



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

MODELOS DINÁMICOS PARA LA DESCRIPCIÓN DE OPERADORES
HUMANOS EN EL ANÁLISIS DE SISTEMAS DE TELEMANIPULACIÓN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
JOAQUÍN MANRIQUE DE LA CRUZ

TUTOR PRINCIPAL
DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. FEBRERO 2013

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Yu Tang Xu
Secretario: Dr. Héctor Benítez Pérez
Vocal: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez
1^{er} Suplente: Dr. Luis A. Álvarez Icaza Longoria
2^{do} Suplente: Dr. Alejandro Rodríguez Ángeles

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Laboratorio de Robótica del Edificio de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

FIRMA

Índice general

1. Introducción	4
1.1. Antecedentes y estado del arte	5
1.1.1. Sobre los operadores humanos	5
1.2. Planteamiento del problema	6
1.2.1. Motivación	7
1.2.2. Objetivo	7
1.3. Contribución	7
1.4. Organización del texto	8
2. Marco teórico	9
2.1. Cinemática del robot	9
2.1.1. Cinemática directa	9
2.1.2. Cinemática inversa	10
2.1.3. Cinemática diferencial	10
2.2. Modelo dinámico del robot	11
2.2.1. Modelo en movimiento libre	11
2.2.2. Restricciones holonómicas	12
2.2.3. Modelo en movimiento restringido	13
2.2.4. Propiedades del modelo dinámico	13
2.3. Preliminares matemáticos	13
2.3.1. Principio de ortogonalización	13

2.4. El esquema de telemanipulación	14
2.5. Control basado en superficies virtuales	16
3. Modelos para describir al humano	18
3.1. El rol del humano en el esquema de telemanipulación	18
3.2. Características físicas del operador humano	21
3.2.1. Cinemática del brazo humano	21
3.3. Modelos dinámicos	22
3.3.1. Impedancia del brazo	23
3.4. Modelo propuesto	26
4. Resultados de simulación	29
4.1. Demostración de estabilidad	29
4.2. Resultados de simulación	30
5. Conclusiones	35
5.1. Comentarios finales	35
5.2. Trabajo futuro	35
A. Demostración de estabilidad del controlador	36

Capítulo 1

Introducción

La telemanipulación asiste en ambientes donde se requiere contar con la capacidad de adaptación y toma de decisiones del operador humano y se requiere de un manipulador robótico por sus capacidades aumentadas de fuerza y precisión o porque la tarea involucra ambientes cuyas condiciones los vuelven inaccesibles, inhóspitos, nocivos o en última instancia letales para el humano.

El presente trabajo sitúa al operador humano en el contexto de esquemas de telemanipulación sometidos a restricciones holonómicas. En este esquema un robot esclavo sigue una tarea dada por el operador a través de un robot maestro que a su vez transmite al operador información del ambiente con el que se está interactuando (una medida de la forma y la fuerza que el robot esclavo está experimentando en contacto con el ambiente de trabajo). El robot esclavo sigue una trayectoria en contacto con una superficie y ejerce una fuerza sobre ésta.

La dinámica y el control de robots manipuladores es un problema que ya se ha resuelto desde múltiples puntos de vista. En cuanto a las tareas de teleoperación existen diferentes técnicas, de las cuales en este trabajo se considera el control mediante superficies virtuales. Los esquemas de control que se emplean explotan el principio de ortogonalización para separar el error de fuerza y el error de posición en espacios ortogonales. Este trabajo se enfoca en determinar un modelo matemático del operador humano para utilizarlo en la simulación de tareas de telemanipulación. Se parte de la siguiente hipótesis: *la acción del operador humano*

en el sistema de telemanipulación puede representarse por medio de una ecuación o un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen dos comportamientos básicos: una dinámica reactiva, asociada a la dinámica del brazo del operador y una dinámica de control. En estos dos comportamientos se busca reproducir el rol del operador humano. Por una parte, se consideró que la dinámica reactiva del humano puede modelarse con una impedancia constante. Por otro lado, la acción de control del operador humano se consideró como un controlador tipo PID tras ciertas consideraciones respecto al rol y desempeño del operador humano.

El modelo propuesto se implementó en simulación en un sistema maestro-esclavo con un esquema de control basado en superficies virtuales. Para analizar el modelo del operador en el contexto, se elaboró una prueba de estabilidad basada en el esquema mencionado anteriormente.

1.1. Antecedentes y estado del arte

La representación de una dinámica del operador humano constituye un problema en cualquier sistema dinámico que lo incluya. La investigación en cuanto al modelo del operador humano parte de modelos que se han investigado para determinar algunas características y propiedades físicas del operador, como la impedancia del humano en dispositivos hápticos (ya sea para entrenamiento o para rehabilitación). La acción de control del operador humano es una tarea más difícil de determinar debido a la actividad nerviosa local de los grupos musculares y los comandos que provienen del sistema nervioso central, por lo que se utiliza un modelo relativamente simplificado para representar la acción de control.

1.1.1. Sobre los operadores humanos

El interés en modelar el comportamiento del humano como un elemento activo de control por retroalimentación comenzó durante la Segunda Guerra Mundial, cuando se hicieron estudios para mejorar el desempeño de los pilotos. Los primeros trabajos de investigación en el modelado del comportamiento del humano comenzaron en la década de 1950, cuando Hicks y Fitts, respectivamente, propusieron modelos para explicar el tiempo necesario para la

toma de decisiones y su implementación. Los resultados encontrados se demostraron válidos únicamente para tareas simples [13].

En [7] se reporta una serie de experimentos orientados a identificar la rigidez del codo del agente humano cuando se somete a pequeñas variaciones en movimiento. Los resultados se presentan como elipses de impedancia, i. e., se pueden encontrar dos ejes ortogonales en cuyas direcciones se localizan la rigidez máxima y mínima del brazo. En [9], Hogan entrega hallazgos de experimentos para identificar un rango de valores para la rigidez y el amortiguamiento asociados al codo.

Por otra parte, en 1992, Jones y Hunter [10] examinaron la relación que existe entre la percepción humana de parámetros físicos como la rigidez, viscosidad e inercia y sus efectos en el desempeño del operador.

Los trabajos anteriores se basan en la determinación de la dinámica reactiva del brazo humano. En [8] se presenta la determinación del papel que el operador humano desempeña en una tarea en un eje de movimiento y se explora la tarea de control considerando un ciclo de control a nivel neuromuscular y un ciclo de control debido al sistema nervioso central.

En [16] se identificó por medios experimentales un modelo que describiera el rol del operador humano en el esquema de telemanipulación. Se obtiene un modelo del comportamiento del humano que corresponde a un control PID y se valida estadísticamente. Artemiadis [1] determina elipses de impedancia válidas para tareas en tres dimensiones.

1.2. Planteamiento del problema

Usualmente se hacen suposiciones de que el comportamiento del operador humano es tal que permite la implementación de los esquemas de control para telemanipulación, o bien, se considera que la acción del humano es únicamente una trayectoria y/o una fuerza de referencia. El cuerpo humano es un organismo muy complejo, provisto de múltiples lazos de control, esquemas de actuación no lineal, dinámicas internas entrelazadas, altamente complejo incluso si se considera únicamente la parte mecánica, con muchos más grados de libertad que los que usualmente se requieren para guiar la trayectoria de un robot manipulador. El alcance de

este trabajo es únicamente la acción del operador humano en cuanto se refiere a la dinámica del brazo. Se propone modelarlo como un manipulador. Por las propiedades mencionadas anteriormente, el humano debe acotarse para lograr una medida asequible de representación. Se acota la dinámica para que comprenda únicamente la acción desde la articulación glenohumeral (el hombro) hasta la muñeca, sin considerar la dinámica asociada a la mano.

1.2.1. Motivación

El modelo del operador se empleará para implementar simulaciones en pruebas de esquemas de control para telemanipulación. Si el modelo refleja adecuadamente el comportamiento del operador, se puede validar el funcionamiento del esquema de control. Contar con una representación del operador permite demostrar la estabilidad del sistema de telemanipulación en conjunto.

1.2.2. Objetivo

El objetivo de este trabajo es *obtener un modelo matemático del operador humano que represente su comportamiento y sus características dinámicas esenciales en el esquema de telemanipulación.*

1.3. Contribución

A partir de los datos sobre el rol en teleoperación y el comportamiento de reacción a fuerzas del operador humano, se propone un modelo dinámico linealizado de la dinámica del brazo, que considera los efectos del operador como una impedancia y con un esquema de control tipo PID. Este esquema se prueba en simulaciones con el esquema de teleoperación basado en superficies virtuales y se presenta una demostración de estabilidad del sistema completo de telemanipulación considerando este modelo.

1.4. Organización del texto

El Capítulo 2 cubre las herramientas y principios matemáticos fundamentales requeridos para contextualizar el problema de teleoperación con robots manipuladores: el esquema de telemanipulación, la cinemática y dinámica de los robots manipuladores, y las leyes de control. El Capítulo 3 consiste en la descripción de algunas características dinámicas del operador humano, una descripción más a detalle de su papel en el esquema de control y algunas consideraciones que se hicieron en el planteamiento del modelo. El Capítulo 4 presenta resultados de simulación utilizando este esquema y comparándolo con un esquema que se ha empleado previamente en simulación de tareas de telemanipulación. En el Capítulo 5 se hacen algunos comentarios finales.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Cinemática del robot

El problema de la cinemática es describir el movimiento del robot sin considerar las fuerzas que lo provocan. La cinemática directa describe la posición y orientación del efector final del robot en función de las variables articulares del mismo. La cinemática inversa determina los valores de las variables articulares del robot dadas la posición y orientación del efector final. La cinemática diferencial encuentra las relaciones entre la velocidad articular y las velocidades lineal y angular del efector final del manipulador.

2.1.1. Cinemática directa

La cinemática directa relaciona las coordenadas articulares \mathbf{q} con las coordenadas cartesianas \mathbf{x} y la orientación del efector final, considerando las propiedades geométricas del robot como sistema mecánico.

La cinemática directa [19] es una función vectorial que relaciona las coordenadas articulares $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ con las coordenadas cartesianas $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$ y la orientación $\mathbf{\Phi} = [\theta \ \phi \ \psi]^T$ del

efector final del robot considerando sus propiedades geométricas. Se tiene entonces

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde la función $\mathbf{f}_R(\mathbf{q})$ es la cinemática directa del robot.

2.1.2. Cinemática inversa

El problema que resuelve la cinemática inversa es el siguiente: *Dada la posición y orientación del efector final del robot, determinar los valores de las coordenadas articulares.* Este problema representa un mayor nivel de complejidad que el de la cinemática directa, dado que el sistema es inherentemente no lineal y no hay garantía de que exista la solución o de que ésta sea única. Por lo general, se recurre a métodos analíticos o geométricos que aprovechen la estructura cinemática del robot.

Dada la expresión (2.1), la cinemática inversa puede representarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}_R^{-1}(x, y, z, \theta, \phi, \psi) \quad (2.2)$$

Donde \mathbf{f}_R es la función inversa de la cinemática directa, $\mathbf{f}_R(\mathbf{q})$.

2.1.3. Cinemática diferencial

La cinemática directa relaciona las posiciones del robot en espacio articular y cartesiano. Para poder determinar la relación entre las velocidades se emplea la cinemática diferencial. Si se expresa el vector \mathbf{x} como los componentes de posición y orientación, se tiene lo siguiente

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{p}_n \\ {}^0\mathbf{\Phi}_n \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

${}^0\mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^3$ es el vector de posición del efector final con respecto a la base \mathbf{O}_0 y ${}^0\Phi_n \in \mathbb{R}^3$ es la orientación del efector final, expresada con respecto a algún eje o algún parámetro. La cinemática diferencial se obtiene derivando la expresión (2.1), es decir

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \frac{d}{dt}\mathbf{f}_R(\mathbf{q}), \quad (2.4)$$

o bien

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{f}_R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se define como el Jacobiano analítico del robot manipulador. El vector de velocidad del efector final puede expresarse de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}_n \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

donde ${}^0\boldsymbol{\omega}_n \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad angular del efector final y ${}^0\dot{\mathbf{p}}_n \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad lineal en coordenadas cartesianas.

