



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**MODELOS TERMODINÁMICOS DE DISTRIBUCIÓN
DE RIQUEZA INCLUYENDO PROCESOS DE
AHORRO Y SUBSIDIO EN UN SISTEMA
CONSERVATIVO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

JOAN MANUEL CEJUDO CHINCHILLAS

**DIRECTOR DE TESIS:
DR. MARCELO DEL CASTILLO MUSSOT
2012**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Modelos Termodinámicos de Distribución de Riqueza incluyendo Procesos de Ahorro y Subsidio en un Sistema Conservativo

Joan Manuel Cejudo Chinchillas



Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Tutor

Dr. Marcelo del Castillo Mussot

Sinodales

Dra. María de los Ángeles Ortiz Flores

Dr. Marco Antonio Martínez Negrete

Dr. Alfredo Elmer de la Lama García

Dr. Jorge Humberto Arce Rincón

Así como las colisiones aleatorias entre las moléculas de un gas dan pie a propiedades macroscópicas como la temperatura y la presión, las interacciones aleatorias entre los individuos de un sistema económico podrían determinar fenómenos de gran escala tales como la distribución de la riqueza.[2]

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Sociofísica y Econofísica	1
1.2. Riqueza e Ingresos	3
1.3. Curva de Lorenz y Coeficiente de Gini	3
1.4. Distribución de Boltzmann-Gibbs	4
1.5. Vilfrido Pareto	5
2. Modelos Anteriores	7
2.1. Gas Ideal[11]	7
2.2. Gas Ideal con Factor de Ahorro[5]	9
2.3. Gas Ideal con Redistribución de la Riqueza en un Sistema Lineal[19] .	11
2.4. Gas Ideal con Redistribución de la Riqueza en un Sistema Lineal con un Factor de Ahorro[16]	13
3. Modelo Híbrido	17
3.1. Modelo de Gas Ideal en un Sistema Conservativo con un Factor de Ahorro Dinámico y un Subsidio en forma de Dinámica Extremal Intermitente	18
3.1.1. Subsidio Intermitente	18
3.1.2. Factor de Ahorro Dinámico	19
3.2. Estructura del Programa	20
3.3. Resultados	21
4. Análisis	35
4.1. Descripción analítica con multiplicadores de Lagrange para la motivación de los trabajos actuales en econofísica	35
4.2. Comparación de Resultados	37
4.3. Conclusiones	41
5. Apéndice	43
5.1. Programa	43
Bibliografía	51

1 Introducción

La física es una ciencia que se ha beneficiado y la cual ha beneficiado a muchas otras. Los avances en la física nuclear han permitido un mejor entendimiento de los fundamentos químicos. La instrumentación médica se basa en gran parte en diversas ramas de la física, desde la mecánica newtoniana hasta la radiación. Nuevas ciencias como la biofísica ya no son una simple especialización avanzada, son carreras que se pueden cursar ya a nivel licenciatura. Aunque los físicos se han involucrado en la economía, en algo conocido localmente entre los que se dedican al rubro como econofísica, no ha habido una aportación sustancial que permita el reconocimiento generalizado de dicha ciencia. Sin embargo los avances persisten, y se cuenta ya con economistas que comienzan a ver las ventajas que puede traer el estudio de su materia desde un ángulo diferente[18].

La econofísica como un área de estudio ha crecido y se ha desarrollado ampliamente durante la última década. Una de las áreas de estudio más importantes es la distribución de la riqueza. Existen varios modelos que intentan aproximar la realidad económica en términos de conceptos físicos.

Algunos de dichos modelos son una simplificación a un sistema interacciones binarias, desarrollado por Yakovenko y Dragulescu [11], en el que se hace una analogía con el intercambio aleatorio de energía entre las partículas de un gas ideal. Desarrollando sobre el modelo anterior, Chakraborti y Chakrabarti incluyeron un factor de ahorro con la intención de aproximar el modelo a uno con agentes económicos racionales (i.e. un agente económico no arriesga el 100% de su riqueza en una sola transacción).

Abordando el tema de la distribución de la riqueza de forma distinta, Iglesias y Pianegonda estudiaron en 2004 dicha distribución con un enfoque en los agentes más pobres. Proponen un modelo con dinámica extremal con la finalidad de obtener un umbral mínimo de pobreza[19].

Basándonos en los modelos anteriores, proponemos un modelo híbrido que incorpore el factor de ahorro como elemento que valide la realidad económica, y una dinámica enfocada en obtener una distribución más equitativa como reflejo de un interés social.

1.1. Sociofísica y Econofísica

En su libro, *Critical Mass: How one thing leads to another*, Philip Ball propone los inicios de la econofísica a partir de la publicación de *Leviatán: o la materia, forma*

y poder de una república eclesiástica y civil de Thomas Hobbes[3]. Ball sugiere que un encuentro con Galileo y su Ley de Inercia llevaron a Hobbes a plantearse su hipótesis de movimiento constante como una ley fundamental que debía regir el comportamiento humano, de forma análoga a la mecánica galileana.

Sin embargo, el verdadero éxito de las incursiones por parte de los físicos en el estudio de la sociedad vendría a partir del uso de la estadística. Adolphe Quetelet, puede ser considerado el padre de la sociofísica, término que acuñara por primera vez el filósofo Augusto Comte en su *Curso de filosofía positiva*, como la conocemos[3]. Quetelet se concentró en la aplicación de la estadística para el estudio fenómenos sociales como las tasas de natalidad, criminalidad o de suicidios.

Ball sugiere que el amplio uso de la estadística como herramienta matemática y su aceptación durante el siglo XIX fue un factor determinante para que Maxwell llevara a cabo su importante aportación a la Teoría Cinética de los Gases.[3] Sea o no cierto, Maxwell y Boltzmann establecieron una nueva forma de hacer física, al romper con la visión determinista newtoniana utilizada durante los últimos dos siglos.

El término *Econofísica* se utilizó por primera vez durante una conferencia de física estadística en Calcutta por H. Eugene Stanley en 1995. Sin embargo a partir del año 2000, con la publicación de *Statistical Mechanics of Money* de V. Yakovenko[11], comenzó un estudio de la distribución de la riqueza en analogía con la teoría cinética de los gases que continua hasta el día de hoy, con múltiples estudios análogos que introducen variadas modificaciones, como el factor de ahorro aquí estudiados, para complementar el modelo. Todos tomando como base el modelo más simple que planteara Yakovenko, para construir sus teorías desde ese punto.

En 2004, en una publicación titulada *Sociophysics: a personal testimony*, Serge Galam se adjudica, aunque con poca modestia, la creación de la sociofísica como ciencia. En un breve recuento de su trayectoria académica en busca de un espacio para su nueva ciencia, Galam narra las complicaciones a las que se ha tenido que enfrentar, principalmente a un rechazo por parte de la comunidad científica que lo recibía con un, “To suggest humans could behave like atoms was looked upon as a blasphemy to both hard science and human complexity, a total non-sense, something to be condemned.”[12]. Para fortuna del autor, a medida que las computadoras personales se han vuelto cada vez más accesibles y poderosas, el uso de simulaciones por computadora a permitido una mayor incursión por parte de los físicos en el estudio de los fenómenos sociales. La internet también ha facilitado el intercambio de información y la diseminación de variados estudios sobre el tema, desde Argentina hasta India, basta buscar palabras como *traffic* o *social* en páginas como <http://arxiv.org> para obtener un largo listado de publicaciones en las que se modelan distintos fenómenos sociales, varios de los cuales han sido ya adoptados como herramienta de ayuda al momento de la planeación social de ciudades y estados, tal es el caso de los estudios sobre el comportamiento del tráfico en las grandes urbes y como mejorarlo. Las herramientas están a nuestra disposición, basta saber como utilizarlas y a qué dirigir las.

1.2. Riqueza e Ingresos

Vale la pena hacer una breve distinción entre los términos Riqueza e Ingresos. En términos simples, la riqueza de un individuo es todo aquello que este posee, todos sus bienes muebles e inmuebles, como pueden ser propiedades y acciones, una vez descontados pagos obligatorios tales como impuestos. Por otro lado, los ingresos de un individuo son un flujo constante, mensual o anual, de dinero. Es por ello que un individuo con mayores ingresos a otro no necesariamente tiene más riqueza. Como explica Rahn, “They have mis-defined “rich” by confusing a flow (income) with a stock (real net assets).”[20]

Aunque en muchos casos el interés de los econofisicos se encuentra en modelar la distribución de la riqueza en la sociedad, comparar estos resultados con datos reales resulta difícil pues no es fácil saber la riqueza de los individuos en base a todos los bienes que estos pueden poseer. Por otro lado el pago de impuestos es algo sobre lo que se lleva un registro constante, y que esta basado en los ingresos de los individuos, es por ello que con frecuencia se utiliza de forma indistinta el termino riqueza e ingresos cuando se comparan los modelos computacionales con los datos disponibles.

1.3. Curva de Lorenz y Coeficiente de Gini

La curva de Lorenz es un representación gráfica de la distribución de la riqueza, ampliamente utilizada en economía. En particular, para una función de distribución de la riqueza $f(x)$, y un $\alpha \in [0, 1]$, la fracción de la población con una riqueza menor a α está dada por [19],

$$P(\leq \alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)dx \quad (1.1)$$

Ahora bien, la función de Lorenz se define como,

$$L(\alpha) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\alpha} xf(x)dx \quad (1.2)$$

donde μ es el valor promedio de $f(x)$.

Se suele graficar la curva de Lorenz Figura 1.1 junto con la identidad, la cual representa una distribución completamente igualitaria de la riqueza, de esta forma resulta fácil apreciar de forma gráfica el nivel de desigualdad. La curva de Lorenz está definida por la función de distribución de la riqueza, $f(x)$, la cual es específica

a cada situación. La curva se puede construir de forma discreta, cuando no se cuenta con una función de distribución, haciendo una división en intervalos finitos del porcentaje de agentes en orden creciente de riqueza.

Haciendo uso de lo anterior podemos definir el llamado índice o coeficiente de Gini.

El coeficiente de Gini se puede entender de forma geométrica como el área entre la identidad y la curva de Lorenz. Es una herramienta simple que proporciona información esencial para el estudio de la distribución de la riqueza.

Este coeficiente se puede calcular como,

$$G = \left| 1 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)(r_{k+1} + r_k) \right|$$

donde,

$$a = \%Agentes$$

$$r = \%RiquezaAcumulada$$

El coeficiente de Gini, $0 < G < 1$, es una medida del nivel de igualdad en la distribución, donde un valor de 1 indica una desigualdad absoluta en donde un solo agente posee la totalidad de la riqueza, y un valor de 0 implica una perfecta igualdad.

1.4. Distribución de Boltzmann-Gibbs

Una de las primeras confirmaciones de la utilidad de la probabilidad y la estadística, cuyo éxito le abriera las puertas para su uso dentro del marco teórico de la física, fue la distribución de la energía en un sistema termodinámico en equilibrio, la distribución de Boltzmann-Gibbs,

$$P(\varepsilon) = ce^{-\varepsilon T} \tag{1.3}$$

La ecuación Ecuación 1.3 nos dice que la probabilidad de encontrar un sistema físico en un estado con energía ε , es una función determinada por una función exponencial que depende de la temperatura del sistema. La solución depende únicamente de las propiedades estadísticas del sistema (i.e. un gran número de partículas) y la conservación de la energía. Y de acuerdo a [3], es posible que Boltzmann aventurara su análisis del problema de esta forma gracias al amplio uso que se había dado hasta ese entonces de la estadística como herramienta para describir fenómenos sociales.

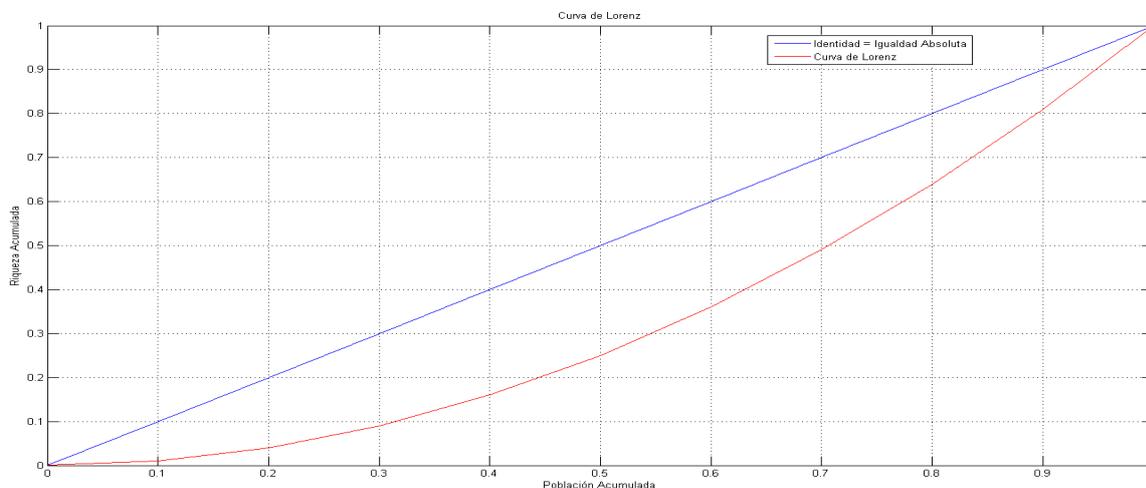


Figura 1.1: Curva de Lorenz

1.5. Vilfrido Pareto

Quizá el nombre más citado en la literatura econofísica de la última década, aún más que el de Boltzmann, sea el de Vilfrido Pareto, quien sin saberlo haría un descubrimiento que décadas más tarde desataría el desarrollo de una nueva rama de la física. A principios del siglo pasado, el economista y filósofo italiano haría una observación sobre Italia que luego otros corroborarían más allá de sus fronteras. La extrema acumulación de riqueza por parte de unos pocos, en particular que en Italia a principios del siglo XX el veinte por ciento de la población poseía el ochenta por ciento de la riqueza, está última en su sentido más amplio.

La famosa distribución de Pareto, ampliamente reconocida en economía, describe dicha acumulación de la riqueza por parte de unos cuantos como una distribución de carácter exponencial,

$$P(x) \propto \frac{1}{x^{\alpha+1}} \quad (1.4)$$

donde el índice α es conocido como el Índice de Pareto.

A pesar de que análisis posteriores han descartado la función de probabilidad de Pareto como una que se ajusta a la distribución de la riqueza de un país, ésta a mantenido su validez para describir la función de densidad para valores altos de riqueza.

2 Modelos Anteriores

Revisamos los modelos desarrollados en la última década, y los cuales servirán para el desarrollo del modelo motivo de esta tesis con base en los artículos V. Yakovenko [11], A. Chakraborti [5], y J.R. Iglesias [19][16]. Comenzamos con una introducción a la analogía de Viktor Yakovenko entre la distribución de la riqueza entre agentes económicos y la distribución de la energía entre las partículas de un gas ideal. Este modelo introductorio sienta las bases a principios de la década pasada para el desarrollo de otros modelos, que a través de pequeñas modificaciones, pretenden aproximarse a la realidad. La validez de los modelos se juzga hasta el momento a partir de una comparación con las distribuciones de ingresos obtenidas del mundo real, las cuales se utilizan de forma equivalente a las distribuciones de riqueza aquí utilizadas, esto debido a problemas en una carencia de registros confiables de esta segunda.

Pasamos después a la introducción del factor de ahorro en el modelo, un paso de gran significado debido a que es un cuestión, aunque muy diversa en magnitud, inherente a todo agente económico y los efectos de dicho factor tienen un claro impacto en la distribución de la riqueza, medida a través de un índice de Gini.

Seguimos con el modelo de Iglesias y Pienagonda, donde se introduce una dinámica extremal, la cual llamaremos Subsidio y que permite un reajuste de los umbrales mínimos de pobreza.

Por último terminamos esta sección con un primer modelo híbrido que combina las ideas anteriores, con un factor de ahorro y un subsidio, para mejorar la distribución de la riqueza general.

