrivial modification to the electromagnetic vertex of the particle, which must be considered in addition to any other contribution computed as stable particles. Considering the modified electromagnetic vertex, we obtain general expressions for the corresponding corrections to the multipoles as a function of the mass of the particles in the loop. For the W gauge boson no substantial deviations from the stable case are observed. For the ρ and K^* mesons the mass of the particles in the loop has a significant effect, and can be comparable with corrections of a different nature.

DOI: [10.1103/PhysRevD.81.073006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.073006)

PACS numbers: 13.40.Gp, 11.10.St, 14.40.-n

I. INTRODUCTION

The electromagnetic properties of spin-1 particles (V) can help us to understand the symmetry structure and interactions of the fundamental particles. For example, considering V as a stable state, the electromagnetic properties of the W gauge boson are predicted by the symmetry structure of the standard model, while for the ρ meson several predictions exist, based on effective models of the strong interaction binding the quarks [1–5], and from lattice QCD [6,7]. However, they are not stable states. Therefore, in order to draw definite conclusions, a complete study of the *additional* effects due to their instability is mandatory.

The proper theoretical description of such states requires the incorporation of their unstable features (parametrized by their finite decay width Γ) in an electromagnetic gauge invariant way. To do so, several schemes have been developed; we can mention, for example, the so-called fermion loop scheme [8–10] and the boson loop scheme [11] (suitable for the W and ρ bosons, respectively), which consider that Γ is naturally included in the calculations by taking into account the absorptive contributions in the electromagnetic vertex and in the propagator. Under these schemes, the electromagnetic vertex $VV\gamma$ is modified with respect to the tree-level form in a nontrivial way. This implies that the electromagnetic structure itself suffers modifications.

In the present work we analyze the most general results for the electromagnetic vertices obtained in the loop schemes, which include the mass of the particles in the loops, and extract the expressions for the modified form factors. In order to exhibit the size of the corrections due to the unstable nature of the particles, we compare our results for the magnetic dipole moment (MDM) and electric

quadrupole moments of the W , ρ , and K^* mesons with others computed in the literature for contributions of a different nature. The gauge invariance requirement, along with the modification in the propagator inherent to the schemes, allows us to identify the proper complex renormalization factor of the vector field, which keeps the electric charge free of radiative correction contributions.

II. FINITE WIDTH EFFECTS

The schemes developed in [8–11] for the introduction of the finite width effects, while keeping electromagnetic gauge invariance, are based on two main observations: In quantum field theory the width is naturally included in the imaginary part of the self-energy of the particles, and the Ward identity is respected at all orders in perturbation theory. These facts are exploited in those schemes by including the resummation of the fermion/boson loops in the propagator and the corrections in the electromagnetic vertices. Then, the imaginary part of the fermion/boson loops introduces the tree-level width in the gauge boson propagator, and the gauge invariance is not violated since the fermion/boson loops obey the Ward identity order by order.

At tree level, the propagator for a vector boson of mass M_V can be set as

$$D_0^{\mu\nu}(q) = -\frac{iT^{\mu\nu}(q)}{q^2 - M_V^2} + \frac{iL^{\mu\nu}(q)}{M_V^2}, \quad (1)$$

where $T^{\mu\nu}(q) \equiv g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / q^2$ and $L^{\mu\nu}(q) \equiv q^\mu q^\nu / q^2$ are the transversal and longitudinal projectors, respectively. The vertex for the process $V(q_1) \rightarrow V(q_2)\gamma(k)$ is defined by the electromagnetic current

$$\langle V(q_2)|J^\mu(0)|V(q_1)\rangle = A_\nu^\dagger(q_2)A_\lambda(q_1)\Gamma^{\mu\nu\lambda}. \quad (2)$$

At tree level, the vertex can be set as that given by the standard model for the W boson:

$$\Gamma_0^{\mu\nu\lambda} = g^{\mu\nu}(q_1 + q_2)^\lambda - g^{\mu\lambda}(q_1 + k)^\nu - g^{\nu\lambda}(q_2 - k)^\mu. \quad (3)$$

These expressions satisfy the Ward identity

$$k_\mu \Gamma_0^{\mu\nu\lambda} = [iD_0^{\nu\lambda}(q_1)]^{-1} - [iD_0^{\nu\lambda}(q_2)]^{-1}. \quad (4)$$

Upon the inclusion of the finite width of the boson, by considering the loop contributions, the propagator is modified in a generic form as

$$D^{\mu\nu}(q) = -\frac{iT^{\mu\nu}(q)}{q^2 - M_V^2 + iIm \Pi^T(q^2)} + \frac{iL^{\mu\nu}(q)}{M_V^2 - iIm \Pi^L(q^2)}, \quad (5)$$

where $Im \Pi^T(q^2)$ and $Im \Pi^L(q^2)$ are the transverse and longitudinal parts of the absorptive contribution of the self-energy induced by the particles in the loop. Similarly, the vertex becomes

$$ie\Gamma^{\mu\nu\lambda} = ie(\Gamma_0^{\mu\nu\lambda} + \Gamma_1^{\mu\nu\lambda}), \quad (6)$$

where $\Gamma_1^{\mu\nu\lambda}$ contains the loop corrections. The Ward identity relates the loop contributions by requiring

$$k_\mu \Gamma_1^{\mu\nu\lambda} = iIm \Pi^{\nu\lambda}(q_1) - iIm \Pi^{\nu\lambda}(q_2). \quad (7)$$

For a boson like W , the scheme considers that such loops are produced by fermions, while for vector mesons, like ρ , bosons are the natural particles in the loop.

In general, the CP conserving electromagnetic vertex can be decomposed into the following Lorentz structure:

$$\Gamma^{\mu\nu\lambda} = \alpha(k^2)g^{\nu\lambda}(q_1 + q_2)^\mu + \beta(k^2)(g^{\mu\nu}k^\lambda - g^{\mu\lambda}k^\nu) - \gamma(k^2)(q_1 + q_2)^\mu k^\nu k^\lambda, \quad (8)$$

where the electromagnetic form factors can be identified as follows: $|\mathcal{Q}| \equiv \alpha(k^2)$ is the electric charge form factor (in e units), $|\vec{\mu}| = \beta(k^2) \equiv 1 + \kappa + \lambda$ is the magnetic dipole moment form factor (in $e/2M_V$ units), and $|X_E| = \kappa - \gamma(k^2)M_V^2 \equiv \kappa - \lambda$ is the electric quadrupole form factor

(in e/M_V^2 units). The parameters κ and λ are commonly used in the literature to refer to the electromagnetic multipoles [12,13]. The static electromagnetic properties of a particle are defined for the case when the particle is on shell and in the limit $\vec{k} \rightarrow 0$. At tree level, for example, the standard model predicts that the W will have $\alpha(0) = 1$, $\beta(0) = 2$, and $\gamma(0) = 0$ ($\kappa = 1$ and $\lambda = 0$), corresponding to $|\mathcal{Q}| = 1$, $|\vec{\mu}| = 2$, and $|X_E| = 1$. Deviations from these values are generically called anomalous and are produced by the inclusion of higher order contributions [14]. In the present case such contributions are exclusively those required to maintain the electromagnetic gauge invariance, upon the introduction of the finite decay width.

A. W boson form factors

Let us identify the modification to the W boson form factors introduced by the correction to the electromagnetic vertex. For that purpose we consider the explicit expression of the vertex obtained in Ref. [10], where the mass of the emitting particles in the loop (m) and its weak partner (m') have been considered. The Lorentz structure, transversality, and on-shell condition of the boson, along with the proper limit for $k \rightarrow 0$, lead to the following expressions for the form factors, defined in Eq. (8):

(i) Electric charge:

$$\alpha(0) = 1 + i \sum_i Q_i \frac{\Gamma_i}{M_W} \left(1 - 3 \frac{M_W^2 \Sigma^2 (3\Sigma^2 - 2M_W^2) + \Delta^4 (M_W^2 - 2\Sigma^2)}{2M_W^6 \lambda^2} \right), \quad (9)$$

where $\Sigma^2 \equiv m^2 + m'^2$, $\Delta^2 \equiv m^2 - m'^2$, Q_i is the electric charge of the radiating particle in the loop, $\Gamma_i/M_W \equiv g_i^2 \lambda^{3/2}/48\pi$ is the partial decay width for the modes corresponding to the particles in the loop, g_i denotes the coupling, and $\lambda \equiv (M_W^4 + \Delta^4 - 2\Sigma^2 M_W^2)/M_W^4$. A sum over all the allowed flavors and color degeneracies is explicitly included. Since the schemes consider the particles in the loop to be on shell, the flavors include all the leptons and the u , d , s , and c quarks.