2.2. Modelo dinámico del robot

El problema de la dinámica del robot es determinar su comportamiento cuando éste se somete a una fuerza o conjunto de torques. Se presentan las ecuaciones que corresponden al modelo dinámico del robot cuando se encuentra en movimiento libre. Posteriormente se presentan las ecuaciones cuando éste se somete a una restricción de movimiento debida al contacto con una superficie sobre la cual ejerce una fuerza.

2.2.1. Modelo en movimiento libre

La dinámica del manipulador puede modelarse por medio de la formulación de Euler-Lagrange. Se define un conjunto de coordenadas generalizadas \mathbf{q} que describe la posición y orientación del robot manipulador. Estas coordenadas generalizadas ($q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$) describen el estado del sistema respecto a un sistema de referencia. La ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = \tau_i, \quad (2.7)$$

donde $\dot{q}_i \in \mathbb{R}$ es la primera derivada respecto al tiempo de las coordenadas generalizadas q_i , \mathcal{L} es el Lagrangiano, definido como $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P}$, la diferencia entre la energía cinética \mathcal{K} y la energía potencial \mathcal{P} . \mathcal{D} es la función de disipación de Rayleigh. τ_i es la fuerza aplicada en la coordenada q_i . A partir de lo anterior se obtiene el modelo matemático del robot manipulador como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.8)$$

donde $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de fuerzas centrífugas y efectos de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un vector de efectos gravitacionales y $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de fricción viscosa.

La expresión anterior puede representarse como

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2.9)$$

donde $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ es un vector que representa los parámetros físicos del manipulador. La matriz $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es el regresor, que no depende de ningún parámetro.

2.2.2. Restricciones holonómicas

Las restricciones holonómicas hacen referencia a que el robot cumple alguna de las siguientes condiciones:

- Movimiento restringido a una superficie estática.
- Movimiento restringido a una superficie en movimiento.
- Movimiento cooperativo entre múltiples manipuladores.

El caso que se desarrolla en este trabajo es cuando la restricción es únicamente debida al contacto con una superficie estática, que se puede representar mediante la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

donde $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Derivando esta ecuación se obtiene:

$$\mathbf{J}_\phi(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

donde $\mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) = \nabla \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es el Jacobiano de la restricción.

2.2.3. Modelo en movimiento restringido

La diferencial total de la ecuación (2.10) está dada por

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{q}}d\mathbf{q} \quad (2.12)$$

El efecto de estas restricciones se presenta en la forma de una fuerza que no efectúa trabajo y se introducen en la dinámica por medio de los multiplicadores de Lagrange. La ecuación (2.7) se puede expresar, entonces, como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\mathcal{D}}{\partial\dot{q}_i} = \tau_i + \frac{\partial\phi}{\partial q_i} \lambda_i \quad (2.13)$$

donde $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ es el vector de multiplicadores de Lagrange. A partir de las ecuaciones (2.10) y (2.13) se obtiene el modelo del manipulador sometido a una restricción:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_\phi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (2.14)$$

donde $\mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) = \nabla\phi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es el Jacobiano de la restricción.

2.2.4. Propiedades del modelo dinámico

Propiedad 1. *La matriz $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ es simétrica positiva definida.* △

Propiedad 2. *La matriz $\mathbf{H} - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica.* △

Propiedad 3. *Se cumple que $\lambda_h \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{x} \leq \lambda_H \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ y $0 < \lambda_h \leq \lambda_H < \infty$, con $\lambda_h \triangleq \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$ y $\lambda_H \triangleq \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$.* △

2.3. Preliminares matemáticos

2.3.1. Principio de ortogonalización

El principio de ortogonalización explota el hecho de que la velocidad del efector final es tangente a la superficie de contacto mientras que la fuerza aplicada es normal a ésta. Consiste en la proyección del error en dos espacios ortogonales: un espacio de movimiento restringido,

donde no hay componente de fuerza y un espacio de fuerza, donde no hay desplazamiento. Esto se ilustra en la Figura 2.1. Se definen las matrices

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\phi^+(\mathbf{q})\mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{I} - \mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{I} - \mathbf{J}_\phi^+(\mathbf{q})\mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \quad (2.16)$$

donde \mathbf{J}_ϕ^+ es la pseudoinversa de Penrose de $\mathbf{J}_\phi(\mathbf{q})$.

$$\mathbf{J}_\phi^+(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{J}_\phi^T(\mathbf{q})(\mathbf{J}_\phi(\mathbf{q})\mathbf{J}_\phi^T(\mathbf{q}))^{-1} \quad (2.17)$$

Se cumple que

$$\mathbf{P}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\phi^T(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\phi^T(\mathbf{q}) \quad \mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\phi^T(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

Dado que la velocidad reside en el plano tangente al movimiento, el vector $\dot{\mathbf{q}}$ está en el espacio nulo de $\mathbf{J}_\phi(\mathbf{q})$. Esto provoca que

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}}. \quad (2.19)$$

Hecho 1. Sea \mathbf{x}_d la posición deseada para el manipulador, sujeto a la restricción $\phi(\mathbf{x}_d) = \mathbf{0}$, con el error definido como

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d \quad (2.20)$$

Si este error es lo suficientemente pequeño, se cumple que

$$\tilde{\mathbf{x}} \approx \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{x}} \quad (2.21)$$

△

2.4. El esquema de telemanipulación

En el esquema de telemanipulación interactúan cinco elementos: el operador del sistema, el robot maestro que recibe los comandos de posición y fuerza, el canal de comunicación, el manipulador esclavo y el ambiente con el que está en contacto. Un diagrama de bloques que detalla el flujo de la información se presenta en la Figura 2.2.

Un esquema de telemanipulación usualmente tiene los siguientes objetivos:

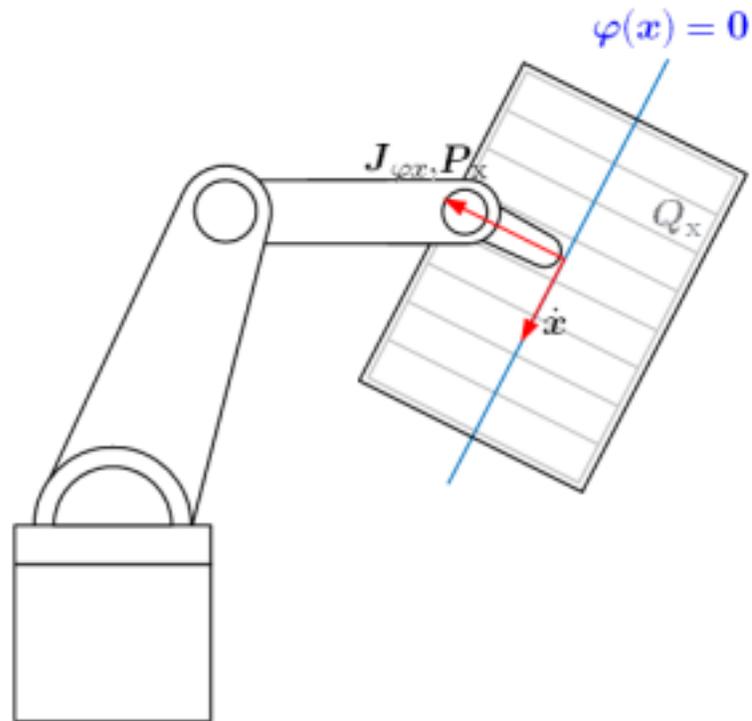


Figura 2.1: Principio de ortogonalización

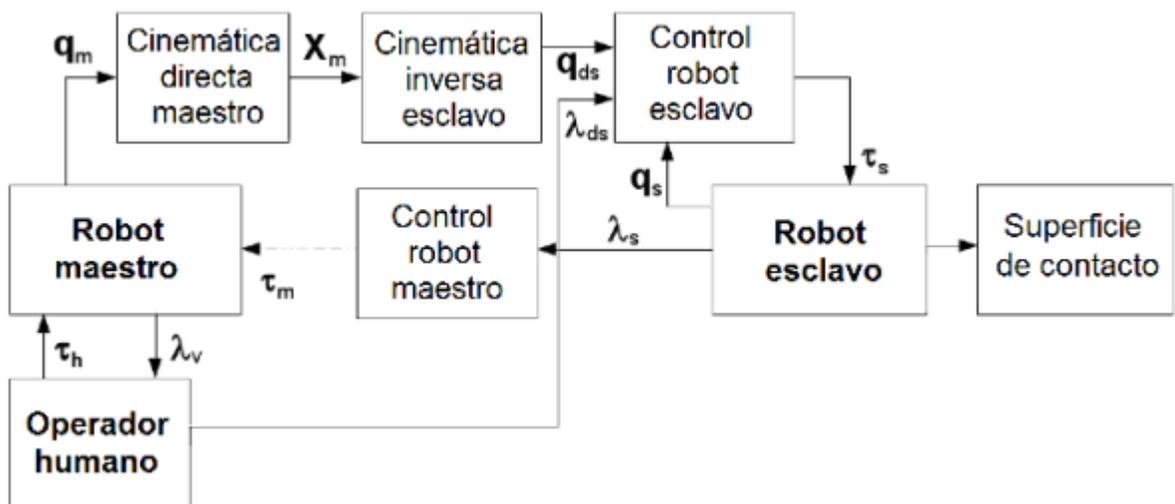


Figura 2.2: Esquema de telemanipulación.

- **Transparencia:** Que el operador no perciba la dinámica de los robots con los que interactúa.
- **Telepresencia:** Que el operador sienta la fuerza que se ejerce con el medio en contacto.

2.5. Control basado en superficies virtuales

Se presenta el esquema de control basado en superficies virtuales porque es el contexto en el que se prueba este operador humano. Se utiliza esta técnica para mostrar una implementación del modelo del humano para la prueba de un esquema de control.

Las ecuaciones que representan el comportamiento de los robots manipuladores se incluyen a continuación. La dinámica del robot maestro [20] está dada por

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{q}_m)\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{C}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m)\dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{D}_m\dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{g}_m(\mathbf{q}_m) = \boldsymbol{\tau}_m - \boldsymbol{\tau}_h \quad (2.22)$$

donde $\boldsymbol{\tau}_m \in \mathbb{R}^n$ es el torque de control del maestro y $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{R}^n$ representa la acción del operador humano. Este elemento se desarrolla a mayor detalle en el Capítulo 3.

