



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**FACULTAD DE QUÍMICA**

**PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS EN MEDIOS  
VISCOELÁSTICOS**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO QUÍMICO**

**PRESENTA:  
MOISES TREJO DURÁN**



**MÉXICO, D.F.**

**2013**

**JURADO ASIGNADO:**

**PRESIDENTE: DR. CARLOS GUZMÁN DE LAS CASAS**

**VOCAL: DR. OCTAVIO MANERO BRITO**

**SECRETARIO: DR. ÁNGEL ENRIQUE CHÁVEZ CASTELLANOS**

**1er. SUPLENTE: DR. JUAN PABLO AGUAYO VALLEJO**

**2° SUPLENTE: DR. EDUARDO VIVALDO LIMA**

**SITIO EN DONDE SE DESARROLLÓ EL TEMA:**

**INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES**

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**ASESOR DEL TEMA**

---

**DR. OCTAVIO MANERO BRITO**

**SUSTENTANTE**

---

**MOISES TREJO DURÁN**

## ÍNDICE

### **CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.**

1.1 Ecuación de onda.	1
1.2 Ecuación de estado.	3
1.3 Viscoelasticidad lineal.	5
1.3.1 Modelo de Maxwell.	6
1.3.2 Modelo de Jeffreys.	10
1.3.3 Modelo de Oldroyd.	15

### **CAPÍTULO 2. PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS EN UN MEDIO VISCOELÁSTICO INFINITO.**

2.1 Flujo extensional en un medio infinito.	22
2.2 Construcción de gráficas.	28

### **CAPÍTULO 3. PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS EN UN MEDIO VISCOELÁSTICO ENTRE DOS PLACAS PARALELAS.**

3.1 Flujo de corte simple.	32
3.2 Construcción de gráficas.	40

### **CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ONDAS QUE VIAJAN A TRAVÉS DE UNA SOLUCIÓN POLIMÉRICA.**

4.1 Flujo de corte en un tubo.	47
4.2 Construcción de gráficas.	64

**CAPÍTULO 5. PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS EN UN MEDIO VISCOELÁSTICO  
CONFINADO A UN TUBO.**

5.1 Flujo de corte. 69

5.2 Construcción de gráficas. 81

**CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES.**

6.1 Análisis de Gráficas. 88

6.2 Conclusiones 90

**Nomenclatura.** 92

**Bibliografía.** 94

## **MOTIVACIÓN**

El tratamiento de polímeros fundidos irradiados con ultrasonido es una herramienta relativamente nueva; el ultrasonido aplicado a polímeros ha encontrado un gran acogimiento en los laboratorios de los investigadores debido a sus interesantes efectos sobre el comportamiento de los polímeros. No está muy desarrollada la teoría del ultrasonido aplicado en medios viscoelásticos, es por eso que es muy interesante este tema. Lo que se está buscando es un mejoramiento de las propiedades de los materiales ya existentes o bien sintetizar nuevos materiales. La técnica de ultrasonido está dando oportunidad para que esto se logre, pero para poder optimizar las operaciones y obtener características deseadas en el material es importante saber la teoría del ultrasonido en polímeros. Por esta razón se considera que es un grandioso tema que además puede ser tan complejo como uno desee; este es un tema muy amplio, que da la oportunidad a quien lo investiga de entretenerse, asombrarse, inspirarse y obtener mayor conocimiento como el investigador esté dispuesto.

## **OBJETIVOS**

Analizar los efectos viscoelásticos sobre la propagación y atenuación de las ondas acústicas.

Analizar la propagación de ondas acústicas en medios viscoelástico confinado en un tubo y entre dos placas paralelas para un flujo de corte y para un flujo extensional en un medio infinito.

## **HIPÓTESIS**

Los efectos viscoelásticos se observarán al decrecer la velocidad de propagación y la atenuación de las ondas acústicas en comparación del mismo comportamiento de éstas en un líquido newtoniano, independientemente de la geometría en el problema a tratar.

## CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta la ecuación de la onda y su análisis. Además, se presentan los modelos viscoelásticos de Maxwell, Oldroyd y Jeffreys, y se estudian sus límites, sumado a esto, se obtienen las consideraciones necesarias para pasar de un modelo a otro, esto con la finalidad de obtener las soluciones para cada modelo sin la necesidad de hacer el mismo tratamiento y análisis con cada modelo viscoelástico diferente. También se estudia la ecuación de estado.

### 1.1 ECUACIÓN DE ONDA

Al propagarse una onda en un medio, éste es perturbado por un movimiento periódico, ocasionando que surja una fuerza de restitución para que el medio retorne a su estado inicial. La ecuación de onda es un balance entre la fuerza de perturbación (fuerza inercial) y la fuerza de restitución. La fuerza inercial de un fluido de densidad  $\rho$  es expresada con la segunda ley de movimiento de Newton aplicada a un elemento del fluido, esto es, a través de la ecuación de cantidad de movimiento, considerando que hay ausencia de fuerzas externas y la viscosidad es despreciable [8]. Para linealizar la ecuación de momentum se utilizan las siguientes variables de perturbación,

$$v_x = V_0 + V_x \quad (1.1)$$

$$p_f = p_0 + P_f \quad (1.2)$$

$$\rho_f = \rho_{f0} + \rho \quad (1.3)$$

Donde el subíndice cero representa las variables en el estado estacionario,  $V_x$ ,  $P_f$  y  $\rho$  son las variables de perturbación de la velocidad en la dirección  $x$ , de la presión y de la densidad, respectivamente. Se sabe que  $\rho_{f0} \gg \rho$ ,  $p_0 \gg P_f$ ,  $v_x \gg V_x$  y en el estado estacionario  $V_0 = 0$ . Entonces, se tiene que la ecuación de cantidad de movimiento en variables de perturbación es,

$$\rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} = -\nabla P \quad (1.4)$$

donde  $\underline{V}$  es el vector de velocidad del fluido y  $P$  es la presión del fluido. La fuerza de restitución en ondas acústicas es debida a la compresibilidad del medio, esto es que la densidad del fluido pueda cambiar, y se expresa mediante la ecuación de continuidad en términos de variables de perturbación [8],

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \underline{V} = 0 \quad (1.5)$$

Se sustituye la ecuación de continuidad en la ecuación de momentum y con la ecuación de estado  $\rho = c_s^2 P$ , donde  $c_s$  es la velocidad del sonido en el medio, se obtiene,

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -c_s^2 \nabla^2 \rho \quad (1.6)$$

La ec. (1.6) es la ecuación de onda, cuya solución es de la forma,

$$\rho = f(kx - wt) \quad (1.7)$$

donde  $k$  es el número de onda y  $w$  es la frecuencia,  $f(kx)$  es la forma de la onda en el tiempo  $t = 0$ . De hecho  $k$  es un vector y da la dirección de la propagación de la onda en el medio, la solución, ec. (1.7), es para una onda longitudinal y plana que se propaga en la dirección  $x$ . A través de un análisis de Fourier se tiene que, la solución para una onda plana armónica es de la forma,

$$\rho = \hat{\rho} \exp i(kx - wt) \quad (1.8)$$

donde  $\hat{\rho}$  es la amplitud de la densidad.

Cuando una onda acústica se propaga por un medio existen dos tipos diferentes de ondas: onda de corte y onda de presión. La onda de corte es debida a la perturbación de la velocidad del fluido y se obtiene a partir de la ecuación de movimiento, mientras que la onda de presión es debida a las fluctuaciones de la presión en el medio y se obtiene a partir de la ecuación de estado, continuidad y

momentum. La onda de presión considera en su solución a la onda de corte y la compresibilidad del medio.

## 1.2 ECUACIÓN DE ESTADO

La ecuación de estado sirve para describir las propiedades del medio, y es una expresión matemática que relaciona la presión y la densidad del medio.

Las ondas acústicas viajan por el medio compresible por medio de ciclos alternos de compresión y rarefacción. La variación en la presión del sistema es tan rápida que se puede considerar que el intercambio de calor con el alrededor es despreciable, por lo que se considera al sistema adiabático. A partir de la siguiente ecuación  $dU = dQ - p_f dV$ , se puede reescribir de la siguiente forma,

$$dQ = dU + p_f dV = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + p_f dV = 0 \quad (1.9)$$

Donde  $U$  es la energía interna del sistema,  $Q$  es el calor que se suministra,  $T$  es la temperatura,  $V$  es el volumen y  $p_f$  es la presión. Para un gas ideal la energía  $U$  es únicamente función de la temperatura, así la ec. (1.9) se reduce a,

$$c_V N dT + p_f dV = 0 \quad (1.10)$$

Donde  $N$  es el numero de moles,  $N = 1$ ,  $c_V$  es la capacidad calorífica a volumen constante y está definida de acuerdo a,  $c_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ . Para relacionar la presión y el volumen se utiliza la ley del gas ideal, por lo tanto la ec. (1.10) resulta en,

$$c_V dT + \frac{RT}{V} dV = 0 \quad (1.11)$$

Donde  $R$  es la constante universal de los gases. Además, se sabe que para un gas ideal  $R = c_p - c_V$ , sustituyendo la anterior relación en la ec. (1.11) y simplificando, se llega a,

$$\frac{dT}{T} + \frac{c_p - c_v}{c_v} \frac{dV}{V} = 0 \quad (1.12)$$

Se integra la ec. (1.12),

$$TV^{(\gamma-1)} = const \quad (1.13)$$

Donde  $\gamma = c_p/c_v$ . La ec. (1.13) se obtuvo a partir de la primera ley de la termodinámica aplicada a un sistema adiabático. Para un gas ideal, la ec. (1.13) queda expresada de la siguiente forma,

$$p_f V^\gamma = const \quad (1.14)$$

La velocidad del sonido,  $c_s$ , en un medio depende del módulo volumétrico,  $B$ , y de la densidad  $\rho_f$ , de acuerdo a la siguiente relación,

$$c_s = \left( \frac{B}{\rho_f} \right)^{1/2} \quad (1.15)$$

El módulo es una relación entre el esfuerzo al que es sometido un material y la deformación que presenta éste, es decir,  $B = -V dp_f / dV$ , sustituyendo la ec. (1.14) en la definición del módulo volumétrico, y considerando que la presión se puede describir con la ley de gases ideales,  $p_f = \rho_f RT / M$ , se obtiene que,

$$B = \frac{\gamma \rho_f RT}{M} \quad (1.16)$$

Donde  $M$  es el peso molecular. Al sustituir la ec. (1.16) en la ec. (1.15) se obtiene,

$$c_s = \left( \frac{\gamma RT}{M} \right)^{1/2} \quad (1.17)$$

O en términos de la derivada parcial de la presión respecto a la densidad a temperatura constante, la ec. (1.14) queda expresada de la siguiente forma,

$$c_s^2 = \gamma \left( \frac{\partial p_f}{\partial \rho_f} \right)_T \quad (1.18)$$

La relación entre  $p$  y  $\rho$  para una onda acústica es [2, 8],

$$\frac{dp_f}{d\rho_f} = \gamma \left( \frac{\partial p_f}{\partial \rho_f} \right)_T \quad (1.19)$$

Sustituyendo la ec. (1.18) en la ec. (1.19) e integrando, se llega a,

$$p_f - p_0 = c_s^2 (\rho_f - \rho_{f0}) \quad (1.20)$$

### 1.3 VISCOELASTICIDAD LINEAL

La viscoelasticidad es la característica que presentan ciertos materiales con propiedades tanto viscosas como elásticas cuando experimentan una deformación. En un sólido puramente elástico, el esfuerzo es independiente del tiempo, mientras que en fluidos viscoelásticos este esfuerzo se disipará gradualmente. En contraste con los fluidos puramente viscosos, los fluidos viscoelásticos sometidos a esfuerzos recuperan gradual y parcialmente su forma una vez eliminada la deformación inicial. Se tiene un comportamiento viscoelástico lineal en un material cuando existe una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación.

En este trabajo, se presentan los tres modelos viscoelásticos más representativos en el estudio de la deformación del material cuando son sujetos a un esfuerzo, los modelos son: modelo de Maxwell, modelo de Jeffreys y modelo de Oldroyd. Para entender el comportamiento de estos modelos y su relación entre ellos, se obtendrán para cada modelo su límite inferior y su límite superior, además se estudiará en el espacio de Laplace el módulo cortante y la viscosidad compleja. Esto con el fin de entender el comportamiento del material.

### 1.3.1 MODELO DE MAXWELL

Los modelos viscoelásticos consideran los efectos de memoria en el polímero, esto es, incorporan la historia de deformación en el cálculo del esfuerzo en el tiempo actual. El modelo de Maxwell es una ecuación constitutiva que involucra los efectos de memoria, y el comportamiento elástico y viscoso del polímero. El modelo para el esfuerzo cortante  $\tau_{yx}$  es,

$$\sigma_{yx} + \lambda \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial t} = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (1.21)$$

Donde  $\dot{\gamma}$  es la rapidez de deformación o rapidez de corte,  $\dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$ ,  $\sigma_{yx}$  es el esfuerzo cortante en dirección  $x$ ,  $\eta_0$  es la viscosidad de corte,  $\lambda$  es el tiempo de relajamiento. La ec. (1.21) es la forma diferencial del modelo de Maxwell, y la forma integral está representada por la siguiente expresión,

$$\sigma_{yx}(t) = \int_{-\infty}^t \left[ \frac{\eta_0}{\lambda} \exp\left(-\frac{t-t'}{\lambda}\right) \right] \dot{\gamma}(t') dt' \quad (1.22)$$

Donde  $t'$  es una variable muda de integración y  $t$  es el tiempo actual. Nótese que la ec. (1.22) se integra sobre el tiempo pasado, es decir, el esfuerzo cortante no sólo será función del tiempo actual sino que también será función de la historia del esfuerzo cortante, observando que las deformaciones previas influirán en el estado actual del esfuerzo. La función entre los corchetes se le conoce como módulo de relajación y se acostumbra escribirlo como  $G(t' - t)$  en lugar de toda la función entre corchetes.

A partir de la ec. (1.21), a régimen permanente, la derivada temporal del esfuerzo cortante es cero, y la ecuación se simplifica a la de un líquido newtoniano:

$$\sigma_{yx} = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (1.23)$$

Para movimientos rápidos en tiempos cortos, el término de la derivada temporal predomina frente al término del esfuerzo cortante  $\gamma$ , por tanto, la ec. (1.21) se reduce a la ecuación que describe el comportamiento de un sólido elástico o de Hooke,

$$\sigma_{yx} = G_0 \gamma \quad (1.24)$$

Donde  $G_0 = \eta_0/\lambda$  es el módulo elástico del material. Entonces el modelo de Maxwell describe el comportamiento de materiales que exhiben características viscosas y características elásticas cuando son sujetos a una deformación.

Se aplica la transformada de Laplace a la ecuación diferencial constitutiva del modelo de Maxwell, ec. (1.21), cuya transformada de Laplace del esfuerzo cortante y de la deformación es:  $\{\sigma_{yx}(s), \gamma(s)\} = \int_0^\infty \{\sigma_{yx}(t), \gamma(t)\} e^{-st} dt$ .

$$\sigma_{yx}(s) + \lambda[s\sigma_{yx}(s) - \sigma_{yx}(t=0)] = \eta_0[s\gamma(s) - \gamma(t=0)] \quad (1.25)$$

Se considera que al tiempo cero  $\tau_0 = \gamma_0 = 0$ , por tanto, la ec. (1.25) se expresa de la siguiente manera,

$$\sigma_{yx}(s) = \frac{\eta_0 s}{1 + \lambda s} \gamma(s) \quad (1.26)$$

En el espacio de Laplace el módulo cortante  $G(s)$  se define de la siguiente manera,

$$G(s) = \frac{\sigma_{yx}(s)}{\gamma(s)} = \frac{G_0 \lambda s}{1 + \lambda s} \quad (1.27)$$

En el espacio de Fourier ( $s \rightarrow iw$ ), donde  $w$  es la frecuencia, la ec. (1.27) queda de la forma,

$$G^*(iw) = G_0 \frac{i\lambda w}{1 + i\lambda w} \quad (1.28)$$

Se multiplica y divide a la ec. (1.28) por el conjugado del denominador,  $(1 - i\lambda\omega)$ , separamos parte real y parte imaginaria de  $G^*(i\omega)$ .

$$G^*(i\omega) = G_0 \frac{\lambda^2 \omega^2}{1 + \lambda^2 \omega^2} + iG_0 \frac{\lambda\omega}{1 + \lambda^2 \omega^2} = G'(\omega) + iG''(\omega) \quad (1.29)$$

Donde  $G''(\omega)$  es el módulo viscoso o de pérdida, está relacionado con la viscosidad del material y representa los procesos de disipación que tienen lugar a lo largo del ciclo de deformación.  $G'(\omega)$  es el módulo elástico o de almacenamiento, está relacionado con la elasticidad del material y representa los procesos de almacenamiento que tienen lugar a lo largo del ciclo de deformación.

La viscosidad compleja está definida como,

$$\eta^*(i\omega) = \frac{G^*(i\omega)}{i\omega} \quad (1.30)$$

A partir de la ec. (1.28) y de la definición del módulo elástico del material, se tiene que la viscosidad compleja del modelo de Maxwell es,

$$\eta^*(i\omega) = \frac{\eta_0}{1 + i\lambda\omega} \quad (1.31)$$

A partir de la ec. (1.31) se puede definir la parte real e imaginaria de la viscosidad compleja, es decir,

$$\eta^*(i\omega) = \frac{\eta_0}{1 + \lambda^2 \omega^2} - i\eta_0 \frac{\lambda\omega}{1 + \lambda^2 \omega^2} = \eta' - i\eta'' \quad (1.32)$$

Por analogía con la ec. (1.29) se obtienen las siguientes relaciones:

$$G' = \omega \eta'' \quad (1.33)$$

$$G'' = \omega \eta' \quad (1.34)$$

En el caso de un líquido newtoniano,  $\lambda \rightarrow 0$ , la ec. (1.32) se reduce a  $\eta' = \eta_0$  y  $\eta'' = 0$ , entonces con las relaciones anteriores se tiene que:  $G' = 0$  y  $G'' = \omega \eta_0$ . Para

el caso de un sólido de Hooke,  $\lambda \rightarrow \infty$ , la ec. (1.32) se reduce a  $\eta' = 0$  y  $\eta'' = \eta_0/\lambda\omega$ , y entonces  $G' = \eta_0/\lambda = G_0$  y  $G'' = 0$ .

Para obtener la variación de  $G'$  y  $G''$  en función de la frecuencia se deben obtener los límites de estos términos. Para la zona de bajas frecuencias,  $1 \gg \lambda^2\omega^2$ , se obtiene de la ec. (1.29) los límites del módulo elástico y viscoso, a saber:

$$G' = G_0\lambda^2\omega^2 \quad (1.35)$$

$$G'' = G_0\lambda\omega \quad (1.36)$$

Ahora, en la zona de altas frecuencias,  $1 \ll \lambda^2\omega^2$ , por lo que en esta región los límites son:

$$G' = G_0 \quad (1.37)$$

$$G'' = \frac{G_0}{\lambda\omega} \quad (1.38)$$

Para construir las gráficas del módulo elástico y viscoso en función de la frecuencia y observar las tendencias antes descritas, se utiliza la ec. (1.29). El módulo de almacenamiento para el modelo de Maxwell en variables adimensionales,  $\bar{G}' = G'/G_0$ ,  $w' = \lambda\omega$ , es,

$$\bar{G}' = \frac{(w')^2}{1 + (w')^2} \quad (1.39)$$

En el caso del módulo de pérdida para el modelo de Maxwell en variables adimensionales,  $\bar{G}'' = G''/G_0$ ,  $w' = \lambda\omega$ , la expresión es la siguiente,

$$\bar{G}'' = \frac{w'}{1 + (w')^2} \quad (1.40)$$

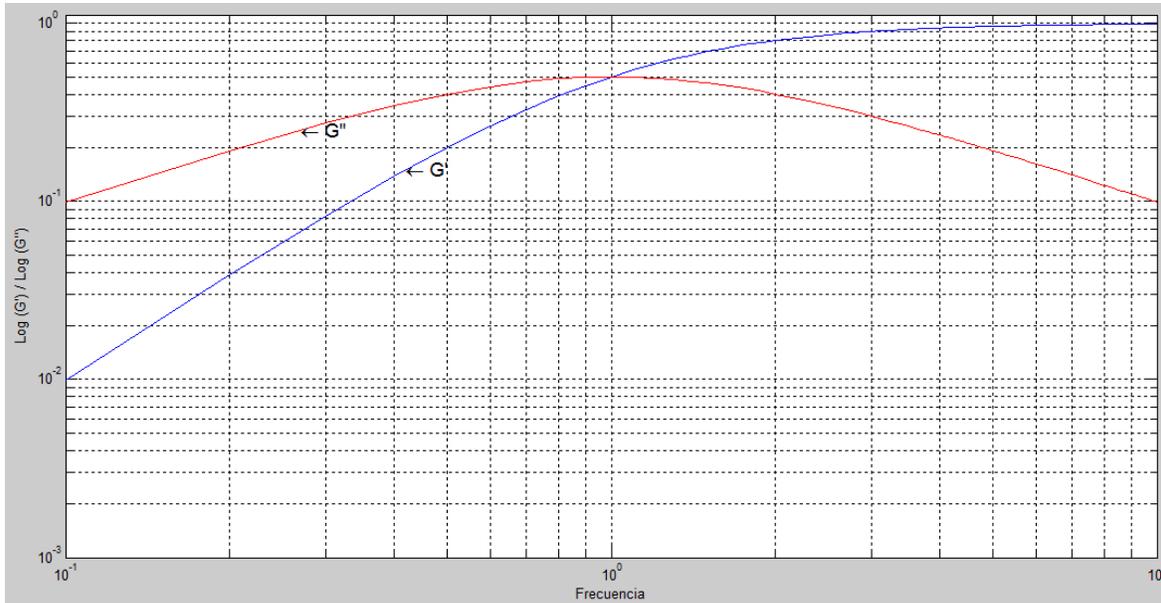


Fig. 1.1. Variación del módulo elástico y del módulo viscoso adimensionales en función de la frecuencia adimensional para el modelo de Maxwell. Ec. (1.39)-(1.40).

En la Fig. 1.1 se observa que en la zona de baja frecuencias las pendientes del módulo elástico y del módulo viscoso toman valores de 2 y 1, respectivamente. Mientras que en la región de altas frecuencias la curva del módulo de almacenamiento tiende asintóticamente a 1 y la pendiente de la curva del módulo de pérdida toma el valor de -1.

Para la condición del máximo de  $\bar{G}''$ , al derivar respecto a  $w'$  la ec. (1.40) e igualar a cero, se obtiene que  $w'_{\max} = 1$ , en términos dimensionales  $w_{\max} = 1/\lambda$ , que coincide con el cruce de  $G''$  y  $G'$ .

### 1.3.2 MODELO DE JEFFREYS

El modelo de Jeffreys es empleado para describir el comportamiento lineal de los polímeros en viscoelasticidad lineal, este modelo consta de tres propiedades físicas y la ecuación diferencial constitutiva para el componente  $\tau_{yx}$  del tensor de esfuerzos está dada por:

$$\sigma_{yx} + \lambda_1 \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial t} = \eta_0 \left( \dot{\gamma} + \lambda_2 \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} \right) \quad (1.41)$$

Donde  $\dot{\gamma}$  es la rapidez de corte,  $\dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$ ,  $\sigma_{yx}$  es el esfuerzo cortante,  $\eta_0$  es la viscosidad de corte,  $\lambda_1$  es el tiempo de relajamiento y  $\lambda_2$  es el tiempo de retardamiento. La ec. (1.41) es la forma diferencial del modelo de Jeffreys. La forma integral del modelo de Jeffreys es,

$$\sigma_{yx}(t) = \int_{-\infty}^t \left[ \frac{\eta_0}{\lambda_1} \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \exp\left( -\frac{t-t'}{\lambda_1} \right) \right] \dot{\gamma}(t') dt' + \eta_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \dot{\gamma}(t) \quad (1.42)$$

A partir de la ec. (1.41), a régimen permanente, la derivada temporal del esfuerzo cortante y de la rapidez de deformación es cero, por lo que la ecuación se simplifica a la de un líquido newtoniano:

$$\sigma_{yx} = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (1.43)$$

Para movimientos rápidos en tiempos cortos, el término de la derivada temporal del esfuerzo cortante y de la rapidez de corte predominan, la ec. (1.41) se reduce a,

$$\sigma_{yx} = \eta_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \dot{\gamma} \quad (1.44)$$

La ec. (1.44) tiene la misma forma que el modelo newtoniano, salvo que en la ec. (1.44) se está multiplicando a la rapidez de deformación por la relación entre los tiempos característicos del material. A diferencia del modelo de Maxwell, en el cual los límites inferior y superior definen la ecuación que describe a un sólido elástico y a un líquido newtoniano, respectivamente, mientras que para el modelo de Jeffreys los límites inferior y superior tienden al modelo que describe a un líquido newtoniano, salvo que en el límite inferior está multiplicando una relación de los tiempos de relajación y retardamiento a la rapidez de corte.

Como casos particulares del modelo de Jeffreys se tiene que:

- a) Si el tiempo de retardamiento es cero, se obtiene el modelo de Maxwell, es decir,

$$\text{Maxwell}, \lambda_2 = 0 \rightarrow \sigma_{yx} + \lambda_1 \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial t} = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (1.44a)$$

- b) Si el tiempo de relajamiento y de retardamiento son cero, la ecuación se convierte en un modelo newtoniano,

$$\text{Newtoniano}, \lambda_2 = \lambda_1 = 0 \rightarrow \sigma_{yx} = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (1.44b)$$

Se aplica la transformada de Laplace a la ecuación diferencial constitutiva del modelo de Jeffreys, ec. (1.41), y aplicando las condiciones iniciales antes descritas para el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación, se llega a,

$$\sigma_{yx}(s) = \eta_0 \frac{s(1 + \lambda_2 s)}{(1 + \lambda_1 s)} \gamma(s) \quad (1.45)$$

Así, el módulo cortante  $G(s)$  queda expresado como,

$$G(s) = \frac{\sigma_{yx}(s)}{\gamma(s)} = G_0 \lambda_1 \frac{s(1 + \lambda_2 s)}{(1 + \lambda_1 s)} \quad (1.46)$$

En el espacio de Fourier ( $s \rightarrow iw$ ), donde  $w$  es la frecuencia, la ec. (1.46) es de la forma,

$$G^*(iw) = G_0 \lambda_1 \frac{iw(1 + i\lambda_2 w)}{(1 + i\lambda_1 w)} \quad (1.47)$$

Al multiplicar y dividir a la ec. (1.44) por el conjugado del denominador,  $(1 - i\lambda_1 w)$ , se obtiene la parte real y la parte imaginaria de  $G^*(iw)$ , a saber,

$$G^*(i\omega) = G_0 \frac{\lambda_1 \omega^2 (\lambda_1 - \lambda_2)}{(1 + \lambda_1^2 \omega^2)} + iG_0 \frac{\lambda_1 \omega (1 + \lambda_2 \lambda_1 \omega^2)}{(1 + \lambda_1^2 \omega^2)} = G' + iG'' \quad (1.48)$$

Donde  $G''(\omega)$  es el módulo viscoso o de pérdida, y  $G'(\omega)$  es el módulo elástico o de almacenamiento.