(ii) Magnetic dipole moment:

$$\beta(0) = 2 + i \sum_i Q_i \frac{\Gamma_i}{M_W} \left(2 - 3 \frac{\Sigma^2 (6\Sigma^2 - 4M_W^2) + \Delta^2 (\Sigma^2 + 3\Delta^2) + \frac{\Delta^4}{M_W^4} (2\Delta^4 - M_W^2 (\Delta^2 + 7\Sigma^2))}{2M_W^4 \lambda^2} \right). \quad (10)$$

(iii) Electric quadrupole moment:

$$\gamma(0) = -i \sum_i Q_i \frac{\Gamma_i}{M_W} \frac{M_W^2 \lambda (2\Delta^4 - M_W^2 (\Sigma^2 + \Delta^2)) + (\Sigma^2 - \Delta^2) (\Delta^4 - M_W^2 \Sigma^2)}{M_W^6 \lambda^2}. \quad (11)$$

- (iv) Isospin limit: Let us show, just for illustration, the above expressions in the case of $m = m'$. They become

$$\alpha(0) = 1 + i \sum_i Q_i \frac{\Gamma_i}{M_W} \left(1 - \frac{3\Sigma^2(3\Sigma^2 - 2M_W^2)}{2M_W^4 \lambda_I^2} \right), \quad (12)$$

$$\beta(0) = 2 + 2i \sum_i Q_i \frac{\Gamma_i}{M_W} \left(1 - \frac{3\Sigma^2(3\Sigma^2 - 2M_W^2)}{2M_W^4 \lambda_I^2} \right), \quad (13)$$

$$\gamma(0) = i \sum_i Q_i \frac{\Gamma_i}{M_W} \frac{\Sigma^2(M_W^2 \lambda_I + \Sigma^2)}{M_W^4 \lambda_I^2}, \quad (14)$$

where $\lambda_I = (M_W^4 - 2\Sigma^2 M_W^2)/M_W^4$.

$$\gamma_\rho(0) = i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \frac{M_\rho^2 \lambda (2\Delta^4 - M_\rho^2(\Sigma^2 + \Delta^2)) + (\Sigma^2 - \Delta^2)(\Delta^4 - M_\rho^2 \Sigma^2)}{M_\rho^6 \lambda^2}. \quad (17)$$

- (iv) Isospin limit: The neutral and charged pions are almost degenerated. Taking the isospin limit the form factors become

$$\alpha_\rho(0) = 1 + i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \left(1 + \frac{3\Sigma^2}{M_\rho^2 \lambda_I} \right), \quad (18)$$

$$\beta_\rho(0) = 2 + i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \left(2 + \frac{3\Sigma^2}{M_\rho^2 \lambda_I} \right), \quad (19)$$

$$\gamma_\rho(0) = -i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \frac{\Sigma^2(M_\rho^2 \lambda_I + \Sigma^2)}{M_\rho^4 \lambda_I^2}, \quad (20)$$

where $\lambda_I = (M_\rho^4 - 2\Sigma^2 M_\rho^2)/M_\rho^4$.

The corrections for the K^{*+} meson follows from the results for the ρ meson by including the two possible channels for the loop contributions: $K^{*+} \rightarrow K^+ \pi^0$ and $K^{*+} \rightarrow K^0 \pi^+$, with the corresponding masses and partial decay widths.

C. Chiral limit

The chiral limit correction to the vertex is known to be proportional to the tree level, in both the fermion and boson loop corrections [11]. Therefore, in this limit we can write the modification to the form factors in a generic form as follows:

$$\Gamma^{\mu\nu\lambda} = \left(1 + i \frac{\Gamma}{M_V} \right) \Gamma_0^{\mu\nu\lambda}. \quad (21)$$

B. ρ and K^{*} mesons

Proceeding along the same lines as the W gauge boson, we obtain the modifications to the ρ meson form factors, taking the complete expressions for the modified vertex computed in [11]:

- (i) Electric charge:

$$\alpha_\rho(0) = 1 + i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \left(1 - \frac{3(\Delta^4 - \Sigma^2 M_\rho^2)}{M_\rho^4 \lambda} \right), \quad (15)$$

where $\Gamma_\rho/M_\rho \equiv g^2 \lambda^{3/2}/48\pi$, g is the effective $\rho\pi\pi$ coupling constant, and $\Delta^2 \equiv m_\pi^2 - m_{\pi'}^2$ and $\Sigma^2 \equiv m_\pi^2 + m_{\pi'}^2$.

- (ii) Magnetic dipole moment:

$$\beta_\rho(0) = 2 + i \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho} \left(2 + \frac{3(\Sigma^2 - \Delta^2)}{M_\rho^2 \lambda} \right). \quad (16)$$

- (iii) Electric quadrupole moment:

III. NUMERICAL RESULTS

The correction to the vertex seems to induce a modification to the electric charge. However, since the Ward identity is fulfilled, the modification to the vertex is followed by a modification to the propagator, which produces an exact cancellation of the correction to the electric charge. Let us illustrate this point in more detail. For the sake of clarity, we consider the expression in the chiral limit: The modified propagator can be set as [11,15]

$$D^{\mu\nu}(q) = \frac{i}{(1+i\gamma)} \left(\frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{M_V^2 - iM_V \bar{\Gamma}}}{q^2 - \bar{M}_V^2 + i\bar{M}_V \bar{\Gamma}} \right) \equiv \langle 0 | T A^{\mu\dagger}(x) A^\nu(y) | 0 \rangle, \quad (22)$$

where $\bar{M}_V, \bar{\Gamma} \equiv M_V, \Gamma/\sqrt{1+\gamma^2}$, ($\gamma \equiv \Gamma/M_V$); i.e., it can be seen as a renormalization of the vector field by the inclusion of the finite width

$$A^{\nu} = Z^{1/2} A^{\nu}, \quad (23)$$

where $Z^{1/2} = 1/(1+i\gamma)^{1/2}$. Then, the electromagnetic current becomes

$$A_\nu^{\dagger}(q_2) A_\lambda^{\dagger}(q_1) \Gamma^{\mu\nu\lambda} = Z A_\nu^{\dagger}(q_2) A_\lambda^{\dagger}(q_1) (\alpha(k^2) \times g^{\nu\lambda} (q_1 + q_2)^\mu + \dots). \quad (24)$$

Therefore, gauge invariance requires that $Z\alpha(k^2) = 1$, which is indeed the case, and the electric charge does not receive any correction. Note that the modification to the vertex given by Eq. (21) implies that none of the multipoles receive corrections in the chiral limit. An analysis for

unstable spin-1/2 particles has also been performed in Ref. [16], pointing out complex renormalization factors as a requirement for properly defined physical quantities. Further considerations on the renormalizability of the wave function can be seen in Ref. [17]. The proper values of the modifications to the form factors are then found by the expressions given in the previous section divided by $\alpha'(0)$. In Table I, we present the corresponding results for the W gauge boson and the ρ and K^* mesons. Recall that the particles in the loops are restricted to be on shell. For the W we have included all the leptons and the u , d , s , and c quarks, and the numerical values are similar to those obtained in the chiral limit (the largest fermion-to- W mass ratio is only ≈ 0.022). As a reference of the magnitude of the modification, we recall several results obtained for contributions of a different nature: Reference [18] finds a correction to the MDM induced by the Higgs of $\mu = 2 - 0.0151$, while Ref. [19] finds a correction from quark, lepton, and Higgs loops in the standard model of $\mu = 2 + 0.00258$; i.e. the width induced corrections are at least 2 orders of magnitude smaller than other standard contributions. Note that, due to the renormalization condition, the argument that the finite width correction to the vertex is of order Γ/M_V (≈ 0.03 , 0.19 , and 0.06 for the W , ρ , and K^* , respectively) does not extend to the electromagnetic multipoles.

For the ρ meson, pions are the only on-shell particles allowed in the loops. In this case the pion-to- ρ mass ratio (≈ 0.18) is not as small as the corresponding one for the fermion-to- W , and therefore a significant effect from the mass of the particles in the loop is expected. We can compare our results shown in Table I with those shown

TABLE I. W gauge boson, and ρ and K^* meson multipoles, including the corrections due to their finite width.

Multipole	W boson	ρ meson	K^* meson
$ \mathcal{Q} [e]$	1	1	1
$ \vec{\mu} [e/2M_V]$	2.0	$2 - 0.0091$	$2 - 0.0047$
$ X_E [e/M_V^2]$	$1 - 4.23 \times 10^{-7}$	$1 - 0.0387$	$1 - 0.097$

TABLE II. Numerical values for the ρ and K^* meson multipoles from several references, computed as stable particles.