2.1. Gas Ideal[11]

El modelo de distribución de riqueza más sencillo es una interpretación de las interacciones económicas basada en la teoría de gas ideal, motivada por el hecho de que la distribución de la riqueza ocurre entre una gran número de agentes económicos, N , lo cual permite hacer una descripción estadística del sistema.

Este modelo considera un número finito de agentes y riqueza en el que los agentes interactúan de forma completamente aleatoria, intercambiando su riqueza en interacciones económicas simuladas, dada la incertidumbre sobre el resultado de dicha interacción, consideramos el resultado como aleatorio. Esta interpretación llevo a

Dragulescu y Yakovenko [11] a proponer que un sistema económico conservativo podría también ser descrito por la interpretación estadística que Boltzmann y Gibbs le dieran a la distribución de la energía en un gas ideal.

Consideremos un sistema económico con una riqueza total M , y un número total de agentes, N .

A cada uno de nuestros agentes se le asigna una riqueza de forma aleatoria o uniforme (en ambos casos el sistema tiende a una misma distribución estable tras un cierto número de interacciones).

Elegimos a dos agentes n_1 y n_2 , cada uno con una riqueza m_1 y m_2 respectivamente. Durante la transacción económica entre ambos agentes, la totalidad de sus riquezas, Q , se pone en juego,

$$Q = m_1 + m_2 \quad (2.1)$$

la incertidumbre del resultado está representada por una variable,

$$0 < k < 1 \quad (2.2)$$

cuyo valor determina el porcentaje de la riqueza total que cada agente recibe después de la transacción.

Dada la restricción a un sistema conservativo, ambos agentes se dividen la totalidad de la riqueza. La riqueza resultante de cada agente, $m_{1'}$ y $m_{2'}$ queda definida como,

$$\begin{aligned} m_{1'} &= k * Q \\ m_{2'} &= (1 - k) * Q \end{aligned} \quad (2.3)$$

La Figura 2.1 muestra la distribución de la riqueza para un sistema con 1000 agentes económicos. Realizamos la simulación por computadora (lo cual se desarrolla a detalle en el siguiente capítulo) eligiendo a dos agentes de forma completamente aleatoria y haciéndolos interactuar, la interacción equivale a un intercambio también aleatorio de la riqueza entre los agentes que obedece la ecuación Ecuación 2.3. Cada una de estas interacciones entre pares de agentes es considerada un paso Monte Carlo en la simulación. La simulación se corre para 1 millón de Pasos Monte Carlo ¹ Se muestran los resultados de un histograma de 50 barras (las cuales han sido omitidas para mayor claridad) y se ajusta una curva exponencial para comparar resultados, y corroborar la analogía entre la distribución de riqueza y energía.

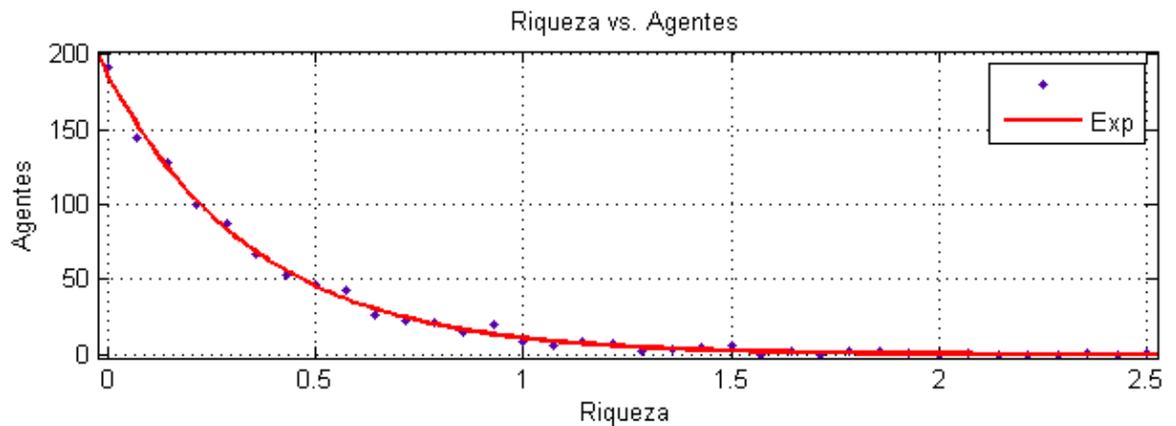


Figura 2.1: Distribución de Riqueza en un Modelo de Gas Ideal

La Figura 2.2 es el resultado que motiva el desarrollo del presente trabajo, y quizá la mejor motivación para continuar los trabajos en esta rama a partir de esta analogía entre un gas ideal y una “economía ideal”. La gráfica es resultado de los trabajos de Yakovenko y refleja tanto la validez de la distribución de Pareto antes discutida, para el pequeño porcentaje adinerado de la población, mientras que Boltzmann resulta en un mejor ajuste a la distribución del grueso de la población. Como se mencionó antes ingresos y riqueza se utiliza de forma indistinta, es por ello que la grafica se obtiene a partir de los datos sobre impuestos en Estados Unidos en 1997[1]. El recuadro dentro de la grafica representa los mismos resultados graficados en una escala semilogarítmica para fines comparativos.

2.2. Gas Ideal con Factor de Ahorro[5]

Considerar que todos los agentes económicos ponen la totalidad de su riqueza en juego durante cada transacción suena un poco exagerado. “Ahorrar es una tendencia demasiado natural en cualquier agente económico”[?]. Es por ello que Chatterjee y Chakraborti propusieron un modelo económico que involucrara un factor de ahorro.

Partiendo del modelo de Gas Ideal de Yakovenko, se asigna un factor de ahorro λ a todos los agentes de la red. Una vez elegidos, de forma aleatoria, los dos agentes a interactuar, estos guardan una porción correspondiente al factor de ahorro e interactúan con el resto de su riqueza de forma análoga al modelo de Gas Ideal.

El modelo de Gas Ideal con Factor de Ahorro se simula entonces como,

¹En adelante todos los resultados mostrados corresponderán a un sistema con el mismo número de agentes y el mismo número de interacciones, sujetas a las reglas de interacción del modelo en cuestión.

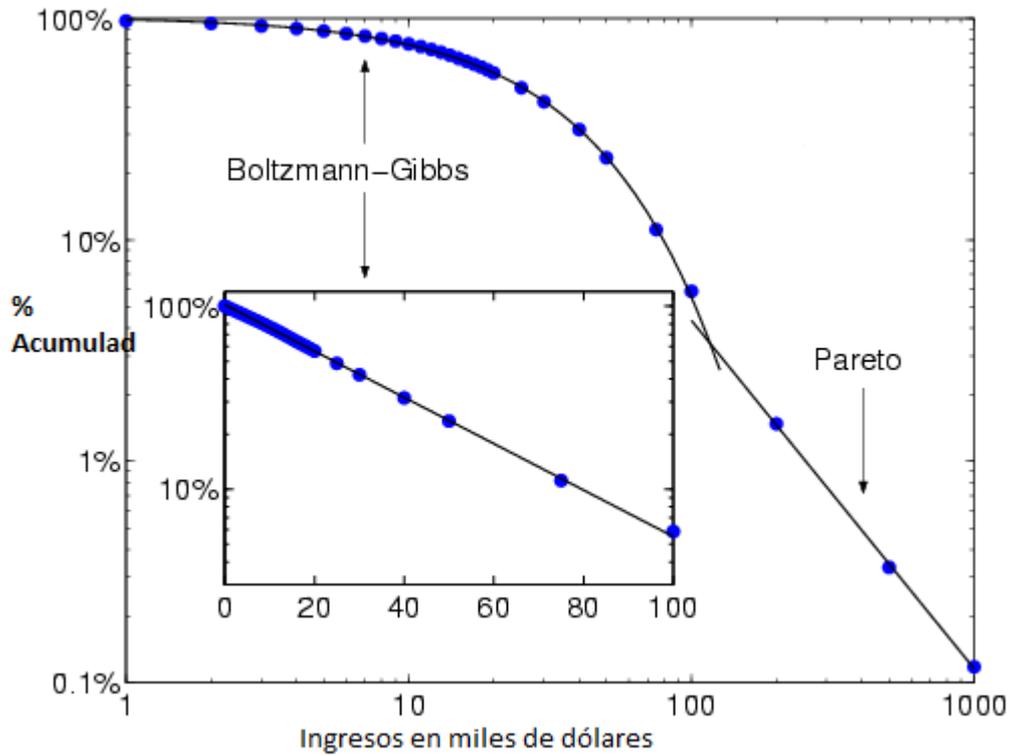


Figura 2.2: Distribución de Ingresos en los Estados Unidos en 1997[?]

$$\begin{aligned}
 m_{1'} &= k * Q \\
 m_{2'} &= (1 - k) * Q
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

donde m_1 y m_2 representan las riquezas de los agentes antes de interactuar, y $m_{1'}$ y $m_{2'}$ sus riquezas finales. Análogamente al modelo anterior, Q se encuentra dado por,

$$Q = (1 - \lambda_1)m_1 + (1 - \lambda_2)m_2
 \tag{2.5}$$

En la Figura 2.3 se muestran los resultados obtenidos para el modelo de Chatterjee y Chakraborti para factores de ahorro fijos en el tiempo, $\lambda = 0.2$ y $\lambda = 0.8$. Los autores también estudian una sencilla variante de su propio modelo en la que los factores de ahorro se asignan de forma aleatoria, tomando valores $0 < \lambda < 1$ [5]. Se propone la posibilidad también de modificar de forma dinámica el factor de ahorro de cada agente de acuerdo a los resultados de sus interacciones. En el siguiente capítulo se propondrá un modelo novedoso de modificación porcentual de dicho factor, con el fin de adaptar el modelo a la realidad de agentes económicos racionales e independientes.

La Ecuación 2.4 muestra la distribución de riqueza obtenida de acuerdo a las reglas del presente modelo para los factores de ahorro definidos, 20 % y 80 %. Dicha figura tiene como finalidad mostrar el impacto de un mayor factor de ahorro, reflejado en el corrimiento de las curvas hacia una distribución cada vez más Gaussiana, pero siempre con una cola exponencial. Es importante también resaltar que aunque en ambos casos existen agentes económicos prácticamente sin recursos (i.e. riqueza igual a cero), el número de estos disminuye conforme se incrementa el ahorro de la población.

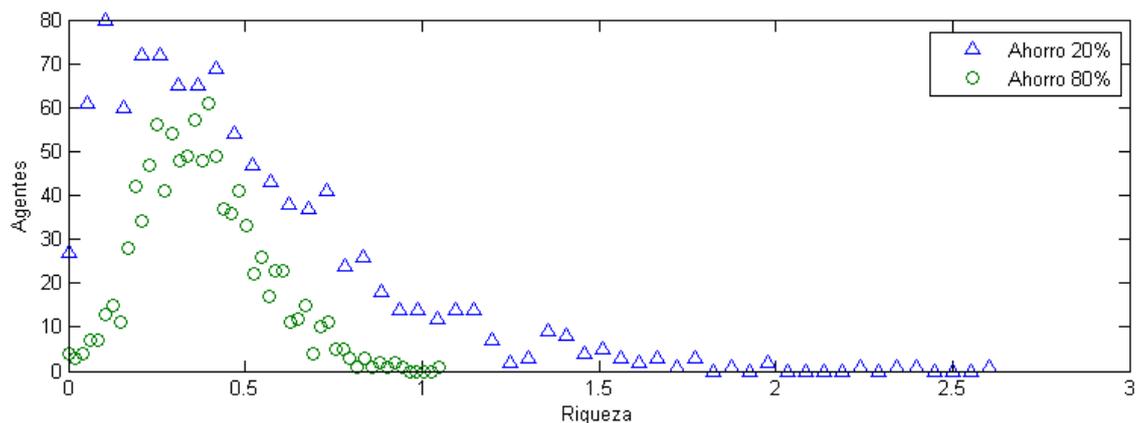


Figura 2.3: Distribución de Riqueza en un Modelo de Gas Ideal con Factor de Ahorro

2.3. Gas Ideal con Redistribución de la Riqueza en un Sistema Lineal[19]

Iglesias introduce un modelo con dinámica extremal en su estudio sobre la distribución de la riqueza, donde su principal objetivo es mejorar la situación de los agentes más empobrecidos dentro de su red.

Este modelo pretende mejorar la situación de los agentes a expensas de sus vecinos. Por lo tanto después de cada interacción de nuestro agente más pobre, sus pérdidas o sus ganancias serán a expensas de los cuatro vecinos más cercanos en la red. Todo esto implica una red de agentes geográficamente relevante en la que el posicionamiento se encuentre bien definido en una malla bidimensional. Esta aproximación refleja un interés social por una redistribución más equitativa.

Aunque el modelo de Iglesias utiliza una red de agentes lineal donde cada agente m tiene dos vecinos $m_1 = m + 1$ y $m_2 = m - 1$.

Iglesias y Pianegonda utilizan una configuración en la que todos los agentes inicialmente tienen un valor aleatorio de riqueza entre 0 y 1. Por lo tanto el promedio de las riquezas es aproximadamente 0.5.

Se busca al agente con menor riqueza en nuestra red, m_p . Se le asigna de forma aleatoria una nueva riqueza entre 0 y 1, y sus ganancias (o pérdidas) se obtienen a expensas de sus cuatro vecinos. Si llamamos A , a la riqueza inicial de nuestro agente más pobre,

$$m_p = A \quad (2.6)$$

y la nueva riqueza $B \in (0, 1)$,

$$m_{p'} = B \quad (2.7)$$

calculamos la ganancia (perdida), Q ,

$$Q = m_{p'} - m_p \quad (2.8)$$

Por último, la ganancia Q se obtiene a expensas de los dos vecinos,

$$m_{i'} = m_i - \frac{Q}{2}, i = 1, 2 \quad (2.9)$$

Tras una número de interacciones suficientemente largo (del orden de 10^4) el sistema alcanza un estado estable con la riqueza de todos los agentes por arriba de un umbral mínimo de pobreza (i.e. la diferencia entre las riquezas del agente más rico y el agente más pobre ha sido reducida).

Otra variante para la cual se obtiene también un umbral mínimo de pobreza involucra obtener la nueva riqueza del agente más pobre a partir de cuatro agentes aleatorias. A este modelo se le conoce como Gas Ideal con Redistribución de Riqueza Global, ya que a diferencia de la variante Local, los agentes sociales no se encuentran restringidos de forma geográfica.

Dependiendo de la variante del modelo, ya sea local o global, se obtienen umbrales mínimos de riqueza de entre 25 y 40 %.

La Figura 2.4 muestra el modelo local donde se ha ajustado un curva exponencial que los autores interpretan como un consecuencia de la restricción a un sistema conservativo, mismo resultado que se obtiene para el modelo conservativo de Yakovenko, sin embargo este ajuste ya no es posible para el caso del modelo global. Dada la naturaleza ageográfica de esta última variante, se obtiene una distribución lineal, también con un umbral mínimo de pobreza. Este modelo de dinámica extremal, aunque socialmente idealizado, representa un primer paso hacia un sociedad económica más equitativa.

