



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

MODELOS DINÁMICOS HISTERÉTICOS PARA LA RELACIÓN
FLUJO-DENSIDAD EN TRÁFICO VEHICULAR

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

P R E S E N T A:

GENARO JAIME ISLAS LÓPEZ

TUTOR

DR. LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ-ICAZA LONGORIA
INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

MÉXICO, D.F. ENERO 2013

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez
Secretario: Dr. Yu Tang Xu
Vocal: Dr. Luis A. Álvarez-Icaza Longoria
1er. Suplente: Dra. María Elena Lárraga Ramírez
2do. Suplente: Dr. Carlos Gershenson García

La Tesis se realizó en:

Instituto de Ingeniería-UNAM

TUTOR DE TESIS:

Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria

A mis padres: Genaro y María Elena

A mi hermana Karla

A mi amada esposa Hilda

Agradecimientos

A mis padres Genaro Islas Rivero y María Elena López Cuéllar por su apoyo incondicional y por la confianza que siempre han tenido en mí. Por ser el pilar y la base fundamental de mi carácter como persona y mi actuar como profesionalista.

A mi hermana Karla Marianne por brindarme en todo momento su cariño y comprensión. Por hacerme sonreír con tu inigualable, divertida y ocurrente forma de vivir.

A mi esposa Hilda por estar siempre a mi lado. Por saber entender y escuchar. Por todos los increíbles momentos que hemos vivido juntos y que me hacen ser inmesamente feliz. Por ser la mujer que da sentido y fuerza a mi vida. Por todas aquellas tardes en que trabajamos en esto, por darme tu apoyo y sobretodo tu amor. Te amo.

A mi asesor el Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria por el decidido y enorme apoyo y motivación que me brindó para la realización y conclusión de esta tesis. Por su infinita paciencia y amabilidad, por todos sus consejos, su profesionalismo y sobretodo por su admirable calidad humana.

A los miembros de mi jurado, el Dr. Gerardo Espinosa Pérez, el Dr. Yu Tang Xu, la Dra. María Elena Larraga Ramírez y el Dr. Carlos Gershenson García por el amable apoyo que he recibido de ellos para la finalización de este trabajo.

A todos mis amigos de la maestría en especial a Isaí, Jesús, Rafael, Tonámetl, Hoover, Edward, Fernando, Joaquín y César. Por todos los agradables e inolvidables momentos que hemos vivido en estos años. A mis amigos del laboratorio: Alfonso, Aldo, Guillermo, Ulises, José Luis, Jesús, Luis, Erick y Manuel por todas las amenas e interesantes conversaciones que hemos mantenido.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto de Ingeniería por haberme permitido alcanzar de nueva cuenta otro logro en mi carrera profesional.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo recibido a través de una beca que me permitió realizar mis estudios de posgrado.

A todas aquellas personas que de una u otra forma participaron y me apoyaron en la realización de esta tesis y en general en la realización de mis estudios de maestría.

Finalmente deseo agradecer a toda mi familia por la fortaleza mostrada en los momentos difíciles. Especialmente deseo dedicar este trabajo a la memoria de mi tío Arturo López Cuéllar. Te extrañamos mucho pero sé que donde quiera que estes seguramente eres feliz pues en toda tu vida siempre fuiste una persona noble, sincera y sobretodo desprendida. Nunca pude decirte adiós pero yo aún espero que algún día nos volvamos a ver.

Índice general

Índice de figuras	IV
1. Introducción	3
1.1. Modelos macroscópicos de tráfico vehicular	4
1.2. Modelos macroscópicos de orden superior	9
1.3. Otros enfoques y modelos de tráfico	11
1.3.1. Modelos de cambio de carril	11
1.3.2. Distribución de Poisson	11
1.3.3. Modelos mesoscópicos	12
1.4. Objetivo	12
1.5. Organización	12
2. Modelo de Transmisión por Celdas	14
2.1. Perspectiva del Modelo	14
2.1.1. Condiciones de frontera	18
2.1.2. Redes de celdas	19
2.1.3. Formación de colas de vehículos	23
2.2. Modelo Asimétrico de Transmisión por Celdas	25
2.2.1. Ecuaciones del Modelo Asimétrico de Transmisión por Celdas	25
3. Modelo Histerético de Transmisión por Celdas	30
3.1. Pérdida de capacidad	30
3.2. Modelo Histerético de Transmisión por Celdas	33
3.3. Análisis Dinámico del MHTC	36
3.3.1. Puntos de Equilibrio	36
3.3.2. Análisis de estabilidad	38
4. Simulaciones y Resultados	45
4.1. Especificaciones	45
4.2. Simulaciones para densidad en flujo libre	46
4.3. Simulaciones para densidad en flujo congestionado	50
4.3.1. Resultados del MTC	52
4.3.2. Resultados del MHTC	54

4.4. Simulación para distintos niveles de densidad. MHTC	58
5. Conclusiones	64

Índice de figuras

1.1. Relaciones entre densidad (k), flujo (y) y velocidad (v)	7
1.2. Discontinuidad en el Diagrama Fundamental	8
2.1. División en celdas de una vía	15
2.2. Diagrama fundamental asociado al Modelo de Transmisión por Celdas	17
2.3. Estructuras de red válidas e inválidas	20
2.4. Tipos de conexión de celdas	20
2.5. Diagrama de flujos convergentes	22
2.6. Rampa de acceso conectada en una celda	24
2.7. División de una vía con el MATC	25
2.8. Parámetros de influencia establecidos por el MATC	28
3.1. Asimetría en los cambios de dirección de k	32
3.2. Trayectorias entre densidad (k) y velocidad (v)	33
3.3. Punto de congestión	35
3.4. Diagrama fundamental asociado al MHTC	36
3.5. Tres celdas con una rampa de acceso	39
4.1. Configuración establecida para las simulaciones	45
4.2. Perfil de entrada $y_e(t)$ para densidad en flujo libre	47
4.3. Perfiles en demanda r_{d_1} (a) y r_{d_2} (b) para las rampas de acceso. Densidad en flujo libre	47
4.4. Densidad (a) y flujo (b) en la primera celda. MTC. Densidad en flujo libre	48
4.5. Densidad (a) y flujos a la entrada y a la salida (b) en la segunda celda. MTC. Densidad en flujo libre	49
4.6. Densidad (a) y flujos a la entrada y a la salida (b) en la cuarta celda. MTC. Densidad en flujo libre	49
4.7. Perfil de entrada $y_e(t)$ para densidad en flujo congestionado	51
4.8. Perfiles en demanda r_{d_1} (a) y r_{d_2} (b) para las rampas de acceso. Densidad en flujo congestionado	51
4.9. Densidad (a) y flujo (b) en la primera celda. MTC. Densidad en flujo conges- tionado	52

4.10. Densidad (a) y flujos a la entrada y a la salida (b) en la segunda celda. MTC. Densidad en flujo congestionado	53
4.11. Densidad (a) y flujos a la entrada y a la salida (b) en la cuarta celda. MTC. Densidad en flujo congestionado	53
4.12. Diagramas fundamentales. Resultados del MTC	54
4.13. Colas en la primera celda (a) y en las rampas de acceso (b),(c). Resultados del MTC	55
4.14. Densidad (a) y flujo (b) en la primera celda. MHTC.	55
4.15. Densidad (a) y flujos a la entrada y a la salida (b) en la segunda celda. MHTC.	56
4.16. Densidad (a) y flujos a la entrada y a la salida (b) en la cuarta celda. MHTC.	56
4.17. Diagramas fundamentales. Resultados del MHTC	57
4.18. Evolución de las velocidades de onda en flujo congestionado para el MHTC .	58
4.19. Perfil en demanda modificado r_{d_2} para la segunda rampa de acceso	59
4.20. Densidad (a) y flujo (b) en la primera celda. MHTC. Densidad en flujo con- gestionado y flujo libre	60
4.21. Densidad (a) y flujo (b) en la segunda celda. MHTC. Densidad en flujo con- gestionado y flujo libre	60
4.22. Densidad (a) y flujo (b) en la tercera celda. MHTC. Densidad en flujo con- gestionado y flujo libre	61
4.23. Densidad (a) y flujo (b) en la cuarta celda. MHTC. Densidad en flujo conges- tionado y flujo libre	61
4.24. Diagramas fundamentales. Resultados del MHTC. Densidad en flujo conges- tionado y flujo libre	62
4.25. Evolución de las velocidades de onda en flujo congestionado. MHTC. Densidad flujo congestionado y flujo libre	62
4.26. Colas en la primera celda (a) y en las rampas de acceso (b),(c). MHTC	63

Resumen

En este trabajo se presenta el desarrollo de un nuevo modelo macroscópico de tráfico vehicular. Dicho modelo es nombrado como Modelo Histerético de Transmisión por Celdas (MHTC). Su principal característica es la incorporación de los efectos histeréticos presentes en los cambios asimétricos de densidad. El MHTC captura la dinámica histerética dependiendo si el flujo acelera o desacelera dentro de una determinada sección de carretera. De esta manera el MHTC aproxima la velocidad de onda en flujo congestionado modificando una velocidad nominal mediante un factor de ajuste. De igual manera el MHTC modela la pérdida de capacidad que se presenta cuando los vehículos atraviesan por algún punto de congestión y donde los cambios de velocidad no son instantáneos. A diferencia de otros modelos reportados (Gomes, 2004), el MHTC realiza esta aproximación de forma automática.

Abstract

A new scheme for macroscopic freeway modeling is presented. This new model is named as Hysteretic Cell Transmission Model (HCTM). Its main feature is capturing the hysteretic loops that induce asymmetric changes in density. The HCTM captures this hysteretic dynamics depending on the way flow is growing inside the road section, so the HCTM varies the congestion wave speed. Capacity drop is also modeled by this new scheme and it does automatically in contrast with other freeway models as the reported in (Gomes, 2004).

Capítulo 1

Introducción

El crecimiento demográfico desmedido y la consecuente expansión de las zonas urbanas han producido un incremento considerable en el número de vehículos que circulan a diario por las carreteras de varias ciudades alrededor del mundo. Aunado a esto, el fenómeno del tráfico vehicular y el congestionamiento vial se han convertido en fenómenos cotidianos para los habitantes de las grandes urbes.

Abordar el problema del tráfico vehicular es una labor que no cuenta con soluciones evidentes. A lo largo de varios años, los ingenieros de transporte han tratado de hacer eficiente el funcionamiento de las vías de comunicación terrestre en especial aquellas con alta demanda y con incidencia directa en la actividad productiva. En el desarrollo de esta labor se han encontrado con diversos escenarios en donde, por citar algunos ejemplos, debe decidirse adecuadamente donde se habrán de colocar los semáforos, cuál debe ser el ciclo de alto y avance, cómo realizar una reducción en los carriles de una vía rápida o dónde colocar los accesos y las salidas. Es claro que al abordar cada una de estas particularidades es importante comprender a fondo el fenómeno tratado para lo cual es necesario el planteamiento de un modelo matemático que brinde una descripción suficientemente fiel de la dinámica de los vehículos sobre una vía.

Existen fundamentalmente dos perspectivas dentro de las cuales se engloban los modelos de tráfico vehicular: la perspectiva microscópica y la macroscópica. Los modelos microscópicos se enfocan en la dinámica aislada del ente conductor-vehículo y asumen que su compor-

tamiento está en función de las condiciones de tráfico que se presentan en su entorno. Las variables que generalmente son consideradas bajo este análisis son la posición y velocidad del vehículo. La validación de los postulados de este tipo de modelos suele ser complicada pues el comportamiento humano en una situación real es difícil de predecir además de que el costo computacional que requieren estos modelos para ser simulados es elevado. En (Nagel and Schreckenberg, 1992), (Larraga and Álvarez Icaza, 2010), (Treiber and Helbing, 2001) y (Vilar and de Souza, 1994) se presentan modelos de tráfico vehicular consistentes con esta perspectiva.

El modelo que se presenta en este trabajo se engloba dentro de la perspectiva macroscópica que es descrita a continuación.

1.1. Modelos macroscópicos de tráfico vehicular

A diferencia de los modelos microscópicos, los modelos macroscópicos ignoran la dinámica del ente conductor-vehículo y basan su análisis en conjuntos de vehículos que circulan por una vía. A continuación se brinda la definición precisa de algunos conceptos que son de uso común en la teoría de tráfico particularmente dentro de los modelos macroscópicos; x y t representan la posición y el tiempo respectivamente.

Flujo $y(x, t)$: Número total de vehículos que atraviesan por un cierto punto en un intervalo de tiempo dado dividido por la magnitud de ese intervalo. Dicho de otro modo, el flujo es una razón de cambio de una cantidad de vehículos respecto al tiempo. Usualmente se expresa en unidades de *vehículos/hora* o *vehículos/s*.

Velocidad $v(x, t)$: Se define como el cambio de posición respecto al tiempo. Dependiendo de como se mida, es posible hablar de *velocidad instantánea* que es la velocidad de un vehículo en un instante de tiempo o punto en el espacio, *velocidad media temporal* que es la media de las velocidades instantáneas de vehículos que cruzan un punto sobre la carretera, *velocidad media espacial* que es el cociente de la longitud de un tramo de carretera sobre el promedio de tiempo que ocuparon los vehículos en atravesarlo. También dependiendo del estado del flujo es posible hablar de la *velocidad de flujo libre* que es la velocidad que desarrollan los automóviles en una vía donde las interacciones entre ellos son mínimas. Esta velocidad está

íntimamente ligada al estado de la carretera, a las condiciones climatológicas o a los límites de velocidad establecidos. Se asume que los vehículos preferirán desplazarse a esta velocidad siempre que una combinación favorable de estos factores lo permitan. Por otro lado, se define también la *velocidad de flujo congestionado* que se relaciona con un condicionamiento en el avance de los vehículos producido por interacciones cada vez mayores que limitan el espacio disponible en la vía. Por ejemplo, cuando el flujo que circula por la vía principal se une con el flujo proveniente de alguna rampa de acceso es común que se produzca un *cuello de botella* que induce congestión en la vía. La onda de congestión que se forma se propaga en dirección contraria al sentido del flujo (H. Kazama and Nakamura, 2003) y con una velocidad (*de flujo congestionado*) menor a la *velocidad de flujo libre*. Un atascamiento también puede crearse por obstáculos que se encuentren sobre la vía tales como vehículos averiados u objetos tirados en el pavimento.

Densidad $k(x, t)$: Es el número de vehículos que ocupan un determinado espacio en la carretera en un cierto instante. Esta variable puede ser expresada en unidades de *vehículos/Km* o *vehículos/m*. Usualmente la densidad puede ser aproximada a través de la siguiente relación:

$$k(x, t) = \frac{y(x, t)}{v(x, t)} \quad (1.1)$$

Capacidad: Representa la expectativa del máximo número de vehículos que atraviesan un punto o sección uniforme de la carretera durante un lapso específico bajo condiciones de tráfico o de control de la vía. Esta definición implica que en una misma carretera distintas secciones tendrán una *capacidad* diferente. Se expresa en unidades de flujo.

Demanda: Es el número de vehículos que desean ingresar por algún punto de la carretera en un periodo específico de tiempo.

Uno de los primeros trabajos en donde se aborda el problema del tráfico vehicular basado en el enfoque macroscópico data de 1934. En este documento B. Greenshields presenta una caracterización del comportamiento de varios vehículos y a partir de sus observaciones (basadas en tomas fotográficas aéreas) genera una serie de relaciones entre la densidad, el

flujo vehicular y la velocidad (Greenshields, 1934). Los datos obtenidos por Greenshields muestran una relación lineal para la velocidad como función de la densidad. Esta relación se expresa de la forma:

$$v = v_{max} \left(1 - \frac{k}{k_j} \right) \quad (1.2)$$

Donde k_j representa la densidad de atascamiento. De la expresión (1.1) es posible conocer el flujo a partir de la velocidad y la densidad. De esta forma, considerando el flujo y la expresión (1.2) se obtiene que:

$$y = vk = v_{max}k \left(1 - \frac{k}{k_j} \right) \quad (1.3)$$

Las relaciones entre la densidad, el flujo y la velocidad son ilustradas gráficamente en la (figura 1.1). De estas tres cobra mayor relevancia la gráfica que relaciona el flujo con la densidad; $y = F(k)$ y que es conocida como *Diagrama Fundamental de Flujo Vehicular*.