Reference	$ \vec{\mu} [e/2M_V]$	$ X_E [e/M_V^2]$
[2]	$\rho: 2 + 0.26$	$\rho: 1 + 0.22$
[3]	$\rho: 2 + 0.14$	$\rho: 1 + 1.65$
[4]	$\rho: 2 - 0.08$	$\rho: 1 - 0.57$
[5]	$\rho: 2 + 0.01$	$\rho: 1 - 1.41$
[1]	$\rho: 2 + 0.69$	$\rho: 1 + 1.8$
	$K^{*+}: 2 + 0.37$	$K^{*+}: 1 + 0.96$
[6]	$\rho: 2 + 0.25$	$\rho: 1 - 0.75$
	$K^{*+}: 2 + 0.14$	$K^{*+}: 1 - 0.62$

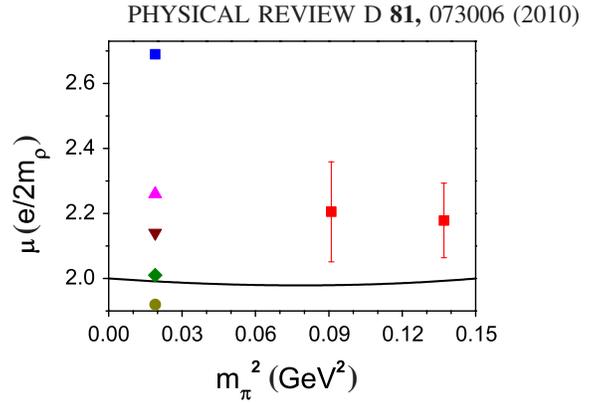


FIG. 1 (color online). Comparison of the ρ meson MDM as obtained from different approaches: This work (solid line), Ref. [1] (square), Ref. [2] (triangle up), Ref. [3] (triangle down), Ref. [4] (circle), Ref [5] (diamond), and Ref. [6] (squares with error bars).

in Table II as obtained from several approaches to QCD: light-front framework with constituent quarks [2–4] and covariant formulations based on the Dyson-Schwinger equations of QCD [1,5]. In general, the latter are about the same or 1 order of magnitude larger than the finite width induced corrections computed in this work. Recently, lattice calculations of the form factors have become available [6] and, in particular, the dependence on the pion mass they are able to reproduce has been exhibited. In Fig. 1, we compare our result for the MDM with lattice calculations as a function of the pion mass [6]; we also include predictions from the models at the physical mass of the pion. We observe that the pion mass dependence of our results is mostly flat with a slight tendency to rise for very large masses. Lattice results are also flat with a tendency to increase for low masses.

The corrections for the K^{*+} meson are dominated by the kaon-to- K^* mass ratio (≈ 0.55) which is very large; thus, although the width-to-mass ratio of the K^* is only ≈ 0.056 , the corrections to the multipoles are important. Compared with the predictions listed in Table II, they can be about the same or 1 order of magnitude smaller.

As a by-product, the mean square radius can be computed following [20] as $\langle R^2 \rangle = (\kappa + \lambda)/M_V^2$. For the ρ we obtain a deviation of -0.0012 fm with respect to the normal value (defined for $\kappa = 1$ and $\lambda = 0$), which can be compared, for example, with the one computed in Ref. [21], where they observe a correction of 0.06 fm, due to the inclusion of the pion contribution with respect to a pure quark-antiquark state. For K^* the deviation is -0.0005 fm.

IV. CONCLUSIONS

The inclusion of the unstable features of spin-1 particles, without breaking the electromagnetic gauge invariance, induces a nontrivial modification to the electromagnetic vertex of the particle. In this work we have extracted the

corresponding modifications to the multipole structure of the W and *vector* mesons. Our numerical results for the W gauge boson multipoles show no substantial deviations from the stable case. For the ρ and K^* mesons, the mass of the particles in the loop has a significant effect, pointing out that the unstable nature of the vector mesons can be as relevant as other dynamical effects and should be considered in refinements when accounting for their properties. The modifications in both the propagator and the electromagnetic vertex, in combination with the gauge invariance, show that the properly defined form factors can be seen as accompanied by a complex renormalization of the vector fields.

The general grounds of the loop schemes for spin-1 particles, to account for the finite decay width in a gauge invariant way, have been invoked to study spin-3/2 particles [22]. Since in this case the mass ratio between the unstable particle and the ones in the loop can be very large, further studies are desirable to understand to which extent the finite decay width contributes to the multipoles.

ACKNOWLEDGMENTS

We are grateful to G. López Castro, J. Piekarewicz, and S. Capstick for very useful observations. We also acknowledge the support of CONACyT, Mexico.

-
- [1] F. T. Hawes and M. A. Pichowsky, *Phys. Rev. C* **59**, 1743 (1999).
 - [2] F. Cardarelli *et al.*, *Phys. Lett. B* **349**, 393 (1995).
 - [3] J. P. B. C. de Melo and T. Frederico, *Phys. Rev. C* **55**, 2043 (1997).
 - [4] Ho-Meoyng Choi and Chueng-Ryong Ji, *Phys. Rev. D* **70**, 053015 (2004).
 - [5] M. S. Bhagwat and P. Maris, *Phys. Rev. C* **77**, 025203 (2008).
 - [6] J. N. Hedditch *et al.*, *Phys. Rev. D* **75**, 094504 (2007).
 - [7] F. X. Lee, S. Moerschbacher, and W. Wilcox, *Phys. Rev. D* **78**, 094502 (2008).
 - [8] U. Baur and D. Zeppenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1002 (1995).
 - [9] E. N. Argyres *et al.*, *Phys. Lett. B* **358**, 339 (1995).
 - [10] M. Beuthe, R. Gonzales Felipe, G. López Castro, and J. Pestieau, *Nucl. Phys.* **B498**, 55 (1997).
 - [11] G. López Castro and G. Toledo Sánchez, *Phys. Rev. D* **61**, 033007 (2000).
 - [12] K. Hagiwara, R. D. Peccei, D. Zeppenfeld, and K. Hikasa, *Nucl. Phys.* **B282**, 253 (1987).
 - [13] J. F. Nieves and P. B. Pal, *Phys. Rev. D* **55**, 3118 (1997).
 - [14] See, for example, M. Napsuciale, S. Rodriguez, E. G. Delgado-Acosta, and M. Kirchbach, *Phys. Rev. D* **77**, 014009 (2008), and references therein.
 - [15] D. Yu. Bardin, A. Leike, T. Riemann, and M. Sachwitz, *Phys. Lett. B* **206**, 546 (1988); G. López Castro, J. L. M. Lucio, and J. Pestieau, *Mod. Phys. Lett. A* **6**, 3679 (1991).
 - [16] J. Gegelia and S. Scherer, [arXiv:0910.4280v1](https://arxiv.org/abs/0910.4280v1).
 - [17] B. A. Kniehl and A. Sirlin, *Phys. Lett. B* **530**, 129 (2002), and references therein.
 - [18] B. A. Arbuzov, *Eur. Phys. J. C* **61**, 51 (2009).
 - [19] J. Papavassiliou, [arXiv:hep-ph/9504382](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9504382).
 - [20] K. J. Kim and Y-S Tsai, *Phys. Rev. D* **7**, 3710 (1973).
 - [21] M. A. Pichowsky, S. Walawalkar, and S. Capstick, *Phys. Rev. D* **60**, 054030 (1999).
 - [22] G. Lopez Castro and A. Mariano, *Phys. Lett. B* **517**, 339 (2001); *Nucl. Phys.* **A697**, 440 (2002).

International Journal of Modern Physics A
 © World Scientific Publishing Company

The $\omega\rho\pi$ coupling in the VMD model revisited

D. García Gudiño* and G. Toledo Sánchez

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México
 AP 20-364, México D.F. 01000, México*

* *davidgarcia@fisica.unam.mx*

Received Day Month Year

Revised Day Month Year

We determine the value of the $\omega - \rho - \pi$ mesons coupling ($g_{\omega\rho\pi}$), in the context of the vector meson dominance model, from radiative decays, the $\omega \rightarrow 3\pi$ decay width and the $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ cross section. For the last two observables we consider the effect of either a heavier resonance ($\rho'(1450)$) or a contact term. A weighted average of the results from the set of observables yields $g_{\omega\rho\pi} = 13.9 \pm 0.1 \text{ GeV}^{-1}$ in absence of those contributions, and $g_{\omega\rho\pi} = 11.9 \pm 0.2 \text{ GeV}^{-1}$ or $g_{\omega\rho\pi} = 11.4 \pm 0.1 \text{ GeV}^{-1}$ when including the ρ' or contact term respectively. Improved measurements of these observables and the $\rho'(1450)$ meson parameters are needed to give a definite answer on the pertinence of the inclusion of this last one in the considered processes.

Keywords: vector meson dominance; strong decays; radiative decays.

PACS numbers: 13.25.-k, 12.40.Vv, 11.10.St

1. Introduction

The ω , ρ and π mesons strong interaction can be encoded in a single parameter, denoted by $g_{\omega\rho\pi}$. These mesons are produced in experiments devoted to the hadronic production from electron-positron annihilation and tau decays^{1,2,5,6,7,3}. The increasing experimental accuracy allows to determine the strong parameters involved in the processes, which may have implications in other observables like the muon magnetic moment⁴. The direct determination of the magnitude of $g_{\omega\rho\pi}$ would require the observation of the ω decaying into the others, which is not allowed, since there is not enough phase space for the three particles to be on the mass shell. Therefore, it must be extracted by indirect means, for example, from the above mentioned annihilation process and tau decays. A theoretical framework is required to describe such processes and link the parameters to the physical states, a Chiral approach based on the low energy symmetries of Quantum Chromodynamics (QCD) and the so called vector meson dominance model (VMD) are able to describe them. Although they have different spirit, they both manage to resume the low energy manifestation of the strong interaction.

In this work we determine the value of $g_{\omega\rho\pi}$, in the context of VMD, from

2 *D. García Gudiño and G. Toledo Sánchez*

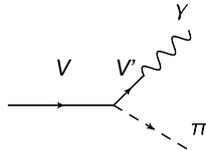


Fig. 1. Radiative decay of vector mesons.

several processes: i) radiative decays of the form $V \rightarrow \pi\gamma$ (V : vector meson), ii) the $\omega \rightarrow 3\pi$ decay and iii) the $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ cross section. In the last two cases we explore the possible corrections due the presence of the heavier resonance $\rho'(1450)$ and a $\omega \rightarrow 3\pi$ contact term.