A partir de la definición del módulo elástico del material, la viscosidad compleja del modelo de Jeffreys está dada por,

$$\eta^*(i\omega) = \eta_0 \frac{1 + i\lambda_2 \omega}{1 + i\lambda_1 \omega} \quad (1.49)$$

La parte real e imaginaria de la viscosidad compleja son,

$$\eta^*(i\omega) = \eta_0 \frac{1 + \lambda_2 \lambda_1 \omega^2}{1 + \lambda_1^2 \omega^2} - i\eta_0 \frac{\omega(\lambda_1 - \lambda_2)}{1 + \lambda_1^2 \omega^2} = \eta' - i\eta'' \quad (1.50)$$

Por analogía con la ec. (1.48) se obtienen las siguientes relaciones:

$$G' = \omega \eta'' \quad (1.51)$$

$$G'' = \omega \eta' \quad (1.52)$$

Para la zona de bajas frecuencias,  $1 \gg \omega$ , de la ec. (1.48) se obtienen los límites del módulo elástico y viscoso, a saber:

$$G' = G_0 \lambda_1 \omega^2 (\lambda_1 - \lambda_2) \quad (1.53)$$

$$G'' = G_0 \lambda_1 \omega \quad (1.54)$$

Con las relaciones de la ec. (1.51) y ec. (1.52) se obtienen las definiciones de la parte real e imaginaria de la viscosidad compleja para la región de baja frecuencia:  $\eta' = \eta_0$  y  $\eta'' = \eta_0 \omega (\lambda_1 - \lambda_2)$ .

En la zona de altas frecuencias,  $1 \ll w^2$ , la forma de los módulos son:

$$G' = G_0 \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (1.55)$$

$$G'' = G_0 \lambda_2 w \quad (1.56)$$

A partir de las anteriores ecuaciones se obtiene la forma de la viscosidad compleja para el modelo de Jeffreys en la región de altas frecuencias, esto es,  $\eta' = \eta_0 \lambda_2 / \lambda_1$  y  $\eta'' = (\eta_0 / \lambda_1 w)(1 - \lambda_2 / \lambda_1)$ .

Para observar la tendencia del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida para el modelo de Jeffreys en las regiones de baja y alta frecuencia se construye la gráfica correspondiente. El módulo elástico es variables adimensionales,  $\bar{G}' = G'/G_0$ ,  $w' = \lambda_1 w$ , es,

$$\bar{G}' = \frac{(w')^2 (1 - \lambda_2 / \lambda_1)}{1 + (w')^2} \quad (1.57)$$

En el caso del módulo de pérdida en variables adimensionales,  $\bar{G}'' = G''/G_0$ ,  $w' = \lambda_1 w$ , la expresión es la siguiente,

$$\bar{G}'' = \frac{w' (1 + \lambda_2 / \lambda_1 (w')^2)}{1 + (w')^2} \quad (1.58)$$

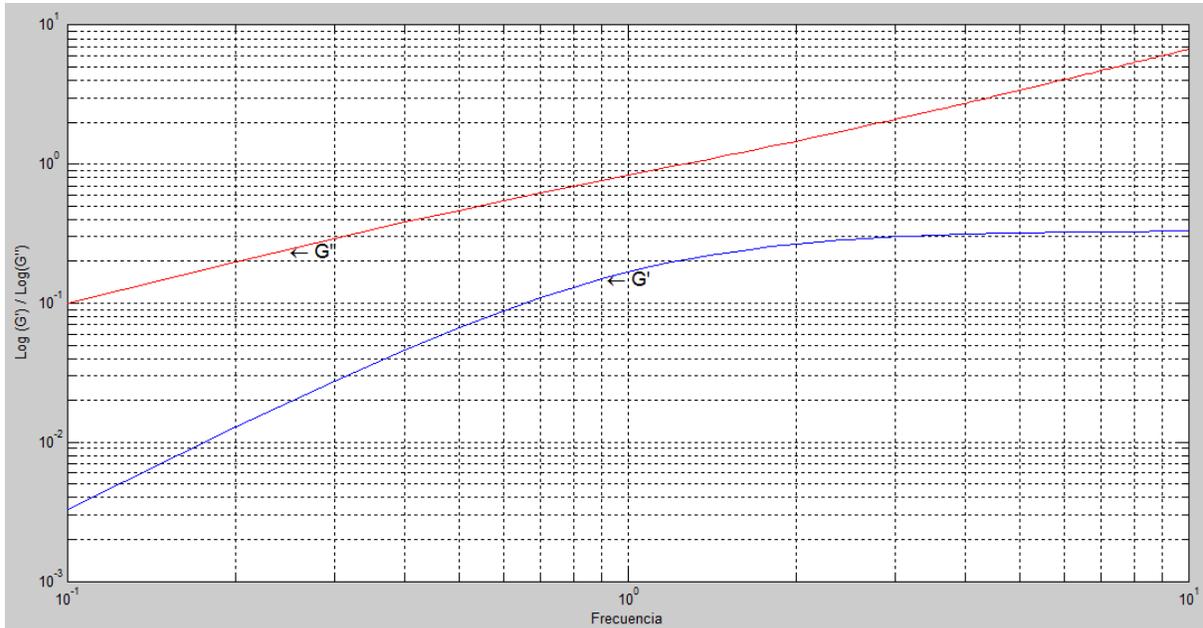


Fig. 1.2. Variación del módulo elástico y del módulo viscoso adimensionales en función de la frecuencia adimensional para el modelo de Jeffreys.  $\lambda_2/\lambda_1 = 2/3$ . Ec. (1.57)-(1.58).

De la Fig. 2.1, se puede observar que, para la zona de baja frecuencias las pendientes del módulo elástico y del módulo viscoso toman valores de 2 y 1, respectivamente, mientras que en la región de altas frecuencias la curva del módulo de almacenamiento tiende asintóticamente a 1 y la pendiente de la curva del módulo de pérdida toma el valor de 1.

### 1.3.3 MODELO DE OLDROYD

En el modelo de Oldroyd el esfuerzo cortante para la componente  $\tau_{yx}$  del tensor de esfuerzos que se aplica al material está definido como:

$$\sigma_{yx} = \sigma_{yx,nn} + \sigma_{yx,n} \quad (1.59)$$

El esfuerzo cortante del modelo de Oldroyd es la suma de las contribuciones por la parte no newtoniana y por la parte newtoniana del material.

De la ec. (1.57)  $\sigma_{yx,nn}$  es el esfuerzo cortante de la parte no newtoniana, y está descrito por el modelo de Maxwell;  $\sigma_{yx,n}$  es el esfuerzo cortante de la parte newtoniana y está definido de acuerdo al modelo newtoniano.

$$\sigma_{yx,nn} + \lambda \frac{\partial \sigma_{yx,nn}}{\partial t} = \eta_{00} \dot{\gamma} \quad (1.60)$$

$$\sigma_{yx,n} = \eta_{sv} \dot{\gamma} \quad (1.61)$$

Donde  $\eta_{sv}$  es la viscosidad del disolvente y  $\eta_{00}$  es la viscosidad de corte. Del sistema de ecuaciones, ec. (1.59)-(1.61) se llega a,

$$\sigma_{yx} + \lambda \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial t} = (\eta_{00} + \eta_{sv}) \dot{\gamma} + \lambda \eta_{sv} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} \quad (1.62)$$

La ec. (1.62) es la forma diferencial del modelo de Oldroyd, y considera que el esfuerzo cortante total que se aplica al sistema es la suma de la contribución no newtoniana y newtoniana del material. Por analogía con el modelo de Jeffreys, ec. (1.41),  $\eta_0 = \eta_{00} + \eta_{sv}$ , y  $\eta_0 \lambda_2 = \eta_{sv} \lambda$ , con este cambio de variables se obtiene el modelo de Oldroyd a partir del modelo de Jeffreys.

La forma integral del modelo de Oldroyd es,

$$\sigma_{yx}(t) = \int_{-\infty}^t \left[ \frac{\eta_{00}}{\lambda} \exp\left(-\frac{t-t'}{\lambda}\right) \right] \dot{\gamma}(t') dt' + \eta_{sv} \dot{\gamma}(t) \quad (1.63)$$

En la ec. (1.63) se observa que el primer término del lado derecho es el esfuerzo cortante descrito por el modelo de Maxwell y el segundo término es el esfuerzo cortante en un líquido newtoniano. Este modelo describe a un material que tiene un solo tiempo de relajamiento, pero los materiales reales no necesariamente tienen un solo tiempo de relajamiento sino un espectro de tiempos de relajamiento,  $\lambda_i = \eta_i / G_{0i}$  para  $i = 1$  hasta  $\infty$ . Para el módulo de relajamiento en flujo cortante es,

$$G(t) = \sum_{i=1}^{\infty} G_{0i} \exp(-t / \lambda_i) \quad (1.64)$$

A régimen permanente, la ec. (1.62) queda simplificada de la siguiente forma:

$$\sigma_{yx} = (\eta_{00} + \eta_{sv}) \dot{\gamma} \quad (1.65)$$

La ec. (1.65) es el modelo newtoniano, salvo que la viscosidad es la viscosidad no newtoniana más la contribución de la viscosidad newtoniana.

Para movimientos rápidos en tiempos cortos, el término de la derivada temporal del esfuerzo cortante y de la rapidez de corte predominan, y la ec. (1.62) se reduce a la ecuación de un líquido newtoniano,

$$\sigma_{yx} = \eta_{sv} \dot{\gamma} \quad (1.66)$$

Al aplicar la transformada de Laplace al modelo de Oldroyd en su forma diferencial, ec. (1.62), y sustituir la condición inicial,  $\sigma_{yx} = \gamma = \gamma' = 0$ , se obtiene,

$$\sigma_{yx}(s) = s \left( \eta_{sv} + \frac{\eta_{00}}{1 + \lambda s} \right) \gamma(s) \quad (1.67)$$

Por tanto, el módulo cortante  $G(s)$  queda expresado en la siguiente forma,

$$G(s) = \frac{\sigma_{yx}(s)}{\gamma(s)} = s \left( \eta_{sv} + \frac{\eta_{00}}{1 + \lambda s} \right) \quad (1.68)$$

En el espacio de Fourier ( $s \rightarrow iw$ ), donde  $w$  es la frecuencia, la ec. (1.68) se expresa de la forma,

$$G^*(iw) = iw \left( \eta_{sv} + \frac{\eta_{00}}{1 + i\lambda w} \right) \quad (1.69)$$

La viscosidad compleja está definida como,

$$\eta^*(iw) = \eta_{sv} + \frac{\eta_{00}}{1 + i\lambda w} \quad (1.70)$$

Al multiplicar y dividir por el conjugado del denominador del segundo término de la ec. (1.68), se puede definir la parte real e imaginaria de la viscosidad compleja como,

$$\eta^*(i\omega) = \left( \eta_{sv} + \frac{\eta_{00}}{1 + \lambda^2 \omega^2} \right) - i \eta_{00} \frac{\lambda \omega}{1 + \lambda^2 \omega^2} = \eta' - i \eta'' \quad (1.71)$$

Con la ayuda de la relación entre el módulo cortante y la viscosidad compleja, ec. (1.71), se obtiene el módulo elástico y el módulo viscoso, a saber,

$$G'(w) = G_0 \frac{\lambda^2 w^2}{1 + \lambda^2 w^2} \quad (1.72)$$

$$G''(w) = \eta_{sv} w + G_0 \frac{\lambda w}{1 + \lambda^2 w^2} \quad (1.73)$$

Donde  $G''(w)$  es el módulo viscoso o de pérdida, y  $G'(w)$  es el módulo elástico o de almacenamiento. El módulo viscoso está definido por la suma de la contribución newtoniana y de la contribución no newtoniana, mientras que el módulo elástico sólo contempla la parte no newtoniana debido a que la parte newtoniana no contiene parte elástica.

Para la zona de bajas frecuencias,  $1 \gg \omega$ , de la ec. (1.72) y ec. (1.73) se obtiene el límite del módulo elástico y viscoso, a saber:

$$G' = G_0 \lambda^2 \omega^2 \quad (1.74)$$

$$G'' = \eta_{sv} \omega + G_0 \lambda \omega \quad (1.75)$$

Para la viscosidad compleja, las definiciones de la parte real e imaginaria para la región de baja frecuencia:  $\eta' = \eta_{00} + \eta_{sv}$ , y  $\eta'' = \eta_{00} \omega (\lambda_1 - \lambda_2)$ .

En la zona de altas frecuencias,  $1 \ll \omega^2$ , la forma de los módulos son:

$$G' = G_0 \quad (1.76)$$

$$G'' = \eta_{sv} w + \frac{G_0}{\lambda w} \quad (1.77)$$

A partir de las anteriores ecuaciones se obtiene la forma de la viscosidad compleja para el modelo de Oldroyd en la región de altas frecuencias, esto es,  $\eta' = \eta_{sv} + \eta_{00}/\lambda^2 w^2$  y  $\eta'' = \eta_{00}/\lambda w$ .

Para observar la tendencia del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida para el modelo de Oldroyd en las regiones de baja y alta frecuencias se construye la gráfica correspondiente. El módulo elástico en variables adimensionales,  $\bar{G}' = G'/G_0$ ,  $w' = \lambda w$ , es,

$$\bar{G}' = \frac{(w')^2}{1 + (w')^2} \quad (1.78)$$

En el caso del módulo de pérdida en variables adimensionales,  $\bar{G}'' = G''/G_0$ ,  $w' = \lambda w$ , la expresión es la siguiente,

$$\bar{G}'' = \frac{\eta_{sv}}{\eta_{00}} w' + \frac{w'}{1 + (w')^2} \quad (1.79)$$

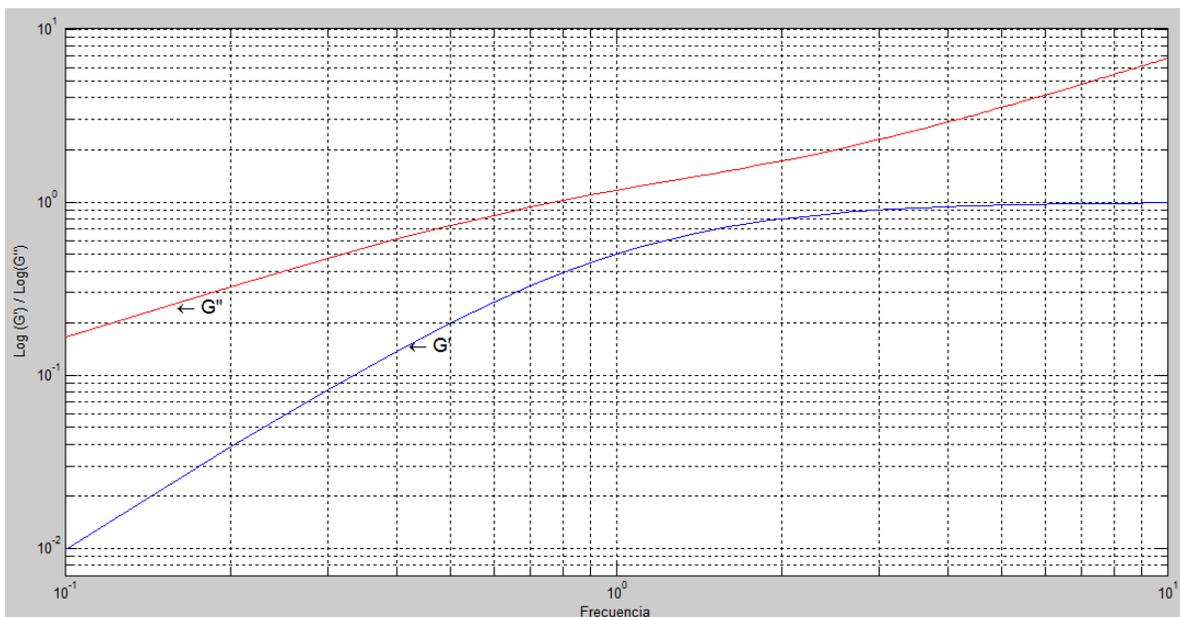


Fig. 1.3. Variación del módulo elástico y del módulo viscoso adimensional en función de la frecuencia adimensional para el modelo de Oldroyd. Ec. (1.78)-(1.79).

En la Fig. 1.3 se observa que, para la zona de baja frecuencias, las pendientes del módulo elástico y del módulo viscoso toman valores de 2 y 1, respectivamente, mientras que en la región de altas frecuencias la curva del módulo de almacenamiento tiende asintóticamente a 1 y la pendiente de la curva del módulo de pérdida toma el valor de 1.

Ahora bien, se compara el módulo viscoso de los tres modelos viscoelásticos que se han estudiado.

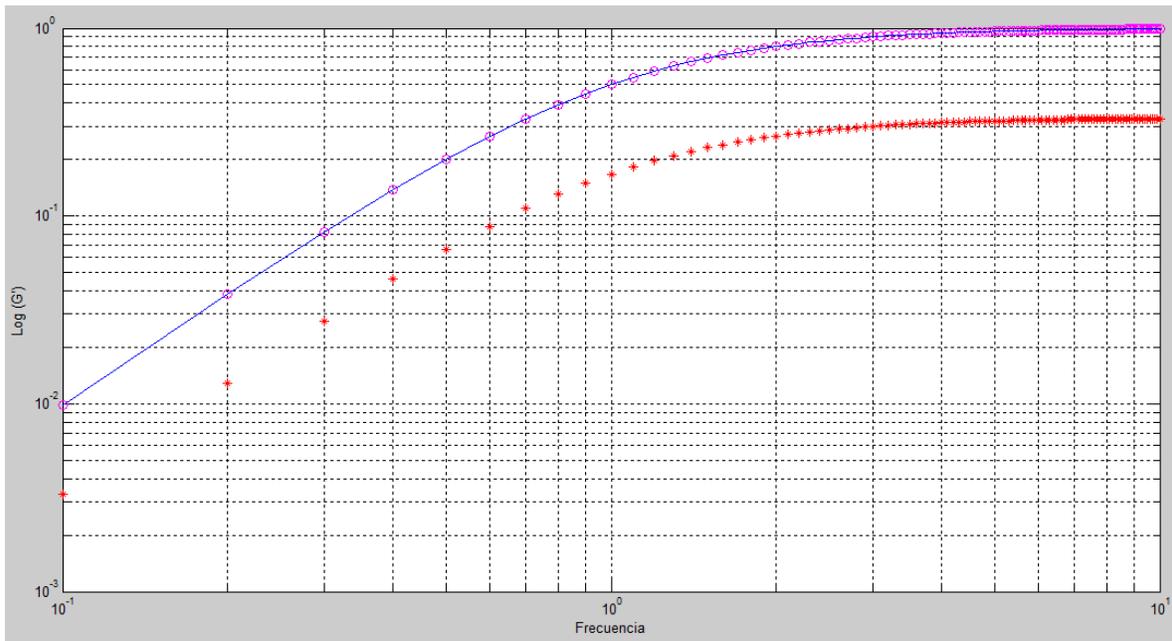


Fig. 1.4. Variación del módulo elástico adimensional en función de la frecuencia adimensional. (-) Modelo de Maxwell, Ec. (1.39); (\*) Modelo de Jeffreys, Ec. (1.57); (o) Modelo de Oldroyd, Ec. (1.78).

Por lo anterior se tiene que la tendencia del modulo elástico que predicen los tres modelos viscoelásticos es la misma. De la Fig. 1.4 se observa que el modulo elástico que predice el modelo de Maxwell es el mismo que predice el modelo de Oldroyd, debido a que la parte elástica en el modelo de Oldroyd únicamente está contemplada por el modelo de Maxwell, mientras que para el módulo elástico del modelo de Jeffreys disminuye a causa del tiempo de retardamiento. El módulo de almacenamiento para el modelo de Maxwell y Oldroyd tiende asintóticamente a 1, o en términos dimensionales tiende a  $G_0$ , mientras que para el modelo de Jeffreys el módulo elástico tiende asintóticamente al valor de  $1/3$ , lo que corresponde a  $G_0(1 - \lambda_2/\lambda_1)$ .

Para el módulo de pérdida se tiene la siguiente gráfica,

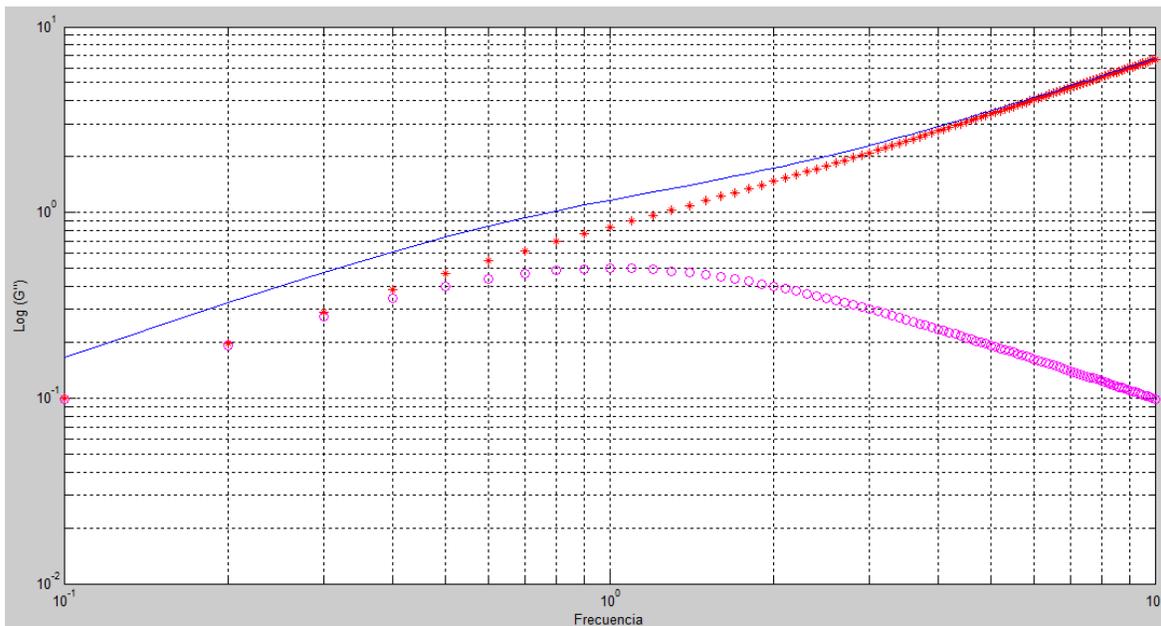


Fig. 1.5. Variación del módulo viscoso adimensional en función de la frecuencia adimensional. (-) Modelo de Maxwell, Ec. (1.40); (\*) Modelo de Jeffreys, Ec. (1.58); (o) Modelo de Oldroyd, Ec. (1.79).

El módulo viscoso para el modelo de Maxwell tiene una pendiente de 1 a bajas frecuencias, un máximo en  $w_{max} = 1$ , que equivale a  $w_{max} = 1/\lambda$ , y en la región de altas frecuencias la pendiente es igual a -1; mientras que el módulo de pérdida para el modelo de Jeffreys siempre va en aumento conforme la frecuencia aumenta, por otro lado, en la región de bajas frecuencias se comporta igual que el modelo de Maxwell pero a altas frecuencias tiene una pendiente igual a 1. En el modelo de Oldroyd el módulo viscoso es la suma del módulo viscoso del modelo de Maxwell y de la parte newtoniana, a bajas frecuencias predomina el modulo no newtoniano sobre el newtoniano, por la tendencia del módulo viscoso de Oldroyd es igual que el de Maxwell, salvo que la gráfica se encuentra arriba, esto por la contribución de la parte newtoniana, y en la región de alta frecuencia, predomina la contribución newtoniana por lo que sigue creciendo y tiene una pendiente igual a 1.

## CAPÍTULO 2. PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS EN UN MEDIO VISCOELÁSTICO INFINITO

En este capítulo se estudiará la propagación de ondas acústicas en un flujo extensional uniaxial en un medio infinito, además se analizará la ecuación de dispersión obtenida a partir de la solución para la velocidad del fluido. El análisis se efectúa con el modelo de Jeffreys y se obtienen la velocidad de propagación y la atenuación de la onda acústica. A partir de estos resultados se obtendrán las soluciones para los demás modelos viscoelásticos.

### 2.1 FLUJO EXTENSIONAL EN UN MEDIO INFINITO

Para analizar la influencia de las propiedades viscoelásticas en la propagación de ondas acústicas se necesita una relación entre el esfuerzo y la deformación del material. Para este estudio se utiliza el modelo de Jeffreys en forma diferencial, el cual está representado por la ecuación:

$$\sigma_{xx} + \lambda_1 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = 2\eta \left( \dot{\varepsilon}_x + \lambda_2 \frac{\partial \dot{\varepsilon}_x}{\partial t} \right) \quad (2.1)$$

Donde  $\sigma_{xx}$  es el esfuerzo normal, la velocidad del fluido es en dirección  $x$  y el transporte de cantidad de movimiento es en dirección  $x$ ,  $\dot{\varepsilon}_x$  es la rapidez de elongación o extensional,  $\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}$ ,  $\eta$  es la viscosidad extensional del fluido,  $\lambda_1$  es el tiempo de relajamiento y  $\lambda_2$  es el tiempo de retardamiento.