A partir de las gráficas fundamentales de relación entre flujo, densidad y velocidad es posible realizar las siguientes aseveraciones:

- En el *Diagrama Fundamental* puede observarse que $y(0) = y(k_j) = 0$ donde k_j representa la *densidad de atascamiento*; cantidad referida a la densidad en una vía completamente congestionada. Entre estos dos extremos existen distintas condiciones de flujo. Es posible apreciar que cuando la densidad es nula (no hay vehículos sobre la vía) el flujo también lo es y la velocidad (v) que se presenta en ese escenario es una velocidad hipotética máxima. A medida que aumenta la densidad, también se incrementa el flujo pero la velocidad disminuye, pues la interacción entre los vehículos comienza a ser mayor. El Manual de Capacidad de Carreteras (Transportation Research Board, 1994) establece seis niveles de servicio (del A al F) basándose en las condiciones de flujo y densidad que estén presentes en un cierto segmento de carretera. Así pues, el nivel de servicio **A** indica una circulación en flujo libre donde la interacción entre los

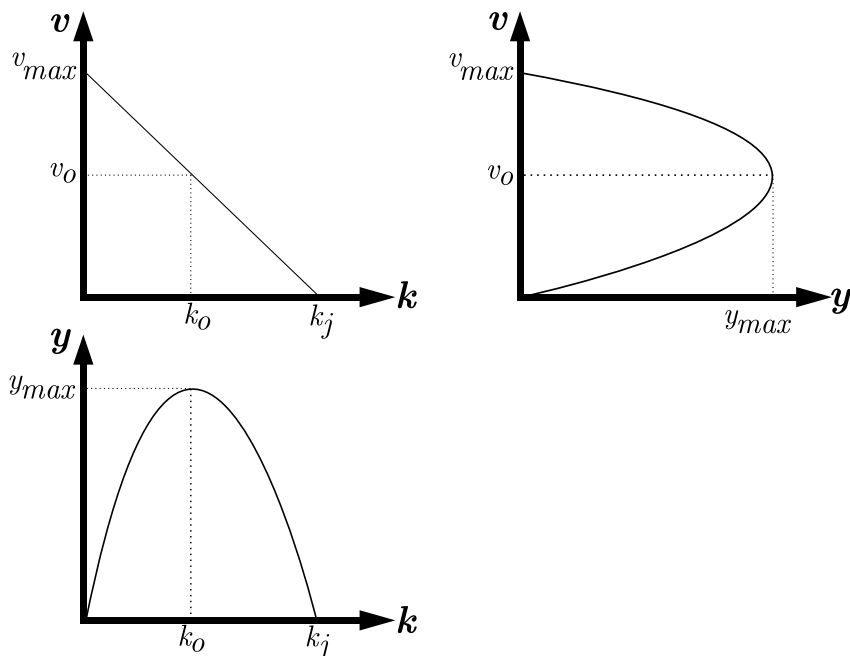


Figura 1.1: Relaciones entre densidad (k), flujo (y) y velocidad (v)

autos es muy pobre y el nivel de comodidad que experimenta el conductor es abundante. Conforme se incrementa la densidad en el segmento, los niveles de servicio varían entre **B,C,D** donde la maniobrabilidad se reduce poco a poco. En el nivel de servicio **E** la capacidad de la vía es alcanzada y cualquier alteración en el flujo principal podrá causar la formación de colas. Finalmente, en el nivel **F** se presenta una congestión plena pues la capacidad del segmento en cuestión es rebasada produciendo formación de colas. La congestión en este nivel es propagada hacia el flujo que viene detrás.

- k_o representa la densidad crítica que es el punto donde se alcanza el flujo máximo y_{max} (capacidad de la vía) de modo que la pendiente $y'(k) \geq 0$ para $k < k_o$ mientras que la pendiente $y'(k) \leq 0$ para $k > k_o$. Estas pendientes son las velocidades de *flujo libre* y *flujo congestionado* respectivamente. El punto v_o es conocido como velocidad crítica.

El punto de inflexión asociado a la densidad crítica k_o divide al *Diagrama Fundamental* en dos regiones o regímenes: *flujo libre* y *flujo congestionado*. Si bien es cierto que la dinámica en el régimen de flujo libre está bien establecida y es plenamente identificable, no sucede lo mismo en el regimen de flujo congestionado pues a medida que las condiciones de flujo

evolucionan y las interacciones entre los autos se incrementan es complicado establecer una frontera clara entre un régimen y otro. Es en esa frontera, cuando el flujo transita hacia la congestión, que pueden presentarse discontinuidades como la que se muestra en la (figura 1.2). En este caso no es posible fijar un punto asociado a la capacidad de la vía. Esta peculiaridad es conocida como *pérdida de capacidad*.

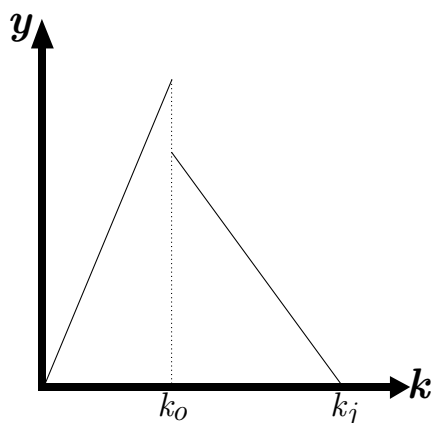


Figura 1.2: Discontinuidad en el Diagrama Fundamental

El planteamiento formal de un modelo macroscópico fue realizado en 1955 por Lighthill y Whitham (Lighthill and Whitham, 1955) y completado en 1956 por Richards (Richards, 1956). Ambos modelos son establecidos basándose en el trabajo de Greenshields y realizando analogías entre un fluido compresible y el tráfico vehicular (teoría hidrodinámica del tráfico vehicular). El modelo propuesto en estos trabajos parte de la siguiente ecuación de conservación de flujo vehicular:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = - \frac{\partial k(x, t)}{\partial t} \quad (1.4)$$

Se considera que y y k son funciones diferenciables a tramos en x y en t y aceptan la presencia de algunas singularidades (como las producidas por discontinuidades correspondientes a cuellos de botella). Sustituyendo la ecuación (1.4) en la ecuación constitutiva de Greenshields (1.3) se obtiene el modelo Lighthill-Whitham-Richards (LWR) expresado como:

$$\frac{\partial k(x, t)}{\partial t} + v_{max} \left[1 - \frac{2k}{k_j} \right] \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

El modelo LWR ha sido el punto de partida para el planteamiento de diversos modelos macroscópicos de tráfico vehicular; de este modo, existen trabajos publicados que contribuyen en la conformación de una teoría más sólida. Por ejemplo, en (Ansorge, 1990) se completa el modelo LWR con postulados tomados de la termodinámica. En (Pipes, 1969) se establece una relación entre la aceleración de la corriente de tráfico, la velocidad crítica y la tasa de cambio de la densidad. En (Newell, 1993) se propone una teoría simplificada basada en el concepto de *cuentas de vehículos acumulados* ($N(x, t)$) que se define como el número de vehículos que atraviesan por algún punto x en un cierto instante t comenzando a partir de un cierto vehículo de referencia. Una de las ventajas más significativas que ofrece este enfoque es la relativa facilidad con la que se identifica el Tiempo Total de Traslado. Considerando las definiciones de flujo y densidad se puede establecer que:

$$k(x, t) = -\frac{\partial N(x, t)}{\partial x} \text{ y } y(x, t) = \frac{\partial N(x, t)}{\partial t} \quad (1.6)$$

1.2. Modelos macroscópicos de orden superior

El modelo LWR es una muy buena representación de la dinámica vehicular sin embargo, como cualquier otro modelo matemático, no está exento de presentar detalles que no corresponden plenamente a un comportamiento real. Por ejemplo, la relación estática entre el flujo y la densidad vehicular sobre la cual se basa gran parte del desarrollo del modelo falla en la región de flujo congestionado (M. Papageorgiou and Schmidt, 1983). Otra de sus particularidades es que predice cambios de velocidad instantáneos una vez que los vehículos han librado un obstáculo sobre la vía (G. Liu and Michalopoulos, 1998).

En la literatura especializada es posible encontrar diversos trabajos en los cuales se presentan modelos que buscan reducir las debilidades del modelo LWR. Una buena alternativa para conseguir este objetivo es adicionar términos de orden superior que brinden al modelo la

capacidad de predecir comportamientos reales tales como el cambio gradual en la velocidad. La primera referencia que se tiene sobre un modelo de estas características se encuentra en (Payne, 1971). En dicho trabajo se propone un modelo de orden superior basado en el principio de conservación vehicular y enriqueciéndose con ciertas consideraciones microscópicas que ayudan a capturar la reacción del conductor ante cambios en la densidad. El modelo planteado por Payne es el siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\tau} \left(u_e(k) - u - \frac{\nu}{k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) \quad (1.7)$$

En la ecuación (1.7), la variable $u(x, t)$ representa la velocidad media de flujo. Según el análisis microscópico realizado por Payne, τ es llamado *tiempo de reacción del conductor* que bien puede ser llamado *tiempo de relajación* desde un enfoque macroscópico, u_e es la velocidad deseada y ν es un coeficiente de anticipación.

En general, los modelos de orden superior siguen la estructura del primer modelo planteado por Payne, pero modifican los términos asociados al tiempo de reacción y al coeficiente de anticipación, además de agregar algunos otros, tal como se presenta en (Kuhne, 1984) donde se incluye un término debido a la viscosidad. A partir de comparaciones y análisis realizados entre los resultados que brindan cada uno de los modelos, es que ha sido posible encontrar ciertas peculiaridades en ellos. Por ejemplo, en (S.Schochet, 1988) se establece que cuando el tiempo de reacción tiende a cero, el modelo de Payne converge al modelo LWR. En ese mismo sentido en (Daganzo, 1995b) se puntualiza como ante algunas condiciones iniciales los modelos de orden superior producen velocidades negativas haciéndolos inutilizables en aplicaciones prácticas. Como respuesta, existen trabajos donde se plantean modelos que evitan este problema un ejemplo de esto se encuentra en (G. Liu and Michalopoulos, 1998).

Un punto a resaltar sobre los modelos macroscópicos es que son ampliamente utilizados en el diseño de leyes de control de tráfico basadas en la colocación y manipulación estratégica de rampas de acceso y salida sobre vías de alta velocidad. Un ejemplo claro de una estrategia de control de este tipo se presenta en (M. Papageorgiou and Blosseville, 1991).

1.3. Otros enfoques y modelos de tráfico

Dada la complejidad que involucra el estudio del tráfico es razonable que exista una amplia diversidad de enfoques y criterios bajo los cuales es posible establecer ciertos modelos que lo representen. A continuación se brinda una breve descripción de algunos de estos modelos.

1.3.1. Modelos de cambio de carril

En una vía de alta velocidad es frecuente y natural que los conductores decidan realizar cambios de carril. Estudiar y describir el impacto que estos cambios tienen sobre el flujo y la densidad es el objetivo de estos modelos. En (D. Gazis and Weiss, 1962) se propone un modelo que establece que la razón de cambio entre carriles adyacentes es proporcional a la diferencia entre los errores de densidad retardados por un tiempo de reacción constante τ :

$$Q_{1 \rightarrow 2}(t) = \lambda [k_2(t - \tau) - k_1(t - \tau) - (k_{2o} - k_{1o})] \quad (1.8)$$

donde $Q_{1 \rightarrow 2}(t)$ es la razón de cambio entre el carril 1 y el carril 2, λ es una constante de proporcionalidad, k_{io} es la densidad crítica del i -ésimo carril. Considerando una distribución uniforme de densidades y que durante el proceso no se agregan ni retiran automóviles, se tiene entonces que $\dot{k}_1(t) = -\dot{k}_2(t) = Q_{1 \rightarrow 2}(t)$.

1.3.2. Distribución de Poisson

Los modelos macroscópicos descritos obedecen a un comportamiento determinístico sin embargo el tránsito también puede ser analizado como un proceso aleatorio. Según la distribución de Poisson (Jaimes, 2008)(Wohl and Martin, 1967), la probabilidad p de que n vehículos lleguen a un cierto punto fijo en un intervalo t viene dada por:

$$p(n) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} \text{ con } n = 0, 1, \dots, \infty \quad (1.9)$$

donde μ es el promedio de llegadas de vehículos en un intervalo t . Este modelo únicamente tiene validez con valores bajos y medios de flujo. Las principales aplicaciones de este enfoque están en el control de intersecciones, estimación de filas y demoras y por supuesto predicción de arribos a puntos de interés.

1.3.3. Modelos mesoscópicos

Los modelos mesoscópicos o cinéticos (D.R. Leonard and Taylor, 1989)(Wilco Burghout, 2005) basan gran parte de sus postulados en la mecánica estadística (Landau and Lifshitz, 1980) de modo que combinan las propiedades tanto de los modelos microscópicos como de los macroscópicos. Bajo esta perspectiva se analiza también la dinámica aislada de cada vehículo pero se asume que esta dinámica se ve influenciada directamente por factores macroscópicos.

1.4. Objetivo

El objetivo que se establece en este trabajo es plantear un modelo macroscópico de tráfico vehicular. Se pretende que dicho modelo capture los efectos histeréticos debidos a los cambios en la densidad producidos sobre todo en la frontera entre el régimen de flujo libre y flujo congestionado donde se observa el fenómeno de pérdida de capacidad. Con todo esto, el modelo debe brindar una aproximación certera de la velocidad de onda en régimen de flujo congestionado.

Se realizará el análisis dinámico del modelo planteado, esto supone encontrar los puntos de equilibrio además de probar estabilidad del modelo.

Se deberá además realizar diversas simulaciones numéricas del modelo propuesto a fin de comparar los resultados obtenidos con otros dados por un modelo definido en la literatura.

1.5. Organización

La organización de este trabajo se dispone de la siguiente manera:

El presente capítulo brinda una introducción a los modelos de tráfico vehicular haciendo énfasis en los modelos macroscópicos. Se brinda también un panorama general sobre el

desarrollo cronológico de estos modelos. Posteriormente se describen los modelos de orden superior y finalmente se reseñan otros enfoques para el modelado del tráfico.

En el capítulo dos se brinda una descripción detallada del Modelo de Transmisión por Celdas (MTC) que representa la base sobre la cual descansa el modelo propuesto en este trabajo. Se analiza su desarrollo y se presenta una modificación al modelo que permite distintos tamaños de celdas; del mismo modo se describe al modelo empleado en la representación de vías con rampas de acceso y salida. Se realiza también una descripción completa del Modelo Asimétrico de Transmisión por Celdas (MATC) que es una variación del MTC original.

En el capítulo tres se presenta el modelo planteado en este trabajo, dicho modelo recibe el nombre de Modelo Histerético de Transmisión por Celdas (MHTC). Dentro de este capítulo también se desarrolla el análisis dinámico del modelo.

En el cuarto capítulo se presentan diversas simulaciones numéricas y los resultados obtenidos en estas. En base a estas simulaciones se hace una comparación entre los resultados obtenidos con el MHTC y el MTC.

Finalmente se presentan las conclusiones de este trabajo así como algunas recomendaciones y trabajo futuro.

Capítulo 2

Modelo de Transmisión por Celdas

En este capítulo se presenta una descripción del modelo sobre el cual está basado gran parte del trabajo desarrollado en esta tesis, este modelo es conocido como el Modelo de Transmisión por Celdas (MTC). Además de mostrar las principales características de este modelo, se hace una revisión de los trabajos existentes en la literatura donde se le ha utilizado en el diseño de diversas leyes de control. Finalmente, se hace una reseña del Modelo Asimétrico de Transmisión por Celdas (MATC) que es una variante del modelo original y que es utilizado en la optimización de algoritmos basados en la manipulación de rampas de acceso y salida

2.1. Perspectiva del Modelo

El Modelo de Transmisión por Celdas (MTC) (Daganzo, 1994) es en esencia una aproximación en diferencias finitas del modelo LWR. Su análisis se basa en la división de la vía en secciones homogéneas (celdas) que se numeran consecutivamente comenzando con la celda localizada más hacia la izquierda (figura 2.1). En el MTC original, se considera que los vehículos circulan en flujo libre a una cierta velocidad constante de modo que la longitud de cada celda es establecida como la distancia recorrida por un auto en una iteración de tiempo y se asume que todos los vehículos en una celda avanzan hacia la celda siguiente en esa iteración. De esta forma se tiene que en flujo libre:

$$n_{i+1}(t + 1) = n_i(t) \quad (2.1)$$

donde $n_i(t)$ es el número de vehículos presentes en la i -ésima celda en el instante t .

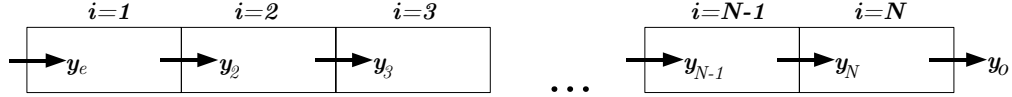


Figura 2.1: División en celdas de una vía

En el MTC se consideran además las siguientes variables:

- $N_i(t)$: Máximo número de vehículos que pueden alojarse en la celda i en el instante t .
- $Q_i(t)$: Máximo número de vehículos que pueden fluir hacia la celda i en una iteración de tiempo. Este valor refiere directamente a la capacidad de la i -ésima celda.
- $N_i(t) - n_i(t)$: Número de vehículos para llegar a la capacidad de la i -ésima celda en el instante t . Esta cantidad es proporcional a la cantidad de espacio vacío en la celda.

Considerando las variables anteriores, Daganzo plantea el MTC con base en la siguiente recursión:

$$n_i(t + 1) = n_i(t) + y_i(t) - y_{i+1}(t) \quad (2.2)$$

Donde $y_i(t)$ es el flujo que circula de la celda $i - 1$ hacia la celda i y es calculado como el mínimo de tres valores de modo que:

$$y_i(t) = \min\{n_{i-1}(t), Q_i(t), N_i(t) - n_i(t)\} \quad (2.3)$$

Los flujos de entrada en la red son modelados según el MTC con la ayuda de un par de celdas; una celda fuente numerada como "00" que contiene un número infinito de vehículos

($n_{00}(0) = \infty$) y que descarga hacia una celda vacía "0" de dimensión infinita $N_0(t) = \infty$. Se considera que el flujo que sale de la red se descarga sobre una celda de dimensión infinita $N_{I+1} = \infty$.