El modelo del robot esclavo [20] es

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s)\ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s)\dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{D}_s\dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) = \boldsymbol{\tau}_s + \mathbf{J}_{\phi_s}^T \boldsymbol{\lambda}_s. \quad (2.23)$$

El objetivo de este trabajo es proponer una ecuación dinámica para emular el torque de entrada producido por el operador humano, *i.e.* $\boldsymbol{\tau}_h$, por lo tanto, las leyes de control se toman de esquemas conocidos. En particular, se emplean los resultados reportados en [20]. La ley de control correspondiente al robot maestro es

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{Y}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m, \ddot{\mathbf{q}}_m)\boldsymbol{\theta}_m + \mathbf{J}_{\phi_v}^T [k_{pv}\Delta\lambda_{vs} + k_{Fiv}\Delta F_{vs}], \quad (2.24)$$

mientras que la ley de control del robot esclavo está dada por:

$$\boldsymbol{\tau}_s = \mathbf{Q}_s \left[-k_{vs}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_s - k_{ps}\tilde{\mathbf{q}}_s - k_{is} \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}_s d\vartheta \right] - \mathbf{J}_{\phi_s}^T (-\lambda_{ds} + k_{Fis}\Delta F_s). \quad (2.25)$$

donde k_{pv} , k_{Fiv} , k_{vs} , k_{ps} , k_{is} y k_{Fis} son constantes positivas y

$$\Delta\lambda_{vs} = \lambda_v - \lambda_s \quad (2.26)$$

$$\Delta F_{vs} = \int_0^t \Delta\lambda_{vs} d\vartheta \quad (2.27)$$

$$\Delta\lambda_s = \lambda_s - \lambda_{ds} \quad (2.28)$$

$$\Delta F_s = \int_0^t \Delta\lambda_s d\vartheta \quad (2.29)$$

La ley de control del robot maestro incluye una recreación por medio de superficies virtuales del ambiente con que interactúa el robot esclavo. Esto es, para cumplir con una meta de transparencia, que es un problema de teleoperación. El control por superficies virtuales genera una superficie virtual en el robot maestro, que genera por medio de un filtro estable el multiplicador de Lagrange. Normalmente, el multiplicador de Lagrange puede encontrarse a partir de la ecuación de la dinámica restringida (2.14), cuya implementación suele resultar problemática. Para encontrar este multiplicador de Lagrange se construye un filtro estable a partir de variables conocidas, que se presenta a continuación.. El multiplicador de Lagrange se obtiene como la solución de la siguiente ecuación diferencial, como se propone en [2]

$$\frac{d}{dt}\lambda_v = \ddot{\varphi}_v(\mathbf{q}_m) + 2\zeta\omega_n\dot{\varphi}_v(\mathbf{q}_m) + \omega_n^2\varphi_v(\mathbf{q}_m); \quad \lambda_v(0) = \lambda_{v0} \quad (2.30)$$

Se tiene que $\dot{\varphi}_v = \mathbf{J}_{\varphi_v}(\mathbf{q}_m)$ y $\ddot{\varphi}_v(\mathbf{q}_m) = \mathbf{J}_{\varphi_v}\ddot{\mathbf{q}}_m + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_v}(\mathbf{q}_m)\dot{\mathbf{q}}_m$. Las ganancias ζ y ω_n son seleccionadas de tal modo que (2.30) sea estable. En las simulaciones se utiliza una restricción equivalente, que se expresa a continuación

$$\lambda_v = \dot{\varphi}_v(\mathbf{q}_m) + 2\zeta\omega_n\varphi_v(\mathbf{q}_m) + \omega_n^2 \int_0^t \varphi_v(\mathbf{q}_m) d\vartheta. \quad (2.31)$$

Bajo ciertas condiciones, se asegura que el error de seguimiento entre esta fuerza virtual y la fuerza experimentada por el robot esclavo se vuelve arbitrariamente pequeño.

Capítulo 3

Modelos para describir al humano

En el análisis y diseño de sistemas que interactúen con operadores humanos es conveniente tomar en cuenta sus propiedades dinámicas para contribuir al diseño del sistema. Se menciona en [14] que el comportamiento dinámico del humano es crucial en la determinación general del desempeño de control y estabilidad del sistema. Además, un controlador diseñado sin considerar al humano en el lazo de control puede tener errores o hacerse completamente inválido cuando el humano se encuentra en el lazo de control. Esto es porque, bajo ciertas condiciones que pueden depender de la tarea, el entrenamiento que tiene el operador, la información de realimentación visual o kinestésica, el comportamiento reactivo del humano puede amplificar los errores de control.

Modelar al ser humano es por sí misma una tarea enorme. Los mecanismos que gobiernan la forma en que el humano se mueve o decide ese movimiento aún son, en cierta medida, desconocidos. Se requiere acotar la acción o fisicalidad del humano de forma adecuada para su estudio y análisis; acotar el problema de forma adecuada.

3.1. El rol del humano en el esquema de telemanipulación

El operador humano recibe información de fuerza por medio del robot maestro y es quien genera la posición y fuerza de referencia para el robot maestro. En los modelos matemáticos que se elaboran (y en el que se utiliza para el esquema de telemanipulación) no se considera

la información de posición del manipulador esclavo entre las entradas que recibe el humano.

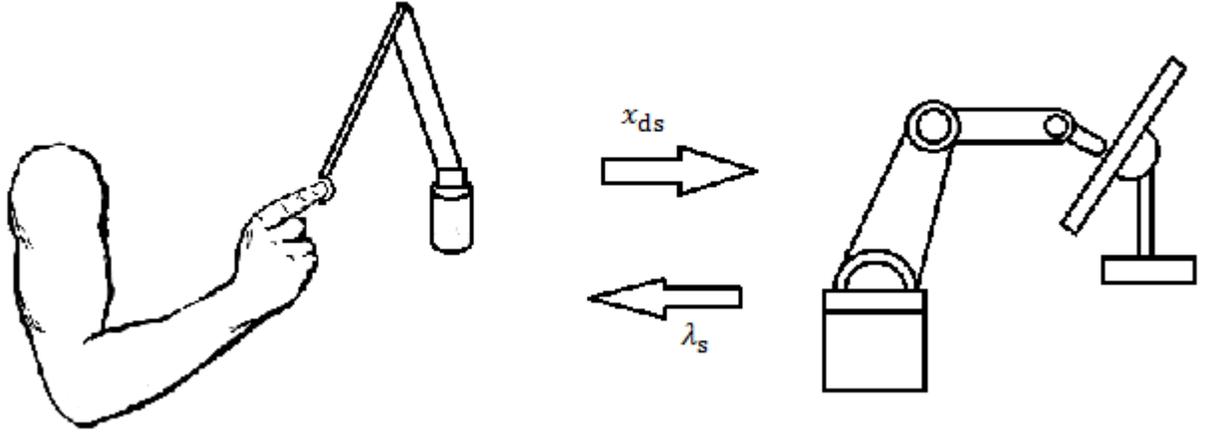


Figura 3.1: Esquema de telemanipulación.

Gomi [8] menciona que los valores de rigidez del brazo humano determinados experimentalmente varían bastante dependiendo del sujeto, la tarea, el aparato experimental y los patrones de perturbación. Un factor que afecta el desempeño del operario en un sistema de telemanipulación es el entrenamiento y familiaridad que éste tiene con la tarea que se lleva a cabo. En [22] se investiga la forma en que el humano efectúa una tarea en un ambiente que no cambia pero es inicialmente desconocido. De acuerdo con mediciones antes y después de rotar una manivela, el perfil de posición, velocidad y aceleración del humano (después del entrenamiento, que fue realizar la misma tarea unas 500 veces) es similar a las trayectorias de posición que resultan cuando se diseña una trayectoria por medio de polinomios de quinto orden para un robot manipulador.

Se requiere hacer las siguientes suposiciones respecto al comportamiento del operador humano:

Suposición 1. *Se desprecia la dinámica de la mano: el operador sujeta rígidamente el efector final del robot maestro. Esto permite considerar equivalentes las posiciones cartesianas de la mano del humano y la posición del robot.* △

Suposición 2. *Se sigue lentamente una trayectoria suave. Esto hace que $\dot{\mathbf{Q}} \approx \mathbf{0}$.* △

Suposición 3. *El humano tiene un error en estado estacionario que tiende a cero.* △

Suposición 4. *El humano tiene suficientes grados de libertad para llevar a cabo la tarea. La tarea está dentro del espacio de trabajo del operador.* △

En este capítulo se presentan valores de la impedancia del ser humano reportados en la literatura. La relativa abundancia de estos resultados conduce, como una primera aproximación, a considerar representar al operador humano como una impedancia lineal. La impedancia que describen estos experimentos se obtuvo en movimiento en el eje normal al plano anatómico frontal o en el plano anatómico transversal.

Se desea conseguir un modelo capaz de representar movimiento en tres dimensiones; esto es con el objetivo de representar al operador en tareas de movimiento en un espacio tridimensional.

Un concepto del que conviene desprenderse desde temprano en el proceso de obtención del modelo es la idea de generar un modelo general del operador humano. Buerger, *et al.* [4] postulan una idea similar a la de Gomi: si bien la interacción de un robot con un agente humano es esencialmente interacción con un ambiente desconocido (o con errores en los parámetros cuando se le conoce), se sabe que este ambiente reside dentro de límites específicos. Las propiedades dinámicas del humano varían considerablemente entre sujetos, posiciones (y por lo tanto, niveles de activación muscular), pero esta variación está acotada. El brazo humano es incapaz de presentar ciertos comportamientos extremos.

Por otro lado, basándose en los resultados cualitativos de Fitts y Sheridan, en [16] se propone que no es posible obtener un modelo del operador humano considerado como parte de un sistema físico y, por lo tanto, no es posible aplicar técnicas de teoría de control clásico o moderno para analizar completamente el sistema humano-máquina.

En un sistema de interacción robot-humano es difícil probar matemáticamente la estabilidad cuando el humano está dentro del lazo de control [6]. Para un sistema de control por impedancia, mostraron que el comportamiento del robot se volvía inestable si se consideraba una baja masa y amortiguamiento y la rigidez del humano se hacía muy alta.

3.2. Características físicas del operador humano

3.2.1. Cinemática del brazo humano

El brazo del operador humano se puede expresar como una cadena cinemática de acuerdo a la Figura 3.2. El brazo del humano tiene tres articulaciones en el hombro, una en el codo, tres en la muñeca. Por lo tanto, se cuenta con siete grados de libertad para tareas de manipulación. El humano es un sistema redundante, lo que se refleja en la versatilidad de tareas que puede llevar a cabo. Como es un sistema redundante, el Jacobiano del humano considerando siete grados de libertad tiene un espacio nulo.

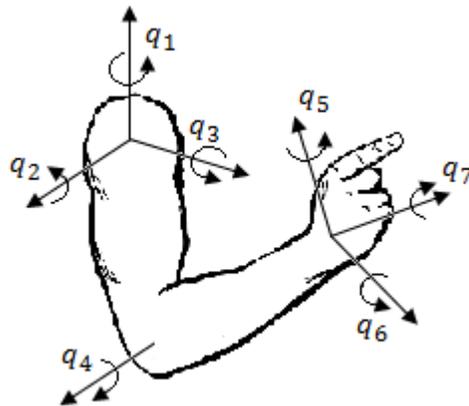


Figura 3.2: Articulaciones del brazo.

Se desea alcanzar un compromiso entre la calidad y características del humano que se pueden representar en el modelo dinámico y lo que es posible implementar dentro de recursos informáticos razonables. El modelo del brazo del operador humano puede detallarse tanto como se desee en función de la información que se conoce sobre el operador humano, tanto físicamente como los procesos a nivel del sistema nervioso central, pero el problema tiende a aumentar en complejidad y se aleja de las acotaciones que se plantearon en un principio.

3.3. Modelos dinámicos

Existen diversas formas de caracterizar la acción dinámica del brazo de un humano en interacción con un sistema mecánico. Las dos formas usuales son considerar al humano como una impedancia (generalmente dentro de análisis de control por impedancia) y cuando se modela al brazo del humano como un sistema Lagrangiano.

La dinámica de una extremidad humana en particular es casi imposible de conocer exactamente en un momento dado, no se puede utilizar un modelo exacto. Sin embargo, como los brazos humanos son cinemática y dinámicamente similares, pueden representarse en términos de una función nominal $Y_n(s)$ que representa su dinámica esencial y una desviación acotada de esta función nominal $w(s)\delta(s)$ [4]. Así, pues, se tiene como una primera representación de la acción humana

$$Y(s) = Y_n(s) + w(s)\delta(s) \quad (3.1)$$

La adaptación de un modelo matemático al operador humano parte de [8], donde se plantea que el operador humano puede modelarse de acuerdo con la siguiente ecuación diferencial

$$\psi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \tau_{\text{in}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}) + \tau_{\text{ext}} \quad (3.2)$$

donde $\psi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ es una función que describe la dinámica del brazo del humano, $\tau_{\text{in}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u})$ es el torque generado internamente por la acción muscular, que depende de la posición y velocidad articulares \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ y \mathbf{u} es una función de entrada generada en el sistema nervioso central y τ_{ext} es un torque externo que proviene del medio.

En [1] se identifica un modelo de la impedancia del humano en función de coordenadas cartesianas a partir de la ecuación

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_e \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_e (\mathbf{x} - \mathbf{x}_u) = \mathbf{f} \quad (3.3)$$

Donde \mathbf{M}_e , \mathbf{B}_e , $\mathbf{K}_e \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son matrices que representan la inercia, viscosidad y amortiguamiento del brazo humano, respectivamente, y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$ representan la posición del efector final y el vector de fuerza con respecto al sistema de referencia del humano $\langle \mathbf{x}_{h0}, \mathbf{y}_{h0}, \mathbf{z}_{h0} \rangle$ mientras que \mathbf{x}_u es la posición de equilibrio o posición de trabajo del brazo para la componente de rigidez.

