



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Análisis empírico de la red de  
exposiciones interbancarias en México y  
del Sistema de Pagos Electrónicos  
Interbancarios (SPEI) y su conexión con  
el riesgo sistémico

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuario

PRESENTA:

Bernardo Bravo Benítez

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Serafín Martínez Jaramillo



2012



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Bravo  
Benítez  
Bernardo  
56 71 65 75  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Actuaría  
305282006

2. Datos del tutor

Dr  
Serafín  
Martínez  
Jaramillo

3. Datos del sinodal 1

Dr  
Sergio  
Rajsbaum  
Gorodezky

4. Datos del sinodal 2

Dr  
Abdón  
Sánchez  
Arroyo

5. Datos del sinodal 3

Dra  
Biliana  
Alexandrova  
Kabadjova

6. Datos del sinodal 4

Dr  
Fausto  
Membrillo  
Hernández

7. Datos del trabajo escrito

Análisis empírico de la red de exposiciones interbancarias en México y del Sistema de Pagos Electrónicos Interbancarios (SPEI) y su conexión con el riesgo sistémico.  
134p  
2012

*Everything is more complicated than you think. You only see a tenth of what is true. There are a million little strings attached to every choice you make; you can destroy your life every time you choose. But maybe you won't know for twenty years. And you'll never ever trace it to its source.*

Minister, "Synecdoche, New York", Charlie Kaufman (2007)

# Agradecimientos

*A Serafín y a Biliana, por toda su dedicación, confianza y enseñanzas que van más allá de lo académico.*

*A Danya quien me ayudó hasta el último minuto y me dio todo el apoyo que necesité.*

*A Juan Pablo cuyas aportaciones hicieron posible que este trabajo tuviera tal alcance.*

*A mis padres y a mis hermanas por su apoyo incondicional.*

*A la UNAM por cambiar mi vida.*

*A Banco de México quien proveyó los datos necesarios para realizar este estudio.*

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Nociones de riesgo sistémico . . . . .	2
1.1.1. Algunos métodos para cuantificar el riesgo sistémico o asignar importancia sistémica . . . . .	3
1.1.2. Aplicaciones de redes al estudio del riesgo sistémico . .	4
1.2. Objetivos de la tesis . . . . .	5
1.3. Contribuciones de la tesis . . . . .	5
1.4. Organización de la tesis . . . . .	6
<b>2. Elementos de teoría de redes y centralidad</b>	<b>8</b>
2.1. Definiciones iniciales . . . . .	9
2.2. Características topológicas de las redes . . . . .	14
2.2.1. Distancia . . . . .	14
2.2.2. Grado . . . . .	14
2.2.3. Componentes . . . . .	15
2.2.4. Índice de completitud . . . . .	16
2.2.5. Reciprocidad . . . . .	17
2.2.6. Afinidad . . . . .	17
2.2.7. Coeficiente de agrupamiento (clustering) . . . . .	18
2.3. Otras medidas . . . . .	19
2.3.1. Fuerza . . . . .	19
2.3.2. Flujo . . . . .	20
2.3.3. Volumen . . . . .	20
2.3.4. Índice de Herfindahl-Hirschman (HHI) . . . . .	20

2.3.5.	Índices de preferencia . . . . .	21
2.4.	Medidas de centralidad . . . . .	22
2.4.1.	Centralidad por grado . . . . .	23
2.4.2.	Centralidad por fuerza . . . . .	24
2.4.3.	Centralidad por cercanía . . . . .	24
2.4.4.	Centralidad inter-vértices . . . . .	25
2.4.5.	Centralidad por eigenvectores . . . . .	26
2.5.	Índice unificado de centralidad . . . . .	31
2.6.	Características deseables en las medidas de centralidad . . . . .	32
<b>3.</b>	<b>Modelos de redes y riesgo sistémico</b>	<b>34</b>
3.1.	Propiedades de las redes reales . . . . .	35
3.1.1.	Redes libres de escala . . . . .	35
3.1.2.	Redes de mundo pequeño (small-world) . . . . .	40
3.2.	Modelos para la formación de redes . . . . .	41
3.2.1.	Gráficas aleatorias clásicas . . . . .	42
3.2.2.	Modelo de Watts y Strogatz . . . . .	44
3.2.3.	Modelos de conexión preferencial . . . . .	45
3.3.	Literatura sobre modelos de redes en economía y finanzas . . . . .	48
3.3.1.	Juegos de formación de redes . . . . .	48
3.4.	Literatura sobre riesgo sistémico basada en modelos de redes . . . . .	49
3.4.1.	Estudios empíricos . . . . .	50
3.4.2.	Aplicación de modelos a riesgo sistémico . . . . .	50
<b>4.</b>	<b>Análisis empírico de la red de exposiciones interbancarias en México</b>	<b>52</b>
4.1.	Descripción del sistema bancario mexicano y de los datos . . . . .	53
4.2.	Estructura de la red de exposiciones . . . . .	56
4.2.1.	Libertad de escala . . . . .	56
4.2.2.	Propiedad de mundo pequeño . . . . .	59
4.3.	Características globales . . . . .	60
4.4.	Relaciones interbancarias . . . . .	63
4.5.	Medidas individuales . . . . .	66
<b>5.</b>	<b>Análisis empírico del Sistema de Pagos Electrónicos Inter-</b>	

<b>bancarios (SPEI)</b>	<b>68</b>
5.1. Descripción del SPEI y de los datos . . . . .	69
5.2. Estructura de la red del SPEI . . . . .	72
5.2.1. Libertad de escala . . . . .	72
5.2.2. Propiedad de mundo pequeño . . . . .	74
5.3. Características globales . . . . .	75
5.4. Relaciones interbancarias . . . . .	78
5.5. Medidas individuales . . . . .	80
<b>6. Estudios de centralidad en las redes de exposiciones interbancarias y del SPEI</b>	<b>83</b>
6.1. Centralidad en la red de exposiciones interbancarias . . . . .	84
6.1.1. Centralidad por componentes principales en la red de exposiciones interbancarias . . . . .	87
6.2. Centralidad en la red del SPEI . . . . .	89
6.2.1. Centralidad por componentes principales en la red del SPEI . . . . .	90
6.3. Robustez en una topología libre de escala . . . . .	92
6.3.1. $k$ vértices superiores . . . . .	93
6.3.2. $k$ vértices inferiores . . . . .	94
6.3.3. Correlación ( $\rho$ ) . . . . .	95
6.3.4. Traslapo de la categoría $k$ . . . . .	96
<b>7. Resultados, conclusiones y propuestas</b>	<b>98</b>
7.1. Índices LPI y BPI . . . . .	98
7.2. Modelos de formación de redes . . . . .	99
7.3. Características globales de las redes de exposiciones interbancarias y del SPEI . . . . .	100
7.3.1. Perfiles de riesgo . . . . .	101
7.4. Medidas de centralidad . . . . .	102
7.4.1. Los bancos más centrales . . . . .	103
7.4.2. Otras medidas de centralidad . . . . .	104
7.4.3. Índice de centralidad por componentes principales . . . . .	105
7.4.4. Pruebas de robustez . . . . .	106
<b>A. Entropía en teoría de la información y aplicaciones a riesgo</b>	



<b>sistémico</b>	<b>107</b>
A.1. Entropía como medida de heterogeneidad y concentración . . .	108
A.2. Consideraciones sobre la centralidad por eigenvectores entrópica ( <i>EEC</i> ) . . . . .	110
A.3. Supuesto de entropía máxima para las exposiciones interbancarias . . . . .	110
<b>B. Análisis de componentes principales</b>	<b>113</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>117</b>

# Índice de cuadros

4.1. Porcentaje de días en que la red mostró evidencia en favor de la distribución ley de potencia. . . . .	58
4.2. Tabla resumen de las medidas globales para la red del caso base. Las cifras marcadas con * se encuentran en millones. . .	64
5.1. Porcentaje de días en que la red mostró evidencia en favor de la distribución ley de potencia. . . . .	73
5.2. Resumen de las medidas globales para las redes del SPEI. Las cifras marcadas con * se encuentran en miles. . . . .	82
6.1. Estadísticas sobre los lugares que asigna cada medida de centralidad para el banco 13. . . . .	87
6.2. Correlaciones promedio entre el índice por componentes principales y las medidas de centralidad para la red de exposiciones interbancarias . . . . .	89
6.3. Correlaciones promedio entre el índice por componentes principales y las medidas de centralidad para la red del SPEI. . . .	91
6.4. Porcentaje de acierto asociado al criterio de los $k$ Vértices Superiores con nivel de error del 20 % . . . . .	94
6.5. Porcentaje de acierto asociado al criterio de los $k$ Vértices Inferiores con nivel de error del 1 % . . . . .	95

# Índice de figuras

2.1. Estructura de una red dividida en sus componentes . . . . .	16
3.1. Comparación entre dos redes con distintas estructuras . . . . .	36
3.2. Comparación entre la distribución Poisson y la distribución ley de potencia discreta . . . . .	39
3.3. Modelo de Watts y Strogatz . . . . .	44
4.1. Redes de exposiciones interbancarias . . . . .	54
4.2. Posiciones de riesgo interbancarias para el periodo 2007-10. Fuente:(Banxico, 2010) con cifras a junio de 2010 . . . . .	55
4.3. Prueba gráfica para el ajuste de la distribución ley de potencia en la red del caso base (sin CLS) . . . . .	57
4.4. Evolución en el tiempo del <i>valor-p</i> correspondiente al grado interior de los bancos en la red del caso base (sin CLS) . . . . .	58
4.5. Evidencia de la propiedad de mundo pequeño en la red del caso base (sin CLS) . . . . .	60
4.6. Evolución de la red de exposiciones interbancarias en el caso de estudio sin modificaciones. . . . .	61
4.7. Índice de completitud y tamaño del núcleo para la red del caso base (sin CLS) . . . . .	62
4.8. Flujo promedio de la red del caso base (sin CLS) y comparación del grado promedio entre los casos de estudio sin CLS y sin divisas . . . . .	63
4.9. Grado contra afinidad en el caso base de estudio (sin CLS) . . . . .	65
4.10. Índice de Herfindahl Hirschman exterior y entropía para el banco 7 en el caso base (sin CLS) . . . . .	65
4.11. Índice de Preferencia del Prestamista (LPI) en el período de mayor concentración para el banco 7 en el caso base (sin CLS) . . . . .	66

4.12. Flujo del banco 13 en la red del caso base (sin CLS) . . . . .	67
4.13. Grado exterior del banco 7 para dos casos de estudio . . . . .	67
5.1. Sistemas de pago de alto valor. Fuente:(Banxico, 2010) con cifras a junio de 2010 . . . . .	70
5.2. Redes del SPEI para el último día del estudio . . . . .	71
5.3. Evolución en el tiempo del <i>valor-p</i> correspondiente al grado de los bancos en la red del SPEI. . . . .	74
5.4. Evidencia de la propiedad de mundo pequeño en la red del SPEI total . . . . .	75
5.5. Evolución y tamaño del núcleo de la red del SPEI total. . . . .	76
5.6. Comparación del índice de completitud y el grado promedio entre las redes correspondientes a las operaciones de bajo y alto valor. . . . .	77
5.7. Comparación de la fuerza promedio y el volumen entre las redes correspondientes a las operaciones de bajo y alto valor. . . . .	78
5.8. Relaciones interbancarias para la red SPEI . . . . .	79
5.9. Comparación del índice de Herfindahl Hirschman de prestata- rio del banco 15. . . . .	79
5.10. Comparación del flujo del banco 4 para las operaciones de alto y bajo valor . . . . .	80
5.11. Coeficiente de agrupamiento de los bancos 19 y 8 para las operaciones de alto y bajo valor . . . . .	81
6.1. Algunas medidas de centralidad para el banco 13 dentro de la red de exposiciones interbancarias sin CLS . . . . .	85
6.2. Correlaciones a lo largo del tiempo entre las medidas de cen- tralidad. . . . .	86
6.3. Medidas de centralidad para el banco 13 en la red del SPEI . . . . .	90
6.4. Comparación del índice $PC^{(3)}$ en los casos de estudio para la red del SPEI . . . . .	91
6.5. Correlaciones para las medidas $C_D$ y $PC^{(6)}$ graficados contra la iteración. . . . .	96
6.6. Traslapo ( $T_k$ ) promedio por categorías para el nivel de error de 5% . . . . .	97

# Capítulo 1

## Introducción

Uno de los principales propósitos de un banco central es establecer políticas que contribuyan a la estabilidad del sistema financiero a su cargo. Las crisis financieras recientes han resaltado la importancia de este tema y con el tiempo se ha manifestado una vez más que se requieren modelos y nuevas perspectivas que permitan estudiar a las instituciones financieras en conjunto y no de manera aislada. Aún más, los marcos regulatorios actuales no siempre consideran las pérdidas provocadas por los eventos en que se vea afectado todo el sistema, sólo toman en cuenta el riesgo individual que aporta cada institución o banco.

Un banco central podría adoptar una política de rescates financieros indiscriminados evitando así la quiebra de cualquier banco y la posible afectación que esta pudiera traer por consecuencia. Pero esto podría conllevar a un comportamiento indisciplinado y poco cauteloso por parte de los participantes en el sistema. La política óptima sería rescatar sólo a aquellos bancos cuya quiebra podría ocasionar problemas severos en el correcto funcionamiento del sistema. Luego el banco central se puede reservar el derecho de rescatar a los bancos que no son tan importantes para el sistema que bien pudieron haber quebrado por sus propias prácticas imprudentes. Este es un asunto que requiere ser estudiado con cuidado para prevenir efectos negativos como la ocurrencia del riesgo moral<sup>1</sup>.

Las cuestiones anteriores giran en torno al concepto de riesgo sistémico. En particular son su objeto de estudio las variables y factores que ponen en

---

<sup>1</sup>Esta situación podría darse si, por ejemplo, un banco que sabe que es considerado sistémicamente importante puede incurrir en comportamientos que lo pusieran en riesgo a sabiendas de que sería rescatado si llega a quebrar.

riesgo al sistema así como la identificación de las instituciones que, con su incumplimiento, pudieran afectarlo de forma grave.

A pesar de la importancia del riesgo sistémico para el entorno de la regulación financiera internacional aún no se ha llegado a un acuerdo sobre una definición universalmente aceptada para este concepto. Y la falta de una definición común conlleva a una amplio repertorio de propuestas para estudiarlo y medirlo.

Cabe destacar que el riesgo sistémico es un tema que aún propone retos y cuestiones que no han sido resueltas de forma concluyente, el panorama de investigaciones aún pendientes es bastante amplio.

Esta tesis se suma a la literatura sobre estudios empíricos que permiten conocer a los sistemas bancarios desde la perspectiva de la teoría de redes, conocer sus características, y evaluar la sensibilidad de dicho sistema a las turbulencias financieras, dentro del entorno de riesgo sistémico.

En la siguiente sección se presentan algunos antecedentes con respecto al estudio del riesgo sistémico y sirve para situar en contexto el trabajo posterior en la tesis. Posteriormente se hablará más detalladamente sobre los objetivos, las contribuciones y la organización de esta tesis.

## 1.1. Nociones de riesgo sistémico

Desde una perspectiva más general, el riesgo sistémico no es un fenómeno limitado a los sistemas financieros. Puede hablarse de una población de individuos en la que algunos contraen una enfermedad y el contacto con individuos sanos provoca la infección de éstos. El efecto de contagio puede propagarse a más individuos provocando la aniquilación o al menos el debilitamiento de una parte importante de la población.

En los sistemas financieros del mundo puede darse un fenómeno similar. Para el contexto económico y de los sistemas financieros el Banco de Pagos Internacionales (BIS por sus siglas en inglés), en su reporte anual de 1993-1994 establece la siguiente definición: “Riesgo sistémico es el riesgo de que el incumplimiento de un participante a sus obligaciones contractuales pueda ocasionar el que otros participantes también incumplan, generando una reacción en cadena que conlleve mayores dificultades financieras.”

A partir de la anterior y de otras definiciones Martínez-Jaramillo et al. (2010b) señalan que el riesgo sistémico se puede caracterizar por medio de dos componentes: el primero, un choque aleatorio inicial que afecta a una

o más instituciones financieras (hasta el punto de provocar su falla) y el segundo, un mecanismo de contagio que transmite los efectos negativos a otras instituciones del sistema. Mencionan además que los mecanismos o medios de contagio pueden ser varios; por ejemplo, los sistemas de pagos o el mercado interbancario.

En Bandt and Hartmann (2000) se hace un compendio sobre la evidencia empírica en las maneras en que se lleva a cabo el contagio financiero. Este último es un aspecto muy importante para los estudios de riesgo sistémico y la teoría de redes ha sido usada para modelos que consideran el efecto de contagio.

### **1.1.1. Algunos métodos para cuantificar el riesgo sistémico o asignar importancia sistémica**

Las medidas de riesgo comunmente utilizadas<sup>2</sup> no capturan el efecto de contagio, o riesgo de derrame a otras instituciones, situación que suele ocurrir en tiempos de crisis financieras. Es necesario medir el potencial que tiene cada institución de provocar este tipo de riesgo.

Con este propósito Adrian and Brunnermeier (2008) extienden al  $VaR$  para crear otra medida de riesgo ( $CoVaR$ ), la cual, a grandes rasgos puede describirse como el  $VaR$  condicionado a que otra institución o varias instituciones estén sufriendo pérdidas equivalentes a su propio nivel del  $VaR$ .

En Segoviano and Goodhart (2009) los autores proponen medidas para la estabilidad de los bancos en un sistema por medio de cópulas, de tal manera que dichas medidas puedan capturar las relaciones de dependencia entre el incumplimiento de los bancos.

Por su parte, Tarashev et al. (2009) usan una herramienta de teoría de juegos, conocida como *Shapley Value*, para definir una metodología que les permite obtener medidas que asignen riesgo sistémico a las instituciones de manera flexible dependiendo de los objetivos de la institución reguladora que las aplica. Uno de los objetivos puede ser crear requerimientos de capital, entonces los procedimientos se pueden ajustar para que se asigne riesgo sistémico a las instituciones reflejando su contribución a él. O también se pueden ajustar bajo la idea de que los bancos están pagando la prima de un seguro que los proteja contra las pérdidas en eventos de tipo sistémico específicos.

---

<sup>2</sup>Como el  $VaR$  o el *Expected Shortfall*

En una línea de trabajo con objetivos similares Acharya et al. (2010) proponen un modelo para deducir las primas que deberían cobrarse a los bancos por un seguro de depósito bancario<sup>3</sup> y que considera las condiciones que favorecen al riesgo sistémico como las correlaciones entre sus inversiones.

En Gauthier et al. (2010) los autores definen un modelo de un sistema bancario en el que ponen a prueba distintas medidas para el riesgo sistémico, entre ellas el *CoVaR* y el uso de la metodología propuesta por Tarashev et al. (2009). Concluyen que la estabilidad financiera se puede mejorar sustancialmente con la aplicación de dichas metodologías para exigir nuevos requerimientos de capital, esto lo deducen observando que las probabilidades de incumplimiento individuales y de múltiples bancos se ven reducidas de forma importante.

Otro estudio que compara distintas medidas para el riesgo sistémico puede encontrarse en Rodríguez-Moreno and Peña (2011). En este se calculan seis medidas de riesgo sistémico para una muestra de bancos de Europa y de EUA, por medio de tres criterios distintos para evaluar el desempeño de dichas medidas concluyen que las más confiables son las medidas basadas en ciertos índices de mercado o tasas de interés que, por ejemplo, el *CoVaR*.

### 1.1.2. Aplicaciones de redes al estudio del riesgo sistémico

Entre las variadas propuestas metodológicas para los estudios concernientes a riesgo sistémico y contagio financiero la teoría de redes ha venido a ocupar un lugar preponderante y esto se refleja en la numerosa cantidad de artículos publicados recientemente. Aún más, muchos reportes de estabilidad financiera incluyen alguna sección sobre redes, contagio o interconectividad.

Los modelos que usan redes resultan muy útiles por varias razones: son muy intuitivos, hay una cantidad considerable de resultados teóricos al respecto y permiten visualizar los patrones en que se conectan los bancos en el sistema.

En el capítulo 3 se hablará en más detalle sobre los modelos de redes y riesgo sistémico

---

<sup>3</sup>Se trata de una medida implementada en algunos países para proteger de las pérdidas ocasionadas por la incapacidad de los bancos de pagar sus deudas a los clientes que depositan dinero en estos.



## 1.2. Objetivos de la tesis

Conocer el sistema interbancario mexicano por medio de la teoría de redes y deducir posibles implicaciones en su estabilidad y en la del sistema bancario mexicano.

Averiguar el impacto que pudiera haber tenido la caída del banco Lehman Brothers el 15 de septiembre de 2008 en las redes del SPEI y de exposiciones interbancarias, así como en el comportamiento de los bancos a nivel individual.

Comparar la asignación de importancia de los bancos por medio de las medidas de centralidad conocidas en la literatura con la de un nuevo índice de centralidad propuesto en esta tesis. Conocer más a fondo el desempeño de cada medida o índice de centralidad según varios criterios.

## 1.3. Contribuciones de la tesis

- Caracterizar, por primera vez en México, al sistema interbancario mexicano por medio de redes. Así, la tesis se suma a la creciente literatura que involucra estudios empíricos sobre algún sistema financiero bajo la óptica de la teoría de redes.
- Exhibir las características estructurales de las redes que se estudiaron en esta tesis así como algunas características individuales de los participantes del sistema bancario mexicano.
- Propuesta de un nuevo índice de centralidad para evaluar la importancia sistémica de una institución bajo el criterio de interconectividad que considera las medidas de centralidad previamente estudiadas.
- Mostrar evidencia empírica que permita reflexionar sobre la aplicabilidad de distintos modelos para la formación de redes.
- Realización de pruebas de robustez que permiten comparar la asignación de importancia y el desempeño de las distintas medidas de centralidad y el índice aquí propuesto.
- Se propone una mejora a un índice que permite medir la intensidad de las relaciones interbancarias considerando la dimensión del tiempo.

- En general se muestra una metodología completa para el monitoreo de los sistemas bancarios por medio de métricas de otros estudios empíricos similares y algunas nuevas.

## 1.4. Organización de la tesis

El resto de la tesis se estructura como sigue: El **Capítulo 2** provee las definiciones necesarias de la teoría de redes que ayudarán a modelar al sistema de exposiciones interbancarias en México y al Sistema de Pagos Electrónicos Interbancarios (SPEI)<sup>4</sup>. Estos sistemas se representarán por medio de una red en la que los vértices corresponden a los bancos y los arcos representan una exposición de riesgo o un flujo de dinero entre estos.

Asimismo se definirán las métricas que permiten estudiar distintas características de las redes enteras y de los vértices de manera individual. Posteriormente se detallan algunas medidas que asignan centralidad o relevancia a un banco dentro de la red, cada una basada en criterios distintos.

Posterior a esto se propone la creación de un índice que considere todos los criterios para la asignación de centralidad estudiados previamente y se menciona al análisis de componentes principales como una posible manera para definirlo. Al final del capítulo se mencionan algunas características deseables que deberían cumplir las medidas de centralidad, incluyendo la robustez.

En el **Capítulo 3** se explicarán algunas propiedades y características presentes en distintas redes de la naturaleza y de algunos sistemas financieros de varios países. Después se revisarán distintos modelos para formar redes que repliquen algunas de estas características o que pretendan explicar la manera en que se forman algunas redes observadas en el mundo. Estos modelos pueden ser útiles para la simulación adecuada de los sistemas bancarios y los estudios de estrés y contagio que permitan obtener resultados teóricos referentes a riesgo sistémico.

Al final de dicho capítulo se revisa parte de la literatura referente al uso de los modelos de redes en temas de economía, finanzas y algunos estudios tanto teóricos como empíricos relacionados a riesgo sistémico. Estos últimos estudios motivan la investigación desarrollada en los siguientes capítulos.

La red de exposiciones interbancarias se estudia en el **Capítulo 4** y la red correspondiente al SPEI será analizada en el **Capítulo 5**. Ambas redes, por la naturaleza de las transacciones inherentes a ellas, presentan características

---

<sup>4</sup>Este es considerado el sistema de pagos más importante en México.

muy distintas. Es importante decir también que cada red cambia diariamente y algunos de dichos cambios bien pueden ser el reflejo de turbulencias financieras.

El análisis se complementa dividiendo cada una de las redes en 3 casos de estudio. La red de exposiciones interbancarias se divide de acuerdo a la naturaleza de las posiciones de riesgo interbancarias y, la red del SPEI, por la magnitud de los montos de los pagos. Las redes entre los distintos casos de estudio también revelan diferencias y propiedades notables.

Por otra parte, en el **Capítulo 6** se desarrolla un estudio sobre el comportamiento de las distintas medidas de centralidad en cada red y en los distintos casos de estudio. Finalmente se realizan pruebas que permiten averiguar la robustez de las medidas de centralidad cuando una red con propiedades específicas sufre ciertas perturbaciones o cambios. Este estudio permite comparar el desempeño general de las medidas de centralidad y el índice propuesto en la tesis.

El **Capítulo 7** resume algunos resultados y concluye. También se mencionan distintas propuestas para continuar con las investigaciones relacionadas con el trabajo desarrollado en la tesis.

El concepto de entropía se presenta en la literatura concerniente a riesgo sistémico en numerosas ocasiones. Por esto, el **Apéndice A** tiene el propósito de dar una introducción a este tema en el contexto de teoría de la información.

Por su parte, el **Apéndice B** sirve como una introducción breve al análisis de componentes principales. Ya se mencionó que dicha metodología es una posible manera, aunque no la única, para definir el índice de centralidad propuesto en el capítulo 2.

## Capítulo 2

# Elementos de teoría de redes y centralidad

La experiencia reciente de crisis financieras en diversos países muestra que no basta con regulaciones y monitoreo de los bancos de forma individual ya que esta visión no permite identificar las debilidades de un sistema a causa de las interdependencias de las instituciones. Entonces, para un adecuado estudio de riesgo sistémico es de vital importancia la identificación de patrones de interconexión entre los bancos o entidades financieras del sistema.

Como se explica en Allen and Babus (2008): *Los problemas en los mercados financieros en Agosto de 2007 y en meses posteriores revelaron su intrincada naturaleza. Mientras se desarrollaban los acontecimientos fue claro que las consecuencias de un sistema interconectado de tal manera son difíciles de predecir. Lo que inició con dificultades en el mercado hipotecario en EUA rápidamente creció hasta manifestarse en los mercados financieros del mundo.*

La representación de los sistemas financieros por medio de una red ofrece una manera natural de visualizar la situación desde un punto de vista sistémico. Este tipo de modelos son intuitivos y adecuados para representar las interacciones entre las instituciones financieras.

Otro aspecto atractivo del uso de la teoría de redes es que presenta diversos desarrollos teóricos que han sido aplicados, por ejemplo, en la sociología y que, con las modificaciones adecuadas pueden adaptarse al estudio del riesgo sistémico.

Desde el punto de vista de esta teoría es posible hacer inferencias sobre la fragilidad del sistema y conocer la manera en que las instituciones finan-

cieras forman conexiones entre ellas en condiciones normales y cuando están expuestas a situaciones de adversidad financiera, esto último puede ser útil para realizar pruebas de estrés ajustando los parámetros de un modelo de contagio de manera adecuada.

Este capítulo tiene el propósito de presentar la herramienta necesaria para realizar un estudio de los sistemas financieros por medio de una red. El resto del capítulo se estructura como sigue: En la sección 2.1 se dan algunas definiciones básicas de la teoría de redes que permitirán definir las métricas de las secciones posteriores. En la sección 2.2 se definen distintas medidas asociadas a la manera en que se conectan los vértices en una red. La sección 2.3 contiene medidas que consideran los pesos de los arcos de la red. En la sección 2.4 se definen distintas métricas para asociar centralidad o importancia a los vértices de una red de acuerdo con distintos criterios. En la sección 2.5 se hace la propuesta de un nuevo índice de centralidad que unifique a las medidas de centralidad discutidas en la sección anterior. Finalmente se mencionan algunas características que algunos autores consideran deseables para las medidas de centralidad en la sección 2.6.

## 2.1. Definiciones iniciales

La mayoría de las siguientes definiciones y nociones de teoría de gráficas fueron tomadas de Harary (1969).

### Gráfica No Dirigida

Sean  $V \neq \emptyset$  un conjunto finito y  $E \subseteq \{\{i, j\} | i, j \in V\}$  un conjunto de parejas no ordenadas, los elementos de  $V$  serán llamados vértices y los elementos de  $E$ , aristas. Se dice entonces que

$$G = (V, E) \tag{2.1}$$

es una *gráfica no dirigida*.

### Gráfica Dirigida

Sean  $N \neq \emptyset$  un conjunto finito y  $A \subseteq N \times N$  un conjunto de parejas ordenadas, los elementos de  $N$  se llaman nodos y los elemento de  $A$ , arcos. Se dice que la pareja

$$D = (N, A) \tag{2.2}$$

es una *gráfica dirigida* o *digráfica*. Nótese que en las gráficas dirigidas el orden es importante. En particular  $(i, j) \in A$  significa que existe un arco dirigido del vértice  $i$  al vértice  $j$  y esto no necesariamente implica que  $(j, i) \in A$ .

Por comodidad, cuando se refiera a una gráfica no dirigida o a una digráfica se hablará de un conjunto de vértices  $V$  y de un conjunto de arcos  $E$ , tomando la notación de la igualdad 2.1. Y para referirse a los vértices con mayor claridad éstos serán numerados. Es decir, si  $V$  es un conjunto de  $n$  vértices entonces  $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

### Red No Dirigida

Dados un conjunto de vértices  $V \neq \emptyset$  finito y  $E$  el conjunto de arcos. Una *red no dirigida* es una terna

$$R = (V, E, w) \quad (2.3)$$

en donde  $G = (V, E)$  es una gráfica no dirigida y  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que asocia pesos a los arcos. Para simplificar la notación, si  $(i, j) \in E$  entonces  $w(i, j) = w_{ij}$ .

### Red Dirigida

Dados los conjunto de vértices y arcos, finitos,  $V \neq \emptyset$  y  $E$  respectivamente. Una *red dirigida* es una terna como en 2.3 pero en la cual  $G = (V, E)$  es una digráfica y  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función que asocia pesos a los arcos. El sistema bancario mexicano será representado por medio de una red dirigida.

La definición anterior no es muy precisa, ya que en realidad es la definición de *digráfica ponderada*, sin embargo, los términos *red* y *gráfica ponderada* se han usado como sinónimos en la literatura concerniente a contagio financiero.

### Camino, Trayectoria y Longitud

Para una gráfica no dirigida  $G$  un *camino* es una secuencia alternada de vértices y arcos  $i_0, e_1, \dots, i_{k-1}, e_k, i_k$ , iniciando y finalizando con un vértice y en la cual el arco  $e_m$  une a los vértices  $i_{m-1}$  y  $i_m$ .

En una gráfica dirigida  $G$  una *trayectoria* es un camino en el cual  $e_m$  es un arco dirigido del vértice  $i_{m-1}$  al vértice  $i_m$ .

La *longitud* de un camino o de una trayectoria  $i_0, e_1, \dots, i_{k-1}, e_k, i_k$  es la cantidad de arcos que hay entre  $i_0$  y  $i_k$ .

Una gráfica puede ser representada por medio de sus adyacencias o sus incidencias, información que puede ser expresada en forma matricial. Cualquiera de las medidas topológicas que se definirán posteriormente pueden

calcularse en base a estas matrices.

### Matrices de Adyacencias

La *matriz de adyacencias* de la gráfica no dirigida  $G$ , denotada por  $A = (a_{ij})$ , se define de la siguiente manera:  $a_{i,j} = 1$  si existe  $(i, j) \in E$  o si existe  $(j, i) \in E$ ; en caso contrario  $a_{i,j} = 0$ .

Sea  $G$  una digráfica, entonces la *matriz de adyacencias exteriores*  $A^+ = (a_{ij}^+)$  de  $G$  se define como sigue:  $a_{ij}^+ = 1$  si existe un arco  $(i, j) \in E$  y en caso contrario  $a_{ij}^+ = 0$ .

Análogamente para la digráfica  $G$  se define la *matriz de adyacencias interiores*  $A^- = (a_{ij}^-)$  con  $a_{ij}^- = 1$  si existe un arco  $(j, i) \in E$  y en caso contrario  $a_{ij}^- = 0$ .

En el contexto en que se va a trabajar  $a_{ij}^+ = 1$  significa que el banco  $i$  está expuesto al banco  $j$  o que el banco  $i$  paga a  $j$ , mientras que  $a_{ij}^- = 1$  significa que el banco  $j$  está expuesto a  $i$  o que  $j$  paga a  $i$ .

Además se cumple que  $A^+ = (A^-)^T$ .

### Matrices de Incidencias

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica no dirigida con  $n = |V|$  vértices y  $m = |E|$  arcos, entonces la *matriz de incidencias de la gráfica no dirigida*  $G$  se denota  $B = (b_{ij})$  y es de  $n \times m$ . Se define como sigue:  $b_{ij} = 1$  si el vértice  $i$  está conectado al arco  $e_j$  (es decir, si son incidentes) y  $b_{ij} = 0$  en otro caso.

Ahora sea  $G = (V, E)$  una digráfica con  $n = |V|$  vértices y  $m = |E|$  arcos. La *matriz de incidencias de la digráfica*  $G$  es una matriz  $B = (b_{ij})$  de  $n \times m$  y se define de la siguiente forma:  $b_{ij} = 1$  si el vértice  $i$  es el extremo inicial del arco  $e_j$ ,  $b_{ij} = -1$  si el vértice  $i$  es el extremo final del arco  $e_j$  y  $b_{ij} = 0$  en otro caso.

El siguiente teorema resultará útil para el cálculo del coeficiente de agrupamiento, medida que será definida posteriormente.

**Teorema 2.1.** (*Potencias de la Matriz de Adyacencias*): Sea  $G = (V, E)$  una gráfica no dirigida,  $n = |V|$ , con matriz de adyacencias  $A$ , entonces la entrada  $a_{ij}^{(k)}$  de  $A^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  es el número de caminos de longitud  $k$  que unen a los vértices  $i \in V$  y  $j \in V$ .

*Demostración.* Se hará por inducción. El hecho es claro si  $k = 1$ , la entrada  $a_{ij}$  de la matriz de adyacencias indica si existe algún camino de longitud 1

entre los vértices  $i$  y  $j$ . Ahora supóngase que el teorema es cierto para algún  $k \in \mathbb{N}$  fijo, por demostrar que el teorema es cierto para  $k + 1$ .

Nótese que la entrada  $a_{ij}^{(k+1)}$  de la matriz  $A^{k+1}$  se puede escribir:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{m=1}^n a_{im}^{(k)} a_{mj}$$

Por hipótesis de inducción  $a_{im}^{(k)}$  es el número de caminos de longitud  $k$  que unen a  $i$  y a  $m$ , este número es multiplicado por el factor  $a_{mj}$  que vale 1 si existe un camino de longitud 1 de  $m$  a  $j$ , teniéndose en tal caso  $a_{im}^{(k)} a_{mj}$  caminos de longitud  $k + 1$  uniendo a los vértices  $i, j$  y que pasan por  $m$ . En caso de que  $a_{mj} = 0$  se tienen  $a_{im}^{(k)} a_{mj} = 0$  caminos de longitud  $k + 1$  que unan a  $i, j$  y que pasen por  $m$ .

Esto se tiene para cada sumando, con lo que queda completa la demostración. □

**Corolario 2.1.** *La entrada  $a_{ii}^{(3)}$  de la matriz  $A^3$  es dos veces el número de triángulos en los que se encuentra el vértice  $i$ .*

### Vecinos

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica no dirigida, se dice que  $j \in V$  es *vecino* del vértice  $i \in V$  si estos están conectados, entonces el conjunto de vecinos del vértice  $i$  es:

$$\mathcal{N}(i) = \{j \in V : a_{ij} = 1\} \quad (2.4)$$

En una digráfica  $G = (V, E)$  se dice que  $j \in V$  es un *vecino exterior* de  $i \in V$  si es que existe el arco  $(i, j) \in E$ . Análogamente se dice que  $j \in V$  es un *vecino interior* de  $i \in V$  si existe el arco  $(j, i) \in E$ .