Daganzo demuestra que su modelo es consistente y equivalente con el modelo LWR. Para probar esta equivalencia considera una vía homogénea, iteraciones muy pequeñas y tamaños de celdas que en flujo libre cumplen con (2.1). Bajo esta equivalencia, el MTC se asocia con un diagrama fundamental que establece una relación flujo-densidad de geometría trapezoidal tal como se observa en la figura 2.2. Según este diagrama fundamental, el régimen en flujo libre está caracterizado por la pendiente v que representa la velocidad del frente de onda en un escenario sin congestión y que es considerada como constante. En este régimen, los autos se desplazan con facilidad a la máxima velocidad que puedan desarrollar según las condiciones de su entorno y el flujo es calculado en base a la siguiente relación lineal:

$$y_l = vk \quad (2.4)$$

A medida que se incrementa la densidad, el espacio libre en la carretera disminuye y los vehículos compiten cada vez más por ese espacio incrementando también las interacciones entre ellos. De este modo, el flujo transita al régimen congestionado que es caracterizado por una velocidad de onda w que viaja en sentido contrario a la dirección del flujo y se tiene que $w < v$. En este régimen, el flujo es calculado como:

$$y_c = w(k_j - k) \quad (2.5)$$

La recta y_{max} representa la capacidad de la vía e intenta aproximar la región cóncava de transición entre los dos regímenes. Así pues, el flujo que puede circular entre una celda y otra es calculado finalmente como:

$$y_i(t) = \min\{v_{i-1}k_{i-1}, y_{max,i}, w_i(k_j - k_i)\} \quad (2.6)$$

Considerando la densidad de la i -ésima celda como variable de estado en lugar del número de vehículos (Laura Muñoz and Álvarez Icaza, 2003) se completa entonces el MTC con la siguiente ley de conservación:

$$\dot{k}_i = \frac{1}{L_i}(y_i - y_{i+1}) \quad (2.7)$$

Donde L_i representa la longitud de la celda. A diferencia del MTC original (ecs. 2.2-2.3) el modelo modificado (ecs. 2.6-2.7) no obliga a que este tamaño sea uniforme entre todas las celdas.

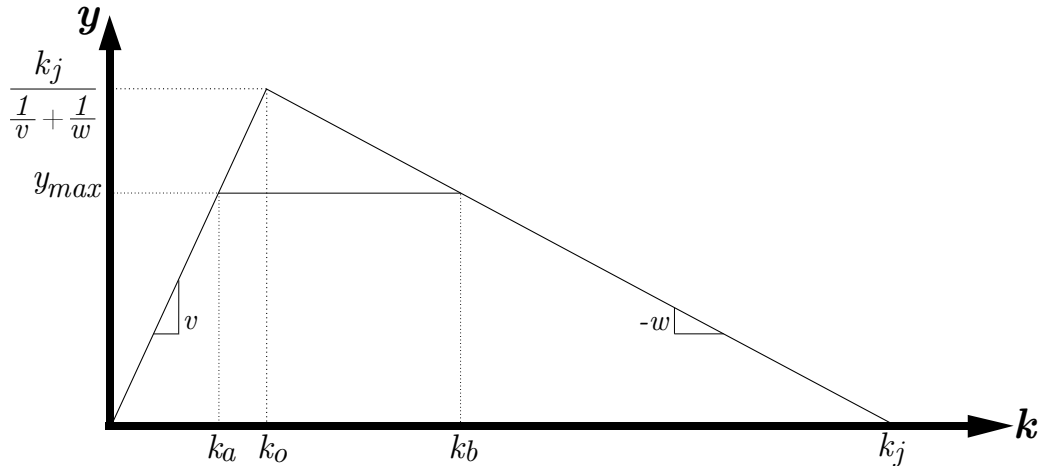


Figura 2.2: Diagrama fundamental asociado al Modelo de Transmisión por Celdas

A pesar de su sencillez, el MTC brinda resultados coherentes pues logra replicar aceptablemente el comportamiento que se presenta en situaciones reales. Además, su flexibilidad le permite experimentar con ciertas modificaciones afin de obtener nuevos y mejores resultados dependiendo de la aplicación que se tenga. Algunos ejemplos de estas modificaciones son el Modelo de Transmisión por Celdas Escalado (Daganzo, 1999) y el Modelo Asimétrico de Transmisión por Celdas (Gomes, 2004) que se detalla más adelante.

En (Laura Munoz and Álvarez Icaza, 2007) se propone un esquema identificado como Modelo de Conmutación de Modos que representa un modelo preciso, computacionalmente eficiente y fácil de calibrar. Este modelo está basado fundamentalmente en una linealización

a tramos del MTC; los modos a los que se hace referencia son cinco condiciones de flujo en las que se puede encontrar una sección de la vía tratada. Así mismo, se reporta una metodología de calibración basada en un esquema de mínimos cuadrados.

Tomando como referencia el Modelo de Conmutación de Modos, en (Rosas-Jaimes and Álvarez Icaza, 2005) se proponen dos esquemas de observación para la densidad y la velocidad de flujo respectivamente.

2.1.1. Condiciones de frontera

La expresión (2.4) establece que el régimen de flujo libre está dominado por las condiciones en la *corriente superior* en tanto el flujo congestionado es descrito por las condiciones en la *corriente inferior* como lo indica la expresión (2.5). Sin embargo, las condiciones en la frontera para la primera y última celda deben ser modificadas para modelar el flujo que entra y sale de la porción de carretera analizada.

Respecto a la celda $i = 1$, el MTC modificado considera un flujo $y_{ent}(t)$ que representa un perfil de entrada que demanda acceder al tramo de carretera. Mientras existan condiciones de flujo libre este perfil logrará acceder fácilmente. Sin embargo, conforme las condiciones de flujo se desplazan hacia la congestión, el flujo que demanda entrar por la primera celda se verá limitado y eventualmente se formarán filas o colas en el espacio antecedente a esta celda. Concretamente, el flujo que circula hacia la primera celda se calcula como:

$$y_e(t) = \min\{y_{ent}(t), y_{max,1}, w_1(k_{j,1} - k_1)\} \quad (2.8)$$

Para la celda $i = I$, el flujo que sale de la sección de carretera es calculado de la siguiente forma:

$$y_o(t) = \min\{v_I k_I, y_s(t)\} \quad (2.9)$$

La variable $y_s(t)$ corresponde con el valor límite del flujo deseado a la salida de la sección

de carretera simulada.

2.1.2. Redes de celdas

Hasta este momento se ha planteado un modelo que representa adecuadamente una vía dividida en celdas ordenadas secuencialmente sin embargo, en la realidad es común encontrar vías de alta velocidad con configuraciones un tanto más complejas donde el flujo de una determinada sección de carretera se une con el flujo proveniente de otra vía o bien ese flujo se divide al encontrar alguna ramificación. De esta forma se crea una red vial tan compleja como lo establezcan las uniones o divergencias en la carretera. Estas geometrías de vía efectivamente son consideradas por el MTC como redes de celdas (Daganzo, 1995a). El MTC contempla la formación de estructuras básicas de máximo tres celdas donde cada celda representa un *nodo* y la unión entre una y otra celda representa un *lazo*. En cada *nodo* de la red pueden converger a lo más dos flujos; del mismo modo, en cada nodo pueden diverger dos flujos como máximo. Cada *lazo* de la red únicamente puede ser un lazo convergente o bien un lazo divergente pero nunca ambos. Así pues, con el objetivo de simplificar las expresiones que modelan los flujos en una red de celdas se debe siempre reducir cualquier estructura a la representación básica. En la figura 2.3 se muestran dos esquemas inválidos y una posible representación de ellos basada en las estructuras básicas propuestas por el MTC.

Según las geometrías basadas en las estructuras básicas es posible distinguir tres tipos de celdas: celdas ordinarias (figura 2.4a), celdas convergentes (figura 2.4b) que pueden modelar rampas de acceso y celdas divergentes (figura 2.4c) que sirven como analogía con una rampa de salida.

Para modelar celdas ordinarias en una red de celdas, se reescribe la expresión (2.6) como:

$$y_l(t) = \min\{S_{Bl}, R_{El}\} \quad (2.10)$$

Donde S_{Bl} es el flujo que puede ser enviado por la celda Bl . En tanto, R_{El} es el flujo que la celda El es capaz de recibir. Estas dos variables son calculadas como:

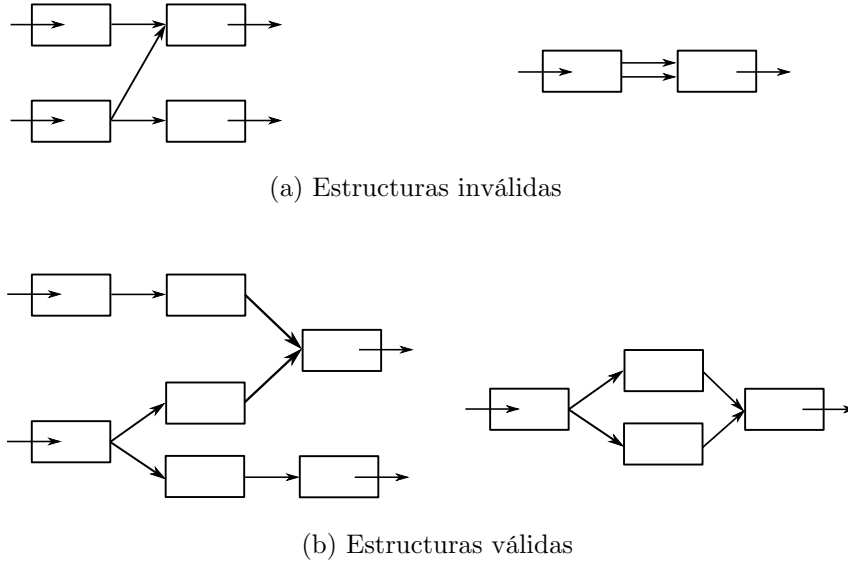


Figura 2.3: Estructuras de red válidas e inválidas

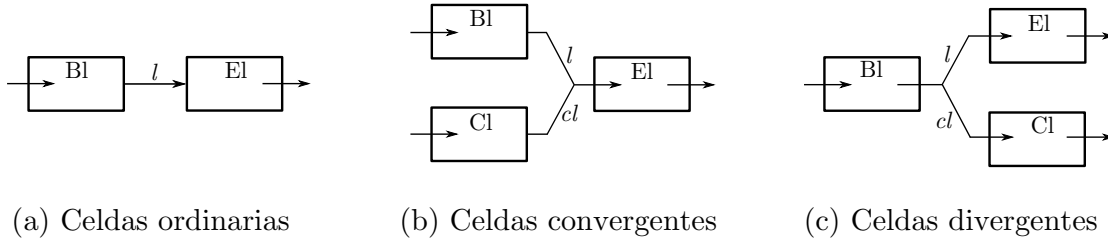


Figura 2.4: Tipos de conexión de celdas

$$S_{Bl} = \min\{v_{Bl}k_{Bl}, y_{max,Bl}\} \tag{2.11}$$

$$R_{El} = \min\{w_{El}(k_{j,El} - k_{El}), y_{max,El}\} \tag{2.12}$$

Para el caso de celdas convergentes, la determinación de los flujos que emanan desde las celdas de origen hasta la correspondiente celda de destino puede realizarse con ayuda de la figura 2.5. En esta figura los flujos y_l y y_{cl} forman un plano dentro del cual se localiza el rectángulo limitado por los valores de flujo S_{Bl} y S_{CL} de modo que $0 \leq y_l \leq S_{Bl}$ y $0 \leq y_{cl} \leq S_{Cl}$. En la figura 2.5 también se distingue la línea descrita por:

$$\frac{y_{cl}}{y_l} = \frac{p_{cl}}{p_l} \quad (2.13)$$

siendo p_{cl} y p_l proporciones de flujo provenientes de las celdas Cl y Bl respectivamente y que son aceptados por la celda El . Puede también considerarse como una medida de la prioridad para el flujo que proviene de una determinada celda. Para estos factores de proporción se satisface: $0 \leq p_l, p_{cl} \leq 1$ y $p_l + p_{cl} = 1$.

Si las dos celdas de origen Bl y Cl presentan condiciones de flujo libre entonces se debe cumplir lo establecido por la siguiente expresión:

$$S_{Bl} + S_{Cl} < R_{El} \quad (2.14)$$

En este escenario, la celda El dispone del espacio necesario para que los flujos provenientes de las celdas de origen entren en su totalidad y se combinen e interactúen con facilidad. Esta condición se ilustra con la línea de pendiente negativa (i) que no interseca al rectángulo. Los flujos que entran en la celda El son establecidos como las coordenadas del punto P señalado en el rectángulo, es decir:

$$y_l = S_{Bl} \quad (2.15)$$

$$y_{cl} = S_{Cl} \quad (2.16)$$

Por otro lado, si las condiciones de flujo y densidad en las celdas de origen corresponden con un escenario de congestión se tendrá que la suma de los flujos convergentes superará a la capacidad de recepción de la celda El , esto es:

$$S_{Bl} + S_{Cl} \geq R_{El} \quad (2.17)$$

Si la condición (2.17) se cumple es posible que se presenten dos situaciones distintas: las dos celdas de origen presentan condiciones de flujo congestionado o bien que únicamente una de esas celdas se encuentra congestionada. La primera posibilidad se representa gráficamente en la figura 2.5 mediante el punto Q localizado al interior del rectángulo $S_{Bl} - S_{Cl}$. Este punto es la intersección de la recta (ii) con la recta de pendiente positiva O . Esta situación se da pues únicamente una porción de los dos flujos convergentes puede moverse libremente en la celda de destino. La situación de flujo mixto donde una de las dos celdas de origen se encuentra congestionada se asocia con el punto R'' localizado fuera del rectángulo $S_{Bl} - S_{Cl}$ y que corresponde a la intersección de la recta (iii) con la recta de pendiente positiva O . En este caso uno de los dos flujos de convergencia puede moverse libremente. En tanto, para la celda congestionada sólo una porción del flujo que de ella emana logra acceder hacia la celda de destino El . En cualquiera de estas situaciones los flujos de convergencia son calculados como:

$$y_l(t) = \text{med}\{S_{Bl}, R_{El} - S_{Cl}, p_l R_{El}\} \quad (2.18)$$

$$y_{cl}(t) = \text{med}\{S_{Cl}, R_{El} - S_{Bl}, p_{cl} R_{El}\} \quad (2.19)$$

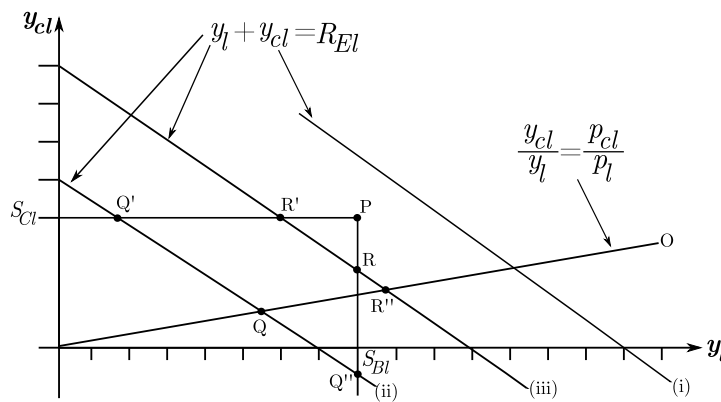


Figura 2.5: Diagrama de flujos convergentes

El cálculo de los flujos involucrados en una configuración de celdas divergentes es relativamente más sencillo. En este caso se considera que una cierta proporción del flujo de la

celda Bl decide continuar hacia la celda El de modo que se obedece a una razón $\beta_{El} \in [0, 1]$ mientras que otra proporción del flujo continúa hacia la celda Cl donde se tiene la relación $\beta_{Cl} \in [0, 1]$ con lo cual $\beta_{El} + \beta_{Cl} = 1$. Utilizando estas razones, los flujos en la divergencia estarán dados por:

$$y_l(t) = \beta_{El}y_{Bl}(t) \quad (2.20)$$

$$y_{cl}(t) = \beta_{Cl}y_{Bl}(t) \quad (2.21)$$

2.1.3. Formación de colas de vehículos

A medida que las condiciones de flujo y densidad presentes en la primera celda se trasladan hacia la congestión es común que se formen filas de vehículos que compiten por ingresar y alojarse en el espacio vacío de dicha celda. En este caso, el flujo causado por los vehículos formados en la cola debe sumarse al flujo que demanda ingresar en la celda, con lo cual se tendrá un nuevo valor de flujo S_{ent} descrito como:

$$S_{ent} = a(t) \left(\frac{v}{L_{ent}} \right) + y_{ent}(t) \quad (2.22)$$

Donde L_{ent} es la longitud de la celda y $a(t)$ es el número de vehículos acumulados en la cola. Este último valor es actualizado con:

$$a(t + \Delta t) = a(t) + y_{ent}(t)\Delta t - y_e(t)\Delta t \quad (2.23)$$

Con $y_e(t)$ como el flujo que puede ingresar en la primera celda. Este valor corresponde con una modificación de la expresión (2.8) que se puede reescribir como:

$$y_e(t) = \min\{S_{ent}, y_{max,1}, w_1(k_{j,1} - k_1)\} \quad (2.24)$$

Las ecuaciones (2.22) y (2.23) también son utilizadas para modelar las colas de vehículos que se forman en rampas de acceso como la que se muestra en la figura 2.6. En este caso se tiene un flujo r_{d_m} que demanda ingresar hacia la celda donde está conectada la rampa de acceso, $m \in [1 \dots M]$ donde M es el número de rampas de acceso presentes en el tramo de vía estudiado. El valor de r_{e_m} corresponde con el flujo de la m -ésima rampa que logra acceder hacia la celda. El flujo total que demanda ingresar por la rampa de acceso se expresa como:

$$S_{r_m} = a(t) \left(\frac{v}{L_{r_m}} \right) + r_{d_m}(t) \quad (2.25)$$

Donde L_{r_m} es la longitud de la m -ésima rampa de acceso. La geometría de celdas convergentes modela adecuadamente el comportamiento del flujo que ingresa por una rampa de acceso conectada sobre una determinada celda de modo que en un escenario libre de congestión, se considera que todo el flujo que demanda ingresar por la rampa podrá acceder a la celda libremente con lo cual $r_{e_m} = S_{r_m}$ tal como lo sugiere la expresión (2.16). En cambio, en una situación de congestión este flujo deberá calcularse con base en la ecuación (2.19).