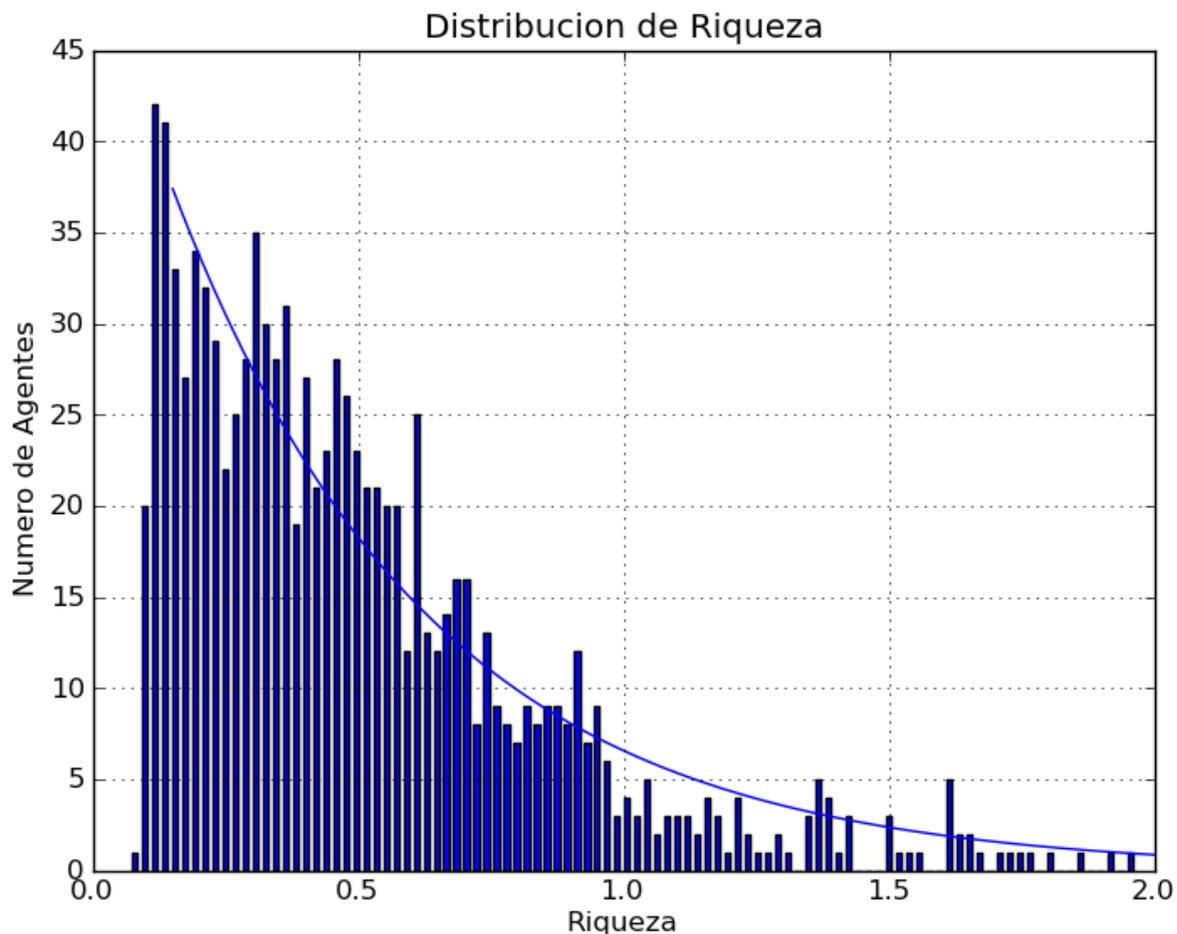


Figura 2.4: Distribución de Riqueza en un Modelo con Dinámica Extremal (Modelo Local)

2.4. Gas Ideal con Redistribución de la Riqueza en un Sistema Lineal con un Factor de Ahorro[16]

Ampliando su modelo anterior [19], Iglesias incluye ahora un factor de ahorro (a lo que él se refiere como *Risk Aversion* o Miedo a Arriesgar).

Las modificaciones principales son el ya mencionado factor de ahorro, λ_i , tal que $1 - \lambda_i^2$ es la cantidad que el agente está dispuesto a arriesgar en cada interacción.

²La notación ha sido modificada del artículo original para dar continuidad y evitar confusiones con la notación utilizada en el presente trabajo

Iglesias introduce además una probabilidad p de ayudar el pobre, definida como,

$$p = \frac{1}{2} + f\left(\frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2}\right) \quad (2.10)$$

donde w_1 y w_2 son las riquezas del agente más rico y más pobre, respectivamente, de el par de agentes que interactúan en cada Paso Monte Carlo, y $f \in [0, \frac{1}{2}]$.

El nuevo modelo adopta el mismo interés anterior por mejorar la situación de los agentes más pobres, aunque ahora en uno de los modelos presentados ya no se utiliza una dinámica extrema, sino que se utiliza el Modelo de Gas Ideal con Factor de Ahorro, pero con la probabilidad p para favorecer al agente más pobre.

La Figura 2.5 y Figura 2.6 muestran la distribución de riqueza para factores de ahorro y p definidos. Aunque p es una variable que se modifica de acuerdo a la fórmula anterior, y que en general fluctuará de acuerdo a la diferencia entre la riqueza de los agentes que interactúan, los altos valores utilizados sirven para maximizar el efecto de favorecer al agente más pobre y poder ver un resultado más idealizado sin las fluctuaciones de la ecuación. Sin embargo la utilidad de la definición de p en función de la riqueza de los agentes sirve para matizar el subsidio en beneficio de los más necesitados, en particular cuando interactúan con los agentes más adinerados.

Como se puede apreciar en ambas figuras el efecto combinado de el factor de ahorro y el subsidio, producen una distribución Gaussiana con una cola exponencial en el extremo derecho donde se encuentra la parte adinerada de la población y se produce también el umbral mínimo de pobreza. Tanto el umbral mínimo de pobreza como el rango de la distribución mejoran (en tanto que hay mayor equidad y un menor índice de Gini) conforme se incrementa el valor de las variables.

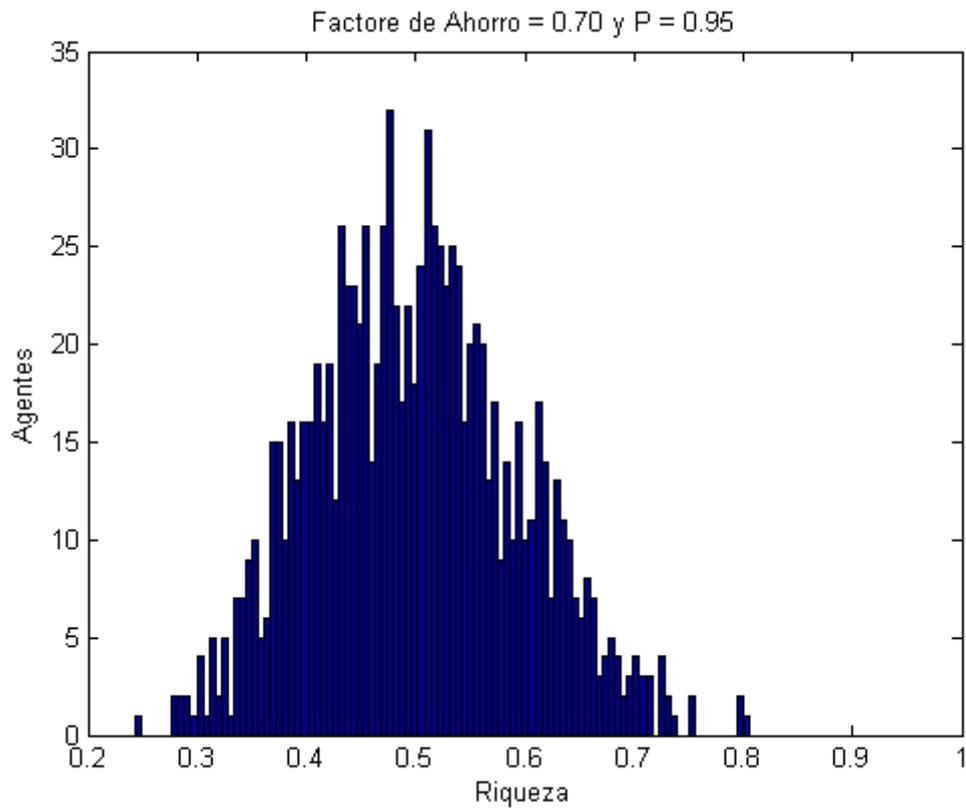


Figura 2.5: Distribuciones de Riqueza para Factores de Ahorro ($r-a$) y Probabilidades (p) fijas

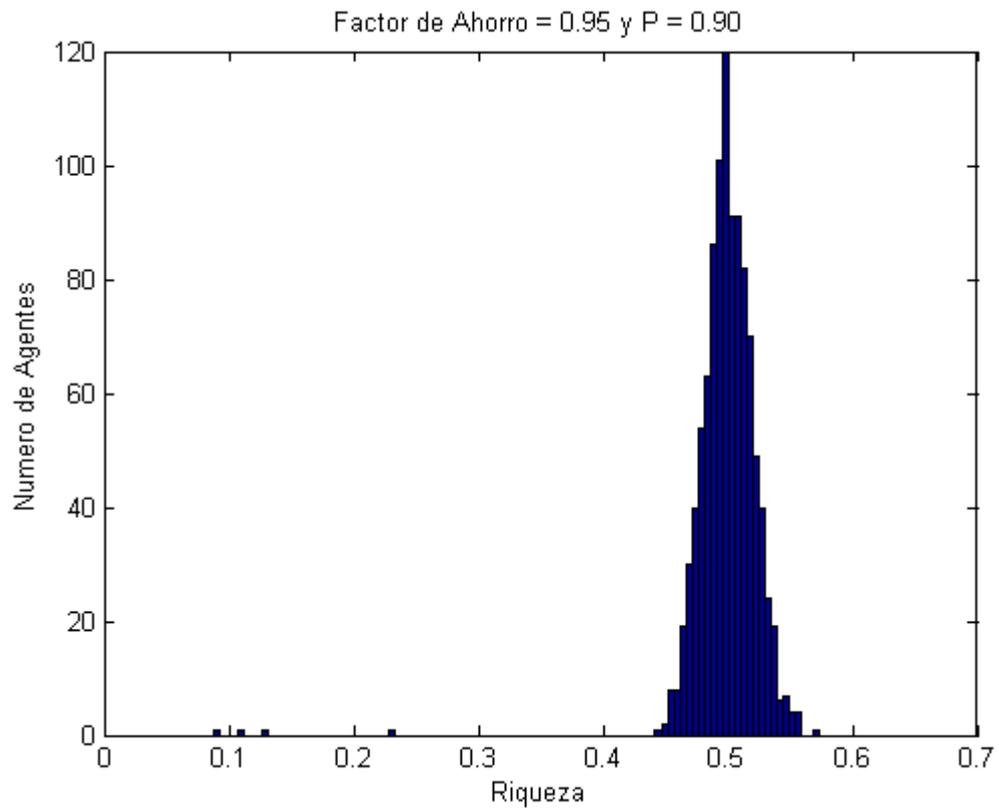


Figura 2.6: Distribuciones de Riqueza para Factores de Ahorro ($r-a$) y Probabilidades (p) fijas

3 Modelo Híbrido

En un intento por diseñar un modelo más apegado a la realidad económica, pero siguiendo las ideas de los modelos presentados por Iglesias y Pianegonda, se diseñó un Modelo Híbrido que abarcara la Redistribución de la Riqueza con el agente más pobre en mente, junto con un factor de ahorro como propiedad inherente de todo agente económico. Pensando en una sociedad económica son un interés social por mejorar la situación de sus agentes más empobrecidos pero cuyo única motivación no puede ser esta, modificamos el modelo de mercado de Iglesias para incluir interacciones entre agentes de forma completamente aleatoria, involucrando la dinámica extremal a distintos intervalos a los largo del tiempo y con un factor de ahorro dinámico.

En este capítulo comenzamos con una descripción de la simulación por computadora que proponemos. Para el presente trabajo se utilizó el software MATLAB R2010a chapter 5. Sin embargo, las simulaciones pueden ser fácilmente exportadas para correr en cualquier otro lenguaje de programación sustituyendo los nombres de los comandos al tipo apropiado en cada lenguaje. Para esto, no es necesario alterar la estructura del programa. En las primeras dos secciones, sec. 3.1.1 y sec. 3.1.2, presentamos las dos piezas clave de nuestro modelo, el Subsidio Intermitente y el Factor de Ahorro Dinámico, así como la forma de incluirlos en cada Paso Monte Carlo durante la simulación. sec. 3.1.1 y sec. 3.1.2 describen también la forma de incluirlos dentro de la lógica del programa.

A continuación presentamos la lógica del programa completo, el cual incluye la lógica utilizada para los modelos presentados en el capítulo anterior pero con ligeras modificaciones (i.e. se han agregado o modificado ciertos elementos). Se trata simplemente de presentar un esquema del funcionamiento del programa, y la lógica que se siguió al momento de escribirlo. El programa final se encuentra detallado en el Apéndice.

Por último presentamos los resultados obtenidos.

3.1. Modelo de Gas Ideal en un Sistema Conservativo con un Factor de Ahorro Dinámico y un Subsidio en forma de Dinámica Extremal Intermitente

3.1.1. Subsidio Intermitente

Analizamos el efecto de una dinámica extremal intermitente, en la que se hace interactuar al agente más pobre, m_p , con otro agente aleatorio, m_i , cada cierto número de interacciones aleatorias S . Aunque es deseable mejorar la situación del agente más pobre, y crear un umbral de mínima pobreza junto con una distribución más equitativa, un modelo de mercado deja de ser representativo al involucrar transacciones económicas con un solo agente. A pesar de un enfoque de dinámica extremal, las interacciones entre el resto de la población económica deben continuar en el fondo, es por ello que utilizamos las interacciones de dinámica extremal de forma intermitente, en dónde el modelo de Iglesias *et al.* representa el caso ideal de dinámica extremal absoluta, y donde el otro extremo sería el modelo de Chatterjee *et al.* representa el otro extremo en el que no existe un interés por mejorar la situación de los agentes más empobrecidos.

Asimismo utilizamos la probabilidad p , adoptada por Iglesias *et al.*, para aumentar las posibilidades del agente económico más empobrecido de mejorar su situación.

$$p = \frac{1}{2} + f * \frac{|m_i - m_j|}{m_i + m_j} \quad (3.1)$$

donde,

$$f \in [0, \frac{1}{2}] \quad (3.2)$$

Para un valor de f igual a $\frac{1}{2}$ tenemos el caso ideal donde las mayores ganancias se van al agente más pobre, mientras que el caso con f igual a 1 es el caso aleatorio con la misma probabilidad para cada agente.

Para nuestra simulación adoptamos dos valores, p y p_{Aid} , con sus respectivos f y f_{Aid} , de forma tal que podamos incluir la probabilidad p en nuestras interacciones generales de tipo Monte Carlo (f y p), y en las interacciones intermitentes con dinámica extremal (f_{Aid} y p_{Aid}), de forma independiente.

Aunque algunos gastos como inversiones de riesgo son el tipo de transacciones en las que la cantidad invertida se puede ver multiplicada al recibir ganancias, aquí consideramos que los agentes no participan en ese tipo de riesgos y que sus transacciones

se saben 1 : 1. Por lo anterior, incluimos además una restricción a la cantidad que cada agente dispone para cada interacción, de tal forma que las cantidades en juego sean iguales a la apuesta mínima entre ambos agentes.

3.1.2. Factor de Ahorro Dinámico

En un artículo anterior[6], Arnab Chatterjee y Bikas Chakrabarti, proponen un factor de ahorro dinámico. Sin embargo este factor varía de forma completamente aleatoria, dentro de cierto rango entre una variable μ y 1. Esta variable μ es definida de forma arbitraria por los autores. Creemos sin embargo que el ahorro de cada agente debe ser un factor que refleje de forma dinámica la situación económica del agente y el cual debe variar de acuerdo a los resultados de las interacciones. Es por ello que nuestro modelo presenta una variación de los factores de ahorro inmediatamente después de cada transacción. Los agentes se adaptan a los resultados de sus transacciones económicas.

A partir de esto proponemos que el factor de ahorro puede variar de forma directamente proporcional a las ganancias (o pérdidas) del agente.

Un agente económico adquiere mayor confianza a medida que sus ganancias se incrementan, por lo que su aprehensión se reduce y su disposición a gastar aumenta (i.e. su factor de ahorro disminuye). Aunque está lógica no sigue un pensamiento completamente racional, pues un agente racional reconoce que los resultados de dichas interacciones han sido aleatorios y por lo tanto no existe justificación alguna para variar el factor de ahorro, si refleja en cierto modo la naturaleza humana. Entre más dinero se tiene más se gasta, con sus obvias excepciones.