The VMD Lagrangian including the ρ , π and ω mesons can be set as:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & g_{\rho\pi\pi}\epsilon_{abc}\rho_\mu^a\pi^b\partial^\mu\pi^c + g_{\omega\rho\pi}\delta_{ab}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\partial_\mu\omega_\nu\partial_\lambda\rho_\sigma^a\pi^b \\ & + g_{3\pi}\epsilon_{abc}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\omega_\mu\partial_\nu\pi^a\partial_\lambda\pi^b\partial_\sigma\pi^c + \frac{em_V^2}{g_V}V_\mu A^\mu + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

This Lagrangian exhibits only the relevant pieces for this work. Terms with higher derivatives and additional terms which allow to preserve gauge invariance are not shown⁹. We have made explicit the notation regarding the couplings and the corresponding fields and, in the last term, V refers in general to vector mesons and A^μ refers to the photon field. Here $g_V = 2\alpha\sqrt{\pi m_V}/(3\Gamma(V \rightarrow e^+e^-))$, although in general it corresponds to the inclusive leptonic decay $\Gamma(V \rightarrow l^+l^-)$ ($l = e, \mu, \tau$). The couplings, in this context, are free parameters to be determined from experiment. Relations between them and those coming from low energy theorems can be drawn by building models which incorporate vector mesons into the chiral symmetric lagrangians^{12,13,14,15,16}. In the following we will determine such couplings from the experimental data and draw some comparisons whenever possible.

2. Radiative decays

The $g_{\omega\rho\pi}$ coupling can be obtained from vector mesons radiative decays considering that the photon emission is mediated by a neutral vector meson¹⁷.

- The $\omega \rightarrow \pi\gamma$ decay is driven by the $\omega \rightarrow \pi\rho \rightarrow \pi\gamma$ process. Thus, the couplings from both descriptions are related by:

$$g_{\omega\rho\pi} = g_{\omega\pi\gamma}\frac{g_\rho}{e}. \quad (2)$$

- The $\rho \rightarrow \pi\gamma$ decay is driven by the $\rho \rightarrow \pi\omega(\phi) \rightarrow \pi\gamma$ processes. The presence of the ϕ meson channel can make a sizably contribution¹⁸, and the relation between the couplings from both descriptions takes the following form:

$$g_{\omega\rho\pi} = \frac{g_\omega}{e} \left(g_{\rho\pi\gamma} - g_{\phi\rho\pi} \frac{e}{g_\phi} \right). \quad (3)$$

Table 1. Determination of $|g_{\omega\rho\pi}|$ from radiative decays.

Decay	$ g_{\omega\rho\pi} $ [GeV ⁻¹]
$\rho^- \rightarrow \pi^- \gamma$	11.3 ± 0.9
$\rho^0 \rightarrow \pi^0 \gamma$	13.1 ± 0.9
$\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$	11.4 ± 0.2
$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	12.8 ± 0.3
Weighted Average	11.9 ± 0.2

For the above cases, we can compute the $g_{V\pi\gamma}$ coupling using that the radiative decay width is $\Gamma(V \rightarrow \pi\gamma) = g_{V\pi\gamma}^2 (M_V^2 - m_\pi^2)^3 / (96\pi m_V^3)$ and the corresponding experimental value³. Here, as an approach, we use $|g_{\phi\rho\pi}| = 0.86 \pm 0.01$ GeV⁻¹ obtained by considering the decay width of the $\phi \rightarrow 3\pi$ to be fully accounted by the $\rho\pi$ channel (contributions from other channels are relatively smaller⁵), with the ϕ described similarly to the ω meson¹⁹.

- For the $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ decay there are two ways the process can go through: $\pi^0 \rightarrow \rho\omega(\phi) \rightarrow \gamma\gamma$. Taking a global decay constant, $g_{\pi\gamma\gamma}$, the width can be written as $\Gamma(\pi \rightarrow \gamma\gamma) = g_{\pi\gamma\gamma}^2 \alpha^2 \pi m_\pi^3 / 4$. On the other hand, the destructive interference between the ρ - ω and the ρ - ϕ channel²⁰ requires the couplings to be related by :

$$|g_{\pi\gamma\gamma}| = \frac{2}{g_\rho} \left(\frac{|g_{\omega\rho\pi}|}{g_\omega} - \frac{|g_{\phi\rho\pi}|}{g_\phi} \right). \quad (4)$$

In Table 1 we show the numerical values for $|g_{\omega\rho\pi}|$ obtained from the above processes. The two most precise determinations are not in agreement with each other, at this stage we can not point out to the source of such deviation. Neglecting the small correlations induced by g_V , we can compute a weighted average, which yields 11.9 ± 0.2 with the error dominated by the most precise $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$ channel. A standard average gives $g_{\omega\rho\pi} = 12.2 \pm 1.3$ GeV⁻¹, with errors added in quadratures and is dominated by the uncertainty in the $\rho^0 \rightarrow \pi^0\gamma$ decay width. In the following we will refer to the weighted average from radiative decays as VMDr.

As a way of comparison, let us get the expected value from the agreement between VMD and low energy theorems²¹ for the $\pi \rightarrow \gamma\gamma$ decay¹⁴. Considering only the ρ - ω channel (the ρ - ϕ channel makes a small effect), the couplings from both descriptions are related by $|g_{\omega\rho\pi}| = |g_\rho g_\omega / 8\pi^2 f_\pi| = 11.5$ GeV⁻¹, which is in agreement with the value from radiative decays. If, in addition, we impose the universality condition ($g_\rho = g_{\rho\pi\pi}$) and SU(3) symmetry ($3g_\rho = g_\omega$) then $|g_{\omega\rho\pi}| = |3g_{\rho\pi\pi}^2 / 8\pi^2 f_\pi| = 14.4$ GeV⁻¹. From this result and using the KSFR relation ($g_{\rho\pi\pi} = m_\rho / (\sqrt{2} f_\pi)$)²² it takes the form $|g_{\omega\rho\pi}| = |3m_\rho^2 / 16\pi^2 f_\pi^3| = 14.2$ GeV⁻¹, where $f_\pi = 0.093$ GeV. In these cases there is a significant deviation from the radiative estimate.

4 *D. García Gudiño and G. Toledo Sánchez*

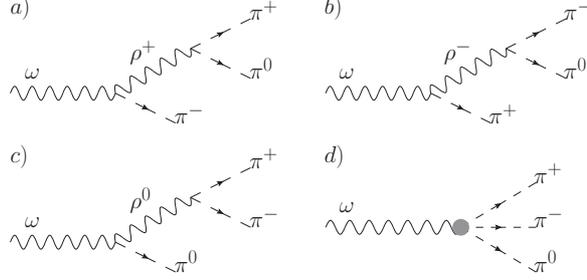


Fig. 2. $\omega \rightarrow 3\pi$ process. The contribution from the ρ channel (a, b, c) and higher order contributions including the contact term (d).

3. The $\omega \rightarrow 3\pi$ decay

Lets consider the process $\omega(\eta, q) \rightarrow \pi^+(p_1)\pi^-(p_2)\pi^0(p_3)$. Where the p_i are the corresponding 4-momenta and η is the ω meson polarization. This decay was proposed to be dominated by the $\omega \rightarrow \rho\pi \rightarrow 3\pi$ process¹¹.

The contributions to the amplitude from the ρ channel (Fig. 2a-c) and the contact term (Fig. 2d) can be set as follow:

$$\mathcal{M}_D = v\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\eta^\mu p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma \mathcal{A}, \quad (5)$$

where \mathcal{A} is given by:

$$\mathcal{A} = 6g_{3\pi} + 2g_{\omega\rho\pi}g_{\rho\pi\pi} \left(D^{-1}[\rho^0, p_1 + p_2] + D^{-1}[\rho^+, p_1 + p_3] + D^{-1}[\rho^-, p_2 + p_3] \right), \quad (6)$$

where, $D[\rho, Q] = Q^2 - m_\rho^2 + im_\rho\Gamma_\rho$ and the factors of 6 and 2 in \mathcal{A} come from the cyclic permutations and momentum conservation used to bring the amplitude into the current form. The coupling $g_{\rho\pi\pi} = 5.95 \pm 0.02$ is fixed by the decay width of $\rho \rightarrow \pi\pi$, $\Gamma_\rho = 149.1 \pm 0.8$ MeV. Using these values and $g_{\omega\rho\pi}$ from radiative decays we can check that the prediction for the width, without taking into account the contact term ($g_{3\pi} = 0$), is $\Gamma_{\omega \rightarrow 3\pi}^\rho = 4.4 \pm 0.2$ MeV, which is 58% of the experimental value ($\Gamma_{\omega \rightarrow 3\pi}^{exp} = 7.56 \pm 0.13$ MeV³). The correction by using an energy dependent width of the ρ is negligible compared with the error bars and the radiative corrections have been also estimated to be negligible²³.