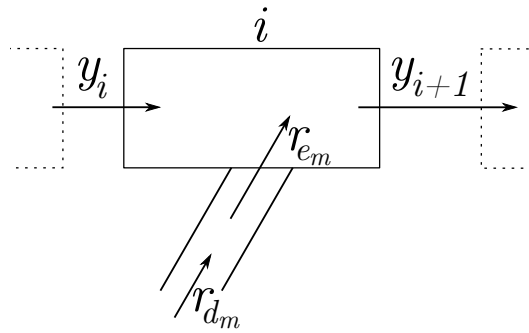


Figura 2.6: Rampa de acceso conectada en una celda

El flujo que ingresa a través de las rampas de acceso modifica la dinámica de la celda a la cual está conectada de modo que la ley de conservación basada en la densidad se establece como:

$$\dot{k}_i = \frac{1}{L_i}(y_i - y_{i+1} + r_{e_m}) \quad (2.26)$$

2.2. Modelo Asimétrico de Transmisión por Celdas

El Modelo Asimétrico de Transmisión por Celdas (MATC) (Gomes, 2004) es una variante del MTC original utilizado en la optimización de leyes de control de acceso a vías rápidas (Gomes and Horowitz, 2006) así como en el diseño de esquemas predictivos. La diferencia central entre el MATC y el MTC descansa en el tratamiento de los flujos convergentes en una red de celdas. El MTC es *simétrico* pues no se ve alterado al intercambiar la disposición de las celdas de origen y sus correspondientes flujos. En cambio el MATC define y diferencia claramente entre flujos de *paso* y flujos de *unión* en un esquema convergente.

2.2.1. Ecuaciones del Modelo Asimétrico de Transmisión por Celdas

El MATC modela tramos de carretera de un único sentido como el mostrado en la figura 2.7. De forma similar al MTC, la vía se divide en I secciones, cada sección debe contener a lo más una rampa de acceso y/o una rampa de salida. En caso que en una misma sección se encuentre una rampa de acceso y una de salida, la rampa de acceso deberá situarse antes de la rampa de salida. Las secciones se numeran de $0 \dots I - 1$ comenzando con la sección en el extremo más alejado de la corriente superior. En el punto de unión entre una sección y una rampa de acceso se deben distinguir dos tipos de ramas; una rama principal o de paso y una rama de unión que se distingue por ser la rampa de acceso.

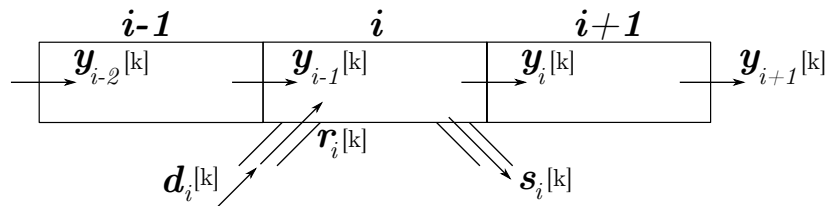


Figura 2.7: División de una vía con el MATC

El tiempo se divide en K intervalos uniformes Δt . Se consideran también los siguientes

conjuntos de secciones e índices de tiempo:

- \mathcal{I} : Conjunto de todas las secciones que componen la vía. $\mathcal{I} = \{0 \dots I - 1\}$
- \mathcal{E} : Conjunto de todas las secciones con rampas de acceso. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{I}$
- \mathcal{E}^+ : Conjunto de todas las secciones con rampas de acceso controladas. $\mathcal{E}^+ \subseteq \mathcal{E}$
- \mathcal{K} : Conjunto de intervalos de tiempo. $\mathcal{K} = \{0 \dots K - 1\}$

y las siguientes variables y parámetros:

- $n_i[k]$: Número de vehículos presentes en la sección i en el tiempo $k\Delta t$
- $l_i[k]$: Número de vehículos formados en la rampa de la sección $i \in \mathcal{E}$ en el instante $k\Delta t$
- $y_i[k]$: Número de vehículos que se desplazan desde la sección i a la sección $i + 1$ en el intervalo k
- $r_i[k]$: Número de vehículos que entran a la sección $i \in \mathcal{E}$ a través de la rampa de acceso conectada en esa sección en el intervalo k
- $d_i[k]$: Demanda para la rampa $i \in \mathcal{E}$
- $s_i[k]$: Número de vehículos que salen por la rampa de salida durante el intervalo k
- $\beta_i[k]$: Razón de separación para la i -ésima rampa de salida
- $r_i^c[k]$: Razón de entrada para la sección $i \in \mathcal{E}^+$
- \bar{s}_i : Capacidad de la rampa de salida

Además de los parámetros que definen la velocidad de onda en flujo libre y flujo congestionado, la densidad de atascamiento, la densidad crítica y la capacidad de la sección, el MATC toma en cuenta tres parámetros de influencia α_i , γ_i y ξ_i así como un parámetro \bar{s}_i referido a la capacidad de la rampa de salida.

En un esquema divergente (rampa de salida), el MATC calcula el flujo que sale por la rampa de salida de la siguiente manera:

$$s_i[k] = \frac{\beta_i[k]}{\bar{\beta}_i[k]} y_i[k] \quad (2.27)$$

Donde $\beta_i[k] \in [0, 1]$ es una razón de separación similar a la empleada por el MTC, $\bar{\beta}_i[k] \triangleq 1 - \beta_i[k]$. Esta razón de proporción se define para cada una de las secciones y se establece igual a 0 si la sección no contiene ninguna rampa de salida. El MATC considera la rampa de salida como una rama que descarga todos los vehículos que circulan por ella hacia una sección imaginaria con capacidad infinita; de este modo la rama de salida no genera congestión en la vía principal.

El flujo sobre la vía principal se calcula como:

$$y_i[k] = \min \left\{ \bar{\beta}_i[k] v_i(n_i[k] + \delta_i \gamma_i r_i[k]); w_{i+1}(\bar{n}_{i+1} - n_{i+1}[k]) - \delta_{i+1} \alpha_{i+1} r_{i+1}[k]; \bar{y}_i; \frac{\bar{\beta}_i[k]}{\beta_i[k]} \bar{s}_i \right\} \quad (2.28)$$

Con:

$$\delta_i \triangleq \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{cualquier otro} \end{cases}$$

un indicador para la sección que contenga alguna rampa de acceso. El parámetro γ_i determina la influencia directa del flujo que entra por la rampa de acceso sobre la corriente inferior y se establece como una porción que logra ingresar a través de la rampa y que alcanza la frontera de la sección en la corriente inferior en el mismo intervalo. Este parámetro debe ser elegido basándose en la distancia de la rampa de acceso hacia la frontera inferior. La influencia de la rampa de acceso sobre la corriente superior se determina a través del parámetro α_i que brinda cierta información sobre la posición de la rampa de acceso en la sección; entre más grande sea el valor α_i se tendrá una mayor aproximación de la rampa de acceso hacia la frontera de la corriente superior. La influencia de cada uno de los parámetros

establecidos por el MATC se muestra gráficamente en la figura 2.8. Los parámetros \bar{n}_i y \bar{y}_i representan la densidad de atascamiento y la capacidad de la vía principal respectivamente.

Los flujos en las rampas de acceso se calculan con base en la siguiente expresión:

$$r_i[k] = \begin{cases} \min\{l_i[k] + d_i[k]; \xi_i(\bar{n}_i - n_i[k])\} & \text{si } i \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}^+ \\ \min\{l_i[k] + d_i[k]; \xi_i(\bar{n}_i - n_i[k]; r_i^c)\} & \text{si } i \in \mathcal{E}^+ \end{cases} \quad (2.29)$$

El parámetro ξ_i determina la porción de espacio disponible en la vía principal para los vehículos que ingresan a través de la rampa de acceso.

La principal ventaja del MATC sobre el MTC original es la inclusión de la función concava \min en (2.28) que es más útil en el diseño de esquemas de optimación que la función med en (2.18) y (2.19).

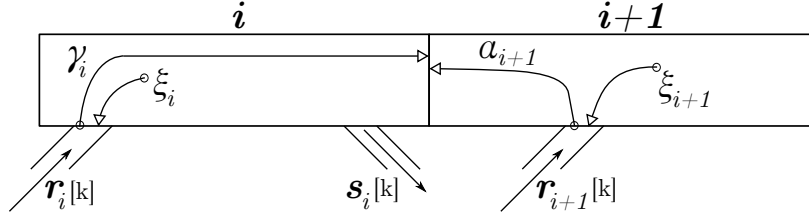


Figura 2.8: Parámetros de influencia establecidos por el MATC

Para la rampa de acceso se establece la siguiente ley de conservación:

$$l_i[k+1] = l_i[k] + d_i[k] - r_i[k] \quad (2.30)$$

Para la vía principal la ley de conservación con la cual se actualiza el modelo es la siguiente:

$$\begin{aligned} n_i[k+1] &= n_i[k] + y_{i-1}[k] + \delta_i r_i[k] - y_i[k] - s_i[k] \\ n_i[k+1] &= n_i[k] + y_{i-1}[k] + \delta_i r_i[k] - y_i[k] / \bar{\beta}_i[k] \end{aligned} \quad (2.31)$$

El flujo de entrada en la primera sección ($up[k]$) se establece como el flujo sobre la vía principal en la sección 0 o bien como la demanda de una rampa ficticia conectada en la primera sección $d_0[k] = up[k]$ y $y_{-1}[k] = 0$.

Capítulo 3

Modelo Histerético de Transmisión por Celdas

En este capítulo se brinda una descripción detallada del Modelo Histerético de Transmisión por Celdas (MHTC) que es el propuesto en este trabajo. Se describe también el fenómeno conocido como pérdida de capacidad y se da cuenta del proceso asimétrico que origina el comportamiento histerético que se presenta en el flujo vehicular. Basándose en estos conceptos, se establece el MHTC.

3.1. Pérdida de capacidad

La *pérdida de capacidad* hace referencia al decrecimiento en el flujo medido en la corriente inferior de un cuello de botella. Puede entenderse al observar el flujo que atraviesa paulatinamente el cuello de botella. En estas condiciones, los vehículos no aceleran instantáneamente una vez que atraviesan el punto de congestión sino que su velocidad se incrementa gradualmente hasta alcanzar la velocidad en flujo libre. Este fenómeno produce alteraciones en el cálculo del flujo en la sección de carretera donde se localiza el cuello de botella. La pérdida de capacidad induce discontinuidades en el Diagrama Fundamental al no poder establecer claramente un valor y_{max} para la capacidad de la carretera en el punto de congestión pues dependiendo del régimen que se esté analizando, $f(k)$ tenderá a valores límite distintos.

El flujo que sale del punto de congestión se conoce como la razón de descarga de cola. El MATC modela la pérdida de capacidad con la inclusión de un parámetro (f_d) que representa esta tasa de descarga, que es menor a la velocidad máxima en flujo libre. De esta forma, el cálculo del flujo sobre la vía principal es ampliado dependiendo de las condiciones de congestión entre una determinada sección y la sección posterior. Con base en estas condiciones, podrán existir cuatro escenarios para el flujo sobre la vía principal. Estos escenarios son:

$$f_i[k] = \bar{\beta}_i[k]v_i(n_i[k] + \delta_i\gamma_i r_i[k]) \quad \text{si} \begin{cases} i \text{ Descongestionada} \\ i + 1 \text{ Descongestionada} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$f_i[k] = \min\{\bar{\beta}_i[k]v_i(n_i[k] + \delta_i\gamma_i r_i[k]); w_i(\bar{n}_{i+1} - n_{i+1}[k]) - \delta_{i+1}\alpha_{i+1}r_{i+1}[k]\} \quad (3.2)$$

$$\text{si} \begin{cases} i \text{ Descongestionada} \\ i + 1 \text{ Congestionada} \end{cases}$$

$$f_i[k] = f_{d,i} \quad \text{si} \begin{cases} i \text{ Congestionada} \\ i + 1 \text{ Descongestionada} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$f_i[k] = w_i(\bar{n}_{i+1} - n_{i+1}[k] - \delta_{i+1}\alpha_{i+1}r_{i+1}[k]) \quad \text{si} \begin{cases} i \text{ Congestionada} \\ i + 1 \text{ Congestionada} \end{cases} \quad (3.4)$$

Debe observarse que esta modificación en el MATC implica que necesariamente debe existir un indicador que permita conocer el estado de congestión de una cierta sección de carretera. Al conocer ese estado, el modelo decide que flujo debe calcularse dependiendo de las condiciones existentes. Una sección se considera congestionada cuando su densidad excede un cierto valor crítico $n_{o,i}$ definido como:

$$v_i n_{o,i} = w_i (\bar{n}_i - n_{o,i}) \quad (3.5)$$

En forma general, la pérdida de capacidad se presenta debido a los cambios asimétricos en aceleración y desaceleración que se generan cuando el flujo transita entre un régimen y otro. En la figura 3.1 se presenta esta asimetría observada en el Diagrama Fundamental. La pendiente $y'(k) = w$ de la recta que caracteriza el régimen de flujo congestionado varía dependiendo del *sentido* en que evoluciona la densidad en un cierto segmento de carretera. De esta manera, la velocidad de onda w_1 se asocia con un flujo en desaceleración que transita del régimen libre al régimen congestionado. En tanto, la velocidad de onda w_2 define un flujo en aceleración producido por una reducción en la densidad dentro del régimen en flujo congestionado.

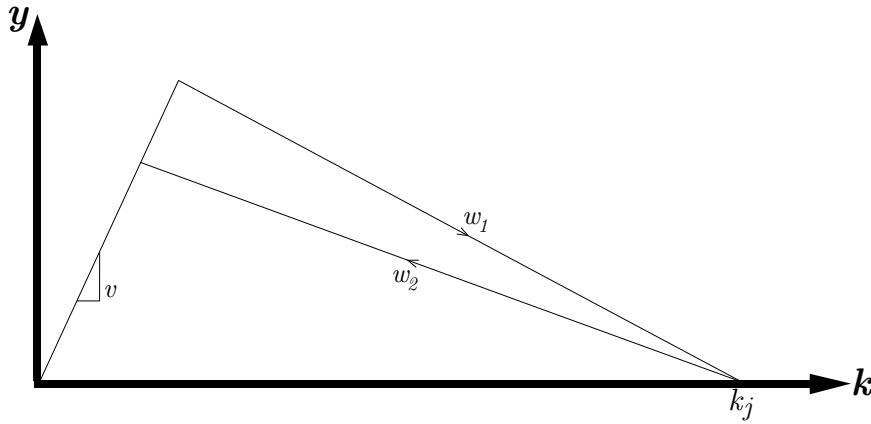


Figura 3.1: Asimetría en los cambios de dirección de k

Al capturar los cambios en la dirección de la densidad k en flujo congestionado, es posible definir una aproximación de la pendiente w de modo que se modifique este parámetro para obtener un $w(k)$. De esta manera, es también plausible encontrar un modelo que reproduzca la pérdida de capacidad sin la necesidad de un indicador que informe sobre las condiciones de densidad en la carretera.

Basado en este precepto se establece el Modelo Histerético de Transmisión por Celdas (MHTC) que se detalla en la siguiente sección.

3.2. Modelo Histerético de Transmisión por Celdas

Los procesos de aceleración y desaceleración que se presentan en el flujo vehicular no son simétricos y generan distintas curvas de relación dependiendo si el tráfico acelera o desacelera. Este fenómeno es estudiado en (Treiterer and Myers, 1974) donde se establece que dicha asimetría obedece a la presencia de fenómenos histeréticos en el flujo vehicular. El fenómeno histerético puede observarse al estudiar las curvas entre densidad y velocidad de onda tal como se muestra en la figura 3.2.

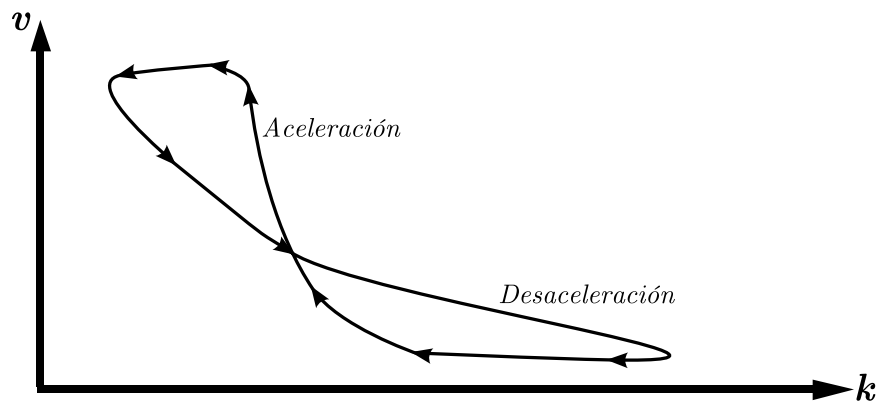


Figura 3.2: Trayectorias entre densidad (k) y velocidad (v)

En ese mismo sentido, en (Zhang, 1999) se presenta una síntesis compacta de las teorías que postulan la presencia de este fenómeno. Del mismo modo, se intenta establecer formalmente una teoría matemática sobre el comportamiento histerético del tráfico vehicular.