El ahorro dinámico porcentual modifica el factor de ahorro de cada agente de forma directamente proporcional al porcentaje de sus ganancias (pérdidas),

$$\lambda_{nuevo} = \lambda_{viejo} + \frac{m_{final} - m_{inicial}}{m_{inicial}} * \lambda_{viejo} \quad (3.3)$$

tal que si,

$$\lambda_{nuevo} < \lambda_{min} \Rightarrow \lambda_{nuevo} = \lambda_{min} \quad (3.4)$$

$$\lambda_{nuevo} > \lambda_{max} \Rightarrow \lambda_{nuevo} = \lambda_{max} \quad (3.5)$$

Mientras que el ahorro dinámico discreto modifica el factor de ahorro de forma discreta, en intervalos previamente establecidos, de acuerdo a las ganancias (pérdidas)

de la última interacción. Se definen entonces los valores en lo que el factor de ahorro se incrementa o se reduce de acuerdo al resultado.

Si,

$$\lambda_{gain} = \alpha; \lambda = \beta \quad (3.6)$$

entonces,

$$\lambda_{nuevo} = \lambda_{viejo} - \lambda_{gain}(\lambda_{loss}) \quad (3.7)$$

donde de forma análoga, si,

$$\lambda_{nuevo} < \lambda_{min} \Rightarrow \lambda_{nuevo} = \lambda_{min} \quad (3.8)$$

$$\lambda_{nuevo} > \lambda_{max} \Rightarrow \lambda_{nuevo} = \lambda_{max} \quad (3.9)$$

Analizamos también el caso opuesto de la modificación del ahorro porcentual en dónde puede existir un mayor acaparamiento de riqueza, sin embargo como veremos no resulta ser el caso.

Las apuestas durante cada interacción están limitadas por la apuesta mínima, así si los agentes i y j con factores de ahorro λ_i y λ_j , respectivamente, tienen riquezas m_i y m_j , la cantidad de dinero en juego durante esa interacción estará dada por,

$$Apuesta = \min[(m_i - m_i * \lambda_i), (m_j - m_j * \lambda_j)] * 2 \quad (3.10)$$

3.2. Estructura del Programa

A continuación presentamos la lógica seguida para la construcción y el funcionamiento del programa. Se trata de los pasos individuales que resumen la simulación del modelo híbrido:

Se crea una red de agentes.

Se les asigna una riqueza inicial $m_i \in [0, 1]$ de forma aleatoria.

Se asigna un factor de ahorro λ de forma aleatoria.

Se define el rango de los factores de ahorro y la variación dinámica de acuerdo a los resultados de las interacciones.

Bucle ($I = 10^6$ interacciones) :

Se eligen dos agentes i y j de forma aleatoria.

Se calcula la riqueza que cada agente quiere arriesgar de acuerdo a su factor de ahorro, $Apuesta_i = m_i - \lambda_i$.

Se calcula la riqueza total en juego a partir de la mínima cantidad arriesgada entre los agentes, $Total = 2 * \min(Apuesta_i, Apuesta_j)$

Se asigna de forma aleatoria las nuevas riquezas $m_{i'}$ y $m_{j'}$.

Se modifica el factor de ahorro de cada agente de acuerdo al resultado de su interacción, $\lambda_{i'} = f(m_i, m_{i'})$

Bucle Anidado

Cada Aid interacciones aleatorias, se inicia el bucle anidado.

Se encuentra al agente más pobre m_p .

Se elige otro agente de forma aleatoria, m_i .

Se calcula la riqueza que cada agente quiere arriesgar de acuerdo a su factor de ahorro, $Apuesta_i = m_i - \lambda_i$.

Se calcula la riqueza total en juego a partir de la mínima cantidad arriesgada entre los agentes, $Total = 2 * \min(Apuesta_p, Apuesta_i)$

Se asigna de forma aleatoria las nuevas riquezas $m_{p'}$ y $m_{i'}$.

Se modifica el factor de ahorro de cada agente de acuerdo al resultado de su interacción, $\lambda_{i'} = f(m_i, m_{i'})$

TerminaBucle Anidado

TerminaBucle

El programa completo y comentado se puede encontrar en el Apéndice.

3.3. Resultados

Las gráficas Fig. 3.1 y Fig. 3.2 muestran el efecto de favorecer al agente más pobre durante las interacciones, tanto en cada interacción aleatoria como durante las interacciones con dinámica extremal o de subsidio intermitente. Aunque un factor f mayor implica una mejor distribución de la riqueza como se aprecia en la Fig. 3.2, al alejarse de la distribución exponencial de Yakovenko, esto no es suficiente para generar un umbral mínimo de pobreza significativamente mayor a 0. Es necesario hacer uso de nuestro subsidio, o de la dinámica extremal de Iglesias para obtener un marcado umbral como se aprecia en Fig. 3.1. Podemos notar que a partir de $f = 0.3$

en Fig. 3.1 la distribución cambia en cuanto que el número de agentes con el mínimo de riqueza ya no es el máximo en la curva, como sucede en las tres curvas anteriores. A partir de $f = 0.3$ se crea un pequeño intervalo de pocos agentes, < 50 , con la riqueza mínima, y las distribuciones dan un salto entre el valor de riqueza 0.2 y 0.3, a partir de donde regresamos a una cola exponencial.

De forma análoga en Fig. 3.2 podemos ver que para los valores $f = 0.4$ y $f = 0.5$ el máximo de nuestra distribución no es en la riqueza de los agentes más pobres, tenemos una campana gaussiana con sesgada hacia la izquierda y con una cola exponencial. A diferencia de Fig. 3.1, en Fig. 3.2 no existe un subsidio, no se elige al agente más pobre en la red para interactuar. Eso tiene el efecto de hacer que el máximo, aunque se encuentra también entre 0.2 y 0.3, se alcance de forma gradual, un peor resultado si consideramos que el número de agentes con riqueza por debajo del máximo es mucho mayor. El número de agentes en pobreza extrema, medida en términos de la pobreza generalizada (i.e. en el máximo), es mucho mayor cuando no existe un subsidio.

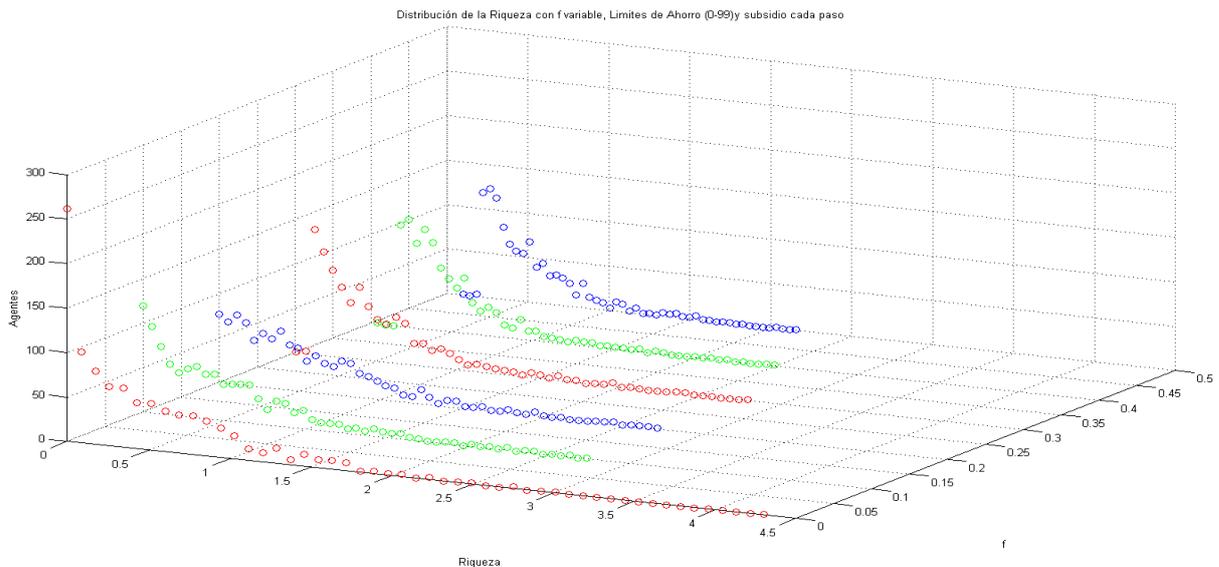


Figure 3.1: Efecto de favorecer al agente más pobre durante cada interacción en un modelo con subsidio a cada paso

A partir de las gráficas Fig. 3.3, Fig. 3.4, Fig. 3.5, podemos observar el corrimiento gradual del umbral límite de riqueza de acuerdo a los resultados de Iglesias y compañía. Cabe resaltar que nuestro modelo de subsidio más intensivo, es decir por cada paso Monte Carlo, donde hacemos interactuar al agente más pobre una vez por cada interacción aleatoria, obtenemos el mismo resultado que para el modelo de

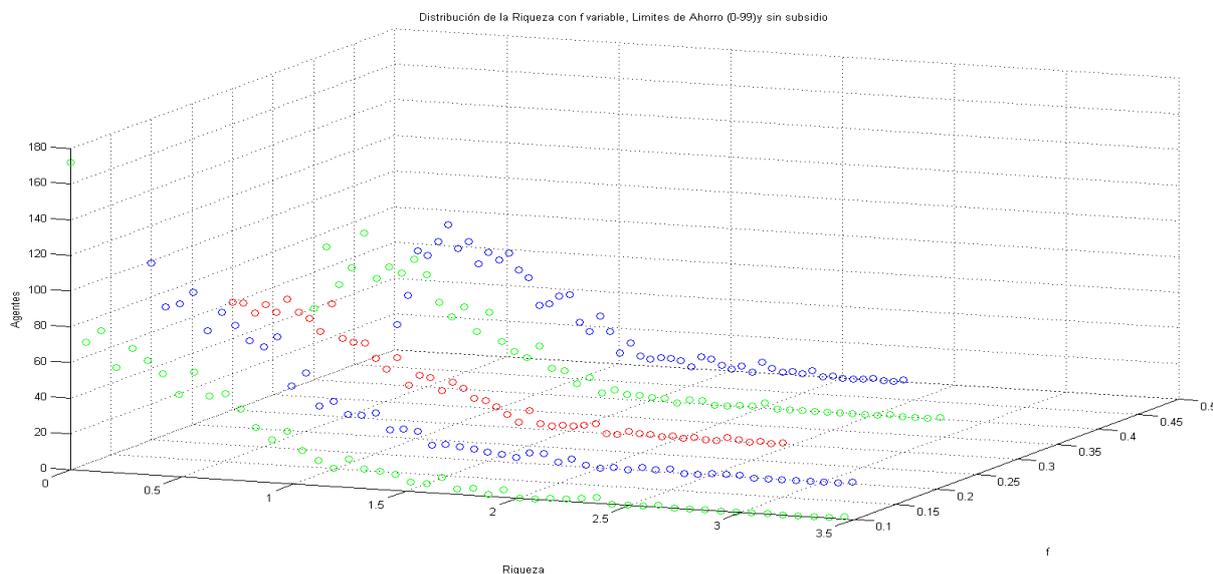


Figure 3.2: Efecto de favorecer al agente más pobre durante cada interacción en un modelo sin subsidio

dinámica extremal en el que el agente más pobre interactúa en todo paso. Comenzamos a ver como es posible relajar las restricciones impuestas en [19] y [16]. Hemos utilizado los intervalos $0 - 60$, $40 - 80$, $60 - 99$ para entender la importancia de un factor de ahorro más alto. Ya que un factor de ahorro extremadamente alto, por encima de 90% proporciona las mejores distribuciones, restringimos los dos intervalos superiores a un rango de 40 puntos porcentuales, mientras que el intervalo menor, $0 - 60$, se propone como el intervalo entre el cual los agentes económicos reales pueden, o quieren, ahorrar. El intervalo de ahorro superior, alcanza el valor máximo de 99%, ya que un máximo de 100% dejaría inactivos de forma permanente a todos los agentes que alcanzaran dicho nivel de ahorro.

En Fig. 3.3, Fig. 3.4, Fig. 3.5 vemos que aunque el orden en términos de distribuciones más equitativas es el esperado, con el intervalo $0 - 60$ resultando en la peor distribución, y el intervalo de ahorro superior resultando en la mejor distribución. Hay un cambio notable entre la distribución que se obtiene para el intervalo inferior, en comparación con las distribuciones obtenidas para los intervalos $40 - 80$ y $60 - 99$.

Sin embargo, en una comparación entre Fig. 3.5 y Fig. 3.6, donde existe una diferencia de un orden de magnitud entre el número de interacciones del agente más pobre al pasar de interactuar de un 1% a un 0.1%. En ambos casos se observan límites inferiores de pobreza con un comportamiento lineal hasta alcanzar el punto máximo, clase media, a partir de donde se observan las colas exponenciales de los agentes más

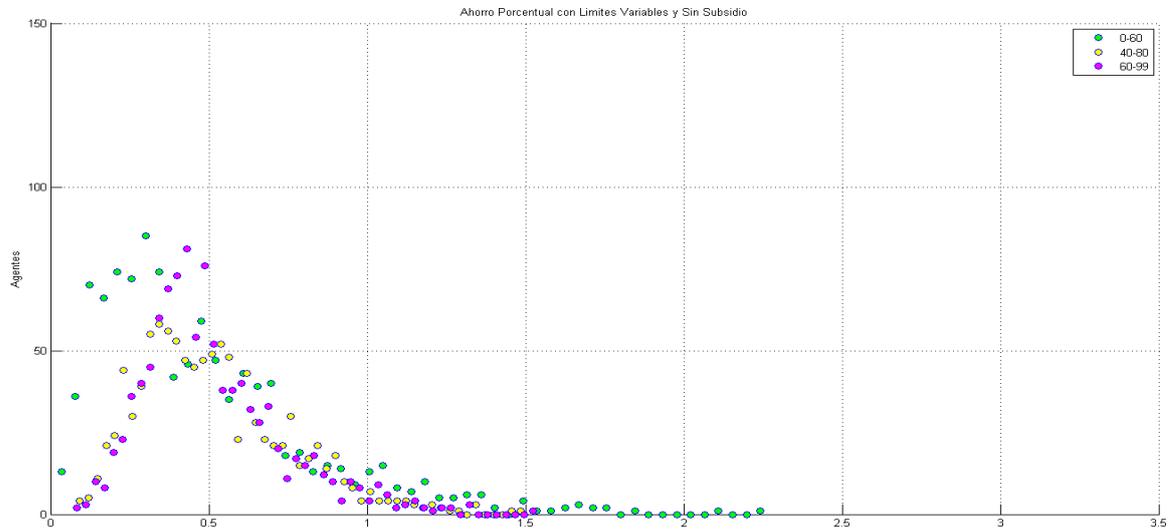


Figure 3.3: Ahorro Porcentual con Límites Variables y Sin Subsidio

ricos.

Se observa una pérdida de un 50% en el umbral de mínima pobreza como se puede ver en Fig. 3.7. Para el caso donde los agentes más pobres interactúan de forma intermitente 1:1 con las interacciones aleatorias, notamos que hay aumento considerable en el número de agentes paupérrimos. Los agentes con la menor cantidad de dinero en la red son muchos más que los agentes con la menor cantidad de dinero en los otros dos casos, sin embargo dicho nivel de pobreza es mucho menor, los ingresos son tres veces mayores que en los otros dos casos.

En cuanto a la relación entre el factor de ahorro y la riqueza de cada agente, Fig. 3.8, no existe una relación entre ambas variables que nos pueda garantizar sus valores, sin embargo, y como era de esperarse, los agentes tienden a un factor de ahorro cada vez mayor lo que implica que las fluctuaciones de su riqueza se minimizan hasta estabilizarse. Este estancamiento por parte de los agentes en un cierto nivel de riqueza puede dar pie al punto de equilibrio que encontramos en la distribución de la riqueza. Sin embargo, la velocidad con la que se alcanza dicho equilibrio varía de agente a agente y se encuentra en función de los resultados iniciales. En particular una fuerte pérdida de riqueza al comienzo de la simulación implica un rápido incremento en el factor de ahorro de un agente, lo que lleva a un rápido estancamiento de su riqueza. Aunque dicho estancamiento puede suceder en la región de máxima pobreza, éste puede variar.