El conjunto de vecinos exteriores se define como:

$$\mathcal{N}^+(i) = \{j \in V : a_{ij}^+ = 1\} \quad (2.5)$$

y el de vecinos interiores se define como:

$$\mathcal{N}^-(i) = \{j \in V : a_{ij}^- = 1\} \quad (2.6)$$

### Lista de Adyacencias

En términos de estructuras de datos, las gráficas no dirigidas también pueden representarse como una lista de listas. La primer lista contiene a



todos los vértices conexos. Cada vértice  $i$  en esta lista apunta a otra lista que contiene a los vértices vecinos de  $i$ . Es decir,  $\forall i \in V$  con conjunto de vecinos  $\mathcal{N}(i) = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$  su entrada correspondiente a la *lista de adyacencias* es:

$$i \rightarrow j_1, j_2, \dots, j_k \quad (2.7)$$

De forma análoga, para una digráfica se definen la *lista de adyacencias interiores* y la *lista de adyacencias exteriores* por medio de los conjuntos de vecinos interiores y de vecinos exteriores respectivamente.

### Matrices de Pesos o Exposiciones

Sea  $R = (V, E, w)$  una red dirigida, su *matriz de pesos exteriores*  $W^+$  con entradas  $(w_{ij}^+)$  contiene los pesos asociados a cada arco dirigido  $(i, j) \in E$ . Se interpreta como el valor de la exposición que tiene el banco  $i \in V$  con respecto al banco  $j \in V$  o el valor de los pagos que envió el banco  $i$  al banco  $j$ .

De manera similar, cada entrada  $w_{ij}^-$  de la *matriz de pesos interiores*  $W^-$  es el peso asociado a cada arco dirigido  $(j, i) \in E$ . Representa la cantidad de dinero que tomó  $i$  del banco  $j$  o el valor de la exposición de  $j$  a  $i$ .

Así las cosas, se cumple que  $W^+ = (W^-)^T$ .

Además se define la *matriz de pesos*  $W = (w_{ij})$  por medio de  $W = W^+ + W^-$ . Cada entrada es un agregado de la exposición que tiene el banco  $i$  con  $j$  y la exposición que tiene  $j$  con  $i$ .

Las matrices  $A$ ,  $A^+$  y  $A^-$  contienen toda la información sobre qué bancos (vértices) se relacionan con otros bancos. Las matrices  $W$ ,  $W^+$  y  $W^-$  contienen la información sobre los montos (pesos) de los pagos o exposiciones entre los bancos en cuestión. Estas seis matrices bastan para poder calcular todas las métricas usadas en el análisis de las redes interbancarias que se hará en capítulos posteriores.

La primera red que se estudiará en el capítulo 4 es la red de exposiciones interbancarias, en esta los vértices representan a los bancos y los pesos de los arcos representan los montos de las exposiciones o posiciones de riesgo entre estos.

En el capítulo 5 se estudiará la red del Sistema de Pagos Electrónicos Interbancarios (SPEI) en donde los vértices representan a los mismos bancos que en la red anterior pero los pesos de los arcos representan pagos o flujos de dinero entre estos.

Las redes mencionadas anteriormente son dirigidas para poder modelar,

por ejemplo, el hecho de que un banco A puede enviar dinero a un banco B y este último no necesariamente enviar dinero a A. Sin embargo, en muchas ocasiones, se ignorarán las direcciones de los arcos y se considerará que la gráfica subyacente es no dirigida<sup>1</sup>.

## 2.2. Características topológicas de las redes

El término topología de la red es usado para referirse a los patrones de interconexión entre los vértices de la red, es decir, sólo se considera la existencia de los arcos pero no sus pesos asociados. En este sentido, estudiar la topología de la red equivale a analizar la topología de la gráfica asociada a dicha red.

Entre las características básicas de una gráfica  $G = (V, E)$  se encuentran el número de vértices  $n = |V|$  y el número de arcos  $m = |E|$ . Otras características y medidas útiles son:

### 2.2.1. Distancia

La *distancia* entre dos vértices  $i \in V$  y  $j \in V$  de una gráfica dirigida (no dirigida) se denota  $d_G(i, j)$  y es la longitud de la trayectoria (camino) más corto entre ellos, si es que existe.

Si este no existiera se escribe  $d_G(i, j) = \infty$ .

### 2.2.2. Grado

En una gráfica no dirigida  $G = (V, E)$ , el *grado del vértice*  $i \in V$  es el número de arcos que tienen a  $i$  como uno de sus extremos. Esto se traduce en el número de contrapartes que tiene el banco  $i$ :

$$d_i = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} a_{ij} = |\mathcal{N}(i)| \quad (2.8)$$

En una digráfica  $G = (V, E)$  se define el *grado interior* de  $i \in V$  como el número de arcos dirigidos hacia dicho vértice. En este contexto representan

---

<sup>1</sup>Esto último se realiza por simplicidad, para mantener el número de casos posibles de alguna medida al mínimo y porque así lo suelen hacer la mayoría de los autores de la literatura concerniente a este tipo de modelos.

el número de bancos que pagan al banco  $i$  o que están expuestos a él:

$$d_i^- = \sum_{j \in \mathcal{N}^-(i)} a_{ij}^- = |\mathcal{N}^-(i)| \quad (2.9)$$

De manera análoga el *grado exterior* de  $i$  es el número de arcos que se originan en  $i$ . Representa la cantidad de bancos a los que paga  $i$  o a los que  $i$  está expuesto:

$$d_i^+ = \sum_{j \in \mathcal{N}^+(i)} a_{ij}^+ = |\mathcal{N}^+(i)| \quad (2.10)$$

Sea  $n_x$  el número de vértices con grado  $x$  entonces la probabilidad de que algún vértice  $i$  tenga grado  $x$  es:

$$\mathbb{P}(d_i = x) = \frac{n_x}{n} \quad (2.11)$$

El histograma de los grados de la red se conoce como la *distribución del grado* y esta característica se discutirá en el siguiente capítulo.

### 2.2.3. Componentes

Cuando el número de vértices en una red es muy grande es conveniente dar una partición del conjunto de vértices de acuerdo con sus características de conectividad. Esto con el propósito de analizar a la red con más facilidad o distinguir y clasificar a las distintas entidades.

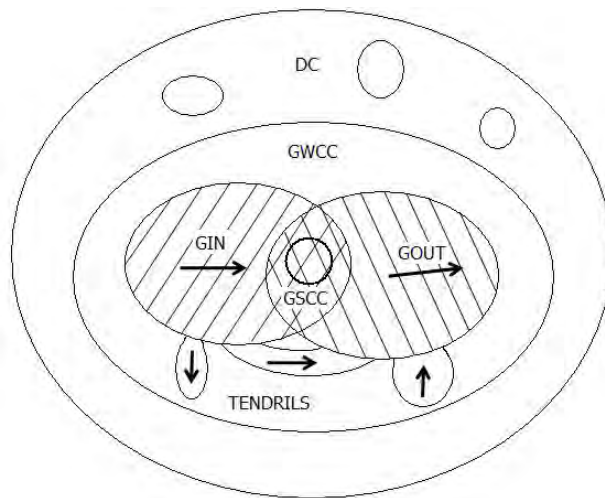
Dorogovstev et al. (2001) proponen dividir al conjunto de vértices  $V$  (ver la figura 2.1), en los siguientes subconjuntos:

- Los *componentes desconexos* (DC). Son los vértices de grado cero y pequeños conjuntos de vértices conectados que no se encuentran en el componente débilmente conexo.
- El *componente débilmente conexo* (GWCC) es el componente más grande en el cual cualquier par de vértices está conectado por algún *camino*, es decir, sin considerar la dirección de los arcos.

El componente débilmente conexo a su vez lo dividen en:

- El *componente fuertemente conexo* (GSCC) o *núcleo* es el componente más grande en el cual, para cada par de vértices  $i$  y  $j$ , existe una *trayectoria* o camino dirigido de  $i$  a  $j$  y una *trayectoria* de  $j$  a  $i$ .

- En el *componente exterior* (GOUT) se encuentran los vértices a los cuáles se puede llegar del GSCC por medio de un *camino*.
- El *componente interior* (GIN) contiene a los vértices desde desde los cuáles se puede acceder al GSCC por medio de algún *camino*.
- Los *tallos* (tendrils) son los vértices desde los que no se puede acceder al núcleo y que tampoco son alcanzables desde él.



**Figura 2.1:** Estructura de una red dividida en sus componentes

El conjunto de vértices de una red más sencilla, o con menor cantidad de vértices bien puede partirse sólo en dos subconjuntos GWCC y DC, es decir, los vértices correspondientes al *núcleo* y los que se encuentran en la periferia.

En el contexto en que se está trabajando se tiene el objetivo de distinguir a los bancos fuertemente expuestos unos con otros en una agrupación grande y a los que no tienen esta propiedad.

#### 2.2.4. Índice de completitud

En una gráfica dirigida con  $n$  vértices y  $m$  arcos el *índice de completitud* es el número de arcos existentes entre el número posible de arcos.

$$p = \frac{m}{n(n-1)} \quad (2.12)$$

Si el índice toma el valor de 0 significa que ningún vértice está conectado a algún otro y mientras el índice sea más cercano a 1 la gráfica se encuentra más cercana a ser completa, es decir, a tener todos los arcos posibles. En el contexto de sistemas financieros esto último se traduce en que cada banco tenga transacciones con todos los demás bancos<sup>2</sup>.

### 2.2.5. Reciprocidad

La *reciprocidad* en una gráfica dirigida es la fracción de arcos en alguna dirección para la cual existe un arco en la dirección opuesta. Se define:

$$r = \frac{\sum_{i \in V} \sum_{j \in N(i)} a_{ij}^+ a_{ji}^+}{\sum_{i \in V} \sum_{j \in N(i)} a_{ij}^+} \quad (2.13)$$

El índice toma valores entre 0 y 1. Si el índice vale 0 ninguno de los arcos de la red es correspondido por el arco en la dirección opuesta y si el índice vale 1 todos los arcos en la red son correspondidos.

### 2.2.6. Afinidad

La siguiente medida se calcula sobre la gráfica no dirigida, asociada a la red. Basándose en los grados de los vértices, refleja con qué tipo de vértices tienden a relacionarse.

$$a_i = \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} d_j \quad (2.14)$$

Si  $a_i$  es creciente con  $d_i$  entonces los vértices de grados grandes tienden a relacionarse con otros vértices con muchas conexiones, es decir, de grado similar. Cuando ocurre que  $a_i$  decrece con  $d_i$  la mayoría de los vecinos de vértices con grado alto tienen grados menores e inversamente, los vértices de grado menor tienden a relacionarse con vértices de grado mayor.

Esta es una medida global que da una idea sobre si los vértices tienden a relacionarse con vértices de grado similar a ellos, esta característica es

---

<sup>2</sup>Bajo el supuesto de máxima entropía (ver el apéndice A) se presupone que las interacciones interbancarias estén lo más equitativa y homogéneamente distribuidas entre los participantes, lo que implica una gráfica cercana a ser completa.

conocida en la literatura como “*assortative mixing*”; el fenómeno opuesto se conoce como “*disassortative mixing*”.

### 2.2.7. Coeficiente de agrupamiento (clustering)

El agrupamiento describe en qué medida los vecinos de algún vértice están conectados entre sí, se trata de una característica no local que mide la densidad de las conexiones alrededor de algún vértice. En este contexto, el coeficiente indica si existe una conexión entre dos bancos que tienen en común a un banco con quien ellos también realizan intercambios.

Se calcula sobre la gráfica no dirigida, si el vértice  $i$  tiene  $d_i$  vecinos, es decir, grado  $d_i$ , con  $t_i$  conexiones entre ellos entonces el coeficiente de agrupamiento es:

$$c_i = \frac{t_i}{d_i(d_i - 1)/2} \quad (2.15)$$

Se puede interpretar también como la probabilidad de que dos vecinos de algún vértice también sean vecinos ellos mismos. Ya que  $\binom{d_i}{2} = d_i(d_i - 1)/2$  es la cantidad de conexiones que podrían existir entre los vecinos de  $i$ .

Si el índice se encuentra cercano a 1 es probable que cualesquiera dos vecinos del vértice  $i$  también sean vecinos y se encuentra cercano a 0 en caso contrario.

Nótese que  $t_i$  es la cantidad de triángulos ligados al vértice  $i$ . Si  $(a_{ij}^{(3)})$  son las entradas de la matriz  $A^3$ , entonces una manera equivalente de calcular el coeficiente de agrupamiento es<sup>3</sup>:

$$c_i = \frac{a_{ii}^{(3)}}{d_i(d_i - 1)} \quad (2.16)$$

Si un vértice  $i$  no tiene vecinos, es decir, si  $d_i = 0$  se define  $c_i = 0$ .

Para que en el sistema bancario haya un triángulo al menos un banco debe prestar dinero a una contraparte y tomar prestado de otra. El coeficiente de agrupamiento permite evaluar la tendencia de los bancos hacia este comportamiento.

Una medida global de la densidad la red es el promedio de los coeficientes de agrupamiento de todos los vértices en la red:

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i \in V} c_i \quad (2.17)$$

---

<sup>3</sup>Por el corolario 2.1 sobre las potencias de la matriz de adyacencias

Asimismo, si se encuentra cercano a 1 indica que las contrapartes de cualquier banco también tienden a realizar transacciones entre ellas.

La magnitud del coeficiente de agrupamiento promedio es una característica que distingue a cierto tipo de redes, será retomada en el siguiente capítulo.

## 2.3. Otras medidas

El siguiente conjunto de medidas se basa en los pesos de los arcos entre los vértices, a diferencia de las medidas expuestas anteriormente que dependen sólo de la manera en que se conectan los vértices en la red. Estas métricas permiten analizar el patrón de las exposiciones o pagos entre los bancos en la red.

### 2.3.1. Fuerza

En una red dirigida  $R = (V, E, w)$  se define la *fuerza interior* del banco (vértice)  $i \in V$ :

$$s_i^- = \sum_{j \in \mathcal{N}^-(i)} w_{ij}^- \quad (2.18)$$

Y representa la cantidad total de dinero que recibió de todas sus contrapartes o los montos de las obligaciones que tiene hacia ellas.

La *fuerza exterior* del vértice  $i$  es:

$$s_i^+ = \sum_{j \in \mathcal{N}^+(i)} w_{ij}^+ \quad (2.19)$$

Representa la cantidad total de dinero que prestó el banco  $i$  a todas sus contrapartes o su exposición total al sistema.

La *fuerza* del vértice  $i$  se define:

$$s_i = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} w_{ij} \quad (2.20)$$

Es un agregado entre el total de los montos que prestó  $i$  y el total de los montos que le fueron prestados. Puede interpretarse como una medida de la intensidad de sus interacciones con todas sus contrapartes.

### 2.3.2. Flujo

En una red dirigida el *flujo* entre los bancos  $i$  y  $j$  es:

$$f_{ij} = w_{ij}^+ - w_{ij}^- \quad (2.21)$$

representa la *cantidad neta* de dinero intercambiada entre  $i$  y  $j$  o las exposiciones netas entre estos dos.

Este será positivo si es que el banco  $i$ , en términos netos, prestó una cantidad de dinero mayor de la que pidió prestada a  $j$  o pagó una cantidad mayor de la que le fue pagada.

También se define al flujo del banco  $i$  como la suma de los flujos con todas sus contrapartes.

$$f_i = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} f_{ij} = s_i^+ - s_i^- \quad (2.22)$$

Este será positivo si el banco  $i$  es un prestamista neto para el sistema y será negativo si  $i$ , en términos netos, se financia por medio del sistema.

### 2.3.3. Volumen

Para la red dirigida el *volumen* se define como:

$$Vol = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} w_{ij}^+ = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} w_{ij}^- \quad (2.23)$$

y representa la cantidad total de pagos que fluyeron a través del sistema o el monto total de las exposiciones a través del sistema, en un día dado. Este es un indicador global de la intensidad de las transacciones en la red.

### 2.3.4. Índice de Herfindahl-Hirschman (HHI)

Este es un indicador comunmente usado para medir la competencia de las empresas en el mercado. En este contexto ayuda a indicar la concentración de las exposiciones o de los pagos entre las distintas contrapartes.

El HHI exterior sirve para evaluar si los préstamos de un banco se concentran en pocas de sus contrapartes o si se diversifican entre estas.

$$HHI^+(i) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( \frac{w_{ij}^+}{\sum_j w_{ij}^+} \right)^2 \quad (2.24)$$



Si el denominador es igual a 0 entonces se define el índice como 0.

Si el índice toma valores cercanos a 1 significa que el banco  $i$  está concentrando sus préstamos en pocas contrapartes. Valores cercanos a 0 indican una diversificación de los préstamos de  $i$  en varias contrapartes, relativamente.

De forma análoga, el HHI interior determina si los préstamos que recibe un banco se encuentran diversificados o concentrados entre sus contrapartes.

$$HHI^-(i) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( \frac{w_{ij}^-}{\sum_j w_{ij}^-} \right)^2 \quad (2.25)$$

La concentración es un asunto importante en el contagio financiero, como se explica en Martínez-Jaramillo et al. (2010b): *en realidad no importa si un banco presta a todo el sistema si a un solo banco le está prestando una cantidad de dinero suficiente para llevarlo a la insolvencia... Las instituciones reguladoras desearían que los bancos prestaran o se expusieran de forma diversificada y no concentrada.*

### 2.3.5. Índices de preferencia

Para conocer mejor el funcionamiento de un sistema bancario o un mercado es importante determinar el comportamiento de los bancos en él a lo largo del tiempo. Puede ser interesante saber si un banco prefiere dar préstamos a algún banco que a los demás del sistema. O si algunos eventos que provoquen dificultades macroeconómicas pudieran alterar las relaciones entre los bancos. En resumen, para conocer las relaciones entre estos es necesario evaluar la intensidad de sus interacciones, con este propósito los autores de Cocco et al. (2008) proponen las siguientes medidas:

- *Índice de Preferencia del Prestamista (LPI)* Para cada prestamista potencial ( $i$ ) y cada prestatario ( $j$ ) se calcula la razón de la cantidad total de fondos que el banco  $i$  ha prestado al banco  $j$  con respecto a la cantidad total de fondos que  $i$  ha prestado a todo el sistema, en los últimos  $k$  días de actividad en el sistema<sup>4</sup>.

$$LPI_{i,j}(t) = \left( \sum_{s=1}^k F_{i,j}(t-s) \right) / \left( \sum_{s=1}^k F_{i,\mathcal{N}(i)}(t-s) \right) \quad (2.26)$$

---

<sup>4</sup>Los autores sugieren considerar los últimos  $k = 30$  días

en donde  $F_{i,j}(t)$  es el total de fondos<sup>5</sup> que  $i$  prestó a  $j$  en el día  $t$  (es el valor de  $w_{ij}^+$  en el día  $t$ ) y  $F_{i,\mathcal{N}(i)}(t)$  es la cantidad de fondos que  $i$  prestó al sistema en el día  $t$  (es el valor de  $\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} w_{ij}^+$  en el día  $t$ ). Si el denominador es igual a 0 entonces el índice se define como cero.

Si  $i$  tiende a otorgar la mayor parte de sus préstamos a  $j$  la razón anterior debería ser cercana a 1 y acercarse a 0 en el caso contrario.

- *Índice de Preferencia del Prestatario (BPI)* se define de manera análoga al índice anterior:

$$BPI_{i,j}(t) = \left( \sum_{s=1}^k F_{i,j}(t-s) \right) / \left( \sum_{s=1}^k F_{\mathcal{N}(i),j}(t-s) \right) \quad (2.27)$$

Estos índices tienen la deficiencia de que no consideran la frecuencia de las interacciones entre los bancos, en el capítulo 7 se propone una manera de definir el índice y que contemple esto.

## 2.4. Medidas de centralidad

*Las instituciones reguladoras tienen la preocupación y la responsabilidad de dar un tratamiento especial a las instituciones que pudieran provocar eventos sistémicamente importantes con su quiebra* Gabrieli (2011). El reto se encuentra en identificar a las instituciones sistémicamente más importantes y el criterio usualmente aplicado es el tamaño de los activos o la hoja de balance. Pero la situación actual cambió el paradigma: las instituciones sistémicamente más importantes no son necesariamente las más grandes, ya que pudieran existir algunas instituciones cuya relevancia está determinada por algo más que su tamaño. Puesto que un alto nivel de conectividad puede influir de manera significativa en el proceso de contagio, para ubicar a una entidad importante también hay que reconocer la relevancia de la posición de dicha entidad en la red.

En su junta del 25 de Junio de 2011 el Comité de Basilea de Supervisión Bancaria acordó una serie de medidas<sup>6</sup> para los bancos sistémicamente importantes a nivel global (G-SIBs por sus siglas en inglés).

---

<sup>5</sup>En el caso de la red de exposiciones se habla de exposiciones o préstamos mientras que en la del SPEI se habla de pagos o flujos de dinero.

<sup>6</sup><http://www.bis.org/press/p110625.htm>

La metodología para evaluar una G-SIB está basada en el uso de indicadores y comprende cinco categorías: *tamaño*, *interconectividad*, si es *insustituible*, *actividad global* y *complejidad*.

Una de las regulaciones involucra aumentar los requerimientos mínimos de capital que los bancos deben reservar para absorber pérdidas. Dependiendo de su importancia sistémica a un banco se le puede exigir de un 1% a un 2.5% extra de capital. Estas medidas pretenden fortalecer a las G-SIBs y crear incentivos para que estas disminuyan su importancia sistémica.

La *interconectividad* y la importancia sistémica de un banco bien pueden relacionarse a la *centralidad*, concepto que ha sido ampliamente desarrollado y estudiado en el campo de la sociología<sup>7</sup>.

La centralidad de un vértice determina su importancia relativa en la red. Los criterios más comunes para evaluar la centralidad de un vértice son: centralidad por grado, centralidad por cercanía (closeness), centralidad intervértices (betweenness) y centralidad por eigenvectores.

Cada una de las medidas dada, o al menos su interpretación, se puede explicar basándose en el hecho de que ocurre algún tipo de flujo entre los vértices de la red. En este contexto, el flujo se puede tratar de dinero o bien del contagio que pudiera provocar algún banco a los demás bancos de la red. Cuando por ejemplo un banco no paga las deudas a sus respectivas contrapartes, estas pudieran incumplir también.

El uso e interpretación de las medidas de centralidad aplicadas a un estudio sobre el contagio en un sistema interbancario puede consultarse en la tesis Henggeler-Müller (2006). Las medidas de centralidad se presentarán de manera similar a dicha tesis.

### 2.4.1. Centralidad por grado

En la sección 2.2 se definió el grado de un vértice como el número de vecinos directos de este.

El grado indica qué tan conectado está un vértice y puede tomarse como un criterio para saber qué tan importante es para la red. En el contexto de sistemas financieros un banco puede considerarse importante o *central* para el sistema si está muy conectado ya que su quiebra puede impactar a muchos participantes en el sistema.

Siguiendo esta idea se puede establecer que el grado de un banco es una

---

<sup>7</sup>Para leer en mayor detalle la manera en que se usan e interpretan las medidas de centralidad en el contexto de redes sociales puede consultarse Borgatti and Everett (2006).

medida de centralidad para este, dentro de la red, se define la centralidad por grado para el vértice  $v \in V$  como:

$$C_D(v) = d_v \quad (2.28)$$

Asimismo es posible definir la centralidad por grado exterior o la centralidad por grado interior. Tal distinción es importante en el contexto de riesgo sistémico puesto que un banco puede jugar un rol específico en la red. Por ejemplo, tal banco puede ser un prestamista o un prestatario importante dentro de la red de exposiciones y su quiebra puede tener distintas repercusiones para el sistema.

Por simplicidad, en esta tesis sólo se considerará la medida de centralidad por grado.

### 2.4.2. Centralidad por fuerza

Un banco importante en la red tiene exposiciones o préstamos relativamente grandes con su contrapartes. Es por eso que otro criterio para afirmar que un banco es central en la red es si su fuerza es relativamente mayor. La centralidad por fuerza del vértice  $v \in V$  es:

$$C_S(v) = s_v \quad (2.29)$$

Es importante aclarar que para el contexto se puede definir la centralidad por fuerza exterior y por fuerza interior. Esta diferencia permite distinguir a los bancos que se encuentren sobre-expuestos<sup>8</sup>. Pero por simplicidad, en la tesis sólo se presentarán los resultados para la centralidad por fuerza.

### 2.4.3. Centralidad por cercanía

Un banco bien puede considerarse central si puede transmitir el contagio rápidamente a otros bancos del sistema y esto sucede si se encuentran cercanos a él. Es decir, la longitud de los caminos que unen a un vértice con los demás deberían ser cortos si dicho vértice es considerado central. La medida de centralidad por cercanía debe dar mayores valores para vértices más centrales, por esto se considerarán los inversos de las distancias para su definición.

---

<sup>8</sup>Este concepto se definió en Martínez-Jaramillo et al. (2010b) y se refiere a los bancos cuyas exposiciones son lo suficientemente grandes como para provocar su quiebra.

Para un vértice  $v \in V$  la medida de centralidad por cercanía es<sup>9</sup>:

$$C_C(v) = \sum_{j \in V \setminus \{v\}} \frac{1}{d_G(v, j)} \quad (2.30)$$

y la convención  $\frac{1}{\infty} := 0$  garantiza que cuando no existe un camino entre  $v$  y  $j$  la aportación al índice es nula. Para calcular dichas distancias se consideran los caminos más cortos y no las trayectorias, es decir, se ignoran las direcciones de los arcos. Si se quisiera definir la centralidad por cercanía exterior e interior, basta con considerar las trayectorias desde y hacia el vértice en cuestión respectivamente, pero, por simplicidad, en la tesis sólo se manejará la centralidad por cercanía.

#### 2.4.4. Centralidad inter-vértices

Un banco puede considerarse importante en una red financiera si se encuentra en muchas posibles rutas de contagio. Si dicho banco es suficientemente resistente o no, puede ser la diferencia entre frenar el proceso de contagio o continuar propagándolo.

Sean  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  el número de caminos más cortos que van de  $i$  a  $j$  y  $\sigma_{ij}(v)$  el número de caminos más cortos que van de  $i$  a  $j$  pero que además tienen a  $v$  como uno de sus vértices intermedios, entonces la medida de centralidad inter-vértices se define de la siguiente manera:

$$C_B(v) = \sum_{i \neq v} \sum_{j \neq v} \frac{\sigma_{ij}(v)}{\sigma_{ij}} \quad (2.31)$$

La definición presupone que el contagio elige el camino más corto para fluir. Este supuesto puede considerarse razonable argumentando que el contagio se propaga en caminos cortos puesto que entre más largo sea el camino más probable es que el contagio sea absorbido por un banco. Sin embargo bien puede ocurrir que en la ruta más corta haya un banco resistente que frene el contagio y que en rutas más largas haya bancos débiles<sup>10</sup>.

---

<sup>9</sup>Esta métrica se definió de manera que pudiera usarse en gráficas no necesariamente conexas y fue tomada de <http://toreopsahl.com/2010/03/20/closeness-centrality-in-networks-with-disconnected-components/>

<sup>10</sup>Las medidas de centralidad están definidas bajo los supuestos implícitos de que lo que fluye en la red lo hace de maneras específicas, por ejemplo, si el flujo se divide o no o si busca la ruta más corta, etc. Borgatti (2005) reflexiona sobre cuándo las medidas de centralidad son o no aplicables de acuerdo con el tipo específico de flujo que se esté considerando en la red.

La definición anterior se dio en términos de caminos, es decir, ignorando las direcciones de los arcos. Pudiera establecerse en términos de trayectorias exteriores o interiores con respecto al vértice en cuestión y se reitera que esta distinción es importante para el contexto en que se está trabajando, sin embargo en la tesis sólo se manejará la centralidad inter-vertices a través de caminos.

### 2.4.5. Centralidad por eigenvectores

La métrica de centralidad por eigenvectores denotada como  $\mathbf{e}$  fue propuesta por Bonacich (1972). En esta, la centralidad de cada vértice es proporcional a la centralidad de los vértices con los que está conectado. Si  $A$  es la matriz de adyacencias con entradas  $(a_{ij})$  entonces la centralidad por eigenvectores del vértice  $i$  es la entrada  $e_i$  del vector  $\mathbf{e}$ :

$$\lambda e_i = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} a_{ij} e_j \quad (2.32)$$

Para cada uno de los vértices se tiene una expresión similar que, de forma conjunta, puede escribirse así:

$$\lambda \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0 \quad (2.33)$$

O en notación matricial compacta:

$$\lambda \mathbf{e} = \mathbf{Ae} \quad (2.34)$$

de donde  $\mathbf{e}$  es un eigenvector de la matriz  $A$  asociado al eigenvalor  $\lambda$ . El autor sugiere tomar al eigenvalor más grande para definir la métrica<sup>11</sup>.

Como se ha mencionado en esta sección, en el contexto de riesgo sistémico es importante distinguir entre los vecinos exteriores e interiores, para esto es posible definir la métrica anterior en términos de la matriz de adyacencias exteriores  $A^+$  o la de adyacencias interiores  $A^-$ .

<sup>11</sup>Si la matriz cumple las condiciones del teorema 2.2, descrito más adelante, se tendrá la garantía de que todas las entradas del vector  $\mathbf{e}$  serán positivas y no habrá problemas al intentar interpretar “importancia negativa”

Un hecho notable es que la centralidad por eigenvectores dada por Bonacich (1972) no toma en cuenta los pesos que pudieran tener asociados los arcos. Para no perder dicha información es posible modificar un poco la definición anterior de manera que se considere al eigenvector asociado a la matriz de pesos:

$$\lambda \mathbf{e} = W \mathbf{e} \quad (2.35)$$

De la misma forma, también es posible considerar a la matriz  $W^+$  o  $W^-$  para su definición.

### Centralidad por eigenvectores entrópica

Nacaskul (2010) propone definir un vector  $x$  de *importancia sistémica*, en cuyas entradas  $x_i$  se establezca numéricamente qué tan importante es el banco  $i$  relativo a los demás del sistema. Propone que tal vector puede obtenerse de la ecuación 2.35, pero señala que la interpretación deja de ser adecuada si  $x_i \leq 0$  para alguna  $i$ . Para solucionar esta situación apela al siguiente teorema.

**Teorema 2.2.** (*Perron-Frobenius*): Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  cuyas entradas  $a_{ij} \geq 0 \forall i$  y  $j$ , entonces existe un eigenvector  $\mathbf{e}$  con entradas no negativas asociado a un eigenvalor  $\lambda > 0$ . Aún más, si la matriz  $A$  es irreducible<sup>12</sup> entonces el eigenvector  $\mathbf{e}$  tiene entradas estrictamente positivas y es único excepto al multiplicarlo por constantes. En tal caso su eigenvalor asociado es el mayor en valor absoluto de todos los eigenvalores.

*Demostración.* Se omite.<sup>13</sup> □

Pero para poder aplicarlo es necesario que  $w_{ij} > 0 \forall i$  y  $j$ . Y la matriz  $W$  tiene entradas 0 o positivas estrictamente. Para arreglar esto la autora sugiere cambiar la entradas de la matriz iguales a 0 por algún valor positivo pero pequeño  $\epsilon$  (la autora propone usar 0.0001). En rigor, se define la matriz

<sup>12</sup>Una matriz  $A$  de  $n \times n$  es reducible si existe una matriz  $P$  de  $n \times n$  tal que en cada columna y en cada renglon tenga una entrada igual a 1 y las demás entradas iguales a 0 y que además cumpla con:

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

en donde  $A_{11}$  es una matriz de  $r \times r$  y  $A_{22}$  es una matriz de  $(n - r) \times (n - r)$  donde  $1 \leq r < n$ . Si no existe tal matriz entonces se dice que  $A$  es irreducible.

<sup>13</sup>Esta versión del teorema, así como su demostración pueden consultarse en Keener (1993)

$W^{>0}$  cuyas entradas  $w_{ij}^{>0} = w_{ij}$  si es que  $w_{ij} > 0$  y  $w_{ij}^{>0} = \epsilon$  en caso de que  $w_{ij} = 0$ .

Partiendo de lo descrito anteriormente ahora podría obtenerse el eigenvector de Perron de la matriz  $W^{>0}$  pero antes se le hará un último ajuste: Nacaskul (2010) argumenta que entre un vértice  $k$  con un único arco saliente con un peso asociado de 100 y un vértice  $l$  con 100 arcos salientes y cada uno con un peso asociado de 1 el vértice  $l$  debe considerarse sistémicamente más importante<sup>14</sup>. Para garantizar la distinción entre este tipo de situaciones recurre al concepto de entropía y la autora define entonces al *vector de centralidad entrópica* como el eigenvector normalizado asociado al eigenvalor de Perron, pero no de la matriz  $W^{>0}$  sino de la matriz  $P$  definida por medio de las siguientes transformaciones:

Se crea una matriz  $W^{norm}$  normalizando a la matriz  $W^{>0}$  por renglones, es decir, se divide a cada elemento entre la suma correspondiente a su renglón:

$$w_{ij}^{norm} = \frac{w_{ij}^{>0}}{\sum_{j=1}^n w_{ij}^{>0}} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (2.37)$$

Con esto se obtiene la matriz  $W^{norm}$  cuyas entradas de cada renglón suman 1.

Luego se calcula la entropía de cada renglón:

$$\tau_i = - \sum_{j=1}^n w_{ij}^{norm} \ln(w_{ij}^{norm}) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.38)$$

La entropía se maximiza cuando todos los  $w_{ij}^{norm}$  son iguales, en ese caso:

$$\tau^{max} = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(n) \quad (2.39)$$

A cada entrada de la matriz  $W^{>0}$  se le agregará una “carga adicional” asociada a la entropía de su renglón correspondiente.

Definiendo el factor

$$m_i = 1 + \frac{\tau_i}{\tau^{max}} \quad (2.40)$$

para cada renglón  $i = 1, \dots, n$  se crea una nueva matriz  $P = (p_{ij})$  cuyas entradas están dadas por

$$p_{ij} = m_i \cdot w_{ij}^{>0} = \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau^{max}}\right) \cdot w_{ij}^{>0} \quad (2.41)$$

---

<sup>14</sup>En el apéndice A se encuentra una discusión sobre la veracidad de este hecho y el uso de la entropía para la definición de esta medida de centralidad.



Finalmente se obtiene el eigenvector  $e^{PF}$  de la matriz  $P$  asociado a la raíz de Perron  $\lambda^{PF}$  y se define el vector de importancia sistémica bajo el criterio de centralidad por eigenvectores entrópica

$$EEC = \frac{e^{PF}}{\|e^{PF}\|_\infty} \quad (2.42)$$

El eigenvector de Perron asociado a  $P$  bien puede obtenerse resolviendo el polinomio característico

$$\det(P - \lambda I) = 0 \quad (2.43)$$

y luego seleccionar al eigenvector con el eigenvalor estrictamente mayor a los demás. O bien se puede usar el método de potencias<sup>15</sup>.

## PageRank y PageRank modificado

Para que un motor de búsqueda de páginas web arroje resultados más precisos debe tener un criterio eficiente y objetivo para discernir entre las páginas más importantes y presentar los resultados de las búsquedas por orden de importancia.

Para medir la importancia relativa de las páginas de Internet el motor de búsqueda Google utiliza un algoritmo llamado PageRank, este se basa en la gráfica dirigida que representa la estructura del Internet.

PageRank se crea con la idea de que la importancia de una página depende tanto del número de hipervínculos dirigidos a ella como de la importancia de las páginas de las que surgen estos hipervínculos. La importancia del sitio  $i$  se define de la siguiente manera:

$$PR(i) = \frac{(1-d)}{N} + d \sum_{j \in \mathcal{N}^-(i)} \frac{PR(j)}{L(j)} \quad (2.45)$$

con  $i \in V = \{1, \dots, n\}$  es el conjunto de vértices que representan los sitios de Internet y donde  $L(u)$  es el número de hipervínculos que surgen de la

---

<sup>15</sup>Para calcular el eigenvector  $\mathbf{e}$  asociado al mayor eigenvalor de la matriz  $A$  se usa el hecho de que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{A^m e_0}{\|A^m e_0\|_\infty} = \mathbf{e} \quad (2.44)$$

para cualquier vector  $e_0$  no negativo

página  $u$ , es decir, su grado exterior y  $d$  es un factor que los autores de Brin and Page (1998) recomiendan igualar a 0.85.