El modelo LWR, y por ende el Modelo de Transmisión por Celdas de Daganzo plantean, cambios instantáneos en la velocidad una vez que los vehículos atraviesan por algún punto de congestión. Así mismo, ambos modelos no contemplan la presencia del fenómeno histerético. Por supuesto, estas características no corresponden con las observaciones y mediciones obtenidas por métodos experimentales.

El modelo aquí planteado “captura” el comportamiento histerético debido a los cambios en la dirección de la densidad y a partir de ese planteamiento, modifica el valor de la velocidad de onda en flujo congestionado. De esta forma, es posible aumentar o reducir este parámetro de velocidad con lo cual se pretende brindar una aproximación de la pérdida de capacidad.

Se considera en primer lugar un modelo dinámico que sirva como auxiliar para identificar

los lazos de histéresis. De la literatura especializada se conoce que los modelos de fricción dinámica modelan en un cierto sentido la histéresis presente en las curvas entre la fuerza de fricción y el desplazamiento entre las superficies de contacto. De esta forma, se considera un modelo de fricción dinámica relativamente sencillo planteado en (Dahl, 1968) y conocido como el modelo de fricción de Dahl. Al ignorar la fuerza de Coulomb y concentrándose en el fenómeno de histéresis el modelo de Dahl puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\frac{dz}{dt} = \dot{x} - \sigma |\dot{x}| z \quad (3.6)$$

donde \dot{x} es la velocidad relativa entre las superficies de contacto.

Con una velocidad \dot{x} constante, el modelo dado por la expresión (3.6) tiene un punto de equilibrio \bar{z} expresado como:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{\sigma} \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \\ \bar{z} &= \frac{1}{\sigma} \text{sign}(\dot{x}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Si se considera ahora la dinámica de la densidad \dot{k} de modo que sea posible establecer una cierta analogía entre los cambios en dirección de la densidad en el tráfico y la velocidad en la fricción ($\dot{k} \sim \dot{x}$) se obtendrá entonces:

$$\frac{dz}{dt} = \dot{k} - \sigma |\dot{k}| z \quad (3.8)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{\sigma} \text{sign}(\dot{k}) \quad (3.9)$$

De esta manera, el modelo auxiliar (3.8) captura los efectos histeréticos producidos por los cambios en la dirección de la densidad. El parámetro σ de este modelo auxiliar no es el equivalente al parámetro que se encuentra en el modelo de Dahl original que representa el coeficiente de rigidez. En el caso del modelo auxiliar, este parámetro debe ser calibrado de

modo que se obtengan resultados adecuados.

Al conocer en que sentido evoluciona la densidad es posible determinar si el flujo presente en la sección de carretera analizada acelera o desacelera. Analizando puntualmente la pérdida de capacidad, se tendrá una cierta sección de carretera donde el tráfico se encuentra en una condición de flujo congestionado en un determinado punto antes de una frontera marcada como el punto de congestión (figura 3.3). Después de ese límite, el tráfico se encuentra en una condición de flujo libre y los vehículos aceleran gradualmente una vez que atraviesan este punto. De esta manera la velocidad de onda con que se descarga el flujo que sale del punto de congestión es recalculada como:

$$w = w_o + \sigma \Delta w z \quad (3.10)$$

Donde w_o es la velocidad nominal en flujo congestionado. El parámetro Δw es un factor de ajuste que debe ser calibrado de acuerdo a la variación deseada en la velocidad de onda en flujo congestionado.

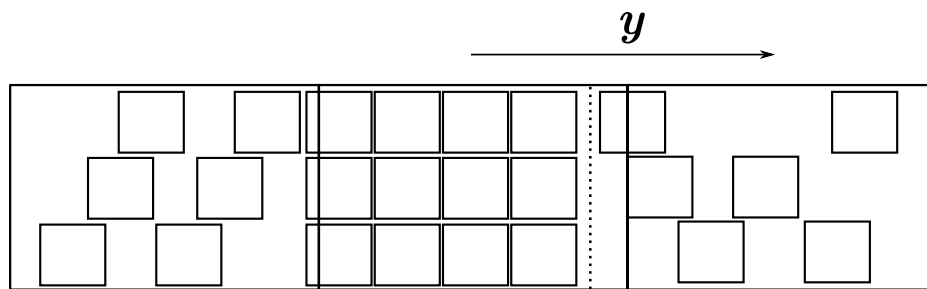


Figura 3.3: Punto de congestión

En síntesis, considerando todas las expresiones anteriores, el Modelo Histerético de Transmisión por Celdas (MHTC) se define de la siguiente manera:

$$\dot{k}_i = \frac{1}{L_i}(y_i - y_{i+1} + r_{em}) \quad (3.11)$$

$$y_i(t) = \min\{v_{i-1}k_{i-1}, y_{max,i}, w_i(k_j - k_i)\} \quad (3.12)$$

$$\dot{z}_i = \dot{k}_i - \sigma|\dot{k}_i|z_i \quad (3.13)$$

$$w_i = w_{o,i} + \sigma\Delta w_i z_i \quad (3.14)$$

Se realizan todas las consideraciones para las condiciones de frontera y cálculos para las rampas de acceso y salida establecidas en el capítulo 2.

En el régimen congestionado, cuando el flujo desacelera el MHTC calcula una velocidad de onda $w = w_o + \Delta w$ en cambio para un flujo en aceleración, la velocidad de onda será $w = w_o - \Delta w$. Estos cambios inducen pendientes distintas que pueden ser observadas en un diagrama fundamental tal como se muestra en la figura 3.4.

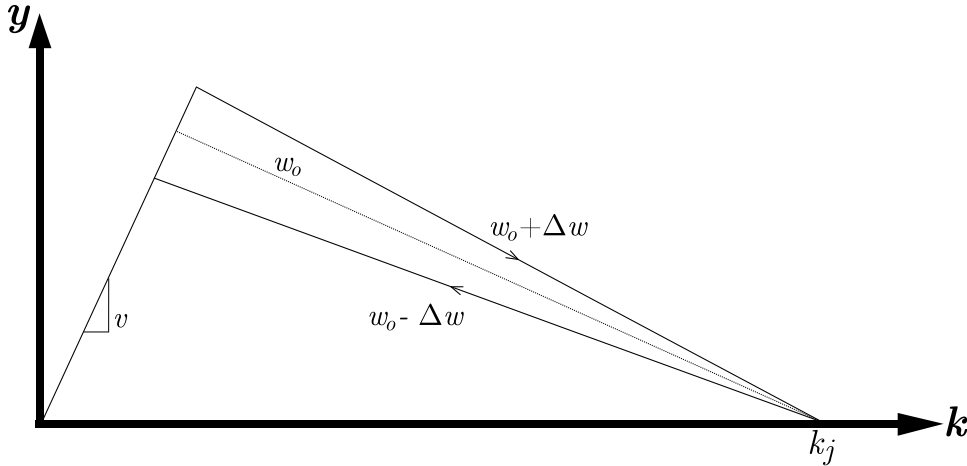


Figura 3.4: Diagrama fundamental asociado al MHTC

3.3. Análisis Dinámico del MHTC

3.3.1. Puntos de Equilibrio

El análisis siguiente se realiza suponiendo una sección de carretera homogénea sin rampas de acceso o salida.

Partiendo del régimen en flujo libre, el MHTC queda definido por las condiciones presentes en la corriente superior con lo cual el modelo es expresado como:

$$\dot{k}_i = \frac{1}{L_i}(y_i - v_i k_i) \quad (3.15)$$

Los puntos de equilibrio deben ser obtenidos a partir de la primera celda, de esta manera es necesario considerar las condiciones de frontera establecidas en la sección 2.1.1 para lo cual se indica un flujo de entrada $y_e(t)$ en la primera celda. Propagando hacia todas las celdas en la corriente inferior, el modelo definido por la expresión (3.15) tiene un punto de equilibrio \bar{k}_{i_i} en:

$$\bar{k}_{i_i} = \frac{y_e}{v_i} \quad (3.16)$$

En el régimen de flujo congestionado, el modelo queda determinado por las condiciones en la corriente inferior es decir, por el flujo que es capaz de recibir una determinada celda en la corriente inferior. De esta manera, en flujo congestionado el MHTC se expresa como:

$$\dot{k}_i = \frac{1}{L_i}(w_i(k_j - k_i) - y_{i+1}) \quad (3.17)$$

$$\dot{z}_i = \dot{k}_i - \sigma |k_i| z_i \quad (3.18)$$

En las condiciones de flujo congestionado, el análisis debe partir de la última celda, por lo tanto haciendo referencia a las condiciones de frontera, es necesario considerar el flujo $y_o(t)$ que sale de la sección de carretera. Propagando hacia las celdas en la corriente superior, se encuentra que el modelo definido por (3.17-3.18) tiene un equilibrio $\{\bar{k}_{i_c}, \bar{z}\}$ en:

$$\bar{k}_{ic} = k_j - \frac{y_o}{w_i} \quad (3.19)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{\sigma} \text{sign}(\dot{k}_i) \quad (3.20)$$

Con la velocidad de onda en flujo congestionado:

$$w_i = w_{o,i} + \sigma \Delta w_i \bar{z} = w_{o,i} + \Delta w_i \text{sign}(\dot{k}_i) \quad (3.21)$$

y la función sign definida en el sentido de Filippov:

$$\text{sign}(\dot{k}_i) = \begin{cases} -1 & \dot{k}_i < 0 \\ [-1, 1] & \dot{k}_i = 0 \\ 1 & \dot{k}_i > 0 \end{cases}$$

Considerando la expresión (3.21) es posible determinar que en régimen congestionado, el MHTC tiene tres equilibrios debidos a la dinámica histerética relacionada con las condiciones del flujo. De esta forma, los puntos de equilibrio para el MHTC en flujo congestionado están dados por:

$$\bar{k}_{ica} = k_j - \frac{y_o}{w_{o,i} - \Delta w_i} \text{ flujo en aceleración} \quad (3.22)$$

$$\bar{k}_{icd} = k_j - \frac{y_o}{w_{o,i} + \Delta w_i} \text{ flujo en desaceleración} \quad (3.23)$$

$$\bar{k}_{ico} \in [w_{o,i} + \Delta w_i, w_{o,i} - \Delta w_i] \text{ flujo constante} \quad (3.24)$$

3.3.2. Análisis de estabilidad

Para el análisis subsecuente se considera una sección de carretera homogénea dividida en tres celdas y con una rampa de acceso colocada en la segunda celda tal como se muestra en la figura 3.5.

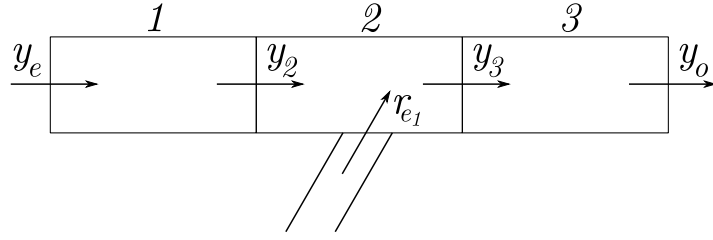


Figura 3.5: Tres celdas con una rampa de acceso

Se considera también que existen condiciones nominales de tráfico a partir de las cuales se establece una dinámica de error con las condiciones dadas por la densidad presente en cada una de las celdas.

Tres celdas con densidad en flujo libre

En este caso, se considera que todas las celdas presentan condiciones de flujo libre. De igual forma, las condiciones nominales se establecen en flujo libre. La dinámica de la sección se define como:

$$\dot{k}_1 = \frac{1}{L_1}(y_e - v_1 k_1) \quad (3.25a)$$

$$\dot{k}_2 = \frac{1}{L_2}(v_1 k_1 - v_2 k_2 + r_{e1}) \quad (3.25b)$$

$$\dot{k}_3 = \frac{1}{L_3}(v_2 k_2 - v_3 k_3) \quad (3.25c)$$

Con condiciones nominales:

$$\dot{k}_{1n} = \frac{1}{L_1}(y_e - v_1 k_{1n}) \quad (3.26a)$$

$$\dot{k}_{2n} = \frac{1}{L_2}(v_1 k_{1n} - v_2 k_{2n} + r_{e1}) \quad (3.26b)$$

$$\dot{k}_{3n} = \frac{1}{L_3}(v_2 k_{2n} - v_3 k_{3n}) \quad (3.26c)$$

Se define el error $\tilde{k}_i = k_i - k_{in}$ en términos de los cuales se escribe el siguiente sistema lineal en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{k}}_1 \\ \dot{\tilde{k}}_2 \\ \dot{\tilde{k}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v_1}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{v_1}{L_1} & -\frac{v_2}{L_2} & 0 \\ 0 & \frac{v_2}{L_2} & -\frac{v_3}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

El sistema definido por la expresión (3.27) tiene un punto de equilibrio en $\tilde{k}_i = 0$ con $i = 1, 2, 3$ local y asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de (3.27) son de parte real negativa.

Tres celdas con densidad en flujo congestionado

En este escenario, donde se considera que las tres celdas de la red se encuentran congestionadas se establece la siguiente dinámica:

$$\dot{k}_1 = \frac{1}{L_1}(w_1(k_j - k_1) - w_2(k_j - k_2)) \quad (3.28a)$$

$$\dot{k}_2 = \frac{1}{L_2}(w_2(k_j - k_2) - w_3(k_j - k_3) + r_{e1}) \quad (3.28b)$$

$$\dot{k}_3 = \frac{1}{L_3}(w_3(k_j - k_3) - y_o) \quad (3.28c)$$

Se establecen también las condiciones nominales en flujo congestionado de forma que:

$$\dot{k}_{1n} = \frac{1}{L_1}(w_1(k_j - k_{1n}) - w_2(k_j - k_{2n})) \quad (3.29a)$$

$$\dot{k}_{2n} = \frac{1}{L_2}(w_2(k_j - k_{2n}) - w_3(k_j - k_{3n}) + r_{e1}) \quad (3.29b)$$

$$\dot{k}_{3n} = \frac{1}{L_3}(w_3(k_j - k_{3n}) - y_o) \quad (3.29c)$$

Con la dinámica del error \tilde{k}_i dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{k}}_1 \\ \dot{\tilde{k}}_2 \\ \dot{\tilde{k}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{w_1}{L_1} & \frac{w_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{w_2}{L_2} & \frac{w_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{w_3}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

De nuevo, es posible probar que el sistema definido por (3.30) tiene un punto de equilibrio en $\tilde{k}_i = 0$ con $i = 1, 2, 3$ local y asintóticamente estable. En este caso es necesario considerar la dinámica histerética en términos del error \tilde{k}_i . De esta forma se tiene:

$$\dot{z}_i = \dot{\tilde{k}}_i - \sigma |\dot{\tilde{k}}_i| z_i \quad (3.31)$$

Para la expresión (3.31) con punto de equilibrio en:

$$\bar{z}_i = \frac{1}{\sigma} \text{sign}(\dot{\tilde{k}}_i)$$

se propone la función de Lyapunov: $V = \frac{z_i^2}{2}$ cuya derivada respecto al tiempo evaluada a lo largo de las trayectorias de (3.31) es:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z_i \left[\dot{\tilde{k}}_i - \sigma |\dot{\tilde{k}}_i| z_i \right] \\ &= z_i \dot{\tilde{k}}_i - z_i \sigma |\dot{\tilde{k}}_i| z_i \\ &= -|z_i| |\dot{\tilde{k}}_i| \left[\sigma |z_i| - \text{sign}(z_i) \text{sign}(\dot{\tilde{k}}_i) \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

con lo cual se demuestra la estabilidad asintótica del punto de equilibrio \bar{z}_i . Por consiguiente, se tendrá que para la velocidad en flujo congestionado w_i :

$$w_{o,i} - \Delta w \leq w_i \leq w_{o,i} + \Delta w \quad (3.33)$$

Dos celdas con densidad en flujo libre, última celda con densidad en flujo congestionado

En este caso se tiene un tipo de cuello de botella. La dinámica de la sección tendrá dos representaciones dependiendo de la condición en la frontera entre la segunda y la tercera celda. Suponiendo que para el flujo y_3 se tiene que $w_3(k_j - k_3) < v_2 k_2$ se tendrá entonces:

$$\dot{k}_1 = \frac{1}{L_1}(y_e - v_1 k_1) \quad (3.34a)$$

$$\dot{k}_2 = \frac{1}{L_2}(v_1 k_1 - w_3(k_j - k_3) + r_{e1}) \quad (3.34b)$$

$$\dot{k}_3 = \frac{1}{L_3}(w_3(k_j - k_3) - y_o) \quad (3.34c)$$

Estableciendo las mismas condiciones para los estados nominales:

$$\dot{k}_{1n} = \frac{1}{L_1}(y_e - v_1 k_{1n}) \quad (3.35a)$$

$$\dot{k}_{2n} = \frac{1}{L_2}(v_1 k_{1n} - w_3(k_j - k_{3n}) + r_{e1}) \quad (3.35b)$$

$$\dot{k}_{3n} = \frac{1}{L_3}(w_3(k_j - k_{3n}) - y_o) \quad (3.35c)$$

Con la dinámica del error \tilde{k}_i dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{k}}_1 \\ \dot{\tilde{k}}_2 \\ \dot{\tilde{k}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v_1}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{v_1}{L_1} & 0 & \frac{w_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{w_3}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Es posible demostrar que el sistema (3.36) tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en $\tilde{k}_i = 0$ con $i = 1, 3$ con lo cual se tendrá que $\dot{\tilde{k}}_2 \rightarrow 0$.