Fig. 3.9 muestra las distintas curvas de Lorenz para los múltiples rangos estudiados

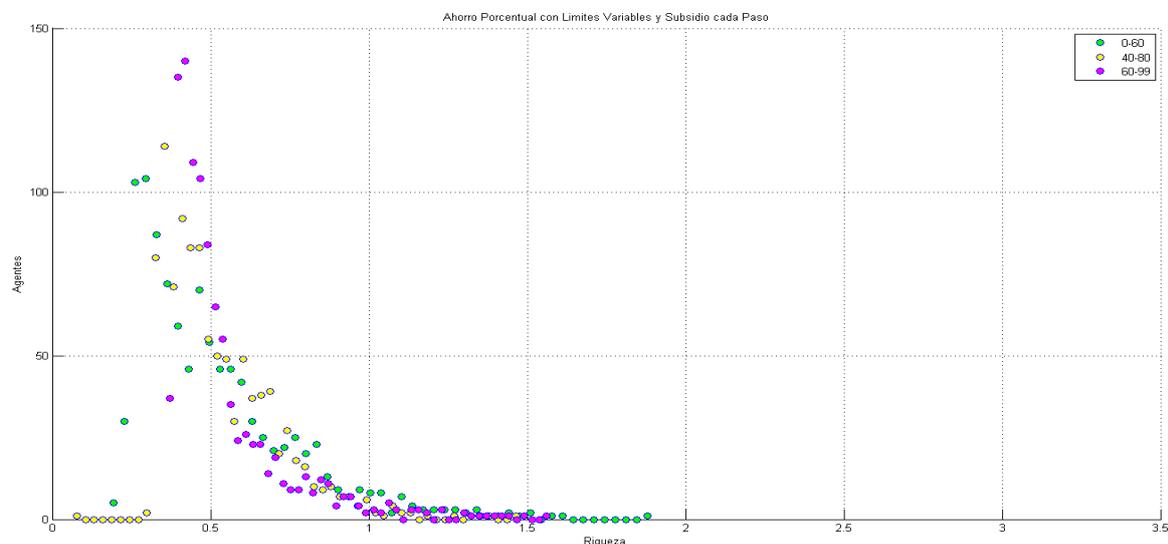


Figure 3.4: Ahorro Porcentual con Límites Variables y Subsidio cada Paso

del factor de ahorro dinámico. Cabe resaltar que la restricción a los límites inferiores de ahorro resulta en la peor distribución posible, muy por debajo de un modelo sin restricciones (el caso 0–99). En el límite interior de riqueza la distribución en el caso sin restricciones resulta muy similar al caso de restricciones con un rango intermedio (40 – 80), sin embargo se vuelve más pronunciada en el límite superior. Una vez más reconocemos la marcada diferencia entre el sector más rico de la población. Como esperábamos, dado el énfasis en la importancia de un alto factor de ahorro, la restricción al límite superior de ahorro (60 – 99) resulta en la distribución más igualitaria de todas. Cabe recalcar que el intervalo 0 – 99 se incluye por ser el modelo que no impone restricciones al factor de ahorro dinámico, sin embargo no es necesariamente el modelo de ahorro que mejor refleja la dinámica de ahorro real, como se mencionó anteriormente el intervalo que mejor se podría aproximar a un comportamiento de ahorro de agentes económicos reales sería el intervalo inferior, 0 – 60.

Las gráficas en Fig. 3.10, Fig. 3.11, Fig. 3.12, Fig. 3.13, Fig. 3.14, Fig. 3.15, Fig. 3.16 y Fig. 3.17, muestran un comparativo entre los resultados obtenidos para el caso de acumulación de riqueza, aversión al riesgo (i.e. el modelo donde mayores ganancias implican una mayor ahorro) y el caso de adicción al riesgo (i.e. el modelo donde mayores ganancias implican un menor ahorro). Como veremos esto involucra resultados opuestos, donde una aversión al riesgo resulta en una mucho mejor distribución de la riqueza.

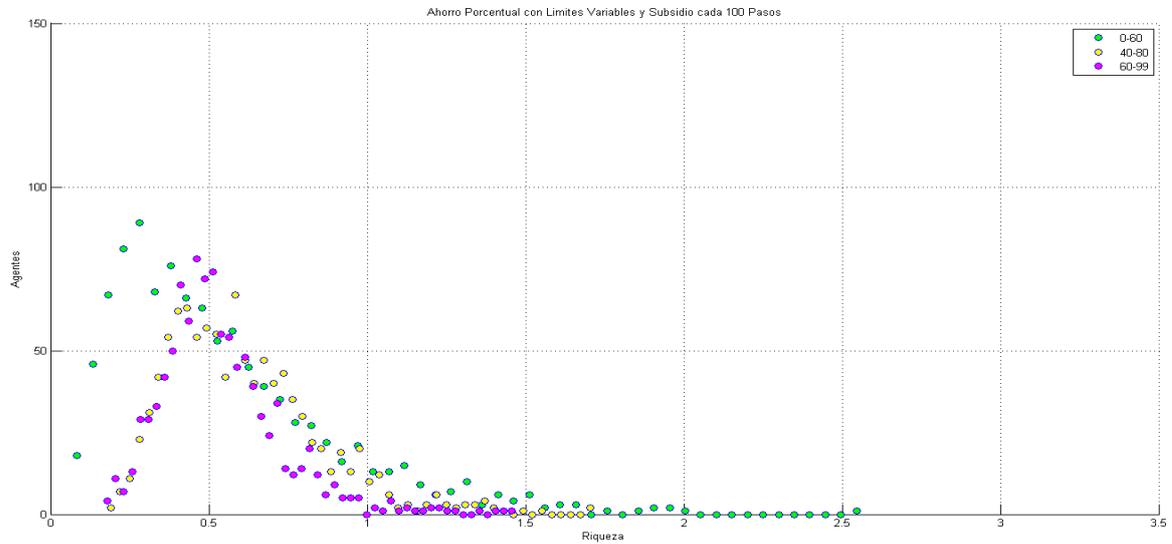


Figure 3.5: Ahorro Porcentual con Límites Variables y Subsidio cada 100 pasos

Como punto de comparación para los dos modelos de modificación de ahorro porcentual presentamos en Fig. 3.10 y Fig. 3.11, las curvas de Lorenz y los respectivos coeficientes de Gini para ambos casos en las modalidades de ahorro variable entre límite (0 – 99), el sin restricciones, y (60 – 99), debido a que representa la optimización en la distribución de los recursos de acuerdo con los resultados obtenidos en los modelos de ahorro estudiados.

A partir de Fig. 3.12 y Fig. 3.13 se puede observar la esperada tendencia de los factores de ahorro de acuerdo a los límites establecidos. A mayor ganancia se ahorra más y se tiene una mayor concentración de los factores de ahorro en el límite superior permitido. Lo opuesto ocurre cuando el agente decide arriesgar más en respuesta a sus buenos resultados. También se puede notar que la concentración de los factores de ahorro para el modelo de mayor riesgo (i.e. +Ganancia=-Ahorro) es mayor y el ahorro promedio en este caso no se aleja más del 10% del ahorro mínimo permitido.

Aunque el modelo de menor riesgo podría implicar un acaparamiento de riqueza por parte de unos pocos afortunados, que tras acumular gran riqueza al comienzo de la simulación y por lo tanto incrementar drásticamente su factor de ahorro lo cual estabilizaría su economía de acuerdo a Fig. 3.8, lo cual llevaría a una distribución de la riqueza mucho menos igualitaria. Sin embargo esto no ocurre, siendo este modelo el que resulta en una distribución más justa de la riqueza. Incluso el modelo general sin límites de ahorro (i.e. $\lambda \in [0, 0.99]$) resulta en un índice de Gini $G = 0.20$, similar al de países de primer mundo como Suecia.

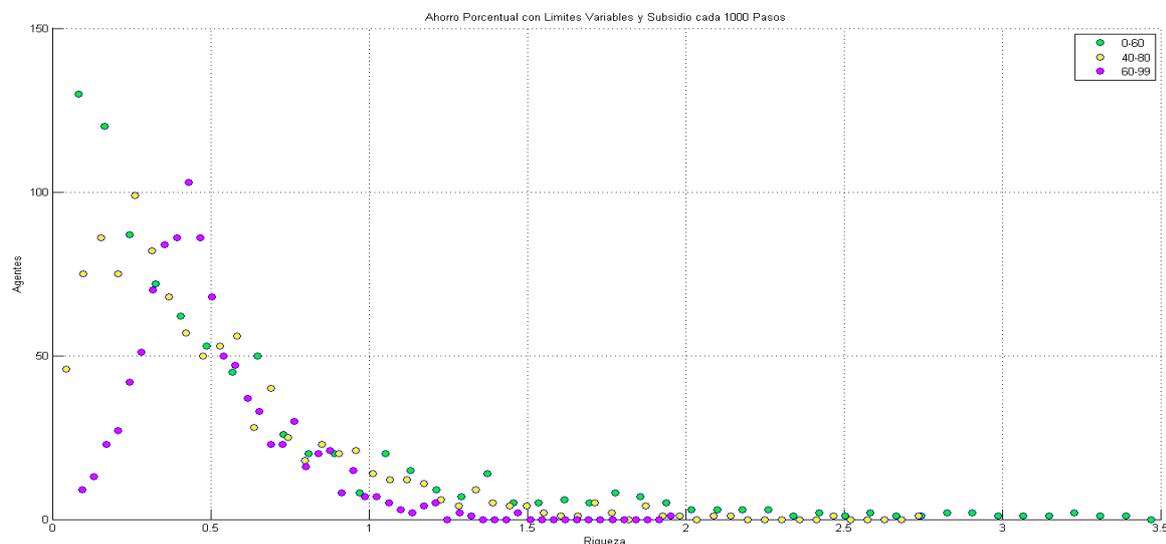


Figure 3.6: Ahorro Porcentual con Límites Variables y Subsidio cada 1000 pasos

De acuerdo con las figuras Fig. 3.14 y Fig. 3.15, observamos que ambos modelos llegan a su punto de equilibrio en poco tiempo, del orden de 2000 interacciones. Aunque todavía no existe como tal, dada la falta de restricción en los factores de ahorro, se puede observar la formación de un mínimo umbral de pobreza y el corrimiento del máximo en las riquezas a partir de estas dos figuras.

Sin embargo la evolución del factor de ahorro para los mismos casos no es tan rápida, figuras Fig. 3.16 y Fig. 3.17, y aunque existe un cambio notable hacia una distribución exponencial del factor de ahorro para $t=1,000,000$ en ambos casos, la estabilidad en la distribución de la riqueza se comienza a observar mucho antes en el tiempo, para $t=1200$.

En Fig. 3.16 y Fig. 3.17 hemos dividido el factor de ahorro en deciles para graficar el número de agentes en nuestra distribución con respecto a su porcentaje de ahorro, y de esta forma graficar como evoluciona esta tendencia en el tiempo. Anteriormente vimos que las distribuciones alcanzan una forma muy parecida a la distribución final, después de un millón de interacciones, alrededor de las 1,200-1,500 interacciones. Por ello hemos graficado la evolución en el tiempo de la forma de ahorrar de nuestro agentes para las primeras 1,200 interacciones, y hemos incluido la distribución de agentes de acuerdo a su factor de ahorro al finalizar las simulaciones ($t=1M$). Hemos tomado el caso sin restricciones en la cota superior e inferior del factor de ahorro, toda vez que restringir este último a un intervalo superior o inferior, acelera, o desacelera, respectivamente los efectos observados.

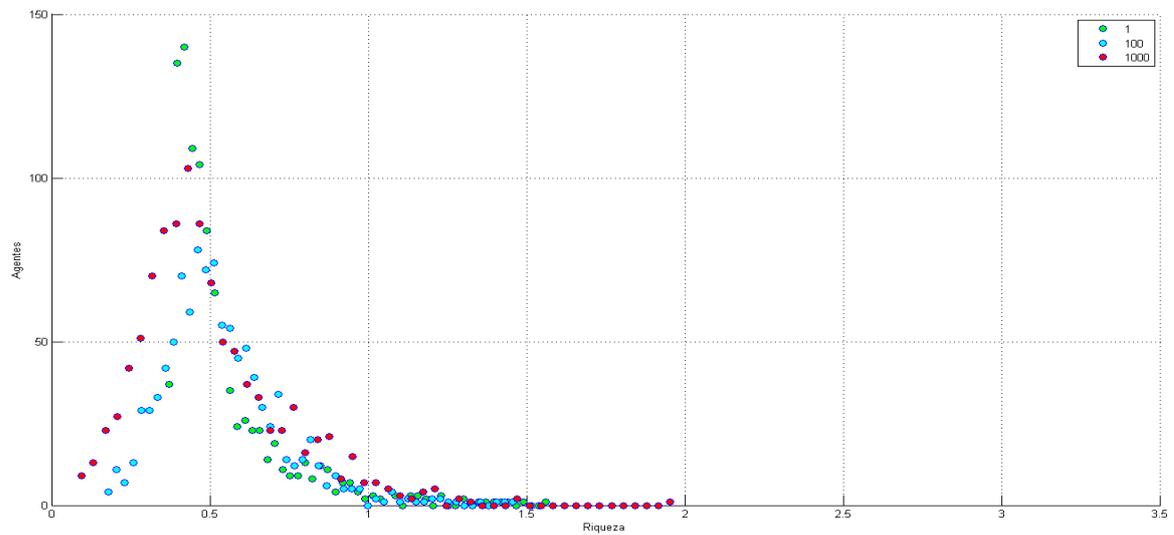


Figure 3.7: Ahorro Porcentual con Límites de Ahorro (60-99) y Subsidio Variable

Como se observa en ambas figuras, las fluctuaciones en el número de agentes dentro de un cierto decil del factor de ahorro son mínimas. Sin embargo la diferencia importante radica en la forma final de las distribuciones de los agentes de acuerdo a su factor de ahorro para los casos $(+G=+A)$, y $(+G=-A)$, donde las distribuciones de los agentes resultan completamente opuestas, y en particular existe una mayor acumulación en el extremo inferior para el segundo caso, que la acumulación en el límite superior que se observa en el primero.