El vector  $PR$  con entradas  $PR(i)$  es aquel que resuelve la ecuación

$$PR = \frac{1-d}{N} \mathbf{1} + d \cdot \mathcal{M} \cdot PR \quad (2.46)$$

donde  $\mathbf{1}$  es un vector columna de dimensión  $n$  con entradas iguales a uno y  $\mathcal{M}$  es la matriz de  $n \times n$  dada por

$$\mathcal{M}_{ij} = \begin{cases} 1/L(j) & \text{si existe un arco dirigido de } j \text{ a } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.47)$$

Si se define a  $\mathbf{E}$  como la matriz de unos de  $n \times n$  y  $\sum_{i \in V} PR(i) = 1$  se tiene que

$$PR = \left( \frac{1-d}{N} \mathbf{E} + d\mathcal{M} \right) \cdot PR =: \widehat{\mathcal{M}} \cdot PR \quad (2.48)$$

Es decir,  $PR$  es el eigenvector de la matriz  $\widehat{\mathcal{M}}$  asociado al eigenvalor 1.

Los arcos de la red relacionada a los sitios de Internet no tienen pesos asociados. En la red de exposiciones interbancarias los pesos a los arcos dan información valiosa sobre las posiciones de riesgo entre las parejas de bancos, entonces éstas deben ser incorporadas al algoritmo para no perder dicha información.

Además para asociar importancia a una página sólo se consideran los arcos dirigidos hacia ella, para los sistemas interbancarios tendría sentido considerar ambas direcciones. Saltoglu and Yenilmez (2010) sugieren que el PageRank de cada banco debe ponderarse por el peso dominante de acuerdo con sus transacciones. Es decir, si por ejemplo,  $i$  tiene transacciones con  $j$  se debe considerar la mayor exposición entre  $w_{ij}^+$  y  $w_{ij}^-$  como ponderador para el algoritmo. Con esto en mente los autores proponen modificar el algoritmo de la siguiente forma:

$$PR(i) = \begin{cases} (1-d) + d \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( PR(j) \frac{w_{ji}^+}{\sum_{z \in \mathcal{N}(j)} w_{jz}^+} \right) & \text{si } w_{ji}^+ > w_{ji}^- , \\ (1-d) + d \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( PR(j) \frac{w_{ji}^-}{\sum_{z \in \mathcal{N}(j)} w_{jz}^-} \right) & \text{si } w_{ji}^- > w_{ji}^+ , \\ (1-d) + d \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( PR(j) \left( \frac{\frac{w_{ji}^+}{\sum_{z \in \mathcal{N}(j)} w_{jz}^+} + \frac{w_{ji}^-}{\sum_{z \in \mathcal{N}(j)} w_{jz}^-}}{2} \right) \right) & \text{si } w_{ji}^+ = w_{ji}^- . \end{cases}$$

Así la centralidad de cada banco aumenta en la dirección asociada a sus transacciones dominantes.

## 2.5. Índice unificado de centralidad

En base a distintos criterios se han definido varias métricas para evaluar la centralidad de un vértice en una red. Cada una tiene ventajas y desventajas con respecto a las demás, por ejemplo: La centralidad por grado, por cercanía e inter-vértices sólo se basan en la topología de la red mientras que la de fuerza sólo se basa en los pesos. Sin embargo todas estas fallan al considerar también la centralidad de los vecinos. Las medidas por eigenvectores definidas anteriormente cubren esta deficiencia aunque fallan al considerar las posibles rutas de contagio o qué tan cercanas están las contrapartes más allá de los vecinos inmediatos.

Cada métrica nos da información valiosa sobre la importancia de los bancos en la red, pero, ¿cuál elegir para evaluar la centralidad de los bancos si entre ellas pueden dar resultados diferentes?

Según Henggeler-Müller (2006) un banco importante en la red es aquel que cumpla con todas las siguientes características:

1. Tenga numerosas contrapartes directas.
2. Las exposiciones que tenga con sus contrapartes sean relativamente

grandes.

3. Su falla pudiera debilitar a muchos bancos en pocas rondas de contagio.
4. Se encuentre en muchos caminos potenciales para la ocurrencia del contagio.
5. Sus contrapartes también sean bancos importantes en la red.

Surge entonces la natural propuesta de crear un índice que contenga la información de todos los demás índices y considere todos los criterios de centralidad a la vez. La manera más sencilla de hacerlo es tomar alguna combinación lineal de los índices. Si  $\beta_i \in \mathbb{R}^+$  con  $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$  entonces el índice:

$$PC = \beta_1 C_D + \beta_2 C_S + \beta_3 C_C + \beta_4 C_B + \beta_5 PR + \beta_6 EEC \quad (2.49)$$

debe contener la información de cada una de las medidas y así tomar en cuenta el criterio de centralidad detrás de cada una.

Una sugerencia para hacer la elección de los coeficientes es por medio de una técnica del análisis estadístico multivariado llamado *análisis de componentes principales*<sup>16</sup> ya que este permite obtener la combinación lineal óptima, en el sentido de que, por medio de esta, se aprovechará la mayor cantidad de información de cada una de las variables.

Aunque esta no es la única manera en que pueden elegirse dichos coeficientes.

## 2.6. Características deseables en las medidas de centralidad

Ahora surge una pregunta importante, ¿qué características debería tener una “buena” medida de centralidad? Aún más, para una institución reguladora que pretende crear políticas basadas en la importancia por interconexión de las entidades en la red bancaria, ¿qué medidas pueden serle útiles?

Sabidussi (1966) propone como criterio que las métricas deben cumplir para calificar como medidas de centralidad es que el agregar un arco a un vértice siempre debe aumentar la centralidad de este y el agregar un arco en

---

<sup>16</sup>Una breve introducción a esta metodología puede consultarse en el Apéndice B

cualquier parte de la red no debe restar centralidad a algún vértice. Desafortunadamente la medida de centralidad inter-vértices no es consistente con este criterio, no obstante, puede tener una interpretación útil para el riesgo sistémico.

Freeman (1979) propone que una medida de centralidad debe indicar que el vértice más central en una red con forma de estrella es el vértice que se encuentra en el centro de esta. Esta posición tiene el mayor grado, se encuentra en todos los caminos y se encuentra cercano a los demás vértices.

Otro criterio deseable para las medidas de centralidad es la robustez. Se dice que una medida de centralidad es *robusta* si una alteración ligera en los datos de entrada provoca alteraciones ligeras en los resultados de salida. Esto garantiza que, aunque los datos tomados para formar la red tengan ligeros errores, la medida de centralidad en cuestión asociará centralidad a los vértices de manera similar a que si no hubiera errores en la información.

Para probar la robustez en Frantz and Carley (2005) se realizan experimentos de simulación en donde se genera una red inicial y después se genera una copia “perturbada” de esta red. Las perturbaciones son por creación y por eliminación, y estas a su vez son de arcos y de vértices. Los autores luego asocian la robustez de las medidas de centralidad consideradas a distintas topologías posibles para las redes. Cabe destacar que las redes que generan en sus simulaciones no tienen pesos asociados a los arcos y que las medidas de centralidad que consideraron solo se basan en el aspecto topológico de la red.

La propiedad de robustez se considera importante para el autor de esta tesis puesto que las “perturbaciones” en la red no necesariamente tienen que interpretarse como errores en la información sino como la evolución natural entre los días, propia de una red dinámica. Entonces la robustez es una característica deseable para las medidas de centralidad desde el punto de vista de una institución reguladora que pretenda monitorear a una red financiera cambiante a lo largo del tiempo.

En el capítulo 6 se hará un estudio sobre el desempeño de las distintas medidas de centralidad aquí definidas, incluido un estudio sobre la robustez de estas.

## Capítulo 3

# Modelos de redes y riesgo sistémico

Para una precisa evaluación del riesgo sistémico es muy importante que los bancos centrales y las entidades reguladoras tengan un conjunto de datos completos sobre el sistema en cuestión. En palabras de Cecchetti et al. (2010): *sin datos estamos sordos y ciegos*. Desafortunadamente las políticas de algunos países no exigen a sus bancos que reporten dicha información.

Los bancos centrales con estas deficiencias de datos necesitan entonces de modelos que permitan generar redes que se adecuen a los sistemas financieros reales. Aún más el análisis de dichos modelos puede explicar parte de la naturaleza de los sistemas financieros y alcanzar un entendimiento más profundo sobre el comportamiento de sus participantes.

Por otra parte por medio de los estudios empíricos es posible visualizar la estructura y el funcionamiento de las redes bancarias, esto es lo que inspira el avance en el desarrollo y calibración de modelos que tengan sentido para la correcta evaluación de la estabilidad financiera.

El capítulo se organiza como sigue: la sección 3.1 inicia con una exploración de las características comunes que se observan en muchas redes propias de la naturaleza y también en algunos sistemas artificiales del mundo; por ejemplo, los sistemas financieros. En la sección 3.2 se estudian algunos de los modelos más conocidos para generar redes, se comentan sus ventajas y sus inconvenientes. En la sección 3.3 se revisa parte de la literatura relacionada a modelos de redes en el contexto financiero y económico, para concluir con la literatura relacionada con el riesgo sistémico en la sección 3.4.

## 3.1. Propiedades de las redes reales

Muchas redes observadas en la naturaleza o en sistemas creados por el hombre tienen ciertas características estructurales en común. Algunas redes que muestran una estructura singular han sido clasificadas como *redes libres de escala*. Otro fenómeno que se encuentra en muchas redes es el de *mundo pequeño*, a las redes con esta característica se les ha llamado mundos pequeños.

Es importante aclarar que estas características no son mutuamente excluyentes ni alguna de ellas implica a la otra. Los estudios empíricos muestran la existencia de redes libres de escala y que son de mundo pequeño o también redes que tengan alguna de estas características y la otra no.

Resulta natural preguntarse si las redes financieras también pueden ser clasificadas en alguna de estas categorías y si en situaciones de crisis o estrés siguen conservando su misma estructura. Algunos estudios muestran que redes financieras de varios países del mundo muestran estas propiedades. Y en los capítulos 4 y 5 se intentará responder a estas preguntas con respecto a redes propias del sistema bancario mexicano.

Uno de los principales propósitos de identificar si las redes estudiadas poseen estas características está relacionado con la cuestión de que si algunas estructuras son más robustas que otras, dicho en otras palabras, ¿existen estructuras que favorezcan el correcto funcionamiento del sistema modelado por medio de la red, incluso en condiciones adversas?<sup>1</sup>

A continuación se explican las propiedades de libertad de escala y de mundo pequeño.

### 3.1.1. Redes libres de escala

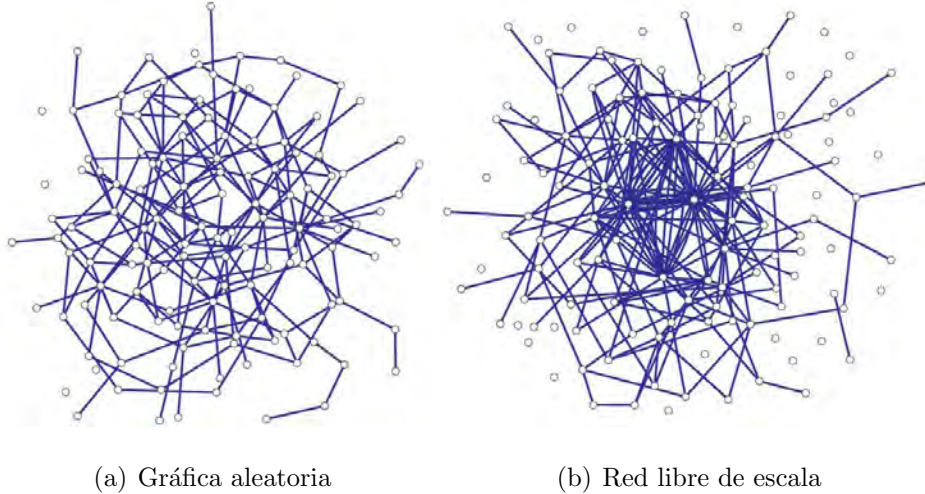
Las redes cuya *distribución del grado* sigue una *ley de potencia*, es decir, si la fracción de vértices  $p(d)$  de la red con grado  $d$  satisface:

$$p(d) \propto d^{-\eta}, \quad \eta > 1 \tag{3.1}$$

se les llama *redes libres de escala*.

---

<sup>1</sup>Un ejemplo de estudio relacionado con la robustez de las redes es Nagurney and Qiang (2007) donde se muestra una manera para calcular el grado de robustez de una red de transporte cuando los arcos se deterioran y ven disminuida su capacidad, esto lo hacen por medio de medidas que dependen de la demanda y los costos de los flujos a través de la red.



**Figura 3.1:** Comparación entre dos redes con distintas estructuras

Según Dorogovtsev (2010) este nombre se debe a que, al reescalar el argumento  $d$  por una constante, la forma funcional  $f(d) = d^{-\eta}$  se ve reescalada también

$$f(bd) = (bd)^{-\eta} = b^{-\eta} f(d) \propto f(d). \quad (3.2)$$

El hecho de que una red exhiba este comportamiento implica que en esta existen algunos vértices muy conectados<sup>2</sup> y los vértices restantes tienen grados mucho menores. Un vistazo a la red deberá revelar la existencia de “estrellas”, es decir, estructuras donde hay un vértice central (hub) al cual se encuentran conectados muchos vértices. En la figura 3.1 se contrasta la apariencia de una red libre de escala y una red o gráfica aleatoria, de la cuál se hablará más detalladamente en la sección 3.2.1

En Albert et al. (2000) se estudian y comparan los grados de tolerancia a los ataques aleatorios y ataques dirigidos contra una red libre de escala. Los experimentos de simulación que realizaron consistían en quitar una cantidad pequeña de vértices de la red y luego recalcular su distancia promedio entre vértices. Al remover los vértices de forma aleatoria la distancia promedio no se veía muy afectada, incluso cuando el “ataque” afectaba a más vértices. Los resultados eran mucho más severos para la distancia, que crecía rápidamente,

---

<sup>2</sup>En la literatura suelen referirse a estos vértices como “hubs”. Es un término computacional que se refiere un dispositivo que permite conectar a las computadoras en una red. En general, el término se usa para referirse a un punto focal en torno al cual se concentra una intensa actividad en un sistema; por ejemplo de comercio o de transporte.



si se eliminaban los vértices de mayor grado.

En este sentido puede afirmarse que una red con estructura libre de escala es robusta a las fallas aleatorias pero frágil a las fallas de los vértices más importantes<sup>3</sup>.

Pero para comprender con mayor detalle las particularidades de una red libre de escala es necesario estudiar la distribución ley de potencia, que subyace a dicho fenómeno.

### Distribución ley de potencia

Según los valores de la muestra la distribución ley de potencia ajustada puede ser *continua*, si se trata de valores en los reales o *discreta*, si la muestra toma valores en los naturales.

Si se dice que los valores  $d$  de una muestra satisfacen la ecuación 3.1, es claro que debe existir una cota inferior  $d_{min} > 0$  para los valores de  $d$  ya que 3.1 diverge cuando  $d \rightarrow 0$ . Con esta consideración la distribución ley de potencia tiene dos parámetros:  $\eta$  y  $d_{min}$ .

Considérese primero el caso discreto, si  $D$  es el grado de los vértices de una red libre de escala entonces su función de probabilidad cumple con:

$$p(d) = \mathbb{P}(D = d) = Cd^{-\eta}, \quad d \geq d_{min} \quad (3.3)$$

donde  $d_{min} > 0$ . Puesto que  $\sum_{i \in V} p(d_i) = 1$  es posible determinar la constante  $C$ , con lo que se obtiene:

$$p(d) = \frac{d^{-\eta}}{\zeta(\eta, d_{min})}, \quad d \geq d_{min} \quad (3.4)$$

donde  $\zeta(\eta, d_{min}) = \sum_{d=d_{min}}^{\infty} d^{-\eta}$  se conoce como función Zeta de Riemann generalizada. También se tiene que:

$$P(d) = \sum_{s \geq d} p(s) = \frac{\zeta(\eta, d)}{\zeta(\eta, d_{min})}, \quad d \geq d_{min} \quad (3.5)$$

El caso continuo para la distribución ley de potencia también resulta de interés porque en capítulos posteriores se pretende ajustar esta distribución

---

<sup>3</sup>Otro análisis similar se encuentra en Goyal and Vigier (2008). Por medio de su modelo pueden concluir que, ante los ataques aleatorios las redes más robustas son las que están divididas en componentes pero ante los ataques inteligentes es más conveniente un diseño con forma de estrella en donde se destinan los recursos a proteger al vértice central.

para las exposiciones interbancarias como Santos and Cont (2010) lo realizaron en el sistema interbancario brasileño.

El afirmar que la exposición o préstamo entre los bancos  $i$  y  $j$  denotada  $W_{ij}$  se distribuye según una ley de potencia continua significa que su función de densidad está dada por:

$$p(w) = \left( \frac{\eta - 1}{w_{min}^{1-\eta}} \right) w^{-\eta}, \quad w \geq w_{min} \quad (3.6)$$

El complemento de la función de distribución es:

$$P(w) = \mathbb{P}(W_{ij} \geq w) = \int_w^{\infty} p(s)ds = \left( \frac{w}{w_{min}} \right)^{-\eta+1}, \quad w \geq w_{min} \quad (3.7)$$

Puesto que las fórmulas y resultados analíticos son más sencillos de obtener para la distribución continua que para la discreta, se suele aproximar el comportamiento ley de potencia discreta con su contraparte continua. Por comodidad así se hará en esta tesis.

Al tomar el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación 3.7 se tiene la siguiente relación lineal:

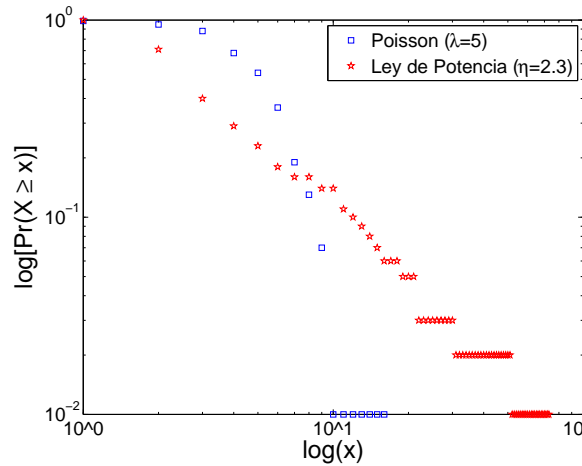
$$\ln(P(w)) = (-\eta + 1) \ln(w) + \text{constante} \quad (3.8)$$

De esto se concluye que un análisis gráfico preliminar para saber si una muestra de datos se distribuye según una ley de potencia es graficar el logaritmo del histograma de los datos contra el logaritmo de los datos y observar un comportamiento lineal.

Este análisis gráfico también puede ayudar para estudiar cualitativamente el comportamiento de la distribución ley de potencia con respecto al de la distribución Poisson. Se toma esta distribución como referencia puesto que es la que exhibe el histograma del grado para una gráfica aleatoria en un caso límite, como se verá en la sección 3.2.1.

La probabilidad de obtener un número muy grande en la distribución Poisson está dividida entre el factorial de dicho número (ver la ecuación 3.10). Lo que indica que la ocurrencia de valores grandes es muy poco probable, en cambio, la distribución ley de potencia sí permite la aparición de valores grandes con una frecuencia relativamente alta.

Este contraste se ilustra en la figura 3.2 para una distribución Poisson de parámetro  $\lambda = 5$  y para una distribución ley de potencia discreta con parámetro  $\eta = 2.5$  en un plano logaritmo contra logaritmo.



**Figura 3.2:** Comparación entre la distribución Poisson y la distribución ley de potencia discreta

### Estudios empíricos

Albert et al. (1999) estudiaron un subconjunto de la red formada por la World Wide Web (WWW). Los vértices representan documentos (páginas web) y los hipervínculos son los arcos dirigidos de un documento a otro. El subconjunto de la red que estudiaron contenía 325,729 vértices y encontraron que la distribución del grado exterior e interior es ley de potencia con parámetros  $\hat{\eta}_{ext} = 2.45$  y  $\hat{\eta}_{int} = 2.1$  respectivamente.

Liljeros et al. (2001) estudiaron la red de contactos sexuales humanos, esta red es no dirigida. El estudio se realizó en Suecia y fueron entrevistadas 2,810 personas. La red resultó ser libre de escala con parámetros  $\hat{\eta}_m = 3.5 \pm 0.2$  y  $\hat{\eta}_h = 3.3 \pm 0.2$  para las mujeres y para los hombres respectivamente.

Uno de los principales sistemas de transferencia de fondos de alto valor en EUA, tanto domésticos como internacionales es el Federal Reserve Wire Network (Fedwire). En SoramäKi et al. (2007) se realiza un estudio sobre este sistema de pagos usando un modelo de redes. El periodo de estudio es para el primer trimestre de 2004, y cada día el sistema se representa por medio de una red, lo que les genera un ensamble de 62 redes diarias. Su sistema consiste en 7,584 bancos.

Algunos de los resultados que obtienen son: Para grados mayores a 10 la red es libre de escala con parámetro  $\hat{\eta} = 2.11 \pm 0.01$ . La distribución del grado interior es similar a la del grado exterior, también exhiben una ley de

potencia con parámetro  $\hat{\eta}_{ext} = \hat{\eta}_{int} = 2.15 \pm 0.01$ .

En Boss et al. (2004) se analiza la red correspondiente al mercado interbancario de Austria, la cual cuenta con 883 bancos. Los datos para este estudio son mucho menos frecuentes, sólo se cuenta con 10 matrices de pesos tomadas de periodos trimestrales entre los años 2000 y el 2003. Y algunos de los datos están ausentes: 90 % de las entradas en la matriz de pesos están disponibles y el 10 % restante se completó bajo el supuesto de máxima entropía<sup>4</sup>.

Las redes resultaron ser libres de escala, para el grado se obtuvo un parámetro de escala de  $\hat{\eta} = 2.01$ , para el grado exterior el parámetro estimado fue  $\hat{\eta}_{ext} = 3.11$  y para el grado interior  $\hat{\eta}_{int} = 1.73$ .

### 3.1.2. Redes de mundo pequeño (small-world)

El concepto de mundo pequeño se ha convertido en un tema conocido aún dentro de la cultura popular. El hecho de que, en una red social grande, entre dos personas cualesquiera existan pocos contactos sociales fue un descubrimiento sorprendente. Un experimento realizado en 1967 por el sociólogo Milgram reveló que en promedio existen 6 vínculos sociales entre dos personas en EUA<sup>5</sup>.

Watts and Strogatz (1998) se interesaron por estudiar redes con con distancias cortas entre los vértices y un coeficiente de agrupamiento promedio alto, con respecto al coeficiente de agrupamiento de las gráficas aleatorias del mismo tamaño y grado promedio de los vértices. A las redes con estas características las llamaron *redes de mundo pequeño*.

Según Newman (2003) el efecto de mundo pequeño tiene implicaciones para la dinámica de los procesos llevados a cabo en las redes. Por ejemplo si se piensa en la propagación de la información o del contagio de alguna enfermedad, el efecto de mundo pequeño implica que estas se propagarán rápidamente a través de la red.

---

<sup>4</sup>En el apéndice A se revisa el concepto de entropía y la importancia de este supuesto en el contexto de riesgo sistémico

<sup>5</sup>Este resultado inspiró la frase “seis grados de separación”.

## Estudios empíricos

Un par de redes donde Watts and Strogatz (1998) identificaron el fenómeno del mundo pequeño fueron: la red de actores de Hollywood<sup>6</sup>, en esta los actores se unen por un arco si han actuado en la misma película; y la red neuronal del gusano *C. elegans*, dos neuronas se ligan por un arco si es que se enlazaron sinápticamente.

La primera red tenía 225,226 vértices, distancia promedio de 3.65 y un coeficiente de agrupamiento igual a 0.79; contrastado con una gráfica aleatoria con la misma cantidad de vértices y de arcos promedio por vértice que tenía una distancia promedio de 2.99 y un coeficiente de agrupamiento de 0.00027.

La segunda tenía 282 vértices, distancia promedio de 2.65 y coeficiente de agrupamiento igual a 0.28, su gráfica aleatoria correspondiente tiene una distancia promedio de 2.25 y coeficiente de agrupamiento igual a 0.05.

En la sección 3.1.1 se mencionó a la red estudiada en Soramäki et al. (2007), la cual tenía 7,584 bancos. La distancia promedio entre los vértices de dicha red fue de 2.62 mientras que su coeficiente de agrupamiento promedio fue de 0.53. Esta red puede clasificarse como un mundo pequeño y, como se dijo en la sección anterior, también es una red libre de escala. Aunque no necesariamente se presentan las dos características a la vez.

## 3.2. Modelos para la formación de redes

En base a las características de las redes observadas surge la idea de proponer modelos que permitan imitar su estructura y explicar la manera en que se forman. Uno de los principales propósitos de estos es para realizar estudios de simulación para probar la robustez de la red o para estudios de contagio.

El modelo de gráficas aleatorias, en su versión más simple, tiene pocos parámetros y resulta útil para estudios que involucren simulaciones, su sencillez se paga con el costo de no poder replicar algunas características de las redes reales.

---

<sup>6</sup>Según la información en <http://www.imdb.com> al mes de Abril de 1997

### 3.2.1. Gráficas aleatorias clásicas

El modelo propuesto por Erdős and Rényi (1959) se denota  $\mathcal{G}(n, M)$ . Consiste en las gráficas con conjunto de vértices  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  con  $M$  arcos y en el cual la ocurrencia o elección de cada gráfica es equiprobable. Es decir, si  $N = \binom{n}{2}$  es el número de arcos posibles en una gráfica con  $n$  vértices entonces  $\mathcal{G}(n, M)$  tiene  $\binom{N}{M}$  elementos y cada uno ocurre con probabilidad  $\binom{N}{M}^{-1}$ .

Erdős y Rényi establecieron la teoría de gráficas aleatorias como una rama de las matemáticas y las usaron para probar propiedades determinísticas de las gráficas por medio del método probabilista. Por ejemplo, probaban que si una gráfica aleatoria tiene probabilidad positiva de poseer cierta propiedad entonces debe existir alguna gráfica con dicha propiedad.

El siguiente se conoce como modelo de Gilbert y se denota  $\mathcal{G}(n, p)$  con  $0 < p < 1$ . Consiste en las gráficas con el conjunto de vértices  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  y donde cada pareja de estos estará independientemente conectada con probabilidad  $p$  y con probabilidad  $1 - p$  estará desconectada.

Este modelo tiene la propiedad de que si  $d_i$  es el grado del nodo  $i$  entonces  $d_i \sim \text{Binomial}(n - 1, p)$ , es decir:

$$\mathbb{P}(d_i = x) = \binom{n-1}{x} p^x (1-p)^{(n-1)-x} \quad (3.9)$$

Esta probabilidad representa el número de maneras en las cuales  $x$  arcos pueden ser dibujados desde cierto vértice: la probabilidad de que se tengan  $x$  arcos es  $p^x$ , la probabilidad de que no haya más arcos es  $(1-p)^{(n-1)-x}$  y existen  $\binom{n-1}{x}$  maneras distintas de elegir  $x$  nodos destino para estos arcos.

Un hecho conocido en teoría de la probabilidad elemental es que una variable aleatoria con distribución Poisson puede usarse para aproximar a una variable aleatoria con distribución binomial con parámetros  $n$  y  $p$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $p$  es tal que  $\lambda = np$  permanece fijo, entonces de 3.9 se tiene:

$$\mathbb{P}(d_i = x) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad (3.10)$$

Sabemos además que el grado esperado para cualquier vértice  $i \in V$  está dado por  $\mathbb{E}(d_i) = (n-1)p$ . Esto implica que el grado promedio de la gráfica es  $\bar{d} = (n-1)p$ . Entonces es posible expresar la probabilidad de conexión  $p = \frac{\bar{d}}{n-1}$ .

Recordando que el coeficiente de agrupamiento es la probabilidad de que dos vecinos más cercanos a algún vértice también estén conectados se concluye que en este modelo, por el supuesto de independencia, el coeficiente de agrupamiento para cualquier vértice  $i$  es  $c_i = p = \frac{\bar{d}}{n-1}$ . Cuando la cantidad de vértices es muy grande se obtendrá un coeficiente de agrupamiento muy pequeño, esto hace que las gráficas aleatorias no se clasifiquen como mundos pequeños.

Pero la distancia entre cualesquiera dos vértices sí es corta, en promedio. Dorogovtsev (2010) deduce la siguiente fórmula para la distancia promedio en una gráfica aleatoria:

$$\overline{dist} = \frac{\ln(n)}{\ln(\bar{d})} = \frac{\ln(n)}{\ln(p) + \ln(n-1)} \quad (3.11)$$

De donde se observa que si  $p$  no toma valores muy cercanos a 1 o a 0  $\overline{dist} \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$

Bollobás (2001) demuestra que si algunas propiedades se cumplen para  $\mathcal{G}(n, M)$  entonces también se cumplen para  $\mathcal{G}(n, p)$ . Y afirma que en muchos casos, es equivalente trabajar con  $\mathcal{G}(n, M)$  o con  $\mathcal{G}(n, p)$  cuando  $M \approx pN$ . En la literatura es común que se refieran a cualquiera de los dos modelos como gráficas aleatorias o gráficas de Erdős-Rényi.

Si es que se quisiera aplicar los modelos anteriores para modelar redes bancarias, se presentan las siguientes desventajas: consideran gráficas no dirigidas, fallan al imitar los coeficientes de agrupamiento de las redes bancarias observadas y su distribución de los grados<sup>7</sup>. A pesar de estas limitaciones, por su relativa sencillez y pocos parámetros, han sido usadas en estudios concernientes a riesgo sistémico, por ejemplo Nier et al. (2006).

En palabras de Erdős and Rényi (1960): *La evolución de las gráficas aleatorias puede usarse como un modelo simplificado de algunas redes de comunicación... (claro que si uno quiere describir tal situación entonces debe reemplazarse la hipótesis de equiprobabilidad por una hipótesis más realista).*

Por esto es conveniente emplear un modelo más adecuado al contexto de redes financieras. Nier et al. (2006) propone usar el refinamiento al modelo  $\mathcal{G}(n, p)$  para digráficas: El modelo se denota  $\mathcal{G}(n, p_{ij})$  con  $0 < p_{ij} < 1$  para  $1 \leq i < j \leq n$ , consiste en el conjunto de vértices  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  donde

---

<sup>7</sup>En capítulos posteriores se intentará averiguar estas características sobre las redes determinadas por el sistema bancario mexicano.

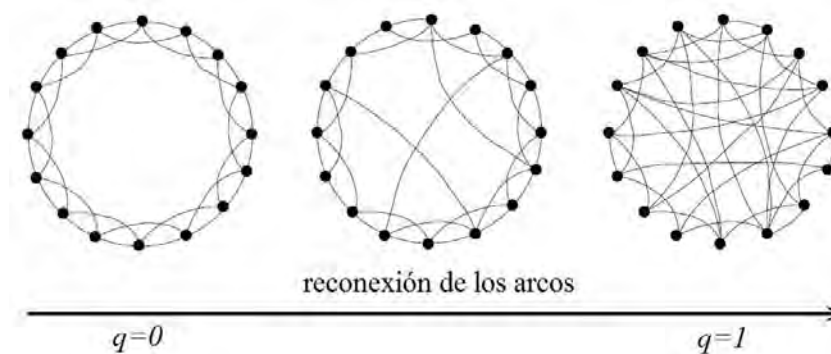
para cada pareja  $i, j \in V$  existirá el arco  $(i, j)$  independientemente con probabilidad  $p_{ij}$  y no existirá dicho arco con probabilidad  $1 - p_{ij}$ . Los valores de  $p_{ij}$  pueden ser distintos para valores distintos de  $i$  y  $j$  y en general puede suponerse que  $p_{ij} \neq p_{ji}$ . El modelo se puede generalizar aún más si se presupone alguna estructura de dependencia entre las conexiones, como sucede en las redes bancarias reales.

Las desventajas son que se tienen pocos resultados teóricos para un modelo con estas características y el espacio de parámetros es muy grande, lo que dificulta su exploración por medio de estudios de simulación.

### 3.2.2. Modelo de Watts y Strogatz

El modelo propuesto por Watts and Strogatz (1998) consiste en obtener gráficas interpolando entre una retícula circular regular y una gráfica aleatoria.

Se inicia con una retícula circular regular con  $n$  vértices y  $m$  arcos, cada arco se reconecta con probabilidad  $q$  a un vértice elegido uniformemente. La figura 3.3 ilustra el modelo, dicha imagen fue obtenida de Dorogovtsev and Mendes (2002).



**Figura 3.3:** Modelo de Watts y Strogatz

Este método de reconexión permite ajustar la gráfica entre una regular ( $q = 0$ ) y una gráfica “desordenada” ( $q = 1$ ) y explorar las propiedades de las gráficas con  $0 < q < 1$ .

Un hallazgo interesante sobre esta región es que existen valores de  $q$  que permiten obtener una gráfica con distancias entre vértices casi tan pequeñas como las de una gráfica aleatoria pero con un coeficiente de agrupamiento



mucho más grande con respecto al de la correspondiente gráfica aleatoria; en otras palabras, una red de mundo pequeño.

No obstante, las redes obtenidas por medio de este modelo son no dirigidas y, en general, no serán libres de escala.

### 3.2.3. Modelos de conexión preferencial

Barabási and Albert (1999) propusieron un concepto para explicar la formación de las redes libres de escala. Observando la evolución de la World Wide Web concluyeron que el fenómeno consta del crecimiento de la red y la *conexión preferencial* de los nuevos vértices; esta idea consiste en que los vértices nuevos que se añaden a la red preferirán conectarse a vértices con grados mayores.

#### Modelo de Barabási y Albert

Este modelo permite generar una red no dirigida libre de escala, el algoritmo que propusieron consiste en los siguientes pasos:

- Se inicia con un número pequeño  $m_0$  de vértices, en cada iteración se añade un vértice con  $m < m_0$  arcos que lo unan a  $m$  vértices ya existentes en el sistema.
- Para elegir a los vértices a los cuáles el nuevo vértice se va a conectar la probabilidad de que un nuevo vértice se conecte al vértice existente  $v$  debe ser proporcional a su grado  $d_{v_i}$ , de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}(v = v_i) = \frac{d_{v_i}}{\sum_{j \in V \setminus \{v_i\}} d_j} \quad (3.12)$$

Después de  $t$  iteraciones resultará una red con  $N = t + m_0$  vértices y  $mt$  conexiones. Además esta será libre de escala como lo demuestran sus autores por medio de simulaciones.

Una desventaja de este modelo es que ignora las direcciones de los arcos. También es importante mencionar que la red obtenida no necesariamente será de mundo pequeño.

## Modelo de Bollobás, Borgs, Chayes y Riordan

El siguiente modelo es una refinación del anterior, permite generar *gráficas dirigidas* y aún más, las distribuciones de sus grados exterior e interior serán leyes de potencia con distintos parámetros de escala.

El algoritmo asociado al modelo también emplea el concepto de conexión preferencial. Se inicia con una gráfica dirigida cualquiera y en cada iteración se añaden arcos, también se puede añadir un vértice o no. Más precisamente, sea  $G_0$  la digráfica inicial y  $t_0$  el número de arcos en ella, se escribe  $G_0 = G(t_0)$ . Así en la iteración  $t$  la gráfica  $G(t)$  tendrá  $t$  arcos dirigidos y una cantidad aleatoria  $n(t)$  de vértices.

Los parámetros del modelo son  $\alpha, \beta, \gamma, \delta^-, \delta^+ \geq 0$  tales que  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ . El procedimiento para generar  $G(t+1)$  a partir de  $G(t)$  para  $t \geq t_0$  obedece las siguientes reglas:

- Con probabilidad  $\alpha$  se añade un nuevo vértice  $v$  junto con un arco dirigido  $(v, s)$  donde  $s$  es un vértice existente en  $t$ . Este vértice se elige con

$$\mathbb{P}(s = s_i) = \frac{d_{s_i}^- + \delta^-}{t + n(t)\delta^-} \quad (3.13)$$

donde  $d_{s_i}^-$  denota el grado interior del vértice  $s_i$ .