El esfuerzo de la ec. (2.1) tiene como casos particulares, al fluido de Maxwell y al fluido newtoniano, a saber,

$$\text{Maxwell}, \lambda_2 = 0 \rightarrow \sigma_{xx} + \lambda_1 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = 2\eta \dot{\varepsilon}_x \quad (2.2)$$

$$\text{Newtoniano}, \lambda_2 = \lambda_1 = 0 \rightarrow \sigma_{xx} = 2\eta \dot{\varepsilon}_x \quad (2.3)$$

El estado hidrodinámico para un fluido queda definido por la ecuación de movimiento, la ecuación de continuidad y la ecuación de estado.

$$\rho_f \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla p_f + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{g} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \rho_f + \rho_f \nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (2.5)$$

$$p_f - p_0 = c_s^2 (\rho_f - \rho_{f0}) \quad (2.6)$$

Donde  $\rho_f$  es la densidad del fluido,  $p_f$  es la presión en el fluido,  $\underline{g}$  es el vector de fuerza de gravedad y  $\underline{v}$  es el vector de velocidad del fluido,  $\underline{v} = [v_x \ v_y \ v_z]$ . Por las consideraciones para el sistema, se utilizan coordenadas rectangulares,  $v_x = v_x(x, t)$ , flujo extensional o flujo elongacional uniaxial, el análisis se centrará únicamente en la deformación en la dirección  $x$ . Este sistema de ecuaciones, ec. (2.4)-(2.6), es válido para cualquier tipo de fluido, newtoniano o no newtoniano, compresible o incompresible. El análisis de un tipo concreto depende de la forma de la ecuación constitutiva que relaciona el tensor de esfuerzos con el tensor de deformación [1,2].

Consideraciones para la ec. (2.4): para despreciar al término de fuerzas inerciales sobre el término del gradiente de presión, esto es,  $V^2 \ll \rho_f |p| = cV$ , por lo tanto,  $V \ll c$ , donde  $c$  es la velocidad del sonido. Es decir, las fluctuaciones de la velocidad del fluido deben de ser mucho menores que la velocidad del sonido. Esto se expresa en términos del número de Mach,  $M = V_0/c$ , donde  $V_0$  es la amplitud de las oscilaciones de la velocidad. Así, que se requiere que  $M \ll 1$  para obtener una buena aproximación de la linealidad acústica [3]. Más aún, la componente en  $x$  de la fuerza gravitacional,  $g_x$ , no afecta al sistema, por tanto se considera cero.

Para linealizar el sistema de ecuaciones antes descrito se utilizan las variables de perturbación, ecs. (1.1)-(1.3). Los términos de las ec. (2.4) y ec. (2.5) que estén multiplicados por una variable de perturbación,  $P_f$ ,  $\rho$  o  $V_x$  son

despreciables, puesto que las variables de perturbación son mucho menores a las variables en estado estacionario. Y las derivadas de la densidad y la presión en estado de equilibrio respecto al tiempo y la posición, respectivamente, son cero. Así, se tiene que el sistema de ec. (2.4) y (2.5) es lineal y está en función de variables de perturbación.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_{f0}} \nabla P_f + \frac{1}{\rho_{f0}} \nabla \cdot \underline{\sigma} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{f0} \nabla \cdot \underline{V} = 0 \quad (2.8)$$

Se desarrolla la ec. (2.7) para un flujo extensional en la dirección  $x$ .

$$\rho_{f0} \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P_f}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \quad (2.9)$$

Por lo tanto, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\sigma_{xx} + \lambda_1 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = 2\eta \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) \quad (2.10)$$

$$\rho_{f0} \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P_f}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{f0} \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

$$P_f = c_s^2 \rho \quad (2.13)$$

El sistema de ecuaciones está completamente definido, puesto que se tiene 4 ecuaciones y 4 incógnitas. Se resuelve el sistema de ecuaciones en el espacio de Laplace.

$$\mathfrak{L}\{V_x, \sigma_{xx}, P_f\} = \{V_x^*, \sigma_{xx}^*, P_f^*\} \quad (2.14)$$

Se sustituye la ec. (2.13) en la ec. (2.12) y se aplica la transformada de Laplace a la ecuación resultante y a las ecs. (2.10)-(2.11). De esta forma se llega a:

$$\sigma_{xx}^* + \lambda_1 (s\sigma_{xx}^* - \sigma_{xx}(0)) = 2\eta \left( \frac{dV_x^*}{dx} + \lambda_2 \frac{d}{dx} (sV_x^* - V_x(0)) \right) \quad (2.15)$$

$$\rho_{f0} (sV_x^* - V_x(0)) = -\frac{1}{s} \frac{dP_f}{dx} + \frac{d\sigma_{xx}^*}{dx} \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{c_s^2} [sP_f^* - P_f(0)] + \rho_{f0} \frac{dV_x^*}{dx} = 0 \quad (2.17)$$

Se necesitan las condiciones iniciales de cada variable. Al inicio, no hay velocidad del fluido, por lo que no se genera un gradiente de velocidades, entonces no hay fuerza motriz alguna que genere un esfuerzo normal, y la presión del fluido es cero.

$$\sigma_{xx}^* = 2\eta \frac{1 + s\lambda_2}{1 + s\lambda_1} \frac{dV_x^*}{dx} \quad (2.18)$$

$$\rho_{f0} sV_x^* = -\frac{dP_f^*}{dx} + \frac{d\sigma_{xx}^*}{dx} \quad (2.19)$$

$$\frac{s}{c_s^2} P_f^* + \rho_{f0} \frac{dV_x^*}{dx} = 0 \quad (2.20)$$

Se sustituye las ec. (2.18) en la ec. (2.19).

$$\rho_{f0} sV_x^* = -\frac{dP_f^*}{dx} + 2\eta \frac{1 + s\lambda_2}{1 + s\lambda_1} \frac{d^2V_x^*}{dx^2} \quad (2.21)$$

Se deriva la ec. (2.20) respecto a  $x$ .

$$\frac{dP_f^*}{dx} = -\frac{c_s^2 \rho_{f0}}{s} \frac{d^2V_x^*}{dx^2} \quad (2.22)$$

Y se sustituye la ec. (2.22) en la ec. (2.21).

$$\frac{d^2V_x^*}{dx^2} - \lambda^2 V_x^* = 0 \quad (2.23)$$

Donde

$$\lambda^2 = \rho_{f0}s \left( \frac{c_s^2 \rho_{f0}}{s} + 2\eta \frac{1+s\lambda_2}{1+s\lambda_1} \right)^{-1} \quad (2.24)$$

La ec. (2.23) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden homogénea cuya solución general está dada por,

$$V_x^* = C_1 \exp(\lambda x) + C_2 \exp(-\lambda x) \quad (2.25)$$

De la física del sistema, se sabe que si  $x$  tiende al infinito la velocidad del fluido no tiende al infinito, entonces necesariamente  $C_1 = 0$ , y en  $x = 0$ , la velocidad del fluido es  $V_0$ , por lo que  $C_2 = V_0/s$ . De esta forma la ec. (2.25) resulta en

$$V_x^* = \frac{V_0}{s} \exp(-\lambda x) \quad (2.26)$$

Debido a la compleja relación entre  $s$  y el valor propio  $\lambda$ , es complicado obtener la transformada inversa de Laplace de la ec. (2.26). Sin embargo, se puede obtener información acerca de la velocidad de propagación y atenuación de la onda de corte en el medio viscoelástico al hacer que  $\lambda \rightarrow ik$ ,  $s \rightarrow iw$ , en la ec. (2.24).

$$k^2 = \frac{w^2}{c_s^2 + \frac{2\eta}{\rho_{f0}} \frac{iw - w^2\lambda_2}{1+iw\lambda_1}} \quad (2.27)$$

Se multiplica el denominador de la ec. (2.27) por el conjugado de  $1+iw\lambda_1$ , y se agrupa la parte real separada de la parte imaginaria.

$$k^2 = \frac{w^2}{c^2 + iwM} \quad (2.28)$$

Donde

$$M = 2 \frac{\eta}{\rho_{f0}} \left( \frac{1+w^2\lambda_1\lambda_2}{1+w^2\lambda_1^2} \right) \quad (2.29)$$

y

$$c^2 = c_s^2 + \frac{2\eta w^2}{\rho_{f0}} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1+w^2\lambda_1^2} \quad (2.30)$$

La ec. (2.28) es la ecuación de dispersión.  $M$  es la viscosidad cinemática total, y se observa que tiene una contribución por la viscosidad cinemática newtoniana del sistema y por la viscosidad no newtoniana. Para entender el significado del número de onda se debe de obtener la ec. (2.28) de la forma  $k = k_1 + ik_2$ , donde  $k_1$  es la parte real del número de onda y ofrece información sobre la propagación de la onda en el medio,  $k_2$  es la parte imaginaria del número de onda y da información sobre la atenuación de la onda. Entonces,

$$k^2 = \frac{w^2}{c^2 + iwM} \cdot \frac{c^2 - iwM}{c^2 - iwM} = \frac{w^2}{c^4 + w^2M^2} [c^2 - iwM]$$

Se completa un binomio cuadrado perfecto en los términos dentro de los corchetes cuadrados, se obtiene:

$$k = \frac{w}{\sqrt{2}(c^4 + w^2M^2)^{1/2}} \left[ \left( \sqrt{c^4 + w^2M^2} + c^2 \right)^{1/2} - i \left( \sqrt{c^4 + w^2M^2} - c^2 \right)^{1/2} \right] \quad (2.31)$$

En la ec. (2.31) ya se tiene explícitamente la parte real e imaginaria del número de onda. Esto es,

$$\text{Re}(k) = k_1 = \frac{w}{\sqrt{2}(c^4 + w^2M^2)^{1/2}} \left( \sqrt{c^4 + w^2M^2} + c^2 \right)^{1/2} \quad (2.32)$$

$$-\text{Im}(k) = -k_2 = \frac{w}{\sqrt{2}(c^4 + w^2M^2)^{1/2}} \left( \sqrt{c^4 + w^2M^2} - c^2 \right)^{1/2} \quad (2.33)$$

A partir de la ec. (2.32) se obtiene la propagación de la onda en un fluido viscoelástico, ya que el número de onda está definido como:  $k = w/V_p + i\phi$ , donde  $V_p$  es la velocidad de propagación del sonido y  $\phi$  es la atenuación de la onda acústica en el medio. Entonces se tiene que la velocidad de propagación de la onda acústica es:

$$V_p = \frac{w}{k_1} = \left( \frac{2(c^4 + w^2M^2)}{\sqrt{c^4 + w^2M^2} + c^2} \right)^{1/2} \quad (2.34)$$

Al analizar la ec. (2.34) se observa que para bajas viscosidades ( $\eta \approx 0$ ), véase ec. (2.29):

$$V_p = c \quad (2.35)$$

Entonces  $c$  es la velocidad de propagación del sonido para bajas viscosidades. Definida en la ec. (2.30) están las contribuciones por la parte newtoniana y no newtoniana del sistema.

La atenuación de la onda acústica en el medio es igual a:

$$\phi = w \left( \frac{\sqrt{c^4 + w^2 M^2} - c^2}{2(c^4 + w^2 M^2)} \right)^{1/2} \quad (2.36)$$

Si  $M \rightarrow 0$ , ec. (2.29), la ec. (2.36) se reduce a  $\phi = 0$ , esto es, no hay atenuación de la onda acústica en el medio, de aquí se deduce que la atenuación de una onda por el medio se debe a la resistencia que ofrece el medio debido a su viscosidad.

## 2.2 CONSTRUCCIÓN DE LAS GRÁFICAS

Se construirán las gráficas de velocidad de propagación y atenuación de la onda acústica en el medio viscoelástico, esto con el objetivo de analizar su comportamiento y tendencias en las regiones de alta y baja frecuencia.

A partir de la ec. (2.34) y ec. (2.36) se obtienen las graficas para la velocidad de propagación de la onda acústica y para la atenuación de la onda en el medio, respectivamente.

$$V_p = \frac{w}{k_1} = \left( \frac{2(c^4 + w^2 M^2)}{\sqrt{c^4 + w^2 M^2} + c^2} \right)^{1/2} \quad (2.37)$$

$$\phi = w \left( \frac{\sqrt{c^4 + w^2 M^2} - c^2}{2(c^4 + w^2 M^2)} \right)^{1/2} \quad (2.38)$$

La ec. (2.37) y ec. (2.38) se utilizan independiente del modelo viscoelástico que se desea utilizar, lo que cambia son los términos  $M$  y  $c^2$ , a saber,

$$\text{Para el modelo de Jeffreys: } M = 2 \frac{\eta}{\rho_{f0}} \left( \frac{1 + w^2 \lambda_1 \lambda_2}{1 + w^2 \lambda_1^2} \right) \quad (2.39)$$

$$c^2 = c_s^2 + \frac{2\eta}{\rho_{f0}} \frac{w^2 (\lambda_1 - \lambda_2)}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (2.40)$$

Para el modelo de Oldroyd se hace un cambio de variable  $\eta = \eta_v + \eta_{sv}$  y  $\lambda_2 = \lambda_1 \eta_{sv} / \eta$ . A partir del modelo de Jeffreys se obtienen las expresiones para  $M$  y  $N$  del modelo de Oldroyd (para mayor aclaración véase el capítulo 1. Introducción).

$$M = \frac{2}{\rho_{f0}} \left( \eta_{sv} + \frac{\eta_v}{1 + w^2 \lambda_1^2} \right) \quad (2.41)$$

$$c^2 = c_s^2 + \frac{2\eta_v}{\rho_{f0}} \frac{w^2 \lambda_1}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (2.42)$$

Para el modelo de Maxwell se tiene que,  $\lambda_2 = 0$ , por consiguiente,

$$M = \frac{2}{\rho_{f0}} \left( \frac{\eta}{1 + w^2 \lambda_1^2} \right) \quad (2.43)$$

$$c^2 = c_s^2 + \frac{2\eta}{\rho_{f0}} \frac{w^2 \lambda_1}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (2.44)$$

Y para el modelo newtoniano, con  $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$ , se tiene que,

$$M = 2 \frac{\eta}{\rho_{f0}} \quad (2.45)$$

$$c^2 = c_s^2 \quad (2.46)$$

Se grafica la velocidad de propagación y la atenuación en función de la frecuencia. Para los valores numéricos de las propiedades físicas que caracterizan

al sistema se recurre a la literatura Ref. [4]. Se tiene que  $\eta = 4000 \text{ g/cm}^*s$ ,  $\eta_{sv} = 1 \text{ g/cm}^*s$ ,  $2\eta(1 - \lambda_2/\lambda_1)/\rho_0\lambda_1c_0^2 = 0.01$ ,  $\rho_{f0} = 1.4 \text{ g/cm}^3$ ,  $\lambda_2/\lambda_1 = 2/3$ ,  $\lambda_1 = 1.5 \times 10^{-5} \text{ s}$ .

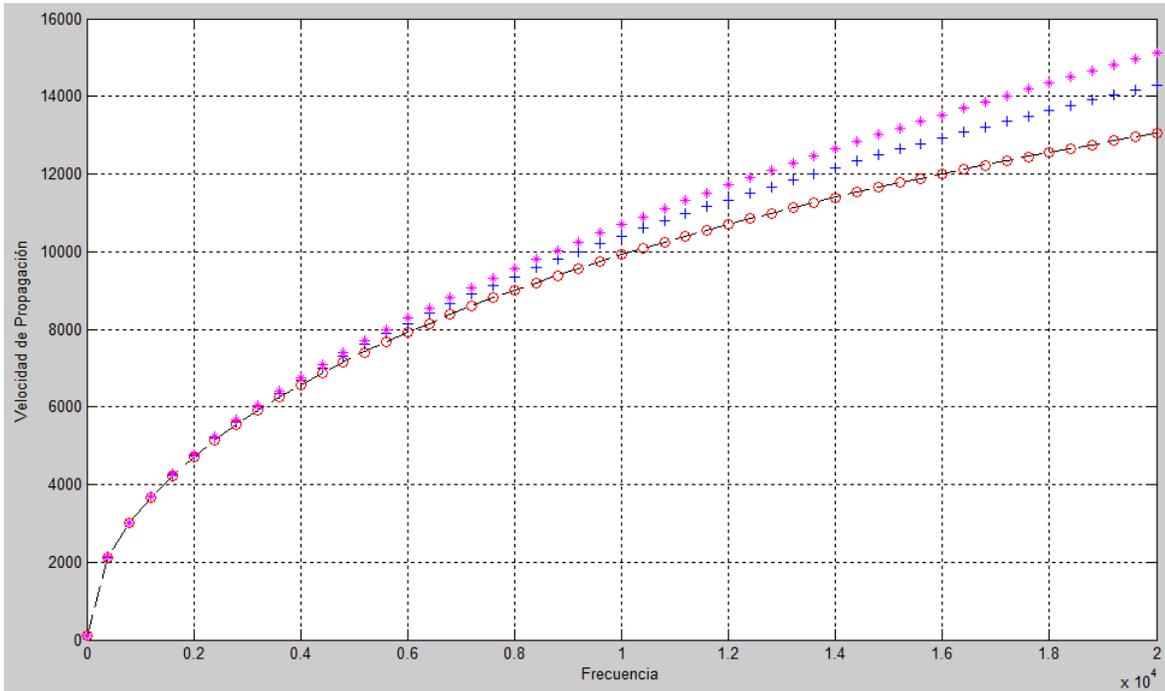


Fig. 2.1. Variación de la velocidad de propagación de una onda acústica con la frecuencia  $\omega$ . (+) Modelo de Jeffreys, (-) modelo de Oldroyd, (o) modelo de Maxwell, (\*) modelo newtoniano. Ec. (2.37).

La velocidad de propagación crece al aumentar la frecuencia. Cuando la frecuencia tiende a cero la velocidad de propagación cae con una pendiente que tiende a  $c$ , mientras que si la frecuencia tiende al infinito la velocidad de propagación crece y tiende a una pendiente igual a la raíz cuadrada de  $2M$ .

A continuación se presenta la gráfica de algunos valores obtenidos para la ecuación (2.36), con la finalidad de observar la relación entre la atenuación y la frecuencia en los modelos de Jeffreys, Oldroyd, Maxwell y Newton.

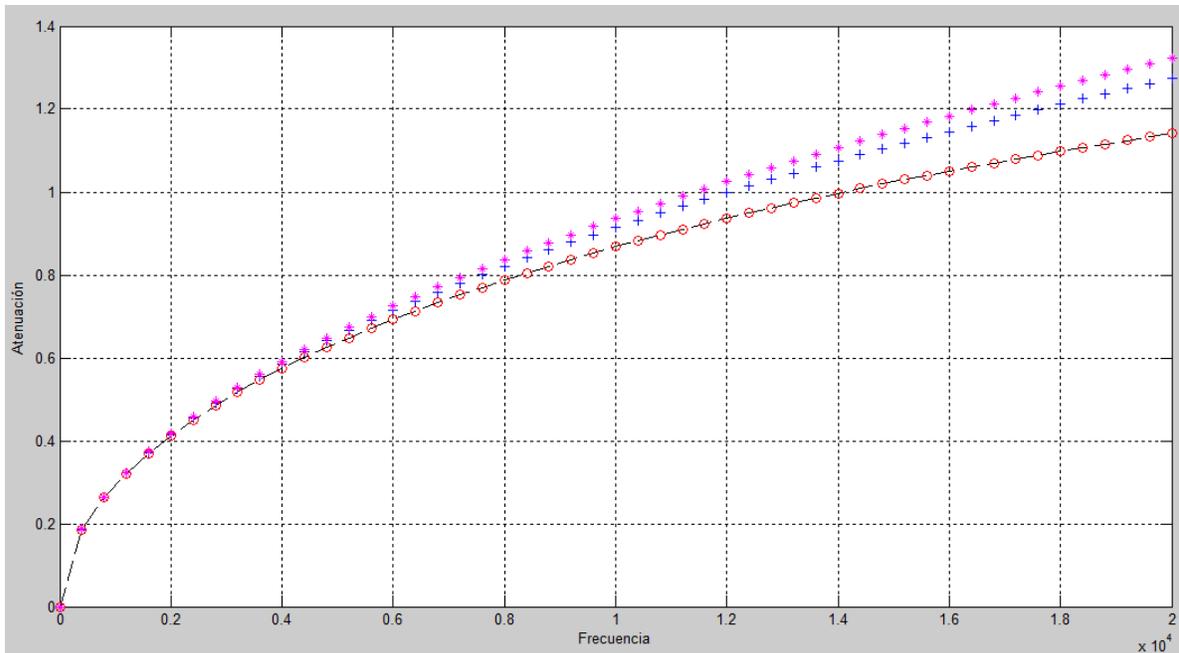


Fig. 2.2. Variación de la atenuación de una onda acústica con la frecuencia  $\omega$ . (+) Modelo de Jeffreys, (-) modelo de Oldroyd, (o) modelo de Maxwell, (\*) modelo newtoniano. Ec. (2.38).

Se puede observar que la atenuación crece cuando aumenta la frecuencia. En el límite inferior de la atenuación de la onda, la pendiente de la curva tiende a cero cuando la frecuencia tiende a cero, y en el límite superior cuando la frecuencia tiende al infinito la pendiente de la curva de la atenuación tiende al inverso de  $(2M)^{1/2}$ .

### CAPÍTULO 3. PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS EN UN MEDIO VISCOELÁSTICO ENTRE DOS PLACAS PARALELAS

Para el análisis del problema de la propagación de ondas acústicas en un medio viscoelástico entre dos placas paralelas se utilizan coordenadas rectangulares. La Fig. 3.1 presenta la geometría del problema a tratar,

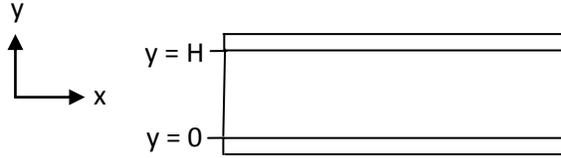


Fig. 3.1. Geometría del problema

#### 3.1 FLUJO DE CORTE SIMPLE

Partiendo del modelo de Jeffreys para un flujo de corte simple en forma diferencial para la componente  $\sigma_{yx}$ ,

$$\sigma_{yx} + \lambda_1 \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial t} = \eta \left( \dot{\gamma} + \lambda_2 \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} \right) \quad (3.1)$$

Donde  $\sigma_{yx}$  es el esfuerzo cortante, la velocidad del fluido es en dirección  $x$  y el transporte de cantidad de movimiento es en dirección  $y$ ,  $\dot{\gamma}$  es la rapidez de corte o rapidez de deformación,  $\dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$ ,  $\eta$  es la viscosidad de corte del fluido,  $\lambda_1$  es el tiempo de relajamiento y  $\lambda_2$  es el tiempo de retardamiento.

De la ecuación de momentum linealizada en el espacio de Laplace para la componente  $x$  y sustituyendo la ecuación constitutiva, ec. (3.1), en el término difusivo de la ecuación de cantidad de movimiento, se llega a,

$$\rho_{f0} s V_x^* = \eta \frac{1 + s\lambda_2}{1 + s\lambda_1} \frac{d^2 V_x^*}{dy^2} \quad (3.2)$$

Debido a que el flujo de corte simple es un flujo por arrastre el término del gradiente de presión es cero y la gravedad no afecta al sistema. Reacomodando la

ec. (3.2) se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden homogénea. A saber,

$$\frac{d^2V_x^*}{dy^2} - \mu^2V_x^* = 0 \quad (3.3)$$

donde

$$\mu^2 = \frac{\rho_{f0}s}{\eta} \frac{1 + s\lambda_1}{1 + s\lambda_2} \quad (3.3a)$$

La solución general de la ec. (3.3) es,

$$V_x^* = C_1 \exp(\mu y) + C_2 \exp(-\mu y) \quad (3.4)$$

Se aplican las condiciones de frontera a la ec. (3.4). En  $y = 0$ , la velocidad es cero, se obtiene que  $C_2 = -C_1$ . En la pared,  $y = H$ , la velocidad del fluido es igual a la velocidad de la placa, esto es  $V_x^* = V_0/s$ . Por lo tanto,

$$C_1 = \frac{V_0}{s[\exp(\mu H) - \exp(-\mu H)]} \quad (3.5)$$

Entonces sustituyendo el valor de la constante y agrupando, la ec. (3.4) resulta en:

$$V_x^* = \frac{V_0}{s} \left[ \frac{\exp(\mu y) - \exp(-\mu y)}{\exp(\mu H) - \exp(-\mu H)} \right] \quad (3.6)$$

En términos de senos hiperbólicos, la expresión anterior se puede escribir como,

$$V_x^* = \frac{V_0}{s} \left[ \frac{\sinh(\mu y)}{\sinh(\mu H)} \right] \quad (3.7)$$

Del valor propio de la ec. (3.3a) se puede obtener la ecuación de dispersión al sustituir  $\mu \rightarrow ik$ ,  $s \rightarrow iw$ , a saber

$$-k^2 = \frac{iw}{\frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{1+iw\lambda_2}{1+iw\lambda_1} \cdot \frac{1-iw\lambda_1}{1-iw\lambda_1}} = \frac{iw}{\frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{1-iw\lambda_1+iw\lambda_2+w^2\lambda_1\lambda_2}{1+w^2\lambda_1^2}}$$

$$k^2 = \frac{w}{N+iM} \quad (3.8)$$

Donde

$$N = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{w(\lambda_1 - \lambda_2)}{1+w^2\lambda_1^2} \quad (3.9)$$

$$M = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{1+w^2\lambda_1\lambda_2}{1+w^2\lambda_1^2} \quad (3.10)$$

Se coloca la ec. (3.8) de la forma  $k = k_1 + ik_2$ , donde  $k_1$  es la parte real del número de onda y  $k_2$  es la parte imaginaria del numero de onda.

$$k = \left( \frac{w}{2(N^2 + M^2)} \right)^{1/2} \left[ \left( \sqrt{N^2 + M^2} + N \right)^{1/2} - i \left( \sqrt{N^2 + M^2} - N \right)^{1/2} \right] \quad (3.11)$$

De esta manera se tiene explícitamente la parte real e imaginaria del número de onda, por tanto:

$$k_1 = \left[ \frac{w \left( \sqrt{N^2 + M^2} + N \right)}{2(N^2 + M^2)} \right]^{1/2} \quad (3.12)$$

$$-k_2 = \left[ \frac{w \left( \sqrt{N^2 + M^2} - N \right)}{2(N^2 + M^2)} \right]^{1/2} \quad (3.13)$$

A partir de la ec. (3.12) se obtiene la propagación de la onda en un fluido viscoelástico,  $k_1 = w/V_p$ , donde  $V_p$  es la velocidad de propagación del sonido. Entonces se tiene que la propagación de la onda de corte es,

$$V_p = \frac{w}{k_1} = w \left[ \frac{2(N^2 + M^2)}{w(\sqrt{N^2 + M^2} + N)} \right]^{1/2} \quad (3.14)$$

Y de la parte imaginaria del número de onda se obtiene la expresión para la atenuación de la onda de corte, debido a que  $k_2 = \phi$ .

$$\phi = \left[ \frac{w(\sqrt{N^2 + M^2} - N)}{2(N^2 + M^2)} \right]^{1/2} \quad (3.15)$$

Ahora bien, se calcula el promedio de la ec. (3.7) a lo largo del eje transversal, es decir  $V^* = \frac{2}{H^2} \int_0^H V_x^* y dy$ ,

$$V^* = \frac{V_0}{s} \frac{2}{H^2} \left[ \frac{H}{\mu} \frac{1}{\tanh(\mu H)} - \frac{1}{\mu^2} \right] \quad (3.16)$$

La ec. (3.16) es la velocidad promedio del fluido en el espacio de Laplace para una geometría rectangular. A partir del modelo de Jeffreys en el espacio de Laplace se obtiene el esfuerzo cortante en la pared de la placa superior,  $y = H$ .

$$\sigma_{yx}^* \Big|_{y=H} = \eta \frac{1 + s\lambda_2}{1 + s\lambda_1} \frac{\partial V_x^*}{\partial y} \Big|_{y=H} \quad (3.17)$$

Se deriva a la ec. (3.7) respecto a la posición, y al evaluarla en la pared de la placa superior se llega a,

$$\frac{\partial V_x^*}{\partial y} \Big|_{y=H} = \frac{V_0}{s} \frac{\mu}{\tanh(\mu H)} \quad (3.18)$$

Se sustituye la ec. (3.18) en la ec. (3.17).

$$\sigma_w^* = \eta \frac{1 + s\lambda_2}{1 + s\lambda_1} \frac{V_0}{s} \frac{\mu}{\tanh(\mu H)} \quad (3.19)$$

En la ec. (3.19)  $V_0$  es una constante y bien se le puede dar un valor pero, debido a tratamientos posteriores del esfuerzo cortante es recomendable poner al

esfuerzo cortante en la pared en función de la velocidad, para este caso, de la velocidad promedio en el espacio de Laplace. De la ec. (3.16) se despeja  $V_0/s$  y se sustituye en la ec. (3.19).

$$\sigma_w^* = -4\eta_T DV^* \quad (3.20)$$

Donde  $D = -\frac{1}{8}H\mu^2 \left[ 1 - \frac{1}{H\mu} \tanh(\mu H) \right]^{-1}$  y  $\eta_T = \eta \frac{1+s\lambda_2}{1+s\lambda_1}$ . La variable  $\mu$  está definida en la ec. (3.3a).