3.3 Resultados

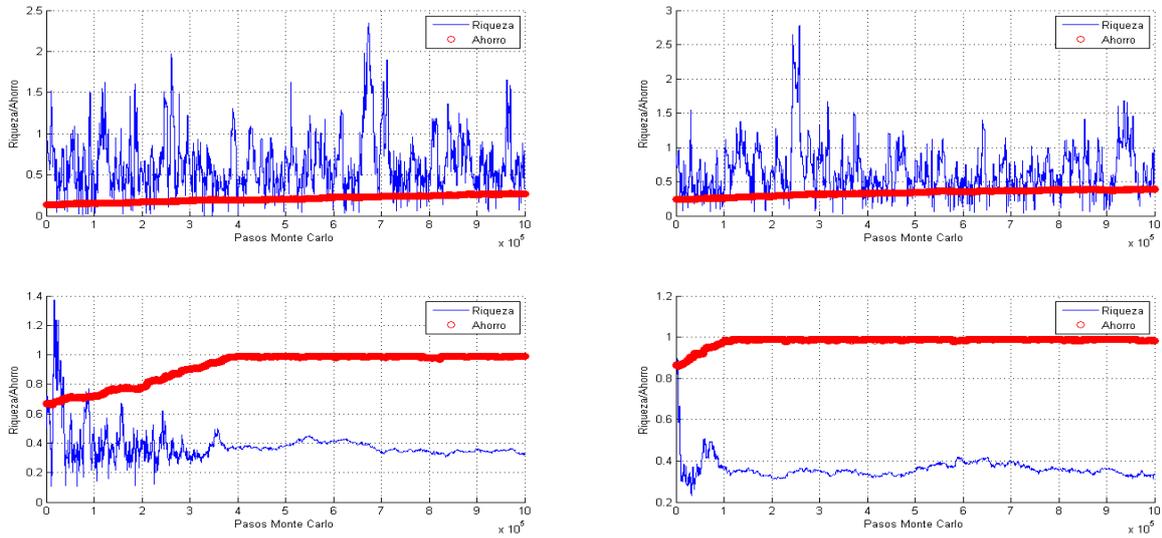


Figure 3.8: Variación del Factor de Ahorro y Riqueza para 4 agentes aleatorios

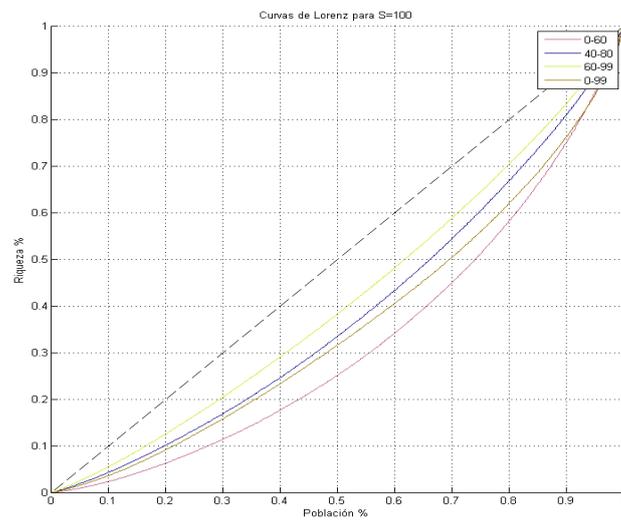


Figure 3.9: Curvas de Lorenz para S=100 y Ahorro Dinámico con Límites Variables

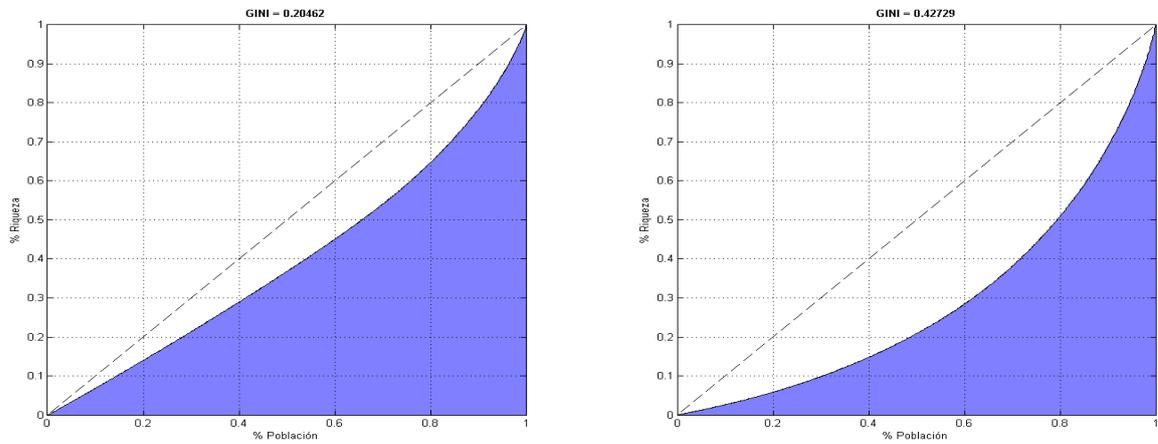


Figure 3.10: Curva de Lorenz y Coeficiente de Gini para ambos Modelos de Ahorro con Límites (0-99) [+Ganancia=+Ahorro (izquierda) y +Ganancia=-Ahorro (derecha)]

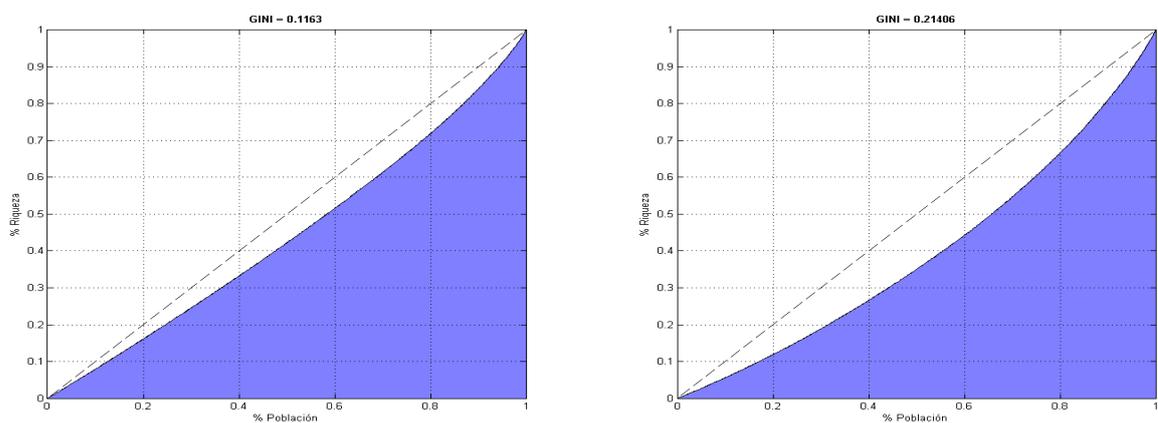


Figure 3.11: Curva de Lorenz y Coeficiente de Gini para ambos Modelos de Ahorro con Límites (60-99) [+Ganancia=+Ahorro (izquierda) y +Ganancia=-Ahorro (derecha)]

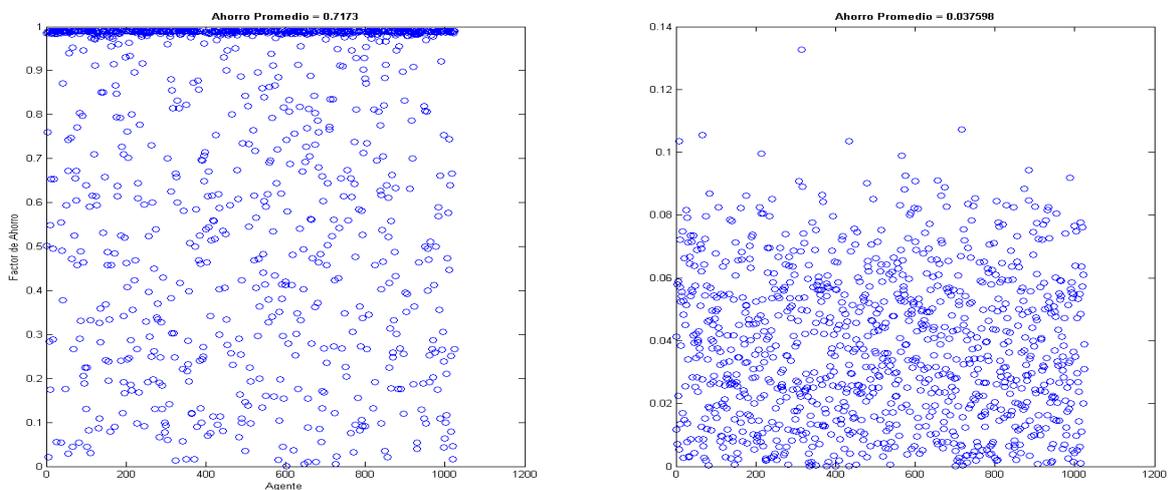


Figure 3.12: Factor de Ahorro Final por Agente para ambos Modelos de Ahorro con Límites (0-99) [+Ganancia=+Ahorro (izquierda) y +Ganancia=-Ahorro (derecha)]

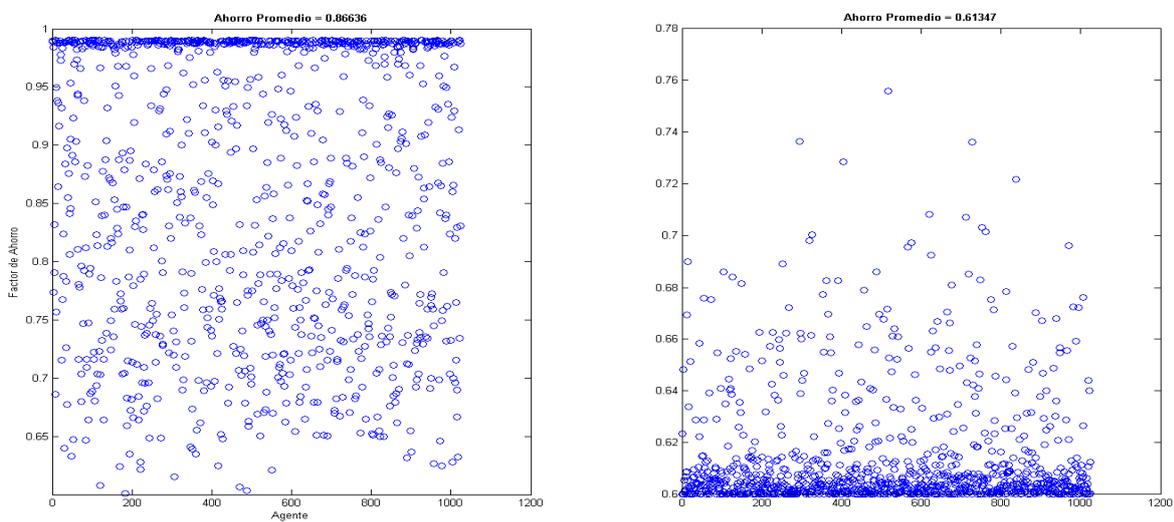


Figure 3.13: Factor de Ahorro Final por Agente para ambos Modelos de Ahorro con Límites (60-99) [+Ganancia=+Ahorro (izquierda) y +Ganancia=-Ahorro (derecha)]

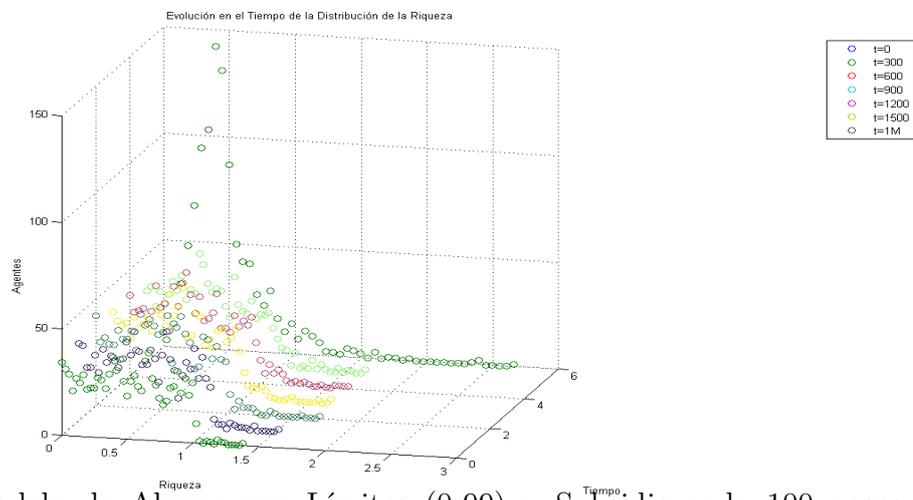


Figure 3.14: Modelo de Ahorro con Límites (0-99) y Subsidio cada 100 pasos (+Ganancia=+Ahorro)

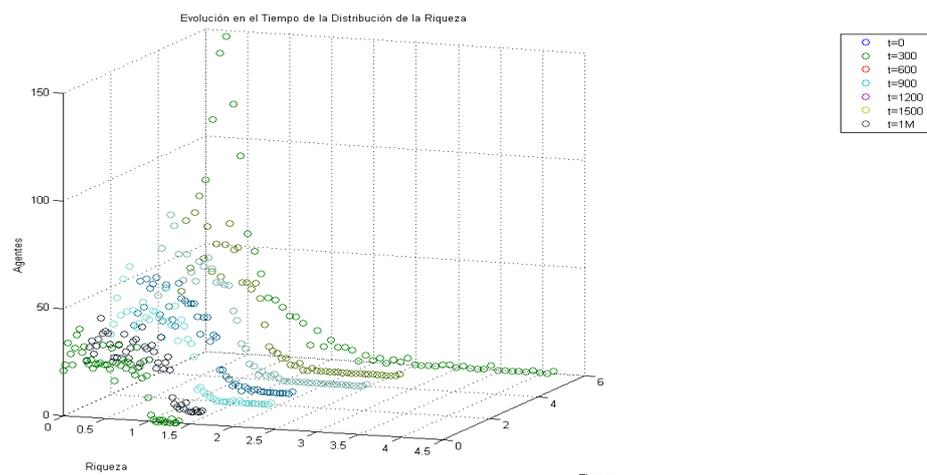


Figure 3.15: Modelo de Ahorro con Límites (0-99) y Subsidio cada 100 pasos (+Ganancia=-Ahorro)

3.3 Resultados

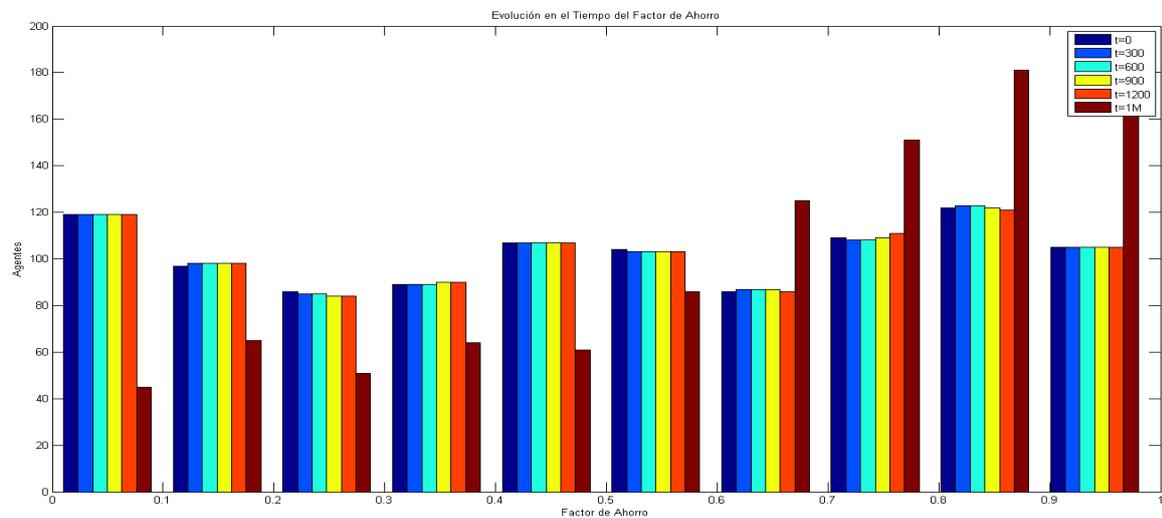


Figure 3.16: Modelo de Ahorro con Límites (0-99) y Subsidio cada 100 pasos (+Ganancia=+Ahorro)

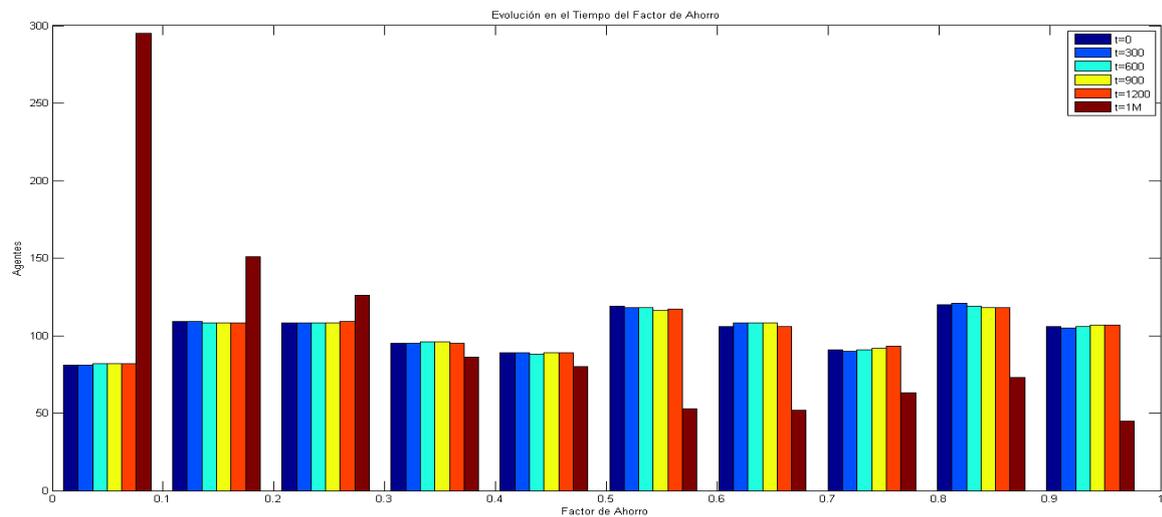


Figure 3.17: Modelo de Ahorro con Límites (0-99) y Subsidio cada 100 pasos (+Ganancia=-Ahorro)

4 Análisis

En este último capítulo presentamos una descripción analítica de las motivaciones que llevaron a los desarrollos de los trabajos en econofísica aquí estudiados. El desarrollo analítico es una analogía con los trabajos estadísticos desarrollados para el Gas Ideal, donde se asume que la sustitución de los términos físicos por términos económicos es completamente justificable. Las suposiciones hechas en física para abordar el problema de la distribución de la energía en el gas ideal, también pueden hacerse para abordar el problema de la distribución de la riqueza en nuestra sociedad ideal.