In order to reach the 100% of the experimental width it may be necessary either to increase the coupling constant value from radiative decays up to 15.7 GeV^{-1} or to keep such value and include additional contributions as an effective contact term. A blind inclusion of the contact term, to account for the observed decay width, would require : $g_{3\pi} = -62 \pm 7$ or $+409 \pm 10 \text{ GeV}^{-3}$. However, the proper inclusion is not arbitrary. It is strongly related to the Wess-Zumino-Witten anomaly²⁴. In the following we illustrate this point:

The WZW anomaly fixes the amplitude for the $\omega \rightarrow 3\pi$ decay to be:

$$A_{WZW} = \frac{\alpha}{\pi f_\pi^3} \quad (7)$$

In a VMD description, the ρ meson amplitude ?? (with $g_{3\pi} = 0$), at $Q^2 = 0$ and $\Gamma_\rho = 0$ in the propagators becomes

$$\mathcal{A}^\rho = \frac{6e}{g_\omega} \frac{g_{\omega\rho\pi}^{eff} g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2} = \frac{3}{2} \frac{e}{4\pi^2 f_\pi^3} = \frac{3}{2} \mathcal{A}^{WZW}, \quad (8)$$

that is three halves of the total amplitude as obtained from the Chiral anomaly ²⁴, while respecting the KSFR relation ^{25,?}.

Therefore, *all the remaining contributions are collected in the $g_{3\pi}$ coupling*. Thus, the equivalence between both descriptions requires:

$$\frac{-1}{2} \frac{\alpha}{\pi f_\pi^3} = \frac{e^2 6g_{3\pi}}{g_\omega} \rightarrow g_{3\pi} = -\frac{g_{\rho\pi\pi}}{16\pi^2 f_\pi^3} = -47 \text{ GeV}^{-3}, \quad (9)$$

where we have made use of the relationship among the couplings as discussed in the previous section. Considering this value we get $\Gamma_{\omega \rightarrow 3\pi} = 6.8 \pm 0.2$ MeV. Note that Eqn. (9) is close to $g_{3\pi} = -62 \pm 7$, obtained blindly to account for the experimental decay width.

This procedure establishes the proper way to include additional contributions in the VMD framework, while keeping the agreement with the low energy theorems.

3.1. The ρ' channel

So far, we have considered the ρ channel and a Wess-Zumino fixed contact term as the only ways the decay can go through. However, decays via radial excitations may be also important, provided the mass suppression factor is not extremely large compared to the energies involved in the process. The $\rho'(1450)$ meson ($m_{\rho'} = 1465$ MeV and $\Gamma_{\rho'} = 400 \pm 60$ MeV), satisfies this condition for the ω decay regime. Let us explore the role of such contribution: The heavy mass of the ρ' allows to simplify its propagator leading to identify the global coupling as an effective contact term (Fig.3), in full analogy to Eqn. (1):

$$|g'_{3\pi}| \approx \frac{g_{\omega\rho'\pi} g_{\rho'\pi\pi}}{m_{\rho'}^2}. \quad (10)$$

The couplings involved in the right hand side are not settled, neither in the theoretical side nor experimentally ^{2,27}. In order to make an estimate of their magnitudes, we assume that $g_{\omega\rho'\pi}/g_{\rho'\pi\pi} = g_{\omega\rho\pi}/g_{\rho\pi\pi} = 2$. Studies on the value of $|g_{\omega\rho'\pi}|$ have found it to lay in the interval 10-18 GeV^{-1} ²⁷. Under these assumptions we get $|g_{3\pi}| \approx 46 \pm 23 \text{ GeV}^{-3}$. We have evaluated the deviations from this value in Eqn. (10) due to momentum and width dependence of the propagators, which combined produce an increase of 6%. Thus, our estimate for the coupling is $|g'_{3\pi}| = 49 \pm 24 \text{ GeV}^{-3}$.

6 *D. García Gudiño and G. Toledo Sánchez*

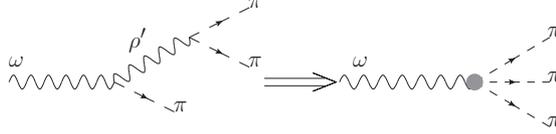


Fig. 3. $\rho'(1450)$ as an effective contact term.

Table 2. Determination of $|g_{3\pi}|$ -like terms from several approaches. See text for details.

Reference	$ g_{3\pi} $ [GeV^{-3}]
Rudaz, Cohen ^{25,26}	47
Dominguez ²⁸	29 ± 3
Kuraev ¹²	123
Kaymakalan ¹³	37
This work from $\Gamma(\omega \rightarrow 3\pi)$	65 ± 7
This work from ρ'	49 ± 24

Note that the ρ' contribution can not be taken simultaneously with the contact term, Eqn. (9), since this last already resums all additional vectors and point contributions. Here we limit ourselves to show at what extent the role of the ρ' contribution becomes important. Recomputing the total width for $\omega \rightarrow 3\pi$ including the ρ' term yields that, although the contribution itself turns out to be only $4 \pm 5\%$ (0.3 ± 0.4 MeV) of the total width, its interference with the ρ channel becomes $29 \pm 14\%$ (2.2 ± 1.1 MeV), making a global result closer to the experimental value.

In Table 2, we have collected a set of values for the contact coupling computed in the literature from different approaches.²⁵ uses the VMD approach being consistent with low-energy theorems.²⁸ Extended the previous idea by including an infinite number of radial excitations.¹² works within a framework of a chiral effective lagrangian.¹³ uses an extension to the chiral lagrangian adding spin-1 fields, and our results obtained from different approaches.

It can be argued that given the different nature of these approaches a direct comparison between them is meaningless. However, we consider that it is interesting to quote their magnitudes as a way to exhibit that, besides the model dependence, there seems to exist a regularity on these contributions.

4. The $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$ cross section

Now, we explore the implications of the contact term or the ρ' in the $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ cross section. Following the same notation as in the previous section, we can write the amplitude for the ω channel as follows:

$$\mathcal{M} = \frac{e^2 m_\omega^2}{g_\omega} \frac{\bar{v} \gamma^\mu u \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma}{q^2 (q^2 - m_\omega^2 + i m_\omega \Gamma_\omega)} \mathcal{A} \quad (11)$$

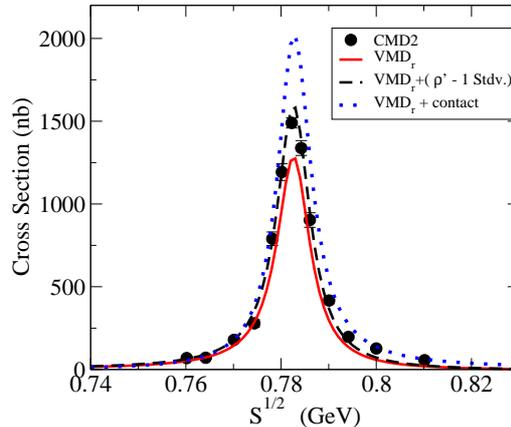


Fig. 4. $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$ cross section. Experimental data (circle symbols) and the prediction from VMD using $g_{\omega\rho\pi}$ from radiative decays (solid line), and including either the ρ' term (decreased by 1stdv., dashed line) or the contact term (dot-dashed line)

where e is the positron electric charge, m_ω and Γ_ω are the mass and total width of the ω meson. In Figure 4 we have plotted the cross section as function of the center of mass energy for several cases: The experimental data from CMD2¹ (circle symbols), the VMD prediction when the ω decay proceeds via the ρ meson for three cases: **i**) Using the central value for $g_{\omega\rho\pi}$ coupling determined from the radiative decays (VMD_r, solid line), **ii**) Including the ρ' contribution (decreased by 1 standard deviation, long dashed line) and **iii**) Including the contact contribution (dotted line). It is clear that the inclusion of either the ρ' or the contact term increases the central theoretical prediction based only on the ρ channel. The uncertainties on the ρ' allows to bring it down to the experimental data within one standard deviation. For the fixed contact term data can be only approached using the VMD_r own error bars (not displayed).

A fit to the CMD2 data considering only the ρ channel, leaving $g_{\omega\rho\pi}$ as a free parameter leads to $|g_{\omega\rho\pi}| = 13.1 \pm 0.1 \text{ GeV}^{-1}$.

5. Discussion

We have performed an analysis to obtain the $g_{\omega\rho\pi}$ coupling in the VMD approach, considering radiative decays, the $\omega \rightarrow 3\pi$ decay width and the $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$ cross section. Our global result from all these observables are presented within two possible scenarios (See Table 3): **i**) Without contact nor ρ' term: In this case we average (weighted) the value predicted from radiative processes, the value which reproduces the experimental decay width for $\omega \rightarrow 3\pi$ and the value for the coupling obtained to fit the experimental $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$ cross section. **ii**) With either ρ' or contact term: In this case we average the value predicted from radiative processes,

Table 3. The $\omega\rho\pi$ coupling (GeV^{-1}) from different scenarios.

	ρ channel	$\rho + \text{contact}$	$\rho + \rho'$
VMD _r	11.9 ± 0.2	11.9 ± 0.2	11.9 ± 0.2
$\Gamma(\omega \rightarrow 3\pi)$	15.7 ± 0.1	12.8 ± 0.1	12.6 ± 1.3
$\sigma(e^+e^- \rightarrow 3\pi)$	13.1 ± 0.1	9.8 ± 0.1	9.7 ± 1.4
Average	13.9 ± 0.1	11.4 ± 0.1	11.9 ± 0.2

the values from the decay width for $\omega \rightarrow 3\pi$ and the $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi$ cross section considering the effect of a contact term or that produced by the ρ' meson.