Analizando ahora el caso cuando $v_2 k_2 < w_3(k_j - k_3)$ se plantea la siguiente dinámica:

$$\dot{k}_1 = \frac{1}{L_1}(y_e - v_1 k_1) \quad (3.37a)$$

$$\dot{k}_2 = \frac{1}{L_2}(v_1 k_1 - v_2 k_2 + r_{e1}) \quad (3.37b)$$

$$\dot{k}_3 = \frac{1}{L_3}(v_2 k_2 - y_o) \quad (3.37c)$$

Con las condiciones nominales:

$$\dot{k}_{1n} = \frac{1}{L_1}(y_e - v_1 k_{1n}) \quad (3.38a)$$

$$\dot{k}_{2n} = \frac{1}{L_2}(v_1 k_{1n} - v_2 k_{2n} + r_{e1}) \quad (3.38b)$$

$$\dot{k}_{3n} = \frac{1}{L_3}(v_2 k_{2n} - y_o) \quad (3.38c)$$

Se plantea entonces la siguiente dinámica en términos del error:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{k}}_1 \\ \dot{\tilde{k}}_2 \\ \dot{\tilde{k}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v_1}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{v_1}{L_1} & -\frac{v_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{v_2}{L_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

El sistema (3.39) tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en $\tilde{k}_i = 0$ con $i = 1, 2$ con lo cual se tendrá que $\dot{\tilde{k}}_3 \rightarrow 0$.

En cualquiera de los dos casos estudiados, este escenario no presenta condiciones de estabilidad para las tres celdas en conjunto. Dependiendo de las condiciones iniciales en densidad para el flujo entre la segunda y la tercera celda, el cuello de botella puede permanecer con la densidad de alguna de las dos celdas sin llegar a un equilibrio estable.

Celdas iniciales con densidad en flujo congestionado, celda final con densidad en flujo libre

Para este caso se considera que el flujo que se traslada entre la segunda y tercera celda es

el flujo máximo que puede sostener la sección analizada. De esta manera, la dinámica queda establecida como:

$$\dot{k}_1 = \frac{1}{L_1}(w_1(k_j - k_1) - w_2(k_j - k_2)) \quad (3.40a)$$

$$\dot{k}_2 = \frac{1}{L_2}(w_2(k_j - k_2) - y_{max} + r_{e1}) \quad (3.40b)$$

$$\dot{k}_3 = \frac{1}{L_3}(y_{max} - v_3 k_3) \quad (3.40c)$$

Con las condiciones nominales:

$$\dot{k}_{1n} = \frac{1}{L_1}(w_1(k_j - k_{1n}) - w_2(k_j - k_{2n})) \quad (3.41a)$$

$$\dot{k}_{2n} = \frac{1}{L_2}(w_2(k_j - k_{2n}) - y_{max} + r_{e1}) \quad (3.41b)$$

$$\dot{k}_{3n} = \frac{1}{L_3}(y_{max} - v_3 k_{3n}) \quad (3.41c)$$

Considerando la expresión (3.40b) es posible determinar que $\dot{k}_2 < 0$ lo cual implica que la densidad en esta celda decrecerá hasta alcanzar una condición de flujo libre con lo cual el flujo entre la primera y la segunda celda será el flujo máximo y_{max} . Este comportamiento se producirá también en la primera celda. Así pues, se tendrá que todas las celdas volverán a su condición de flujo libre (como intuitivamente se puede observar). Esta configuración no es estable en el sentido de Lyapunov.

Capítulo 4

Simulaciones y Resultados

En este capítulo se presentan las distintas simulaciones que se realizaron con el Modelo Histerético de Transmisión por Celdas. Se presenta una comparativa entre los resultados obtenidos con el MHTC y el MTC.

4.1. Especificaciones

Para todas las simulaciones que se presentan en este capítulo se considera una sección de carretera homogénea dividida en cinco celdas y con dos rampas de acceso tal como se muestra en la figura 4.1. La segunda rampa de acceso se utiliza para generar congestión en la red y colas en las rampas dependiendo de las necesidades de la simulación.

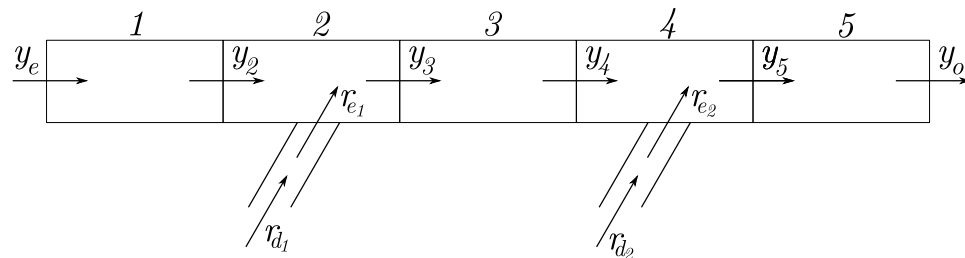


Figura 4.1: Configuración establecida para las simulaciones

Los parámetros de la carretera simulada se presentan en la tabla 4.1. Todos estos parámetros son constantes para cada una de las cinco celdas en que se ha dividido la sección.

Parámetro	Descripción	Valor	Unidades
v	Velocidad de onda en flujo libre	28.16	[m/s]
w_o	Velocidad nominal de onda en flujo congestionado	6.47	[m/s]
L	Longitud de la celda	500	[m]
k_j	Densidad de atascamiento	0.423	[veh/m]
k_o	Densidad crítica	0.082	[veh/m]
y_{max}	Capacidad de la sección	2.309	[veh/s]

Cuadro 4.1: Parámetros empleados en las simulaciones

4.2. Simulaciones para densidad en flujo libre

Se comenzó por simular la sección de carretera considerando un escenario libre de congestión con densidad en flujo libre tal que $k_i < k_o$. Los flujos que ingresan a la sección corresponden con la función:

$$y(t) = -Ae^{-Bt} \cos(Ct) + D \quad (4.1)$$

De tal forma que para el flujo $y_e(t)$ que ingresa a la sección de carretera por la primera celda se tiene:

$$y_e(t) = -e^{-0.0002t} \cos(0.00045t) + 1 \quad (4.2)$$

En tanto, para los flujos $r_{d_1}(t)$ y $r_{d_2}(t)$ que demandan ingresar por las rampas de acceso se tiene que:

$$r_{d_1}(t) = -0.07e^{-0.0001t} \cos(0.0003t) + 0.07 \quad (4.3)$$

$$r_{d_2}(t) = -0.05e^{-0.00005t} \cos(0.0002t + 1000) + 0.0282 \quad (4.4)$$

Los perfiles de entrada expresados de manera general por (4.1) son tomados de muestras

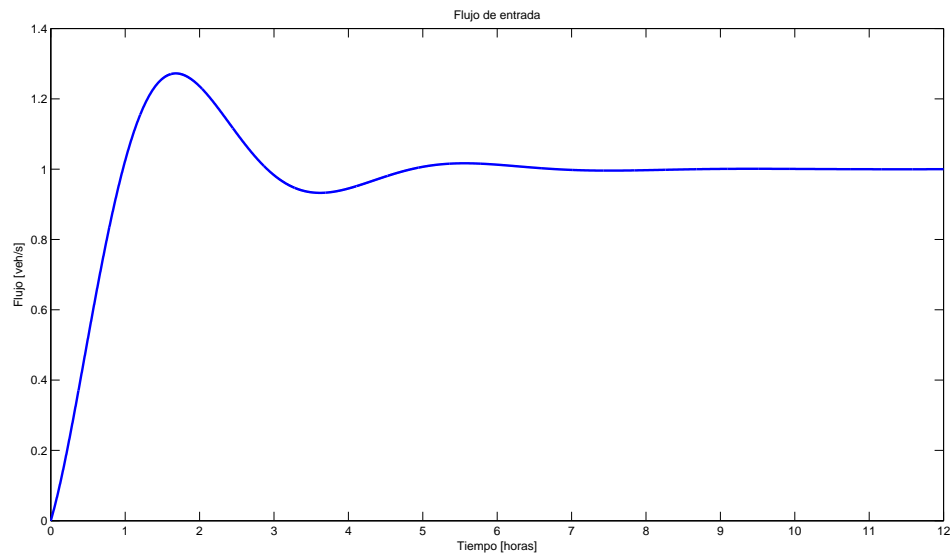


Figura 4.2: Perfil de entrada $y_e(t)$ para densidad en flujo libre

de datos reales (Jaimes, 2008). En las figuras 4.2 y 4.3 se presentan gráficamente todos los perfiles que ingresan a la sección. Para las simulaciones se consideró un periodo de 12 horas. El flujo y_o que sale de la sección de carretera se estableció como $y_o = y_{max}$.

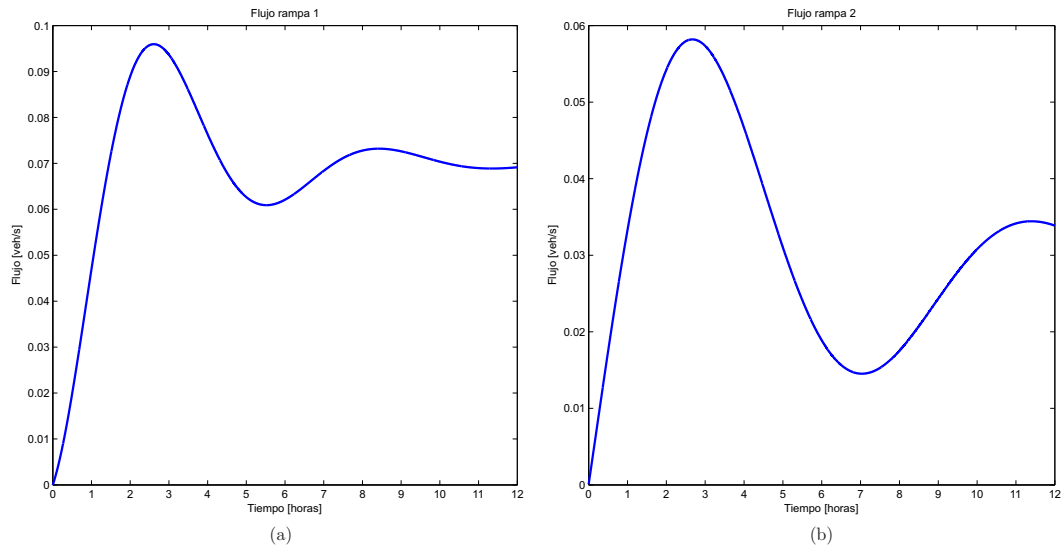


Figura 4.3: Perfiles en demanda r_{d_1} (a) y r_{d_2} (b) para las rampas de acceso. Densidad en flujo libre

Respecto a las dos rampas de acceso, se consideró una longitud de $5m$ para ambas. Los factores de proporción para las celdas 2 y 4 correspondientes al flujo que reciben de la celda anterior y de la rampa de acceso fueron fijados como: $p_l = 0.8$ y $p_{cl} = 0.2$, siendo estos valores idénticos para ambas celdas. De esta forma, se da una prioridad mayor al flujo que proviene de las celdas anteriores y una menor prioridad al flujo proveniente de las rampas de acceso.

Bajo las condiciones de flujo libre, no se presenta nunca la pérdida de capacidad pues la densidad en todas las celdas siempre es menor a la densidad crítica por tanto, no existen cambios de dirección en densidad por lo que el MHTC brinda los mismos resultados que el MTC. En la figura 4.4 se presentan los resultados correspondientes a la densidad y flujo en la primera celda. Al no existir congestión en ninguna de las celdas, todo el flujo que demanda ingresar a la sección es admitido por la primera celda tal como lo indica la teoría establecida en el capítulo 2.

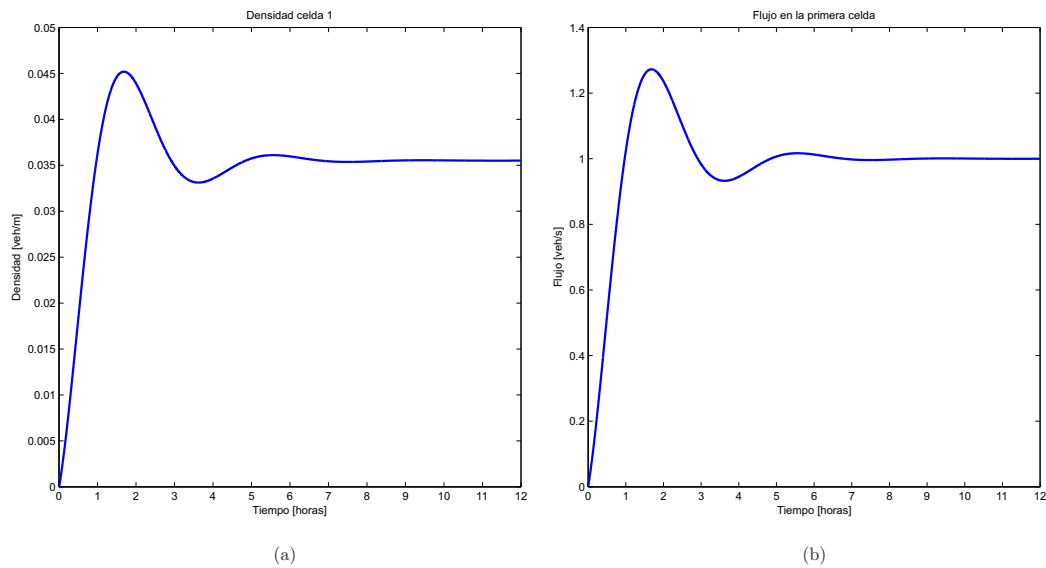


Figura 4.4: Densidad (a) y flujo (b) en la primera celda. MTC. Densidad en flujo libre

En las figuras 4.5 y 4.6 se muestran los resultados correspondientes a la segunda y cuarta celda respectivamente. En estas simulaciones, no se presenta la formación de colas de vehículos en ninguna de las rampas de acceso ni en la sección anterior a la primera celda.

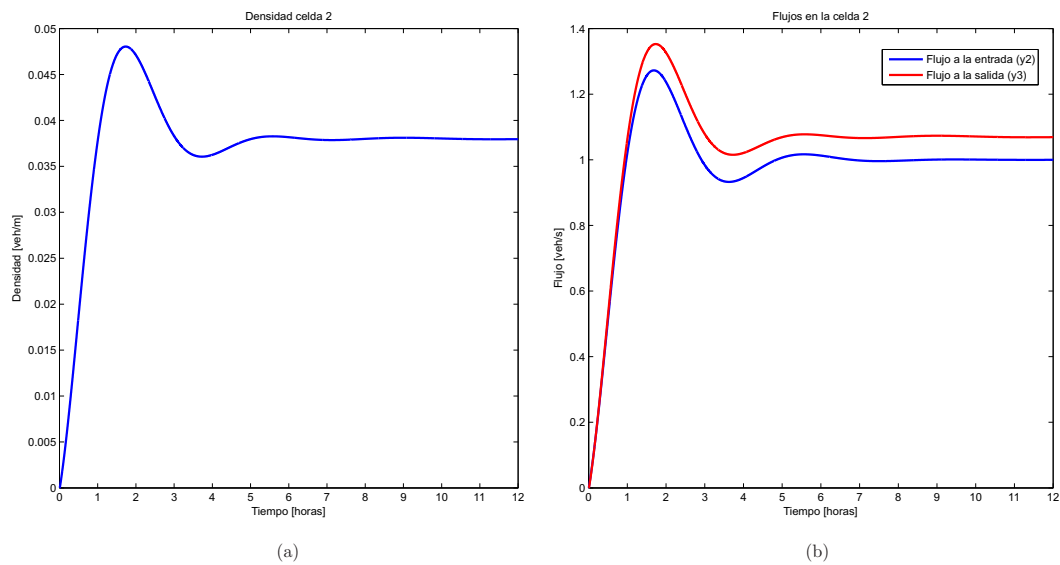


Figura 4.5: Densidad (a) y flujos a la entrada y a la salida (b) en la segunda celda. MTC. Densidad en flujo libre

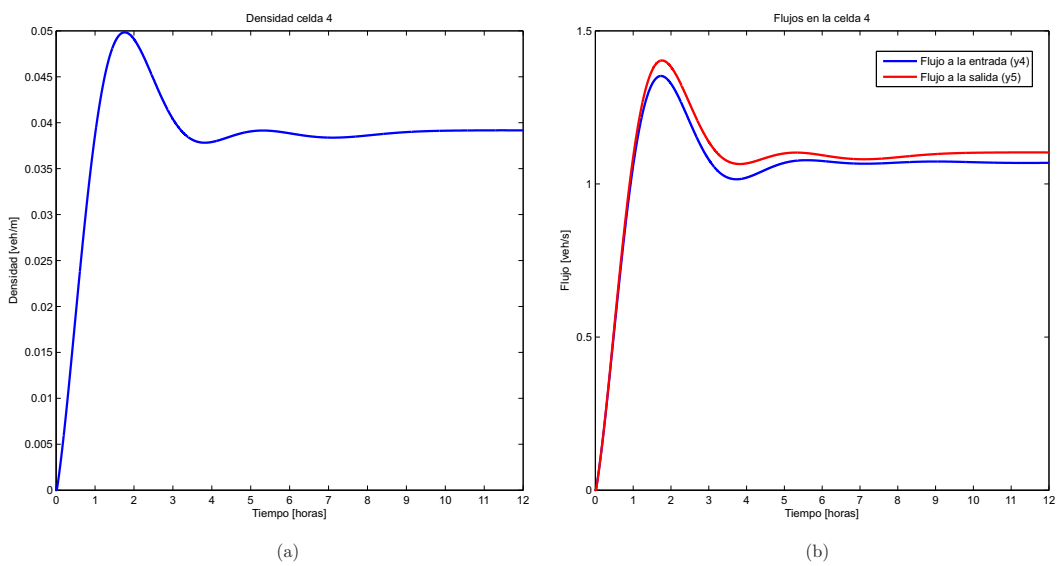


Figura 4.6: Densidad (a) y flujos a la entrada y a la salida (b) en la cuarta celda. MTC. Densidad en flujo libre

4.3. Simulaciones para densidad en flujo congestionado

En este escenario se considera que la sección de carretera tendrá en algún momento todas sus celdas congestionadas es decir, los valores para la densidad son tales que $k_i > k_o$. Esta congestión es provocada por el incremento en la cantidad de flujo demandado por las rampas de acceso y por el flujo que recibe la sección. Los perfiles de entrada en la sección son también establecidos en base a la expresión (4.1) de manera que para el perfil $y_e(t)$ que ingresa por la primera celda se establece:

$$y_e(t) = -1.5e^{-0.0002t} \cos(0.00045t) + 1.5 \quad (4.5)$$

Para el flujo $r_{d_1}(t)$ que demanda ingresar por la primera rampa de acceso se tiene:

$$r_{d_1}(t) = -0.07e^{-0.0001t} \cos(0.0003t) + 0.3225 \quad (4.6)$$

En las figuras 4.7 y 4.8 se muestran gráficamente todos los perfiles de entrada para la sección. El perfil de demanda para la segunda rampa se utiliza para inducir cambios en el nivel de congestión de la sección de carretera simulada de modo que en algún momento se produzca la pérdida de capacidad debido a la transición de un nivel a otro. Para estas simulaciones se estableció un tiempo de 24 horas. El valor del flujo y_o que sale de la sección de carretera se fijó como: $y_o = 1.9veh/s$.