Por último presentamos algunos datos de la vida real y algunos resultados de nuestras simulaciones, en términos de índices de Gini, para hacer una comparación entre lo obtenido, lo esperado, y lo deseable.

4.1. Descripción analítica con multiplicadores de Lagrange para la motivación de los trabajos actuales en econofísica

Supongamos un sistema conservativo con N agentes y una riqueza total igual a W , los cuales pueden intercambiar sus riquezas. Si n_i es el número de agentes con una riqueza igual w_i , tenemos que,

$$\sum n_i = N \tag{4.1}$$

$$\sum n_i w_i = W = N \langle w \rangle \tag{4.2}$$

donde $\langle w \rangle$ es la riqueza promedio.

Dado un conjunto de n_i (ej. $n_1 = 7$, $n_2 = 1$, $n_3 = 4$, etc.), queremos saber el número de formas, $\#$, posibles de obtener dicho conjunto. Por combinatoria tenemos,

$$\# = \frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots} = \frac{N!}{\prod n_i!} \tag{4.3}$$

La probabilidad de encontrar a un agente con una riqueza i ,

$$P(i) = \frac{n_i}{N} \quad (4.4)$$

y por definición,

$$\sum P(i) = \sum \frac{n_i}{N} = 1 \quad (4.5)$$

Por Ecuación 4.2,

$$\sum \frac{n_i w_i}{N} = \langle w \rangle \quad (4.6)$$

por lo tanto,

$$\sum P(i) w_i = \langle w \rangle \quad (4.7)$$

Queremos maximizar $\#$, o de forma equivalente $\log(\#)$, que utilizando la aproximación de Stirling tenemos,

$$\log(\#) = \log(N!) - \sum \log(n_i!) = -N \sum P(i) \log P(i) \quad (4.8)$$

Pero dada una función f , maximizar Nf es equivalente a maximizar f , por lo tanto podemos descartar N y maximizar,

$$- \sum P(i) \log P(i) \quad (4.9)$$

Haciendo uso de los multiplicadores de Lagrange para maximizar nuestra ecuación dadas las restricciones Ecuación 4.5 y Ecuación 4.7,

$$- \sum P(i) \log P(i) - \alpha \sum P(i) - \beta \sum P(i) w_i = 0 \quad (4.10)$$

cuya derivada es igual a,

$$\sum \left[-(\log P(i) + \frac{1}{P(i)} P(i)) - (\alpha) - (\beta w_i) \right] = 0 \quad (4.11)$$

por lo tanto,

$$\log P(i) + 1 + \alpha + \beta w_i = 0 \quad (4.12)$$

$$\log P(i) = -(1 + \alpha) - \beta w_i \quad (4.13)$$

La probabilidad de encontrar a un agente con una riqueza i , está dada por,

$$P(i) = e^{-(1+\alpha)} e^{-\beta w_i} \quad (4.14)$$

4.2. Comparación de Resultados

A lo largo de este estudio hemos utilizado el Índice de Gini como medida de igualdad y para comparar los distintos resultados, sin embargo sólo hemos hecho alusión a índices como el de México y Suecia, el primero por tratarse de un país tercer mundista de interés, el segundo por tratarse del país primer mundista modelo en términos de igualdad económica. Incluimos Figura 4.1 como resumen general de las situaciones económicas por región en términos del índice de Gini. Los resultados mostrados de mayor interés son los de 1993, dado que los resultados para 1988 preceden a la caída de la Unión Soviética cuyas repercusiones económicas tuvieron fuertes efectos, en particular en Europa del Este. En Figura 4.2 mostramos la evolución del índice de Gini durante las últimas tres décadas, hasta 2005, para algunos países.

REGIÓN	1988	1993
África	42.7	48.7
Asia	55.9	61.8
Latino América y el Caribe	57.1	55.6
Europa del Este	25.6	46.4
Europa Occidental, Estados Unidos y Oceanía	37.1	36.6

Figura 4.1: Índice de Gini Regional para 1988 y 1993 [4]

Utilizamos tres modificaciones principales a los modelos originales estudiados: un factor de ahorro dinámico porcentual λ , un subsidio intermitente S , una probabilidad f de favorecer al agente más pobre en cada interacción. Figura 4.3 muestra claramente la diferencia entre los distintos modelos estudiados. Para el caso de ahorro y subsidio con ahorro se optó por un factor de ahorro alto, de 90 %, para enfatizar los resultados extremales que se pueden alcanzar.

Edad		Población Total			
Periodo		Mediados de los 70s	Mediados de los 80s	Mediados de los 90s	Mediados de la década
País					
Finlandia		0.235	0.209	0.218	0.254
Francia		..	0.3	0.277	0.288
Alemania		..	0.251	<u>0.266</u>	0.285
Italia		..	0.309	<u>0.348</u>	0.352
Japón		..	0.304	<u>0.323</u>	0.321
México		..	0.452	0.519	0.474
España		..	0.371	0.343	<u>0.319</u>
Suecia		0.212	0.198	<u>0.211</u>	0.234
Inglaterra		0.268	0.309	0.336	0.331
Estados Unidos		0.316	0.337	0.361	0.38

Figura 4.2: Evolución del Índice de Gini por País [17]

Figura 4.3 muestra como un factor de ahorro, en especial un alto factor de ahorro, tiene un efecto notable en la distribución de la riqueza, en particular resulta en una diferencia de 0.4 en los coeficientes de Gini, como se muestra en Figura 4.4, Figura 4.5, y Figura 4.6.

El resultado obtenido a partir del Modelo de Yakovenko, modelo base para el resto de los modelos estudiados y base del presente modelo híbrido, refleja un distribución de riqueza similar a la de países tercer mundistas como México. Por otro lado, los modelos con un factor de ahorro, Figura 4.5 y Figura 4.6, logran resultados con coeficientes de Gini de 0.1, resultados mucho más equitativos que los países primer mundistas más igualitarios, los cuales tienen coeficientes de Gini mayores a 0.25.

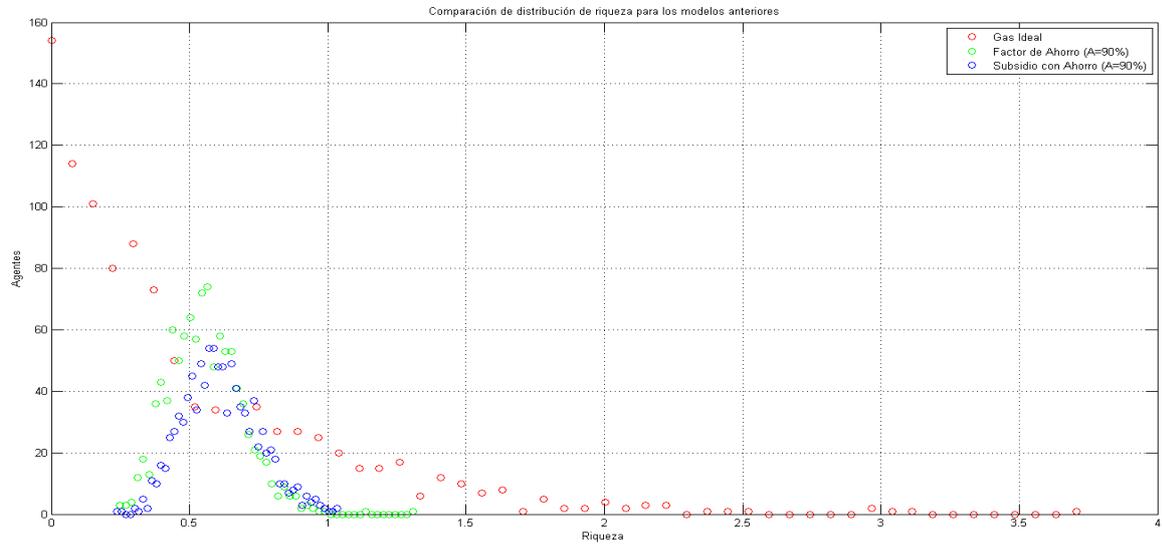


Figura 4.3: Resultados de Distribución para los modelos anteriores (se omite el caso de subsidio sin ahorro)

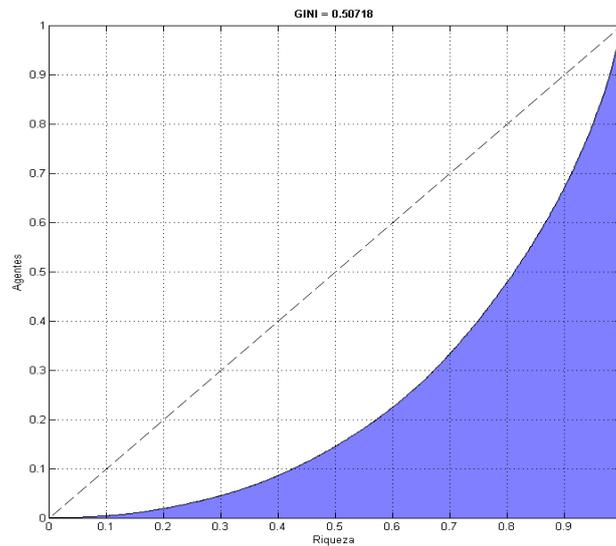


Figura 4.4: Curva de Lorenz y Coeficiente de Gini para el Modelo de Gas Ideal

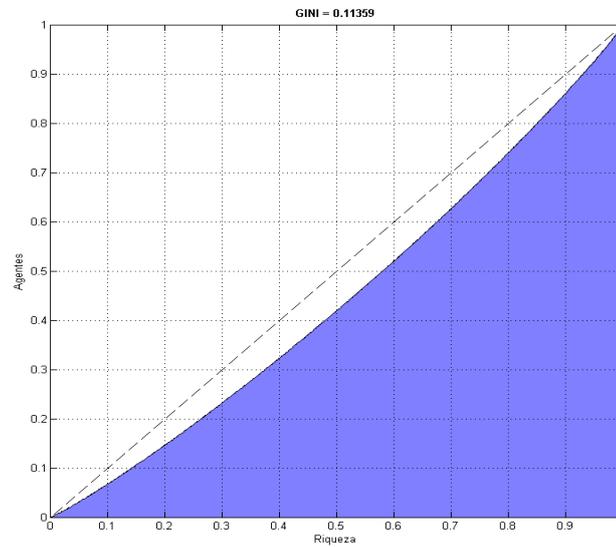


Figura 4.5: Curva de Lorenz y Coeficiente de Gini para el Modelo con Factor de Ahorro = 90

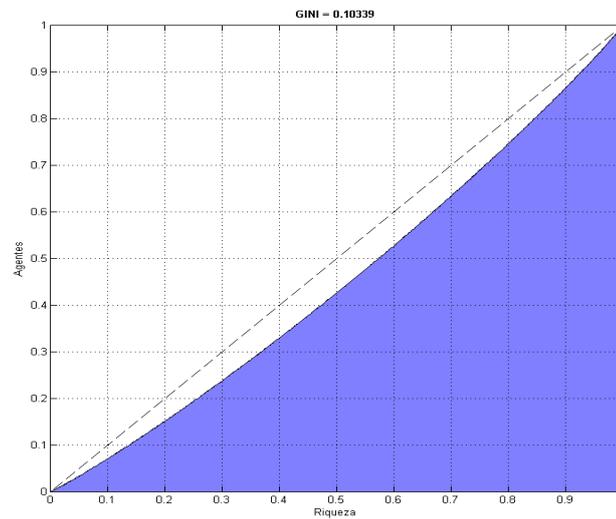


Figura 4.6: Curva de Lorenz y Coeficiente de Gini para el Modelo con Factor de Ahorro = 90 y Subsidio

4.3. Conclusiones

Hemos estudiado una variedad de modelos de distribución de riqueza, en particular el efecto de tres factores: un subsidio S (o dinámica extremal intermitente), un factor de ahorro λ que se modifica de forma dinámica, y una probabilidad f de ayudar al agente más pobre durante las interacciones.

El factor de ahorro dinámico aquí presentado como función de la historia particular de cada agente da mayor libertad al modelo, aun cuando existe una tendencia generalizada de los agentes hacia un factor de ahorro mayor (de acuerdo con nuestro modelo donde un agente que incrementa su riqueza decide aumentar su factor de ahorro). Se elige una forma de modificar el factor de ahorro de forma porcentual, ya que parece razonable asumir que un agente que incrementa su riqueza notablemente puede comenzar a ahorrar en exceso, pues requiere cada vez de un porcentaje menor de sus crecientes riquezas para cubrir sus necesidades. También es razonable asumir que conforme un agente incrementa su riqueza comienza a invertir, o en términos prácticos invertir en bienes materiales o fondos de inversión implica que el agente cuenta con la misma riqueza, sin embargo parte de esta ya no tiene liquidez inmediata y en consecuencia cuenta con un porcentaje menor al momento de realizar interacciones económicas del tipo aquí supuesto.

El efecto de una dinámica extremal resulta de vital importancia, en particular dado que es notable la formación de un umbral mínimo de pobreza entre más se intensifica su uso, en particular para $S = 1$, con lo cual se obtiene una diferencia de hasta 0.1 en el coeficiente de Gini, en comparación con el caso $S = 100$.

El factor f también resulta en una mejor distribución de la riqueza a medida que se incrementa su valor, sin embargo a diferencia de la intensidad de subsidio, S , su efecto decae de manera notable conforme nos aproximamos a su valor máximo $f = 0.5$.

El orden de magnitud de las variaciones en el coeficiente de Gini es el mismo para las variaciones en los factores utilizados en nuestro estudio, lo que nos permite relajar las restricciones impuestas al modelo de forma que los valores extremos de nuestros factores (demasiado alejados de una dinámica social real) no sean necesarios para una redistribución de la riqueza más equitativa, y baste con una combinación con valores moderados de los tres factores como se muestra en Figura 4.7, donde se obtiene un coeficiente de Gini similar al de países considerados modelos a seguir en términos de su distribución de riqueza como Suecia.