There is no ambiguity on the ρ' resonance contributions, besides the uncertainties associated to its corresponding mass, decay width and couplings. The inclusion of the contact term and the ρ channel in the $\omega \rightarrow 3\pi$ decay is consistent with the low energy theorems while fulfilling the KSFR relation. On the other hand, the inclusion of the ρ' shows that its contribution is not small and therefore the inclusion of heavier resonances and point terms have a delicate combination to keep consistency with low energy theorems.

The value obtained for $g_{\omega\rho\pi}$ is sensitive to the inclusion of other contributions, in the context discussed above. Estimates, based on different approaches, yield similar values^{25,28,30,31}, pointing out to the small model dependence of our results. Improved measurements of these observables and the $\rho'(1450)$ meson parameters are needed to settle the issues above mentioned.

Acknowledgments

We acknowledge the support of CONACyT, Mexico. We thank Dr. G. López Castro, Dr. Jens Erler and Dr. Peter Lichard for very useful observations.

References

1. R.R. Akhmetshin et al. *Phys. Lett. B* **578**, 285(2004).
2. K. W. Edwards et al. *Phys. Rev. D* **61**, 072003 (2000).
3. K. Nakamura et al. (Particle Data Group), *J. Phys. G* **37**, 075021 (2010)
4. M. Benayoun, P. David, L. DelBuono, O. Leitner *Eur. Phys. Jour C* **65**, 211(2010) ;
ibid **68**, 355(2010).
5. KLOE coll *Phys. Lett. B* **669**, 223(2008).
6. V. M. Aulchenko, et al *J. Exp. Theo. Phys.* **90**, 927(2000)
7. *Achasov et al PRD **68** 052006 (2003); Achasov et al PRD **65** 032002(2002)
8. PLB **476** 33(2000) analysing the omega -i 3pi decay usingf the rho channel plus others.
In agreement with the analysis of Kuraev. See Kuraev and silagadze(1995)
9. N. M. Kroll, T.D. Lee and B. Zumino, *Phys. Rev.* **157** 1376(1967).
10. F. M. Renard, *Il Nuovo Cimento* **4** 9791969
11. M. Gell-Mann, D. Sharp, W. G. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 261(1962) .
12. E. A. Kuraev, Z. Silagadze, *Phys. Atom. Nucl.* **58**, 1589(1995).
13. Kaymakcalan, S. Rajeev, J. Schechter, *Phys. Rev. D* **30**, 594(1984).
14. T. Fujiwara et al. , *Prog. Theor. Phys.* **73**, 92(1985).

15. E.A. Kuraev, Z.K. Silagadze , *Phys. Lett. B* **292**, 377(1992).
16. J. Gasser, G. Ecker, A. Pich and E. de Rafael, *Nucl. Phys. B* **321**, 311(1988).
17. M. Gell-Mann and F. Zachariasen, *Phys. Rev.* **124**, 953(1961).
18. P. Lichard, *Phys. Rev. D* **49**, 5812(1994).
19. For other determinations see M. N. Achasov et al. *Phys. Rev. D* **63**, 072002 (2001) ; M. Benayoun and H. B. O'Connell, *Eur. Phys. Jour C* **22**, 503(2001). Using SU(3) flavor symmetry, the omega and phi physical states are mixings of the nonet neutral states. This predicts a relation among the couplings, which can be written as [?]: $g_{\phi\rho\pi} = g_{\omega\rho\pi}(\cos\theta - \sqrt{2}r\sin\theta)/(\sin\theta + \sqrt{2}r\cos\theta)$. Assuming an ideal mixing angle ($\tan\theta = 1/\sqrt{2}$) and $r = 1.08$ gives $|g_{\phi\rho\pi}| \approx 0.5 \text{ GeV}^{-1}$ for $|g_{\omega\rho\pi}| = 11.9 \text{ GeV}^{-1}$.
20. See P. Lichard, *Phys. Rev. D* **83** 037503 (2011) for the role of other channels.
21. S.Adler, B.W.Lee, S.Treiman, A.Zee, *Phys. Rev. D* **4**, 3497(1971); M.V. Terentev , *JETP Lett.* **14**, 40(1971); M.V. Terentev , *Phys. Lett. B* **38**, 419(1972).
22. K.Kawarayabashi and M.Suzuki , *Phys. Rev. Lett.* **16**, 255(1966); Riazuddin and Fayyazuddin, *Phys. Rev.* **147**, 1071(1966).
23. See for example R.R. Akhmetshin et al. *Phys. Lett. B* **476**, 33(2000).
24. J. Wess , B. Zumino , *Phys. Lett. B* **37**, 95(1971); E. Witten , *Nucl. Phys. B* **223**, 422(1983).
25. S. Rudaz, *Phys. Lett. B* **45**, 281(1984). See references therein for earlier works.
26. T. D. Cohen *Phys. Lett. B* **233**, 467(1989)
27. N. N. Achasov and A. A. Kozhevnikov, *Phys. Rev. D* **62**, 117503 (2000) and references therein.
28. C. A. Dominguez, *Mod. Phys. Lett. A* **12**, 983(1987).
29. A detailed analysis in this regard will be considered elsewhere.
30. P.G.O. Freund and S. Nandi, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 181(1974).
31. J. L. Lucio et al. *Phys. Rev. D* **61**, 034013(2000) and references therein.

About the inclusion of an infinite number of resonances in anomalous decays.

D. García Gudiño and G. Toledo Sánchez

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, AP 20-364, México D.F. 01000, México

(Dated: October 1, 2012)

The extracted value for the $g_{\omega\rho\pi}^{eff}$ effective coupling from experimental data, considering only the ρ meson, resumes not only the ρ meson effect but also all its additional radial excitation modes. By explicitly adding the radial excitations of the ρ meson, considering a particular form of the spectrum and relations among the couplings, we identify the single $g_{\omega\rho\pi}$ and the ρ radial excitations effect in the $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$ decay. We obtain that the individual coupling is in the range $g_{\omega\rho\pi} = 8.2 - 8.6 \text{ GeV}^{-1}$, which is about 40% smaller than the effective $g_{\omega\rho\pi}^{eff}$. We verify the consistency with the chiral approach in the $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ and $\gamma^* \rightarrow 3\pi$ processes. Besides the model dependence, our description succeeds in exhibiting how each contribution came into the game. In particular, we show that for the $\gamma^* \rightarrow 3\pi$ decay, the usual relation $\mathcal{A}_{\gamma 3\pi}^{VMD} = (3/2)\mathcal{A}_{\gamma 3\pi}^{WZW}$, encodes all the vector contributions and not only the ρ meson one. In addition, we find that there is an almost exact (accidental) cancelation between the radial excitations and the contact term contributions.

PACS numbers: 14.40.Be, 13.25.-k, 12.40.Vv.

I. INTRODUCTION

The study of the low energy regime of the strong interaction among quarks relies on the use of effective theories. A description based on the effective hadronic degrees of freedom, namely the vector meson dominance approach (VMD), assigns an effective coupling to the hadronic interaction, which must be determined from the experimental information. Based on that approach, the determination of the coupling between the ω , ρ and π mesons from different observables has been found to lay in a wide range of values from 11.9 to 15.7 GeV^{-1} [1], pointing out to possible experimental or theoretical problems.

The experimental issues, if any, will be settled with the advent of more precise measurements. On the other hand the theoretical treatment considers that, since phase space forbids the three of the mesons to be on-shell, at least one of them must be off-shell, and considers the lowest lying resonance as the only relevant state. That is, the extracted effective strong coupling resumes all possible additional contributions from higher states and not only the $\omega - \rho - \pi$ interaction. A proper description to include all of them would require the knowledge of the full excited spectrum and their corresponding couplings. Attempts in this direction have been made [2] by invoking the factorizable dual model which turns out to modify all the tree level diagrams by a form factor to account for all the possible off-mass-shell mesons.

In this work we propose a model to explicitly include the effect of the radial excitations considering a particular structure of the spectrum and obtain the truly $g_{\omega\rho\pi}$ coupling from the $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$ decay and verify the consistency with the chiral approach in the $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ and $\gamma^* \rightarrow 3\pi$ processes.

II. BASELINE

Let us make a review of the results from the decays when no radial excitations are included. This will be the baseline of the calculation to compare with. The VMD Lagrangian including the ρ , π and ω mesons can be set as:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & g_{\rho\pi\pi}\epsilon_{abc}\rho_\mu^a\pi^b\partial^\mu\pi^c + g_{\omega\rho\pi}\delta_{ab}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\partial_\mu\omega_\nu\partial_\lambda\rho_\sigma^a\pi^b \\ & + g_{3\pi}\epsilon_{abc}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\omega_\mu\partial_\nu\pi^a\partial_\lambda\pi^b\partial_\sigma\pi^c + \frac{em_V^2}{g_V}V_\mu A^\mu + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

This Lagrangian exhibits only the relevant pieces for this work and should be part of any effective Lagrangian describing these mesons. Terms with higher derivatives and additional terms which allow to preserve gauge invariance are not shown [3]. We have made explicit the notation regarding the couplings and the corresponding fields and, in the last term, V refers in general to vector mesons and A^μ refers to the photon field. Here $g_V = 2\alpha\sqrt{\pi m_V/3\Gamma_{V \rightarrow l+l^-}}$ ($l = e, \mu, \tau$).