- Con probabilidad  $\beta$  se añade un nuevo arco  $(v, s)$  entre dos vértices existentes  $v$  y  $s$ . A los vértices  $v$  y  $s$  se les elige de acuerdo con

$$\mathbb{P}(v = v_i) = \frac{d_{v_i}^+ + \delta^+}{t + n(t)\delta^+}, \quad \mathbb{P}(s = s_i) = \frac{d_{s_i}^- + \delta^-}{t + n(t)\delta^-}$$

respectivamente. Donde  $d_{s_i}^+$  denota el grado exterior del vértice  $s_i$ .

- Con probabilidad  $\gamma$  se añade un nuevo vértice  $s$  y un arco de algún vértice previamente existente  $v$  hacia  $s$ . El vértice  $v$  se elige con

$$\mathbb{P}(v = v_i) = \frac{d_{v_i}^+ + \delta^+}{t + n(t)\delta^+} \quad (3.14)$$

Nótese que este modelo incluye al modelo de Barabási y Albert en el caso  $m = 1$ .

El modelo no impone ninguna restricción para evitar el hecho de que se produzcan arcos repetidos y “aros”.<sup>8</sup> Sin embargo, los autores afirman que las restricciones de este tipo no afectan significativamente los resultados del modelo.

En Bollobás et al. (2003) se demuestra que la red generada con el algoritmo anterior es libre de escala tanto para el grado interior como para el grado exterior. El parámetro correspondiente al exponente en la distribución ley de potencia del grado interior es

$$X^- = 1 + \frac{1 + (\alpha + \gamma)\delta^-}{\alpha + \beta} \quad (3.15)$$

y para el grado exterior es

$$X^+ = 1 + \frac{1 + (\alpha + \gamma)\delta^+}{\beta + \gamma} \quad (3.16)$$

Este resultado es de tipo asintótico, resulta válido cuando  $t \rightarrow \infty$ . Y para cuando el grado  $d$  (interior o exterior según corresponda) cumpla  $d \rightarrow \infty$ .

### Conexión preferencial evolutiva

Hasta ahora los modelos expuestos de conexión preferencial especifican reglas de crecimiento basadas en las propiedades topológicas instantáneas de la red en cuestión, los nuevos vértices se ligan a los vértices preexistentes dependiendo de su grado. Este tipo de modelos son estáticos en el sentido de que no consideran que exista algún tipo de interacción entre los vértices. No obstante, esta es una característica deseable para los modelos en el contexto de redes financieras y riesgo sistémico.

Una propuesta para modelar dicha situación son los *juegos sobre redes*. Esta idea consiste en visualizar a los vértices de la red como individuos que se ven involucrados con sus vecinos en un juego, comunmente el dilema del prisionero<sup>9</sup>. Esta idea fue propuesta originalmente por Nowak and May (1992).

Poncela et al. (2008) proponen un modelo en el que los vértices de la red juegan el dilema del prisionero (por parejas). En ciertos intervalos de tiempo se añaden nuevos vértices, que se ligarán a los vértices preexistentes, pero

---

<sup>8</sup>Los aros o *loops* son arcos que se originan en el mismo vértice destino

<sup>9</sup>Es uno de los juegos más estudiados en teoría de juegos, para más detalles puede consultarse Zapata-Lillo (2007).

preferirán hacerlo con los “más aptos”. La aptitud se mide por medio de una función que es proporcional a los pagos que reciben como resultado del juego y cada vez que lo juegan pueden cambiar sus estrategias (evolucionar) de acuerdo a cierta probabilidad que depende del pago de sus vecinos.

De esta manera los autores logran ligar el crecimiento de la red a la dinámica entre las parejas de vértices, llamaron a este modelo *conexión preferencial evolutiva*. Por medio de sus estudios de simulación exploran el espacio de parámetros del modelo y muestran que por medio de este es posible generar redes con diversas estructuras como redes aleatorias o redes libres de escala.

### **3.3. Literatura sobre modelos de redes en economía y finanzas**

La teoría de redes y los modelos propios de esta han sido usados en el contexto de economía y finanzas antes de su reciente popularidad en riesgo sistémico. En esta sección se revisarán algunas publicaciones que se consideran relevantes o cercanas a los objetivos de la tesis.

Una referencia general sobre las aplicaciones y líneas de investigación de las redes a finanzas y economía son Goyal (2007) y Nagurney (2003) mientras que en Allen and Babus (2008) se discuten varios aspectos de finanzas que pueden beneficiarse de la teoría de redes.

#### **3.3.1. Juegos de formación de redes**

Las redes han sido estudiadas en muchas áreas de estudio como la sociología o las ciencias de la computación. Sin embargo lo que hace distinto al enfoque económico es la importancia que se le da a los modelos estratégicos sobre cómo se forman las redes y a los incentivos y costos que tienen los participantes para tomar decisiones sobre la creación de conexiones entre ellos.

Este enfoque permite entender cómo surgen las redes derivadas de las acciones de cada participante. En el contexto de riesgo sistémico esto es de vital importancia puesto que el comportamiento de participantes en las redes financieras suele ser estratégico y no aleatorio Iori et al. (2006).

Los modelos más adecuados para abordar este tipo de cuestiones son los *juegos de formación de redes*. En estos se especifica un conjunto de jugadores,

las acciones disponibles para cada jugador con respecto a formar arcos y los pagos que recibe cada uno dependiendo de la red en particular que se formó de acuerdo a las decisiones de cada uno.

Según las características del juego pueden formarse diversos tipos de redes que pueden llegar a ser complejos. Por ejemplo en Goyal et al. (2003) se plantea un modelo que explica la formación de la red de coautores en artículos de economía, dicha red es de mundo pequeño y con características similares a las redes libres de escala.

Algunas revisiones de modelos de juegos sobre formación de redes son Jackson (2003) y Goyal (2003), quienes exponen modelos que pueden ser aplicados a distintas situaciones y problemas económicos.

### **3.4. Literatura sobre riesgo sistémico basada en modelos de redes**

Tal vez el primer artículo donde se usó el paradigma de teoría de redes para analizar la estabilidad de los sistemas financieros fue, aunque por medio de modelos muy simplistas, Allen and Gale (2000). Los autores estudian los efectos de su modelo en redes de cuatro vértices con distintos patrones de conectividad. Uno de sus resultados es que las redes interbancarias completas<sup>10</sup> son más robustas ante crisis financieras que las redes incompletas. La estructura de la primera red permite que el impacto inicial se vea atenuado, mientras que en la red incompleta los bancos tienen problemas para difundir el impacto.

Desde Allen and Gale (2000) los modelos de redes han estado presentes con frecuencia en estudios sobre contagio financiero y riesgo sistémico. Aunque se inició con modelos demasiado estilizados ahora se han vuelto más sofisticados y realistas conforme han avanzado las investigaciones. Además, la evidencia empírica ha dado luz sobre cómo se comportan las redes financieras actuales. Algunos trabajos relevantes al respecto se mencionan brevemente a continuación.

---

<sup>10</sup>Una red completa implica que todas las instituciones realizan transacciones con todas las demás instituciones del sistema. En la realidad las redes financieras no exhiben este comportamiento, en los capítulos posteriores se mostrará este hecho para algunas redes del sistema bancario mexicano.

### 3.4.1. Estudios empíricos

En Iori et al. (2005), los autores proveen evidencia empírica sobre las propiedades topológicas del mercado de dinero de Italia, y la mayoría de las métricas empleadas en dicho trabajo fueron usadas para los estudios empíricos en capítulos posteriores de la tesis.

Muchos aspectos relevantes de los sistemas de pagos, como por ejemplo el flujo de dinero, han sido exitosamente descritos por medio de los modelos de redes. Algunos estudios en los que se han usado redes para modelar los sistemas de pagos de varios países son: Bech and Atalay (2008) de EUA; Becher et al. (2008) y Wetherilt et al. (2010) del Reino Unido; Rordam and Bech (2008) y Pröpper et al. (2008) de Dinamarca.

En Cont et al. (2010) se hace un estudio empírico sobre el sistema financiero de Brasil. Y por medio de una métrica para la importancia sistémica de las instituciones, definida por los autores, estudian el potencial del contagio en el sistema y cómo lo reduce el aumento en los requerimientos de capital.

También es importante destacar que los estudios relacionados a riesgo sistémico deben ampliarse a estudios de alcance internacional, esta es la única forma de entender cómo se puede materializar una crisis a través de las fronteras internacionales. Desde esta perspectiva en Espinosa-Vega and Solé (2010) los autores usan la teoría de redes para simular impactos de crédito y de fondeo a los sistemas financieros de varios países y estudiar sus efectos. En Minoiu and Reyes (2011) estudian la red global de bancos y la evolución de sus características estructurales durante 1978-2009.

### 3.4.2. Aplicación de modelos a riesgo sistémico

En la tesina Cano-Moo (2010) se utiliza el modelo de Bollobás et al. (2003) para simular a un sistema bancario y estudiar el efecto de contagio, por medio de metodologías similares a las propuestas por Cont and Moussa (2009).

Nier et al. (2006) usan gráficas aleatorias para modelar las redes bancarias y estudiar el efecto de contagio a base de fallas idiosincráticas. Su modelo es una función del nivel de capitalización del banco, el tamaño de sus exposiciones y la probabilidad de conexión del modelo de Erdős-Renyi. Uno de los resultados que obtienen es que la probabilidad de conexión tiene un efecto no monótono sobre las fallas provocadas por el contagio: cuando la conectividad es baja, un ligero aumento eleva la probabilidad de contagio pero en redes más conectadas un aumento mejora la capacidad del sistema para absorber

las pérdidas.

En un estudio similar, también usando gráficas aleatorias, Gai and Kapadia (2010) llegan a la siguiente conclusión: *Los sistemas financieros exhiben una tendencia robusta y, sin embargo, frágil: mientras que la probabilidad de contagio puede ser baja, los efectos pueden propagarse bastante cuando ocurren problemas.*

Existe otra rama de investigación en los bancos centrales que incluyen a los modelos de redes dentro de modelos de simulación más generales. Por ejemplo en Martínez-Jaramillo et al. (2010b) la descomposición del riesgo sistémico en choque inicial y en contagio les permite desagregar las pérdidas al sistema en las pérdidas ocasionadas por las dos componentes por separado y obtener una distribución de pérdidas para el sistema. En un estudio similar, Martínez-Jaramillo et al. (2010a) concluyen que para el choque inicial es importante considerar el debilitamiento conjunto de los bancos, no sólo el individual con la intención de no aislar a los bancos de su ambiente macroeconómico. En Márquez-Diez-Canedo et al. (2009) los autores concluyen que la topología de la red no es lo más importante para el estudio del riesgo sistémico sino que también al tamaño y la concentración de las exposiciones.

Otros estudios que involucran simulación y el uso de redes son: Alessandri et al. (2009) en donde se considera la estructura de las hojas de balance de los bancos, lo que permite considerar distintos tipos de riesgo; por ejemplo, de liquidez y de crédito. En Gauthier et al. (2010) se resalta la importancia de las ventas de pánico<sup>11</sup> y de conocer en detalle la información sobre tenencia de derivados entre las instituciones, ya que esto puede dar distintas evaluaciones del riesgo que aportan al sistema.

---

<sup>11</sup>Se refiere a la situación en que, por ejemplo, los bancos en dificultades financieras o con problemas de liquidez se ven forzados a vender parte de sus activos a precios rebajados incurriendo en pérdidas.

## Capítulo 4

# Análisis empírico de la red de exposiciones interbancarias en México

*Los mercados interbancarios son importantes para el correcto funcionamiento de los sistemas financieros. Su principal propósito es la distribución de liquidez a todo el sistema pasando de los bancos con excedentes a los bancos con escasez.* Allen et al. (2009)

La crisis global reciente demostró la importancia de un manejo adecuado de la liquidez. Algunos bancos europeos, quienes a pesar de que excedían el nivel mínimo regulatorio de capital, quebraron debido al incumplimiento de sus pagos (iliquidez). Estos problemas afectaron a otros bancos quienes a su vez tuvieron problemas de liquidez. Este efecto contagioso provocó la bancarrota del banco Lehman Brothers el 15 de septiembre de 2008 el cual impactó de manera importante a EUA y a México, agravando aún mas la crisis.

La red de exposiciones interbancarias es un medio importante por medio del cual puede propagarse el efecto de contagio a causa de las posiciones de riesgo directas entre los participantes. En Graf et al. (2005) se evalúa el efecto de contagio en la red de exposiciones interbancarias de México, observando el efecto que tienen las fallas individuales, los autores concluyen que el efecto de contagio en esta red no es de la magnitud necesaria para desencadenar una crisis sistémica.

Por medio de un modelo más general, en Martínez-Jaramillo et al. (2010b) se evalúa la robustez/fragilidad de dicha red determinando la distribución de



pérdidas de los bancos del sistema lo cual les permite calcular probabilidades de quiebra para los bancos dado el choque inicial y también considerando el efecto de contagio. Asimismo pueden estimar la cantidad de bancos que fallen en rondas de contagio ocasionadas por la quiebra de algún banco en particular.

Aunado a este tipo de estudios resultan de vital importancia los estudios empíricos que permitan entender el funcionamiento y la evolución de la red interbancaria, así como sus características estructurales e investigar cómo estos pudieran influir en la estabilidad financiera y los riesgos que la amenazan.

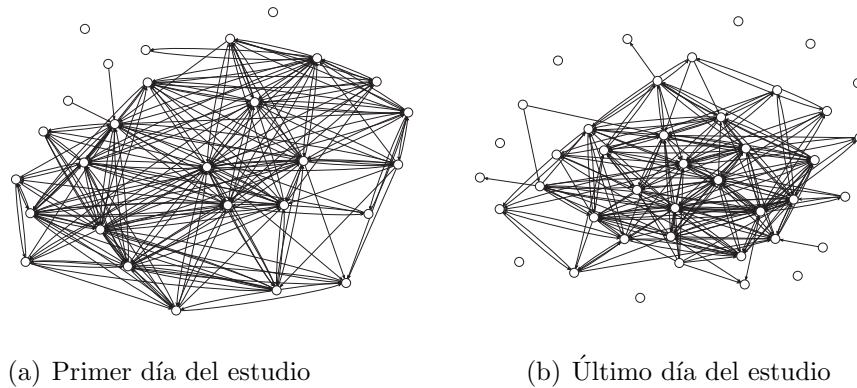
Con las herramientas desarrolladas en el capítulo 2 se realiza el siguiente estudio sobre la red de exposiciones interbancarias en México. En esta los vértices representan a los bancos y las ligas son las exposiciones o posiciones de riesgo entre unos y otros. El objetivo es conocer su dinámica transaccional, su topología y sus cambios a lo largo del tiempo, incluyendo un periodo de dificultades financieras (quiebra del banco Lehman Brothers).

El capítulo se organiza como sigue: La sección 4.1 describe de manera breve a las instituciones que conforman al sistema bancario mexicano, las exposiciones y los datos disponibles para el estudio. La sección 4.2 tiene el objetivo de probar o desmentir el hecho de que la red sea libre de escala y/o sea un mundo pequeño. En la sección 4.3 se detalla la evolución de las características topológicas generales de la red de exposiciones interbancarias a lo largo del periodo de estudio. Luego, en la sección 4.4 se analiza la manera en que los bancos tienden a relacionarse en el sistema. En la sección 4.5 se estudian otras medidas para los bancos vistos de manera individual.

## **4.1. Descripción del sistema bancario mexicano y de los datos**

El sistema de bancos en México es pequeño comparado con muchos sistemas del mundo. Contaba con sólo 27 bancos activos al inicio del periodo de estudio. A lo largo del tiempo se incorporaron nuevos bancos de tal forma que se alcanzaron los 41 bancos, después uno sale del estudio, quedando 40 bancos activos al final de dicho periodo.

Los bancos considerados para el estudio se clasifican, por el tamaño de



**Figura 4.1:** Redes de exposiciones interbancarias

sus activos, en: bancos grandes<sup>1</sup>, bancos medianos o pequeños<sup>2</sup>, bancos asociados a cadenas comerciales (BACC)<sup>3</sup> y filiales pequeñas.<sup>4</sup> *Los siete bancos de mayor tamaño administraban el 83.6 por ciento de los activos totales de la banca, los 17 bancos de tamaño mediano y pequeño el 9.3 por ciento y los cinco BACC el 1.7 por ciento. Por su parte, los activos de las 12 filiales pequeñas de bancos del exterior representaban el 5.4 por ciento del total* ((Banxico, 2010), cifras a junio de 2010).

En la gráfica 4.2(a) se presenta la evolución del valor de las posiciones de riesgo de la banca en el sistema interbancario mexicano. Nótese que las principales posiciones de riesgo corresponden a la tenencia de valores y a las operaciones de divisas; estas últimas, al menos hasta la entrada del peso en el sistema CLS<sup>5</sup>. En la gráfica 4.2(b) se muestran las posiciones de riesgo

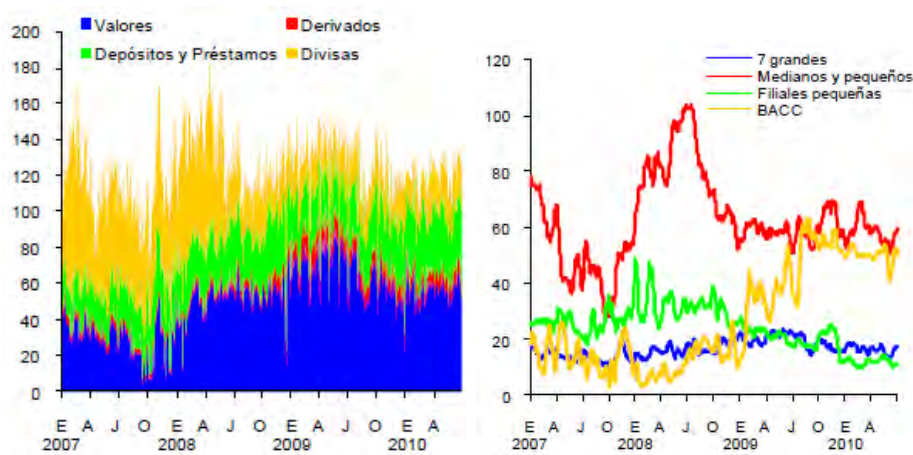
<sup>1</sup>Estos son: BBVA Bancomer, Banamex, Santander, Banorte, HSBC, Inbursa y Scotiabank Inverlat.

<sup>2</sup>Se trata de: Banco Autofin, Banco del Bajío, Ixe, Interacciones, Afirme, Banregio, Mifel, Invex, Bansi, Multiva, Ve Por Más, Monex, Compartamos, Regional, CI Banco, Prudential (Actinver) y Amigo.

<sup>3</sup>Los BACC son: Azteca, Ahorro Famsa, Bancoppel, Walmart y Fácil.

<sup>4</sup>Los bancos clasificados en esta categoría son: ING Bank, JP Morgan, Credit Suisse, Bank of America (BAMSA), American Express Bank, Deutsche Bank, Barclays Bank, Bank of Tokyo-Mitsubishi UFJ, The Royal Bank of Scotland, UBS Bank, Volkswagen Bank y GE Money. Este último se convierte en sociedad financiera de objeto múltiple en el 2009, excluyéndose del estudio a partir de ese momento.

<sup>5</sup>El 26 de mayo del 2008, el peso se integró al conjunto de las divisas que participan en el sistema global de liquidación de operaciones cambiarias llamado Continuous Linked Settlement (CLS). Este sistema opera a través de una contraparte central: el Banco CLS en Nueva York. Este utiliza un mecanismo de “pago contra pago” con lo cual se elimina por



(a) Valor de las exposiciones (miles de millones de pesos)

(b) Exposiciones interbancarias bilaterales (Por ciento del capital neto)

**Figura 4.2:** Posiciones de riesgo interbancarias para el periodo 2007-10. Fuente:(Banxico, 2010) con cifras a junio de 2010

bilaterales promedio, medidas como proporción del capital.

Las posiciones de riesgo interbancarias bilaterales, o exposiciones, que serán consideradas para el siguiente estudio cubren los riesgos asociados a la tenencia de títulos, reportos, operaciones de divisas, depósitos y préstamos no garantizados. En particular resulta de interés estudiar el impacto que los distintos tipos de exposiciones tienen sobre las distintas propiedades de la red.

El caso base de estudio será la red formada por las exposiciones descritas en el párrafo anterior con una modificación: se excluirán las exposiciones de divisas de los bancos que utilizan el sistema CLS. Dicha modificación se realizó porque el uso del sistema CLS altera de forma notoria algunas propiedades de la red, en particular algunas medidas individuales de los bancos. Dado que el peso entró al sistema CLS aproximadamente unos meses antes de la quiebra de Lehman Brothers, este caso de estudio permite abstraer los efectos en la red a causa de la caída de Lehman.

Sin embargo, la red sin modificación alguna resulta un caso de estudio interesante para conocer los cambios estructurales en la red con la entrada

---

completo el riesgo de liquidación, el cual ocurre cuando un banco entrega a su contraparte la moneda vendida antes de confirmar la recepción de la moneda comprada.

de una contraparte central. Otro caso de estudio es aquel en donde no se consideran las exposiciones por intercambio de divisas, el cual permite observar cómo distintos tipos de exposiciones pueden alterar a la red de forma notoria.

En resumen, se tienen 3 casos de estudio: El primero corresponde a las exposiciones sin modificación alguna, el segundo caso o caso base considera las exposiciones sin las operaciones realizadas por medio del CLS (sin CLS) y el tercer caso corresponde a las exposiciones sin considerar las operaciones de divisas (sin divisas).

Banco de México tiene datos diarios que fueron usados para crear matrices de exposiciones bilaterales diarias para cada caso mencionado anteriormente. El periodo de tiempo considerado fue de 6 años; del 3 de enero de 2005 al 31 de diciembre de 2010; lo que permitió calcular 1,511 matrices diarias para cada caso de estudio.

## 4.2. Estructura de la red de exposiciones

En el capítulo 3 se mencionaron dos categorías en las que se encuentran muchas redes de la naturaleza y sistemas financieros del mundo. Estas son las redes libres de escala y las redes de mundo pequeño. Y como se mencionó en dicho capítulo, el hecho de que una red tenga alguna de esas propiedades influye en la manera en que se llevan a cabo procesos a través de sus vértices.

Es un hecho notable el que la red del sistema interbancario mexicano exhibe la propiedad de mundo pequeño y que, en algunas ocasiones, no se descarta el hecho de que la red pudiera ser libre de escala. Sin embargo, en una gran parte del tiempo, la red no da evidencia de poseer dicha característica.

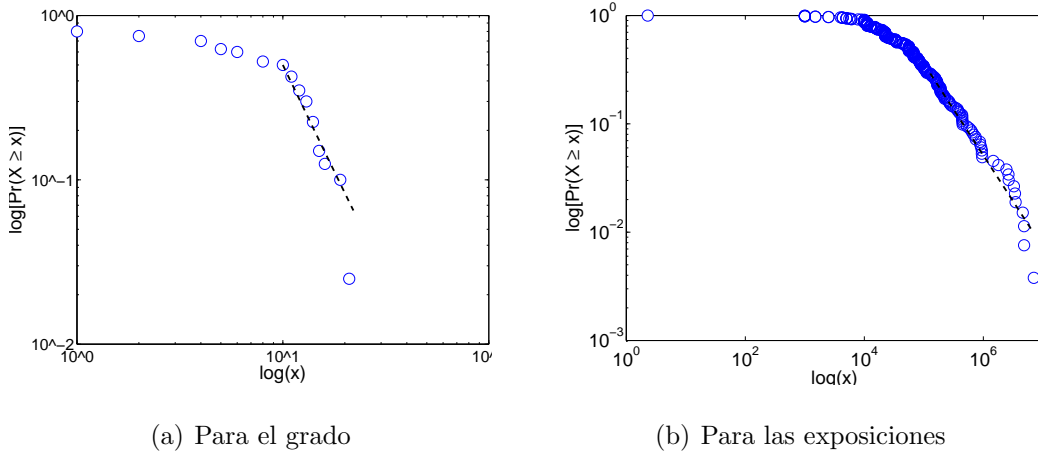
### 4.2.1. Libertad de escala

En la figura 4.3(a) se muestra la prueba gráfica para el ajuste de una distribución ley de potencia discreta<sup>6</sup> para el grado de la red interbancaria, en un día en particular. En esa fecha había 40 bancos activos en el sistema, los parámetros estimados fueron  $\hat{\eta} = 3.5$  y  $\hat{d}_{min} = 10$ . El *valor-p* calculado

---

<sup>6</sup>Las funciones de Matlab para generar la gráfica del ajuste distribucional para una ley de potencia, la estimación de los parámetros y el cálculo del *valor-p* se obtuvieron de [www.santafe.edu/~aaronc/powerlaws/](http://www.santafe.edu/~aaronc/powerlaws/). Dichas funciones siguen la metodología propuesta por Clauset et al. (2009).

fue 0.393, con lo que no se descarta la hipótesis de que el grado se distribuye ley de potencia.



**Figura 4.3:** Prueba gráfica para el ajuste de la distribución ley de potencia en la red del caso base (sin CLS)

Es importante destacar que según Clauset et al. (2009) el ajuste de la distribución ley de potencia para una muestra de datos pequeña (menor a 50 datos) puede aparentar ser bueno aunque los datos no se distribuyan así. Entonces el ajuste por medio de los parámetros estimados no es completamente confiable.

Con respecto a las exposiciones, el ajuste distribucional permite obtener conclusiones más confiables ya que las muestras diarias eran de mínimo 126 datos. En el cuadro 4.2 puede observarse que este fue el mínimo número de arcos en todas las redes.

El cuadro 4.1 resume el porcentaje de días en que no se rechaza la hipótesis de que la muestra en cuestión se distribuye ley de potencia. Si el *valor-p* es demasiado pequeño se rechaza la hipótesis distribucional. En la tabla se muestran los resultados para dos criterios de rechazo: si el *valor-p* es menor a 0.1 y uno más laxo, si el *valor-p* es menor a 0.05.

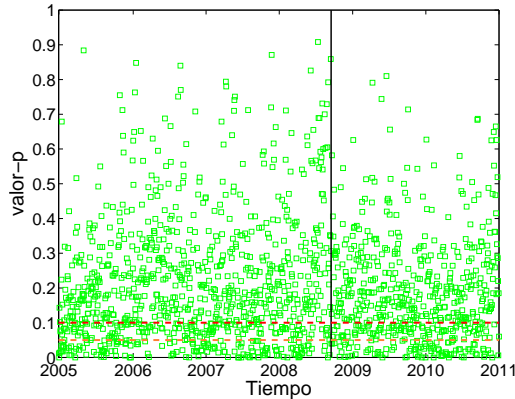
Destaca el hecho de que un criterio estricto no arroja evidencia contundente con respecto a la libertad de escala para las redes de exposiciones interbancarias en los casos sin modificaciones y sin CLS; ni para el grado, ni el grado interior, ni el grado exterior. Sin embargo, al emplear el criterio más laxo, se tiene que la mayoría de los días dichas redes sí exhiben un comportamiento del cual no se descarta la hipótesis de que sean libres de

valor-p	Interbancario		Inter. sin CLS		Inter. sin divisas	
	< .05	< .1	< .05	< .1	< .05	< .1
Grado	77 %	68 %	81 %	65 %	54 %	41 %
Grado Interior	81 %	66 %	83 %	67 %	84 %	76 %
Grado Exterior	80 %	60 %	80 %	64 %	56 %	45 %
Exposiciones	57 %	50 %	63 %	54 %	83 %	76 %

**Cuadro 4.1:** Porcentaje de días en que la red mostró evidencia en favor de la distribución ley de potencia.

escala.

Los parámetros de las correspondientes distribuciones son similares para el caso sin modificaciones y sin operaciones intermediadas por el CLS. Se mencionan los de interbancario sin CLS: para el grado  $\hat{\eta} = 2.96 \pm 1.24$  y  $\hat{d}_{min} = 8.64 \pm 3.71$ , para el grado interior  $\hat{\eta} = 3.03 \pm 1.16$  y  $\hat{d}_{min} = 8.25 \pm 3.31$  y el grado exterior  $\hat{\eta} = 2.95 \pm 1.23$  y  $\hat{d}_{min} = 7.80 \pm 3.39$ . En estos casos, la mayoría de los días se descarta la hipótesis de una distribución ley de potencia para las exposiciones.



**Figura 4.4:** Evolución en el tiempo del *valor-p* correspondiente al grado interior de los bancos en la red del caso base (sin CLS)

Otro hecho destacado es que el ignorar las operaciones de divisas por completo cambia de manera importante la estructura de la red, tal que sólo el grado interior y las exposiciones exhiben un comportamiento del cual no se descarta la hipótesis distribucional de una ley de potencia. Los parámetros del grado interior son  $\hat{\eta} = 3.33 \pm 0.52$  y  $\hat{d}_{min} = 6.77 \pm 1.73$ , y para las exposiciones son  $\hat{\eta} = 1.89 \pm 0.65$  y, aunque muy volátil,  $\hat{w}_{min} = 449, 132.83 \pm 448, 273.96$ .

La figura 4.4 tiene el propósito de mostrar la ausencia de alguna tendencia clara con respecto a la estructura de la red a lo largo del tiempo. Si los valores- $p$  superan las franjas horizontales significa que la muestra apoya la hipótesis de una distribución ley de potencia. Se observa que los valores- $p$  no siguen algún patrón, es decir, no hay fechas<sup>7</sup> para las cuáles pudiera afirmarse que la red difiere o se asemeja a una red libre de escala. Para los distintos grados y exposiciones de la red en los tres casos de estudio se tienen gráficas similares.

### 4.2.2. Propiedad de mundo pequeño

Las características que deben observarse son el promedio de las distancias entre los vértices y el coeficiente de agrupamiento promedio relativo al de una gráfica aleatoria con características análogas.

El coeficiente de agrupamiento relativo se obtiene al dividir el coeficiente de agrupamiento promedio de la red interbancaria entre el coeficiente de agrupamiento de una gráfica aleatoria con la misma cantidad de vértices y con el mismo grado promedio que dicha red.

La gráfica<sup>8</sup> 4.5(a) muestra que la red interbancaria en el caso base se desvía de una red aleatoria. En la red interbancaria tienden a formarse más triángulos, es decir, agrupaciones en las que dos bancos tienen transacciones con otro banco en común.

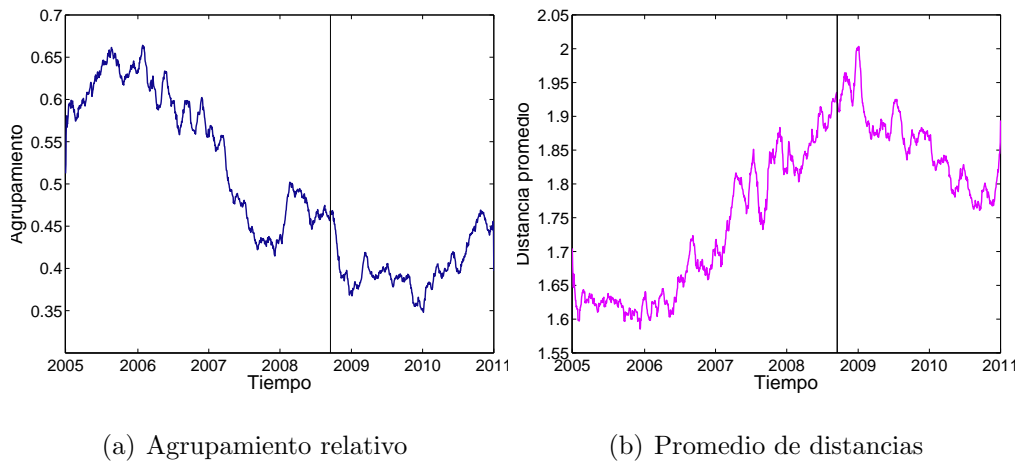
Por otro lado la figura 4.5(b) muestra cómo al principio del estudio los bancos estaban muy cercanos unos a otros. Conforme más bancos se fueron incorporando a la red, las distancias entre los bancos conectados se hicieron más grandes, en promedio.

La tabla 4.2 muestra que las distancias entre los vértices conectados es, en promedio, 2. De hecho esto es así para los tres casos de estudio. Es decir, cualquier transacción desde algún banco pasa la mayoría de las veces por un solo banco para llegar a cualquier otro. En términos de contagio, este no necesariamente pasa a través del camino más corto, sin embargo el hecho de que los bancos se encuentren cercanos entre sí hace más probable que el efecto de contagio se propague en pocas rondas.

---

<sup>7</sup>La línea vertical oscura corresponde a la fecha en que cayó Lehman Brothers. En muchas de las gráficas siguientes aparecerá esta línea.

<sup>8</sup>Para la realización de la mayoría de las gráficas en el capítulo se usaron medias móviles a 15 días con el propósito de suavizar las fluctuaciones a corto plazo y resaltar las tendencias generales o a largo plazo. Aunque también hay algunas gráficas en las que se ilustra la serie original y la versión suavizada.



**Figura 4.5:** Evidencia de la propiedad de mundo pequeño en la red del caso base (sin CLS)

### 4.3. Características globales

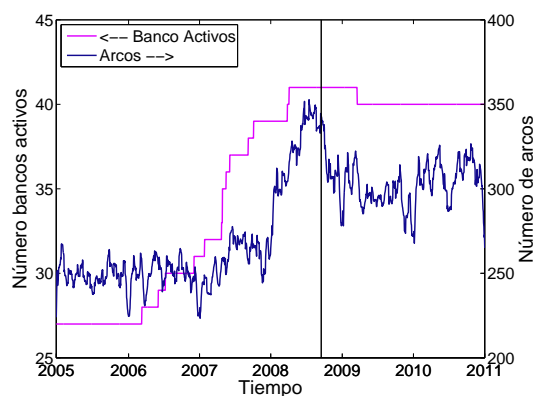
El primer día del período de estudio el sistema interbancario contaba con 27 bancos activos, este número fue creciendo entre el 2006 y el 2008 hasta llegar a ser 41 bancos los que componían al sistema. En el 2009 un banco deja de existir como tal, y ya no es considerado dentro del estudio. Esta evolución se observa en la figura 4.6.

También es notable el hecho de que 10 de los 14 bancos que se incorporaron al sistema no se conectaron a ningún otro el día de su incorporación. Asimismo dos de los bancos que sí se conectaron el día de su llegada al sistema no lo hicieron con los de mayor grado. Es decir, no se cumplió el supuesto de conexión preferencial en la evolución y crecimiento de esta red.

Aún más, la cantidad de arcos fluctúa notablemente, estos aparecen y desaparecen diariamente. La evolución entre un día y otro de la red de exposiciones interbancarias es más compleja que un modelo estático de conexión preferencial. De estas observaciones puede afirmarse que, si bien un modelo como el de Bollobás et al. (2003) puede ayudar a crear un red topológicamente similar a las redes bancarias de varios países, sus reglas de crecimiento no explican la dinámica diaria de esta red interbancaria.

El índice de completitud diario (figura 4.7(a)) muestra que la red del caso base se encuentra lejos de completarse, es decir, de que cada banco tenga





**Figura 4.6:** Evolución de la red de exposiciones interbancarias en el caso de estudio sin modificaciones.

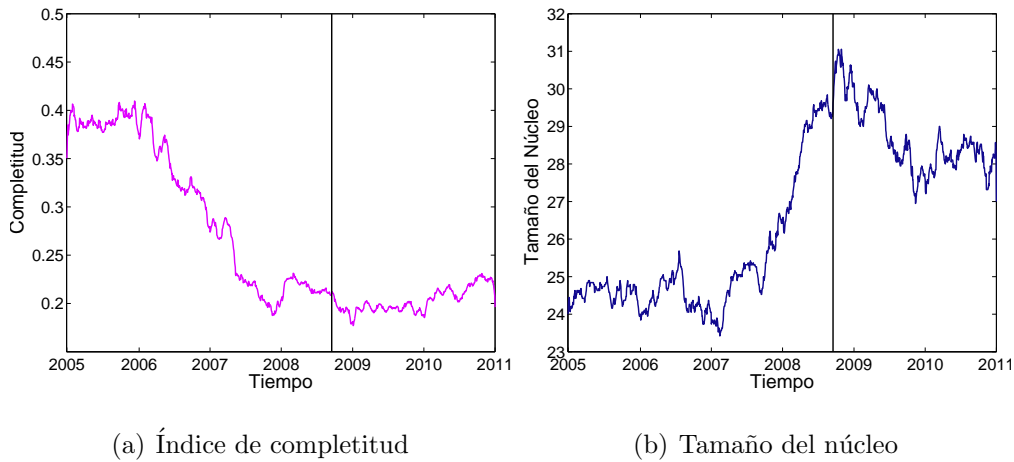
transacciones con todos los demás bancos<sup>9</sup>. Conforme el número de bancos aumentó también decreció este índice, lo que significa que los bancos nuevos no se conectaron mas que a relativamente pocos bancos. Estas observaciones destacan el hecho de que un modelo estilizado, como la gráfica completa, es poco realista.