Esta metodología es comparable con la de Mobasser, que modela la dinámica de la articulación del codo de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \boldsymbol{\tau}^*(t) + [\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\lambda}(t))\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda}(t))\Delta\mathbf{q}(t)] \quad (3.4)$$

donde $\boldsymbol{\tau}^*(t)$ corresponde a un torque de fondo de baja frecuencia, y $\boldsymbol{\lambda}(t)$ es una función que determina el estado y punto de operación y que está determinada por los niveles de activación muscular, que se representan en niveles de electromiogramas. \mathbf{M} , \mathbf{B} y \mathbf{K} son matrices de inercia, fricción viscosa y amortiguamiento asociadas a las coordenadas articulares del brazo del operador. Puede observarse que, si se considera que $\boldsymbol{\tau}^*(t)$ corresponde a $\omega(s)\delta(s)$ y $Y_n(s)$ corresponde a $[\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\lambda}(t))\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda}(t))\delta\mathbf{q}(t)]$, las ecuaciones (3.1) y (3.4) son análogas.

3.3.1. Impedancia del brazo

En algunos estudios se busca identificar la impedancia del operador humano cuando se trata de tareas de movimiento restringido porque está en contacto con un dispositivo electro-mecánico) o en tareas en las que el operador humano requiere de preservar una posición.

La metodología en estos estudios consiste en restringir al sujeto lo mejor posible Por medio de arreglos de arneses, cintos, vendas con yeso para suprimir la actividad de grupos musculares no asociados directamente con el brazo, lo cual corresponde con las consideraciones que se han hecho para tratar un modelo del operador restringido a una cierta parte de la anatomía. Se modela al operador humano como un sistema masa-resorte-amortiguador.

Hogan [9] menciona que la impedancia del brazo puede aumentarse tensando los músculos, activando simultáneamente los pares de músculos antagonistas de las articulaciones. Respecto a los valores relacionados con la impedancia, Lanman reportó que la rigidez aumenta desde un mínimo inferior a 2 [Nm/rad] a un máximo de 400 [Nm/rad]. Hayez y Hatze reportaron una rigidez mínima entre 1 y 1.4 [Nm/rad], mientras que Cannon y Zalahak reportaron una rigidez máxima mayor a 350 [Nm/rad]. De estas medidas se obtiene que el codo puede variar su rigidez en dos órdenes de magnitud. De acuerdo con Colgate [9] una impedancia aparentemente pasiva es condición necesaria y suficiente para que un sistema estable activamente controlado

permanezca estable en contacto con un ambiente arbitrariamente pasivo. Colgate sugiere que el brazo humano está cuidadosamente sintonizado para preservar la estabilidad bajo un amplio conjunto de condiciones.

Woo [21] hace un análisis de estabilidad basado en pasividad que se basa en valores experimentales hallados para sintonizar un dispositivo háptico, en una tarea con movimiento únicamente en dirección ortogonal al plano anatómico frontal. Woo determina los rangos de viscosidad e impedancia que puede presentar el operador humano para preservar la pasividad del modelo y del sistema.

La consideración del agarre rígido facilita la implementación del modelo. En Speich [11] se comparan los valores encontrados en cinco pruebas diferentes, considerando un agarre no rígido, y se utiliza un modelo de cinco parámetros.

De acuerdo con Speich, este modelo corresponde mejor al comportamiento del humano que el modelo masa-resorte-amortiguador. Si bien este modelo es de segundo orden, Gomi [8] menciona que se requiere al menos un modelo de cuarto orden para emular satisfactoriamente el comportamiento del humano. De forma similar, las mediciones de impedancia del codo realizadas por Murray mostraron que un modelo de segundo orden con parámetros que variaran en función de la activación muscular y el ángulo del codo era incapaz de reproducir las observaciones experimentales. La caracterización competente menos compleja requirió un modelo de cuarto orden [9]. Los parámetros identificados para los modelos de cuarto orden, sin embargo, no corresponden a un modelo que permita representar fuerzas en tres direcciones.

En cuanto a modelos utilizados en esquemas de telemanipulación, García Valdovinos *et al.* [20] consideran la acción del operador únicamente como un vector de fuerzas en un plano.

Mobasser y Hashtrudi-Zaad [17] presentan resultados que sitúan la rigidez del codo entre 0 y 50 y una viscosidad cercana a 1 [Ns/m]. La inercia es pequeña, comprendida entre 0.0779 y 0.1181 [kgm²], que corresponde con los valores encontrados generalmente. Las masas promedio identificadas para el brazo del operador suelen ser cercanas a los 3.5 [kg] [5]. Duchaine y Gosselin [6] reportan el valor de amortiguamiento asociado al codo de -10 a 60 [Ns/m].

Se condensan algunos valores comunes en el Cuadro 3.1.

En lo que concierne a la mecánica que genera las fuerzas del operador humano, se considera

Autores	Rigidez [N/m]	Viscosidad [Ns/m]
Lacquaniti et al. 1982	20-40	
Mussa-Ivaldi et al. 1985	(13-41)	
Gottlieb et al. 1986		0.6
MacKay et al. 1986	(2-20)	(0.08-0.3)
Flash 1987	(27-47), 62-89	1.8-7.2
Lacquaniti y Maioli 1989	30-100	
Flash y Mussa-Ivaldi 1990	10-40	
Latash y Gottlieb 1992	8-26	
Bennett et al. 1993	(16-18), 2-15	0-0.7
Lacquaniti et al. 1993	(30-50), 18-46	(0.8-1.2), 0.7-1.5
Gomi y Kawato 1995	(10), 10-20	

Cuadro 3.1: Valores identificados de rigidez y viscosidad [3].

que éste emite fuerza directamente en las direcciones que se requiere. En [12] y [15] se describe la dinámica de grupos musculares, se considera la acción de pares de músculos antagonistas, activados ya sea de forma electrónica o neumática para proporcionar movimiento a las articulaciones de los humanos modelados. En la implementación de un modelo, considerar esta actividad presenta varios inconvenientes, pues se requiere, entonces, modelar la dinámica del brazo humano considerando una cantidad mayor de grados de libertad y se necesita introducir al modelo la dinámica del mecanismo de activación muscular.

En [16] se propone que se puede representar la acción del humano por medio de un torque que incide directamente en las articulaciones del robot maestro. Por medio del principio de ortogonalización, la acción del humano se separa en una parte de posición y una parte de fuerza. La acción correctiva en posición es del tipo controlador PID, mientras que la acción en fuerza es como un controlador tipo PI.

$$\boldsymbol{\tau}_h = \mathbf{Q}_v \left[k_{ph} \tilde{\mathbf{q}}_m + k_{vh} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_m + k_{ih} \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}_m d\vartheta \right] + \mathbf{J}_{\phi v}^T [k_{fh} \Delta \lambda_{vd} + k_{Fih} \Delta F_{vd}] \quad (3.5)$$

Este modelo es en coordenadas articulares del robot maestro. Una interpretación de este planteamiento resulta en que estos modelos ofrecen poca información sobre el operador humano. Como los torques están en el sistema de referencia del robot, y no del operador, se obtiene poca información respecto qué está haciendo o qué está experimentando el usuario del sistema. Si bien en este esquema y en el esquema que se propone más adelante se consigue el mismo resultado (modelar el torque que el operador humano utiliza para mover al robot maestro), el modelo del humano no requiere de los mismos grados de libertad que el robot maestro.

3.4. Modelo propuesto

En el modelo propuesto, el modelado es respecto a los errores de posición en coordenadas cartesianas. Se introduce un término que busca capturar información sobre la dinámica del operador humano adicionalmente a los efectos de control.

Esta dinámica corresponde con los experimentos de Speich [11] y Artemiadis [1], considerando la ecuación (3.2).

Respecto a la acción que tiene el humano, se hace la siguiente suposición:

Suposición 5. *El operador humano genera un error cero durante el seguimiento de trayectoria para llegar a la posición deseada.* \triangle

Para una tarea razonable, el operador lleva el efector final del robot maestro a la posición que desea y por este hecho se considera que se logra error de seguimiento cero. Suponer que el operador sujeta de forma rígida el efector final del robot permite considerar equivalentes las posiciones cartesianas de ambos y despreciar la dinámica que pudiera asociarse a la mano y la forma en que el operador sujeta el efector final. El humano es un elemento correctivo del robot maestro, esencialmente, es un elemento de control.

Con base en el modelo dado en [16] se propone un modelo del operador con las siguientes características:

- Coordenadas cartesianas - Se eligió modelar en función del error cartesiano porque

la relación cartesiana es más intuitiva que la formulación en coordenadas articulares. Se puede representar de una forma más fácil de interpretar la acción del humano en coordenadas cartesianas que en coordenadas articulares del robot maestro. Esto se debe a que un modelo que considere únicamente los torques que el humano provoca puede considerarse como un modelo en el cual el brazo del humano está sobrepuesto al robot maestro. Por lo general, los grados de libertad del robot maestro no corresponden a los del brazo del operador, como se puede ver en la Figura 3.3. Los torques en coordenadas del robot maestro no tienen un sentido físico verdadero respecto a las coordenadas del brazo del operador humano. Una manera de evitar esta situación es utilizar un modelo que considere coordenadas cartesianas.

- Modelo de segundo orden - Tomando en cuenta las observaciones mencionadas en la Sección 3.3.1 se propone un modelo de segundo orden debido a que la cantidad de información disponible es mucho más abundante y resulta mas sencillo proponer un modelo que pueda utilizar la información con la que se cuenta. Se dispone de diferentes valores identificados para la impedancia del brazo y los rangos en los que éstos generalmente se encuentran, lo que permite escoger valores para las pruebas de simulación.
- Ley de control - En [18] se utiliza un control tipo PID en un mecanismo de rehabilitación para el brazo, de modo que se lleve al paciente de modo estable y con un movimiento natural a seguir una trayectoria deseada. Se selecciona un control tipo PID basados en este trabajo y en [16].

Se propone modelar al operador humano con un torque que corresponde a su dinámica y un torque que corresponde a la acción de control que el operador ejerce sobre el robot maestro. La dinámica asociada al humano se modela en términos del error en coordenadas cartesianas. La siguiente relación representa entonces la acción del operador humano en el esquema de telemanipulación:

$$\boldsymbol{\tau}_h = \boldsymbol{\tau}_{hd} + \boldsymbol{\tau}_{hc} \quad (3.6)$$

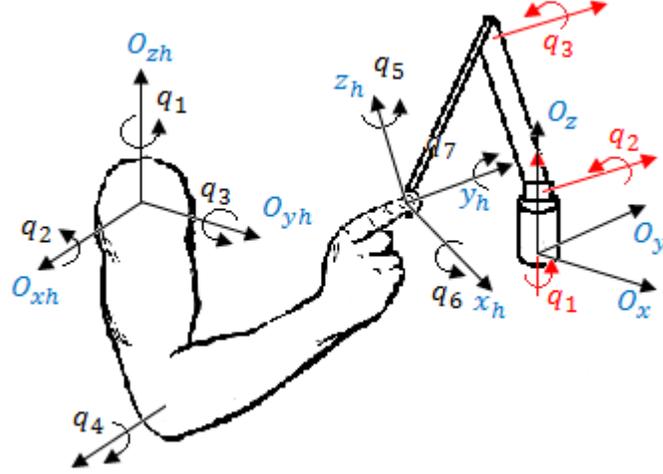


Figura 3.3: El efector final del robot maestro coincide con la posición cartesiana de la mano.

donde

$$\boldsymbol{\tau}_{hd} = \mathbf{J}_m^T (\mathbf{I}_h \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_m + \mathbf{D}_{vh} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_m + \mathbf{D}_{ph} \tilde{\mathbf{x}}_m) \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{hc} = \mathbf{J}_m^T \mathbf{Q}_x \left(k_{vh} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_m + k_{ph} \tilde{\mathbf{x}}_m + k_{ih} \int_0^t \tilde{\mathbf{x}} d\vartheta \right) - \mathbf{J}_m^T \mathbf{J}_{\phi vx}^T (k_{fh} \Delta \lambda_{vd} + k_{Fih} \Delta F_{vd}) \quad (3.8)$$

$\boldsymbol{\tau}_{hd}$ es la dinámica del brazo del operador, donde $\mathbf{I}_h, \mathbf{D}_{vh}, \mathbf{D}_{ph} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son matrices que representan los efectos de inercia, fricción viscosa y amortiguamiento, respectivamente. \mathbf{I}_h es una matriz de rango completo. $\boldsymbol{\tau}_{hc}$ representa los efectos de control que el operador humano ejerce sobre el robot maestro. $k_{vh}, k_{ph}, k_{ih}, k_{fh}$ y k_{Fih} son constantes positivas y

$$\Delta \lambda_{vd} = \lambda_v - \lambda_{ds} \quad (3.9)$$

$$\Delta F_{vd} = \int_0^t \Delta \lambda_{vd} d\vartheta \quad (3.10)$$

Observación 1. Es importante resaltar que el modelo propuesto está asociado con el esquema del control de la Sección 2.5. △

Capítulo 4

Resultados de simulación

En este capítulo se muestran los resultados de simulación del esquema del operador humano presentado en el Capítulo 3 en un esquema de telemanipulación. El robot maestro es un robot tipo Phantom. El robot esclavo es un robot A465 de *CRS Robotics*, se emplean únicamente tres articulaciones.