Finalmente del sistema de ecuaciones se obtiene la ecuación de dispersión para la presión.

$$\sigma_w^* = -4\eta_T DV^* \quad (3.21)$$

$$\rho_{f0} \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P_f}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{f0} \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (3.23)$$

$$P_f = c_s^2 \rho \quad (3.24)$$

En la ec. (3.22) se incluyen las perturbaciones en la presión del líquido. Además, en la ecuación de continuidad la divergencia de la velocidad del fluido es diferente de cero, debido a la propagación de la onda por el medio, pues la onda viaja por medio de ciclos alternos de compresión y de rarefacción, lo que hace que el medio sea compresible. Se sustituye la ecuación de estado en la ecuación de continuidad, para obtener que

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial P_f}{\partial t} + \rho_{f0} \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (3.25)$$

Se calcula el promedio de las ec. (3.22) y (3.25). Se define a  $P = \frac{2}{H^2} \int_0^H P_f y dy$  y  $V = \frac{2}{H^2} \int_0^H V_x y dy$ . Entonces,

$$\rho_{f0} \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2\sigma_w}{H} \quad (3.26)$$

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_{f0} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.27)$$

Después se aplica la transformada de Laplace a la ec. (3.26) y (3.27), y se sustituyen las condiciones iniciales antes descritas:

$$\rho_{f0} s V^* = -\frac{dP^*}{dx} + \frac{2\sigma_w^*}{H} \quad (3.28)$$

$$\frac{s}{c_s^2} P^* = -\rho_{f0} \frac{dV^*}{dx} \quad (3.29)$$

Se sustituye la ec. (3.21) en la ec. (3.28) se agrupan términos iguales y se deriva respecto a  $x$ .

$$\left(\rho_{f0} s + 8\eta_T H^{-1} D\right) \frac{dV^*}{dx} = -\frac{d^2 P^*}{dx^2} \quad (3.30)$$

Al sustituir la ec. (3.30) en la ec. (3.29) resulta una ecuación de segundo orden homogénea para la presión del líquido, entonces:

$$\frac{d^2 P^*}{dx^2} - \lambda^2 P^* = 0 \quad (3.31)$$

Donde

$$\lambda^2 = \frac{s(\rho_{f0} s + 8\eta_T H^{-1} D)}{c_s^2 \rho_{f0}} \quad (3.31a)$$

La solución de la ec. (3.31) es,

$$P^* = C_1 \exp(\lambda x) + C_2 \exp(-\lambda x) \quad (3.32)$$

Con las siguientes condiciones a la frontera: si  $x$  tiende al infinito la presión no tiende al infinito, así que necesariamente  $C_1 = 0$ , y al inicio  $x = 0$ , la presión es una constante e igual a  $P_0$ , se obtiene la expresión para la presión del líquido,

$$P^* = \frac{P_0}{s} \exp(-\lambda x) \quad (3.33)$$

Del valor propio, ec. (3.31a), se puede obtener la ecuación de dispersión al hacer un cambio de variable,  $\lambda \rightarrow ik$  y  $s \rightarrow iw$ , así se tiene que,

$$k^2 = \frac{w^2}{c_s^2} \left[ 1 + 8\eta_T (iw)^{-1} (\rho_{f0} H)^{-1} D \right] \quad (3.34)$$

Debido a que  $\eta_T$  y  $D$  tienen parte real e imaginaria, se debe de colocarlas explícitamente en la forma  $z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$ . Entonces se tiene que,

$$\eta_T = \eta \frac{1+iw\lambda_2}{1+iw\lambda_1} \cdot \frac{1-iw\lambda_1}{1-iw\lambda_1} = \eta \frac{1-iw\lambda_1+iw\lambda_2+w^2\lambda_1\lambda_2}{1+w^2\lambda_1^2}$$

$$\eta_T = A + iB \quad (3.35)$$

Donde  $A = \eta \frac{1+w^2\lambda_1\lambda_2}{1+w^2\lambda_1^2}$  y  $B = \eta \frac{w(\lambda_2 - \lambda_1)}{1+w^2\lambda_1^2}$ .

$$\mu^2 = \frac{\rho_{f0} iw}{A+iB} \cdot \frac{A-iB}{A-iB} = \frac{\rho_{f0} iw}{A^2+B^2} (A-iB) = \frac{\rho_{f0} w}{A^2+B^2} (B+iA)$$

$$\mu^2 = J + iI \quad (3.36)$$

Donde  $J = \frac{w\rho_{f0}B}{A^2+B^2}$  y  $I = \frac{w\rho_{f0}A}{A^2+B^2}$ .

$$\mu = C + iE \quad (3.37)$$

Donde  $C = \left[ \frac{\rho_{f0} w (\sqrt{A^2+B^2} + B)}{2(A^2+B^2)} \right]^{1/2}$  y  $E = \left[ \frac{\rho_{f0} w (\sqrt{A^2+B^2} - B)}{2(A^2+B^2)} \right]^{1/2}$ .

Para el caso de  $D$  se tiene que,

$$D = -\frac{1}{8} H \mu^2 \left[ 1 - \frac{1}{H \mu} \tanh(\mu H) \right]^{-1}$$

Haciendo uso de identidades trigonométricas para la tangente hiperbólica y sustituyendo la ec. (3.36) y (3.37) en  $D$ , se llega a,

$$D = -\frac{1}{8} \frac{H(J + iI)}{1 - \frac{1}{H(C + iE)} \frac{\tanh(HC) + i \tan(HE)}{1 + i \tanh(HC) \tan(HE)}} \quad (3.38)$$

Por comodidad y espacio, se desarrolla por separado el denominador de la ec. (3.38). Se define a  $L = \tanh(HC) \tan(HE)$ .

$$1 - \frac{1}{H(C + iE)} \frac{\tanh(HC) + i \tan(HE)}{1 + iL} = 1 - \frac{1}{H} \frac{\tanh(HC) + i \tan(HE)}{(C - EL) + i(CL + E)} = P + iQ \quad (3.39)$$

Donde  $P = 1 - \frac{1}{H} \frac{\tanh(HC)(C - EL) + \tan(HE)(CL + E)}{(C - EL)^2 + (CL + E)^2}$  y

$$Q = \frac{1}{H} \frac{\tan(HE)(C - EL) - \tanh(HC)(CL + E)}{(C - EL)^2 + (CL + E)^2}$$

Se sustituye la ec. (3.39) en la ec. (3.38) y se agrupan términos semejantes.

$$D = -\frac{H(J + iI)}{8} \cdot \frac{P - iQ}{P + iQ} = -R - iS \quad (3.40)$$

Donde  $R = \frac{H}{8} \frac{JP + IQ}{P^2 + Q^2}$  y  $S = \frac{H}{8} \frac{IP - JQ}{P^2 + Q^2}$ . En la ec. (3.40) se tiene la parte real

separada de la parte imaginaria para  $D$ . Ahora bien, se sustituye la ec. (3.35) y (3.40) en la ec. (3.34) para obtener,

$$k^2 = \frac{w^2}{c_s^2} \left[ 1 + 8 \frac{(A + iB)(iR - S)}{w \rho_{f0} H} \right] = \frac{w^2}{c_s^2} [U + iV] \quad (3.41)$$

Donde  $U = 1 - 8 \frac{AS + BR}{w\rho_{f0}H}$  y  $V = 8 \frac{AR - BS}{w\rho_{f0}H}$ . Se coloca la ec. (3.41) de la forma

$k = k_1 + ik_2$ , donde a partir de  $k_1$  se obtendrá la expresión para la velocidad de propagación de la onda de presión, y a partir de  $k_2$  se tendrá la atenuación de la onda de presión en el medio.

$$k = \frac{w}{\sqrt{2}c_s} \left[ \left( \sqrt{V^2 + U^2} + U \right)^{1/2} + i \left( \sqrt{V^2 + U^2} - U \right)^{1/2} \right] \quad (3.42)$$

En la ec. (3.42) ya se tiene explícitamente la parte real e imaginaria del número de onda.

$$k_1 = \frac{w}{\sqrt{2}c_s} \left( \sqrt{V^2 + U^2} + U \right)^{1/2} \quad (3.43)$$

$$k_2 = \frac{w}{\sqrt{2}c_s} \left( \sqrt{V^2 + U^2} - U \right)^{1/2} \quad (3.44)$$

A partir de la ec. (3.43) se puede obtener la propagación de la onda en un fluido viscoelástico. Se tiene que la propagación de la onda acústica es:

$$V_p = \frac{w}{k_1} = \frac{\sqrt{2}c_s}{\left( \sqrt{V^2 + U^2} + U \right)^{1/2}} \quad (3.45)$$

Mientras que la atenuación de la onda acústica en el medio es igual a:

$$\phi = \frac{w}{\sqrt{2}c_s} \left( \sqrt{V^2 + U^2} - U \right)^{1/2} \quad (3.46)$$

### 3.2 CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS

A partir de la ec. (3.14) y ec. (3.15) se obtienen las gráficas para la velocidad de propagación de la onda acústica y para la atenuación de la onda en el medio, respectivamente.

$$V_p = w \left[ \frac{2(N^2 + M^2)}{w(\sqrt{N^2 + M^2} + N)} \right]^{1/2} \quad (3.47)$$

$$\phi = \left[ \frac{w(\sqrt{N^2 + M^2} - N)}{2(N^2 + M^2)} \right]^{1/2} \quad (3.48)$$

La ec. (3.47) y ec. (3.48) se emplean independiente del modelo viscoelástico que se desea utilizar, lo que cambia son los términos  $M$  y  $N$ , a saber,

$$\text{Para el modelo de Jeffreys: } N = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{w(\lambda_1 - \lambda_2)}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (3.49)$$

$$M = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{1 + w^2 \lambda_1 \lambda_2}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (3.50)$$

Para el modelo de Oldroyd,  $\eta = \eta_v + \eta_{sv}$  y  $\lambda_2 = \lambda_1 \eta_{sv} / \eta$ .

$$N = \frac{\eta_v}{\rho_{f0}} \frac{w \lambda_1}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (3.51)$$

$$M = \frac{1}{\rho_{f0}} \left( \eta_{sv} + \frac{\eta_v}{1 + w^2 \lambda_1^2} \right) \quad (3.52)$$

$$\text{Para el modelo de Maxwell, } \lambda_2 = 0. \quad N = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{w \lambda_1}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (3.53)$$

$$M = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{1}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (3.54)$$

$$\text{Para el modelo newtoniano, } \lambda_2 = \lambda_1 = 0. \quad N = 0 \quad (3.55)$$

$$M = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \quad (3.56)$$

De la literatura [4] se obtienen los siguientes datos para las propiedades físicas que caracterizan al sistema:  $\eta = 4000 \text{ g/cm}^*s$ ,  $\eta_{sv} = 1 \text{ g/cm}^*s$ ,  $\rho_{f0} = 1.4 \text{ g/cm}^3$ ,

$\lambda_1 = 1.5 \times 10^{-5} \text{ s}$ ,  $\lambda_2 / \lambda_1 = 2/3$ . Al evaluar estos datos con la ec. (3.47) se obtiene la siguiente gráfica.

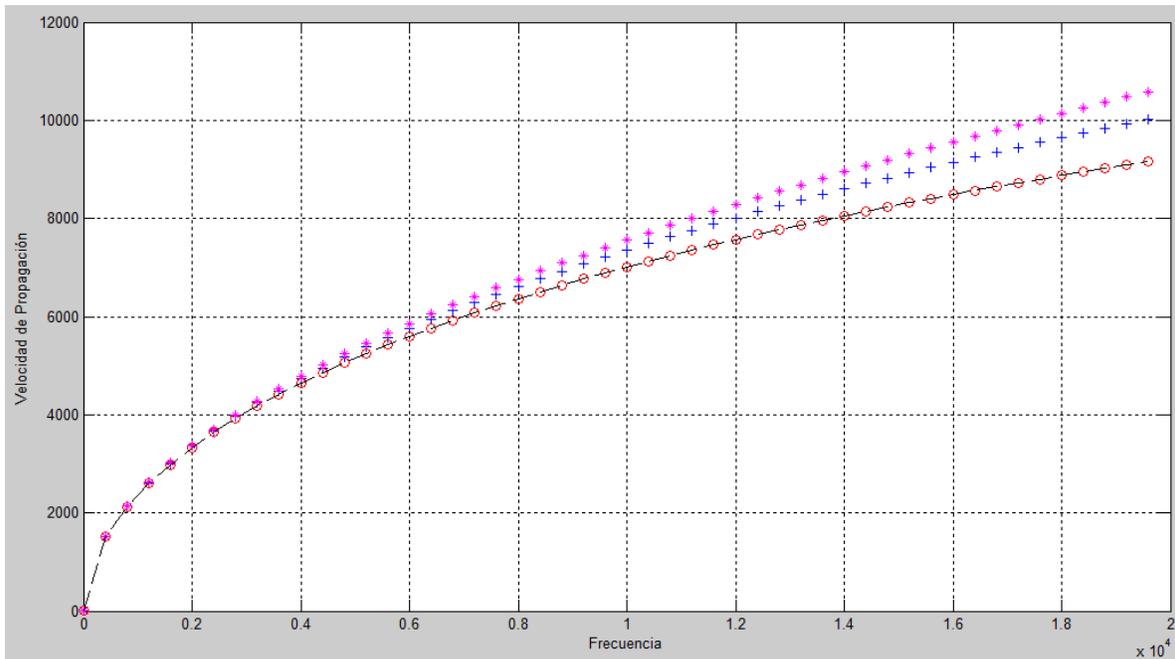


Fig. 3.2. Variación de la velocidad de propagación de una onda acústica con la frecuencia  $\omega$ . (+) Modelo de Jeffreys, (-) modelo de Oldroyd, (o) modelo de Maxwell, (\*) modelo Newtoniano. Ec. (3.47).

De la gráfica se puede observar que la velocidad de propagación crece cuando aumenta la frecuencia. Más aún, cuando la frecuencia tiende a cero se tiene que la pendiente de la curva de la velocidad de propagación tiende a  $(2N)^{1/2}$ , mientras que si la frecuencia tiende al infinito la pendiente de la velocidad de propagación tiende a  $(2M)^{1/2}$ .

Con los mismos datos antes dados y con la ec. (3.48) se grafica la atenuación de la onda acústica en el medio en función de la frecuencia.

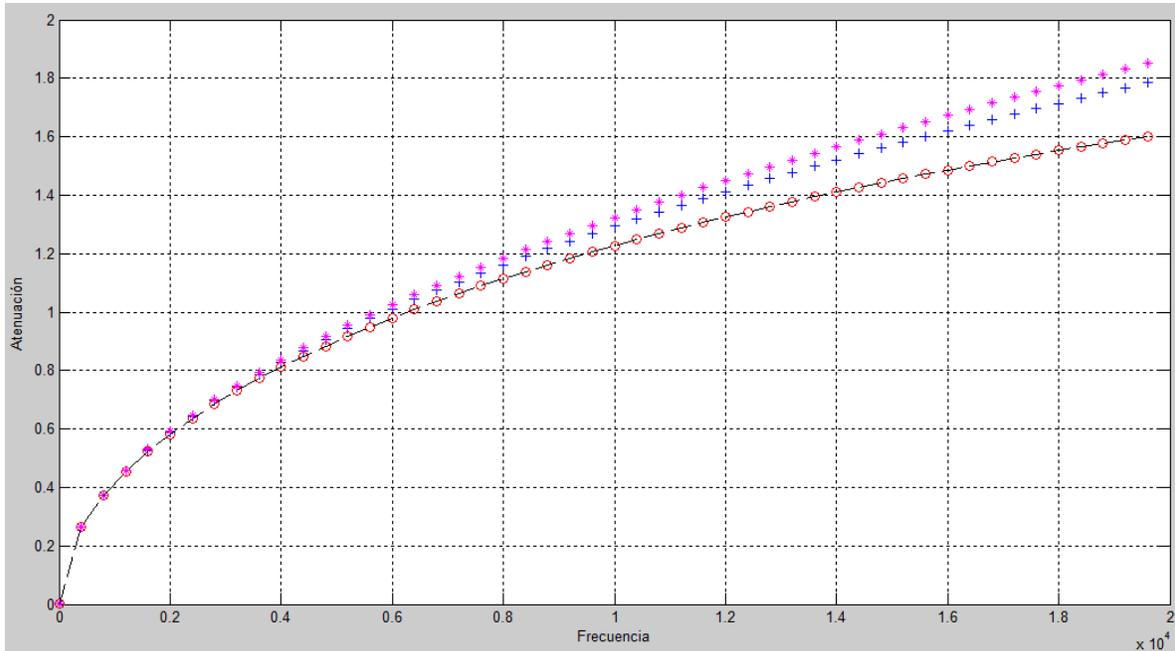


Fig. 3.3. Variación de la atenuación en función de la frecuencia. (+) Modelo de Jeffreys, (-) modelo de Oldroyd, (o) modelo de Maxwell, (\*) modelo newtoniano. Ec. (3.48).

La atenuación crece cuando aumenta la frecuencia. Cuando la frecuencia tiende a cero la curva de la atenuación tiende a una pendiente igual a cero, mientras que si la frecuencia tiende al infinito la pendiente de la curva de la atenuación tiende al inverso de  $(2M)^{1/2}$ .

Ahora bien, para la ecuación de dispersión obtenida a través de la expresión matemática para la presión se puede a partir de la ec. (3.45) y ec. (3.46) obtener las gráficas para la velocidad de propagación de la onda acústica y para la atenuación de la onda en el medio, respectivamente.

$$V_p = \frac{\sqrt{2}c_s}{\left(\sqrt{V^2 + U^2} + U\right)^{1/2}} \quad (3.57)$$

$$\phi = \frac{w}{\sqrt{2}c_s} \left(\sqrt{V^2 + U^2} - U\right)^{1/2} \quad (3.58)$$

Las ec. (3.57) y ec. (3.58) se utilizan independiente del modelo viscoelástico que se vaya a emplear, lo único que cambia son los términos  $A$  y  $B$ , pues estos son los términos que contienen la información acerca del modelo viscoelástico. A saber,

Para el modelo de Jeffreys: 
$$A = \eta \frac{1 + w^2 \lambda_1 \lambda_2}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (3.59)$$

$$B = \eta \frac{w(\lambda_2 - \lambda_1)}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (3.60)$$

Para el modelo de Oldroyd,  $\eta = \eta_v + \eta_{sv}$ ,  $\lambda_2 = \lambda_1 \eta_{sv} / \eta$ .

$$A = \eta_{sv} + \frac{\eta_v}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (3.61)$$

$$B = -\eta_v \frac{w \lambda_1}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (3.62)$$

Para el modelo de Maxwell,  $\lambda_2 = 0$ . 
$$A = \frac{\eta}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (3.63)$$

$$B = -\eta \frac{w \lambda_1}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (3.64)$$

Para el modelo newtoniano,  $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$ . 
$$A = \eta \quad (3.65)$$

$$B = 0 \quad (3.66)$$

Al saber que  $\eta = 4000 \text{ g/cm}^*s$ ,  $\eta_{sv} = 1 \text{ g/cm}^*s$ ,  $\rho_{f0} = 1.4 \text{ g/cm}^3$ ,  $\lambda_1 = 1.5 \times 10^{-5} \text{ s}$ ,  $\lambda_2 / \lambda_1 = 2/3$ ,  $\eta(1 - \lambda_2 / \lambda_1) / \rho_0 \lambda_1 c_s^2 = 0.005$ ,  $H = 1 \text{ cm}$ . Se obtiene la siguiente gráfica, al evaluar estos datos en la ec. (3.57).

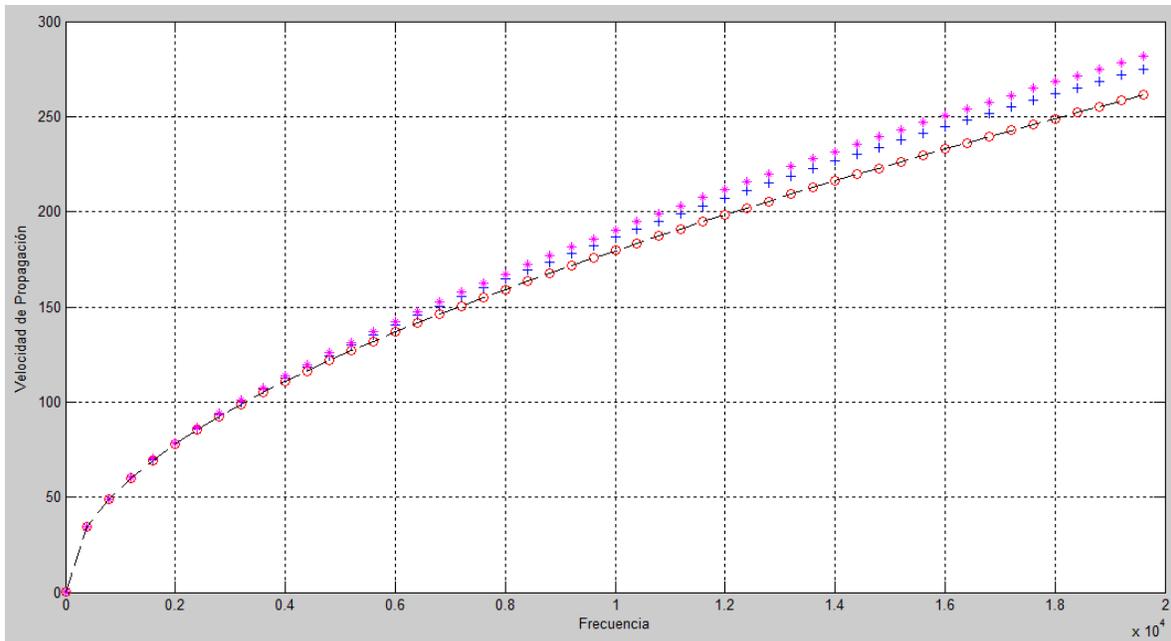


Fig. 3.3. Variación de la velocidad de propagación de una onda acústica con la frecuencia  $\omega$ . (+) Modelo de Jeffreys, (-) modelo de Oldroyd, (o) modelo de Maxwell, (\*) modelo newtoniano. Ec. (3.57).

De la gráfica anterior se puede observar que la velocidad de propagación aumenta cuando la frecuencia aumenta. Los límites de la velocidad de propagación son: la pendiente de la curva tiende a  $c_s$  cuando la frecuencia tiende a cero, y tiende al valor de  $(2/V)^{1/2}c_s$  cuando la frecuencia tiende al infinito.

Mientras que la atenuación de la onda acústica en el medio viscoelástico se comporta de la siguiente manera,

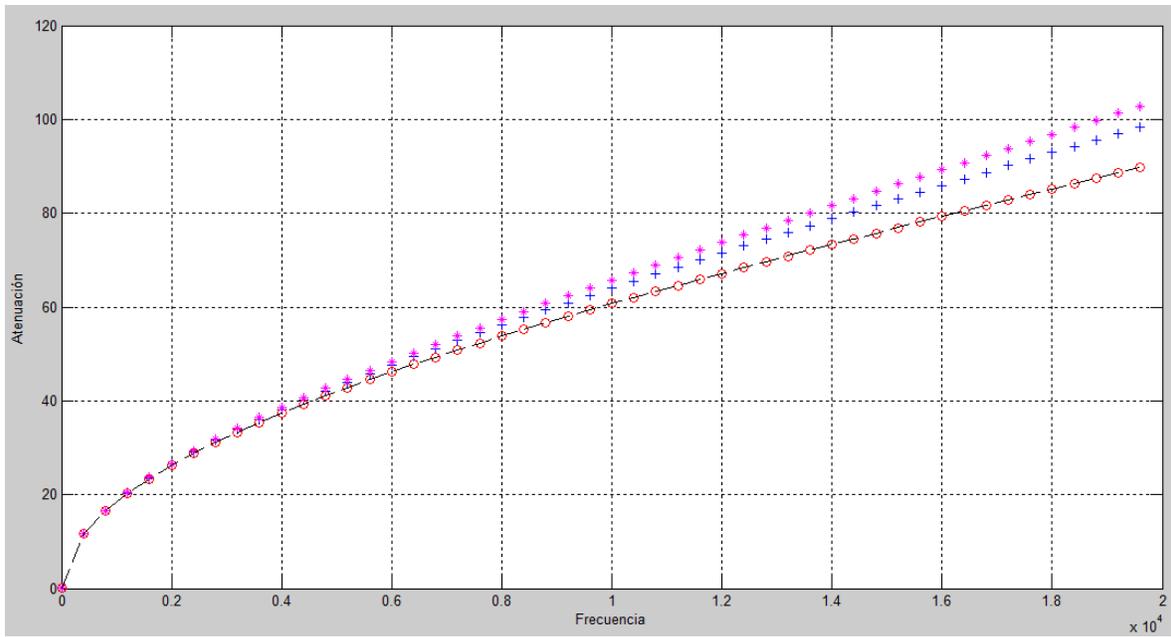


Fig. 3.5. Variación de la atenuación de una onda acústica con la frecuencia  $\omega$ . (+) Modelo de Jeffreys, (-) modelo de Oldroyd, (o) modelo de Maxwell, (\*) modelo newtoniano. Ec. (3.58).