Algunos estudios dan evidencia empírica sobre el hecho de que en los sistemas interbancarios existe cierta jerarquización o “tiering” (Craig and von Peter (2010)). Este fenómeno consiste en que algunos bancos no tienen relaciones con otros bancos directamente sino que a través de otros bancos que actúan como intermediarios. Los bancos de la alta jerarquía no se relacionan con los de la baja. En un sistema donde exista este tipo de comportamiento la red no se puede completar.

Por otra parte, en la red de exposiciones interbancarias en México existe evidencia de que hay bancos que tienden a ser prestamistas y prestatarios en la red de bancos que también se relacionan, “triangulando” las transacciones. Esto se ve reflejado en los niveles relativamente altos del coeficiente de agrupamiento (ver el cuadro 4.2 y la figura 4.5).

Aún más, un vistazo a la figura 4.1 muestra que algunos bancos deciden permanecer completamente desconectados. Sin embargo, la mayoría de los bancos en el sistema pertenece al núcleo o componente fuertemente conexas (figura 4.7(b)). El crecimiento se explica por la llegada de nuevos bancos a la red que se incorporaron al núcleo. Posterior a la caída de Lehmann

<sup>9</sup>Nótese que el supuesto de máxima entropía implica que la red en cuestión esté cercana a ser completa. Para más detalles ver el apéndice A.



**Figura 4.7:** Índice de completitud y tamaño del núcleo para la red del caso base (sin CLS)

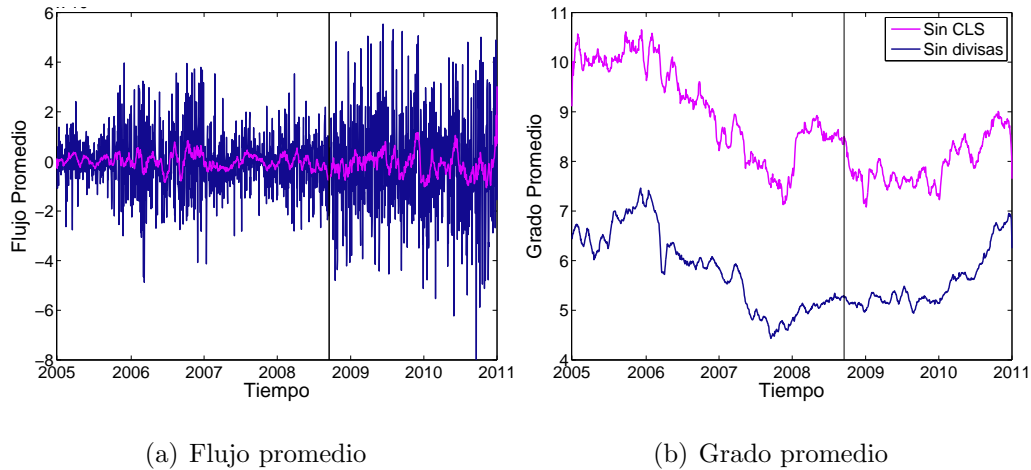
Brothers (línea vertical) algunos bancos decidieron no seguir relacionándose con algunas de sus contrapartes hasta el punto de salir del núcleo. Estos bancos serían más difíciles de alcanzar si se materializara el riesgo de contagio en la red.

La figura 4.8(a) muestra cómo se vio alterada la tendencia del flujo a partir de la caída de Lehman, se intensificaron los montos totales tanto de las operaciones hacia dentro y hacia fuera de los vértices, lo que pudiera considerarse una masiva inyección y recepción de liquidez continua.

Pero también el grado promedio de los bancos resultó sensible a estos cambios, la tendencia decreciente se explica por la llegada de nuevos vértices que se conectaron débilmente o no lo hicieron. Posterior a esto se observa, en el caso base, un crecimiento sostenido y luego otra caída. Esta caída proviene de que muchos bancos cortaron sus transacciones correspondientes a divisas, perdiendo contrapartes, por eso en la gráfica del caso sin divisas ya no se presenta dicho comportamiento.

Una reafirmación de esto último se encuentra en el siguiente párrafo de (Banxico, 2009): *En los meses previos a la quiebra de Lehman Brothers, la desaceleración de la actividad económica, la contracción del comercio exterior y los menores ingresos por remesas en nuestro país habían provocado una caída en la oferta de divisas. . . Un gran número de intermediarios financieros disminuyeron sus posiciones en tasas de interés y divisas.*

La tabla 4.2 resume la mayoría de las propiedades globales de la red de



**Figura 4.8:** Flujo promedio de la red del caso base (sin CLS) y comparación del grado promedio entre los casos de estudio sin CLS y sin divisas

exposiciones interbancarias. Algunas de estas se discutirán en detalle más adelante y se hará referencia a la tabla.

## 4.4. Relaciones interbancarias

La gráfica de grado contra afinidad muestra la tendencia de los bancos a relacionarse con bancos de grado similar o si ocurre lo contrario. La gráfica correspondiente al caso base de la red de exposiciones interbancarias muestra una tendencia decreciente, aunque no rotundamente (figura 4.9). Con lo que se puede afirmar que ocurre el fenómeno de “disassortative mixing”, en el que bancos de grados pequeños tienden a relacionarse con bancos de grados mayores. Esta tendencia es consistente con la existencia de “estrellas” y suele ocurrir en varios sistemas bancarios como por ejemplo en el italiano (ver Iori et al. (2005)).

Por otra parte la reciprocidad reporta valores alrededor de 0.8 (ver cuadro 4.2) lo que indica que la mayoría de las exposiciones del sistema son correspondidas en la dirección opuesta. La mayoría de los bancos se relacionan con sus contrapartes de forma bilateral.

Con respecto a esto también es posible calcular la correlación entre la entrada  $a_{ij}$  de la matriz de adyacencias y la entrada  $a_{ji}$ . No resulta sorprendente hallar correlaciones de 1 o de ordenes mayores a 0.9 lo que indica que

	<i>Moda</i>	<i>Media</i>	<i>Desv. Est.</i>	<i>Mínimo</i>	<i>Máximo</i>
<b>Medidas Globales</b>					
Medidas Topológicas					
Tamaño del núcleo	25	26.67	2.4	19	33
Índice de Completitud	0.2	0.26	0.08	0.11	0.44
Grado promedio	8	8.66	1.16	4.36	11.56
Reciprocidad	0.8	0.84	0.07	0.5	0.96
Promedio distancias cortas	1.60	1.77	0.12	1.51	2.18
Agrupamiento	0.29	0.49	0.1	0.29	0.71
Número de Arcos	255	262.16	31.87	126	354
Otras medidas					
Fuerza promedio*	1.82	6.37	1.51	1.82	13.95
Volumen total*	28.3	110.8	22.86	28.3	209.25

**Cuadro 4.2:** Tabla resumen de las medidas globales para la red del caso base. Las cifras marcadas con \* se encuentran en millones.

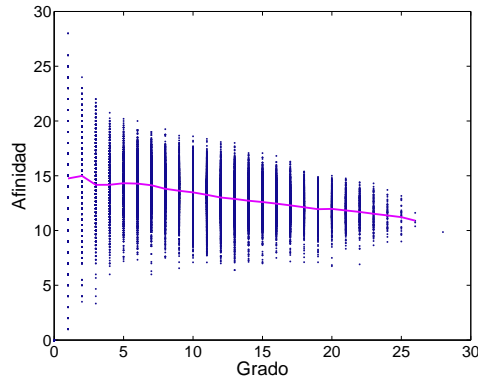
la existencia de un arco practicamente garantiza la existencia de un arco en la dirección opuesta. Esto da evidencia sobre la existencia de relaciones duraderas y aparentemente incondicionales entre los bancos.

Un aspecto de riesgo importante que debe evaluarse con respecto a la manera en que los bancos se exponen entre sí es la sobre-exposición<sup>10</sup>. Se dice que un banco está sobre-expuesto si está prestando a la red de exposiciones interbancarias una cantidad suficiente como para llevar su capital por debajo de los límites regulatorios, lo que lo llevaría a la bancarrota.

En esta tesis no se hablará más detalladamente sobre el capital de los bancos pero un concepto que puede ayudar a indicar situaciones riesgosas de este estilo es la concentración. Se dice que los préstamos que recibe un banco están concentrados si es que los prestamistas son muy pocos o la mayor proporción de los préstamos la otorgan pocos bancos. Una situación como esta puede ser riesgosa en casos como en los de escasa liquidez, un banco puede perder sus fuentes de fondeo y verse imposibilitado a cumplir con sus compromisos.

Las métricas que pueden usarse para la concentración son la entropía y el HHI. No resulta sorprendente el hecho de que las dos medidas estén negativamente correlacionadas, de hecho la correlación suele ser inferior a -0.85, al

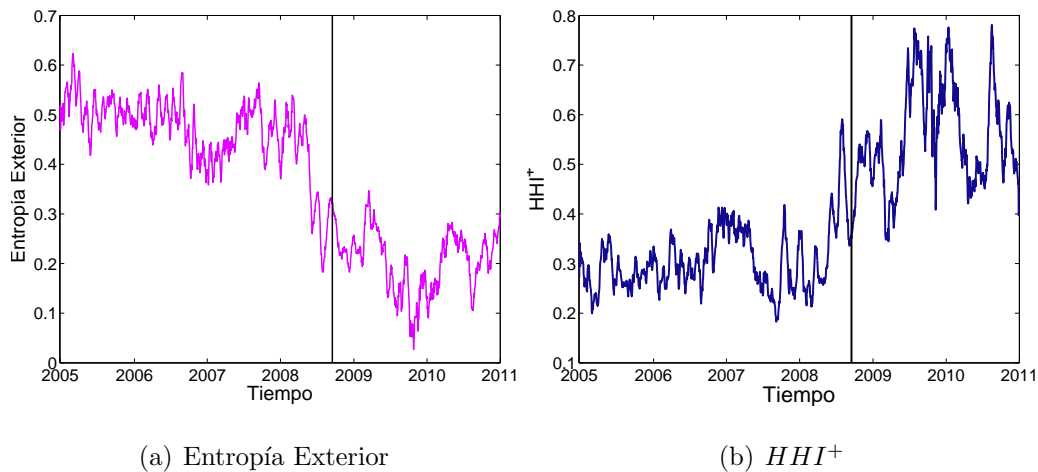
<sup>10</sup>Fue definido en Martínez-Jaramillo et al. (2010b)



**Figura 4.9:** Grado contra afinidad en el caso base de estudio (sin CLS)

menos para las exposiciones de todos los bancos en el interbancario mexicano. Puede concluirse que, en esta red, el presuponer entropía máxima es equivalente a presuponer un mínimo HHI o que existe el máximo de diversificación de las exposiciones posible.

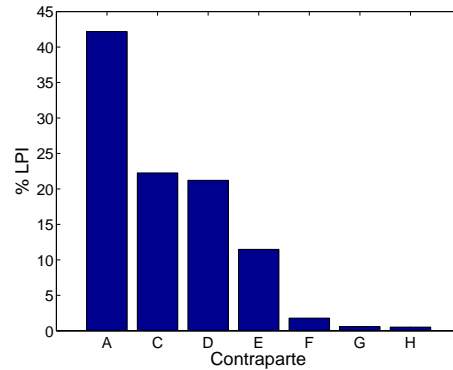
La figura 4.10 muestra la entropía exterior y el HHI exterior del banco 7, la correlación entre las dos medidas fue de -0.88. Posterior a la caída de Lehman este banco concentró sus préstamos en pocas contrapartes o se volvió más “selectivo”.



**Figura 4.10:** Índice de Herfindahl Hirschman exterior y entropía para el banco 7 en el caso base (sin CLS)

El LPI de este banco en torno al período en que sus contrapartes se en-

cuentran concentradas revela que sólo tuvo transacciones con siete bancos y a los primeros cuatro les prestó la mayor proporción de los montos que prestó en total al sistema. (figura 4.11)



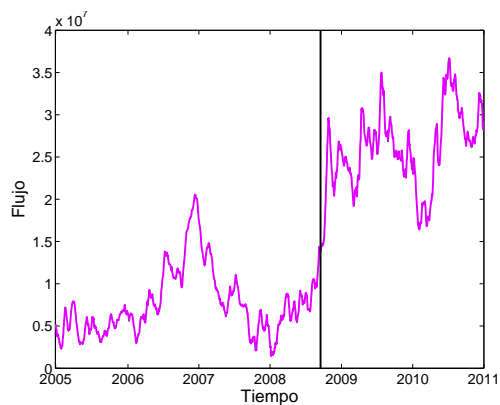
**Figura 4.11:** Índice de Preferencia del Prestamista (LPI) en el período de mayor concentración para el banco 7 en el caso base (sin CLS)

El comportamiento de los bancos se encuentra lejano a ser aleatorio, puede decirse que siguen estrategias o toman decisiones de forma “precavida”.

## 4.5. Medidas individuales

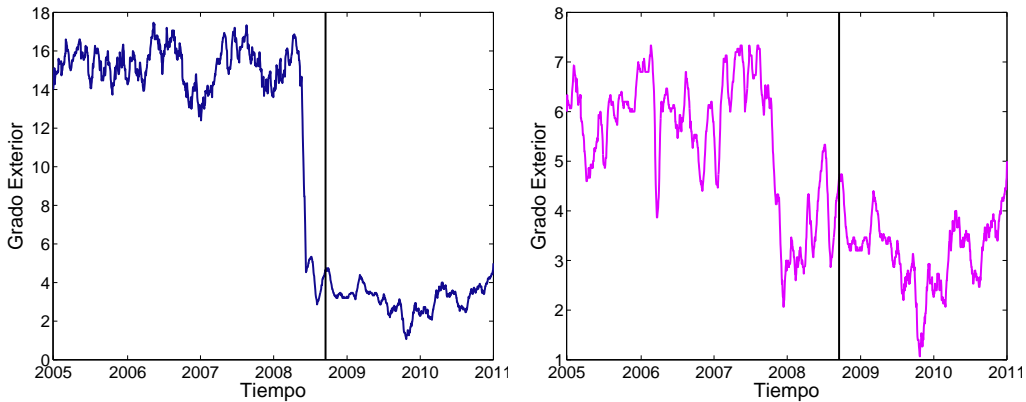
Como se vio en la sección anterior, el monitoreo individual de los bancos por medio de las métricas que ofrece la teoría de redes puede ayudar a identificar patrones de interacción y comportamiento. En particular las medidas de fuerza interior y exterior así como el flujo ayudan a identificar el papel que juega cada banco dentro de la red. En la figura 4.12 puede verse que el banco 13 funge, en términos netos, como prestamista para la red. Y, aún más, posterior a la caída de Lehmann su función cobró más importancia aportando liquidez al sistema de forma más intensa.

La bancarrota de Lehman afectó al mercado de divisas en México de forma importante, como se dijo en la sección 4.3 y las métricas usadas hasta ahora resaltan dichos efectos. En la figura 4.13(a) se observa el número de contrapartes del banco 7 para el caso de estudio en el que se ignoraron las operaciones por medio de CLS Bank. El número de contrapartes con las que participaba como prestamista cayó considerablemente algunos meses antes de la bancarrota de Lehman cuando en México empezaron a notarse los efectos



**Figura 4.12:** Flujo del banco 13 en la red del caso base (sin CLS)

de la crisis que ya había afectado a EUA y a varios países de Europa. La mayoría de estas contrapartes tenía transacciones de divisas con el banco 7 como puede apreciarse al estudiar el caso en que se ignoran las operaciones de divisas (figura 4.13(b))



(a) Caso Base (Sin CLS)

(b) Caso Sin Divisas

**Figura 4.13:** Grado exterior del banco 7 para dos casos de estudio

## Capítulo 5

# Análisis empírico del Sistema de Pagos Electrónicos Interbancarios (SPEI)

Los sistemas de pagos facilitan las transacciones entre las entidades financieras y los individuos. En la actualidad se considera que los sistemas financieros dependen en gran medida de sus servicios y que los riesgos asociados a su funcionamiento podrían afectar a la estabilidad financiera.

Entonces es importante que los bancos centrales conozcan la dinámica de los flujos que transitan a través de esta red, así como los patrones de interconexión entre las instituciones participantes en los sistemas de pagos sistémicamente importantes. Esto es un primer paso para comprender los riesgos asociados a dicho sistema.

El SPEI es el principal sistema de pagos para transferencias de dinero en México, a través de este se liquidan la mayoría de los pagos de alto y bajo valor realizados por diversas instituciones financieras y no financieras del país. Uno de los objetivos principales del Banco de México es propiciar el buen funcionamiento de este sistema de pagos.

Este capítulo tiene el propósito de realizar un estudio similar al del capítulo anterior para la red asociada a los flujos de dinero o pagos que realizan los bancos a través del SPEI. En esta los vértices representan a los bancos y los arcos representan el hecho de que un banco envía al menos un pago a otro banco en el día en cuestión.

El resto del capítulo se ordena como sigue: La sección 5.1 describe brevemente al SPEI y algunos de sus antecedentes así como los datos que se usarán



para el estudio posterior. La sección 5.2 busca identificar si la red formada por el SPEI es libre de escala y/o presenta la propiedad de mundo pequeño. En la sección 5.3 se muestran características que permiten conocer la topología general de la red formada por el SPEI. En la sección 5.4 se habla de las medidas que muestran la manera en que los bancos se conectan en la red. Finalmente en la sección 5.5 se mencionan algunas características topológicas y transaccionales individuales para los participantes en el sistema.

## 5.1. Descripción del SPEI y de los datos

Banco de México es el administrador del Sistema de Pagos Electrónicos Interbancarios<sup>1</sup> (SPEI), este es un sistema de liquidación en tiempo real, lo que significa que las instrucciones son procesadas en el mismo momento en que son recibidas. Puesto que no hay restricción alguna respecto al monto de dinero que puede transferirse en el SPEI, este ya no se puede clasificar como un sistema de pagos de alto valor o de bajo valor como suele hacerse.

Los bancos usan el SPEI para liquidar las obligaciones de parte de sus clientes, así como sus propias obligaciones<sup>2</sup>. Aún más, este sistema es la principal plataforma de liquidación de las operaciones correspondientes a la red de exposiciones interbancarias. Lo que implica que las perturbaciones o interrupciones en este sistema pueden provocar problemas en dicho sistema, pudiendo afectar a la estabilidad financiera. El SPEI se considera un sistema de pagos sistémicamente importante.

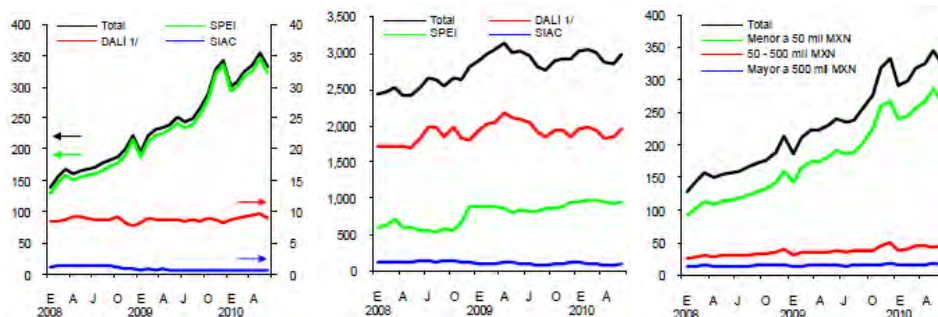
Los sistemas de pagos de importancia sistémica en México son: el Sistema de Atención a Cuentahabientes del Banco de México (SIAC), el Sistema de Pagos Electrónicos Interbancarios (SPEI) y el Sistema de Depósito, Administración y Liquidación de Valores (DALÍ). Sin embargo el que ha ido cobrando cada vez más importancia por el número de operaciones procesadas es el SPEI (gráfica 5.1 (a)). SPEI procesa en promedio alrededor de 300,000 operaciones diariamente.

Este aumento en el número de operaciones se ha debido principalmente a las medidas regulatorias que han hecho más accesible al sistema, por ejemplo: la eliminación del monto mínimo para las transacciones y la reducción de los

---

<sup>1</sup>En (CPSS, 2003) se define a un sistema de pagos como un conjunto de instrumentos, procedimientos bancarios y, usualmente, sistemas interbancarios de transferencia de fondos que aseguran la circulación del dinero.

<sup>2</sup>En particular se liquidan los saldos netos de las operaciones que le presentaron al CLS Bank en una fecha determinada, durante la noche.



(a) Número de operaciones promedio diario (miles de pesos)

(b) Importe promedio diario de las operaciones (miles de millones de pesos)

(c) Número de operaciones promedio del SPEI (miles de pesos)

**Figura 5.1:** Sistemas de pago de alto valor. Fuente:(Banxico, 2010) con cifras a junio de 2010

costos y precios para las transferencias. En Negrín et al. (2009) se hace un estudio completo sobre la evolución del SPEI desde sus inicios el 13 de agosto de 2004 hasta mediados del 2008 y se observa el efecto que han tenido las nuevas regulaciones en su crecimiento y desarrollo.

Algunos de los cambios que sufrió el SPEI en su historia más reciente pueden verse en (Banxico, 2009)(con cifras a diciembre de 2008): *Durante 2008 el número de pagos liquidados a través de este sistema se elevó 42 por ciento respecto al año previo y el valor de las transacciones se incrementó en 6.3 por ciento en el mismo lapso. Esto se ha debido, entre otros factores, a las facilidades que otorga dicho sistema a los bancos para automatizar sus procesos de pago y a la posibilidad de que los cuentahabientes de los bancos realicen pagos a través de internet.*

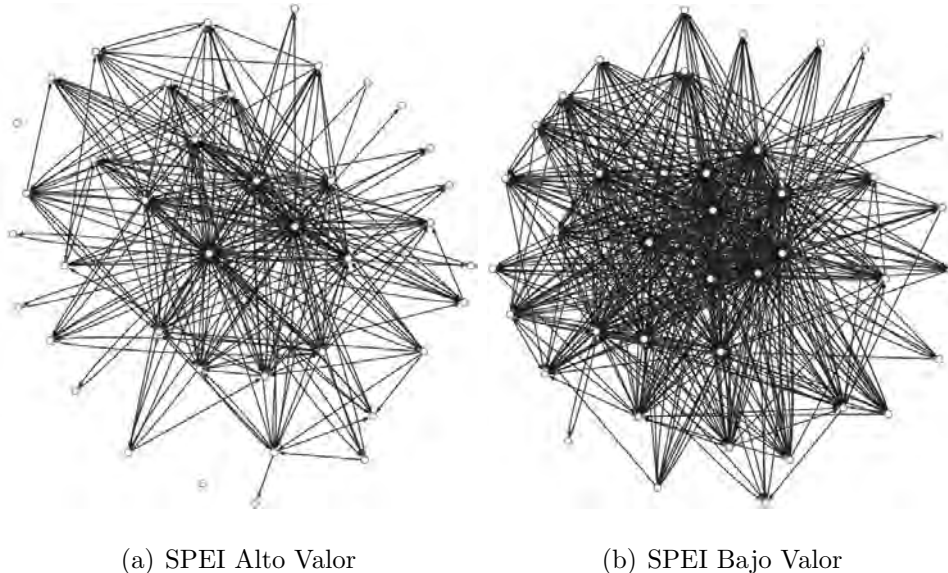
Y en (Banxico, 2010)(con cifras a junio de 2010) puede observarse cómo, el sistema ha sufrido una constante expansión en las operaciones de montos de bajo valor: *El número de pagos liquidados a través de este sistema en el periodo comprendido entre julio del 2009 y junio del 2010 aumentó un 48.7 por ciento con respecto al mismo periodo del año previo y el valor de las transacciones creció en el mismo lapso en un 22.7 por ciento (gráficas 5.1 (b) y (c)). La mayor parte de los pagos que se procesan en el SPEI alcanzan montos menores a 50 mil pesos (gráfica 5.1 (c)). Más de 80% de las transacciones son pagos con un valor menor a 100,000 pesos y solamente 1.3% de las transacciones son mayores a 10,000,000 de pesos.*

La accesibilidad para el uso del SPEI provoca la formación de una red más densamente conectada que la de la red de exposiciones interbancarias, esto puede apreciarse en la figura 5.2 que muestra las redes del SPEI para el último día del estudio.

Como ya se dijo, el SPEI empezó a operar el 13 de agosto de 2004, sin embargo, el siguiente estudio se hará para el mismo periodo que el correspondiente a la red de exposiciones interbancarias en el capítulo anterior. Este periodo fue de 6 años, del 3 de enero de 2005 al 31 de diciembre de 2010. La información permitió crear 1,511 matrices de pagos diarias con los pagos acumulados a lo largo del día en cuestión.

Los bancos que formaron esta red son los mismos de los que se habló en el capítulo anterior. Se tiene el propósito de comparar las redes que determinan las exposiciones interbancarias con las redes que determina el SPEI.

Otra consideración importante es que los datos para el estudio se dividirán en 3 casos: la red total del SPEI, la red correspondiente a los pagos de alto valor y la red correspondiente a pagos de bajo valor. Los pagos de alto valor son aquellos cuyos montos superan los 10,000,000 de pesos. Esta separación es importante para comparar las propiedades de las redes en los distintos casos. Esta distinción también revela el papel que juegan y la relevancia de un banco dependiendo del valor de los pagos.



**Figura 5.2:** Redes del SPEI para el último día del estudio

## 5.2. Estructura de la red del SPEI

De forma similar al capítulo anterior se pretende averiguar si la red correspondiente al SPEI presenta el efecto de mundo pequeño y si es libre de escala, en alguno de los tres casos.

Las principales motivaciones para identificar este tipo de estructuras es que estas tienen características que permiten asociarles algún perfil de riesgo que también puede equipararse a la red del sistema de pagos en observación. Y también sirven para inspirar el uso de modelos de formación de redes; por ejemplo para estudios de simulación o contagio y extrapolar conclusiones a las redes reales.

### 5.2.1. Libertad de escala

La distribución del grado exterior, en los tres casos, mostró evidencia de ser una ley de potencia en la mayoría de los días del estudio. Para la red completa del SPEI se obtuvieron los parámetros  $\hat{\eta} = 3.18 \pm 0.40$  y  $\hat{d}_{min} = 12.00 \pm 3.48$ . Los parámetros estimados de la red formada con los pagos de alto valor fueron  $\hat{\eta} = 2.72 \pm 1.15$  y  $\hat{d}_{min} = 8.31 \pm 4.05$ . Y finalmente en la red correspondiente a los pagos de bajo valor se estimaron  $\hat{\eta} = 2.99 \pm 0.51$  y  $\hat{d}_{min} = 10.03 \pm 3.23$ .

El hecho de que el grado exterior presente una distribución ley de potencia revela que sólo algunos bancos dan pagos a muchos participantes del sistema y que la mayoría de los bancos tiene relativamente pocas contrapartes a las cuáles dirige sus pagos.

Por otra parte, la red formada considerando únicamente los pagos de alto valor muestra una estructura que, en la mayoría de los días del estudio, no descarta la hipótesis de una red libre de escala, tanto para el grado exterior, como ya se dijo, para el grado interior (con parámetros estimados  $\hat{\eta} = 2.62 \pm 1.25$  y  $\hat{d}_{min} = 7.99 \pm 4.29$ ) y el grado (los parámetros estimados fueron  $\hat{\eta} = 2.55 \pm 1.40$  y  $\hat{d}_{min} = 8.89 \pm 5.20$ ).

Con respecto al grado y grado interior en los casos SPEI total y SPEI con pagos de bajo valor la mitad de los días, aproximadamente, las redes exhiben una tendencia que no descarta la hipótesis de ser libres de escala. Menos de la mitad de los días los flujos de dinero diarios tienen una distribución de la cual no se descarta la hipótesis distribucional de una ley de potencia continua, en los casos total y alto valor. Sin embargo, no se rechaza la hipótesis de distribución ley de potencia sobre los montos de los flujos en la red del SPEI

con pagos de bajo valor para muchos días (los parámetros estimados fueron  $\hat{\eta} = 1.64 \pm 0.47$  y  $\hat{w}_{min} = 46.40 \pm 194.78$ ).

	<i>SPEI Total</i>		<i>SPEI Alto Valor</i>		<i>SPEI Bajo Valor</i>	
	< .05	< .1	< .05	< .1	< .05	< .1
valor-p						
<b>Grado</b>	66 %	51 %	86 %	78 %	76 %	57 %
<b>Grado Interior</b>	62 %	45 %	89 %	83 %	64 %	45 %
<b>Grado Exterior</b>	86 %	74 %	91 %	86 %	92 %	84 %
<b>Pagos</b>	46 %	37 %	54 %	43 %	94 %	88 %

**Cuadro 5.1:** Porcentaje de días en que la red mostró evidencia en favor de la distribución ley de potencia.

Todo lo dicho anteriormente estuvo basado en el criterio de decisión más estricto: se rechaza la hipótesis de distribución ley de potencia si  $valor - p < 0.1$ . El cuadro 5.1 resume algunos de los resultados mencionados<sup>3</sup>.

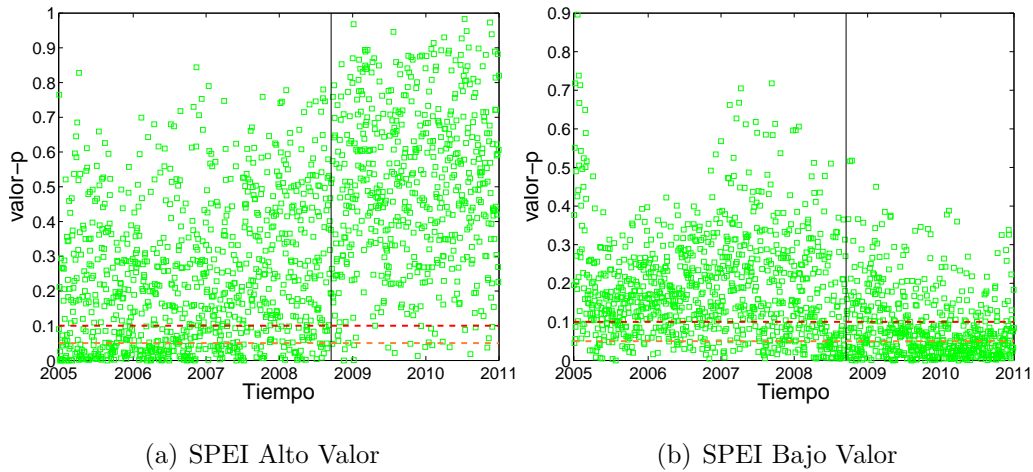
Estas observaciones en redes de sistemas bancarios de otros países han motivado la adaptación y el uso de modelos de formación de redes libres de escala. No obstante, en este caso, sólo si se consideran los pagos de alto valor se observa este comportamiento.

También debe observarse que no es apropiado extrapolar conclusiones con respecto a la red de exposiciones basados en las observaciones de la red de un sistema de pagos ya que ambas muestran estructuras muy distintas.

En algún punto del tiempo, cercano a la caída de Lehman, los pagos de alto valor tendieron a formar más redes en las que no se descarta la hipótesis de una red libre de escala con respecto al grado (figura 5.3(a)). Con los pagos de bajo valor ocurrió lo contrario, sus redes correspondientes mostraron con menor frecuencia redes con estructuras de las que pudiera presumirse que son libres de escala (figura 5.3(b)). Si se considera la red del SPEI total se observa un resultado similar al de la red correspondiente a los pagos de bajo valor, recuérdese que estos conforman la mayor parte de los pagos en la red.

Independientemente de que la distribución del grado pudiera ser una ley de potencia, la figura 5.3 muestra que, a partir de un punto del 2008, hubo un cambio notable en la estructura general de la red del SPEI. Una conclusión

<sup>3</sup>Es importante recordar que estos resultados no son concluyentes en el sentido de que las muestras para el ajuste distribucional sobre los grados es muy pequeña (las redes contienen entre 27 y 41 bancos) y el resultado puede ser engañoso. Como se mencionó en el capítulo anterior, el resultado del ajuste distribucional es más confiable si las muestras tienen más de 50 datos.



**Figura 5.3:** Evolución en el tiempo del *valor-p* correspondiente al grado de los bancos en la red del SPEI.

apresurada podría ser que la quiebra de Lehman afectó la estructura de la red. Sin embargo, este evento no perturbó de forma considerable al SPEI, esto lo muestran las propiedades topológicas estudiadas más adelante.

Este cambio en la estructura se explica por una modificación en las tarifas por usar el SPEI, una referencia a este hecho se encuentra en Negrín et al. (2009): *...la tarifa anual fija que se cobraba a las instituciones participantes fue eliminada en enero de 2008. Como consecuencia se esperaba que la reducción en los costos hiciera al SPEI más atractivo para los bancos. Nótese que estas medidas sólo tendrían un impacto en la adopción del SPEI por los usuarios en la medida en que sus efectos se transmiten a los precios finales.*

En efecto, a partir de 2008 inicia un cambio importante para todas las características topológicas de la red como se verá en secciones posteriores.

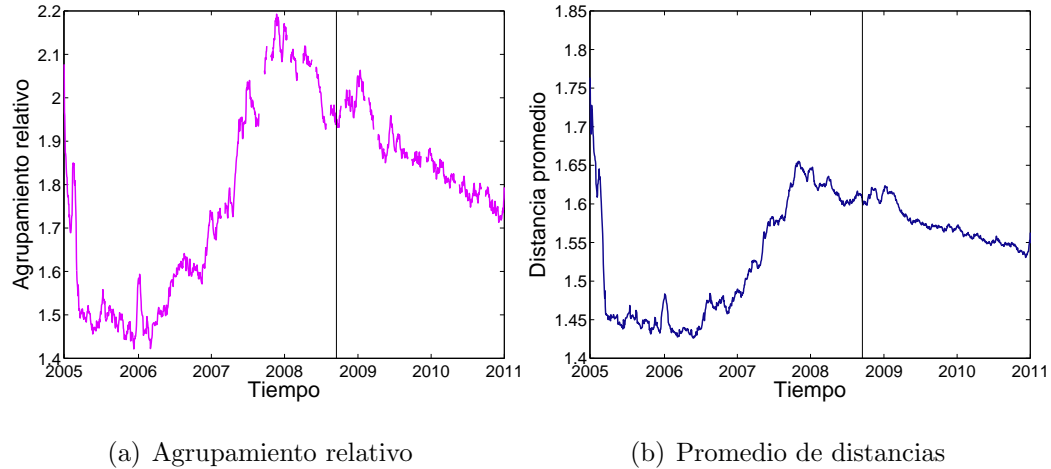
### 5.2.2. Propiedad de mundo pequeño

Para evaluar si la red tiene esta propiedad deben observarse el promedio de las distancias entre los vértices y el coeficiente de agrupamiento promedio.

En los tres casos de estudio se presentan distancias promedio y coeficientes de agrupamiento similares. Las tres redes presentan la propiedad de mundo pequeño. La figura<sup>4</sup> 5.4(a) revela desviaciones importantes con res-

<sup>4</sup>Para la realización de la mayoría de las gráficas en el capítulo se usaron medias móviles

pecto al de una gráfica aleatoria, en la red del SPEI tienden a formarse más triángulos. Además los bancos tienden a estar muy cercanos (figura 5.4(b)), con aproximadamente un banco separando a cualquier pareja de bancos, en promedio.



**Figura 5.4:** Evidencia de la propiedad de mundo pequeño en la red del SPEI total

En ambas gráficas se presenta una caída abrupta en uno de los primeros meses del 2005, esto refleja un crecimiento dramático en el uso del sistema por parte de algunos bancos que no habían participado o no lo habían hecho tan activamente. Este comportamiento también se puede observar en otras medidas pero se manifiesta en forma de salto y no de caída.