On the other hand, the chiral symmetry of the strong interaction dictates that the Wess Zumino Witten anomaly [4] is responsible for the $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ and $\gamma^* \rightarrow 3\pi$ decays. For our purposes the relevant part of the Lagrangian is given by:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{WZW} = & \frac{iN_C e^2}{24\pi^2 f_\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \pi^0 F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} \\ & + \frac{N_C}{3 \times 6} \frac{e}{4\pi^2 f_\pi^3} \epsilon_{abc} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} B_\mu \partial_\nu \pi^a \partial_\lambda \pi^b \partial_\sigma \pi^c + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

where N_C is the number of colors and $f_\pi = 0.093 \text{ GeV}$, and we did split the coefficients for the sake of clarity when writing the amplitudes below.

A. The $\pi \rightarrow \gamma\gamma$ decay

The amplitude for the process has a generic form:

$$\mathcal{M}_{\pi\gamma\gamma} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} k_1^\mu \eta_1^\nu k_2^\lambda \eta_2^\sigma \mathcal{A}_{\pi\gamma\gamma}, \quad (3)$$

where k_1 (η_1) and k_2 (η_2) are the photons momenta (polarizations) and $\mathcal{A}_{\pi\gamma\gamma}$ encodes the model details. In the chiral approach it is given by the WZW, as mentioned above, while in the VMD approach, the decay can be seen as proceeding through the emission of the ρ and ω mesons which eventually decay into photons. Using the above Lagrangians, and taking the zero momentum limit, they correspond to:

$$\mathcal{A}_{\pi\gamma\gamma}^{VMD} = \frac{2e^2 g_{\omega\rho\pi}}{g_\rho g_\omega}; \quad \mathcal{A}_{\pi\gamma\gamma}^{WZW} = \frac{6e^2}{24\pi^2 f_\pi} \quad (4)$$

Matching both descriptions, it is possible to relate the couplings. Namely,

$$|g_{\omega\rho\pi}^{eff}| = |g_{\rho\pi\pi} g_\omega / 8\pi^2 f_\pi|. \quad (5)$$

Note that this parameter, initially considered as due to a single channel (ρ and ω), when imposed to account for the total effect of the anomaly becomes an *effective coupling resuming all the possible additional contributions*. This observation will be crucial in the interpretation of the corresponding magnitude.

An additional relationship between the ρ and the pion properties is given by the so-called KSFR relation[5]:

$$g_{\rho\pi\pi} = \frac{m_\rho}{\sqrt{2} f_\pi}. \quad (6)$$

Considering that the KSFR relation, SU(3) symmetry ($g_\omega = 3g_\rho$) and universality condition ($g_\rho = g_{\rho\pi\pi}$) are hold, the effective coupling Eqn. (5) becomes

$$|g_{\omega\rho\pi}^{eff}| = \frac{3m_\rho^2}{16\pi^2 f_\pi^3} = 14.2 \text{ GeV}^{-1}. \quad (7)$$

B. The $\gamma^* \rightarrow 3\pi$ decay

The amplitude of the process can be written in general as:

$$\mathcal{M} = i\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \eta^\mu p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma \mathcal{A}_{\gamma 3\pi}, \quad (8)$$

where $\mathcal{A}_{\gamma 3\pi}$ encodes the details of the model used to describe the process, and p_1, p_2, p_3 are the pions momenta and η is the photon polarization.

The decay of the photon into three pions in the chiral description also has its origin in the WZW anomaly as discussed above. In the VMD approach, it has been shown that this decay is mainly produced through the ω into $\rho\pi$ decay channel [6], followed by the break down of

the ρ into another two pions. At zero momentum they correspond to:

$$\mathcal{A}_{\gamma 3\pi}^{WZW} = \frac{e}{4\pi^2 f_\pi^3} \quad \mathcal{A}_{\gamma 3\pi}^{VMD} = \frac{6e}{g_\omega} \frac{g_{\omega\rho\pi} g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2} \quad (9)$$

(a factor of 6 arises from the momenta permutations when bringing the amplitude to Eqn.8 form)

By linking the anomaly term to the corresponding amplitude from VMD, the KSFR relation is not hold anymore. The reason lies on the fact that, although the ρ channel approach is well motivated, it is unable to fully capture the anomaly information. i.e. the decay have additional axial contributions which can not be captured in the effective vector channel. Thus, in the VMD description, an additional contact interaction between the ω and the 3π mesons must be added:

$$\mathcal{L}_{\omega\pi\pi\pi}^c = g_{3\pi}^c \epsilon_{abc} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \omega_\mu \partial_\nu \pi^a \partial_\lambda \pi^b \partial_\sigma \pi^c \quad (10)$$

where $g_{3\pi}^c$ is the corresponding effective coupling strength. Then, by considering that the KSFR relation is hold and SU(3) symmetry ($g_\omega = 3g_\rho$), the ρ meson channel amplitude at zero momentum becomes:

$$\mathcal{A}_{\gamma 3\pi}^{VMD(\rho)} = \frac{6e}{g_\omega} \frac{g_{\omega\rho\pi}^{eff} g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2} = \frac{3}{2} \frac{e}{4\pi^2 f_\pi^3} = \frac{3}{2} \mathcal{A}_{\gamma 3\pi}^{WZW}, \quad (11)$$

that is three halves of the total amplitude from the Chiral anomaly [4]. Therefore, the contact term must account for the one half excess of the total amplitude. This was found by Rudaz [7] as a consistency requirement and by Cohen [8] as the one which satisfies axial Ward identities.

$$\mathcal{A}^c = \frac{6e}{g_\omega} g_{3\pi}^c = \frac{-1}{2} \mathcal{A}^{WZW} \quad (12)$$

this condition fixes the corresponding coupling to be:

$$g_{3\pi}^c = -\frac{g_{\rho\pi\pi}}{16\pi^2 f_\pi^3} = -47 \text{ GeV}^{-3}. \quad (13)$$

where we have made use of the relationship among the couplings as discussed above.

The previous analysis relies mainly on the consideration that the vector channel is saturated by the ρ meson, and upon matching VMD with the WZW anomaly the $g_{\omega\rho\pi}$ coupling constant becomes an effective coupling which not only accounts for the $\omega - \rho - \pi$ interaction but also all additional terms. In order to determine the truly $g_{\omega\rho\pi}$ coupling, the radial excitations spectrum and the corresponding couplings are required. In the following we study a particular model to include these excitations and show their implications.

III. ADDING THE RADIAL EXCITATIONS CONTRIBUTION.

To include the radial excitations of the ρ meson we make the following assumptions:

i) The relation $(g_{\omega\rho\pi}g_\rho)/(g_{\omega V\pi}g_V) = 1$, where V is any ρ radial excitation. That is, the radial excitation information makes no difference on the above combination of the couplings.

ii) SU(3) symmetry, which allows to relate $g_\omega = 3g_\rho$.

iii) KSFR-like relation for each $V\pi\pi$ vertex, that is $g_{V\pi\pi} = m_V/(\sqrt{2}f_\pi)$

iv) The spectrum of the radial excitations is given by: $m_V^2 = m_\rho^2 n^2$ with $n = 1, 2, \dots$. The $n = 1$ is by construction the ρ mass and for $n = 2$ it is 1540 MeV to be compared with the $\rho'(1450)$.

As a first case we will consider the $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$ decay to identify the $g_{\omega\rho\pi}$ and the ρ radial excitations effect. This process is clean in the sense that it is sensitive to the ρ radial excitations but not to the ω ones. This fact allows to avoid any assumption on the ω excitations. Then, the implications on the cases discussed in the previous section will be addressed.