De acuerdo a la Fig. (3.4) y Fig. (3.5) la atenuación de la onda tiene el mismo comportamiento que la velocidad de propagación de la onda acústica; esto es, la atenuación crece al aumentar la frecuencia, en su límite inferior la pendiente de la curva de atenuación tiende a cero y en el límite superior tiende al valor de  $(V/2)^{1/2}c_s$ .

## CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ONDAS QUE VIAJAN A TRAVÉS DE UNA SOLUCIÓN POLIMÉRICA

En este capítulo se estudiará los efectos de irradiar ondas acústicas a una solución polimérica confinada en un tubo elástico. Se analizará la ecuación de dispersión en coordenadas cilíndricas con la finalidad de observar los cambios en la atenuación y la velocidad del sonido provocados por los efectos viscoelásticos.

### 4.1 FLUJO DE CORTE EN UN TUBO.

Se utiliza el modelo de Oldroyd en forma integral, el cuál se obtuvo a partir del modelo de Maxwell generalizado más el modelo newtoniano (véase el Capítulo 1. Introducción).

$$\sigma_{ij} = 2 \int_{-\infty}^t G(t-t_1) s_{ij} dt_1 + 2\eta_{sv} s_{ij} \quad (4.1)$$

Donde  $G(t-t_1)$  es una función de relajamiento,  $\sigma_{ij}$ , son los componentes del tensor de esfuerzos,  $s_{ij}$  son los componentes del tensor de rapidez de deformación y  $\eta_{sv}$  es la viscosidad del disolvente. El tensor de rapidez de deformación está definido como:

$$s_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \underline{v})\delta_{ij} \quad (4.2)$$

Donde  $e_{ij}$  es la parte deviatorica,  $\underline{v}$  es el vector de la velocidad del fluido y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. La geometría del problema está representada en la Fig. 1.

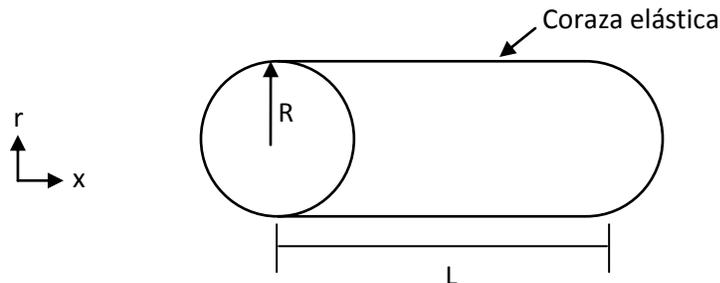


Fig. 1. Geometría del problema.

El radio interno  $R$  es muy pequeño frente a la longitud  $L$ , es decir ( $R \ll L$ ). Se obtiene la expresión para la componente  $rx$  del esfuerzo cortante,  $\tau_{rx}$  a partir de la ec. (4.1). Conociendo al tensor de rapidez de deformación en función de variables de perturbación  $s_{rx} = e_{rx} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial V_x}{\partial r}$ , el segundo componente de la definición de  $s_{ij}$  es cero, ya que la divergencia de la velocidad del fluido multiplica a la componente  $rx$  de la delta de Kronecker, y ésta es cero.

$$\sigma_{rx} = \int_{-\infty}^t G(t-t_1) \frac{\partial V_x}{\partial r} dt_1 + \eta_{sv} \frac{\partial V_x}{\partial r} \quad (4.3)$$

La ecuación de movimiento para un fluido viscoelástico no estacionario, compresible, simétrico respecto al eje  $x$  y considerando que las fuerzas externas no afectan al sistema, tiene la forma:

$$\rho_f \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rx}) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \quad (4.4)$$

Donde  $v = [v_x, v_r]$  es el vector de velocidades,  $v_x = v_x(t, x, r)$  es la velocidad del fluido viscoelástico en dirección axial,  $v_r = v_r(t, x, r)$  es la velocidad del fluido en dirección radial,  $\rho_f = \rho_f(t, x)$  y  $p_f = p_f(t, x)$  son la densidad y la presión del fluido viscoelástico.

Para linealizar la ecuación de momentum, se definen las siguientes variables.

$$v_x = v_{x0} + V_x \quad (4.5)$$

$$v_r = v_{r0} + V_r \quad (4.6)$$

$$p_f = p_0 + P_f \quad (4.7)$$

$$\rho_f = \rho_{f0} + \rho \quad (4.8)$$

Donde el subíndice “0” denota al estado estable, es decir  $v_{x0} = v_{r0} = 0$ ,  $V_x \ll v_x$ ,  $V_r \ll v_r$ ,  $\rho \ll \rho_f$  y  $P_f \ll p_f$ , y al sustituir las ecs. (4.5)-(4.8) en la ec. (4.4) resulta:

$$\rho_{f0} \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rx}) \quad (4.9)$$

El término del esfuerzo normal es despreciable frente al término del esfuerzo cortante, debido a que  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{v_0}{L^2}$  y  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} \sim \frac{v_0}{\alpha^2 L^2}$ , donde  $\alpha = R/L$ , y como se mencionó anteriormente  $R \ll L$ , así que el término de la segunda derivada del esfuerzo normal respecto a  $x$  tiende a cero, mientras que el término que involucra al esfuerzo cortante no tiende a cero.

Se sustituye la ecuación constitutiva en la ecuación de cantidad de movimiento, con las consideraciones pertinentes según el sistema. Así se llega a la siguiente ecuación en términos de variables de perturbación,

$$\rho_{f0} \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_{-\infty}^t G(t-t_1) r \frac{\partial V_x}{\partial r} dt_1 + \eta_{sv} r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) \quad (4.10)$$

Se desarrolla el segundo término del lado derecho de la ec. (4.10).

$$\int_{-\infty}^t G(t-t_1) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V_x}{\partial r} dt_1 + \eta_{sv} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V_x}{\partial r} = \int_{-\infty}^t G(t-t_1) \left[ \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} \right] dt_1 + \eta_{sv} \left[ \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} \right]$$

Se sustituye la ecuación anterior en la ec. (4.10).

$$\rho_{f0} \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial p_f}{\partial x} + \int_{-\infty}^t G(t-t_1) \left[ \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} \right] dt_1 + \eta_{sv} \left[ \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} \right] \quad (4.11)$$

Ahora se adimensionaliza la ec. (4.11) con las siguientes variables adimensionales.

$$\bar{K} = \frac{t_0 K}{R}, \quad K = -\frac{1}{\rho_{f0}} \frac{\partial p_f}{\partial x}, \quad \bar{V}_x = \frac{t_0 V_x}{R}, \quad \bar{\eta}_{sv} = \frac{\eta_{sv}}{\rho_{f0} t_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad \kappa = \frac{\rho_s}{\rho_{f0}}$$

$$t_0 = R \left( \frac{\rho_s}{\rho_{f0}} \right)^{1/2}, \quad \bar{t}_1 = \frac{t_1}{t_0}, \quad \bar{G}(\tau - \bar{t}_1) = \frac{G(t-t_1)}{\rho_{f0}} \quad (4.12)$$

Por comodidad se adimensionaliza término a término la ec. (4.11).

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial V_x}{\partial \bar{V}_x} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{R}{t_0^2} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial r} = \frac{\partial V_x}{\partial \bar{V}_x} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{t_0} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial V_x}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{t_0} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{t_0 R} \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \xi^2}$$

Al sustituir los términos adimensionales en la ec. (4.11) se obtiene,

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \tau} = \bar{K} + \kappa \int_{-\infty}^{\tau} \bar{G}(\tau - \bar{t}_1) \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \xi} \right] d\bar{t}_1 + \kappa \bar{\eta}_{sv} \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \xi} \right] \quad (4.13)$$

Se aplica la transformada de Laplace a la ec. (4.13) para obtener la expresión de la velocidad del fluido,  $\mathfrak{Z}(F(\tau)) = \int_0^{\infty} \exp(-s\tau) F(\tau) d\tau$ .

$$s\bar{V}_x^*(s, \xi, \zeta) - \bar{V}_x(0, \xi, \zeta) = \frac{\bar{K}}{s} + G(s)F(s, \xi, \zeta) + \kappa \bar{\eta}_{sv} F(s, \xi, \zeta) \quad (4.14)$$

Con el teorema de convolución:  $\mathfrak{Z}\left(\int_0^{\tau} F(t)G(\tau-t)dt\right) = G(s)F(s)$ ,

donde,  $G(s) = \mathfrak{Z}\left(\int_0^{\tau} \bar{G}(\tau - \bar{t}_1) d\bar{t}_1\right) = \bar{G}^*(s)$  y

$$F(s) = \mathfrak{Z}\left(\frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial^2 \bar{V}_x^*}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \bar{V}_x^*}{\partial \xi}$$

Al aplicar la condición inicial  $\bar{V}_x(0, \xi, \zeta) = 0$ , la ec. (4.14) se llega a,

$$s\left(\bar{V}_x^* - \frac{\bar{K}}{s^2}\right) = \kappa \bar{\eta}_{sv} \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_x^*}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \bar{V}_x^*}{\partial \xi}\right) \quad (4.15)$$

Donde la viscosidad de la solución polimérica es:  $\bar{\eta}_T = \bar{\eta}_{sv} + \frac{\bar{\eta}_p - \bar{\eta}_{sv}}{\theta_1 z(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_k}{s \bar{\theta}_k + 1}$ .

El tiempo de relajamiento adimensional, está definido como  $\bar{\theta}_k = \theta_k / t_0$ . La forma de la viscosidad del polímero se obtuvo suponiendo que el espectro de relajamiento del líquido es discreto y el tiempo de relajamiento son obtenidos de acuerdo a la ley de Rouse-Spriggs ( $\theta_k = \theta_1 / k^\alpha$ ,  $z(\alpha)$  es la función zeta de Riemann del parámetro  $\alpha$ ) [4].

Para evaluar la viscosidad de la solución polimérica se utiliza la relación empírica de Martin [4].

$$\frac{\eta_p}{\eta_{sv}} = 1 + \beta \exp(k_M \beta) \quad (4.16)$$

Donde  $k_M = 0.4$ ,  $\beta$  es la concentración reducida del polímero,  $\beta = c_p [\eta]$ ,  $c_p$  es la concentración usual y  $[\eta]$  es la viscosidad intrínseca.

El tiempo de relajamiento,  $\theta_1$ , a partir del cuál se obtendrán los demás tiempos de relajamiento del sistema, está definido como,

$$\bar{\theta}_1 = 0.608 \bar{\eta}_{sv} A \exp(k_M \beta) \quad (4.17)$$

Donde el parámetro adimensional  $A = [\eta] M^* p_{\theta} / R_G$  ( $M$  es la masa molecular del polímero,  $R_G$  es la constante universal de los gases) el cual es igual a 500, este valor corresponde al rango de variación de éste parámetro que usualmente se considera para soluciones de polímeros en disolventes orgánicos.

Se define una nueva variable  $U = \bar{V}_x^* - \frac{\bar{K}}{s^2}$  con el objetivo de simplificar la solución de la ec. (4.15), se sustituye en la ec. (4.15).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu^2 U = 0 \quad (4.18)$$

donde 
$$\mu^2 = -\frac{s}{\kappa\eta_T} \quad (4.19)$$

Se multiplica a la ec. (4.18) por el inverso de  $\mu^2$ .

$$\frac{\partial^2 U}{\partial(\mu\xi)^2} + \frac{1}{\mu\xi} \frac{\partial U}{\partial(\mu\xi)} + U = 0 \quad (4.20)$$

La ec. (4.20) es la ecuación de Bessel de primer tipo de orden cero, cuya solución está dada por:

$$U = C_1 J_0(\mu\xi) + C_2 Y_0(\mu\xi) \quad (4.21)$$

Se sustituye la definición de  $U$  en la ec. (4.21); ahora bien, cuando el radio adimensional tiende a 0,  $Y_0$  tiene una singularidad logarítmica en  $\xi = 0$ , es decir,  $Y_0(\xi)$  se comporta como  $(2/\pi)\ln x$ . Debido a que la solución de la ec. (4.21) debe ser finita en  $\xi = 0$  necesariamente  $C_2 = 0$ .

$$\bar{V}_x^* - \frac{\bar{K}}{s^2} = C_1 J_0(\mu\xi) \quad (4.22)$$

Ya que el tubo contiene una solución de baja concentración de polímero puede aplicarse la condición de frontera de adherencia, esto es, el flujo del líquido viscoelástico es cero en la pared del tubo, por tanto,

$$C_1 = -\frac{\bar{K}}{s^2 J_0(\mu)}$$

La ec. (4.22) tiene la siguiente forma: 
$$\bar{V}_x^* = \frac{\bar{K}}{s^2} \left( 1 - \frac{J_0(\mu\xi)}{J_0(\mu)} \right) \quad (4.23)$$

A partir de la ec. (4.23) se calcula el promedio de la velocidad del fluido,

$$\bar{V}^* = 2 \int_0^1 \bar{V}_x^* \xi d\xi.$$

$$\bar{V}^* = 2 \int_0^1 \frac{\bar{K}}{s^2} \left( 1 - \frac{J_0(\mu\xi)}{J_0(\mu)} \right) \xi d\xi = 2 \frac{\bar{K}}{s^2} \left( \int_0^1 \xi d\xi - \frac{1}{J_0(\mu)} \int_0^1 J_0(\mu\xi) \xi d\xi \right) = \frac{\bar{K}}{s^2} - \frac{2\bar{K}}{J_0(\mu)} \int_0^1 J_0(\mu\xi) \xi d\xi$$

Se desarrolla la integral con la siguiente relación de la función de Bessel:

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x).$$

Se hace un cambio de variable,  $x = \mu\xi$ ,  $dx = \mu d\xi$ ,

$$\int_0^1 \xi J_0(\mu\xi) d\xi = \frac{1}{\mu^2} \int_0^1 x J_0(x) dx = \frac{1}{\mu^2} x J_1(x) \Big|_0^1 = \frac{1}{\mu} \xi J_1(\mu\xi) \Big|_0^1 = \frac{1}{\mu} J_1(\mu)$$

Por lo que la velocidad promedio del fluido resulta en:

$$\bar{V}^* = \frac{\bar{K}}{s^2} \left( 1 - \frac{2}{\mu} \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)} \right) \quad (4.24)$$

La ec. (4.24) es la definición de la velocidad promedio del fluido en la dirección axial, y es la velocidad que se obtiene experimentalmente. Ahora se define al esfuerzo cortante en función de variables que se puedan medir experimentalmente, es decir, en función de la velocidad promedio. Para esto se evalúa el esfuerzo cortante en la pared. De la ec. (4.3) se tiene que:

$$\sigma_{rx} = \int_{-\infty}^t G(t-t_1) \frac{\partial V_x}{\partial r} dt_1 + \eta_{sv} \frac{\partial V_x}{\partial r}$$

Se adimensionaliza la ec. (4.3) con las variables adimensionales propuestas y

$$\bar{\sigma}_{rx} = \frac{\sigma_{rx}}{p_{f0}}.$$

$$\bar{\sigma}_{rx} = \int_{-\infty}^{\tau} \bar{G}(\tau - \bar{t}_1) \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{\xi}} d\bar{t}_1 + \bar{\eta}_{sv} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{\xi}} \quad (4.25)$$

Al aplicar la transformada de Laplace a la ec. (4.25) resulta,

$$\bar{\sigma}_{rx}^* = \bar{\eta}_T \frac{\partial \bar{V}_x^*}{\partial \xi} \quad (4.26)$$

Se evalúa la ec. (4.26) en  $\xi = 1$ .

$$\bar{\sigma}_w^* = \bar{\eta}_T \frac{\partial \bar{V}_x^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \quad (4.27)$$

Después, se deriva la ec. (4.23) respecto al radio adimensional.

$$\frac{\partial \bar{V}_x^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\bar{K}}{s^2} \left( 1 - \frac{J_0(\mu \xi)}{J_0(\mu)} \right) \Big|_{\xi=1} \quad (4.28)$$

La derivada de una función de Bessel de primer tipo es  $\frac{dJ_n(x)}{dx} = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x)$

. La ecuación resultante de (4.28) es:

$$\frac{\partial \bar{V}_x^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = \frac{\mu \bar{K}}{s^2 J_0(\mu)} J_1(\mu \xi) \Big|_{\xi=1} = \mu \frac{\bar{K}}{s^2} \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)} \quad (4.29)$$

Se sustituye la ec. (4.29) en (4.27), teniendo en consideración el hecho de que

$$\bar{\sigma}_{rx}^* \Big|_{\xi=1} = \bar{\sigma}_w^* .$$

$$\bar{\sigma}_w^* = \mu \bar{\eta}_T \frac{\bar{K}}{s^2} \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)} \quad (4.30)$$

Se despeja  $K/s^2$  de la ec. (4.24) y se sustituye en la ec. (4.30), para obtener finalmente que,

$$\bar{\sigma}_w^* = -4 \bar{\eta}_T D \bar{V}^* \quad (4.31)$$

Donde  $D = -\frac{1}{4} \frac{\mu T(\mu)}{1 - 2\mu^{-1}T(\mu)}$  y  $T(\mu) = \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)}$ . El término  $\mu$  está definido en la

ec. (4.19). La ec. (4.19) es la ecuación (3) del artículo de Levitsky, *et al.* Ref. [4].

La ec. (4.31) es la ecuación constitutiva que relaciona al esfuerzo cortante evaluado en la pared del tubo en función de la velocidad promedio de la solución diluida de polímero. La ec. (4.29) es el modelo Oldroyd en el espacio de Laplace para un tubo elástico con solución polimérica.

Para el caso de un flujo de corte y en estado estacionario, la ec. (4.15) se reduce a,

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \bar{V}_x^*}{\partial \xi} \right) = - \frac{\bar{K}}{s\kappa\bar{\eta}_{sv}} \quad (4.32)$$

Se integra la ec. (4.32) y se evalúa la condición de frontera de adherencia en la pared del tubo y la condición de que en el centro del tubo la velocidad es máxima, y su derivada respecto a la posición es cero, así se tiene que,

$$\bar{V}_x^* = \frac{\bar{K}}{4s\kappa\bar{\eta}_{sv}} (1 - \xi^2) \quad (4.33)$$

Se calcula el promedio de la velocidad del fluido.

$$\bar{V}^* = 2 \int_0^1 \bar{V}_x^* \xi d\xi = \frac{\bar{K}}{8s\kappa\bar{\eta}_{sv}} \quad (4.34)$$

Para las condiciones antes establecidas se tiene el esfuerzo cortante es de la forma,

$$\bar{\sigma}_{rx}^* = \bar{\eta}_{sv} \frac{\partial \bar{V}_x^*}{\partial \xi} \quad (4.35)$$

La derivada de la velocidad respecto a la posición evaluada en  $\xi = 1$ , se obtiene a partir de la ec. (4.35).

$$\left. \frac{\partial \bar{V}_x^*}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = -\frac{\bar{K}}{2s\kappa\bar{\eta}_{sv}} \quad (4.36)$$

Sustituyendo la ec. (4.36) y (4.34) en la ec. (4.35) se tiene que,

$$\bar{\sigma}_w^* = -4\bar{\eta}_{sv}\bar{V}^* \quad (4.37)$$

Donde la ec. (4.37) es la relación de Poiseuille para la fuerza de fricción en la pared del tubo y la velocidad promedio del fluido newtoniano en flujo laminar y en estado estacionario en el espacio de Laplace. Entonces, de la ec. (4.31) para frecuencia pequeñas,  $\Omega \rightarrow 0$ , se tiene que  $\eta_T \rightarrow \eta_{sv}$ ,  $D \rightarrow 1$ .

A partir de la ecuación de movimiento, y de la ecuación de continuidad linealizada, se tiene que:

$$\rho_{f0} \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P_f}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rx}) \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{f0} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.39)$$

De acuerdo con las siguientes definiciones:

$$V = \frac{2}{R^2} \int_0^R V_x r dr, \quad P = \frac{2}{R^2} \int_0^R P_f r dr, \quad \rho = \frac{2}{R^2} \int_0^R \rho r dr \quad (4.40)$$

Se reescribe la ec. (4.38) en variables promedio.

$$\frac{2}{R^2} \int_0^R \left[ \rho_{f0} \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P_f}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rx}) \right] r dr \quad (4.41)$$

Debido a la propiedad lineal de una integral, se tiene que la integral de una suma es igual a la suma de las integrales. Haciendo uso de este hecho se obtiene que,

$$\rho_{f0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{2}{R^2} \int_0^R V_x r dr \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2}{R^2} \int_0^R P_f r dr \right) + \frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rx}) r dr \quad (4.42)$$

La ec. (4.48) es la ecuación de estado, donde  $c_s$  es la velocidad del sonido en el medio. La ec. (4.49) es la aproximación de Kirchoff-Love que se obtiene a partir de la ecuación de continuidad para una coraza delgada elástica cilíndrica, donde  $u_r$  es el desplazamiento de la superficie de la coraza en la dirección transversal al flujo,  $h$  es la mitad del ancho de la coraza y  $E$  es el modulo de Young del material del tubo, las deformaciones longitudinales y la inercia en la pared del tubo se consideran despreciables.

A partir del sistema de ecuaciones (4.45)-(4.49) puede obtenerse la ecuación de dispersión, y observar los efectos de la viscoelasticidad en la propagación de la onda acústica y la atenuación de ésta.

Se sustituye la ec. (4.48) en la ec. (4.46).

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2\rho_{f0}(V_r)_{r=R}}{R} + \rho_{f0} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (4.50)$$

Al saber que  $(V_r)_{r=R} = \dot{u}_r$  se puede sustituir la ec. (4.49) en la ec. (4.50).

$$\left( \frac{1}{c_f^2} + \frac{R\rho_{f0}}{Eh} \right) \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_{f0} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (4.51)$$

Se sigue con la adimensionalización de las ecs. (4.45) y (4.51), con las variables adimensionales previamente descritas y con las nuevas variables

adimensionales:  $\bar{c}_s = \frac{c_s t_0}{R}$ ,  $\bar{c}_E = \varepsilon \kappa \bar{E}$ ,  $\varepsilon = \frac{h}{R}$ ,  $\bar{E} = \frac{E}{\rho_{f0}}$ ,  $\bar{P} = \frac{P}{\rho_{f0}}$ . Entonces la

ec. (4.45) y (4.51) en forma adimensional son expresadas como:

$$\left( \frac{1}{\bar{c}_s^2} + \frac{1}{\bar{c}_E} \right) \frac{\partial \bar{P}}{\partial \tau} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \zeta} = 0 \quad (4.52)$$

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \tau} = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \zeta} + 2\bar{\sigma}_w \quad (4.53)$$

Se aplica la transformada de Laplace a las ecuaciones (4.52) y (4.53), puesto que con la ayuda de la transformada se quita la dependencia explícita de la velocidad del fluido con el tiempo, es decir, en lugar de resolver las ecuaciones en derivadas parciales, en el espacio de Laplace, se resuelven estas ecuaciones en derivadas ordinarias.  $\mathfrak{L}(\bar{P}(\tau, \zeta)) = \bar{P}^*(s, \zeta)$ .

$$\left( \frac{1}{c_s^2} + \frac{1}{c_E^2} \right) (s\bar{P}^*(s, \zeta) - \bar{P}(0, \zeta)) = -\frac{1}{\kappa} \frac{d\bar{V}^*}{d\zeta} \quad (4.54)$$

Con la siguiente condición inicial para la presión adimensional, cuando  $\tau = 0$ ,  $P = 0$ , para toda posición en el eje axial, la ec. (4.54) queda definida como:

$$\left( \frac{1}{c_s^2} + \frac{1}{c_E^2} \right) s\bar{P}^*(s, \zeta) = -\frac{1}{\kappa} \frac{d\bar{V}^*}{d\zeta} \quad (4.55)$$

Mientras que la ec. (4.53) en el espacio de Laplace, y tomando en consideración que al inicio la velocidad del fluido es cero, es:

$$\frac{s}{\kappa} \bar{V}^*(s, \zeta, \xi) = -\frac{d\bar{P}^*}{d\zeta} + 2\bar{\sigma}_w \quad (4.56)$$

Se sustituye la ec. (4.47) en la ec. (4.56).

$$\frac{s}{\kappa} \bar{V}^* = -\frac{d\bar{P}^*}{d\zeta} - 8\bar{\eta}_T D\bar{V}^* \quad (4.57)$$

Se deriva la ec. (4.57) respecto a la posición  $\zeta$ .

$$(s + 8\bar{\eta}_T \kappa D) \frac{1}{\kappa} \frac{d\bar{V}^*}{d\zeta} = -\frac{d^2 \bar{P}^*}{d\zeta^2} \quad (4.58)$$

Se sustituye la ec. (4.58) en la ec. (4.55).

$$\left( \frac{1}{c_s^2} + \frac{1}{c_E^2} \right) s\bar{P}^*(s, \zeta) = -\frac{1}{\kappa} \frac{d\bar{V}^*}{d\zeta} = \left( \frac{1}{s + 8\bar{\eta}_T \kappa D} \right) \frac{d^2 \bar{P}^*}{d\zeta^2}$$

Por el teorema fundamental del cálculo, el segundo término del lado derecho de la ec. (4.40) es igual a:  $\frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rx}) r dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R d(r\sigma_{rx}) = \frac{2}{R^2} (r\sigma_{rx})_0^R = \frac{2}{R} \sigma_w$ ,

$$\rho_{f0} \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2\sigma_w}{R} \quad (4.43)$$

Se realiza el mismo procedimiento que se hizo con la ec. (4.38) a la ecuación de conservación de masa, ec. (4.39).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{2}{R^2} \int_0^R \rho_f r dr \right) + \rho_{f0} \left( \frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) r dr \right) + \rho_{f0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2}{R^2} \int_0^R V_x r dr \right) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{2\rho_{f0}(V_r)_{r=R}}{R} + \rho_{f0} \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Las ec. (4.43) y la ec. (4.44) son las ecuaciones correspondientes a la ecuación (4) de Levitsky, *et. al*, Ref. [4].