### 5.3. Características globales

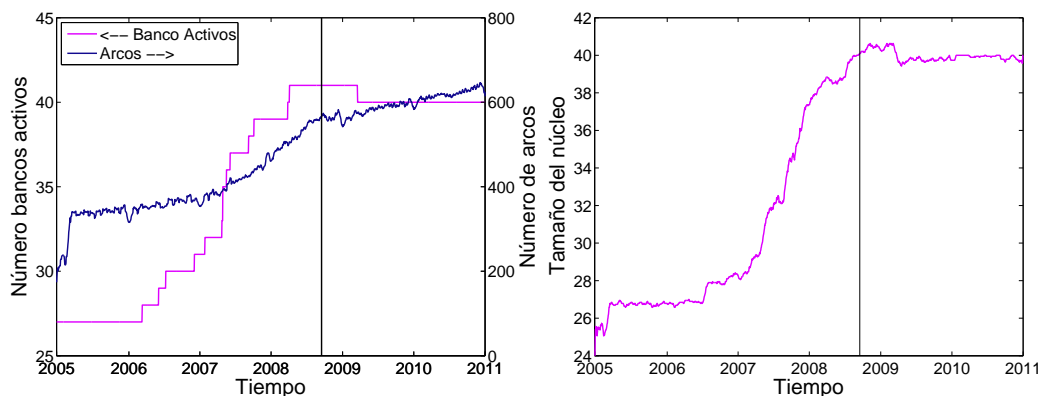
El crecimiento del sistema bancario mexicano ya se discutió con detalle en el capítulo anterior. El primer día del período de estudio el sistema interbancario contaba con 27 bancos activos, el último día contaba con 40 bancos. Sin embargo el número de arcos en la red del SPEI total tiene un comportamiento muy distinto al de la red de exposiciones interbancarias. Este sufre fluctuaciones ligeras y su tendencia general siempre fue creciente (figura 5.5(a)) lo que refleja la expansión del sistema en ese periodo.

---

a 15 días con el propósito de suavizar las fluctuaciones a corto plazo y resaltar las tendencias generales o a largo plazo. Aunque también hay algunas gráficas en las que se ilustra la serie original y la versión suavizada.

Aún más, la mayoría de los bancos pertenecían al núcleo en muchos de los días del estudio (figura 5.5(b)). Esto implica que la mayoría se encuentran fuertemente conectados unos con otros y que cada uno de éstos recibe y da pagos a al menos una contraparte.

Considerando los otros casos de estudio se observa que en la red correspondiente a pagos de alto valor se tiende a formar un núcleo de menor tamaño que en la red de pagos de bajo valor (cuadro 5.2). Esto es claro puesto que los bancos más pequeños no efectúan o no reciben pagos de montos tan altos frecuentemente o no realizan transacciones de este tipo en lo absoluto. Un mirada a la figura 4.1(a) revela que incluso algunos bancos permanecen completamente desconectados.



(a) Evolución de la red SPEI

(b) Tamaño del núcleo

**Figura 5.5:** Evolución y tamaño del núcleo de la red del SPEI total.

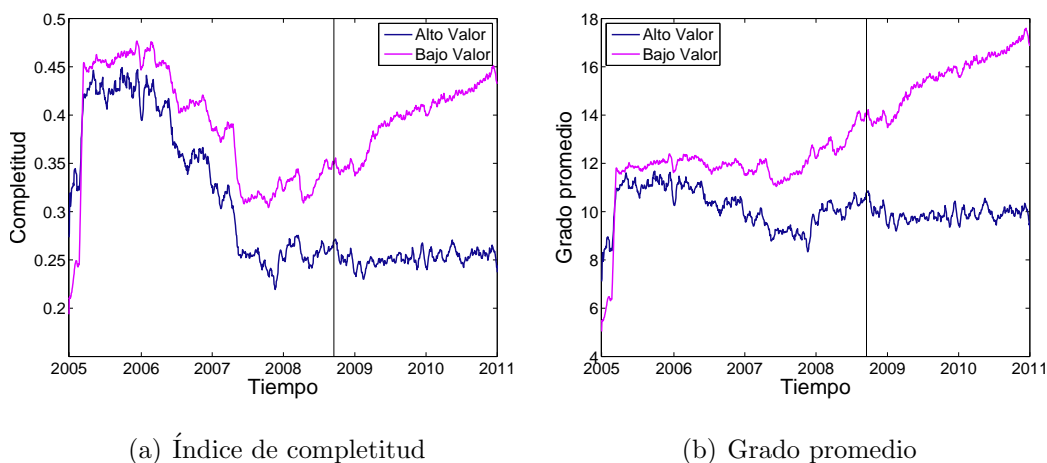
La eliminación de la tarifa anual a partir del 2008 y otras reducciones de tarifas en el 2006 provocaron un aumento dramático en la cantidad de operaciones de bajo valor, ocasionando que se realizaran pagos entre bancos que no habían intercambiado flujos anteriormente. Esto se refleja en el hecho de que la red del SPEI total y la de pagos de bajo valor esté más cercana a completarse (figura 5.6(a)) como cuando lo estuvo en el 2006 antes de la incorporación de nuevos bancos al sistema. Por su parte, los bancos que operan en la red de alto valor han sido los mismos y no se han relacionado con bancos nuevos con respecto a los que solían relacionarse.

Esto también se refleja en que la participación de los bancos en la red de alto valor es menos intensa. En promedio hay 290 arcos en la red de alto valor, en contraste con la de bajo valor en la que hay 405 arcos promedio



diarios (ver el cuadro 5.2). Tómese en cuenta que cada arco representa el hecho de que ese día se envió al menos un pago entre la pareja de bancos en cuestión.

También el grado promedio resultó sensible a la eliminación de la tarifa mencionada anteriormente puesto que los bancos incrementaron también su número de contrapartes con las que intercambiaron flujos de dinero (figura 5.6(b)). Por su parte, el grado promedio de los bancos en las operaciones de alto valor no se ha visto alterado posterior a un leve incremento a inicios del 2008.

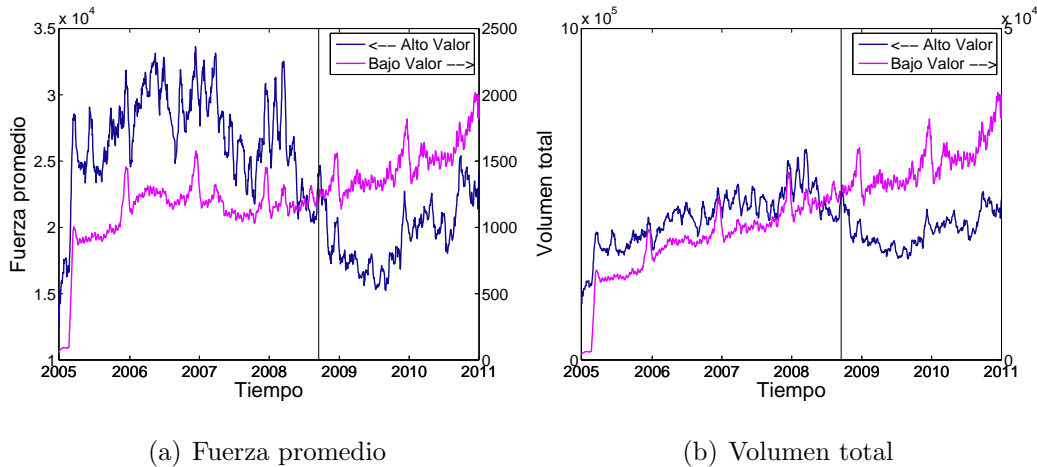


**Figura 5.6:** Comparación del índice de completitud y el grado promedio entre las redes correspondientes a las operaciones de bajo y alto valor.

Las gráficas en la figura 5.7 reflejan que en promedio los bancos han aumentado el promedio de sus montos de bajo valor, a partir del 2008, mientras que los de alto valor disminuyeron. Los montos correspondientes a pagos de bajo valor han incrementado como resultado de las políticas de promoción y accesibilidad del SPEI que se mencionaron anteriormente. Por otro lado, la principal razón de la disminución en los montos de pagos de alto valor es por la entrada del peso al CLS.

Aunado a esto también los bancos se “acercaron” entre sí a partir del 2008 (ver figura 5.4(b)).

En general puede afirmarse que las medidas globales apuntan hacia la apertura y generalización del uso del SPEI, especialmente para las operaciones de bajo valor.



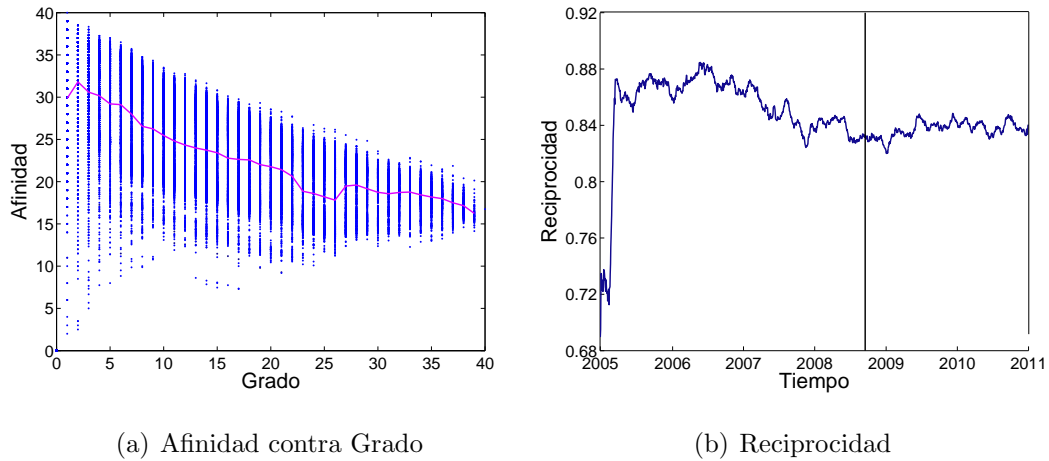
**Figura 5.7:** Comparación de la fuerza promedio y el volumen entre las redes correspondientes a las operaciones de bajo y alto valor.

## 5.4. Relaciones interbancarias

La gráfica de grado contra afinidad muestra que en la red del SPEI ocurre el fenómeno de “disassortative mixing” en el que las contrapartes de los bancos más conectados son de grados pequeños. Esto se verifica en la figura 5.8(a) que exhibe una clara tendencia decreciente, incluso de forma más contundente que para el mercado interbancario. Por su parte la red del SPEI con pagos de bajo valor y la red con los pagos de alto valor también muestran esta tendencia.

Los arcos dirigidos en alguna dirección fueron recíprocos en un 84% de los casos, aproximadamente (figura 5.8(b) y cuadro 5.2). Lo cual indica que los flujos de dinero entre las parejas de bancos son bilaterales en la mayoría de los casos. El índice de reciprocidad para las redes correspondientes a los pagos de bajo valor es de magnitud similar. Sin embargo, en pagos de alto valor, la reciprocidad es ligeramente más pequeña puesto que no todos los bancos emiten a la vez que reciben pagos considerados de alto valor.

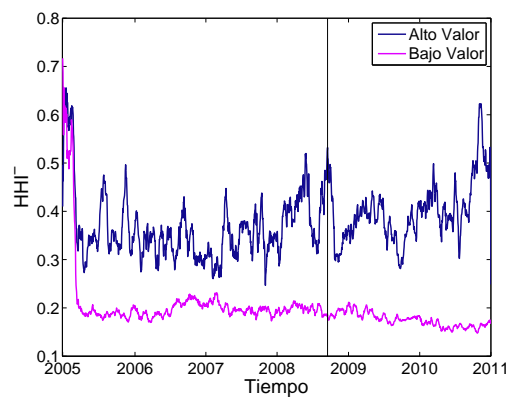
Por otra parte, en la red del SPEI total, la mayoría de los bancos tienen sus pagos suficientemente diversificados entre sus contrapartes, tanto los que reciben como los que envían. Esto también ocurre en la red del SPEI correspondiente a pagos de bajo valor. Sin embargo, en la red de pagos de alto valor se tiende a observar una concentración más alta para algunos bancos. Esto es una consecuencia de que la actividad en la red de pagos de alto valor



**Figura 5.8:** Relaciones interbancarias para la red SPEI

es menos intensa y no todos los bancos realizan transacciones de este tipo.

Un ejemplo se muestra en la figura 5.9, es el índice de concentración del banco 15 con respecto a las contrapartes de las que recibe pagos ( $HHI^-$ ), para la red de bajo valor como la de alto valor. Se observa que, la mayor proporción de los pagos de alto valor que recibe tienden a concentrarse en relativamente pocas contrapartes, no así con los pagos de bajo valor.



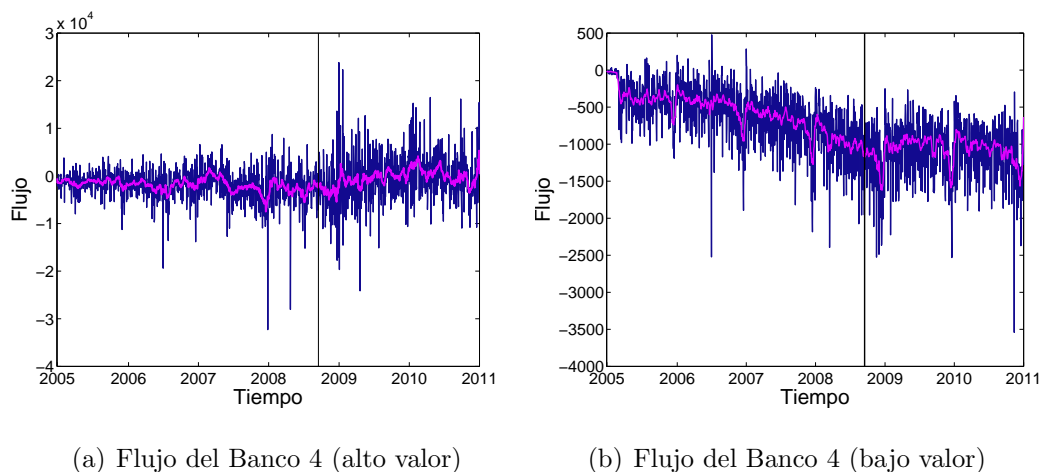
**Figura 5.9:** Comparación del índice de Herfindahl Hirschman de prestatario del banco 15.

## 5.5. Medidas individuales

A nivel individual los bancos presentan características distintas en la red de pagos de bajo valor y de alto valor como se ha ido mostrando.

Para la red de pagos de alto valor el flujo de pagos de cada banco no apunta a ninguna dirección de forma categórica sino que se mantiene cercano a cero la mayoría de los días. Es decir que en esta red ningún banco juega el papel de emisor neto ni de receptor neto. Los bancos muestran un comportamiento “cuidadoso” y suelen enviar pagos una vez que reciben los propios a cambio, esto con el propósito de no perder liquidez. Puede observarse que, en general, cualquier banco puede emitir más dinero del que recibe un día y al día siguiente ocurrir lo contrario. Como ejemplo, en la figura 5.10(a) se observa el flujo el banco 4 en la red de pagos altos.

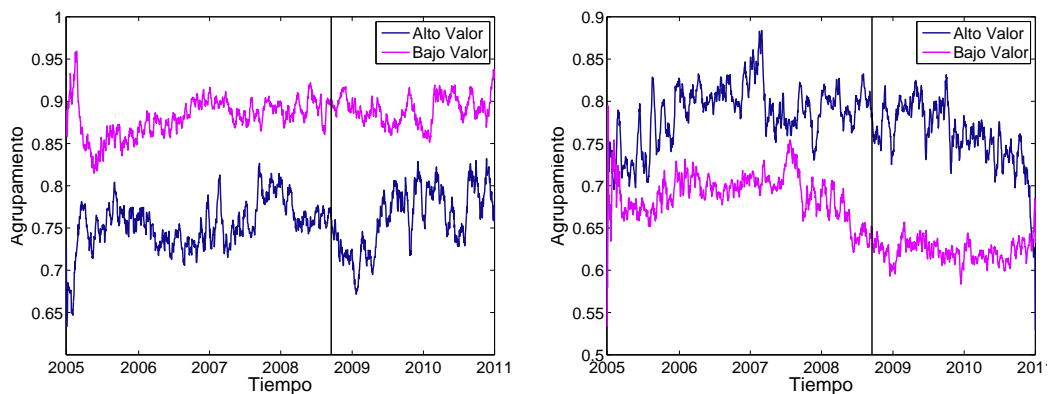
En la red de pagos de bajo valor se aprecia claramente cuáles bancos actúan como emisores o receptores de pagos en términos netos. Por ejemplo el banco 4, mientras que en la red de pagos de alto valor tiene un papel neutral, en la red de bajo valor juega el papel de receptor neto (gráfica 5.10(b)).



**Figura 5.10:** Comparación del flujo del banco 4 para las operaciones de alto y bajo valor

El hecho de que la red del SPEI correspondiente a bajo valor se encuentre más densamente conectada a nivel global que la red formada por pagos altos no implica que esto también suceda a nivel local. Prueba de esto es el coeficiente de agrupamiento que mide si las contrapartes de un banco suelen relacionarse entre sí también.

La figura 5.11(a) muestra que las contrapartes del banco 19 se encuentran más densamente conectadas alrededor de él en la red de pagos de bajo valor que en la de alto valor. A diferencia del banco 8 (figura 5.11(b)) a quien ocurre el fenómeno opuesto.



(a) Coeficiente de agrupamiento del banco 19

(b) Coeficiente de agrupamiento del banco 8

**Figura 5.11:** Coeficiente de agrupamiento de los bancos 19 y 8 para las operaciones de alto y bajo valor

	<i>Total</i>	<i>Alto Valor</i>	<i>Bajo Valor</i>
<b>Medidas Globales</b>			
Medidas Topológicas			
Tamaño del núcleo	$34.15 \pm 5.97$	$30.82 \pm 4.44$	$32.96 \pm 5.85$
Índice de Completitud	$0.45 \pm 0.07$	$0.3 \pm 0.07$	$0.39 \pm 0.06$
Grado promedio	$15.17 \pm 2.04$	$10.08 \pm 1.04$	$13.26 \pm 2.29$
Reciprocidad	$0.84 \pm 0.03$	$0.78 \pm 0.03$	$0.82 \pm 0.05$
Promedio distancias cortas	$1.54 \pm 0.08$	$1.67 \pm 0.08$	$1.6 \pm 0.08$
Número de Arcos	$470.86 \pm 119.49$	$290.22 \pm 46.94$	$405.86 \pm 117.75$
Otras medidas			
Fuerza promedio*	$25.23 \pm 6.44$	$23.95 \pm 6.38$	$1.24 \pm 0.35$
Volumen total*	$438.69 \pm 103.97$	$415.75 \pm 101.2$	$22.41 \pm 8.18$

**Cuadro 5.2:** Resumen de las medidas globales para las redes del SPEI. Las cifras marcadas con \* se encuentran en miles.

## Capítulo 6

# Estudios de centralidad en las redes de exposiciones interbancarias y del SPEI

Las medidas de centralidad presentan una manera innovadora de asignar importancia a un banco dentro del sistema basándose en características de conectividad y de exposiciones más allá de lo evidente. Esta podría ser una primera aproximación para asignar importancia sistémica a cada banco bajo el criterio de interconectividad.

En el capítulo 2 se mencionó que la interconectividad es una de las categorías incluida en la metodología discutida por el Comité de Basilea de Supervisión Bancaria para evaluar a un banco sistémicamente importante a nivel global (G-SIB). Algunas regulaciones con respecto a esto involucran el aumento a los requerimientos mínimos de capital que los bancos deben reservar para absorber pérdidas.

En dicho capítulo se definieron primero 6 medidas de centralidad y posteriormente se mencionó la unión de estas por medio de una combinación lineal, que serviría como criterio para importancia por interconectividad. Este capítulo tiene por objetivo la aplicación de estas métricas a los datos disponibles para cada caso de estudio de las redes de exposiciones interbancarias y del SPEI.

Lo que resta del capítulo se estructura como sigue: En la sección 6.1 se identifican a los bancos más centrales en la red de exposiciones interbancarias y se estudian los resultados de las distintas medidas e índices de centralidad. En la sección 6.2 se detalla un estudio análogo aplicado a las redes asociadas

al SPEI. Finalmente en la sección 6.3 se compara la robustez entre las medidas de centralidad mencionadas en la tesis y se evalúa su desempeño de acuerdo a varios criterios de congruencia.

## 6.1. Centralidad en la red de exposiciones interbancarias

Cada métrica de centralidad implica un criterio distinto y resulta natural que no se obtenga la misma respuesta a cuál es el lugar de importancia que ocupa cada banco relativo a los demás usando una medida u otra.

Por ejemplo, la centralidad por cercanía ( $C_C$ ) determina que, entre el 2005 y el 2008, el banco 13 se colocó en posiciones alrededor del 5° o 6° lugar (figura<sup>1</sup> 6.1(a)); mientras que a partir del 2008 disminuyó su importancia hasta quedar en lugares superiores al 10°. Esto indica que el banco 13 se “alejó” de los demás en el sentido de que la longitud de los caminos que lo unen a los otros bancos aumentó.

Esta asignación de importancia contrasta con la del PageRank modificado (figura 6.1(b)) que colocó al banco 13 en posiciones cercanas al 2° lugar y posteriormente en posiciones cercanas al 4° lugar. Esto indica que casi siempre se relacionó con contrapartes relativamente centrales y con las que realizaba transacciones relativamente grandes.

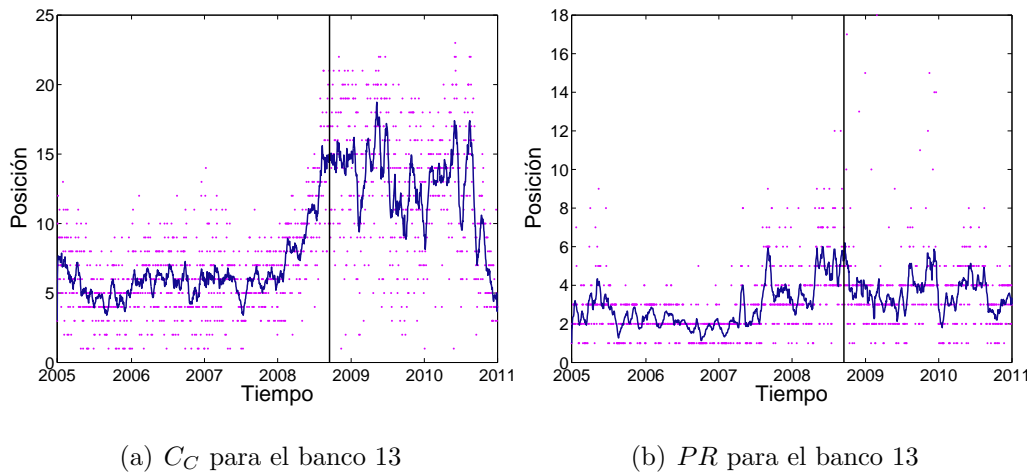
La figura 6.2 resume el grado de dependencia lineal existente entre los resultados producidos por las medidas de centralidad tomadas por parejas. Y muestra, de forma global, qué tan diferentes o similares son los resultados arrojados entre una métrica de centralidad y otra. Algunas observaciones al respecto:

- La centralidad por fuerza ( $C_S$ ), el PageRank modificado (PR) y la Centralidad por Eigenvectores Entrópica (EEC), tomados por parejas, tienen una correlación superior a 0.9 la mayoría de los días.
- La correlación entre la centralidad por grado ( $C_D$ ) y la centralidad por cercanía ( $C_C$ ) es superior a 0.8 en la mayoría de los días.
- Las correlaciones sobre las demás parejas de las medidas de centralidad se encuentran alrededor de 0.5.

---

<sup>1</sup>Cada punto en la gráfica indica la posición que tomó el banco en un punto específico del tiempo, también se presenta el resultado de las medias móviles a 15 días por medio de una línea continua. La línea vertical representa la quiebra del banco Lehman Brothers.





**Figura 6.1:** Algunas medidas de centralidad para el banco 13 dentro de la red de exposiciones interbancarias sin CLS

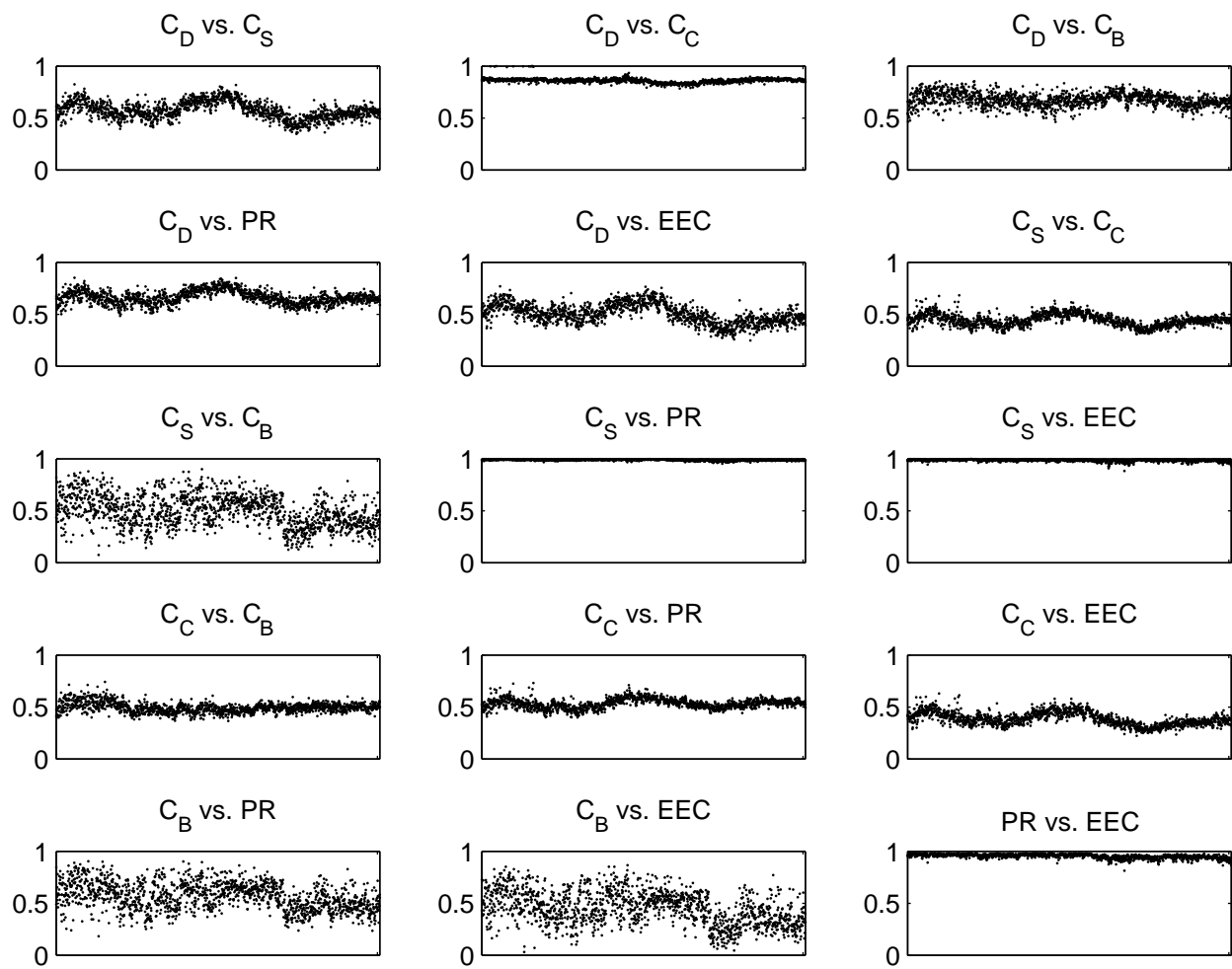
Una correlación muy alta indica que las medidas son redundantes y una correlación cercana a cero indicaría que las medidas asignan centralidad de forma muy distinta<sup>2</sup>. El hecho de que los resultados de alguna medida de centralidad estén positiva pero no perfectamente correlacionados permite concluir que, en general, dichas medidas asocian importancia a los bancos de manera un poco distinta, aunque no necesariamente se contradicen entre sí. Así un banco que pudiera ser el más central según el criterio de fuerza pudiera ser medianamente central según el criterio inter-vértices, etc.

Con todas estas medidas disponibles es difícil decidir cuál debería ser tomada en cuenta como la que asocie centralidad a los bancos de forma concluyente. Sin embargo, para que una medida pueda ser considerada coherente desde la perspectiva de una institución reguladora que pretende crear políticas, esta debería asociar importancia de forma estable a lo largo del tiempo. Esto implicaría que, por ejemplo, a un banco al cual se le asocie una importancia muy alta algún día no debería tener una bajísima importancia al día siguiente. A menos que ese banco haya cambiado radicalmente su comportamiento en el sistema.

Una desviación estándar relativamente baja, a lo largo del tiempo, puede ser un indicador de que la medida no varía sus resultados de forma más

---

<sup>2</sup>En Valente et al. (2008) los autores encuentran que la reciprocidad es una variable influyente en el hecho de que las distintas medidas de centralidad estén más correlacionadas. Una mayor reciprocidad implica una mayor similitud entre las medidas de centralidad.



**Figura 6.2:** Correlaciones a lo largo del tiempo entre las medidas de centralidad.

	<i>Moda</i>	<i>Media</i>	<i>Desv. Est.</i>
$C_B$	6	9.89	5.10
$EEC$	2	2.72	1.51
$PR$	2	3.16	1.80
$C_D$	6	8.12	4.37
$C_C$	6	8.78	4.94
$C_S$	2	2.96	1.68
$PC^{(3)}$	4	4.89	2.77
$PC^{(6)}$	3	3.44	2.07

**Cuadro 6.1:** Estadísticas sobre los lugares que asigna cada medida de centralidad para el banco 13.

abrupta de lo deseable. La tabla 6.1 muestra las distintas posiciones de importancia que cada métrica de centralidad asigna al banco 13 y que algunas son más variables que otras. Observando solamente esto pudiera decirse que las mejores medidas, por su baja volatilidad, son  $C_S$ ,  $PR$  y  $EEC$ .

Sin embargo, el tomar en cuenta a sólo una de ellas e ignorar a las demás implicaría perder la información que las otras métricas pudieran aportar. El análisis de componentes principales otorga la capacidad de rescatar la mayor cantidad de información de cada medida, y simplificarla para obtener un solo índice de centralidad, con todos los criterios de centralidad respaldándolo.

Esto último es relevante bajo la óptica de una institución reguladora a quien resultará más sencilla la tarea de crear políticas teniendo un solo índice que resuma los distintos criterios de centralidad y en sí presente una forma de asignar importancia a los bancos por medio de un criterio general de interconectividad.

### 6.1.1. Centralidad por componentes principales en la red de exposiciones interbancarias

El hecho de que todas las medidas de centralidad están positivamente correlacionadas entre sí garantiza que los coeficientes asociados a la componente (ver ecuación B.13) serán positivos como se explica en el apéndice B.

Una correlación muy cercana a 1 entre las medidas pudiera interpretarse como que dichas medidas dan información equivalente, por esta razón el índice obtenido por medio del análisis de componentes principales no sólo

involucrará a las seis medidas de centralidad ( $PC^{(6)}$ ) sino que también se considerará el índice que incluya solamente a tres ( $PC^{(3)}$ ):  $C_S$ ,  $C_C$  y  $C_B$ . Esto es equivalente a considerar la ecuación B.13 con  $\beta_{21} = \beta_{31} = \beta_{41} = 0$  y con los demás coeficientes estimados por medio de la metodología propuesta.

El porcentaje de la varianza explicada<sup>3</sup> por la componente principal viene dado por la proporción correspondiente a su eigenvalor asociado con respecto a la suma total de los eigenvalores. Mientras mayor sea este, mayor cantidad de variabilidad de los datos originales está siendo rescatada.

El porcentaje de varianza explicada por el  $PC^{(3)}$  fue de  $65\% \pm 4\%$  y a largo del periodo de estudio la mínima proporción de varianza explicada fue de  $53\%$  y la máxima fue del  $82\%$ . El índice  $PC^{(6)}$  explica una mayor cantidad de la varianza:  $71\% \pm 4\%$ , el día en que explicó un mayor porcentaje fue del  $83\%$  y el valor mínimo fue de  $61\%$ . Estos resultados corresponden a la red de exposiciones interbancarias sin las operaciones de CLS, aunque para los demás casos de estudio se obtuvieron porcentajes de magnitud similar.

Se concluye que la mayor cantidad de los días el índice por componentes principales explica un porcentaje considerablemente alto de la varianza y por ende conserva una buena parte de la información proporcionada por las medidas de centralidad definidas previamente.

Para resaltar el hecho de que este índice asigna importancia de manera consistente con las demás medidas, se calculó el promedio de las correlaciones con respecto a ellas, dichos resultados se resumen en el cuadro 6.2. Entre todos los días, las correlaciones más bajas que se registraron fueron de 0.49 (entre  $PC^{(3)}$  y  $EEC$ ) y de 0.39 (entre  $PC^{(6)}$  y  $C_B$ ).

También se destaca el hecho de que la variabilidad del índice a lo largo del tiempo resultó ser relativamente pequeña (cuadro 6.1). Estas características la hacen una medida competitiva con respecto a la opción de elegir sólo a una de las demás, además de que considera todos sus criterios a la vez.

Es importante decir que si el criterio para asignar importancia fuera el tamaño de los activos de los bancos, en muchas ocasiones se asignaría importancia de manera opuesta<sup>4</sup> o categóricamente diferente a los criterios de centralidad. Como resultado de esto se estaría ignorando la complejidad de

---

<sup>3</sup>Nótese que la varianza de la que se habla aquí es distinta a la mencionada en párrafos anteriores. La varianza que se desea mínima es la varianza de la centralidad asignada a algún banco por una determinada medida a lo largo del tiempo. Mientras que la varianza mencionada en esta sección corresponde a la varianza de los resultados que proporciona la medida de centralidad en cuestión, a todos los bancos, en un día determinado.

<sup>4</sup>Algunas correlaciones calculadas entre distintas medidas de centralidad y la “centralidad por tamaños de activos” de los bancos resultan negativas o cercanas a cero.

	$C_D$	$C_S$	$C_C$	$C_B$	$PR$	$EEC$
$PC^{(3)}$	0.87	0.79	0.8	0.83	0.86	0.74
$PC^{(6)}$	0.83	0.92	0.72	0.71	0.95	0.88

**Cuadro 6.2:** Correlaciones promedio entre el índice por componentes principales y las medidas de centralidad para la red de exposiciones interbancarias

las conexiones en el sistema y asignando importancia a los bancos de forma incompleta o incluso errónea. Esto último en el sentido en que no se están considerando los criterios de interconectividad que permiten hacer una ponderación adecuada de las instituciones vistas como parte de un sistema.

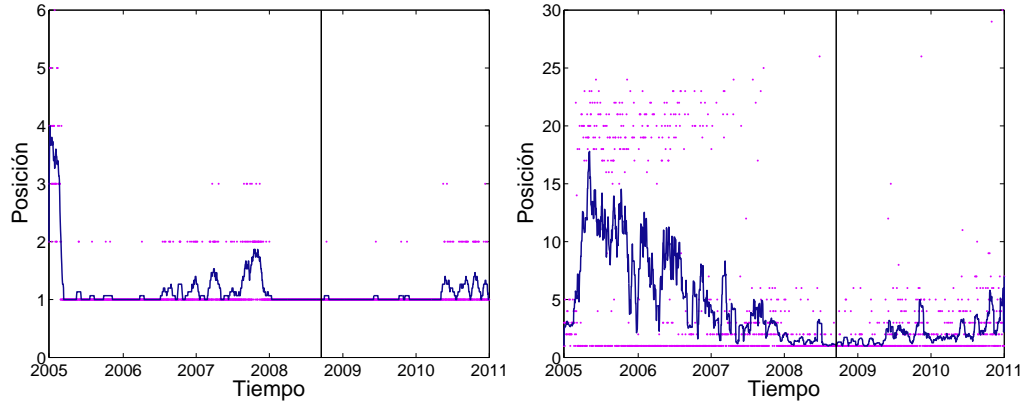
Otra cosa que debe observarse es que los bancos pueden cambiar su comportamiento dentro del sistema de tal forma que, a lo largo del periodo de estudio, pueden cambiar de posición unos con otros muchas veces. De esto se concluye que la importancia por interconectividad es una posición dinámica la cual, si es que se quiere tener una medición completa, debe monitorearse con frecuencia.