Los parámetros correspondientes a la longitud de las rampas de acceso y los factores de proporción indicativos de los niveles de prioridad de flujos se establecieron iguales a los empleados en la simulación para densidad en flujo libre.

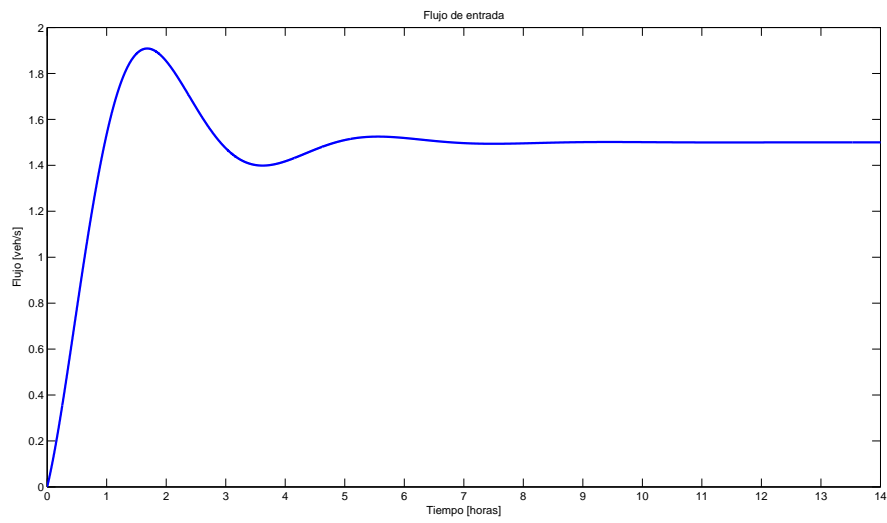


Figura 4.7: Perfil de entrada $y_e(t)$ para densidad en flujo congestionado

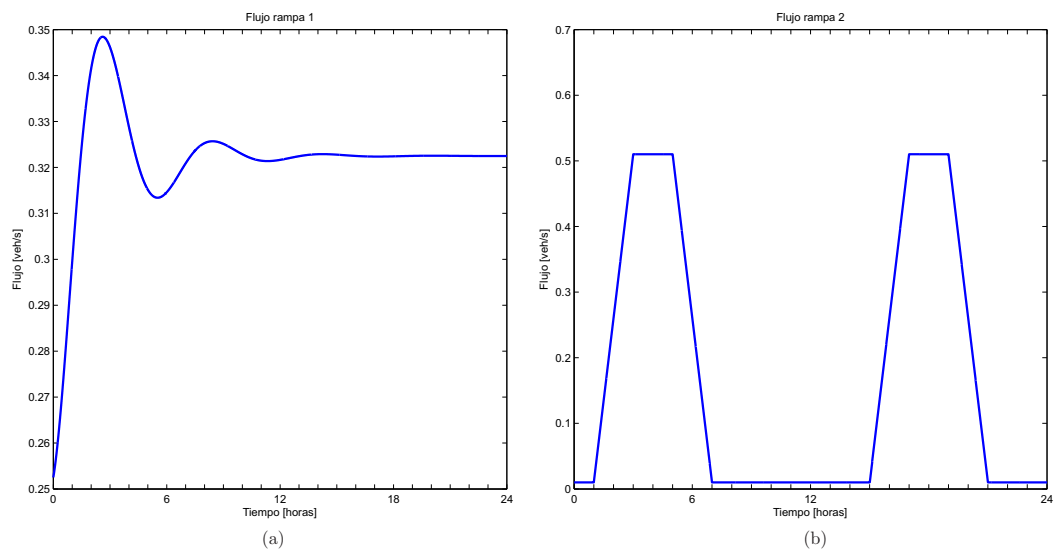


Figura 4.8: Perfiles en demanda r_{d_1} (a) y r_{d_2} (b) para las rampas de acceso. Densidad en flujo congestionado

4.3.1. Resultados del MTC

Se presentan en primer lugar los resultados correspondientes a la simulación de la sección de carretera sin tomar en cuenta los lazos histeréticos es decir, se ilustran los resultados obtenidos con el MTC. Se presentan únicamente los resultados de las celdas 1, 2 y 4 por ser las más representativas. En las figuras 4.9, 4.10 y 4.11 se muestran los resultados para la densidad y los flujos de entrada y salida en estas tres celdas y en la figura 4.12 se muestran los diagramas fundamentales de las mismas.

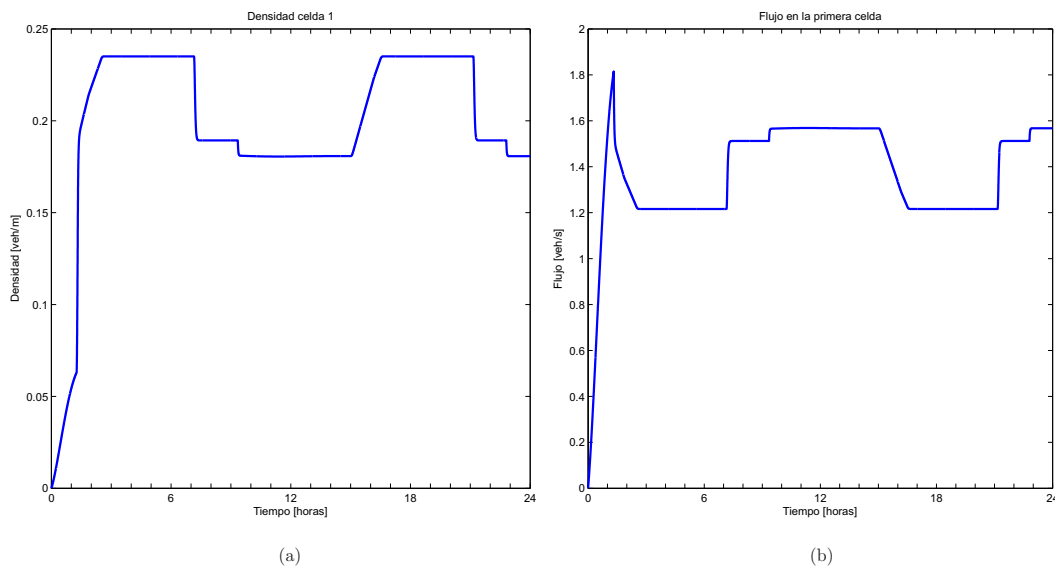


Figura 4.9: Densidad (a) y flujo (b) en la primera celda. MTC. Densidad en flujo congestionado

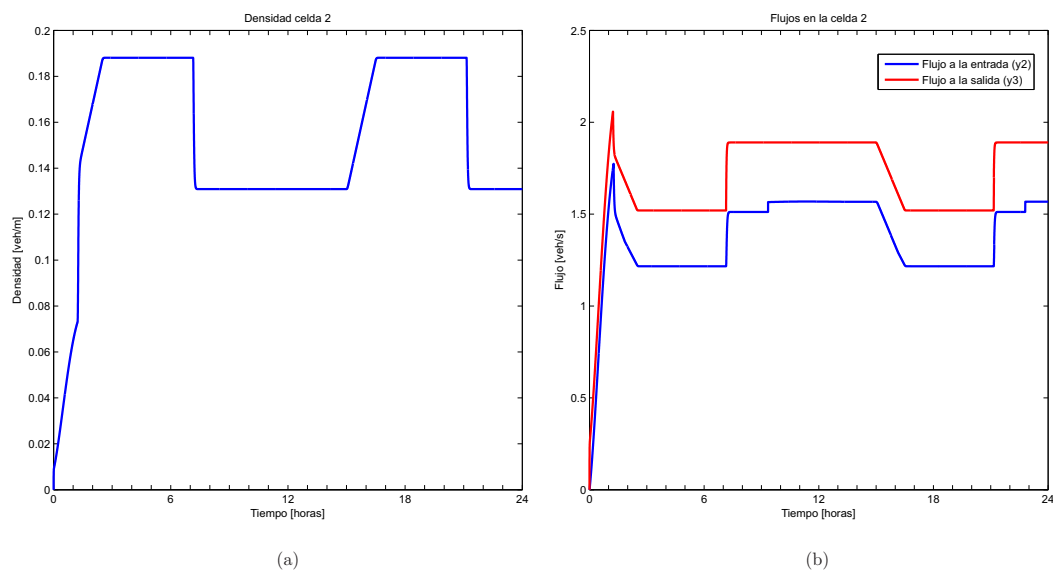


Figura 4.10: Densidad (a) y flujos a la entrada y a la salida (b) en la segunda celda. MTC. Densidad en flujo congestionado

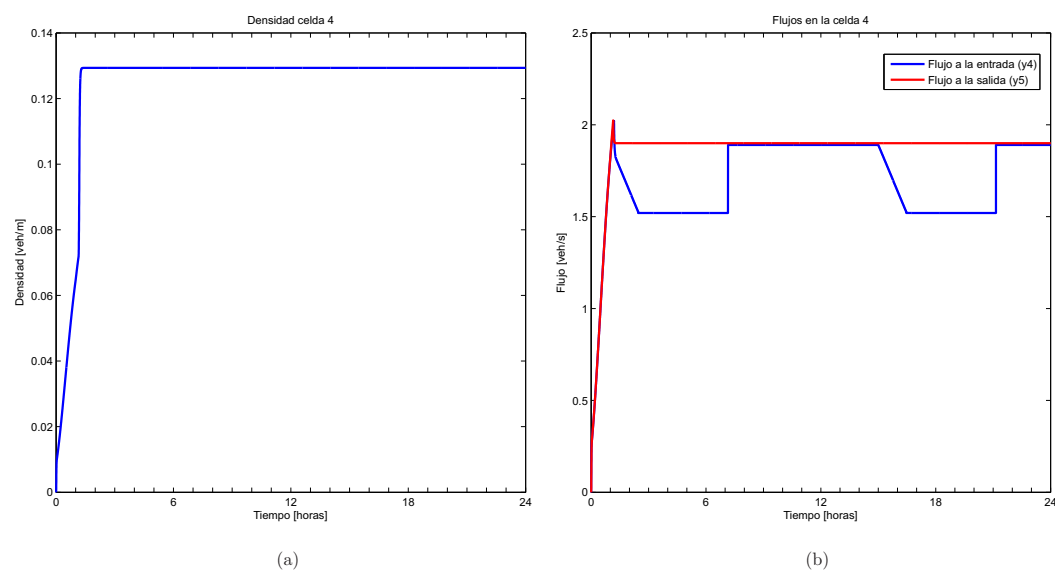


Figura 4.11: Densidad (a) y flujos a la entrada y a la salida (b) en la cuarta celda. MTC. Densidad en flujo congestionado

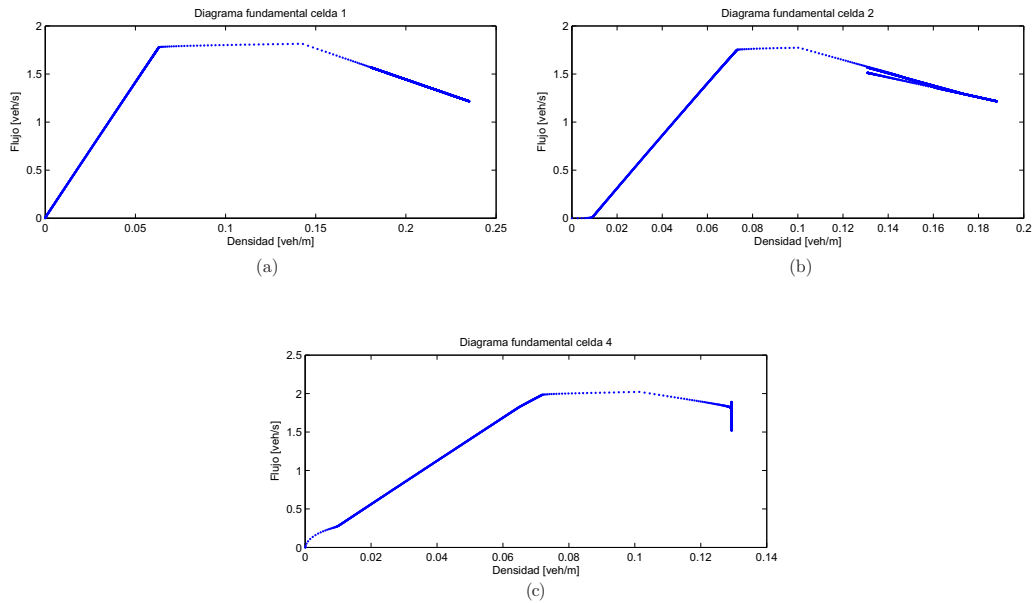


Figura 4.12: Diagramas fundamentales. Resultados del MTC

Debido a la congestión que se produce en las celdas, los flujos en demanda para la sección se ven limitados y no logran ingresar por completo lo cual ocasiona la formación de colas. En la figura 4.13 se muestra la evolución del número de vehículos apilados en las rampas de acceso y en el espacio anterior a la primera celda.

4.3.2. Resultados del MHTC

A continuación se presentan los resultados de simulación de la sección de carretera en densidad de flujo congestionado considerando los fenómenos histeréticos debidos a las fluctuaciones en los niveles de densidad de las celdas. Se considera que la sección de carretera comienza a congestionarse y una vez que se encuentra en los niveles de congestión, el perfil en demanda r_{d_2} asociado a la segunda rampa de acceso varía estos niveles (las celdas siempre permanecen en flujo congestionado) de modo que se produzcan flujos en aceleración y en desaceleración. Los parámetros del MHTC utilizados en esta simulación son los siguientes: $\Delta w = 0.20$, $\sigma = 100$. Estos parámetros permanecen constantes para cada una de las celdas.

En las figuras 4.14, 4.15 y 4.16 se muestran los resultados para la densidad y los flujos de entrada y salida para las celdas 1, 2 y 4.