Para completar el sistema de ecuaciones, se necesita la ecuación de estado y la ecuación que describa el comportamiento de la pared elástica de la coraza, a saber

$$\rho_{f0} \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2\sigma_w}{R} \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{2\rho_{f0}(V_r)_{r=R}}{R} + \rho_{f0} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (4.46)$$

$$\bar{\tau}_w^* = -4\bar{\eta}_T D\bar{V}^* \quad (4.47)$$

$$P - P_{f0} = c_s^2 (\rho - \rho_{f0}) \quad (4.48)$$

$$u_r = \frac{R^2}{2Eh} P \quad (4.49)$$

$$\frac{d^2 \bar{P}^*}{d\zeta^2} - \lambda^2 \bar{P}^* = 0 \quad (4.59)$$

donde

$$\lambda^2 = s(s + 8\bar{\eta}_T \kappa D) \left( \frac{1}{c_f^2} + \frac{1}{c_s^2} \right) \quad (4.60)$$

La solución de la ec. (4.59) es de la forma:

$$\bar{P}^*(\tau, \zeta) = C_1 \exp(\lambda_1 \zeta) + C_2 \exp(\lambda_2 \zeta) \quad (4.61)$$

donde  $\lambda_1 = \left[ s(s + 8\bar{\eta}_T \kappa D) \left( \frac{1}{c_s^2} + \frac{1}{c_E^2} \right) \right]^{1/2}$  y  $\lambda_2 = - \left[ s(s + 8\bar{\eta}_T \kappa D) \left( \frac{1}{c_s^2} + \frac{1}{c_E^2} \right) \right]^{1/2}$ .

De acuerdo a la física del sistema, si  $x$  tiende al infinito,  $\zeta \rightarrow \infty$ , la presión no tiende al infinito,  $\bar{P}^* \neq \infty$ , entonces  $C_1 = 0$ . Entonces, la ec. (4.60) resulta en:

$$\bar{P}^*(\tau, \zeta) = C_2 \exp(-\lambda \zeta) \quad (4.62)$$

Se evalúa la condición a la frontera, en la posición  $\zeta = 0$ ,  $P = P_0$ , para cualquier tiempo. Se aplica la transformada de Laplace a la condición y se evalúa en la ec. (4.62), se tiene que:

$$\bar{P}^*(\tau, \zeta) = \left( \frac{P_0}{s} \right) \exp(-\lambda \zeta) \quad (4.63)$$

La ec. (4.63) es la ecuación (5) que presenta Levitsky, *et al.*, en su artículo [4].

La ec. (4.63) tiene la forma de una onda ( $\lambda \rightarrow ik$ ,  $k$  es el numero de onda adimensional) con amplitud igual a  $P_0/s$  para la perturbación en la presión del fluido. Además, da información sobre la variación de la presión en una solución polimérica diluida confinada a un tubo elástico con deformación transversal en la coraza.

La ec. (4.63) describe en el espacio de Laplace la propagación de un pulso de la presión, generado en el momento inicial del tiempo y en la sección transversal

$\zeta = 0$ . Debido a la complicada relación entre la amplitud y el parámetro del espacio de Laplace,  $s$ , no es posible obtener una relación analíticamente exacta al aplicar la transformada inversa de Laplace. Sin embargo, las características más importantes del proceso pueden ser deducidas a partir de la ecuación de dispersión para la onda acústica, con un cambio de variable para la ec. (4.59),  $s \rightarrow i\Omega$ ,  $\lambda \rightarrow ik$ .

$$\frac{\Omega}{k} = \bar{c}_K \left[ 1 + 8(i\Omega)^{-1} \bar{\eta}_T \kappa D \right]^{-1/2} \quad (4.64)$$

Donde  $\bar{c}_K = \bar{c}_s \bar{c}_E \left( \bar{c}_s^2 + \bar{c}_E^2 \right)^{-1/2}$ . Para un líquido invíscido ( $\eta = 0$ ) la ec. (4.64) da la velocidad de Korteweg-Joukowski,  $c_K$ , que es la propagación de un pulso de presión en un tubo elástico. La ec. (4.64) es la ecuación (6) del artículo de Levitsky, *et al.* Ref. [4].

De la ec. (4.64) se observa que si la frecuencia tiende a cero,  $\Omega \rightarrow 0$ , la velocidad de propagación de la onda acústica tiende a cero,  $V_p = \Omega/\text{Re}(k) \rightarrow 0$ . En la región de bajas frecuencias la dispersión se produce en  $\Omega \sim \Omega_1 = 8\kappa\eta_T D$  y es conectada con la transición del régimen de flujo por arrastre al régimen de flujo inercial en la onda acústica. La viscoelasticidad de la solución polimérica se manifiesta en esta región de frecuencia, sí el tiempo de relajamiento principal del líquido es cercano a  $\Omega^{-1}$ .

Para un sistema donde no ocurre desplazamiento alguno en la coraza, es decir la condición de frontera para la velocidad en la dirección  $r$  evaluada en la pared del tubo es cero. La ecuación de dispersión queda de la siguiente forma,

$$\frac{\Omega}{k} = \bar{c}_s \left[ 1 + 8(i\Omega)^{-1} \bar{\eta}_T \kappa D \right]^{-1/2} \quad (4.65)$$

Donde  $k$  es el número de onda adimensional y  $\Omega$  es la frecuencia adimensional,  $\Omega = \omega t_0$ . Ahora, se coloca la ec. (4.64) de la forma  $k = \text{Re}(k) + \text{Im}(k)$ , para obtener la propagación de la onda acústica en el medio y la atenuación de la onda acústica,

para esto se necesita obtener una expresión que contenga explícitamente parte real y parte imaginaria para  $\eta_T$  y para  $D$ .

$$\bar{\eta}_T = \bar{\eta}_{sv} + \frac{\bar{\eta}_p - \bar{\eta}_{sv}}{\bar{\theta}_1 z(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_k}{i\Omega\bar{\theta}_k + 1} \quad (4.66)$$

Se multiplica por el conjugado del denominador a la ec. (4.66) y se agrupan términos semejantes.

$$\bar{\eta}_T = \bar{\eta}_{sv} + \frac{\bar{\eta}_p - \bar{\eta}_{sv}}{\bar{\theta}_1 z(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_k}{i\Omega\bar{\theta}_k + 1} \frac{-i\Omega\bar{\theta}_k + 1}{-i\Omega\bar{\theta}_k + 1} = A - iB \quad (4.67)$$

Donde  $A = \bar{\eta}_{sv} + \frac{\bar{\eta}_p - \bar{\eta}_{sv}}{\bar{\theta}_1 z(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_k}{1 + \Omega^2 \bar{\theta}_k^2}$  y  $B = \frac{\bar{\eta}_p - \bar{\eta}_{sv}}{\bar{\theta}_1 z(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega \bar{\theta}_k^2}{1 + \Omega^2 \bar{\theta}_k^2}$ .

Para el valor propio se tiene que,  $\mu^2 = -s/\eta_T$

$$\mu^2 = -\frac{i\Omega}{A - iB} \cdot \frac{A + iB}{A + iB} = \frac{\Omega}{A^2 + B^2} (B - iA) = J - iI \quad (4.68)$$

Donde  $J = \frac{\Omega B}{A^2 + B^2}$  e  $I = \frac{\Omega A}{A^2 + B^2}$ .

$$\mu = C - iE \quad (4.69)$$

Donde  $C = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{J^2 + I^2} + J)^{1/2}$  y  $E = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{J^2 + I^2} - J)^{1/2}$ .

Para el término  $D = -\frac{1}{4} \frac{\mu T(\mu)}{1 - 2\mu^{-1}T(\mu)}$  donde  $T(\mu) = \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)}$ , debido a que el

argumento de la función de Bessel de orden cero y uno es un número complejo, se debe de obtener una expresión que contemple la parte real separada de la parte imaginaria, a partir de la definición de las funciones de Bessel se obtiene la parte real separada de la parte imaginaria.

$$J_0(\mu) = J_0(C - iE) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left( \frac{C - iE}{2} \right)^{2n} \quad (4.70)$$

$$J_1(\mu) = J_1(C - iE) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} (n+1)! n!} (C - iE)^{2n+1} \quad (4.71)$$

Desarrollando los términos de la ec. (4.70) y de la ec. (4.71) hasta  $n = 2$  y agrupando los términos semejantes, resulta la siguiente forma,

$$J_0(\mu) = L + iM \quad (4.72)$$

$$J_1(\mu) = F + iG \quad (4.73)$$

Luego se divide  $J_1$  entre  $J_0$  y se multiplica por el conjugado del denominador, esto es,

$$T = \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)} = \frac{F + iG}{L + iM} \cdot \frac{L - iM}{L - iM} = \frac{FL + GM}{L^2 + M^2} + i \frac{GL - FM}{L^2 + M^2} = N + iO \quad (4.74)$$

Donde  $N = \frac{FL + GM}{L^2 + M^2}$  y  $O = \frac{GL - FM}{L^2 + M^2}$ .

Se sustituye la ec. (4.68), (4.69) y (4.74) en la definición de  $D$ .

$$D = -\frac{1}{4} \frac{\mu^2 T(\mu)}{\mu - 2T(\mu)} = -\frac{1}{4} \frac{(J - iI)(N + iO)}{(C - iE) - 2(N + iO)} = -\frac{1}{4} \frac{R + iS}{P - iQ} \quad (4.75)$$

Donde  $R = JN + IO$ ,  $S = JO - IN$ ,  $P = C - 2N$ ,  $Q = E + 2O$  y  $R$  es el radio del tubo.

$$D = -\frac{1}{4} \frac{R + iS}{P - iQ} \cdot \frac{P + iQ}{P + iQ} = -(U + iV) \quad (4.76)$$

Donde  $U = \frac{1}{4} \frac{RP - SQ}{P^2 + Q^2}$  y  $V = \frac{1}{4} \frac{SP + RQ}{P^2 + Q^2}$ .

Una vez que se han obtenido expresiones para  $\eta_T$ , ec. (4.67), y para  $D$ , ec. (4.76), en las cuales la parte real e imaginaria están separadas, se sustituyen la ec. (4.67) y ec. (4.76) en la ec. (4.65).

$$k^2 = \frac{\Omega^2}{\bar{c}_K^2} \left[ 1 + \frac{i8\kappa(A-iB)(U+iV)}{\Omega} \right] = \frac{\Omega^2}{\bar{c}_K^2} (W+iZ) \quad (4.77)$$

Donde  $W = 1 - \frac{8\kappa(AV - BU)}{\Omega}$  y  $Z = \frac{8\kappa(AU + BV)}{\Omega}$ . Finalmente, se tiene en la ec. (4.77) explícitamente la parte real separada de la parte imaginaria, por lo que a partir de la ec. (4.77) se puede obtener la propagación y atenuación de una onda acústica que viaja en un medio viscoelástico.

$$k = \frac{\Omega}{\sqrt{2}\bar{c}_K} \left[ \left( \sqrt{W^2 + Z^2} + W \right)^{1/2} + i \left( \sqrt{W^2 + Z^2} - W \right)^{1/2} \right] \quad (4.78)$$

Lo que resulta en,

$$\text{Re}(k) = \frac{\Omega}{\sqrt{2}\bar{c}_K} \left( \sqrt{W^2 + Z^2} + W \right)^{1/2} \quad (4.79)$$

$$\text{Im}(k) = \frac{\Omega}{\sqrt{2}\bar{c}_K} \left( \sqrt{W^2 + Z^2} - W \right)^{1/2} \quad (4.80)$$

A partir de la parte real del número de onda obtenemos la velocidad de propagación de la onda acústica en el medio, y de la parte imaginaria del número de onda obtenemos la atenuación de la onda acústica en el medio viscoelástico. A saber,

$$V_p = \frac{\sqrt{2}\bar{c}_K}{\left( \sqrt{W^2 + Z^2} + W \right)^{1/2}} \quad (4.81)$$

$$\phi = \frac{\Omega}{\sqrt{2}\bar{c}_K} \left( \sqrt{W^2 + Z^2} - W \right)^{1/2} \quad (4.82)$$

## 4.2 CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS

Los valores numéricos de las propiedades físicas que caracterizan al sistema son:  $R = 0.01 \text{ m}$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $E = 7 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ ,  $\rho_s = 2.7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  (aluminio),  $p_{f0} = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $\rho_{f0} = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $c_s = 1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\eta_{sv} = 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  [4].

De la ec. (4.81) y ec. (4.82) se obtienen las gráficas para la velocidad de propagación de la onda acústica y para la atenuación de la onda en el medio, respectivamente.

$$Vp = \frac{\sqrt{2c_K}}{\left(\sqrt{W^2 + Z^2} + W\right)^{1/2}} \quad (4.83)$$

$$\phi = \frac{\Omega}{\sqrt{2c_K}} \left(\sqrt{W^2 + Z^2} - W\right)^{1/2} \quad (4.84)$$

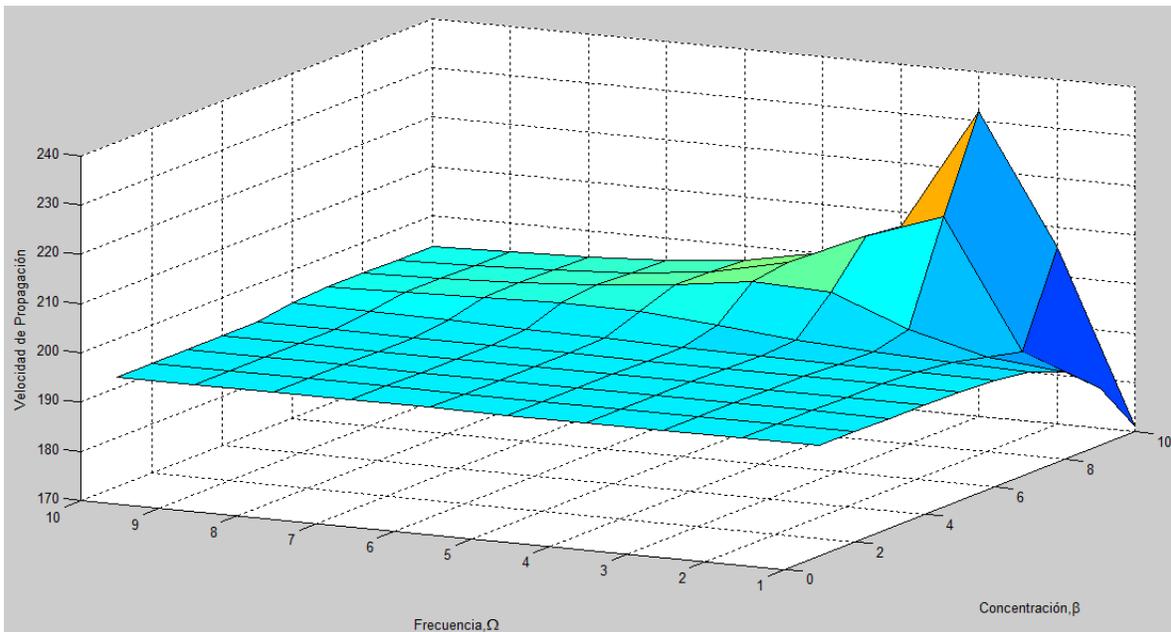


Fig. 4.1. Variación de la velocidad de propagación como función de la frecuencia  $\Omega$  y la concentración reducida del polímero  $\beta$ . Ec. (4.83).

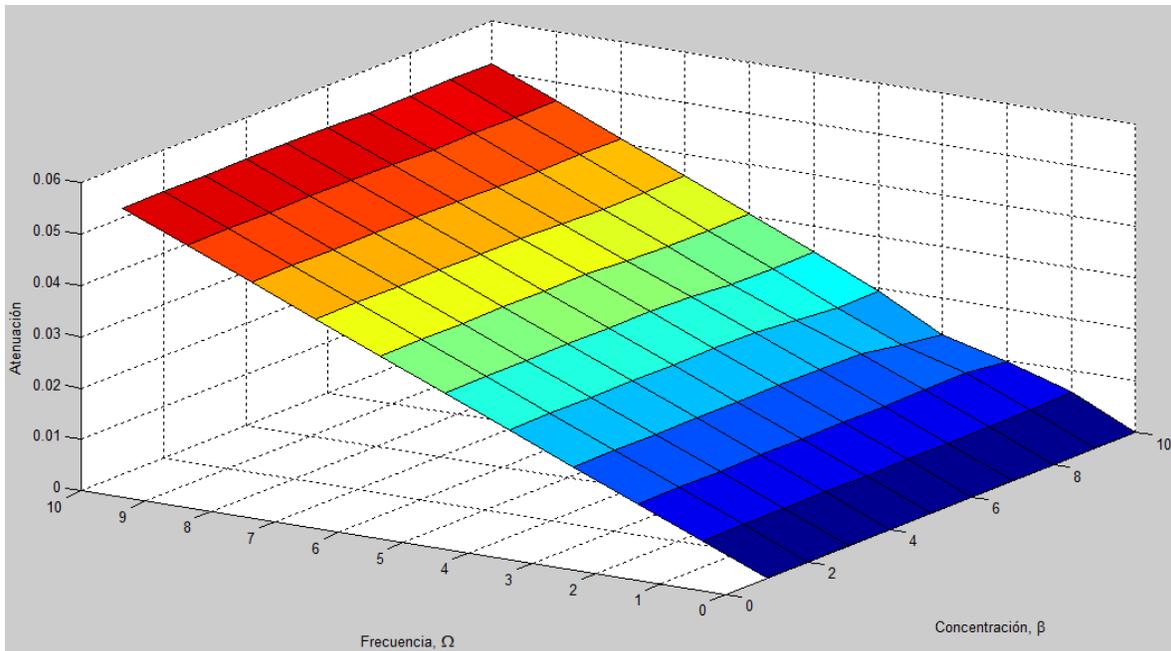


Fig. 4.2. Variación de la atenuación como función de la frecuencia  $\Omega$  y la concentración reducida del polímero  $\beta$ . Ec. (4.84).

La Fig. 4.1 y la Fig. 4.2, muestran la variación de la velocidad de propagación y la atenuación, respectivamente, en una solución polimérica confinada en un tubo de coraza elástica de aluminio, analizada a través del modelo de Oldroyd.

Para soluciones poliméricas de baja concentración la velocidad de propagación crece al aumentar la frecuencia y tiende a la velocidad de Korteweg-Joukowski  $c_K = 192.3$  (el valor dimensional correspondiente es  $1170 \text{ ms}^{-1}$ ). En valores suficientemente altos de la concentración reducida del polímero  $\beta$ , la velocidad de propagación cambia su signo como un resultado del máximo, apareciendo en la vecindad de  $\Omega \sim \bar{\theta}_1^{-1}$ . Este máximo es enteramente atribuido a la manifestación de los efectos viscoelásticos y está acompañado por un decremento en la atenuación causado por la reducción de la viscosidad dinámica del polímero con la frecuencia. En las regiones fuera de la región de transición, es decir para  $\Omega > \Omega_1$  y  $\Omega < \Omega_1$  la atenuación de la onda acústica crece con la frecuencia, y para la velocidad de propagación de la onda acústica en la región para  $\Omega < \Omega_1$  crece con la frecuencia, y en la región cuando  $\Omega > \Omega_1$  su variación con la frecuencia es despreciable.

Ahora bien, para un cilindro de coraza rígida,  $c_K = c_s$ , la propagación y atenuación de la onda acústica en una solución polimérica diluida se comporta de la siguiente manera:

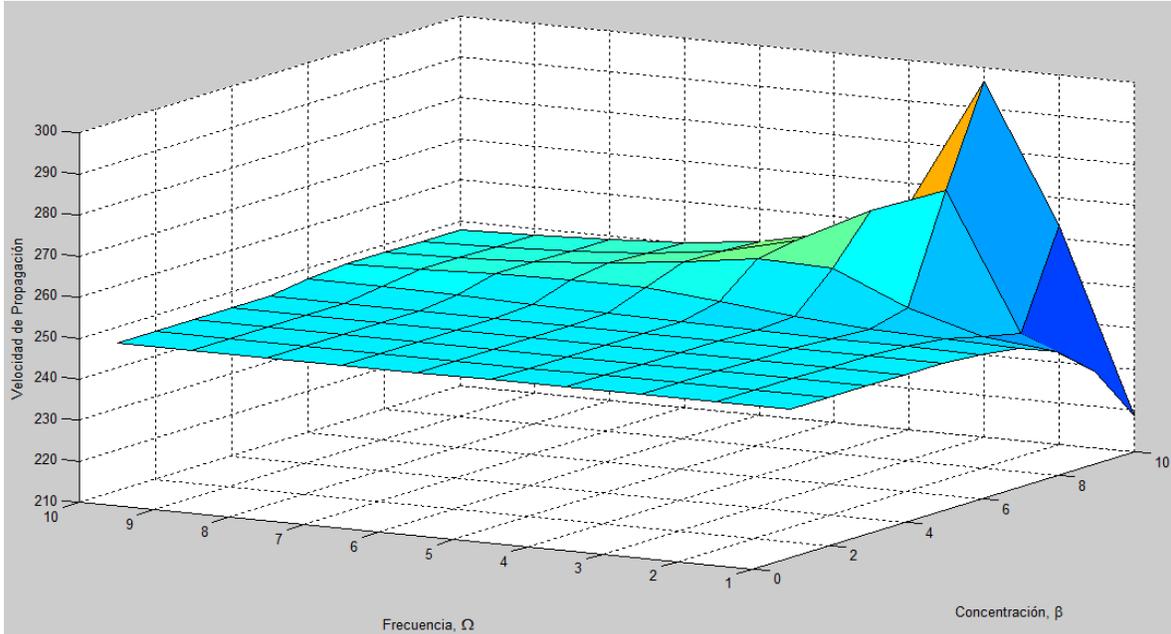


Fig. 4.3. Variación de la velocidad de propagación como función de la frecuencia  $\Omega$  y la concentración reducida del polímero  $\beta$ ,  $c_K = c_f$ .

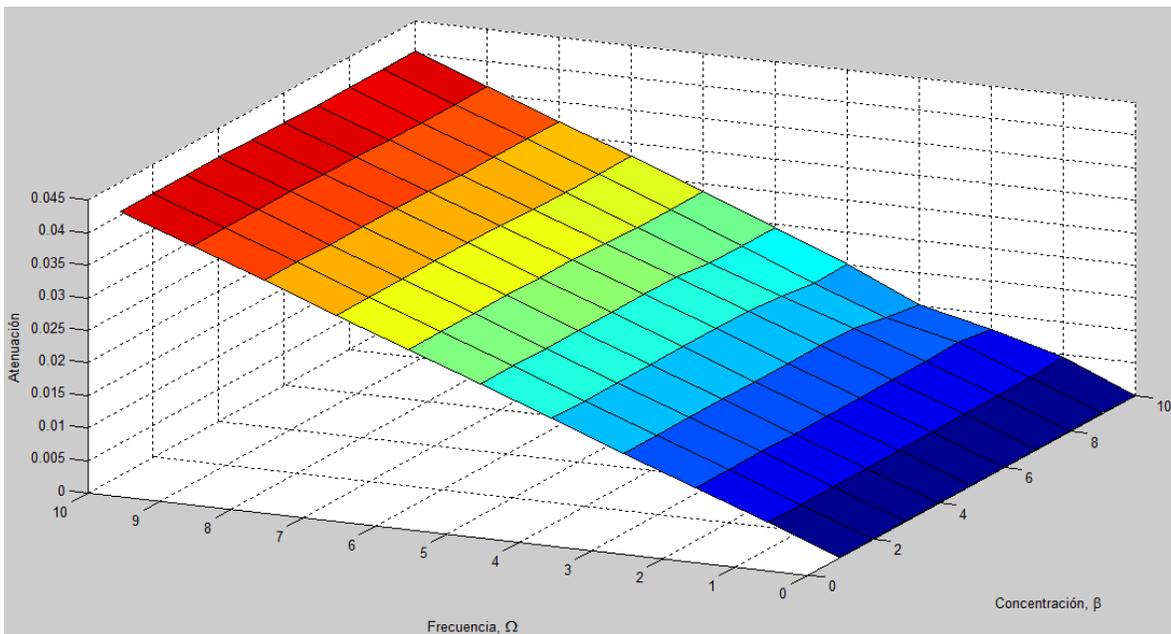


Fig. 4.4. Variación de la atenuación como función de la frecuencia  $\Omega$  y la concentración reducida del polímero  $\beta$ ,  $c_K = c_f$ .

Por tanto, se observa que la velocidad de propagación tiene el mismo comportamiento en un tubo con paredes rígidas que con paredes flexibles, el cambio consiste en que la velocidad de propagación tiende a la velocidad del sonido en el medio,  $c_s$ , y el valor del máximo es mayor en el tubo con paredes rígidas. Además se tiene que la atenuación presenta el mismo comportamiento tanto en paredes rígidas como en paredes flexibles sólo varía una de la otra en los valores de ésta.

## CAPITULO 5. PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS EN UN MEDIO VISCOELÁSTICO CONFINADO A UN TUBO

Se estudiarán las ondas acústicas que viajan en un medio viscoelástico confinado en un tubo elástico. Se comienza el análisis con el modelo de Jeffreys, y a partir de la solución con este modelo se obtendrán las soluciones para el modelo de Oldroyd, de Maxwell y el newtoniano. Se analizará la ecuación de dispersión obtenida a partir de la solución para la velocidad el fluido y de la solución para la presión del fluido para los cuatro modelos.