Reconocemos que el modelo propuesto en el presente estudio resulta una idealización de lo que entendemos como interacciones económicas. Sin embargo el objetivo del presente estudio era ese, encontrar esas similitudes entre mundos idealizados que permitieran discernir la existencia de un lazo más fuerte. Pero abordar ese lazo más fuerte no era factible, si no por otra cosa que la carencia de conocimientos económicos sólidos al momento de escribir la presente. Es ahí quizá donde se encuentra la

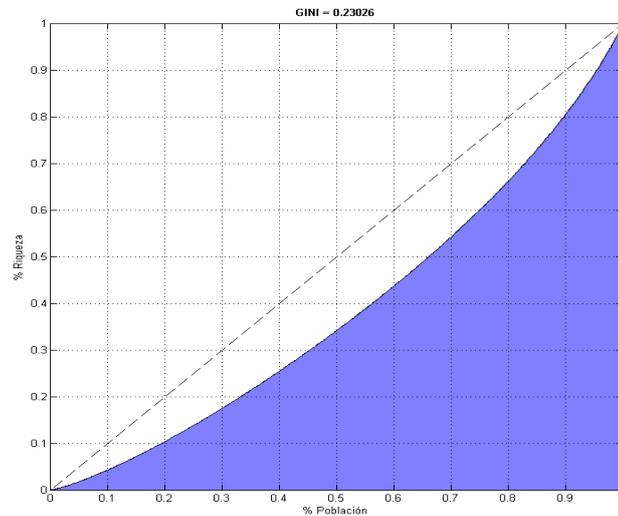


Figura 4.7: Coeficiente de Gini para Límites de Ahorro (60-99), $f=0.3$ y subsidio cada 1000 pasos

mayor debilidad de nuestro estudio, así como el de los estudios referenciados para el presente.

El modelo aquí propuesto, así como los modelos anteriores existentes que se analizaron, no son más que la punta del iceberg en una materia que podría ofrecer mucho más. Para empezar, no existe aún una teoría formal realizada en conjunto por ambas disciplinas, la física y la economía. Hoy en día, la econofísica es vista por ambas disciplinas con escepticismo. A pesar de que esta visión es compartida por el grueso de la población científica (inferido a partir del limitado número de publicaciones científicas que dan cabida a estos trabajos, y cuyo interés supuestamente refleja el de la comunidad científica internacional) existen ya cada vez más economistas que comienzan a ver el potencial que tiene utilizar las desarrolladas herramientas que tiene la física para abordar el complejo mundo de la economía quizá de un punto de vista nuevo y fresco. Mientras tanto estos estudios seguirán apareciendo, como lo han hecho durante la última década, hasta que las analogías y similitudes entre ambas disciplinas sean suficientes para motivar el estudio de esta nueva rama, la econofísica, de manera conjunta. Esperemos así sea.

5 Apéndice

5.1. Programa¹

```
1 profile on -timer real
2
3 X = 32;
4
5 A = rand(X,X); %Matriz de X*X agentes
6
7 Interacciones = 1000000;
8
9 AhorroMax = 0.99; %Se define el rango para el factor de ahorro
10 AhorroMin = 0.80;
11
12
13 MatrizAhorro = AhorroMin + (AhorroMax-AhorroMin).*rand(X,X);
14
15
16 f = 0.50; % f = [0,0.5] Constante para la
probabilidad "p" de ayudar al agente mas pobre entre 1 y 2
17 f_Aid = 0.50; %Se utiliza para la probabilidad "p" cuando
se hace interactuar al agente mas pobre
18
19
20 Aid = 1; %Se define cada cuantos pasos se ayuda al agente
mas pobre
21 AidTimer = 1;
22
23 bins = 50;
24
25 %%Para crear la animacion
26 cuadros = 100;
27 numframes = Interacciones/cuadros;
28 M=moviein(numframes);
29
30
31 tiempo = 0;
32
33
34 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
35 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

¹MatLab R2010a

```

36 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
37
38
39
40 for z = 1:Interacciones      %Comienzan las interacciones
41
42     tiempo = tiempo+1;
43
44     x = randsample(1:X*X,1);    %Se elige un primer agente
45     aleatorio
46     y = randsample(1:X*X,1);    %Se elige un segundo agente
47     aleatorio
48
49     agente1 = A(x);
50     agente2 = A(y);
51
52     riqueza_inicial_1 = A(x);
53     riqueza_inicial_2 = A(y);
54
55     p = 0.5 + f*abs(riqueza_inicial_1-riqueza_inicial_2)/ (
56         riqueza_inicial_1+riqueza_inicial_2) ;
57         %Probabilidad de ayudar al agente
58         mas pobre de acuerdo a las diferencias en sus riquezas
59         iniciales y al factor f
60
61
62     ahorro1 = agente1*MatrizAhorro(x);    %Se calcula el ahorro de
63     cada agente de acuerdo al factor previamente establecido
64     ahorro2 = agente2*MatrizAhorro(y);
65
66     apuesta1 = agente1-ahorro1;
67     apuesta2 = agente2-ahorro2;
68
69     apuesta_min = min(apuesta1,apuesta2);    %ambos agentes ponen
70     en juego la misma cantidad
71
72     r = rand;    %Se elige un numero aleatorio entre 0 y 1 para
73     asignar las nuevas riquezas
74     p_rand = rand;    %Se utiliza para asignar las riquezas de
75     acuerdo a la prob. p
76
77     total = apuesta_min*2;    %Se calcula el dinero total en juego
78     sin contar la cantidad ahorrada
79
80     if riqueza_inicial_1 > riqueza_inicial_2    %Se define al
81     agente mas rico entre 1 y 2, y se utiliza la probabilidad p
82     para asignar las nuevas riquezas.
83
84         if p > p_rand
85
86             agente1 = min(r*total,(1-r)*total) + agente1 -
87             apuesta_min;

```

```
74         agente2 = max(r*total,(1-r)*total) + agente2 -
           apuesta_min;
75
76     else
77
78         agente1 = max(r*total,(1-r)*total) + agente1 -
           apuesta_min;
79         agente2 = min(r*total,(1-r)*total) + agente2 -
           apuesta_min;
80
81     end
82
83 else
84
85     if p > p_rand
86
87         agente1 = max(r*total,(1-r)*total) + agente1 -
           apuesta_min;
88         agente2 = min(r*total,(1-r)*total) + agente2 -
           apuesta_min;
89
90     else
91
92         agente1 = min(r*total,(1-r)*total) + agente1 -
           apuesta_min;
93         agente2 = max(r*total,(1-r)*total) + agente2 -
           apuesta_min;
94
95     end
96
97 end
98
99
100 A(x) = agente1; %Se sustituyen las nuevas riquezas en la red
      de agentes
101 A(y) = agente2;
102
103
104
105 riqueza_final_1 = A(x);
106 riqueza_final_2 = A(y);
107
108
109
110
111
112
113 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
114 %%%Modificacion del Factor de Ahorro%%%
115 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
116
117
```

```

118      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
119      %%%PORCENTUAL%%
120      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
121
122      ganancia1 = (riqueza_final_1/riqueza_inicial_1 - 1)/100;
123      ganancia2 = (riqueza_final_2/riqueza_inicial_2 - 1)/100;
124
125
126      MatrizAhorro(x) = MatrizAhorro(x) - ganancia1*MatrizAhorro(x)
127      ; %Se modifican los factores de ahorro
128      MatrizAhorro(y) = MatrizAhorro(y) - ganancia2*MatrizAhorro(y)
129      ;
130
131      if MatrizAhorro(x) > AhorroMax      %Se verifica que los
132      factores de ahorro se encuentren dentro del rango
133      establecido
134
135      MatrizAhorro(x) = AhorroMax;
136
137      elseif MatrizAhorro(x) < AhorroMin
138
139      MatrizAhorro(x) = AhorroMin;
140
141      end
142
143      if MatrizAhorro(y) > AhorroMax
144
145      MatrizAhorro(y) = AhorroMax;
146
147      elseif MatrizAhorro(y) < AhorroMin
148
149      MatrizAhorro(y) = AhorroMin;
150
151      end
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
163      %%%SUBSIDIO%%
164      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
165

```

```
166
167     if rem(z,Aid) == 0 %Cada Aid pasos se hace interactuar al
168         agente mas pobre
169
170         AidTimer = AidTimer+1
171
172         x_min = min(min(A)); %Se determina la riqueza del agente
173         mas pobre
174
175         s=size(A); %Se localiza al agente mas pobre en la red
176         for i = 1:s(1)
177             for j = 1:s(2)
178                 if A(i,j) == x_min
179                     pos=[i j];
180                 end
181             end
182         end
183
184         i = pos(1);
185         j = pos(2);
186
187         x_pobre = A(i,j);
188
189         y = randsample(1:X*X,1); %Se elige a un segundo agente
190         de forma aleatoria
191
192         %para interactuar con el
193         agente mas pobre
194
195         agente1 = A(i,j);
196         agente2 = A(y);
197
198         riqueza_inicial_1 = A(i,j);
199         riqueza_inicial_2 = A(y);
200
201         ahorro1 = agente1*MatrizAhorro(i,j); %Se calcula el
202         ahorro de cada agente de acuerdo al factor previamente
203         establecido
204         ahorro2 = agente2*MatrizAhorro(y);
205
206         apuesta1 = agente1-ahorro1;
207         apuesta2 = agente2-ahorro2;
208
209         apuesta_min = min(apuesta1,apuesta2); %ambos agentes
210         ponen en juego la misma cantidad
211
212         r = rand; %Se elige un numero aleatorio entre 0 y 1
213         para asignar las nuevas riquezas
214
215         p_Aid = 0.5 + f_Aid*abs(riqueza_inicial_1-
216             riqueza_inicial_2)/ (riqueza_inicial_1+riqueza_inicial_2
```

```

209     );
210     p_rand = rand;
211     total = apuesta_min*2; %Se calcula el dinero total en
212     juego sin contar la cantidad ahorrada
213
214
215     if p_Aid > p_rand
216
217         agente1 = max(r*total,(1-r)*total) + agente1 -
218             apuesta_min;
219         agente2 = min(r*total,(1-r)*total) + agente2 -
220             apuesta_min;
221
222     else
223
224         agente1 = min(r*total,(1-r)*total) + agente1 -
225             apuesta_min;
226         agente2 = max(r*total,(1-r)*total) + agente2 -
227             apuesta_min;
228
229     end
230
231     A(i,j) = agente1;
232     A(y) = agente2;
233
234     riqueza_final_1 = A(i,j);
235     riqueza_final_2 = A(y);
236
237
238
239
240
241     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
242     %%%Modificacion del Factor de Ahorro%%%
243     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
244
245
246     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
247     %%%PORCENTUAL%%%
248     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
249
250     ganancia1 = (riqueza_final_1/riqueza_inicial_1 - 1)/100;
251     ganancia2 = (riqueza_final_2/riqueza_inicial_2 - 1)/100;
252
253

```

```
254     MatrizAhorro(x) = MatrizAhorro(x) - ganancia1*
      MatrizAhorro(x); %Se modifican los factores de ahorro
255     MatrizAhorro(y) = MatrizAhorro(y) - ganancia2*
      MatrizAhorro(y);
256
257
258
259     if MatrizAhorro(x) > AhorroMax %Se verifica que los
      factores de ahorro se encuentren dentro del rango
      establecido
260
261         MatrizAhorro(x) = AhorroMax;
262
263     elseif MatrizAhorro(x) < AhorroMin
264
265         MatrizAhorro(x) = AhorroMin;
266
267     end
268
269     if MatrizAhorro(y) > AhorroMax
270
271         MatrizAhorro(y) = AhorroMax;
272
273     elseif MatrizAhorro(y) < AhorroMin
274
275         MatrizAhorro(y) = AhorroMin;
276
277     end
278
279
280 end
281
282
283
284
285
286
287
288
289 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
290 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%ANIMACION RIQUEZA%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
291 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
292
293
294
295 if rem(z,cuadros) == 0
296     w = z/cuadros;
297     tiempo=tiempo+1
298     G = (1:X*X);
299     s=size(A);
300     t=1;
301     for a = 1:s(1)
```

```

302         for b = 1:s(2)
303             G(t)=A(a,b);
304             t = t+1;
305         end
306     end
307     binWidth = max(G)/bins;
308     binCtrs = 0:binWidth:max(G);
309     binCtrs = binCtrs + min(G);
310     counts = hist(G,bins+1);
311     plot(binCtrs ,counts , 'o', 'Color', 'red');
312     xlabel('Riqueza'); ylabel('Numero de Agentes'); %ylim([0
313         50]);
314     M(w)=getframe;
315 end
316
317
318
319
320
321 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
322 %%%%%%%%%ANIMACION AHORRO%%%%%%%%
323 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
324
325
326
327 if rem(z,cuadros) == 0
328     w = z/cuadros;
329     MatrizAhorroFinal = (1:X*X); %Obtenemos un histograma
330         de los factores de ahorro
331     s=size(MatrizAhorro);
332     t=1;
333     for a = 1:s(1)
334         for b = 1:s(2)
335             MatrizAhorroFinal(t)=MatrizAhorro(a,b);
336             t = t+1;
337         end
338     end
339     plot(MatrizAhorroFinal , 'o');
340     xlabel('Factor de Ahorro'); ylabel('Numero de Agentes');
341     %ylim([0 50]);
342     N(w)=getframe;
343 end
344 end
345
346 hist(G,100)
347 xlabel('Riqueza'); ylabel('Numero de Agentes');
348 title('Factor de Ahorro = 0.95 y P = 0.90')
349
350 profile off
351 profview

```

Bibliografía

- [1] V. M. Yakovenko A. C. Silva. Temporal evolution of the thermal and superthermal income classes in the usa during 1983 to 2001. *Europhysics Letters*, 69:304–310, 2005.
- [2] Hayes B. Follow the money. *American Scientist*, 90(1):400–406, 2002.
- [3] Philip Ball. *Critical Mass: How one thing leads to another*. Number 5. Farrar, Straus and Giroux, 2004.
- [4] Milanovic Branko. True world income distribution, 1988 and 1993: First calculation based on household surveys alone. *The Economic Journal*, 112:66, 2002.
- [5] Chakrabarti B. K. Chakraborti A. Statistichal mechanics of money: How saving propensity affects its distribution. *European Physical Journal B*, 17(2):167–170, 2002.
- [6] Chakrabarti B. K. Chatterjee A. Ideal-gas like market models with savings: quenched and annealed cases. *Physica A 382 (2007) 36-41*, 382:36–41, 2007.
- [7] Manna S.S. Chatterjee A., Chakrabarti B.K. Pareto law in a kinematic model of market with random saving propensity. *Physica A*, 335:155, 2004.
- [8] Yarlagadda S. Chatterjee A., Chakrabarti B.K., editor. *Econophysics of Wealth Distributions, Ideal-Gas Like Markets: Effect of Savings p. 79-92*. Springer-Verlag Italia Ed. A, 2005.
- [9] Christian Damgaard. Gini coefficient.
- [10] Christian Damgaard. Lorenz curve.
- [11] Yakovenko V.M. Dragulescu A.A. Statistical mechanics of money. *European Physical Journal B*, 17(3):723–729, 2000.
- [12] Serge Galam. Sociophysics: a personal testimony. *Physica A*, 336:49–55, 2004.
- [13] Lux T. Ormerod P. Gallegati M., Keen S. Worrying trends in econophysics. *Physica A*, 2:601–609, 2006.
- [14] Tucci K. Herrera J.L., Cosenza M.G. Stratified economic exchange on networks. *Physica A*, 390:1453–1457, 2011.
- [15] Abramson G. Vega J.L. Iglesias J.R., Goncalves S. Correlation between risk aversion and wealth distribution. *Physica A*, 342:186–192, 2004.

- [16] G. Abramson J. R. Iglesias, S. Goncalves and J. L. Vega. Correlation between risk aversion and wealth distribution. *Physica A*, 342:186–192, 2004.
- [17] OCDE.
- [18] Ball P. Culture crash. *Nature*, 441(2):686–688, 2006.
- [19] Iglesias J.R. Pianegonda S. Inequalities of wealth distribution in a conservative economy. *Physica A*, 342:193–199, 2008.
- [20] Richard W. Rahn. Confusing wealth and income, Agosto 2008.