La restricción está dada por una esfera normalizada de la forma

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{(x-i)^2}{2r} + \frac{(y-j)^2}{2r} + \frac{(z-k)^2}{2r} = 0 \quad (4.1)$$

El movimiento deseado es en el plano $x-z$ y está dado por un polinomio de quinto orden en x . La fuerza deseada está dada por la siguiente expresión:

$$\lambda_{ds} = 50 (e^{-2t}) + 10[N] \quad (4.2)$$

El esquema propuesto se compara con el esquema descrito en la ecuación (3.5).

4.1. Demostración de estabilidad

Para la demostración de estabilidad del sistema de teleoperación utilizando el modelo propuesto se introduce el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en el Apéndice A.

Teorema 1. *Para el sistema (2.22) y (2.23) con las leyes de control (2.24) y (2.25) y el modelo del operador (3.6), los errores de seguimiento de posición ($\tilde{\mathbf{q}}_m, \tilde{\mathbf{q}}_s, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_m, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_s$) y fuerza*

$(\Delta\lambda_s, \Delta F_s, \Delta\lambda_{vs}, \Delta F_{vs}, \Delta\lambda_{vd}, \Delta F_{vd})$ pueden hacerse arbitrariamente pequeños con una adecuada selección de ganancias siempre que los errores de seguimiento iniciales del maestro y del esclavo sean suficientemente pequeños para que se sostenga el Hecho 1. \triangle

4.2. Resultados de simulación

En esta sección se presentan los resultados de simulación del modelo propuesto del operador humano. Las simulaciones corresponden a dos pruebas: en un primer caso se utiliza el esquema del humano como un PID, como se muestra en la ecuación (3.5). En el segundo caso, se presentan los resultados utilizando el modelo propuesto en el Capítulo 3, , como se muestra en la ecuación (3.6), que incluye un elemento que representa efectos dinámicos asociados al brazo del operador.

En el primer esquema se tienen los siguientes valores para las ganancias de los controladores: $k_{pv} = 0.005$, $k_{Fiv} = 0.001$, $k_{vs} = 70$, $k_{ps} = 600$, $k_{is} = 1$ y $k_{Fis} = 20$. Para el control PID que representa al operador se utilizaron las siguientes ganancias: $k_{ph} = 1$, $k_{vh} = 0.01$ y $k_{ih} = 0.01$. Los resultados que corresponden a este esquema se muestran en las Figuras 4.1 y 4.2.

Las Figuras 4.3 y 4.4 corresponden al esquema propuesto, en que la dinámica del humano se representa como un controlador tipo PID y una componente de dinámica del brazo. Estas simulaciones se realizaron con los siguientes valores para las ganancias de los controladores: $k_{pv} = 0.005$, $k_{Fiv} = 0.001$, $k_{vs} = 70$, $k_{ps} = 600$, $k_{is} = 1$ y $k_{Fis} = 20$. Para los valores del control e impedancia del humano se tiene: $k_{phx} = 180$, $k_{vhx} = 1$ y $k_{ihx} = 0.05$,

$$\mathbf{I}_h = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{vh} = \begin{bmatrix} 1.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{ph} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Los valores de la matriz \mathbf{I}_h se seleccionan dentro del rango de valores reportados por Artemiadis, *et al.* [1] para el brazo completo, se observa que son superiores a los reportados en [17] para la articulación del codo. Los valores de viscosidad (\mathbf{D}_{vh}) corresponden con los

valores inferiores del rango identificado por Flash [3]. Los valores de la matriz de rigidez (\mathbf{D}_{ph}) se encuentran dentro de los rangos de valores que se pueden observar en el Cuadro 3.1.

En ambas simulaciones el tiempo de muestreo es de 0.001 [s].

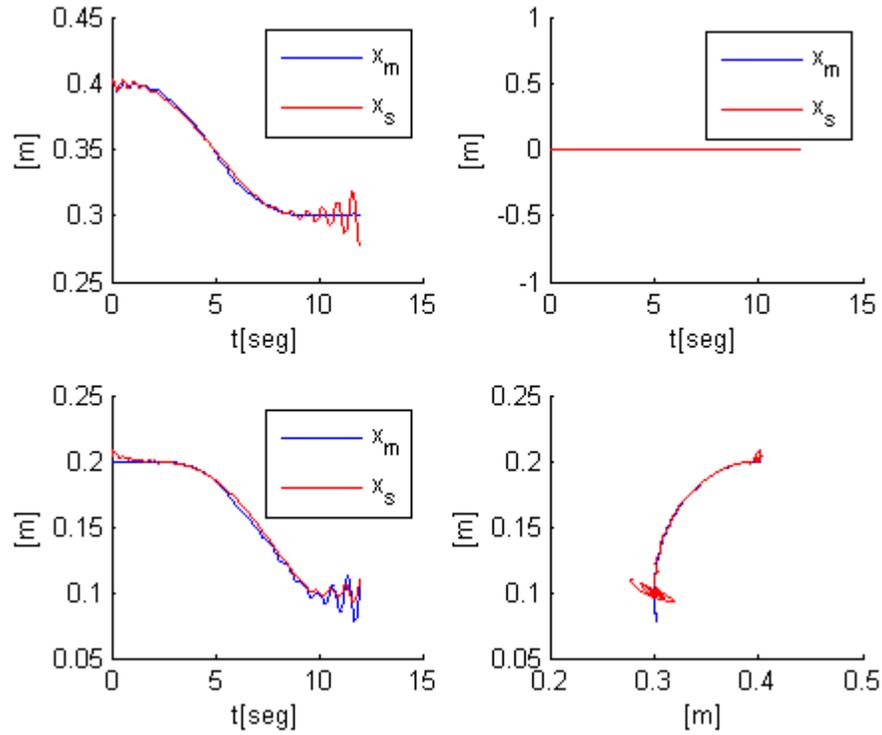


Figura 4.1: Posición cartesiana en el esquema PID (3.5).

Los resultados de posición del primer modelo se presentan en la Figura 4.1. Las trayectorias de fuerza se muestran en la Figura 4.2. En la Figura 4.3 se presenta el seguimiento de posición para el esquema propuesto con impedancia del operador humano. La trayectoria de fuerza se presenta en la Figura 4.4.

En las Figuras 4.1 y 4.3 se muestran las gráficas de seguimiento de posición en coordenadas cartesianas. Las gráficas muestran el seguimiento de posición en los ejes x , y y z , así como la posición en el plano $x - z$, sobre la restricción. En las Figuras 4.2 y 4.4 se muestran las gráficas de la fuerza deseada λ_{ds} , la fuerza que ejerce el robot esclavo λ_s y la fuerza que el

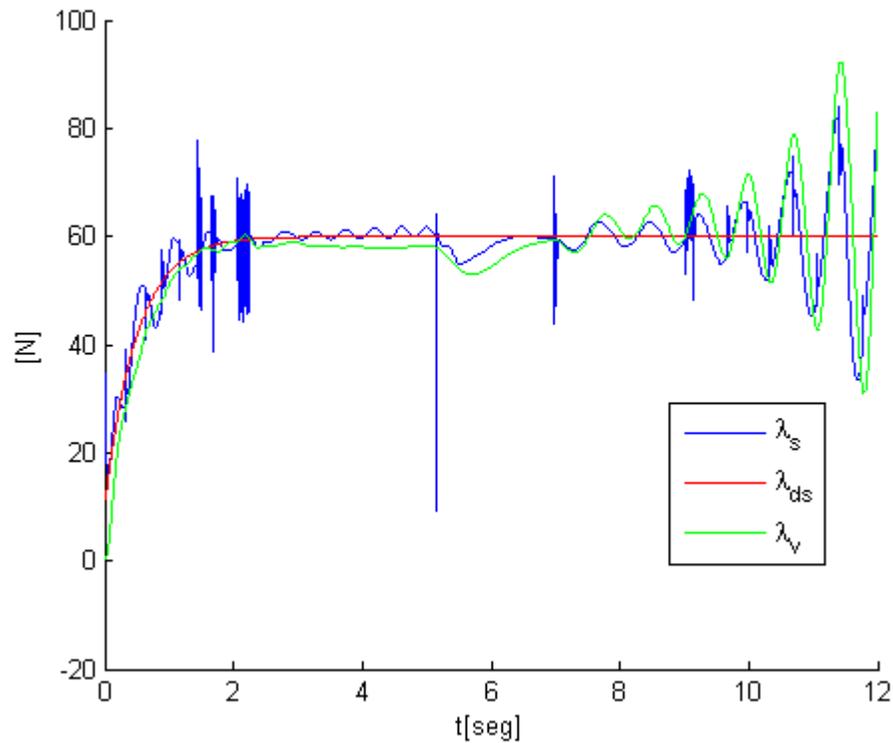


Figura 4.2: Fuerza en el esquema PID (3.5).

operador recibe por medio de la superficie virtual λ_v .

Los dos esquemas empleados difieren en que el primero emplea coordenadas articulares del robot maestro y el segundo, el esquema propuesto, se modela a partir del error en coordenadas cartesianas. El efecto del operador humano es más fácil de interpretar como una fuerza que como un torque, a pesar de que se cuenta con el Jacobiano para mapear de un espacio al otro. Esto permite observar de una manera más intuitiva cómo se desarrolla la acción en el operador humano. Se puede observar que el comportamiento en ambos casos es similar, la principal diferencia entre estos dos esquemas consiste en la información que se puede obtener cuando el sistema está caracterizado en términos del error en coordenadas articulares. Por su parte, esta información, para ser de utilidad en el análisis del efecto que provoca en el operador, requiere reinterpretarse nuevamente para compararla con los límites de fuerza que

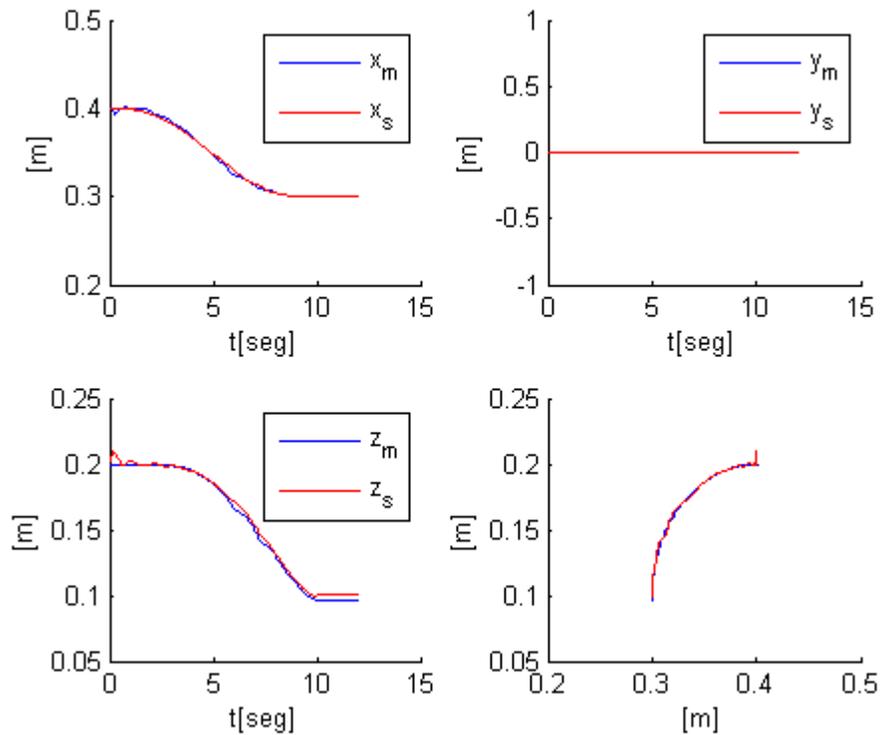


Figura 4.3: Posición cartesiana en el esquema propuesto PID con dinámica del brazo del operador (3.6).

puede desempeñar un operador.