### 5.1 FLUJO DE CORTE

Para la ecuación constitutiva se utiliza el modelo de Jeffreys en forma diferencial. El cual está dado por la siguiente ecuación:

$$\sigma_{rx} + \lambda_1 \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial t} = \eta \left( \dot{\gamma} + \lambda_2 \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} \right) \quad (5.1)$$

Para la geometría del problema se utilizan coordenadas cilíndricas, y se considera que el radio interno del tubo  $R$  es muy pequeño frente a la longitud del tubo  $L$ , es decir ( $R \ll L$ ). La ecuación de movimiento para un flujo no estacionario, compresible, simétrico respecto al eje  $x$  y considerando que las fuerzas externas no afectan al sistema, tiene la forma:

$$\rho_f \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rx}) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \quad (5.2)$$

Donde  $v = [v_x, v_r]$  es el vector de velocidades,  $v_x = v_x(t, x, r)$  es la velocidad del fluido viscoelástico en dirección axial,  $v_r = v_r(t, x, r)$  es la velocidad del fluido en dirección radial,  $\rho_f = \rho_f(t, x)$  y  $p_f = p_f(t, x)$  son la densidad y la presión del fluido viscoelástico.

Se linealiza la ec. (5.2) con las variables definidas en ecs. (4.5)-(4.8), lo que resulta en:

$$\rho_{f0} \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P_f}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rx}) \quad (5.3)$$

El término del esfuerzo normal es despreciable frente al término del esfuerzo cortante, debido a que  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{v_0}{L^2}$  y  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} \sim \frac{v_0}{\alpha^2 L^2}$ , donde  $\alpha = R/L$ .

Se aplica la transformada de Laplace a la ec. (5.1) y a la ec. (5.3) en variables de perturbación y al sustituir las condiciones iniciales mencionadas en los capítulos previos, se llega a:

$$\sigma_{rx}^* = \eta \frac{1 + s\lambda_2}{1 + s\lambda_1} \frac{\partial V_x^*}{\partial r} \quad (5.4)$$

$$s\rho_{f0} V_x^* = -\frac{1}{s} \frac{\partial P_f}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rx}^*) \quad (5.5)$$

Se sustituye la ec. (5.4) en la ec. (5.5).

$$\frac{\partial^2 V_x^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x^*}{\partial r} - \frac{s}{\eta_T} \left( V_x^* + \frac{K}{s^2} \right) = 0 \quad (5.6)$$

Donde la viscosidad del medio y la presión del fluido son:  $\eta_T = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{1 + s\lambda_2}{1 + s\lambda_1}$  y

$K = \frac{1}{\rho_{f0}} \frac{\partial P_f}{\partial x}$ , respectivamente.

Se define a  $U = V_x^* + \frac{K}{s^2}$  y  $\mu^2 = -\frac{s}{\eta_T}$  (5.7)

Al sustituir  $U$  en la ec. (5.6) se obtiene,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial (\mu r)^2} + \frac{1}{\mu r} \frac{\partial U}{\partial (\mu r)} + U = 0 \quad (5.8)$$

La ec. (5.8) es la ecuación de Bessel de primer tipo de orden cero, cuya solución es:

$$U = C_1 J_0(\mu r) + C_2 Y_0(\mu r) \quad (5.9)$$

La ec. (5.9) es la solución general de  $U$ , ahora bien, cuando el radio tiende a 0,  $Y_0(r)$  se comporta como  $(2/\pi)\ln r$ . Debido a que la solución de la ec. (5.8) debe ser finita en  $r = 0$  necesariamente  $C_2 = 0$ . Y al aplicarse la condición de frontera en la pared del tubo,  $V_x^* = 0$  en  $r = R$ , se obtiene la siguiente ecuación,

$$V_x^* = \frac{K}{s^2} \left( \frac{J_0(\mu r)}{J_0(\mu R)} - 1 \right) \quad (5.10)$$

La ec. (5.10) es el perfil de velocidades del fluido viscoelástico en dirección axial en el espacio de Laplace. Del valor propio, definido en la ec. (5.7) se obtiene la ecuación de dispersión al sustituir  $\mu \rightarrow ik$ ,  $s \rightarrow iw$ .

$$k^2 = -\frac{w}{N + iM} \quad (5.11)$$

Donde

$$N = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{w(\lambda_1 - \lambda_2)}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (5.12)$$

$$M = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{1 + w^2 \lambda_1 \lambda_2}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (5.13)$$

Se coloca la ec. (5.11) de la forma  $k = k_1 + ik_2$ , donde a partir de  $k_1$  se obtiene información sobre la propagación de la onda, mientras que para analizar la atenuación de la onda acústica se utiliza  $k_2$ .

$$k = \left( \frac{w}{2(N^2 + M^2)} \right)^{1/2} \left[ \left( \sqrt{N^2 + M^2} - N \right)^{1/2} + i \left( \sqrt{N^2 + M^2} + N \right)^{1/2} \right] \quad (5.14)$$

En la ec. (5.14) está explícitamente la parte real e imaginaria del número de onda. A saber,

$$k_1 = \left[ \frac{w(\sqrt{N^2 + M^2} - N)}{2(N^2 + M^2)} \right]^{1/2} \quad (5.15)$$

$$k_2 = \left[ \frac{w(\sqrt{N^2 + M^2} + N)}{2(N^2 + M^2)} \right]^{1/2} \quad (5.16)$$

A partir de la ec. (5.16) se obtiene la propagación de la onda en un fluido viscoelástico. Debido a que  $k_1 = w/V_p$ , donde  $V_p$  es la velocidad de propagación de la onda de corte. La propagación de la onda acústica está dada por la expresión:

$$V_p = \frac{w}{k_1} = w \left[ \frac{2(N^2 + M^2)}{w(\sqrt{N^2 + M^2} - N)} \right]^{1/2} \quad (5.17)$$

Mientras que la atenuación de la onda de corte en el medio es,

$$\phi = \left[ \frac{w(\sqrt{N^2 + M^2} + N)}{2(N^2 + M^2)} \right]^{1/2} \quad (5.18)$$

Se calcula el promedio de la velocidad del fluido de la ec. (5.10),

$$V^* = \frac{2}{R^2} \int_0^R V_x^* r dr .$$

$$V^* = \frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{K}{s^2} \left( \frac{J_0(\mu r)}{J_0(\mu R)} - 1 \right) r dr = \frac{2}{R^2} \frac{\bar{K}}{s^2} \left( \int_0^R \frac{J_0(\mu r)}{J_0(\mu R)} r dr - \int_0^R r dr \right) = \frac{2}{R^2} \frac{\bar{K}}{s^2} \left( \int_0^R \frac{J_0(\mu r)}{J_0(\mu R)} r dr - \frac{R^2}{2} \right)$$

Se desarrolla la integral de la función de Bessel de orden cero con la siguiente relación  $\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$  y se llega a,

$$V^* = \frac{\bar{K}}{s^2} \left( \frac{2}{\mu R} \frac{J_1(\mu R)}{J_0(\mu R)} - 1 \right) \quad (5.19)$$

La ec. (5.19) es la definición de la velocidad promedio del fluido en la dirección axial. Ahora se define al esfuerzo cortante en función de la velocidad promedio.

Para esto se evalúa al esfuerzo cortante en la pared, es decir cuando  $r = R$ . De la ec. (5.4) se tiene que:

$$\sigma_{rx}^* \Big|_{r=R} = \sigma_w^* = \eta \frac{1 + s\lambda_2}{1 + s\lambda_1} \frac{\partial V_x^*}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (5.20)$$

Se deriva la ec. (5.10) con respecto al radio y se evalúa en la pared del tubo.

$$\frac{\partial V_x^*}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\mu \frac{K}{s^2} \frac{J_1(\mu R)}{J_0(\mu R)} \quad (5.21)$$

Se sustituye la ec. (5.21) en la ec. (5.20).

$$\sigma_w^* = -\eta_T \mu \frac{K}{s^2} \frac{J_1(\mu R)}{J_0(\mu R)} \quad (5.22)$$

Se despeja  $K/s^2$  de la ec. (5.19), y se sustituye en la ec. (5.26), obteniendo,

$$\sigma_w^* = -4\eta_T D V^* \quad (5.23)$$

Donde  $D = \frac{1}{4} \frac{\mu T(\mu)}{2(\mu R)^{-1} T(\mu) - 1}$  y  $T(\mu) = \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)}$ . El valor propio  $\mu$  está definido en

la ec. (5.7).

La ec. (5.23) es la ecuación constitutiva que relaciona al esfuerzo cortante evaluado en la pared del tubo en función de la velocidad promedio de la solución diluida de polímero, además  $\eta_T$  contiene la información del modelo viscoelástico que se ha utilizado y  $D$  contiene información acerca de la geometría del sistema y del modelo viscoelástico.

Para el caso de pequeñas frecuencias,  $w \rightarrow 0$ , se tiende al estado estacionario, la ec. (5.6) se reduce de esta manera a,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_x^*}{\partial r} \right) = -\frac{K}{s\eta} \quad (5.24)$$

Al integrar la ec. (5.24) y evaluarla con las siguientes condiciones de frontera: de adherencia en la pared del tubo y la condición de que en el centro del tubo la velocidad es máxima, y su derivada respecto a la posición es cero, se obtiene que,

$$V_x^* = \frac{R^2 K}{4s\eta} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (5.25)$$

Se calcula el promedio de la velocidad del fluido  $V^* = \frac{2}{R^2} \int_0^R V_x^* r dr = \frac{R^2 K}{8s\eta}$  (5.26)

Para las condiciones antes establecidas el esfuerzo cortante es,

$$\sigma_w^* = \eta \left. \frac{\partial V_x^*}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (5.27)$$

La derivada de la velocidad respecto a la posición evaluada en  $r = R$ , se obtiene a partir de la ec. (5.25), de esta manera se tiene que,

$$\left. \frac{\partial V_x^*}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{RK}{2s\eta} \quad (5.28)$$

Finalmente al sustituir la ec. (5.28) y (5.26) en la ec. (5.27) resulta en,

$$\sigma_w^* = -4\eta \frac{V^*}{R} \quad (5.29)$$

Donde la ec. (5.33) es la relación de Poiseuille para la fuerza de fricción en la pared del tubo y la velocidad promedio del fluido newtoniano en flujo laminar y en estado estacionario en el espacio de Laplace. Entonces, de la ec. (5.24) para frecuencia pequeñas, cuando  $w \rightarrow 0$ , se tiene que  $\eta_T \rightarrow \eta$ ,  $D \rightarrow 1/R$ .

De la ecuación de movimiento, ec. (5.3), y de la ecuación de continuidad linealizadas,

$$\rho_{f0} \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rx})$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \rho_{f0} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) = 0 \quad (5.30)$$

Y de acuerdo con las siguientes definiciones:

$$V = \frac{2}{R^2} \int_0^R V_x r dr, \quad P = \frac{2}{R^2} \int_0^R p_f r dr, \quad \rho = \frac{2}{R^2} \int_0^R \rho_f r dr \quad (5.31)$$

Se coloca a la ec. (5.3) en función de variables promedio, esto es,

$$\rho_{f0} \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2\sigma_w}{R} \quad (5.32)$$

Se realiza el mismo procedimiento que se hizo con la ec. (5.3) a la ecuación de conservación de masa, ec. (5.30), obteniendo,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{2\rho_{f0}(V_r)_{r=R}}{R} + \rho_{f0} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (5.33)$$

Utilizando la ecuación constitutiva, ec. (5.24), la ecuación de momentum, ec. (5.32), la ecuación de continuidad, ec. (5.33) y la ecuación de estado en variables promedio, puede obtenerse la ecuación de dispersión, a saber:

$$\sigma_w^* = -4\eta_T DV^* \quad (5.34)$$

$$\rho_{f0} \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2\sigma_w}{R} \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{2\rho_{f0}(V_r)_{r=R}}{R} + \rho_{f0} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (5.36)$$

$$p_f - p_0 = c_s^2 (\rho_f - \rho_{f0}) \quad (5.37)$$

Donde la ec. (5.37) es la ecuación de estado en variables promedio y  $c_s$  es la velocidad del sonido en el medio. A partir del sistema de ecuaciones (5.34)-(5.37) puede obtenerse la ecuación de dispersión, y de esta forma observar los efectos

de la viscoelasticidad en la propagación de la onda de presión y la atenuación de ésta. En este sistema de cuatro ecuaciones hay cinco variables, por lo que es necesario recurrir a la ecuación de la dinámica de la pared del tubo para resolver el problema.

Análisis de la dinámica del tubo para el caso de ondas largas y simétricas respecto al eje  $x$  han mostrado que los esfuerzos de flexión en la coraza son muy pequeños en comparación a los esfuerzos en la membrana. Además, en tales casos las deformaciones longitudinales y la inercia en la pared del tubo pueden considerarse despreciables. Como resultado, a partir de la ecuación de continuidad para una coraza delgada elástica cilíndrica, escrita en la aproximación

de Kirchoff-Love se tiene que  $u_r = \frac{R^2}{2Eh} P$ , donde  $u_r$  es el desplazamiento de la

superficie de la coraza en la dirección transversal al flujo,  $h$  es la mitad del ancho de la coraza y  $E$  es el módulo de Young del material del tubo, además

$(V_r)_{r=R} = \dot{u}_r = \frac{\partial}{\partial t} \frac{R^2}{2Eh} P = \frac{R^2}{2Eh} \frac{\partial P}{\partial t}$ . Entonces la ec. (5.36) se puede describir de la

forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{R\rho_{f0}}{Eh} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_{f0} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (5.38)$$

Se sustituye la ecuación de estado en la ec. (5.38) y se agrupan términos semejantes.

$$\left( \frac{1}{c_s^2} + \frac{R\rho_{f0}}{Eh} \right) \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_{f0} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (5.39)$$

Ahora bien, se le aplica la transformada de Laplace a la ecuación de cantidad de movimiento, ec. (5.35) y se sustituye la ec. (5.34) en ella.

$$(\rho_{f0}s + 8\eta_T R^{-1}D)V^* = -\frac{dP^*}{dx} \quad (5.40)$$

Se aplica la transformada de Laplace a la ec. (5.39), sabiendo que  $\mathfrak{L}(P(t, x)) = P^*(s, x)$ , con la condición inicial para la presión. La presión se considera como la diferencia de presiones, es decir, la presión del fluido menos la presión inicial, y en el tiempo igual a cero, está diferencia es cero, es decir  $t = 0$ ,  $P = 0$ .

$$\left( \frac{1}{c_s^2} + \frac{R\rho_{f0}}{Eh} \right) sP^* + \rho_{f0} \frac{dV}{dx} = 0 \quad (5.41)$$

Ya teniendo la ec. (5.40) y la ec. (5.41) en el espacio de Laplace, se deriva la ec. (5.40) con respecto a  $x$  y se sustituye en la ec. (5.41), obteniendo,

$$\frac{d^2 P^*}{dx^2} - \lambda^2 P^* = 0 \quad (5.42)$$

donde

$$\lambda^2 = s \left( s + 8\eta_T (\rho_{f0} R)^{-1} D \right) \left( \frac{1}{c_s^2} + \frac{R\rho_{f0}}{Eh} \right) \quad (5.43)$$

La ec. (5.43) es una ecuación diferencial de segundo orden homogénea con coeficientes constantes, cuya solución es,

$$P^*(s, x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x) \quad (5.44)$$

Donde

$$\lambda_1 = \left[ s \left( s + 8\eta_T (\rho_{f0} R)^{-1} D \right) \left( \frac{1}{c_s^2} + \frac{R\rho_{f0}}{Eh} \right) \right]^{1/2} \quad y$$

$$\lambda_2 = - \left[ s \left( s + 8\eta_T (\rho_{f0} R)^{-1} D \right) \left( \frac{1}{c_s^2} + \frac{R\rho_{f0}}{Eh} \right) \right]^{1/2}$$

De acuerdo a la física del sistema, si  $x$  tiende al infinito,  $x \rightarrow \infty$ , la presión no tiende al infinito,  $P^* \neq \infty$ , entonces  $C_1 = 0$ . La ec. (4.44) resulta en:

$$P^*(s, x) = C_2 \exp(\lambda_2 x) \quad (5.45)$$

Se evalúa la condición a la frontera, en la posición  $x = 0$ ,  $P = P_0$ , para cualquier tiempo. Se aplica la transformada de Laplace a la condición y la se evalúa en la ec. (5.44), se tiene que:

$$P^*(s, x) = \left( \frac{P_0}{s} \right) \exp(-\lambda x) \quad (5.46)$$

Además, la ec. (5.46) tiene la forma de una onda viajera ( $\lambda \rightarrow ik$ ,  $k$  es el número de onda) con amplitud igual a  $P_0/s$  para la perturbación en la presión del fluido. Además, da información sobre la variación de la presión en un medio viscoelástico confinado a un tubo elástico con deformación transversal en la coraza.

La ec. (5.50) describe en el espacio de Laplace la propagación de un pulso de la presión, generado en el momento inicial del tiempo y en la sección transversal  $x = 0$ . Se aplica un cambio de variable a la ec. (5.46),  $s \rightarrow iw$ ,  $\lambda \rightarrow ik$ , para deducir la ecuación de dispersión de la onda acústica.

$$k^2 = \frac{w^2}{c_K^2} \left[ 1 + 8\eta_T (iw\rho_{f0}R)^{-1} D \right] \quad (5.47)$$

Donde  $\frac{1}{c_K^2} = \frac{1}{c_s^2} + \frac{1}{c_E^2}$  y  $\frac{1}{c_E^2} = \frac{R\rho_{f0}}{Eh}$ . Para un sistema donde no ocurre

desplazamiento alguno de la coraza, es decir la condición de frontera para la velocidad en la dirección  $r$  evaluada en la pared del tubo es cero. La ecuación de dispersión queda de la siguiente forma,

$$k^2 = \frac{w^2}{c_s^2} \left[ 1 + 8\eta_T (iw\rho_{f0}R)^{-1} D \right] \quad (5.48)$$

De aquí se puede apreciar que  $c_E$  contiene la información de la deformación radial de la coraza del tubo, si el tubo fuese de coraza rígida entonces  $1/c_s^2$  sería igual a cero.

De la ec. (5.47), donde  $k$  es el número de onda y  $w$  es la frecuencia, se debe de colocar a la ec. (5.47) de la forma  $k = \text{Re}(k) + \text{Im}(k)$ , para obtener la propagación y

atenuación de la onda acústica en el medio. Para esto, se necesita obtener una expresión que contenga explícitamente parte real y parte imaginaria para  $\eta_T$  y para  $D$ .

$$\eta_T = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{1 + iw\lambda_2}{1 + iw\lambda_1} \cdot \frac{1 - iw\lambda_1}{1 - iw\lambda_1} = A + iB \quad (5.49)$$

$$\text{Donde } A = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{1 + w^2\lambda_1\lambda_2}{1 + w^2\lambda_1^2} \text{ y } B = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{w(\lambda_2 - \lambda_1)}{1 + w^2\lambda_1^2}.$$

Para el valor propio se tiene que,  $\mu^2 = -s/\eta_T$

$$\mu^2 = -\frac{iw}{A + iB} \cdot \frac{A - iB}{A - iB} = -\frac{w}{A^2 + B^2} (B + iA) = -(J + iI) \quad (5.50)$$

$$\text{Donde } J = \frac{wB}{A^2 + B^2} \text{ e } I = \frac{wA}{A^2 + B^2}.$$

$$\mu = -C + iE \quad (5.51)$$

$$\text{Donde } C = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{J^2 + I^2} - J \right)^{1/2} \text{ y } E = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{J^2 + I^2} + J \right)^{1/2}.$$

Para el término  $D = \frac{1}{4} \frac{\mu T(\mu)}{2(\mu R)^{-1} T(\mu) - 1}$  donde  $T(\mu) = \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)}$ . Se obtiene la parte

real separada de la parte imaginaria para el argumento de la función de Bessel, esto es,

$$J_0(\mu) = J_0(-C + iE) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left( \frac{-C + iE}{2} \right)^{2n} \quad (5.52)$$

$$J_1(\mu) = J_1(-C + iE) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} (n+1)! n!} (-C + iE)^{2n+1} \quad (5.53)$$

Desarrollando los términos de las ec. (5.52) y ec. (5.53), respectivamente, hasta  $n = 2$  (ya que para valores superiores los coeficiente tienden a cero) y agrupándolos, resultan las siguientes expresiones,

$$J_0(\mu) = L + iM \quad (5.54)$$

$$J_1(\mu) = F + iG \quad (5.55)$$

Al dividir  $J_1$  entre  $J_0$  y multiplicar por el conjugado del denominador, se obtiene,

$$T = \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)} = \frac{F + iG}{L + iM} \cdot \frac{L - iM}{L - iM} = N + iO \quad (5.56)$$

$$\text{Donde } N = \frac{FL + GM}{L^2 + M^2} \text{ y } O = \frac{GL - FM}{L^2 + M^2} .$$

Se sustituye la ec. (5.56), (5.50) y (5.51) en la definición de  $D$ , obteniendo:

$$D = \frac{1}{4} \frac{\mu^2 RT}{2T - \mu R} = -\frac{R}{4} \frac{(J + iI)(N + iO)}{2(N + iO) - (-C + iE)R} = -\frac{R U + iS}{4 P + iQ} \quad (5.57)$$

Donde  $U = JN - IO$ ,  $S = JO + IN$ ,  $P = 2N + CR$ ,  $Q = 2O - ER$  y  $R$  es el radio del tubo.

$$D = -\frac{R U + iS}{4 P + iQ} \cdot \frac{P - iQ}{P - iQ} = -(V + iW) \quad (5.58)$$

$$\text{Donde } V = \frac{R U P + S Q}{4 P^2 + Q^2} \text{ y } W = \frac{R S P - U Q}{4 P^2 + Q^2} .$$

Una vez que se han obtenido expresiones para  $\eta_T$ , ec. (5.49), y para  $D$ , ec. (5.58), en las cuales la parte real e imaginaria están separadas, se sustituyen en la ec. (5.47).

$$k^2 = \frac{w^2}{c_K^2} \left[ 1 + \frac{i8(A + iB)(V + iW)}{w\rho_{f0}R} \right] = \frac{w^2}{c_K^2} (X + iY) \quad (5.59)$$

$$\text{Donde } X = 1 - \frac{8(AW + BV)}{w\rho_{f0}R} \text{ y } Y = \frac{8(AV - BW)}{w\rho_{f0}R} . \text{ En la ec. (5.59) se tiene}$$

explícitamente la parte real separada de la parte imaginaria, por lo que a partir de

ésta se obtiene la propagación y atenuación de una onda de presión que viaja en un medio viscoelástico. Es decir,

$$k = \frac{w}{\sqrt{2c_K}} \left[ \left( \sqrt{X^2 + Y^2} + X \right)^{1/2} + i \left( \sqrt{X^2 + Y^2} - X \right)^{1/2} \right] \quad (5.60)$$

Lo que resulta en,

$$\text{Re}(k) = \frac{w}{\sqrt{2c_K}} \left( \sqrt{X^2 + Y^2} + X \right)^{1/2} \quad (5.61)$$

$$\text{Im}(k) = \frac{w}{\sqrt{2c_K}} \left( \sqrt{X^2 + Y^2} - X \right)^{1/2} \quad (5.62)$$

A partir de la parte real del número de onda se obtiene la velocidad de propagación de la onda acústica en el medio, y a partir de la parte imaginaria del número de onda se deduce la atenuación de la onda acústica en el medio viscoelástico.

$$V_p = \frac{\sqrt{2c_K}}{\left( \sqrt{X^2 + Y^2} + X \right)^{1/2}} \quad (5.63)$$

$$\phi = \frac{w}{\sqrt{2c_K}} \left( \sqrt{X^2 + Y^2} - X \right)^{1/2} \quad (5.64)$$

## 5.2 CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS

Para construir la grafica de la velocidad de propagación y atenuación para la onda de corte y para la onda de presión en función de la frecuencia, se necesitan valores numéricos para las constantes del sistema. Estos valores numéricos se obtienen del artículo de la Ref. [4, 5].

A partir de la ec. (5.20) y ec. (5.21) se grafican la velocidad de propagación y la atenuación de la onda acústica, respectivamente.

$$V_p = w \left[ \frac{2(N^2 + M^2)}{w(\sqrt{N^2 + M^2} - N)} \right]^{1/2} \quad (5.65)$$

$$\phi = \left[ \frac{w(\sqrt{N^2 + M^2} + N)}{2(N^2 + M^2)} \right]^{1/2} \quad (5.66)$$

La ec. (5.65) y ec. (5.66) se utilizan independiente del modelo viscoelástico que se desea utilizar, la diferencia entre un modelo y otro radica en los términos  $M$  y  $N$ , a saber,

Para el modelo de Jeffreys: 
$$N = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{w(\lambda_1 - \lambda_2)}{1 + w^2 \lambda_1^2}$$
 (5.67)

$$M = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{1 + w^2 \lambda_1 \lambda_2}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (5.68)$$

Para el modelo de Oldroyd,  $\eta = \eta_v + \eta_{sv}$  y  $\lambda_2 = \lambda_1 \eta_{sv} / \eta$ .

$$N = \frac{\eta_v}{\rho_{f0}} \frac{w \lambda_1}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (5.69)$$

$$M = \frac{1}{\rho_{f0}} \left( \eta_{sv} + \frac{\eta_v}{1 + w^2 \lambda_1^2} \right) \quad (5.70)$$

Para el modelo de Maxwell,  $\lambda_2 = 0$ . 
$$N = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{w \lambda_1}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (5.71)$$

$$M = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{1}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (5.72)$$

Para el modelo newtoniano,  $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$ . 
$$N = 0 \quad (5.73)$$

$$M = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \quad (5.74)$$

Conociendo que  $\eta = 4000 \text{ g/cm}^*s$ ,  $\eta_{sv} = 1 \text{ g/cm}^*s$ ,  $\rho_{f0} = 1.4 \text{ g/cm}^3$ ,  $\lambda_1 = 1.5 \times 10^{-5} \text{ s}$ ,  $\lambda_2/\lambda_1 = 2/3$ . Se obtiene la siguiente representación gráfica de la ec. (5.65):

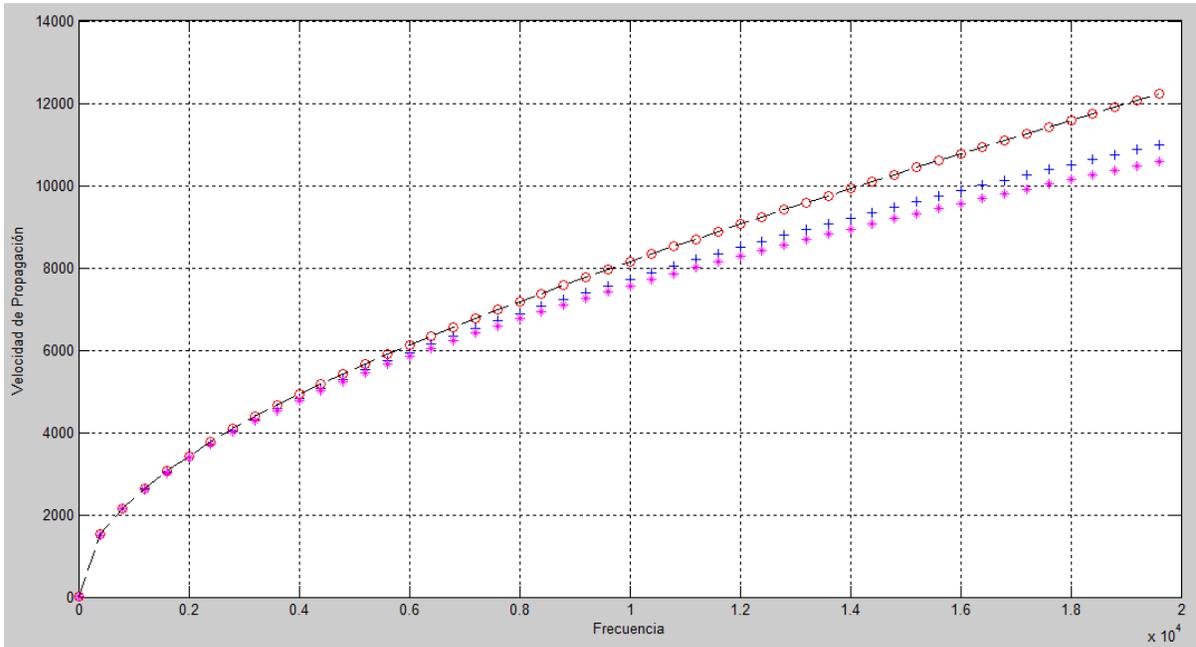


Fig. 5.1. Variación de la velocidad de propagación de una onda acústica con la frecuencia  $\omega$ . (+) Modelo de Jeffreys, (-) modelo de Oldroyd, (o) modelo de Maxwell, (\*) modelo newtoniano. Ec. (5.65).