A. The $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$ decay

The amplitude for this process is of the form:

$$\mathcal{M}_{\omega\pi\gamma} = i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}q_1^\mu\eta^\nu k_2^\lambda\epsilon^\sigma\mathcal{A}_{\omega\pi\gamma}, \quad (14)$$

Again, in this notation $\mathcal{A}_{\omega\pi\gamma}$ encodes the model details. For this process, the VMD description, including the radial excitations, requires that at zero momentum:

$$\mathcal{A}_{\omega\pi\gamma} = e \sum_V \frac{g_{\omega V\pi}}{g_V}. \quad (15)$$

Now, using the above assumptions the global coupling can be set as:

$$\begin{aligned} \sum_V \frac{g_{\omega V\pi}}{g_V} &= \sum_V \frac{g_{\omega\rho\pi}g_\rho}{g_V^2} = \sum_V \frac{g_{\omega\rho\pi}g_\rho 2f_\pi^2}{m_V^2} \\ &= \frac{g_{\omega\rho\pi}g_\rho 2f_\pi^2}{m_\rho^2} \sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{g_{\omega\rho\pi}g_\rho 2f_\pi^2}{m_\rho^2} \frac{\pi^2}{6} \end{aligned} \quad (16)$$

where the convergence on the series above is equal to $\pi^2/6$. Using this in the amplitude, we can compute the decay width

$$\Gamma(\omega \rightarrow \pi^0\gamma) = \frac{\alpha g_{\omega\rho\pi}^2}{432} \pi^4 f_\pi^2 m_\omega \left(\frac{m_\omega}{m_\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_\omega^2}\right)^3 \quad (17)$$

Using the experimental branching ratio for the process $BR(\omega \rightarrow \pi^0\gamma) = 8.28 \pm 0.28\%$ [9], we obtain the following value for the individual $\omega - \rho - \pi$ coupling

$$g_{\omega\rho\pi} = 8.2 \pm 0.2 \text{ GeV}^{-1} \quad (18)$$

B. The $\pi \rightarrow \gamma\gamma$ decay

Lets us reconsider the $\pi \rightarrow \gamma\gamma$ decay. It is important to explore the effect of the radial excitations in the relation

for the $g_{\omega\rho\pi}^{eff}$. In the VMD description, the coefficient in the amplitude, Eqn. (4), including an infinite sum of vector-like contributions V , becomes :

$$\mathcal{A}_{\pi\gamma\gamma}^{VMD+} = 2e^2 \sum_V \left(\frac{g_{V\omega\pi}}{g_\omega g_V} \right), \quad (19)$$

Using the assumptions about the couplings and masses of the vector mesons, it takes the following form:

$$\begin{aligned} 2e^2 \sum_V \frac{g_{V\omega\pi}}{g_\omega g_V} &= \frac{4e^2 g_{\omega\rho\pi} f_\pi^2}{3m_\rho^2} \sum_n \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{2e^2 g_{\omega\rho\pi} \pi^2 f_\pi^2}{9m_\rho^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

The consistency with the anomaly, Eqn. (4), requires that:

$$\begin{aligned} g_{\omega\rho\pi} &= \frac{9m_\rho^2}{8\pi^4 f_\pi^3} = 8.6 \text{ GeV}^{-1} \\ &= g_{\omega\rho\pi}^{eff} \frac{6}{\pi^2} \end{aligned} \quad (21)$$

which is consistent with the extracted value for the $g_{\omega\rho\pi}$ coupling, Eqn. (18). In addition, if we take the value from Eqn. (18), the last relation for the effective coupling gives:

$$g_{\omega\rho\pi}^{eff} = 13.6 \pm 0.3 \text{ GeV}^{-1}, \quad (22)$$

we can observe that this value is also consistent with the corresponding one obtained in section II.A (Eqn. 7).

Note that $g_{\omega\rho\pi}^{eff}$ in that case was defined as the one that resumed all the contributions in the ρ channel and made to agree with the anomaly. Thus, the above result tell us that the individual channel coupling is about 40% smaller than that value. It is trivial to check that by using this value when adding all the contributions we recover the amplitude of the previous section.

C. The $\gamma^* \rightarrow 3\pi$ decay

Proceeding along the same lines, we can compute the contribution of the radial excitations. The amplitude for the vector channel is given by:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\gamma 3\pi}^{VMD+} &= \frac{6e}{g_\omega} \sum_V \frac{g_{V\omega\pi} g_{V\pi\pi}}{m_V^2} = 2e \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= e\pi^2 \frac{g_{\omega\rho\pi}}{3m_\rho^2} = \frac{3}{2} \mathcal{A}_{\gamma 3\pi}^{WZW} \end{aligned} \quad (23)$$

That is, by adding all the vector contributions we recover the result of the previous section for the ρ , but now corresponding to the full vector contributions.

The, now obvious, purely axial contribution in the contact term remains the same:

$$\mathcal{A}^c = \frac{-1}{2} \mathcal{A}_{\gamma 3\pi}^{WZW}, \quad (24)$$

Coupling	Process	Value
$ g_{\omega\rho\pi} $	$\omega \rightarrow \pi^0\gamma$	$8.2 \pm 0.2 \text{ GeV}^{-1}$
	$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	8.6 GeV^{-1}
$ g_{\omega\rho\pi}^{eff} $	$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	14.2 GeV^{-1}
	$\omega \rightarrow \pi^0\gamma$ and $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	$13.6 \pm 0.3 \text{ GeV}^{-1}$
$g_{3\pi}^c$	$\gamma^* \rightarrow 3\pi$	-47 GeV^{-3}
$g_{3\pi}^{re}$	$\gamma^* \rightarrow 3\pi$	46 GeV^{-3}

TABLE I: Couplings

while the relationship for the ρ channel ($n = 1$) now accounts for

$$\mathcal{A}_{\gamma 3\pi}^\rho = 2e \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\rho^2} = \frac{e}{4\pi^2 f_\pi^3} \frac{9}{\pi^2} = \frac{6}{\pi^2} \frac{3}{2} \mathcal{A}_{\gamma 3\pi}^{WZW} \quad (25)$$

Since we have estimated all the vector contributions, the radial excitations contributions are just that with the ρ contribution removed:

$$\mathcal{A}_{\gamma 3\pi}^{re} = 2e \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\rho^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) \quad (26)$$

We can also treat this contribution as a contact diagram and estimate a magnitude for its effective coupling $g_{3\pi}^{re}$. The corresponding contact and radial excitations contributions can be written in an equivalent form as follows:

$$\frac{6e g_{3\pi}^{re}}{g_\omega} = 2e \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\rho^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right), \quad (27)$$

from this equivalence we get

$$g_{3\pi}^{re} = \frac{g_\rho g_{\omega\rho\pi}}{m_\rho^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = 44 \text{ GeV}^{-3}. \quad (28)$$

Therefore, the remaining vector and axial contributions combine to account for a fraction of the total amplitude which is:

$$\mathcal{A}^{re+c} = \left(1 - \frac{9}{\pi^2} \right) \mathcal{A}^{WZW} \quad (29)$$

Note that the global factor suppresses this contribution, which is in accordance with the individual effective couplings obtained above.

In table I we summarize the numerical results for the couplings in the different scenarios we have considered.

IV. DISCUSSION

The extraction of the $g_{\omega\rho\pi}$ coupling is by nature made by indirect means. In this work we have pointed out that

the usually quoted value corresponds not to it but to another $g_{\omega\rho\pi}^{eff}$ effective coupling which resumes not only the ρ meson effect but also all its additional radial excitation modes.

Here, we have explicitly added the radial excitations of the ρ meson, considering a particular form of the spectrum and relations among the couplings. First, we considered the $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$ decay to identify the single $g_{\omega\rho\pi}$ and the ρ radial excitations effect. This process is clean in the sense that it is sensitive to the ρ radial excitations but not to the ω ones. This fact allows to avoid any assumption on the ω excitations. Certainly, the description used for all those excitations is model dependent. However, the low lying excitations are well approached and expected to be the dominant ones. Besides this model dependence, our description succeeds in exhibiting how each contribution came into the game while fulfilling general requirements like the agreement between the VMD and chiral anomaly descriptions. We obtained that the individual coupling is $g_{\omega\rho\pi} = 8.2 - 8.6 \text{ GeV}^{-1}$, which is about 40% smaller than the effective $g_{\omega\rho\pi}^{eff}$.

We have verified the consistency with the chiral approach in the $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ and $\gamma^* \rightarrow 3\pi$ processes. Besides the model dependence, our description succeeds in exhibiting how each contribution came into the game. In particular, we show that, for the $\gamma^* \rightarrow 3\pi$ decay, the usual relation $\mathcal{A}_{\gamma 3\pi}^{VMD+} = (3/2) \mathcal{A}_{\gamma 3\pi}^{WZW}$, encodes all the vector contributions and not only the ρ meson one. Thus, the additional contact term is fully axial and fixed by the WZW anomaly. In addition, we have obtained that there is an almost exact (accidental) cancelation between the radial excitations and the contact term contributions. The relations here established are hold in the zero momentum limit. More elaborated assumptions would be required to explore in a reliable way the momentum dependence.

We would like to conclude by stressing that the usually neglected contributions from radial excitations may be relevant even though they can be very heavy. Therefore, consistency requirements like the ones here exhibited must be carefully considered.

Acknowledgments

We acknowledge the support of CONACyT-México under grant 128534, and DGAPA-UNAM under grant PAPIIT-IB101012.

-
- [1] D. García Gudino and G. Toledo Sánchez, *IJMPA* **27** 1250101(2012) arXiv:1106.1467v2 [hep-ph] and references therein.
- [2] C. A. Dominguez, *Mod. Phys. Lett. A* **12** 983(1987).
- [3] N. M. Kroll, T.D. Lee and B. Zumino, *Phys. Rev.* **157** 1376(1967).
- [4] J. Wess , B. Zumino , *Phys. Lett.* 37B (1971) 95; E. Witten , *Nucl. Phys.* B223 (1983) 422.
- [5] K.Kawarayabashi and M.Suzuki , *Phys. Rev. Lett.* **16** 255(1966); Riazuddin and Fayyazuddin, *Phys. Rev.* **147** 1071(1966).
- [6] M. Gell-Mann, D. Sharp, W. G. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **8** 460(1962) .
- [7] S. Rudaz, *Phys. Lett. B* **45** 281(1984).
- [8] T. D. Cohen *Phys. Lett. B* **233** 467(1989).
- [9] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), *J. Phys. G* **37**, 075021 (2010)