En esencia, lo que se desea obtener con estos modelos es que el elemento que representa al humano pueda dar al robot maestro la posición y fuerza deseadas para el experimento. En un caso real, el operador humano suele generar la trayectoria deseada al instante durante la operación y, aún cuando se aparte de la restricción, el sistema lo considera como la posición deseada. En estas simulaciones, cuando la trayectoria del robot maestro se aleja de la restricción, es debido a un mal desempeño del controlador ocasionado por la sintonización.

En ambos resultados aún existen errores debidos a la sintonización de los controladores. Si bien los resultados demuestran que es posible simular cómo el operador humano se aleja de la restricción, éste no es un efecto que se busca reflejar en estas simulaciones.

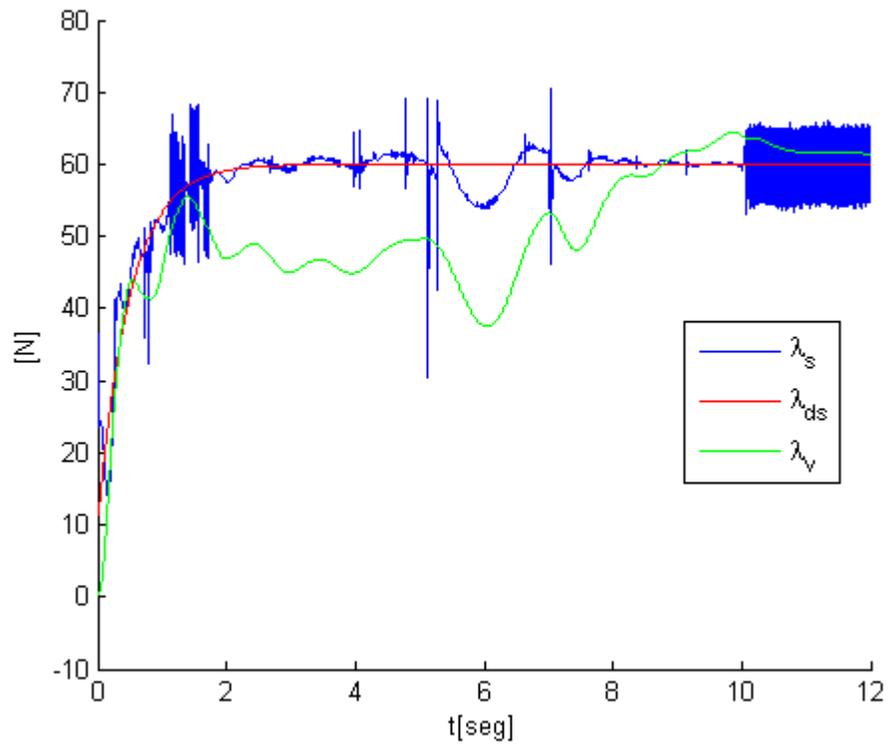


Figura 4.4: Fuerza en el esquema esquema propuesto PID con dinámica del brazo del operador (3.6).

Se encontró que en la impedancia del humano los factores de viscosidad y amortiguamiento tienen un rol más crítico en el proceso de sintonización del modelo. La inercia, mientras se mantenga dentro de los límites establecidos, no presenta grandes repercusiones en el comportamiento del sistema.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Comentarios finales

En este trabajo se propuso un modelo que representara la dinámica del operador humano dentro de un sistema de telemanipulación. La representación del humano fue por medio de una impedancia modelada en el espacio de coordenadas cartesianas y un esquema de control, PID para el subespacio de posición y PI para el subespacio de fuerza. El modelo se probó en simulación con un esquema existente y se presentaron los resultados. El esquema del humano logró representar la actividad del operador como elemento de control en un esquema de telemanipulación.

5.2. Trabajo futuro

Aún resta la validación experimental del modelo. Como se mencionó, el conocimiento del modelo del operador tiene grandes repercusiones en la construcción, diseño y elaboración de un sistema de telemanipulación.

Comportamiento complejo: El modelo que se emplea reduce a su mínima expresión el papel que tiene el operador humano en el esquema de telemanipulación. Es importante reflejar algunos de los comportamientos que se desprenden de la forma más compleja y errática en que un operador real trabaja con un sistema de telemanipulación.

Apéndice A

Demostración de estabilidad del controlador

Para la demostración de estabilidad se requiere de las ecuaciones de dinámica de los manipuladores (2.22), (2.23), las leyes de control (2.24), (2.25) y la dinámica del humano (3.6), además del siguiente teorema auxiliar.

Teorema 2. *Sea $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen y sea $V : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable, tal que*

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0 \quad (\text{A.2})$$

$\forall t \geq 0$ y $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}$, donde α_1 y α_2 son funciones de la clase K , $W_3(\mathbf{x})$ es una función continua positiva definida y con $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua por intervalos en t y localmente Lipschitz en \mathbf{x} . Se selecciona $r > 0$ tal que $\mathbb{B}_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\} \subset \mathbb{D}$ y supóngase que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) \quad (\text{A.3})$$

Entonces, existe una función β clase KL y para cada estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ que satisfaga

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) \quad (\text{A.4})$$

existe $T \geq 0$ (que depende de $\mathbf{x}(t_0)$ y μ) tal que la solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ satisface:

$$\|\mathbf{x}\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (\text{A.5})$$

$$\|\mathbf{x}\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (\text{A.6})$$

Además, si $\mathbb{D} = \mathbb{R}^n$ y α_1 es de la clase K_∞ , entonces (A.5) y (A.6) son válidas para cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ sin restricción sobre qué tan grande es μ .

△

De acuerdo con la Suposición 2 se satisface

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\dot{\hat{\mathbf{x}}}, \quad (\text{A.7})$$

lo que permite aproximar $\frac{d}{dt}\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{q}_i = \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{q}_i \approx \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i$.

Si se satisface el Hecho 1, la ley de control (2.25) del esclavo se convierte en

$$\boldsymbol{\tau}_s = -k_{vs}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_s - k_{ps}\tilde{\mathbf{q}}_s - k_{is}\mathbf{Q}_s \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}_s d\vartheta - \mathbf{J}_{\phi_s}^T(-\lambda_{ds} + k_{Fis}\Delta F_s) \quad (\text{A.8})$$

Se define a continuación

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_s = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_s + k_{is}\tilde{\mathbf{q}}_s \quad (\text{A.9})$$

donde k_{is} es una constante positiva. De este modo, la ecuación (A.8) equivale a

$$\boldsymbol{\tau}_s = -k_{vs}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_s - \bar{k}_{is}\mathbf{Q}_s\boldsymbol{\sigma}_s - \mathbf{J}_{\phi_s}^T(-\lambda_{ds} + k_{Fis}\Delta F_s) \quad (\text{A.10})$$

con $k_{ps} = k_{vs}k_{ls} + \bar{k}_{is}$ y $k_{is} = \bar{k}_{is}k_{ls}$. Se define

$$\dot{\mathbf{q}}_{rs} = \dot{\mathbf{q}}_{ds} - k_{ls}\tilde{\mathbf{q}}_s - k_{vs}^{-1}\bar{k}_{is}\mathbf{Q}_s\boldsymbol{\sigma}_s + k_{vs}^{-1}\mathbf{J}_{\phi_s}^T\{\Delta\lambda + k_{Fis}\Delta F_s\} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{s}_s = \dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{q}}_{rs} = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_s + k_{vs}^{-1}\bar{k}_{is}\mathbf{Q}_s\boldsymbol{\sigma}_s}_{\mathbf{s}_{ps}} - \underbrace{k_{vs}^{-1}\mathbf{J}_{\phi_s}^T\{\Delta\lambda + k_{Fis}\Delta F_s\}}_{\mathbf{s}_{Fs}} \quad (\text{A.12})$$

A partir de las ecuaciones (2.23) y (A.10)-(A.12) la dinámica en lazo cerrado del esclavo es

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s)\dot{\mathbf{s}}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s)\mathbf{s}_s + \mathbf{K}_{Dvs}\mathbf{s}_s = -\mathbf{y}_a \quad (\text{A.13})$$

donde $\mathbf{K}_{Dvs} = \mathbf{D}_s + k_{vs}\mathbf{I}$ y

$$\mathbf{y}_a \triangleq \mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s)\ddot{\mathbf{q}}_{rs} + \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s)\dot{\mathbf{q}}_{rs} + \mathbf{D}_s\dot{\mathbf{q}}_{rs} + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) \quad (\text{A.14})$$

Tomando en cuenta el Hecho 1, las ecuaciones (2.24) y (3.6)-(3.8) en lazo cerrado con (2.22) resultan en

$$\underbrace{\mathbf{J}_m^T \left[\mathbf{I}_h \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_m + \mathbf{K}_{Dv} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_m + \mathbf{K}_{Dp} \tilde{\mathbf{x}}_m + k_{ih} \mathbf{Q}_x \int_0^t \tilde{\mathbf{x}}_m d\vartheta \right]}_{\mathbf{s}_{pm}} - \underbrace{-\mathbf{J}_m^T \mathbf{J}_{\phi vx}^T [k_{pv} \Delta \lambda_{vs} + k_{Fiv} \Delta F_{vs} + k_{fh} \Delta \lambda_{vd} + k_{Fih} \Delta F_{vd}]}_{\mathbf{s}_{Fm}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.15})$$

donde $\mathbf{K}_{Dv} = \mathbf{D}_{vh} + k_{vh} \mathbf{I}$ y $\mathbf{K}_{Dp} = \mathbf{D}_{ph} + k_{ph} \mathbf{I}$. \mathbf{s}_{pm} y \mathbf{s}_{Fm} están en espacios ortogonales.