De lo anterior se puede observar que la velocidad de propagación crece cuando aumenta la frecuencia. Cuando la frecuencia tiende a cero la velocidad de propagación tiene una pendiente igual a  $N^{1/2}$ , mientras que si la frecuencia tiende al infinito la pendiente de la curva de velocidad de propagación tiende a la raíz cuadrada de  $M$ .

La siguiente gráfica presenta el comportamiento de la atenuación de la onda acústica en el medio.

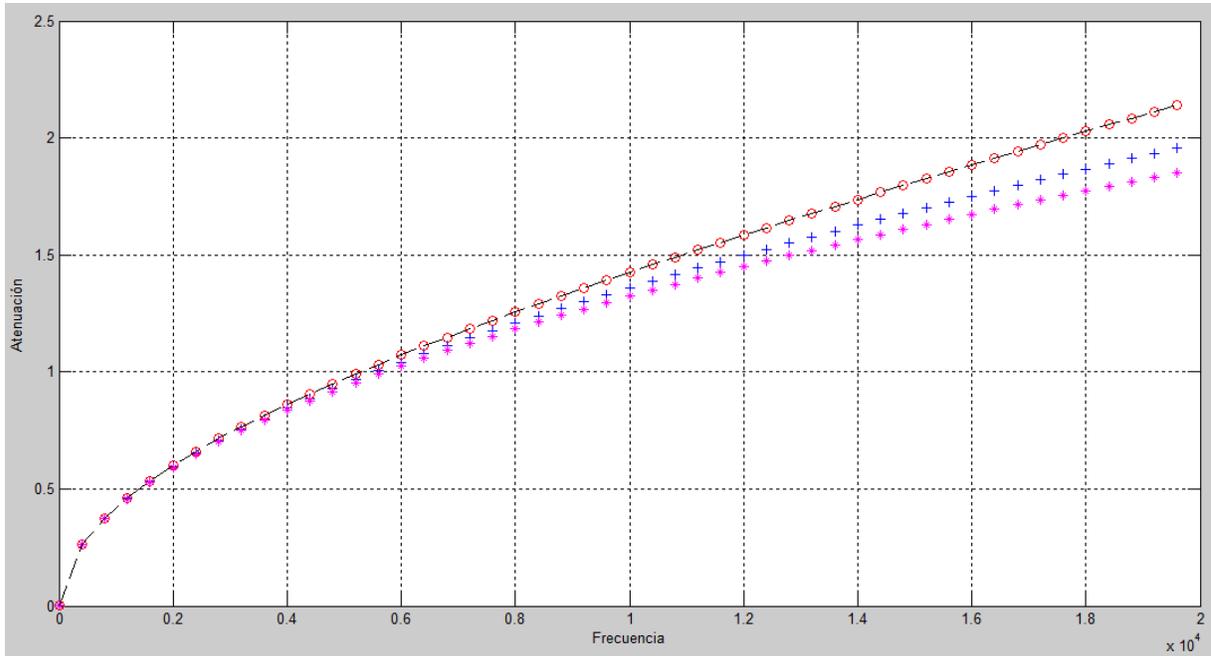


Fig. 5.2. Variación de la atenuación de una onda acústica con la frecuencia  $\omega$ . (+) Modelo de Jeffreys, (-) modelo de Oldroyd, (o) modelo de Maxwell, (\*) modelo newtoniano. Ec. (5.66).

De la Fig. 5.2 se observa que la atenuación crece cuando aumenta la frecuencia. Cuando la frecuencia tiende a cero la pendiente de la atenuación tiende a cero, mientras que si la frecuencia tiende al infinito la pendiente de la atenuación tiende al inverso de  $N^{1/2}$ .

Para la ecuación de dispersión obtenida a través de la expresión matemática para la presión se puede, a partir de la ec. (5.63) y ec. (5.64), obtener las gráficas para la velocidad de propagación de la onda acústica y para la atenuación de la onda en el medio, respectivamente, de esta forma,

$$V_p = \frac{\sqrt{2}c_K}{\left(\sqrt{X^2 + Y^2} + X\right)^{1/2}} \quad (5.75)$$

$$\phi = \frac{\omega}{\sqrt{2}c_K} \left(\sqrt{X^2 + Y^2} - X\right)^{1/2} \quad (5.76)$$

La ec. (5.75) y ec. (5.76) se utilizan independiente del modelo viscoelástico con el que se desea modelar, lo único que cambia son los términos  $A$  y  $B$ , pues estos son los términos que contiene la información acerca del modelo viscoelástico.

Para el modelo de Jeffreys: 
$$A = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{1 + w^2 \lambda_1 \lambda_2}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (5.77)$$

$$B = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{w(\lambda_2 - \lambda_1)}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (5.78)$$

Para el modelo de Oldroyd,  $\eta = \eta_v + \eta_{sv}$ ,  $\lambda_2 = \lambda_1 \eta_{sv} / \eta$ .

$$A = \frac{1}{\rho_{f0}} \left( \eta_{sv} + \frac{\eta_v}{1 + w^2 \lambda_1^2} \right) \quad (5.79)$$

$$B = -\frac{\eta_v}{\rho_{f0}} \frac{w \lambda_1}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (5.80)$$

Para el modelo de Maxwell,  $\lambda_2 = 0$ . 
$$A = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{1}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (5.81)$$

$$B = -\frac{\eta}{\rho_{f0}} \frac{w \lambda_1}{1 + w^2 \lambda_1^2} \quad (5.82)$$

Para el modelo newtoniano,  $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$  
$$A = \frac{\eta}{\rho_{f0}} \quad (5.83)$$

$$B = 0 \quad (5.84)$$

A partir de los siguientes datos:  $\eta = 4000 \text{ g/cm}^*s$ ,  $\eta_{sv} = 1 \text{ g/cm}^*s$ ,  $\rho_{f0} = 1.4 \text{ g/cm}^3$ ,  $\lambda_1 = 1.5 \times 10^{-5} \text{ s}$ ,  $\lambda_2 / \lambda_1 = 2/3$ ,  $\eta(1 - \lambda_2 / \lambda_1) / \rho_0 \lambda_1 c_0^2 = 0.005$ ,  $R = 1 \text{ cm}$ , se calcula la velocidad de propagación de la onda acústica mediante la ec. (5.75) obteniendo la gráfica,

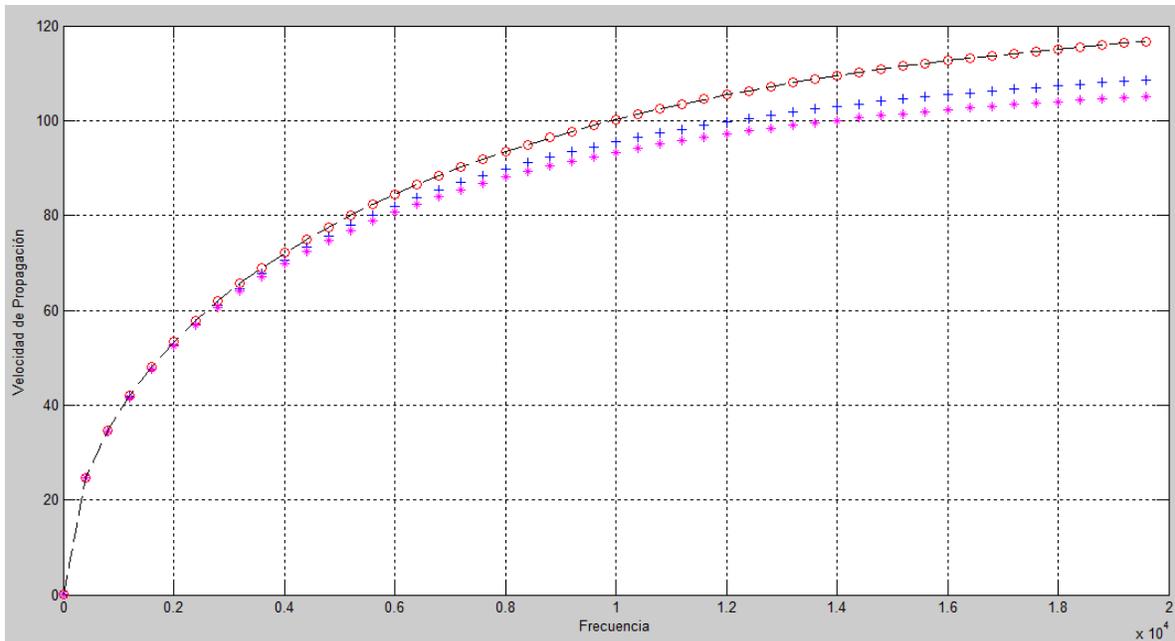


Fig. 5.3. Variación de la velocidad de propagación de una onda acústica con la frecuencia  $\omega$ . (+) Modelo de Jeffreys, (-) modelo de Oldroyd, (o) modelo de Maxwell, (\*) modelo newtoniano. Ec. (5.75).

El comportamiento de la velocidad de propagación de la onda acústica en función de la frecuencia es similar para los cuatro modelos. El límite inferior, es decir cuando la frecuencia tiende a cero, la pendiente de la curva tiende a  $c_s$ , y cuando la frecuencia tiende al infinito, la curva de la velocidad de propagación tiende a  $(2/Y)^{1/2} c_s$ .

Mientras que para la atenuación de la onda acústica en el medio viscoelástico se comporta de la siguiente manera,

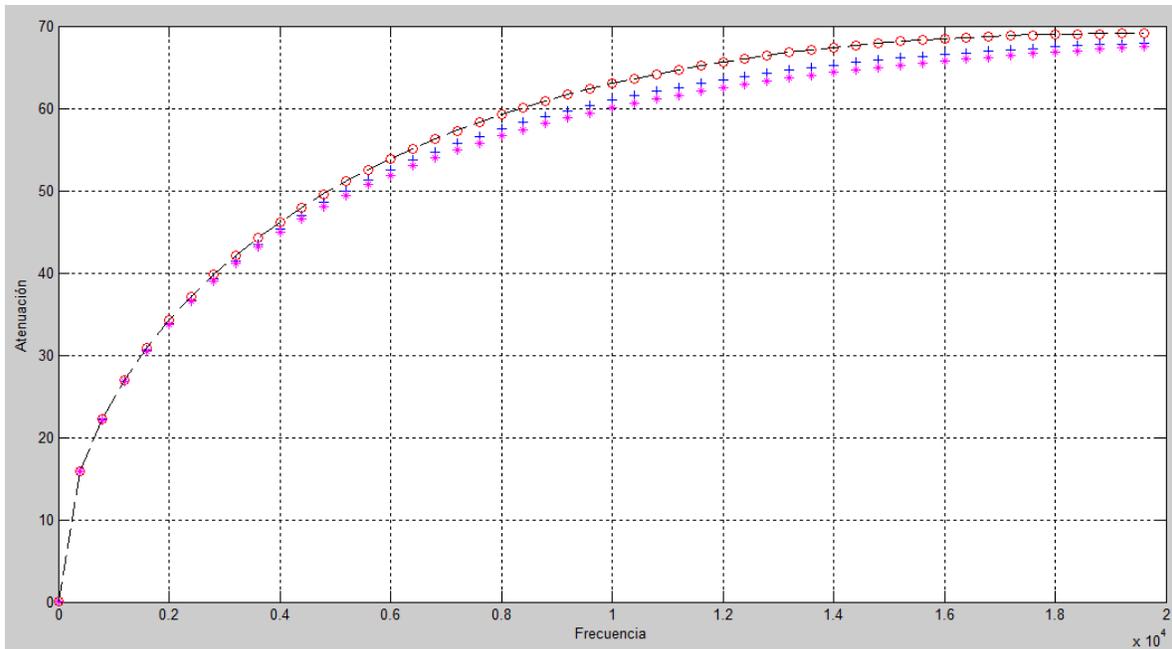


Fig. 5.4. Variación de la atenuación de una onda acústica con la frecuencia  $\omega$ . (+) Modelo de Jeffrey's, (-) modelo de Oldroyd, (o) modelo de Maxwell, (\*) modelo newtoniano. Ec. (5.76).

De acuerdo a la Fig. (5.3) y Fig. (5.4) la atenuación de la onda tiene el mismo comportamiento que la velocidad de propagación de la onda acústica, esto es, la atenuación crece al aumentar la frecuencia, en el límite inferior la pendiente de la curva de atenuación tiende a cero y en el límite superior tiende a  $(Y/2)^{1/2}c_s$ .

## **CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES**

En este último capítulo se explicarán detalladamente las gráficas que se obtuvieron en los capítulos anteriores, y se darán las conclusiones obtenidas para este trabajo.

### **6.1 ANÁLISIS DE GRÁFICAS**

De acuerdo a la Fig. (2.1) los cuatro modelos (Jeffreys, Oldroyd, Maxwell y newtoniano) tienen la misma tendencia para la curva de la propagación de la onda acústica. Para bajas frecuencias los cuatro modelos predicen la misma velocidad de propagación, pero a medida que la frecuencia aumenta los modelos se van separando uno del otro. En la región de altas frecuencias, alrededor de los 20 kHz que está en el intervalo de ultrasonido, los modelos predicen diferentes velocidades de propagación, es decir, para una misma frecuencia, el modelo newtoniano es el que predice la mayor velocidad de propagación de la onda acústica, mientras que el modelo de Oldroyd y Maxwell son los que predicen la misma velocidad de propagación y además la más baja. Los efectos viscoelásticos se manifiestan al decrecer la velocidad de propagación. En el caso del modelo de Maxwell y Oldroyd, que en toda frecuencia predicen la misma velocidad de propagación, se debe a que la diferencia entre estos sólo es el término de viscosidad del disolvente que es la contribución newtoniana de la solución polimérica, y éste término no es lo suficientemente alto para que se muestre sus efectos en la velocidad de propagación.

La atenuación de la onda acústica en el flujo extensional en un medio infinito tiene la misma tendencia para los cuatro modelos. A bajas frecuencias todos los modelos estudiados predicen la misma atenuación, pero a frecuencias altas la atenuación que se obtiene al utilizar el modelo newtoniano es la mayor, y el menor valor de atenuación es por parte de los modelos de Oldroyd y Maxwell. Los efectos viscoelásticos se manifiestan al disminuir la atenuación de la onda en el medio.

Para el flujo de corte simple, tanto para la propagación de la onda acústica como para su atenuación en el medio que se obtuvieron a partir de la solución para velocidad del fluido o de la solución para la presión muestran la misma tendencia y se observa la misma manifestación de la viscoelasticidad en la reducción de la velocidad de propagación y de la atenuación de la onda acústica. La diferencia que se observa es que para el flujo extensional es mayor la velocidad de propagación y la atenuación obtenida por cualquier modelo que la velocidad de propagación y atenuación obtenida por el mismo modelo en flujo cortante.

La tendencia de la velocidad de propagación y de la atenuación de ondas acústicas en un tubo es la misma para los cuatro modelos que se estudiaron. En la zona de baja frecuencias los cuatro modelos predicen el mismo valor tanto para la velocidad de propagación de la onda acústica como para su atenuación, pero a altas frecuencias, la velocidad de propagación y atenuación que arroja el modelo newtoniano es la menor mientras que para el modelo de Maxwell y Oldroyd predicen el mismo valor y es el más alto. A diferencia de las placas paralelas que los efectos viscoelásticos se manifiestan en la reducción de la velocidad de propagación y de la atenuación, en el cilindro los efectos viscoelásticos se manifiestan con el aumento de la velocidad de propagación de la onda acústica y de la atenuación.

En un cilindro, tanto para la velocidad de propagación y la atenuación de la onda acústica, dada una frecuencia el modelo viscoelástico de Jeffreys predice mayor velocidad de propagación y atenuación que el modelo newtoniano, mientras que en las placas paralelas, dada una frecuencia, la velocidad de propagación y atenuación de la onda acústica que predice el modelo de Jeffreys es menor que las que predice el modelo newtoniano. Una explicación tentativa para esto, puede obtenerse a partir de los perfiles de rapidez de deformación. El perfil de rapidez de deformación entre dos placas paralelas es el mismo tanto para el fluido newtoniano como para el no newtoniano, por lo que la diferencia está en la concentración de los fluidos o en la viscosidad de los fluidos. Al haber mayor

viscosidad en fluidos no newtonianos, la propagación de la onda se ve mayormente impedida al igual que la atenuación de la onda. Ahora bien, en un tubo el perfil para un fluido newtoniano es una parábola, mientras que para un fluido no newtoniano es un perfil que tiende a flujo homogéneo (está achatada en el centro del tubo), entonces el transporte de cantidad de movimiento es un impedimento para la velocidad de propagación y la atenuación de la onda acústica, debido a que el perfil del fluido no newtoniano es achatado al centro del tubo la cantidad de movimiento que se transporta a las capas adyacentes es menor que en un flujo newtoniano, que dado su perfil el transporte de momentum es mayor, entonces la propagación y la atenuación de la onda acústica será mayor en el fluido no newtoniano que en el fluido newtoniano.

Se dedujo la ecuación de dispersión para la velocidad y para la presión del fluido, de aquí se obtiene la onda de corte y la onda de presión, respectivamente. Para la ecuación de dispersión obtenida a partir de la velocidad del fluido sólo se atendió a la ecuación de cantidad de movimiento y se considero constante al gradiente de presión, esto para no considerar las fluctuaciones de la presión. Ahora bien, para la ecuación de dispersión a partir de la presión del fluido se contemplaron a la ecuación de momentum, de continuidad y de estado, para considerar las fluctuaciones en la presión del fluido, para la ecuación de cantidad de movimiento se calculó el promedio a lo largo del eje transversal para eliminar las fluctuaciones de la velocidad, y así obtener únicamente la onda de presión.

## **6.2 CONCLUSIONES**

Se analizó la propagación de ondas acústicas en medios viscoelásticos para un fluido en estado no estacionario, unidireccional, para el caso del flujo cortante en geometría rectangular y cilíndrica, y para el flujo extensional en un medio infinito. Los modelos viscoelásticos lineales que se utilizaron para describir el comportamiento no newtoniano del medio son: el modelo de Jeffreys y el modelo de Oldroyd, y como casos particulares el modelo de Maxwell y el newtoniano. El modelo obtenido bien puede ser usado para incorporar efectos no lineales en la propagación de las ondas acústicas.

El problema trabajado es demasiado extenso, pueden hacerse infinidad de modificaciones y todas tendrán algo de interesante, por ejemplo se puede considerar modelos viscoelásticos no lineales, considerar la energía que se transporta en el medio, las reacciones que suceden, consideraciones sobre las paredes del tubo: pueden ser flexibles y que se deformen en más de una dirección, permeables, o que el fluido contenga pequeñas burbujas, y muchas más.

En este trabajo se obtuvieron las mismas ecuaciones que presenta el artículo "*Influencia de las propiedades viscoelásticas en la propagación de ondas sonoras de pequeña amplitud*", a partir del modelo viscoelástico en su forma diferencial y en el espacio de Laplace. En el artículo [5] utilizan la forma integral del modelo viscoelástico y proponen la solución en forma de una onda generalizada. El artículo solamente contempla el caso de flujo extensional en un medio infinito. En el presente trabajo se obtuvieron las mismas ecuaciones que obtiene el autor del artículo pero con un tratamiento diferente, y además se añadió el caso del flujo de corte simple.

Al estudiar los diferentes modelos viscoelásticos, que todos ellos desean explicar el comportamiento real de los fluidos, y al hacer tantas consideraciones a los sistemas para simplificar su solución, que si bien el deseo es modelar un fluido real se debería de resolver a las ecuaciones sin ninguna simplificación, y al entender que los modelos sólo son diferentes interpretaciones de una misma naturaleza, entonces ¿acaso una interpretación hecha por el hombre podrá explicar a la naturaleza misma?

## NOMENCLATURA

$\sigma_{yx}$ , esfuerzo cortante,  $g/cm*s^2$ .

$\sigma_{xx}$ , esfuerzo extensional,  $g/cm*s^2$ .

$\sigma_{yx}^*$ , esfuerzo cortante en el espacio de Laplace.

$\sigma_{xx}^*$ , esfuerzo extensional en el espacio de Laplace.

$\sigma_w$ , esfuerzo cortante evaluado en la pared.

$\dot{\gamma}$ , rapidez de deformación o rapidez de corte,  $s^{-1}$ .

$\dot{\epsilon}_x$ , rapidez de elongación o extensional,  $s^{-1}$ .

$\underline{v} = [v_x v_y v_z]$ , vector velocidad del fluido.

$v_x$ , velocidad del fluido en dirección  $x$ ,  $cm/s$ .

$V_x$ , velocidad perturbada del fluido en dirección  $x$ ,  $cm/s$ .

$V_x^*$ , velocidad perturbada del fluido en dirección  $x$  en el espacio de Laplace.

$v_r$ , velocidad del fluido en dirección  $r$ ,  $cm/s$ .

$V_r$ , velocidad perturbada del fluido en dirección  $r$ ,  $cm/s$ .

$V_r^*$ , velocidad perturbada del fluido en dirección  $r$  en el espacio de Laplace.

$V^*$ , velocidad de perturbación en el espacio de Laplace y promediada a lo largo del eje transversal.

$\rho_f$ , densidad del fluido,  $g/cm^3$ .

$\rho$ , densidad perturbada del fluido,  $g/cm^3$ .

$p_f$ , presión en el fluido,  $g/cm*s^2$ .

$P_f$ , presión perturbada en el fluido,  $g/cm*s^2$ .

$P_f^*$  presión perturbada en el fluido en el espacio de Laplace.

$w$ , frecuencia,  $s^{-1}$ .

$k$ , número de onda,  $cm^{-1}$ .

$V_p$ , velocidad de propagación de la onda acústica,  $cm/s$ .

$\phi$ , atenuación de la onda acústica.

$\eta_0$ , viscosidad,  $g/cm*s$ .

$\eta_{sv}$ , viscosidad del disolvente,  $g/cm*s$ .

$\lambda$ , tiempo de relajamiento (para el modelo de Maxwell y de Oldroyd),  $s$ .

$\lambda_1$ , tiempo de relajamiento (para el modelo de Jeffreys),  $s$ .

$\lambda_2$ , tiempo de retardamiento (para el modelo de Jeffreys),  $s$ .

$t$ , tiempo,  $s$ .

$G_0$ , módulo elástico del material,  $g/cm*s^2$ .

$G(s)$ , módulo cortante,  $g/cm*s^2$ .

$\eta^*(iw)$ , viscosidad compleja,  $g/cm*s$ .

$G'(w)$ , módulo de elasticidad o módulo de almacenamiento,  $g/cm*s^2$ .

$G''(w)$ , módulo viscoso o módulo de pérdida,  $g/cm*s^2$ .

$c_s$ , velocidad del sonido en el medio.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- [1] Morrison, Faith. "Understanding Rheology". Oxford University Press, New York, 2001.
- [2] Bird, R.B.; Stewart, W.E.; Lightfoot, E.N. "Fenómenos de Transporte". Editorial Reverté, México, 2006.
- [3] Alexandre J. Chorin, Andrew J. Majda. "Wave motion: theory, modeling, and computation". Editorial Springer, New York, 1986.
- [4] Levitsky, S., Bergman R., Hedded J. "Acoustic waves in thin-walled elastic tube with polymeric solution". Ultrasonics. 38 (2000) 857-859.
- [5] Sotolongo C., Oscar; Vázquez V., Alexei; López P., Enrique; Marín A., José. "Influencia de las propiedades viscoelásticas en la propagación de ondas sonoras de pequeña amplitud". Revista Cubana de Física. Vol. 14. (1996) 73 – 79.
- [6] Dilip Kondepudi, "Modern thermodynamics: from heat engines to dissipative structures". Ed. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1998.
- [7] Bird, Byron; Stewart, Warren; Lightfoot, Edwin. "Transport Phenomena". Ed. John Wiley & Sons, Inc. Segunda Edición. USA, 2002.
- [8] Lighthill, James. "Waves in fluids". Cambridge University Press, 1978.
- [9] Bird, Byron; Armstrong, Robert; Hassager, Ole. "Dynamics of Polymeric Liquids. Vol. 1. Fluid Mechanics". Ed. John Wiley & Sons. Segunda Edición, New York, 1987.