## 6.2. Centralidad en la red del SPEI

En la red del SPEI completa se observa que muchos bancos toman alguna posición en el sistema de forma categórica, según algunas medidas de centralidad, y que tienden a cambiar poco de lugar. En contraste con la red de exposiciones en donde las posiciones de los bancos fluctúan con frecuencia para todas las medidas.

Por ejemplo, a inicios del 2005 el banco 13 ocupó la posición número 1 predominantemente según el criterio de centralidad por grado ( $C_D$ ), habiendo pocos días en los que bajó su importancia (figura 6.3(a)). Esto indica que este es el banco que tiene más contrapartes en la red del SPEI total.

Conforme se incorporaron más bancos a la red y se generalizó el uso de este sistema de pagos el banco 13 se fue colocando en cada vez más caminos del flujo de dinero. Esto lo refleja la centralidad inter-vértices ( $C_B$ ) que, en principio, colocaba al banco 13 en posiciones inferiores y con el tiempo ocupó los primeros tres lugares, en particular en fechas cercanas a la quiebra de Lehman Brothers. Si el banco 13 hubiera fallado al cumplir con sus obligaciones existía el riesgo de que interrumpiera los flujos de dinero que pasan a través de él.



(a)  $C_D$  para el banco 13

(b)  $C_B$  para el banco 13

**Figura 6.3:** Medidas de centralidad para el banco 13 en la red del SPEI

Las medidas de centralidad calculadas sobre los casos de estudio en las redes del SPEI exhiben correlaciones similares a las observadas en la red de exposiciones interbancarias (figura 6.2). Esto permite usar el análisis de componentes principales sin que los coeficientes asociados a la componente principal sean negativos.

### 6.2.1. Centralidad por componentes principales en la red del SPEI

Para los casos de estudio de la red del SPEI también se obtuvieron resultados satisfactorios con respecto a la cantidad de varianza explicada. En la red del SPEI completa se obtuvieron las menores proporciones de varianza explicada promedio:  $73\% \pm 6\%$  por el  $PC^{(3)}$  y  $77\% \pm 4\%$  por  $PC^{(6)}$ . El día en que  $PC^{(3)}$  explicó una menor proporción de la varianza fue de  $50\%$  mientras que la máxima cantidad durante el periodo de estudio fue de  $86\%$ . Por su parte  $PC^{(6)}$  obtuvo  $62\%$  y  $88\%$  como sus proporciones mínima y máxima de varianza explicada, respectivamente.

Por otra parte los promedios de las correlaciones entre los índices por componentes principales y las medidas de centralidad son suficientemente altos como para afirmar que la centralidad asignada es consistente entre una y otra (cuadro 6.3).

En general, un banco que pudiera ser considerado central en la red del SPEI de pagos de bajo valor no necesariamente será central en la red de

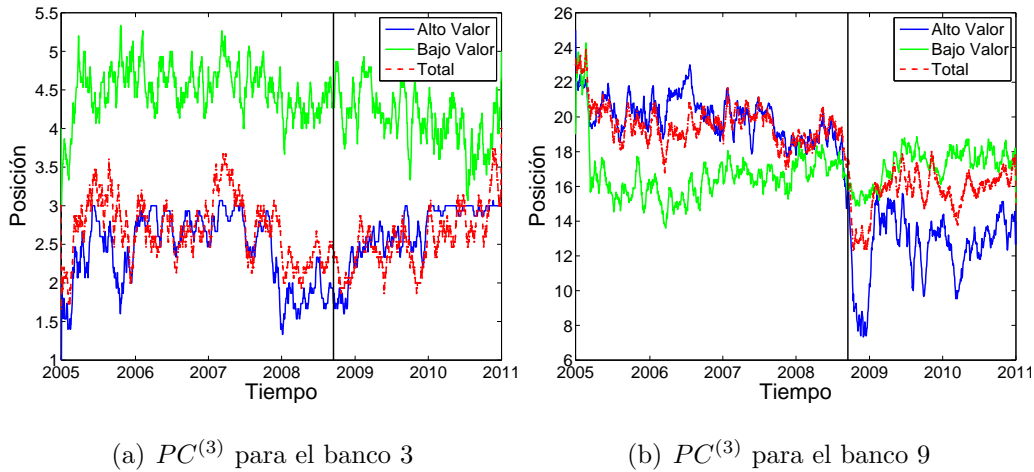
Total	$C_D$	$C_S$	$C_C$	$C_B$	$PR$	$EEC$
$PC^{(3)}$	0.87	0.85	0.84	0.86	0.86	0.85
$PC^{(6)}$	0.85	0.93	0.8	0.77	0.94	0.93

**Cuadro 6.3:** Correlaciones promedio entre el índice por componentes principales y las medidas de centralidad para la red del SPEI.

pagos de alto valor y viceversa. Como ejemplo se muestra al banco 3 en la figura 6.4(a).

Si bien, hay algunos bancos que por lo general ocupan las posiciones más altas de centralidad, es anormal el hecho de que un banco poco importante tome dichas posiciones en relativamente poco de tiempo. En la figura 6.4(b) se muestra el caso del banco 9 quien, tras la caída de Lehmann Brothers, pasó de ser un banco muy poco importante a uno de los 10 primeros, en especial en la red correspondiente a pagos de de alto valor.

Este tipo de comportamiento puede ser un indicador de riesgo para el banco en cuestión o incluso para más bancos del sistema bancario durante un periodo de inestabilidad financiera en distintos lugares del mundo. Parece probable que los problemas financieros pudieran haber alterado el comportamiento de dicho banco en la red.



**Figura 6.4:** Comparación del índice  $PC^{(3)}$  en los casos de estudio para la red del SPEI

### 6.3. Robustez en una topología libre de escala

En la sección 2.6 se dijo que si una medida de centralidad se considera robusta entonces debería asociar centralidad a los vértices de manera similar en una red y en una versión perturbada de esta. La perturbación no sólo puede interpretarse como errores en los datos sino que también se puede interpretar como la evolución diaria de una red dinámica. Aplicado a las redes del SPEI y de la red de exposiciones interbancarias puede decirse que una medida de centralidad es robusta si asocia la centralidad a los vértices de manera similar entre un día y otro.

La metodología aquí empleada para probar la robustez de las medidas de centralidad es similar a la expuesta en Frantz and Carley (2005). Se generaron redes de 100 vértices por medio del modelo de Bollobás con parámetros<sup>5</sup>  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.6$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $\delta^- = 0.01$ ,  $\delta^+ = 4.45$ . Los pesos de los arcos son números con distribución ley de potencia y parámetros<sup>6</sup>  $\eta = 1.92$   $x_{min} = 297, 330$ . Los tipos de errores con los que se perturbó a la red fue por medio de la creación y de la eliminación de un porcentaje de los arcos existentes. Estos porcentajes determinan un nivel de error y fueron 1 %, 5 %, 10 % y 20 %. Por otra parte, los arcos a eliminar se seleccionaban de forma aleatoria y uniformemente, asimismo los arcos a crear se seleccionaban también de manera uniforme de entre los posibles arcos inexistentes<sup>7</sup>.

Posteriormente se calcularon las medidas de centralidad sobre ambas redes y para comparar los resultados se usaron los criterios de congruencia definidos en Frantz and Carley (2005). Algunos de estos criterios fueron extendidos o generalizados para hacer una análisis un poco más detallado. Las medidas de congruencia calculadas se explican a continuación:

- *k* vértices superiores. Esta medida toma el valor 1 si el vértice de mayor centralidad en la red original se encuentra entre los primeros *k* vértices de mayor centralidad en la red perturbada, la medida toma el valor de

---

<sup>5</sup>Estos parámetros son los mismos que se proponen en Cont and Moussa (2009) y con ellos se obtiene una red libre de escala, para el grado interior con parámetro  $\eta_{in} = 2.1$  y para el grado exterior  $\eta_{out} = 3.1$ , que son los mismos parámetros observados en la red interbancaria de Brasil.

<sup>6</sup>Estos fueron los parámetros estimados en la red de exposiciones interbancarias en el caso base.

<sup>7</sup>Estos se identifican por medio de los ceros, fuera de la diagonal, en la matriz de adyacencias exteriores.



0 si no es así. En el estudio aquí realizado  $k$  se hizo variar usando los valores 1, 3 y 10.

- *k* *vértices inferiores*. Esta medida toma el valor 1 si el vértice de menor centralidad en la red original se encuentra entre los últimos  $k$  vértices de la red perturbada, en este estudio  $k$  tomó los valores de 1, 3 y 10.
- *Correlación*. Es el coeficiente de correlación calculado entre los valores que tomó la medida de centralidad en la red original y en la red perturbada. Esta medida sirve para comparar el desempeño general de la métrica en cuestión al asignar centralidad a los vértices de la red.
- *Traslapo de la categoría k*. Esta medida toma valores entre 0 y 1. Refleja en qué medida los 10 vértices de la categoría  $k$  de la red original coinciden con los 10 vértices de la categoría  $k$  en la red perturbada. La categoría 1 corresponde a los 10 vértices más centrales de la red en cuestión, la categoría 2 corresponde a los 10 vértices de centralidad inmediata inferior a los de la categoría 1 y así sucesivamente. De esta forma, puesto que se generaron redes de 100 vértices, se obtendrán 10 categorías. El índice se calcula por medio de la fórmula

$$T_k = \frac{|C_o^k \cap C_p^k|}{|C_o^k \cup C_p^k|} \quad (6.1)$$

donde  $C_o^k$  es el conjunto formado por los 10 vértices en la categoría  $k$  en la red original y  $C_p^k$  es el conjunto formado por los 10 vértices de la categoría  $k$  en la red perturbada.

Si los vértices representan a los bancos entonces las categorías sirven para clasificarlos según sus medidas de centralidad. El propósito de este criterio de congruencia es identificar qué tanto tienden a cambiar de categoría los vértices cuando la red sufre cambios.

Cada uno de estos ensayos, que involucra dos redes por cada nivel y por cada tipo de error se replicó 1,000 veces en iguales condiciones. Cada ensayo se realizó de forma independiente de los otros.

### 6.3.1. $k$ vértices superiores

Todas las medidas de centralidad resultaron robustas según el criterio de vértices superiores, incluso cuando el nivel de error fue máximo. En la tabla

6.4 se muestran los porcentajes de veces en que la medida tomó el valor de 1 para el máximo nivel de error (20%). Los porcentajes tan altos permiten concluir que las medidas no solían equivocarse al seleccionar al vértice más central de la red original en la versión perturbada de la red o al menos ubicarlo entre los más centrales de la versión perturbada.

$k$ Superiores	Creación			Eliminación		
	$k = 1$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 1$	$k = 3$	$k = 10$
$C_D$	99 %	100 %	100 %	96 %	100 %	100 %
$C_S$	94 %	100 %	100 %	92 %	99 %	100 %
$C_C$	98 %	100 %	100 %	94 %	100 %	100 %
$C_B$	97 %	100 %	100 %	92 %	100 %	100 %
$PR$	97 %	100 %	100 %	96 %	100 %	100 %
$EEC$	90 %	95 %	98 %	90 %	92 %	95 %
$PC^{(3)}$	97 %	100 %	100 %	93 %	100 %	100 %
$PC^{(6)}$	96 %	100 %	100 %	93 %	100 %	100 %

**Cuadro 6.4:** Porcentaje de acierto asociado al criterio de los  $k$  Vértices Superiores con nivel de error del 20 %

Las medidas que resultaron ligeramente menos robustas que las demás fueron  $C_S$  y  $EEC$ , esta última incluso llegó a colocar al vértice más central de la red original abajo de los 10 primeros en la red perturbada. Nótese que estas dos medidas dependen de forma importante en los pesos de los arcos.

Por otra parte, las medidas basadas en componentes principales resultaron medianamente robustas con respecto a las demás.

Otra observación es que todas las medidas resultaron ligeramente más sensibles al error por remoción de arcos que por añadidura, según este criterio.

### 6.3.2. $k$ vértices inferiores

La medida de centralidad  $C_B$  resulta extremadamente efectiva para identificar al vértice menos central y en general a los menos centrales. Esta medida no se ve alterada de forma importante hasta que el nivel de error alcanza su nivel máximo y resulta un poco más sensible a la perturbación por creación de arcos que por eliminación.

Las demás medidas de centralidad alteran el resultado sobre el vértice menos central de forma importante incluso con el nivel de error más bajo. Para mayores niveles equivocan el resultado la mayoría de las veces.

Se concluye entonces que la medida  $C_B$  es robusta según este criterio y que las demás no lo son.

$k$ Inferiores	Creación			Eliminación		
	$k = 1$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 1$	$k = 3$	$k = 10$
$C_D$	75 %	99 %	99 %	4 %	100 %	100 %
$C_S$	75 %	99 %	99 %	4 %	100 %	100 %
$C_C$	75 %	98 %	99 %	4 %	94 %	98 %
$C_B$	99 %	99 %	99 %	100 %	100 %	100 %
$PR$	74 %	98 %	99 %	5 %	99 %	100 %
$EEC$	74 %	99 %	99 %	4 %	99 %	100 %
$PC^{(3)}$	75 %	99 %	100 %	4 %	99 %	100 %
$PC^{(6)}$	75 %	99 %	100 %	3 %	98 %	100 %

**Cuadro 6.5:** Porcentaje de acierto asociado al criterio de los  $k$  Vértices Inferiores con nivel de error del 1 %

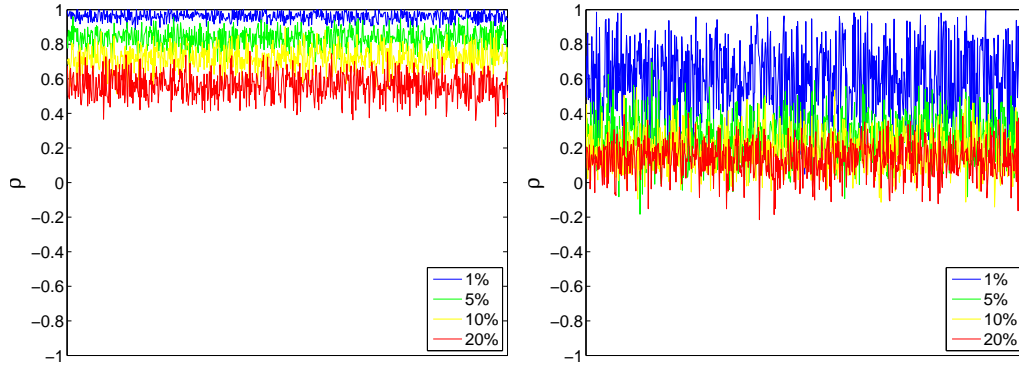
Adicionalmente se observa que la perturbación por eliminación tiene un efecto muchísimo más dramático que la perturbación por creación de arcos.

### 6.3.3. Correlación ( $\rho$ )

Con respecto al error por creación de arcos las medidas  $C_D$ ,  $C_C$  y  $C_B$  sufrían alteraciones ligeras en sus resultados con el nivel de error más bajo (franja superior de color claro en la figura 6.5 (a)), conforme el nivel de error aumenta, también disminuyen las correlaciones en proporción al nivel de error. En contraste con las demás medidas que, desde el nivel de error más bajo muestran alteraciones más severas en sus resultados (figura 6.5 (b)), entre estas la más robusta resulta  $EEC$  cuyas alteraciones son menos dramáticas que para  $PR$ ,  $C_S$ ,  $PC^{(3)}$  y  $PC^{(6)}$ .

Para el error por eliminación de arcos la medida que resultó robusta de forma categórica fue  $C_B$  cuyas correlaciones no descendían de 0.9 incluso para el máximo nivel de error. Seguida de  $C_D$  que tuvo un desempeño similar cuando fue expuesta al error por creación (similar a la figura 6.5 (a)). Luego  $C_C$  cuyas alteraciones fueron más severas que para  $C_D$ . Finalmente se colocan las demás medidas que tuvieron un desempeño muy similar: Desde el nivel de error más bajo sufren alteraciones importantes en sus resultados, obteniéndose correlaciones hasta de 0.4 (similar a la figura 6.5 (b)).

Por otra parte,  $C_B$  y  $C_D$  resultaron más afectadas por la perturbación por



(a)  $C_D$  (Creación de Arcos)

(b)  $PC^{(6)}$  (Eliminación de Arcos)

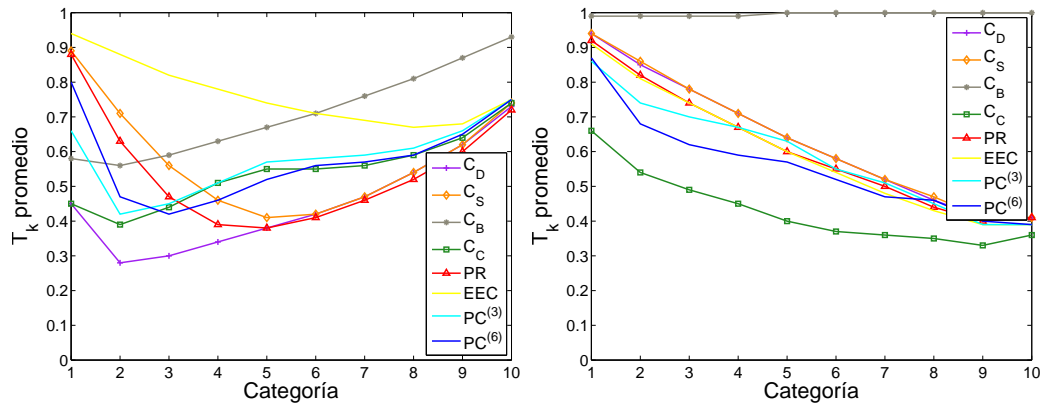
**Figura 6.5:** Correlaciones para las medidas  $C_D$  y  $PC^{(6)}$  graficados contra la iteración.

creación que por eliminación de arcos. Mientras que en las demás medidas ocurrió el efecto contrario.

### 6.3.4. Traslapo de la categoría $k$

La perturbación por creación de arcos afectó de manera no monótona a las medidas de centralidad (figura 6.6 (a)). Las medidas se vieron más alteradas con respecto a las categorías centrales que las de los extremos. Cada una sufre distintos grados de alteración con respecto a la primer categoría y el grado de afectación converge en la última categoría para todas las medidas excepto  $C_B$ . En particular  $PC^{(6)}$  resultó más robusta que  $PC^{(3)}$  en las primeras dos categorías. Considerando todas las categorías en general se tiene que las medidas más robustas según este criterio y esta perturbación fueron EEC y  $C_B$ .

La perturbación por eliminación de arcos tiene un efecto casi-monótono decreciente para la mayoría de las medidas (figura 6.6 (b)). En general presentan un grado de alteración de órdenes similares excepto para  $C_C$ . La métrica  $C_B$  tiene un perfil de alteración completamente distinto a las demás medidas, viéndose mínimamente alterada solamente en sus primeras categorías.



(a) Creación de Arcos

(b) Eliminación de Arcos

**Figura 6.6:** Traslado ( $T_k$ ) promedio por categorías para el nivel de error de 5 %

# Capítulo 7

## Resultados, conclusiones y propuestas

### 7.1. Índices LPI y BPI

Los índices de preferencia del prestamista (LPI) y del prestatario (BPI) dan una medida de las relaciones entre los bancos tomándolos por parejas. Otra ventaja que ofrece es visualizar de manera desagregada y en mayor detalle lo que el HHI puede señalar de manera más general. Este tipo de monitoreo entre los bancos es importante para entender su comportamiento estratégico y para identificar situaciones riesgosas.

Sin embargo estos índices presentan la deficiencia de que no consideran la frecuencia de las interacciones entre los bancos. Se sugiere la modificación a los índices de tal forma que se pondere su resultado con el número de días que los bancos interactuaron entre sí:

$$LPI_{i,j}(t) = \left[ \left( \sum_{s=1}^k F_{i,j}(t-s) \right) / \left( \sum_{s=1}^k F_{i,\mathcal{N}(i)}(t-s) \right) \right] \cdot \frac{d}{k} \quad (7.1)$$

en donde  $F_{i,j}(t)$  es el total de fondos que  $i$  ha prestado a  $j$  en el tiempo  $t$  y  $F_{i,\mathcal{N}(i)}(t)$  es la cantidad de fondos que  $i$  prestó al sistema en el tiempo  $t$ ,  $k$  es la cantidad de días considerados para calcular la medida y  $d$  es el número de días, dentro de los considerados, en que el banco  $i$  realizó transacciones con  $j$ .

Un ejemplo donde se puede apreciar el cambio en el índice es el siguiente: Supóngase que en los  $k$  días elegidos para calcular el índice el banco  $A$  sólo prestó dinero a los bancos  $B$  y  $C$ ; que en cada uno de los primeros  $k-1$  días

$A$  presta \$1 a  $B$  y \$0 a  $C$  y en el día  $k$  el banco  $A$  presta  $\$k - 1$  a  $C$  y \$0 a  $B$ .

Calculando el índice de preferencia de prestamista del banco  $A$  con sus contrapartes  $B$  y  $C$ , sin modificación alguna se obtiene:

$$LPI_{A,B}(t) = \frac{1}{2} = LPI_{A,C}(t) \quad (7.2)$$

Mientras que, con la modificación sugerida se obtienen los índices:

$$LPI_{A,B}(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{k-1}{k} \quad LPI_{A,C}(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} \quad (7.3)$$

En la medida en que  $k$  aumenta, se tiene que  $A$  interactuó con  $B$  una cantidad considerable de días y con  $C$  sólo uno. Esto debería señalar que  $A$  y  $B$  tienen una relación más fuerte de la que tienen  $A$  y  $C$ , sin embargo el índice LPI sin modificar indica que ambas relaciones son igual de intensas. Al ponderarlo por medio del tiempo el índice considera tanto la frecuencia como la intensidad de las transacciones y se obtiene un resultado más razonable en la opinión del autor de esta tesis.

## 7.2. Modelos de formación de redes

En el capítulo 3 se describieron los modelos de conexión preferencial, los cuales permiten generar redes libres de escala. Sin embargo en los capítulos 4 y 5 se mostró que dichos modelos no explican la evolución de la red de exposiciones interbancarias ni la evolución de la red del SPEI. En dichos modelos la cantidad de arcos y el número de vértices crecen estrictamente, a diferencia de las redes antes mencionadas en las que arcos aparecen y desaparecen diariamente mientras que la llegada de nuevos bancos es rara e incluso puede ocurrir la salida de alguno.

Aunque algunos autores consideran que un modelo como el de Bollobás et al. (2003) puede generar una red topológicamente similar a las redes bancarias<sup>1</sup> también surge el problema sobre cómo deben generarse los pesos a los arcos que representen las exposiciones o flujos de dinero.

---

<sup>1</sup>Algo que puede hacerse es explorar el espacio de parámetros del modelo de Bollobás et al. (2003) y averiguar si existen algunos para los cuales se obtengan redes parecidas a las de exposiciones interbancarias o la red del SPEI. Es decir, con características similares a dichas redes, como el grado promedio, coeficiente de agrupamiento promedio, reciprocidad, etc.

Esto último tiene la complicación de que al asociar pesos a los arcos debe hacerse de forma correspondiente al tamaño de los activos de cada banco: así un banco pequeño no puede emitir montos muy grandes y un banco grande generalmente emite o recibe montos grandes. En principio, la red generada por este modelo tiene vértices anónimos y se debe decidir cuáles vértices representan a los bancos grandes, los medianos, etc.

Para lograr esto es necesario averiguar la relación existente entre las características topológicas individuales de cada banco, el tipo de banco que es y los montos que recibe o emite<sup>2</sup>, aunque estas pueden variar entre un sistema bancario u otro.

Por otra parte, aunque se pudiera observar que las exposiciones sigan alguna distribución en particular<sup>3</sup>, los números aleatorios generados con esta distribución deben asociarse adecuadamente, según la magnitud de los montos, al vértice correspondiente.

En conclusión, los modelos de generación de redes aún necesitan de modificaciones o generalizaciones que permitan imitar la dinámica propia de los sistemas bancarios y de una forma sistemática para la asignación adecuada de las exposiciones o flujos de acuerdo a las características de conectividad de cada vértice.

No obstante, resolviendo todas estas dificultades dichos modelos de formación aún están limitados con respecto a poder dar luz sobre el comportamiento estratégico y los incentivos de los participantes en los sistemas financieros.

### **7.3. Características globales de las redes de exposiciones interbancarias y del SPEI**

El mismo sistema bancario genera redes con características distintas si se consideran distintas exposiciones o si se consideran pagos de montos menores o mayores a cierto umbral. La primera afirmación se verificó en el capítulo 4 y la segunda en el capítulo 5.

Pero la red asociada al SPEI y la red asociada a las exposiciones interbancarias también presentaron diferencias estructurales notables. Por ejemplo, a

---

<sup>2</sup>Los autores en Cont et al. (2010) encontraron evidencia de que los bancos del mercado interbancario brasileño con grados (grandes) pequeños tienen también exposiciones de montos (grandes) pequeños.

<sup>3</sup>Por ejemplo, en Cont et al. (2010) los autores observan que las exposiciones en el mercado interbancario brasileño siguen una ley de potencia.



lo largo del tiempo, la red del SPEI se volvió más densamente conectada que la red de exposiciones interbancarias, provocando que los bancos en la red del SPEI se encuentren más cercanos entre sí que en la red del interbancario.

Estas diferencias se deben principalmente a que la red de exposiciones interbancarias y la del SPEI involucran distintos tipos de transacciones. La formación de conexiones en la primera están determinadas por el comportamiento estratégico de los bancos mientras que la segunda es influida de forma importante por la demanda de los clientes de cada banco. Aunque el estudio desarrollado en capítulos posteriores sí reveló algunos aspectos sobre el comportamiento de los bancos.

### 7.3.1. Perfiles de riesgo

A nivel general se observó que la red del SPEI en sus tres casos de estudio exhibe una menor distancia promedio entre los bancos que en los casos de estudio correspondientes a la red de exposiciones interbancarias. Aún más, el núcleo es más pequeño en esta última red.

Si se adoptan las conclusiones de Allen and Gale (2000) puede decirse que la red del SPEI es más segura ya que los bancos, por estar más conectados, podrán transferir los riesgos a más contrapartes y el sistema será más resistente a los choques. Sin embargo, según Nier et al. (2006) existe algún valor para la conectividad<sup>4</sup> de la red en que el sistema es más robusto y si se rebasa este valor, la red se vuelve frágil.

Estos estudios deben complementarse con simulaciones del efecto de contagio, como estudiar el resultado de la quiebra idiosincrática de algún banco en particular y la peor cadena de contagio posible, aquella que genera el peor impacto en el sistema. En (Banxico, 2010) se presentan los resultados de este tipo de investigaciones a la red de exposiciones interbancarias: los bancos que están expuestos a contagio representan, en la gran mayoría de los días, una proporción relativamente pequeña del total de los activos de la banca. Provocando pérdidas cercanas al cinco por ciento de los activos totales de la banca en un número muy reducido de días. Bajo este análisis la red de exposiciones interbancarias parece ser robusta incluso ante el peor escenario.

Desde una perspectiva más general, aún es preciso averiguar la robustez ante choques iniciales distintos y ante efectos de contagio en redes con topo-

---

<sup>4</sup>Estos autores estudian el contagio en un sistema bancario representado por una gráfica aleatoria y estudian el efecto de contagio al variar la probabilidad de conexión entre los vértices, lo que genera una red más o menos densamente conectada

logías más generales, esto permitirá observar cómo los distintos patrones de conectividad generan una red más resistente o más frágil.

Por otra parte, la red del SPEI mostró evidencia para ser clasificada como una red libre de escala, especialmente considerando los pagos de alto valor. Sin embargo, la topología de una red bancaria no basta para averiguar su perfil de riesgo o de fragilidad. Como se concluye en Soramäki et al. (2006): *La vulnerabilidad de una red en particular depende tanto de su estructura como de sus mecanismos de contagio y entender la dinámica de los flujos de liquidez es esencial para evaluar la robustez de la red.* En particular no sería pertinente extrapolar el resultado de Albert et al. (2000) en el que concluyen que si la red es libre de escala entonces es robusta a la remoción aleatoria de vértices y vulnerable a la remoción de los vértices más conectados.

Finalmente se reitera que las métricas globales propias de las redes ofrecen una nueva manera de identificar cambios en el sistema a causa de perturbaciones o crisis financieras<sup>5</sup>. En el caso de México el efecto de la caída de Lehman apenas fue perceptible en algunas métricas de la red de exposiciones interbancarias y en la red del SPEI no se observaron perturbaciones notables. Se concluye entonces que este no fue un evento sistémicamente importante para el sistema bancario mexicano.

Aunque también surge una pregunta importante: ¿cuál red se debería estudiar para obtener conclusiones con respecto a la estabilidad del sistema bancario mexicano?

Es posible realizar estudios como los que se desarrollaron en capítulos anteriores pero sobre otras redes, las redes determinadas por ejemplo por otros sistemas de pagos (como el SIAC o el DALÍ) u otras exposiciones de riesgo.

## 7.4. Medidas de centralidad

Las medidas de centralidad estudiadas en la tesis son útiles para clasificar a los bancos en términos del posible riesgo que estos representen para la red en cuestión. Así, por ejemplo, un banco con alta centralidad por grado tiene la posibilidad de impactar a muchas contrapartes cercanas si este falla al cumplir con sus obligaciones.

---

<sup>5</sup>En Soramäki et al. (2006) los autores observan que los eventos del 11 de Septiembre de 2001 afectaron considerablemente a las características de la red del Fedwire, por ejemplo decreció su índice de completitud.

En el SPEI la interrupción de los flujos de dinero a través de la red podría impactar de forma importante y negativa al sistema. Un banco que se vea imposibilitado para cumplir con sus obligaciones puede provocar problemas de liquidez en sus contrapartes más cercanas que dependan de sus pagos, haciendo posible que estas últimas tampoco paguen sus deudas y así sucesivamente. Es por eso que, en el estudio del SPEI es importante reconocer a los bancos con una alta centralidad inter-vértices.

No obstante, algunas medidas resultaron reiterativas con respecto a otras (ver la figura 6.2). Por ejemplo las medidas  $PR$ ,  $EEC$  y  $C_S$  tuvieron altas correlaciones, lo que implica que  $PR$  y  $EEC$  se vieron desviadas en el sentido de las exposiciones o flujos de dinero. Bastaría entonces quedarse con una de estas tres medidas, la cual se sugiere que sea  $C_S$  puesto que es menos complicada de calcular con respecto a las otras. El problema es que se ignorarían las únicas medidas que asignan centralidad considerando la centralidad de las contrapartes del banco en cuestión.

Las medidas de centralidad, por lo demás, fueron usadas para dar una posición de importancia entre cada banco del sistema con respecto a los demás y no se interpretaron los resultados de cada medida cuantitativamente. Aún faltaría investigar las posibilidades de cada medida para poder medir “qué tanta centralidad” tiene cada banco y si esto pudiera servir también como una métrica para la cantidad de riesgo que cada banco aporta al sistema con su participación.

#### 7.4.1. Los bancos más centrales

Las medidas de centralidad pueden ayudar a los gobiernos y bancos centrales a decidir si un banco cercano a la quiebra debería ser rescatado o no. Los efectos negativos a causa de la crisis reciente pudieron haberse visto atenuados si los gobiernos y bancos centrales toman de decisiones adecuadas con respecto a esto.

Por ejemplo, en Allen et al. (2009) se explica que: *La justificación usual para la intervención de los bancos centrales y los gobiernos para prevenir la quiebra de las instituciones financieras sistémicas es que esto prevendría el contagio. Este fue el argumento usado por la Reserva Federal para intervenir en favor del banco Bear Sterns e intentar que no quebrara en marzo de 2008. Además se decidió que el banco Lehman Brothers no debía ser rescatado y su quiebra, unos meses después, en septiembre de 2008 mostró lo dañino que puede ser el contagio y el gobierno se vio forzado a ofrecer garantías a una*

*parte del sector financiero. Sin embargo, posterior al colapso de Lehman, se había perdido la confianza en los bancos y en otras instituciones financieras, aquí fue cuando la crisis financiera se propagó a la economía y tuvo un efecto tan nocivo.*

Por otra parte, si se decidiera incluir nuevas regulaciones en las que se exige a los bancos más sistémicamente importantes un porcentaje de capital extra, con el propósito de incentivar a que disminuyan su centralidad, se les debe indicar cómo lograr esto último. Este es un asunto que requiere ser estudiado con cuidado para prevenir efectos negativos como la ocurrencia del riesgo moral<sup>6</sup>.

Finalmente cabe reiterar que surge otra vez la cuestión sobre qué red debería ser usada para estudiar la centralidad de los bancos y concluir cuál es el grado de importancia de cada uno para el sistema. En el capítulo 6 se ejemplificó el caso del Banco 13 quien, según la red del SPEI, es el más importante y, según la red de exposiciones interbancarias, no lo es tanto.

#### **7.4.2. Otras medidas de centralidad**

Para los estudios de centralidad del capítulo 6 no se consideraron otras medidas de centralidad que pudieran ser importantes para ser aplicadas al estudio de los sistemas bancarios. Dichas medidas son la centralidad por: grado interior y exterior, fuerza interior y exterior, inter-vértices en términos de trayectorias interiores y exteriores y por cercanía interior y exterior y centralidad por eigenvectores (con el uso de cualquiera de las matrices  $A$ ,  $A^+$ ,  $A^-$ ,  $W$ ,  $W^+$  y  $W^-$ ).

Aún más, si no se imponen condiciones más rigurosas que deban cumplir las medidas de centralidad, es posible proponer algunas medidas nuevas sin mucha dificultad y que tuvieran un sentido importante para este contexto.

Una propuesta sencilla, por ejemplo, pudiera ser la centralidad por HHI interior. El banco que tuviera los préstamos o flujos de dinero dirigidos hacia él concentrados en pocas contrapartes pudiera verse involucrado en problemas de liquidez si sus contrapartes incumplieran o simplemente decidieran dejar de fondear a dicho banco. Se puede entonces considerar que tal banco está incurriendo en prácticas riesgosas para sí mismo aunque para ser sistémicamente importante deberían considerarse más criterios además de

---

<sup>6</sup>Esta situación podría darse si, por ejemplo, un banco que sabe que es considerado sistémicamente importante puede incurrir en comportamientos que lo pusieran en riesgo (como sobre-exponerse) a sabiendas de que sería rescatado si llega a quebrar.

este.

Otra manera de crear medidas de centralidad es combinar las medidas previamente definidas. Un ejemplo de esto pudiera ser el uso del PageRank modificado pero cuyos ponderadores no fueran las proporciones de los pesos sino que los inversos de las distancias al vértice correspondiente (los términos de la suma en la ecuación 2.30). De esta manera se están considerando el criterio de cercanía a la vez que la centralidad de los vecinos de dicho vértice.

Sin embargo, la manera más sencilla de combinar a todas las métricas de centralidad que se desee sería por medio de una combinación lineal con coeficientes no negativos como el índice unificado de centralidad correspondiente a la ecuación B.13, independientemente de la metodología empleada para calcular los coeficientes de la combinación lineal.

Este tipo de índices se consideran por el autor como un criterio determinante para asignar centralidad a un banco por interconectividad y ayudaría a señalar a los bancos más importantes para el sistema según los criterios de centralidad considerados. Además, desde el punto de vista de una institución regulatoria es muy útil el tener un solo indicador que resuma la información de las demás medidas.

### **7.4.3. Índice de centralidad por componentes principales**

En las redes asociadas al SPEI el índice de componentes principales explica un porcentaje más alto de la varianza que al aplicarse en las redes de exposiciones interbancarias. Lo que sugiere que las características de la red del SPEI provocan que, la mayoría de los días del estudio, esta metodología se aplicó de forma más efectiva en la red del SPEI.

Además las altas correlaciones entre los índices por componentes principales y las demás medidas de centralidad (cuadros 6.2 y 6.3) garantizan que su resultado es consecuente con la información aportada por cada métrica de centralidad.