Las ecuaciones (A.13) y (A.15) representan la dinámica en lazo cerrado del sistema completo. Se puede considerar que estos dos sistemas son independientes, pues el maestro genera los comandos de posición y fuerza deseadas para el esclavo. El análisis de estabilidad se lleva a cabo por separado por medio de los siguientes pasos.

a) Se analiza primero el subespacio de posición del robot maestro. Se define $\mathbf{e} = \int_0^t \tilde{\mathbf{x}}_m d\vartheta$. Suponiendo que la inversa de \mathbf{J}_m existe, *i.e.*, que el humano no hace pasar al maestro por una singularidad, de \mathbf{s}_{pm} en (A.15) se obtiene

$$\mathbf{I}_h \mathbf{e}^{(3)} + \mathbf{K}_{Dv} \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_{Dp} \dot{\mathbf{e}} + k_{ih} \mathbf{Q}_x \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.16})$$

o bien

$$\mathbf{I}_h \mathbf{e}^{(3)} + (\mathbf{K}_{Dv} - \mathbf{\Lambda}_1) \ddot{\mathbf{e}} + (\mathbf{K}_{Dp} - \mathbf{\Lambda}_2) \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{\Lambda}_1 \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{\Lambda}_2 \dot{\mathbf{e}} + k_{ih} \mathbf{Q}_x \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (\text{A.17})$$

$\mathbf{\Lambda}_1$ y $\mathbf{\Lambda}_2$ son matrices definidas positivas. Agrupando términos, se obtiene

$$\mathbf{I}_h \underbrace{\left(\mathbf{e}^{(3)} + \mathbf{I}_h^{-1} (\mathbf{K}_{Dv} - \mathbf{\Lambda}_1) \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{I}_h^{-1} (\mathbf{K}_{Dp} - \mathbf{\Lambda}_2) \dot{\mathbf{e}} \right)}_{\mathbf{e}_1} + \mathbf{\Lambda}_1 (\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{\Lambda}_1^{-1} \mathbf{\Lambda}_2 \dot{\mathbf{e}} + k_{ih} \mathbf{\Lambda}_1^{-1} \mathbf{Q}_x \mathbf{e}) = \mathbf{0} \quad (\text{A.18})$$

Se define

$$\mathbf{s}_m = \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{\Lambda}_1^{-1} \mathbf{\Lambda}_2 \dot{\mathbf{e}} + k_{ih} \mathbf{\Lambda}_1^{-1} \mathbf{Q}_x \mathbf{e}, \quad (\text{A.19})$$

cuya derivada es aproximadamente

$$\dot{\mathbf{s}}_m = \mathbf{e}^{(3)} + \mathbf{\Lambda}_1^{-1} \mathbf{\Lambda}_2 \ddot{\mathbf{e}} + k_{ih} \mathbf{\Lambda}_1^{-1} \mathbf{Q}_x \dot{\mathbf{e}}, \quad (\text{A.20})$$

siempre que se satisfaga la Suposición 2. Observe \mathbf{e}_1 en la ecuación (A.18). Se requiere encontrar Λ_1 y Λ_2 tales que

$$\mathbf{I}_h^{-1} (\mathbf{K}_{Dv} - \Lambda_1) = \Lambda_1^{-1} \Lambda_2 \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{I}_h^{-1} (\mathbf{K}_{Dp} - \Lambda_2) = k_{ih} \Lambda_1^{-1} \quad (\text{A.22})$$

Sustituyendo (A.22) en (A.21) se obtiene

$$\mathbf{I}_h^{-1} (\mathbf{K}_{Dv} - \Lambda_1) = \frac{1}{k_{ih}} \mathbf{I}_h^{-1} (\mathbf{K}_{Dp} - \Lambda_2) \Lambda_2 \quad (\text{A.23})$$

ó

$$\Lambda_1 = \mathbf{K}_{Dv} - \frac{1}{k_{ih}} (\mathbf{K}_{Dp} - \Lambda_2) \Lambda_2 \quad (\text{A.24})$$

Además, es necesario que Λ_1 y Λ_2 satisfagan

$$\mathbf{K}_{Dv} - \Lambda_1 > \mathbf{O} \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{K}_{Dp} - \Lambda_2 > \mathbf{O} \quad (\text{A.26})$$

Como consecuencia de lo anterior y siempre y cuando se satisfagan la Suposición 2 y el Hecho 1 la ecuación (A.18) puede reescribirse como

$$\mathbf{I}_h \dot{\mathbf{s}}_m + \Lambda_1 \mathbf{s}_m = \mathbf{0} \quad (\text{A.27})$$

ó

$$\dot{\mathbf{s}}_m = -\mathbf{I}_h^{-1} \Lambda_1 \mathbf{s}_m. \quad (\text{A.28})$$

Esto significa que

$$\mathbf{s}_m, \dot{\mathbf{s}}_m \rightarrow \mathbf{0}. \quad (\text{A.29})$$

Por lo tanto, de (A.19) se tiene que

$$\ddot{\mathbf{e}} + \Lambda_1^{-1} \Lambda_2 \dot{\mathbf{e}} + k_{ih} \Lambda_1^{-1} \mathbf{Q}_x \mathbf{e} = 0 \quad (\text{A.30})$$

Se define a continuación una función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} k_{ih} \mathbf{e}^T \Lambda_1^{-1} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \dot{\mathbf{e}} \quad (\text{A.31})$$

cuya derivada a lo largo de (A.30) es

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= k_{ih}\dot{\mathbf{e}}^T\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}^T\ddot{\mathbf{e}} \\
&= k_{ih}\dot{\mathbf{e}}^T\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{e} - \dot{\mathbf{e}}^T\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2\dot{\mathbf{e}} - k_{ih}\dot{\mathbf{e}}^T\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{Q}_x\mathbf{e} \\
&= -\dot{\mathbf{e}}^T\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2\dot{\mathbf{e}} + k_{ih}\dot{\mathbf{e}}^T\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_x)\mathbf{e} \\
&= -\dot{\mathbf{e}}^T\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2\dot{\mathbf{e}} + k_{ih}\dot{\mathbf{e}}^T\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{P}_x\mathbf{e},
\end{aligned} \tag{A.32}$$

porque $\mathbf{P}_x = \mathbf{I} - \mathbf{Q}_x$. Suponiendo que $\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{P}_x = \mathbf{P}_x\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}$ (en caso necesario, siempre se puede elegir $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \lambda_1\mathbf{I}$) se tiene

$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{e}}^T\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2\dot{\mathbf{e}} + k_{ih}\dot{\mathbf{e}}^T\mathbf{P}_x^T\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{e}. \tag{A.33}$$

Tomando en cuenta que $\mathbf{P}_x^T = \mathbf{P}_x$ y dado que $\mathbf{P}_x\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$ finalmente se obtiene

$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{e}}^T\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2\dot{\mathbf{e}} \leq 0 \tag{A.34}$$

Por lo tanto, \mathbf{e} , $\dot{\mathbf{e}}$ y $\ddot{\mathbf{e}}$ están acotadas. Para emplear el Teorema de LaSalle se plantea el máximo conjunto invariante para $\dot{V} = 0$ como $(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = (\mathbf{e}, \mathbf{0})$. Sustituyendo en (A.30) se obtiene

$$k_{ih}\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{Q}_x\mathbf{e} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{Q}_x\mathbf{e} = \mathbf{0} \tag{A.35}$$

de lo que se desprende que $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_m, \tilde{\mathbf{x}}_m, \mathbf{Q}_x \int_0^t \tilde{\mathbf{x}}d\vartheta \rightarrow \mathbf{0}$.

b) Respecto al esclavo, nótese que \mathbf{s}_{ps} y \mathbf{s}_{Fs} en (A.12) son ortogonales, por lo que ambas están acotadas si \mathbf{s}_s lo está.

A continuación se lleva a cabo un análisis local válido para una región $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^n$ definida como

$$\mathbb{D} = \{\mathbf{s}_s \in \mathbb{R}^{n_s} \mid \|\mathbf{s}_s\| \leq s_{\max}\} \tag{A.36}$$

donde $s_{\max} > 0$ es una cota predefinida suficientemente pequeña, tal que el Hecho 1 se satisface. Primero, se expresa \mathbf{s}_{ps} como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_s = -k_{vs}^{-1}\bar{k}_{is}\mathbf{Q}_s\boldsymbol{\sigma}_s + \mathbf{s}_{ps}, \tag{A.37}$$

y se define la función

$$V_s = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_s^T \boldsymbol{\sigma}_s, \quad (\text{A.38})$$

cuya derivada a lo largo de (A.37) es

$$\dot{V}_s = -k_{vs}^{-1} \bar{k}_{is} \boldsymbol{\sigma}_s^T \mathbf{Q}_s^T \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\sigma}_s^T \mathbf{Q}_s^T \mathbf{s}_{ps} \quad (\text{A.39})$$

Para obtener (A.39) se tomó en cuenta que $\mathbf{Q}_s = \mathbf{Q}_s \mathbf{Q}_s$ y $\mathbf{Q}_s^T = \mathbf{Q}_s$. Adicionalmente, \mathbf{s}_{ps} está contenida en el subespacio abarcado por \mathbf{Q}_s , de tal forma que $\mathbf{s}_{ps} = \mathbf{Q}_s \mathbf{s}_{ps}$. Ahora bien, en la región (A.36) es válido lo siguiente

$$\dot{V}_s \leq -\frac{1}{2} k_{vs}^{-1} \bar{k}_{is} \|\mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s\|^2 - \|\mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s\| \left\{ \frac{1}{2} k_{vs}^{-1} \bar{k}_{is} \|\mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s\| - s_{\max} \right\} \quad (\text{A.40})$$

Por lo tanto $\dot{V}_s \leq 0$ si $\|\mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s\| \geq \frac{2s_{\max}}{k_{vs}^{-1} \bar{k}_{is}}$. Debe hacerse notar que $\mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s$ es el único componente de $\boldsymbol{\sigma}_s$ que afecta la dinámica de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_s$ en (A.37). Es decir, la dinámica de $\boldsymbol{\sigma}_s$ está contenida en \mathbf{Q}_s . A partir de lo anterior se puede concluir que $\mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s$ debe estar acotado y que mientras más pequeño sea s_{\max} , más pequeña debe ser la cota de $\mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s$. Esto, a su vez, implica que la magnitud de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_s$ puede hacerse arbitrariamente pequeña.

De la ecuación (A.9) se obtiene

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_s = -k_{ls} \tilde{\mathbf{q}}_s + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_s \quad (\text{A.41})$$

que representa un filtro estable de primer orden con entrada $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_s$. Por lo tanto, mientras más pequeño sea $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_s$, menores serán $\|\tilde{\mathbf{q}}_s\|$ y $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_s\|$.

c) Hasta ahora se ha mostrado que, si \mathbf{s}_s está en la región (A.36) con s_{\max} suficientemente pequeña, el Hecho 1 es válido para el manipulador esclavo. A continuación se muestra que si \mathbf{s}_s está en \mathbb{D} cualquier variable está acotada. Ya se ha mostrado que \mathbf{s}_{ps} y \mathbf{s}_{Fs} en (A.12) están acotadas. También se mostró que $\tilde{\mathbf{q}}_s$ y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_s$ están acotadas, de modo que \mathbf{q}_s y $\dot{\mathbf{q}}_s$ están acotadas porque \mathbf{q}_{ds} y $\dot{\mathbf{q}}_{ds}$ se seleccionan acotadas. Dado que $\mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s$ está acotada, también debe estarlo $\mathbf{Q}_s \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}_s d\vartheta$.

De (A.9) se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s &= \mathbf{Q}_s \int_0^t \dot{\boldsymbol{\sigma}}_s d\vartheta \\ &= \mathbf{Q}_s \int_0^t \left(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_s + k_{ls} \tilde{\mathbf{q}}_s \right) d\vartheta\end{aligned}$$

que resulta en

$$\mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{Q}_s \tilde{\mathbf{q}}_s + k_{ls} \mathbf{Q}_s \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}_s d\vartheta, \quad (\text{A.42})$$

o bien, expresada de otra forma

$$k_{ls} \mathbf{Q}_s \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}_s d\vartheta = \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s - \mathbf{Q}_s \tilde{\mathbf{q}}_s. \quad (\text{A.43})$$

Como $\mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}_s$ y $\mathbf{Q}_s \tilde{\mathbf{q}}_s$ están acotadas, $\mathbf{Q}_s \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}_s d\vartheta$ lo está también.

\mathbf{J}_{ϕ_s} es una matriz de rango completo, de \mathbf{s}_{F_s} en (A.12) se obtiene

$$\Delta \lambda_s = -k_{Fis} \Delta F_s - k_{vs} (\mathbf{J}_{\phi_s} \mathbf{J}_{\phi_s}^T)^{-1} \mathbf{J}_{\phi_s} \mathbf{s}_{F_s} \quad (\text{A.44})$$

que es un sistema lineal estable para ΔF_s con entrada acotada, lo que implica que $\Delta \lambda_s$ y ΔF_s también están acotadas.