Por otra parte, el análisis de componentes principales es una metodología estándar del análisis estadístico multivariado y su uso es cómodo puesto que existen bastantes resultados teóricos al respecto. Pero en general se puede proponer otro tipo de metodologías similares. Por ejemplo problemas de programación como el de la ecuación B.14 pero con restricciones distintas.

#### 7.4.4. Pruebas de robustez

El estudio descrito en la sección 6.3 permite concluir que, según los criterios de congruencia por vértices superiores, por vértices inferiores y por correlación las medidas que sólo se basan en el aspecto topológico son más robustas que las medidas que involucran los pesos de los arcos. De estas la medida de centralidad inter-vértices resultó ser destacadamente robusta con respecto a las demás. Y los índices de centralidad por componentes principales heredaron un perfil de robustez similar al de las medidas de centralidad que involucran a los pesos.

Por su parte, el criterio de congruencia por el traslapo de las categorías mostró que para cualquier métrica de centralidad, según el tipo de afectación a la red original, pueden ser más variables los vértices encontrados en las primeras categorías (con la creación de arcos) o bien las últimas (con la eliminación de arcos). Para reducir esta variabilidad podrían reducirse el número de categorías, por ejemplo, hacer que las categorías 2 y 3 sean una sola y de igual forma con las categorías 9 y 10. Esto último podría resultar en categorías más estables en el sentido de que los vértices no cambiarían de categoría frecuentemente a causa de estas perturbaciones en la red sino que sólo en el caso de que alteraran notablemente sus características de conectividad.

Así podría clasificarse a los bancos en categorías estables como los más o menos importantes para el sistema según sus patrones de interconectividad. Pero, para que esto sea más realista también deberían estudiarse las pruebas de robustez con perturbaciones ajustadas la evolución diaria de la red del SPEI o de la red de exposiciones interbancarias, dicha perturbación consistiría en la creación y eliminación de arcos a la vez.

Finalmente es importante recordar que en Frantz and Carley (2005) los autores muestran que el perfil de robustez de las medidas de centralidad que ellos estudiaron está muy ligado a la topología de la red en particular<sup>7</sup>. Es por eso que el estudio de robustez realizado en la tesis no es definitivo, los resultados obtenidos corresponden a cierto tipo de red y con cierta distribución y asignación de los pesos. Para hacer un estudio más completo bien pueden variarse los parámetros del modelo de Bollobás et al. (2003) o usar redes con otras arquitecturas.

---

<sup>7</sup>Así, por ejemplo concluyen que las medidas de centralidad son más sensibles en redes con estructura núcleo-periferia que en redes con estructura de gráfica aleatoria.

# Apéndice A

## Entropía en teoría de la información y aplicaciones a riesgo sistémico

El concepto de entropía se origina en la física y fue adoptado posteriormente en la teoría de la información. Este apartado tiene como objetivo dar algunas nociones en torno al concepto de entropía en el contexto de teoría de la información y sobre cómo se usa en la literatura relacionada a riesgo sistémico.

Supongamos que se tiene una fuente de información o conjunto de mensajes  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , con distribución de probabilidad  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  que asocia a cada  $x_i$  una probabilidad  $p_i$  de aparecer.

La *cantidad de información*  $I$  obtenida de un mensaje  $x_i$  con probabilidad  $p_i$  se define como<sup>1</sup>:

$$I(x_i) = \log \left( \frac{1}{p_i} \right) \quad (\text{A.1})$$

Shannon propuso caracterizar la información ganada de la recepción de un mensaje como una función que dependa de qué tan probables sean los mensajes. Los mensajes más probables son los que menor cantidad de información aportan, mientras que los menos probables informan más.

La entropía es la cantidad esperada de información que aporta  $X$ , si se

---

<sup>1</sup>Considerar la definición con logaritmo en base 2 implica que las unidades de medida sean bits (como suele hacerse en teoría de la información). Pero en el contexto en que se está trabajando la entropía se calculará con logaritmos naturales.

la considera como una variable aleatoria discreta, entonces la entropía es la esperanza de la variable aleatoria  $I(X)$ , es decir:

$$H(X) = \mathbb{E}(I(X)) = \sum_{i=1}^n p_i I(x_i) = - \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i) \quad (\text{A.2})$$

con la convención  $0 \cdot \log(0) := 0$ . A esta se le conoce como *Entropía de Shannon discreta*. En una fuente que produce símbolos sin algún patrón claro de aparición, la entropía de la información es relativamente alta.

El valor minimal de la entropía se alcanza cuando  $p_j = 1$  para algún  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  y  $p_i = 0$  para todo  $i \neq j$ , en ese caso:

$$H(X) = p_j \log\left(\frac{1}{p_j}\right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

La entropía se maximiza cuando la obtención de cualquier símbolo es equiprobable<sup>2</sup>. Es decir, cuando  $p_i = \frac{1}{n}$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , en tal caso se tiene:

$$H(X) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{1}{n}\right) = \log(n) \quad (\text{A.4})$$

El uso de la entropía en el contexto de riesgo sistémico es flexible. Incluso hasta el punto de ser calculada sobre conjuntos que no precisamente son una distribución de probabilidad sino que se les interpreta de esta manera y se les estandariza si es necesario para que todos sus valores sumen 1. Además no se hace explícita la posible existencia o interpretación de la variable aleatoria que representa al conjunto de mensajes  $X$ .

## A.1. Entropía como medida de heterogeneidad y concentración

Una característica importante en las redes libres de escala es la heterogeneidad con la que se distribuyen los arcos y en Wang et al. (2006) los autores recurren a la entropía como métrica para dicha heterogeneidad. Para los autores, el hacer a una red libre de escala más robusta a la remoción aleatoria de vértices equivale a maximizar la entropía de la distribución del grado o bien, maximizar su heterogeneidad.

---

<sup>2</sup>La demostración de este hecho puede consultarse en Galaviz (2003)



Después de expresar la entropía de la distribución del grado de una red libre de escala en términos del número de vértices de la red y de los parámetros de la distribución ley de potencia discreta obtienen expresiones para los valores de los parámetros que maximizan la entropía.

Por su parte, Saltoglu and Yenilmez (2010), inspirados en esto también interpretan a la entropía como una medida de heterogeneidad. Pero calculan la entropía sobre el vector de valores para el PageRank modificado ( $PR$ ) que ellos proponen como métrica de interconectividad o centralidad. En la forma más homogénea para este vector, las instituciones tendrán una interconectividad similar y se obtendrán valores altos para la entropía. Mientras exista alguna institución que se vuelva más central, la entropía decrece.

Los autores calculan estas medidas para datos del sistema financiero turco e identifican, por medio de la entropía, esta desviación de la homogeneidad cuando se comenzaron a presentar los indicios de una crisis financiera en Turquía que culminó en la quiebra del banco Demirbank, quien se volvió más central durante ese tiempo. Concluyen que estas métricas pueden ser útiles para pronosticar una crisis financiera.

Considérese ahora el cálculo de la entropía sobre un vector que contenga la información sobre los préstamos que otorga el banco  $i$  a todos los demás del sistema. En concreto considérese al vector renglón  $w_i^+$  de la matriz  $W^+$  estandarizado (de tal manera que sus entradas sumen 1), es decir, aquel cuyas entradas son  $\frac{w_{ij}^+}{\sum_{j=1}^n w_{ij}^+} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$ .

Si las exposiciones están homogéneamente distribuidas entre las contrapartes entonces se tendrán valores grandes para la entropía y si ocurre lo contrario, es decir, que algunas de sus exposiciones estén más concentradas en algunas contrapartes, la entropía tendrá valores más pequeños.

Nótese entonces que la entropía puede interpretarse como un indicador de concentración, similar al  $HHI$  definido en la sección 2.3.4. Sólo que la primera asigna concentración en el “sentido opuesto” en el que lo hace el otro.

En el capítulo 4 se compararon los resultados de calcular la entropía y de calcular el  $HHI$ . Y, en efecto, las correlaciones que se obtuvieron entre uno y otro fueron muy cercanas a -1. Esto lo interpretamos como el hecho de que ambos indicadores aportan información equivalente.

El pensar en la entropía en términos económicos facilita la contextualización de dicho concepto y será útil para la siguiente sección.

## A.2. Consideraciones sobre la centralidad por eigenvectores entrópica (*EEC*)

En la sección 2.4.5 se menciona cómo Nacaskul (2010) usa la entropía para la definición de la *centralidad por eigenvectores entrópica*. La autora considera que, por ejemplo, un vértice  $l$  con mayor grado y una mayor diversificación de sus pesos entre sus contrapartes debe considerarse sistémicamente más importante que algún otro vértice  $k$  con pocas contrapartes y una mayor concentración de los pesos. El cálculo de la entropía sobre el renglón de la matriz  $W^{norm}$  correspondiente al vértice  $l$  otorgará un peso mayor que al calcularlo sobre el renglón correspondiente al vértice  $k$ .

La opinión del autor de la presente es que cuando un banco tiene concentrados sus pagos o sus exposiciones puede verse en problemas de fondeo en tiempos de dificultades financieras. En este sentido puede considerarse que un banco es más riesgoso mientras tenga una mayor concentración, lo que se traduce en un mayor *HHI* y en una menor entropía. Desde este punto de vista, la centralidad por eigenvectores entrópica asocia las cargas del “lado equivocado”.

Por otra parte, en la situación de los vértices  $k$  y  $l$  considerada anteriormente, el vértice con mayor entropía ( $l$ ) también tiene más contrapartes y su falla podría impactar a más participantes en el sistema. Observando esto incluso podría decirse que la definición de la *centralidad por eigenvectores entrópica* definida por Nacaskul (2010) descansa hasta cierto punto en la *centralidad por grado*.

La cuestión respecto a si esta medida de centralidad esté asignando importancia de forma adecuada o no aún es ambigua y debe analizarse considerando otros criterios, esto se deja para trabajo posterior.

## A.3. Supuesto de entropía máxima para las exposiciones interbancarias

Algunos bancos centrales no disponen de la información completa con respecto a las exposiciones interbancarias del sistema a su cargo, sólo conocen el préstamo total que recibe o emite cada banco pero no las contrapartes

específicas con las que se dan estas transacciones<sup>3</sup>.

Lo que algunos autores hacen es presuponer que los bancos distribuyen sus préstamos lo más equitativamente posible; un ejemplo es Upper (2007). Esto corresponde a “maximizar la entropía” de los préstamos interbancarios.

Aunque esta metodología no descansa en la entropía como se definió anteriormente, sino que lo hace sobre la *Entropía Relativa*, también conocida como *Divergencia de Kullback-Leibler*. Dadas las distribuciones de probabilidad  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  y  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  para una variable aleatoria discreta  $X$  que toma valores en  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  la *Entropía Relativa* de  $X$  sobre  $P$  con respecto a  $Q$  se define como<sup>4</sup>:

$$H_{P|Q}(X) = \sum_i p_i \log \frac{p_i}{q_i} \quad (\text{A.5})$$

La entropía relativa se interpreta como una medida de la desviación entre las dos distribuciones de probabilidad, si esta es grande entonces las distribuciones están más “alejadas”. En este contexto las distribuciones de probabilidad empleadas serían las entradas estandarizadas (desconocidas) de la matriz  $W^+$  y la matriz asociada a la de la entropía máxima.

Las entradas desconocidas que se desean calcular son las soluciones de un problema de programación en donde se pretende minimizar una expresión similar a la ecuación A.5 sujeto a algunas restricciones, entre ellas que las entradas de la diagonal sean cero. En Sachs (2010) se encuentra una explicación detallada sobre el uso de esta metodología y ejemplificación de su uso.

No obstante, los estudios empíricos han mostrado que en los sistemas bancarios las exposiciones no se encuentran distribuidas homogénea y equitativamente sino que suelen estar concentradas y el presuponer que la entropía es máxima conlleva a describir sistemas bancarios irreales y por ende tener una visión distorsionada del riesgo inherente a ellos.

Un ejemplo de esta distorsión se encuentra en Mistrulli (2007). El autor estudia la manera en que se propaga el contagio a través del mercado interbancario italiano y compara los resultados de usar los datos completos y usando los datos de la matriz obtenida por el método de máxima entropía. Lo

---

<sup>3</sup>Esto es equivalente a no conocer las entradas  $w_{ij}^+$  de la matriz de pesos exteriores  $W^+$  (definida en la sección 2.1) pero sí conocer cuánto prestó el banco  $i$  al sistema ( $\sum_j w_{ij}^+$ ) y cuánto prestó el sistema al banco  $i$  ( $\sum_i w_{ij}^+$ )

<sup>4</sup>Esta sólo está definida si  $q_i > 0$  para cualquier  $i$  tal que  $p_i > 0$  y también se conviene que  $0 \cdot \log(0)$  y  $0 \cdot \log(\frac{0}{0})$  sean interpretadas como cero.

que encuentra es que el supuesto de máxima entropía subestima el alcance del efecto de contagio en algunos casos pero que también existen parámetros de su modelo, como el capital de los bancos, para los cuáles el supuesto provoca la sobreestimación del alcance del contagio.

# Apéndice B

## Análisis de componentes principales

El análisis estadístico multivariado consiste en una serie de técnicas que pueden usarse cuando se presentan datos que correspondan a distintas variables sobre cada unidad o individuo de la muestra. Aunque algunas veces tiene sentido estudiar por separado cada una de las variables, este tipo de técnicas pretenden analizar todas las variables de manera simultánea para descubrir patrones sobre la información que contienen, vistas en conjunto.

Una de las técnicas más usadas dentro del análisis multivariado es el *análisis de componentes principales*. Su objetivo central es reducir la dimensión de un conjunto de datos que consista en distintas variables relacionadas<sup>1</sup>, intentando conservar la mayor cantidad de varianza de los datos. Esto se logra generando nuevas variables llamadas *componentes principales* (c.p.) con las siguientes características: no están correlacionadas, la primera c.p. explica la mayor cantidad de varianza de los datos que sea posible y cada componente subsecuente explica la mayor cantidad de la variabilidad restante de los datos que sea posible.

Supóngase que  $x$  es un vector de  $p$  variables aleatorias, entonces los componentes son de la forma:

$$Z_i = \beta_i^T x = \beta_{1i}x_1 + \beta_{2i}x_2 + \cdots + \beta_{pi}x_p \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (\text{B.1})$$

Es decir, son combinaciones lineales de las  $p$  variables. Entonces, debe

---

<sup>1</sup>Es importante resaltar que las técnicas de del análisis multivariado con el objetivo de reducir la dimensión de los datos son de tipo exploratorio y sirven como un paso preliminar para la posterior aplicación de otros métodos estadísticos.

elegirse al vector columna  $\beta_1$  tal que se maximice:

$$Var(Z_1) = Var(\beta_1^T x) = \beta_1^T Var(x) \beta_1 = \beta_1^T \Sigma \beta_1 \quad (\text{B.2})$$

donde  $\Sigma$  es la matriz de varianzas-covarianzas<sup>2</sup>. Esta es la matriz cuyo elemento  $(i, j)$  es la covarianza entre el elemento  $i$  y el elemento  $j$  del vector  $x$  cuando  $i \neq j$  y cuando  $i = j$  se trata de la varianza del elemento  $j$ .

Para que la solución a dicho problema sea finita se impone la restricción  $\|\beta_1\| = \beta_1^T \beta_1 = 1$

El vector que hace máxima la varianza de la primer componente,  $Z_1$ , es el eigenvector,  $\beta_1$ , asociado al primer eigenvalor  $\lambda_1$  de la matriz  $\Sigma$ . Para el segundo componente  $Z_2$  es el eigenvector,  $\beta_2$ , asociado al segundo eigenvalor  $\lambda_2$ , con  $\lambda_1 > \lambda_2$  y así sucesivamente.

Una manera de ver esto es usar la técnica de multiplicadores de Lagrange. Se desea maximizar  $\beta_1^T \Sigma \beta_1$  sujeto a  $\beta_1^T \beta_1 = 1$ . Si  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange entonces se pretende maximizar

$$\beta_1^T \Sigma \beta_1 - \lambda(\beta_1^T \beta_1 - 1) \quad (\text{B.3})$$

Derivando con respecto a  $\beta_1$  se obtiene:

$$\Sigma \beta_1 - \lambda \beta_1 = 0 \quad (\text{B.4})$$

o equivalentemente

$$(\Sigma - \lambda \mathbf{I}_p) \beta_1 = 0 \quad (\text{B.5})$$

entonces  $\beta_1$  es un eigenvector de la matriz  $\Sigma$  asociado al eigenvalor  $\lambda$ . Para ver cuál de los  $p$  eigenvalores posibles es el que maximiza la varianza de  $Z_1 = \beta_1^T x$  nótese que la expresión a maximizar es:

$$\beta_1^T \Sigma \beta_1 = \beta_1^T \lambda \beta_1 = \lambda \beta_1^T \beta_1 = \lambda \quad (\text{B.6})$$

entonces  $\lambda$  debe ser tan grande como sea posible. En otras palabras  $\beta_1$  es el eigenvector correspondiente a  $\lambda_1$ , el eigenvalor más grande de la matriz  $\Sigma$  y  $Var(Z_1) = \lambda_1$ .

Para obtener los coeficientes de la siguiente componente se resuelve el mismo problema, de forma análoga, sólo que ahora se añade la restricción de que la segunda componente no debe estar correlacionada con la primera, es decir,  $cov(Z_1, Z_2) = 0$ . Así sucesivamente para las demás variables<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>Como  $\Sigma$  suele ser desconocida entonces se estima por medio de  $S$ , la matriz de varianza-covarianza muestral.

<sup>3</sup>Una exposición más detallada sobre estos resultados y la aplicación del tema en general puede consultarse en Jolliffe (1986).

Lo que se obtiene al final es que para la segunda, tercera,...,  $p$ -ésima c.p. los vectores de coeficientes  $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_p$  son los eigenvectores de la matriz  $\Sigma$  correspondientes a los eigenvalores  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p$  ordenados de forma decreciente. Y aún más:

$$Var(Z_k) = \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (\text{B.7})$$

y, por construcción, también se tiene que  $cov(Z_i, Z_j) = 0$  para toda  $i \neq j$   $i, j = 1, 2, \dots, p$ .

De lo anterior se deduce que:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = \sum_{i=1}^p Var(Z_i) \quad (\text{B.8})$$

Por esta razón se dice que el  $k$ -ésimo componente principal explica una proporción de varianza igual a:

$$\frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^p \lambda_i} \quad (\text{B.9})$$

Y los primeros  $q \leq p$  de ellos explican una proporción de la varianza igual a:

$$\frac{\sum_{i=1}^q \lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i} \quad (\text{B.10})$$

Con este procedimiento se obtienen  $p$  componentes, aunque en general se espera que, las  $q$  primeras c.p. expliquen una proporción considerablemente grande de la varianza de los datos (mayor al 70%). Estas nuevas variables resumen la mayor información posible de las variables anteriores.

En esta tesis, en que se pretende aplicar esta metodología, se desea considerar sólo a la primer componente, con la esperanza de que esta explique una cantidad considerable de la varianza. En esta tesis se usa la metodología de componentes principales con el propósito de obtener un solo índice de *centralidad por interconectividad* que permita asociar importancia a los vértices de la red considerando los anteriores criterios de centralidad a la vez. En el capítulo 2 se propuso el uso de un índice de la forma:

$$PC = \beta_1 C_D + \beta_2 C_S + \beta_3 C_C + \beta_4 C_B + \beta_5 PR + \beta_6 EEC \quad (\text{B.11})$$

Un criterio para elegir a la combinación lineal óptima basado en el análisis de componentes principales puede ser el tomar la primer componente principal, es decir:

$$PC_1 = \beta_{11}C_D + \beta_{21}C_S + \beta_{31}C_C + \beta_{41}C_B + \beta_{51}PR + \beta_{61}EEC \quad (\text{B.12})$$

Pero este planteamiento presenta el inconveniente de que las c.p. son sensibles a las unidades en que fueron medidas las variables. Recuérdese que las variables fueron medidas de distintas formas y se considera que no se encuentran en las “mismas unidades”. Por ejemplo la variable  $C_D$  toma valores enteros mientras que  $EEC$  toma valores entre 0 y 1.

La manera en que se puede solucionar este problema es aplicar la metodología a los datos estandarizados (llamados puntajes  $z$ ), en lugar de usar los datos crudos. Es decir, usar la componente de la forma:

$$PC_1 = \beta_{11}C_D^* + \beta_{21}C_S^* + \beta_{31}C_C^* + \beta_{41}C_B^* + \beta_{51}PR^* + \beta_{61}EEC^* \quad (\text{B.13})$$

en donde cada variable con \* representa a la variable menos su media y dividida entre su desviación estándar, por ejemplo  $C_D^* = \frac{C_D - \mu_D}{\sigma_D}$ . De esta manera los datos son adimensionales y las variables son comparables entre sí.

En resumen, se propone obtener una nueva variable de la forma B.13 en donde los coeficientes sean las soluciones al problema:

$$\text{máx } Var(PC_1) \quad s.a. \quad \|\beta_1\| = \beta_1^T \beta_1 = 1 \quad (\text{B.14})$$

y aún más, para que la combinación lineal descrita por B.13 tenga sentido en el contexto de asociar centralidad a los vértices de una red, debe imponerse la restricción  $\beta_1 > 0$

Dicha condición se vería garantizada por el teorema 2.2 si la matriz  $S$  fuera irreducible. Esto sí sucede puesto que todas las medidas de centralidad resultaron positivamente correlacionadas como se ve en los capítulos 4 y 5, entonces las entradas de  $S$  son estrictamente positivas.



# Bibliografía

- Viral V. Acharya, Joao A. C. Santos, and Tanju Yorulmazer. Systemic risk and deposit insurance premiums. 2010.
- Tobias Adrian and Markus K. Brunnermeier. Covar. Staff Reports 348, Federal Reserve Bank of New York, September 2008.
- R. Albert, H. Jeong, and A.L. Barabasi. The Diameter of the World Wide Web. *Nature*, 401:130–131, 1999.
- Réka Albert, Hawoong Jeong, and Albert-László Barabási. Error and attack tolerance of complex networks. *Nature*, 406:378–382, 2000.
- Piergiorgio Alessandri, Prasanna Gai, Sujit Kapadia, Nada Mora, and Claus Pühr. Towards a framework for quantifying systemic stability. *International Journal of Central Banking*, September 2009.
- Franklin Allen and Ana Babus. Networks in finance. Working Paper 08-07, Wharton Financial Institutions Center, 2008.
- Franklin Allen and Douglas Gale. Financial Contagion. *Journal of Political Economy*, 108:1–33, 2000.
- Franklin Allen, Ana Babus, and Elena Carletti. Financial crises: Theory and evidence. *Annual Review of Financial Economics*, 1:97–116, 2009.
- Olivier De Bandt and Philipp Hartmann. Systemic Risk: A Survey. Working Paper 35, European Central Bank, November 2000.
- Banxico. Reporte sobre el Sistema Financiero 2009. Reporte anual, Banco de México, Julio 2009.
- Banxico. Reporte sobre el Sistema Financiero 2010. Reporte anual, Banco de México, Noviembre 2010.

- Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286:509–512, September 1999.
- Morten L. Bech and Enghin Atalay. The topology of the federal funds market. Staff Report 354, Federal Reserve Bank of New York, November 2008.
- Christopher Becher, Stephen Millard, and Kimmo Soramäki. The network topology of chaps sterling. Working Paper 355, Bank of England, 2008.
- Bela Bollobás, Christian Borgs, Jennifer Chayes, and Oliver Riordan. Directed scale-free graphs. 2003.
- Béla Bollobás. *Random Graphs*, volume 73 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, second edition, 2001.
- P. Bonacich. Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification. *Journal of Mathematical Sociology*, 2:113–120, 1972.
- Stephen P. Borgatti. Centrality and network flow. *Social Networks*, 27:55–71, 2005.
- Stephen P. Borgatti and M. Everett. A graph-theoretic perspective on centrality. *Social Networks*, 28:466–484, October 2006.
- M. Boss, H. Elsinger, M. Summer, and S. Thurner. The network topology of the interbank market. *Quantitative Finance*, 4:677–684, December 2004.
- Sergey Brin and Lawrence Page. The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Computer Networks and ISDN Systems*, 30:107–117, 1998.
- Gustavo Othoniel Cano-Moo. Riesgo sistémico. Una aplicación de los grafos aleatorios. Master’s thesis, Centro de Investigaciones en Matemáticas, A.C., Guanajuato, Gto. México, 2010.
- Stephen G Cecchetti, Ingo Fender, and Patrick Mcguire. Toward a global risk map. *BIS Working Papers*, (309), 2010.
- Aaron Clauset, Cosma Rohilla Shalizi, and M. E. J. Newman. Power-law distributions in empirical data. *SIAM Review*, 51:661–703, 2009.
- Joao F. Cocco, Francisco J. Gomes, and Nuno C. Martins. Lending relationships in the interbank market. *J.Finan. Intermediation*, 2008.

- Rama Cont and Amal Moussa. Too interconnected to fail: contagion and systemic risk in financial networks. *Working paper, Columbia Center for Financial Engineering*, December 2009.
- Rama Cont, Amal Moussa, and Edson Bastos e Santos. Network structure and systemic risk in banking systems. December 2010.
- CPSS. A glossary of terms used in payment and settlement systems. Technical report, BIS, March 2003.
- Ben Craig and Goetz von Peter. Interbank tiering and money center banks. BIS Working Papers 322, Bank for International Settlements, October 2010.
- S.N. Dorogovstev, J.F.F. Mendes, and A.N. Samukhin. Giant strongly connected component of directed networks. March 2001.
- S. N. Dorogovtsev. *Lectures on Complex Networks*. Oxford University Press, February 2010.
- S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes. Evolution of networks. In *Adv. Phys.*, pages 1079–1187, 2002.
- P. Erdős and A. Rényi. On random graphs I. *Publ. Math. Debrecen*, (6): 290–297, 1959.
- P. Erdős and A. Rényi. On the Evolution of Random Graphs. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, (5):17–61, 1960.
- Marco A. Espinosa-Vega and Jan Solé. Cross-border financial surveillance: A network perspective. *IMF Working Paper*, April 2010.
- Terrill L. Frantz and Kathleen M. Carley. Relating network topology to the robustness of centrality measures. Technical report, 2005.
- Linton C. Freeman. Centrality in social networks conceptual clarifications. *Social Networks*, 1:215–239, 1979.
- Silvia Gabrieli. Too-interconnected versus too-big-to-fail: Banks’ network centrality and overnight interest rates. February 2011.
- Prasanna Gai and Sujit Kapadia. Contagion in financial networks. *Working Paper No.383*, March 2010.

- José Galaviz. *Introducción a la Teoría de Códigos, Teoría de la Información y Criptografía*. UNAM. Facultad de Ciencias, 2003.
- Céline Gauthier, Alfred Lehar, and Moez Souissi. Macroprudential regulation and systemic capital requirements. Bank of Canada Working Paper 2010-4, Bank of Canada, January 2010.
- Sanjeev Goyal. Learning in networks: a survey. Economics Discussion Papers 563, University of Essex, Department of Economics, 2003.
- Sanjeev Goyal. *Connections: An Introduction to the Economics of Networks*. Princeton University Press, September 2007.
- Sanjeev Goyal and Adrien Vigier. Robust networks. July 2008.
- Sanjeev Goyal, Marco van der Leij, and José Luis Moraga-González. Economics: An emerging small world? *Tinbergen Institute Discussion Paper*, November 2003.
- Juan Pablo Graf, Sergio Guerrero, and Fabrizio Lopez-Gallo. Interbank exposures and contagion: An empirical analysis for the mexican banking sector. Mimeo, Banco de México, May 2005.
- Frank Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
- Jeannette Henggeler-Müller. *The Potential for Contagion in the Swiss Interbank Market*. PhD thesis, Universitat Basel, May 2006.
- Giulia Iori, Giulia de Masi, Ovidiu V. Precup, Giampaolo Gabbi, and Guido Caldarelli. A network analysis of the italian overnight money market. Discussion Paper Series 05/05, City University London, July 2005.
- Giulia Iori, Roberto Renò, Giulia de Masi, and Guido Caldarelli. Trading strategies in the italian interbank market. City University Economics Discussion Papers 06/03, Department of Economics, City University, London, April 2006.
- Matthew O. Jackson. A survey of models of network formation: Stability and efficiency, 2003.
- I. T. Jolliffe. *Principal component analysis*. Springer, New York, 1986.
- James P. Keener. The perron-frobenius theorem and the ranking of football teams. *SIAM Rev.*, 35:80–93, March 1993. ISSN 0036-1445.

- F Liljeros, C Edling, L Amaral, and H Stanley. The web of human sexual contacts. *Nature*, 411:907–908, 2001.
- Javier Márquez-Diez-Canedo, Serafín Martínez-Jaramillo, and Omar Pérez-Pérez. A network model of systemic risk. *Journal of Intelligent Systems in Accounting, Finance & Management*, 16, 2009.
- Serafín Martínez-Jaramillo, Calixto López Castañón, Omar Pérez Pérez, Fernando Avila Embriz, and Fabrizio López Gallo Dey. Systemic risk, stress testing and financial contagion: Their interaction and measurement. In *BIS CCA Conference on “Systemic risk, bank behaviour and regulation over the business cycle”*, pages–, Buenos Aires, March 2010a.
- Serafín Martínez-Jaramillo, Omar Pérez Pérez, Fernando Avila Embriz, and Fabrizio López Gallo Dey. Systemic risk, financial contagion and financial fragility. *Journal of Economic Dynamics and Control*, pages–, 2010b. ISSN 0165-1889. doi: DOI: 10.1016/j.jedc.2010.06.004.
- Camelia Minoiu and Javier A. Reyes. A network analysis of global banking: 1978-2009. IMF Working Paper WP/11/74, International Monetary Fund, 2011.
- Paolo Emilio Mistrulli. Assessing financial contagion in the interbank market: Maximum entropy versus observed interbank lending patterns. Temi di discussione (Economic working papers) 641, Bank of Italy, Economic Research Department, 2007.
- Poomjai Nacaskul. Systemic Import Analysis (SIA) Application of Entropic Eigenvector Centrality (EEC) Criterion for a Priori Ranking of Financial Institutions in Terms of Regulatory-Supervisory Concern, with Demonstrations on Stylised Small Network Topologies and connectivity weights. May 2010.
- A. Nagurney and Q. Qiang. Robustness of transportation networks subject to degradable links. *Europhysics Letters*, 80(6):68001–68006, 2007. doi: 10.1209/0295-5075/80/68001.
- Anna Nagurney. *Innovations in Financial and Economic Networks*, chapter 1: Financial and Economic Networks: An Overview, pages 1–25. Edward Elgar Publishing, 2003.

- José Negrín, Diadelfa Ocampo, and Alejandro De los Santos. Recent innovations in inter-bank electronic payment system in Mexico: The role of regulation. IFC Bulletin 31, Bank for International Settlements, 2009.
- M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45:167–256, 2003.
- Erlend Nier, Jing Yang, Tanju Yorulmazer, and Amadeo Alentorn. Network models and financial stability. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 31:2033–2060, June 2006.
- Martin A. Nowak and Robert M. May. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, 359:826, 1992. doi: 10.1038/359826a0.
- Julia Poncela, Jesús Gómez-Gardeñes, Luis M. Floría, Angel Sánchez, and Yamir Moreno. Complex cooperative networks from evolutionary preferential attachment. *Plos One*, 3, June 2008.
- Marc Pröpper, Iman van Lelyveld, and Ronald Heijmans. Towards a network description of interbank payment flows. DNB Working Paper 177, De Nederlandsche Bank, May 2008.
- María Rodríguez-Moreno and Juan Ignacio Peña. Systemic risk measures: the simpler the better? Technical report, 2011.
- Kirsten Bonde Rordam and Morten L. Bech. The topology of Danish interbank money flows. Working Paper 59, Danmarks Nationalbank, December 2008.
- G. Sabidussi. The centrality index of a graph. *Psychometrika*, 31:581–603, September 1966.
- Angelika Sachs. Completeness, interconnectedness and distribution of interbank exposures: A parameterized analysis of the stability of financial networks. Technical report, 2010.
- Burak Saltoglu and Taylan Yenilmez. Analyzing systemic risk with financial networks: An application during a financial crash. MPRA Paper 26684, University Library of Munich, Germany, November 2010.
- Edson Bastos Santos and Rama Cont. The Brazilian interbank network structure and systemic risk. Working Papers Series 219, Central Bank of Brazil, Research Department, October 2010.

- Miguel A. Segoviano and Charles Goodhart. Banking stability measures. IMF Working Papers WP/09/04, International Monetary Fund, January 2009.
- Kimmo Soramäki, Morten L. Bech, Jeffrey Arnold, Robert J. Glass, and Walter E. Beyeler. The topology of interbank payment flows. *Federal Reserve Bank of New York and Staff Reports*, March 2006.
- Kimmo Soramäki, Morten L. Bech, Jeffrey Arnold, Robert J. Glass, and Walter E. Beyeler. The topology of interbank payment flows. *Physica A-statistical Mechanics and Its Applications*, 379:317–333, 2007.
- Nikola Tarashev, Claudio Borio, and Kostas Tsatsaronis. Allocating systemic to individual institutions. methodology and policy applications. (25), September 2009.
- Christian Upper. Using counterfactual simulations to assess the danger of contagion in interbank markets. BIS Working Papers 234, Monetary and Economic Department of the Bank for International Settlements, CH-4002 Basel, Switzerland, August 2007.
- Thomas W. Valente, Kathryn Coronges, Cynthia Lakon, and Elizabeth Costenbader. How Correlated Are Network Centrality Measures? *Connections (Toronto, Ont.)*, 28(1):16–26, January 2008.
- Bing Wang, Huanwen Tang, Chonghui Guo, and Zhilong Xiu. Entropy optimization of scale-free networks' robustness to random failures. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 363(2):591–596, May 2006.
- Duncan J. Watts and Steven H. Strogatz. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393:440–442, June 1998.
- Anne Wetherilt, Peter Zimmerman, and Kimmo Soramäki. The sterling unsecured loan market during 2006-08: insights from network theory. Working Paper 398, Bank of England, 2010.
- Paloma Zapata-Lillo. *Economía, política y otros juegos*. UNAM. Facultad de Ciencias, 2007.



Otorga  
el  
Primer Lugar

## PREMIO NACIONAL BMV 2011

En la Categoría de Tesis

a: **Bernardo Bravo Benítez**

Por su trabajo titulado:

**“Análisis Empírico de la Red de Exposiciones  
interbancarias en México y del Sistema de Pagos electrónicos  
interbancarios (SPEI) y su conexión con el Riesgo sistémico”**



**Premio Mercados Financieros**

Ciudad de México, 14 de Diciembre 2011.

Luis Téllez Kuenzler  
Presidente del Consejo de Administración  
Bolsa Mexicana de Valores

Javier Artigas Alarcón  
Director General Adjunto  
de Planeación Estratégica y Promoción  
Bolsa Mexicana de Valores





Otorgan el



# Premio Mercados Financieros

Ciudad de México, 14 de Diciembre 2011.

a: **Bernardo Bravo Benítez**

Por su trabajo titulado:

**“Análisis Empírico de la Red de Exposiciones interbancarias en México y del Sistema de Pagos electrónicos interbancarios (SPEI) y su conexión con el Riesgo sistémico”**

Luis Téllez Kuenzler  
Presidente del Consejo de Administración  
Bolsa Mexicana de Valores

Javier Artigas Alarcón  
Director General Adjunto  
de Planeación Estratégica y Promoción  
Bolsa Mexicana de Valores

Jorge Alegría Formoso  
Director General Adjunto  
de Mercados e Información  
Bolsa Mexicana de Valores

GOBERNADOR

Ref. ACC/2012 M-003  
México, D.F., 13 de enero de 2012

**SR. BERNARDO BRAVO BENÍTEZ**  
Analista de Sistemas de Pagos

*Bernardo*  
Estimado Sr. Bravo:

Reciba mis más sinceras felicitaciones por haber obtenido un reconocimiento por su trabajo en el Premio Mercados Financieros – edición 2011 – otorgado por las empresas del grupo BMV con la finalidad de contribuir al desarrollo y perfeccionamiento de los mercados de valores y de derivados en nuestro país.

*Muchas felicitaciones*

Atentamente,

*Agustín*  
**DR. AGUSTIN GUILLERMO CARSTENS CARSTENS**

jevq