La segunda derivada de la restricción (2.10) por el esclavo es:

$$\ddot{\phi}_s(\mathbf{q}_s) = \mathbf{J}_{\phi_s} \ddot{\mathbf{q}}_s + \dot{\mathbf{J}}_{\phi_s} \dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{0} \quad (\text{A.45})$$

Sustituyendo $\ddot{\mathbf{q}}_s$ de la ecuación (2.23) en (A.45) se puede obtener la siguiente expresión para λ_s

$$\lambda_s = -\mathbf{M}_s(\mathbf{q}_s) \left\{ \mathbf{J}_{\phi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \{ \boldsymbol{\tau}_s - \bar{\boldsymbol{\tau}}_s \} + \dot{\mathbf{J}}_{\phi_s} \dot{\mathbf{q}}_s \right\} \quad (\text{A.46})$$

donde $\mathbf{M}_s(\mathbf{q}_s) = \left\{ \mathbf{J}_{\phi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\phi_s}^T \right\}^{-1}$ y $\bar{\boldsymbol{\tau}}_s = \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s)$. La derivada de λ_s está dada por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \lambda_s &= -\dot{\mathbf{M}}_s(\mathbf{q}_s) \left[\mathbf{J}_{\phi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \{ \boldsymbol{\tau}_s - \bar{\boldsymbol{\tau}}_s \} + \dot{\mathbf{J}}_{\phi_s} \dot{\mathbf{q}}_s \right] \\ &\quad - \mathbf{M}_s(\mathbf{q}_s) \left[\dot{\mathbf{J}}_{\phi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \{ \boldsymbol{\tau}_s - \bar{\boldsymbol{\tau}}_s \} + \mathbf{J}_{\phi_s} \dot{\mathbf{H}}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \{ \boldsymbol{\tau}_s - \bar{\boldsymbol{\tau}}_s \} \right] \\ &\quad - \mathbf{M}_s(\mathbf{q}_s) \left[\mathbf{J}_{\phi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \{ \dot{\boldsymbol{\tau}}_s - \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}_s \} + \ddot{\mathbf{J}}_{\phi_s} \dot{\mathbf{q}}_s + \dot{\mathbf{J}}_{\phi_s} \ddot{\mathbf{q}}_s \right]\end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

y es función únicamente de variables acotadas, pues todas las funciones y derivadas involucradas son funciones de \mathbf{q}_s , $\dot{\mathbf{q}}_s$, $\ddot{\mathbf{q}}_s$ y los valores deseados.

Finalmente, hace falta demostrar que \mathbf{y}_a en (A.14) también está acotada. La derivada de \mathbf{q}_{rs} en (A.11) es

$$\ddot{\mathbf{q}}_{rs} = \ddot{\mathbf{q}}_{ds} - k_{ls} \dot{\mathbf{q}}_s - k_{vs}^{-1} \bar{k}_{is} \mathbf{Q}_s \dot{\sigma}_s - k_{vs}^{-1} \bar{k}_{is} \dot{\mathbf{Q}}_s \sigma_s + k_{vs}^{-1} \mathbf{J}_{\phi s}^T \left\{ \frac{d}{dt} \Delta \lambda_s + k_{Fis} \Delta \lambda_s \right\} + k_{vs}^{-1} \mathbf{J}_{\phi s}^T \{ \Delta \lambda_s + k_{Fis} \Delta F_s \} \quad (\text{A.48})$$

la cual es función de variables acotadas. Que $\ddot{\mathbf{q}}_{rs}$ esté acotada implica que \mathbf{y}_a lo está, lo que muestra que todas las variables asociadas a la dinámica en lazo cerrado del esclavo están acotadas.

d) Ya que se ha mostrado que todas las variables en la dinámica en lazo cerrado del esclavo están acotadas si $\mathbf{s}_s \in \mathbb{D}$ puede utilizarse el Teorema 2. Como \mathbf{y}_a está acotada en \mathbb{D} existe una constante positiva c_a tal que

$$\|\mathbf{y}_a\| \leq c_a \quad \forall \mathbf{s}_s \in \mathbb{D} \quad (\text{A.49})$$

Entonces, se define una función

$$V_s = \frac{1}{2} \mathbf{s}_s^T \mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s) \mathbf{s}_s \quad (\text{A.50})$$

que satisface

$$\alpha_1(\|\mathbf{s}_s\|) \triangleq \lambda_1 \|\mathbf{s}_s\|^2 \leq V_s \leq \lambda_2 \|\mathbf{s}_s\|^2 \triangleq \alpha_2(\|\mathbf{s}_s\|) \quad (\text{A.51})$$

con $\lambda_1 = \lambda_{hs}$ y $\lambda_2 = \lambda_{Hs}$ dadas según la Propiedad 3.

La derivada de V_s a lo largo de (A.13) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= -\mathbf{s}_s^T \mathbf{K}_{Dvs} \mathbf{s}_s - \mathbf{s}_s^T \mathbf{y}_a \\ &\leq -k_{vs} \|\mathbf{s}_s\|^2 + c_a \|\mathbf{s}_s\| \\ &\leq -\frac{1}{2} k_{vs} \|\mathbf{s}_s\|^2 - \frac{1}{2} k_{vs} \|\mathbf{s}_s\| \left(\|\mathbf{s}_s\| - \frac{2c_a}{k_{vs}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Se define

$$W_3 \triangleq -\frac{1}{2} k_{vs} \|\mathbf{s}_s\|^2 \quad (\text{A.53})$$

$$\mu \triangleq \frac{2c_a}{k_{vs}} \quad (\text{A.54})$$

Entonces, el Teorema 2 es válido mientras se satisfagan las siguientes condiciones:

$$\|\mathbf{s}_s(\mathbf{0})\| < \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} s_{\max} \quad (\text{A.55})$$

$$\mu < \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} s_{\max} \quad (\text{A.56})$$

Dado que s_{\max} debe ser tal que se satisfaga el Hecho 1 no puede seleccionarse arbitrariamente. k_{vs} debe ser suficientemente grande para que se mantenga la restricción en μ . De acuerdo con (A.6) se tiene que la norma $\|\mathbf{s}_s\|$ tiende a una región \mathbb{B}_s

$$\mathbb{B}_s = \left\{ \mathbf{s}_s \in \mathbb{R}_s^n \mid \|\mathbf{s}_s\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \mu \right\}. \quad (\text{A.57})$$

Seleccionando k_{vs} suficientemente grande el error se hace arbitrariamente pequeño de acuerdo con (A.54).

e) Mientras más pequeña sea la región \mathbb{B}_s , más pequeños son s_{\max} , $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_s$ y \mathbf{s}_{Fs} . Utilizando las ecuaciones (A.41) y (A.44) se puede concluir que los errores $\tilde{\mathbf{q}}_s$, $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_s$, ΔF_s y $\Delta \lambda_s$ pueden hacerse arbitrariamente pequeños.

f) Finalmente, respecto al subespacio de fuerza del maestro, se puede decir que, con la región \mathbb{B}_s seleccionada suficientemente pequeña, después de un tiempo suficientemente grande se tiene $\lambda_s \approx \lambda_{ds}$. Esto provoca que los errores (2.26) y (3.9) sean equivalentes, de tal forma que, siempre y cuando \mathbf{J}_m^{-1} exista, de \mathbf{s}_{Fm} en (A.15) se tiene

$$\mathbf{J}_{\phi_{vx}}^T [(k_{pv} + k_{fh}) \Delta \lambda_{vs} + (k_{fv} + k_{Fih}) \Delta F_{vs}] \approx \mathbf{0} \quad (\text{A.58})$$

Como $\mathbf{J}_{\phi_{vx}}^T$ es de rango completo, se tiene un filtro estable lineal para ΔF_{vs} , por lo que $\Delta \lambda_{vs}, \Delta F_{vs} \approx 0$ y por lo tanto $\lambda_v \rightarrow \lambda_s$, por lo que el operador tiene la percepción de la fuerza real que el esclavo aplica en el entorno de trabajo.

Bibliografía

- [1] Panagiotis K. Artemiadis, Pantelis T. Katsiaris, Minas V. Liarokapis, and Kostas J. Kyriakopoulos. Human arm impedance: Characterization and modeling in 3d space. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 3103–3108, 2010.
- [2] E. Bayo and A. Avello. Singularity free augmented lagrangian algorithms for constrained multibody dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 5:209–231, 1995.
- [3] E.V. Biryukova, V.Y. Roschin, A.A. Frolov, M.E. Ioffe, J. Massion, and M. Dufosse. Forearm postural control during unloading: Anticipatory changes in elbow stiffness. *Exp. Brain Res.*, 124:107–117, 1999.
- [4] Stephen P. Buerger and Neville Hogan. Relaxing passivity for human-robot interaction. *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 4570–4575, 2006.
- [5] Charles E. Clauser, John T. McConville, and J. W. Young. *Weight, Volume, and Center of Mass of Segments of the Human Body*. Aerospace Medical Research Laboratory, Aerospace Medical Division, Air Force Systems Command, 1969.
- [6] Vincent Duchaine and Clément M. Gosselin. General model of human-robot cooperation using a novel velocity based variable impedance control. *Second Joint Eurohaptics Conference and Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems*, 2007.

- [7] N. Hogan F. A. Mussa-Ivaldi and E. Bizzi. Neural, mechanical, and geometric factors subserving arm posture in humans. *The Journal of Neuroscience*, 5(10):2732–2743, 1985.
- [8] Hiroaki Gomi and Mitsuo Kawato. Identification of the human behavior in virtual environment as nonlinear control block. *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, November 2005.
- [9] Neville Hogan. Controlling impedance at the man-machine interface. *Proceedings of the 1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3:1626–1631, 1989.
- [10] Louise Jandura and Mandayam A. Srinivasan. Experiments on human performance in torque discrimination and control. *Dynamic Systems and Control*, 55(1):369–375, 1994.
- [11] Liang Shao John E. Speich and Michael Goldfarb. Modeling the human hand as it interacts with a telemanipulation system. *Mechatronics*, 15(9):1127–1142, November 2005.
- [12] Tarapong Karnjanaparichat and Radom Pongvuthithum. Adaptive control for a one link robot arm. *Chiang Mai J. Sci.*, 35:437–446, 2008.
- [13] R. Aracil L. F. Peñín, A. Caballero and A. Barrientos. Human behavior modeling in master-slave teleoperation with kinesthetic feedback. *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1998.
- [14] Sukhan Lee and Hahk Sung Lee. Teleoperator control system design with human in control loop and telemonitoring force feedback. *Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control*, December 1992.
- [15] Dan Liu and Emanuel Todorov. Hierarchical optimal control of a 7-dof arm model. *Proceedings of the 2nd IEEE Symposium on Adaptive Dynamic Programming and Reinforcement Learning*, pages 50–77, 2009.
- [16] J Méndez-Iglesias, V. Parra-Vega, and F. Ruíz-Sánchez. Identification of the human behavior in virtual environment tasks as a non-linear control block. *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, 2005.

- [17] Farid Mobasser and Keyvan Hashtrudi-Zaad. A method for online estimation of human arm dynamics. *Proceedings of the 28th IEEE EMBS Annual International Conference*, pages 2412–2416, 2006.
- [18] S. Parasuraman, Kee Chew Yee, and Arif Oyoung. Human upper limb and arm kinematics for robot based rehabilitation. *2009 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pages 845–850, 2009.
- [19] Fernando Reyes-Cortés. *Robótica. Control de robots manipuladores*. Alfaomega, 2011.
- [20] L.G. García Valdovinos, V. Parra-Vega, and M.A. Arteaga. Cartesian sliding pid force position control for transparent bilateral teleoperation. *31st annual conference of the IEEE industrial electronics society*, pages 1979–1985, 2005.
- [21] Hyun Soo Woo and Doo Yong Lee. Exploitation of the impedance and characteristics of the human arm in the design of haptic interfaces. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 58(8):3221–3233, 2011.
- [22] Ken Ohta Zhi-Wei Luo and Masami Ito. Realization of human task skill in dynamic telemanipulation. *Proceedings of the 1998 IEEE ISIC/CIRA/ISAS Joint Conference*, September 1998.