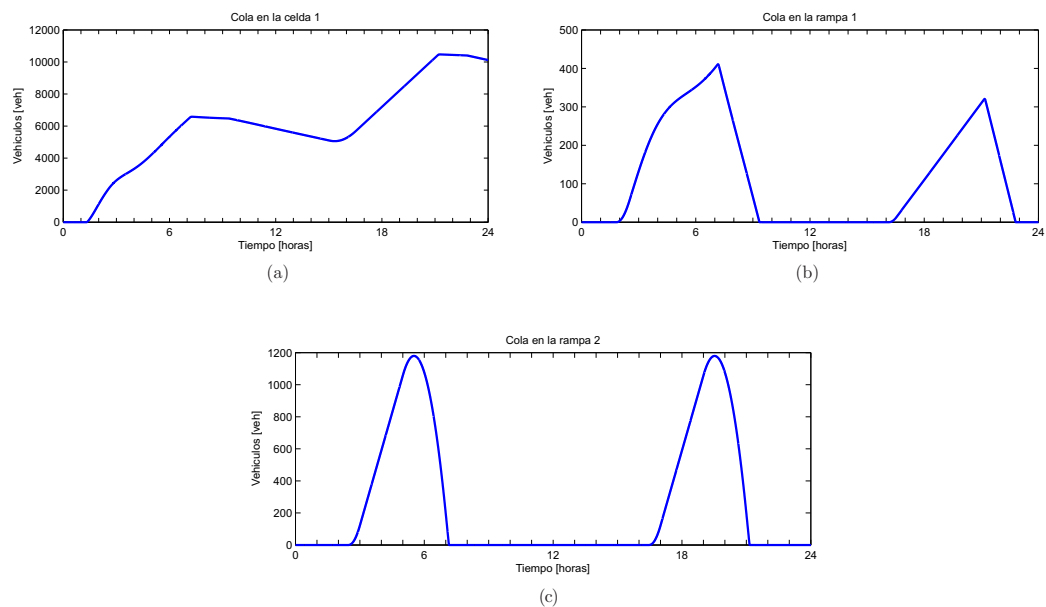


Figura 4.13: Colas en la primera celda (a) y en las rampas de acceso (b),(c). Resultados del MTC

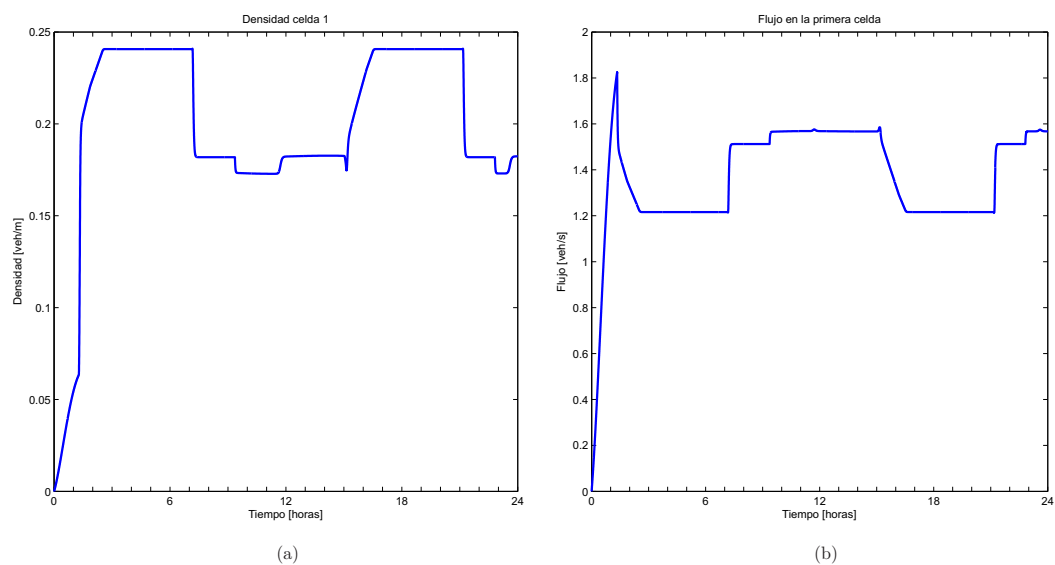


Figura 4.14: Densidad (a) y flujo (b) en la primera celda. MHTC.

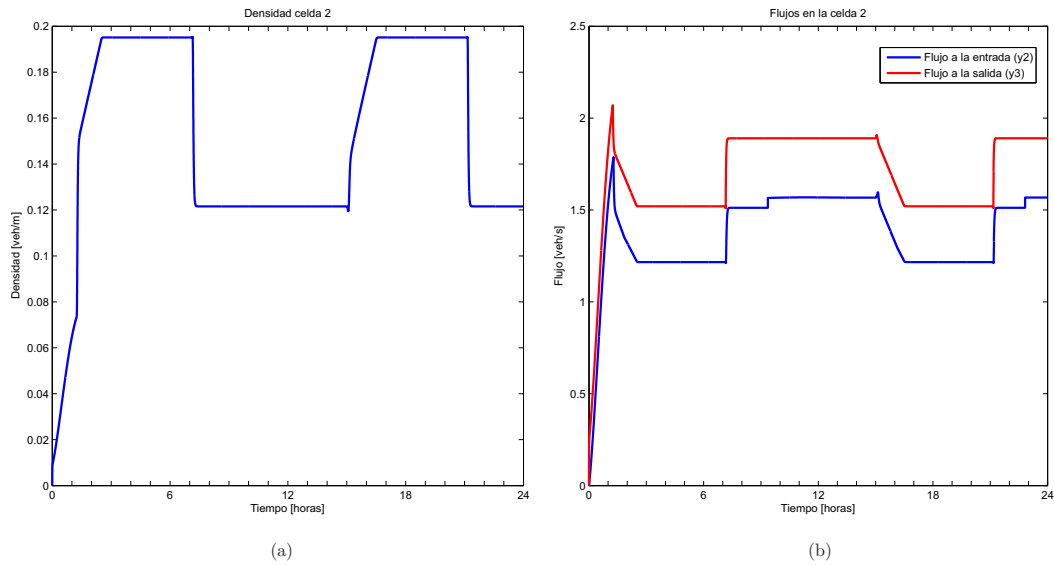


Figura 4.15: Densidad (a) y flujos a la entrada y a la salida (b) en la segunda celda. MHTC.

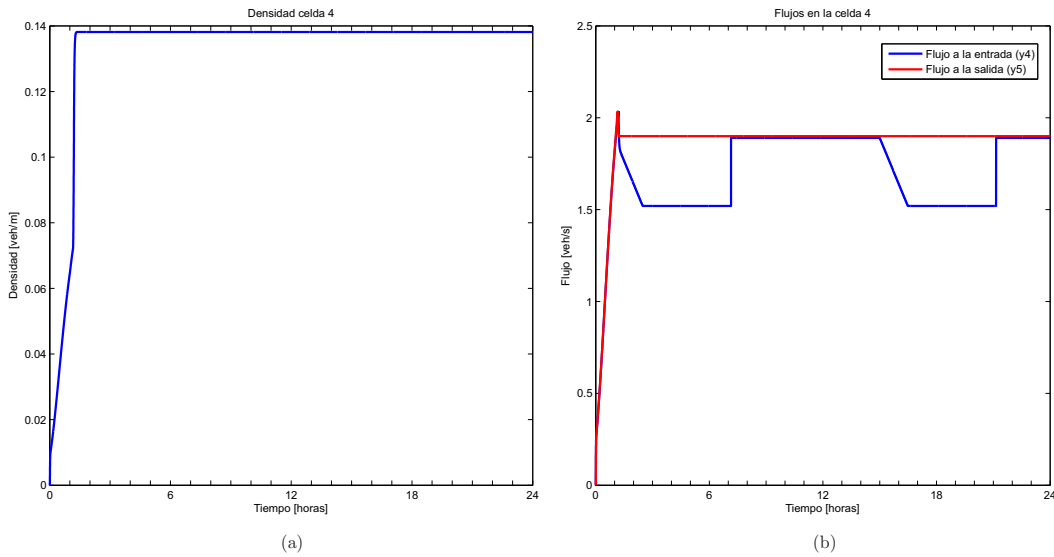


Figura 4.16: Densidad (a) y flujos a la entrada y a la salida (b) en la cuarta celda. MHTC.

En la figura 4.17 se muestran los diagramas fundamentales asociados a las celdas analizadas. Los resultados obtenidos corroboran lo establecido en el capítulo 3. Al variar el nivel de congestión, se producen flujos en aceleración y en desaceleración con lo cual el MHTC

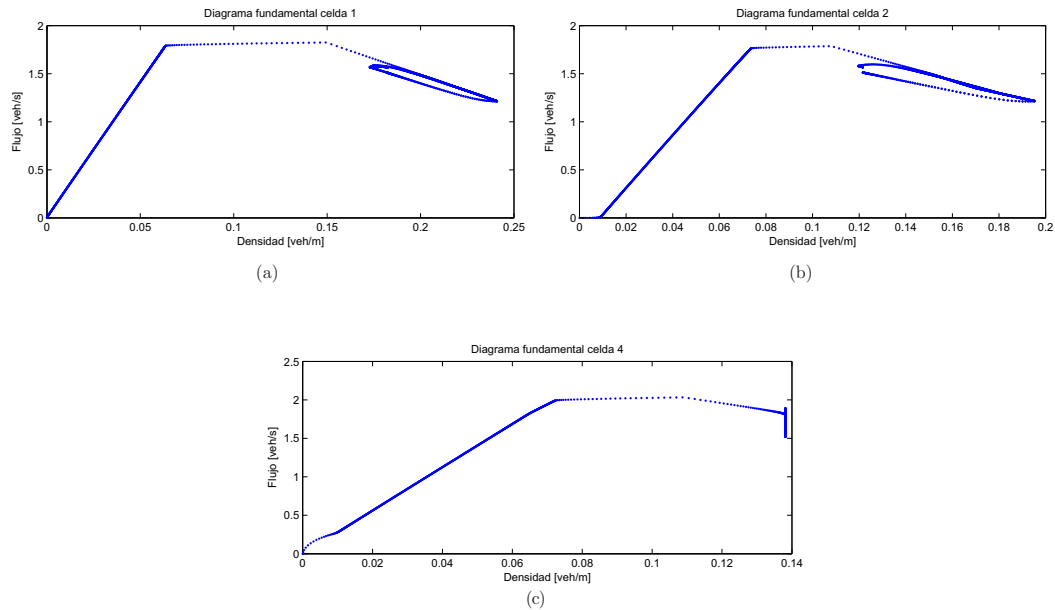


Figura 4.17: Diagramas fundamentales. Resultados del MHTC

aproxima una velocidad de onda en flujo congestionado dependiendo del sentido en que evoluciona la densidad en una determinada celda. Esta aproximación produce un cambio en la pendiente que se observa en el diagrama fundamental. En la figura 4.18 se muestra la evolución de la velocidad de onda en flujo congestionado w_i para $i = 1, 2, 4$.

Al comparar los resultados de simulación numérica obtenidos con el MHTC y con el MTC se puede observar que para el MHTC, la densidad en las celdas disminuye más lento es decir, la celda se vacía con una tasa de descarga menor que en el MTC. Esto es debido a que el MHTC utiliza los lazos histeréticos formados entre aceleración y desaceleración contrario al MTC que considera cambios instantáneos de velocidad. Esta característica se ilustra de mejor forma considerando un escenario de congestión que transita a un escenario de flujo libre total. Dicho escenario de simulación y sus correspondientes resultados se presentan en seguida.

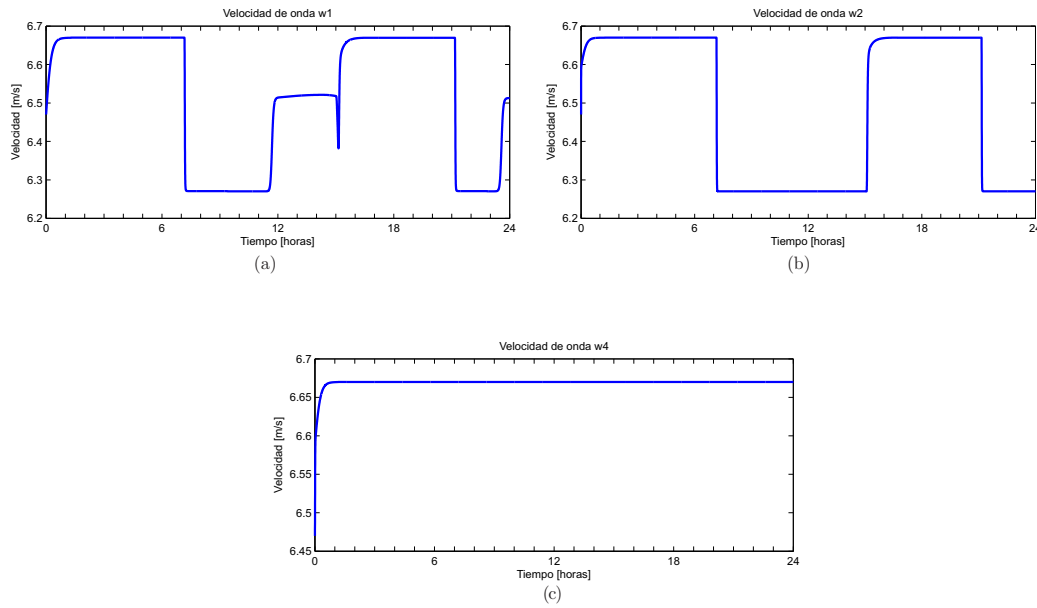


Figura 4.18: Evolución de las velocidades de onda en flujo congestionado para el MHTC

4.4. Simulación para distintos niveles de densidad. MHTC

En esta sección se muestran los resultados de simulación para la sección de carretera cuando los niveles de congestión se elevan de modo que se produzca congestión en ella; después el flujo en demanda por la segunda rampa de acceso se modifica de modo que no continúe generando congestión y que de nuevo la sección presente condiciones en flujo libre en todas las celdas. Se establecen los parámetros para el MHTC $\sigma = 200$ y $y_o = y_{max}$. Los perfiles de entrada y_e y r_{d_1} son los mismos que en el caso anterior. En la figura 4.19 se muestra el perfil en demanda r_{d_2} para la segunda rampa de acceso.

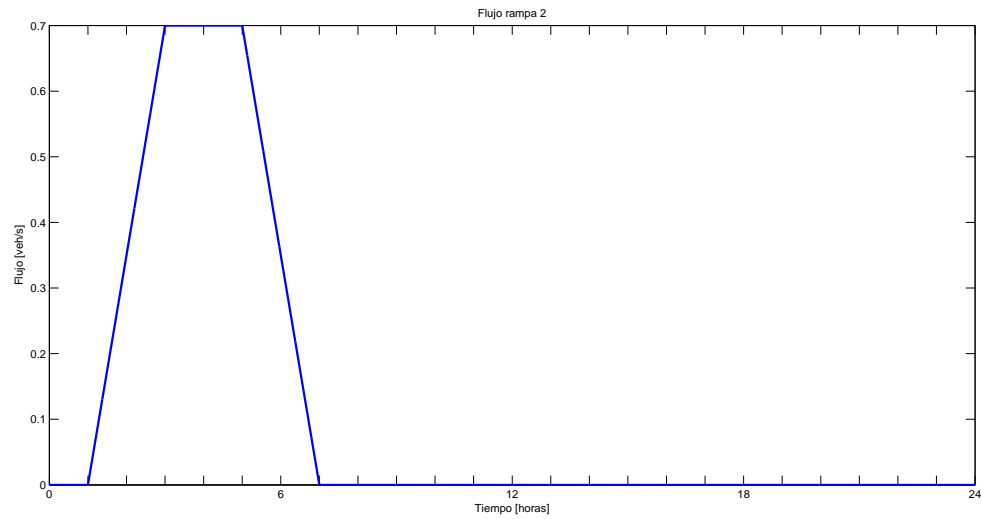


Figura 4.19: Perfil en demanda modificado r_{d_2} para la segunda rampa de acceso

En las figuras 4.20-4.23 se muestran los resultados correspondientes a la densidad y flujo en las primeras cuatro celdas. Los resultados obtenidos permiten determinar que bajo las condiciones de densidad establecidas, el MHTC genera un retraso en el tiempo que tarda en desahogar una determinada celda. Considerando que la simulación realizada incita una pérdida de capacidad en la sección, este retraso se debe a que el MHTC aproxima la tasa de descarga con que los vehículos aceleran gradualmente para transitar de un estado a otro de densidad. En la figura 4.24 se muestran los diagramas fundamentales para las cuatro celdas analizadas y en la figura 4.25 se muestra la evolución de la velocidad de onda en flujo congestionado calculada por el MHTC. La figura 4.26 muestra el número de vehículos apilados en las colas formadas en el espacio anterior a la primera celda y en las dos rampas de acceso.

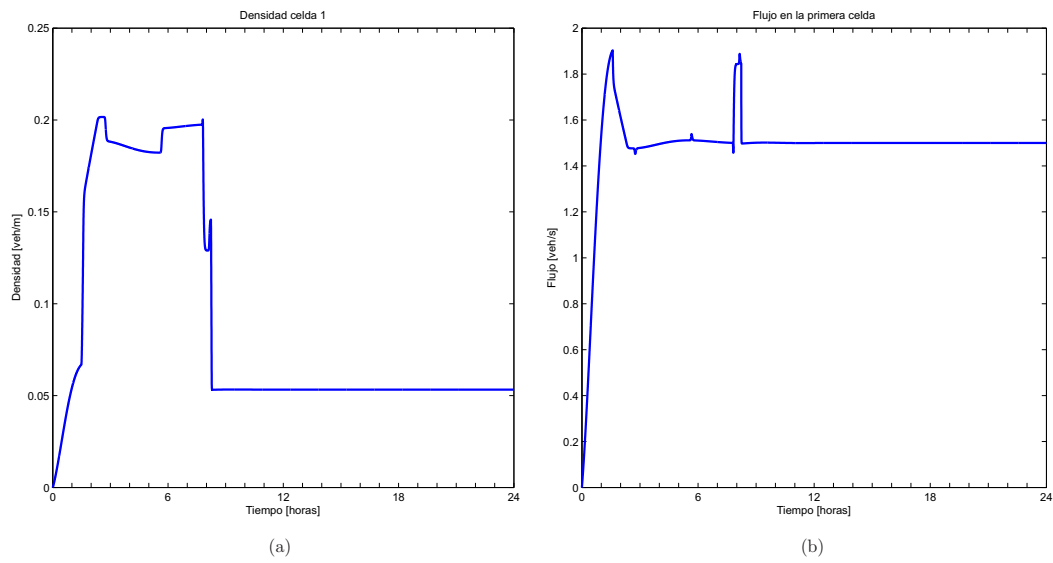


Figura 4.20: Densidad (a) y flujo (b) en la primera celda. MHTC. Densidad en flujo congestionado y flujo libre

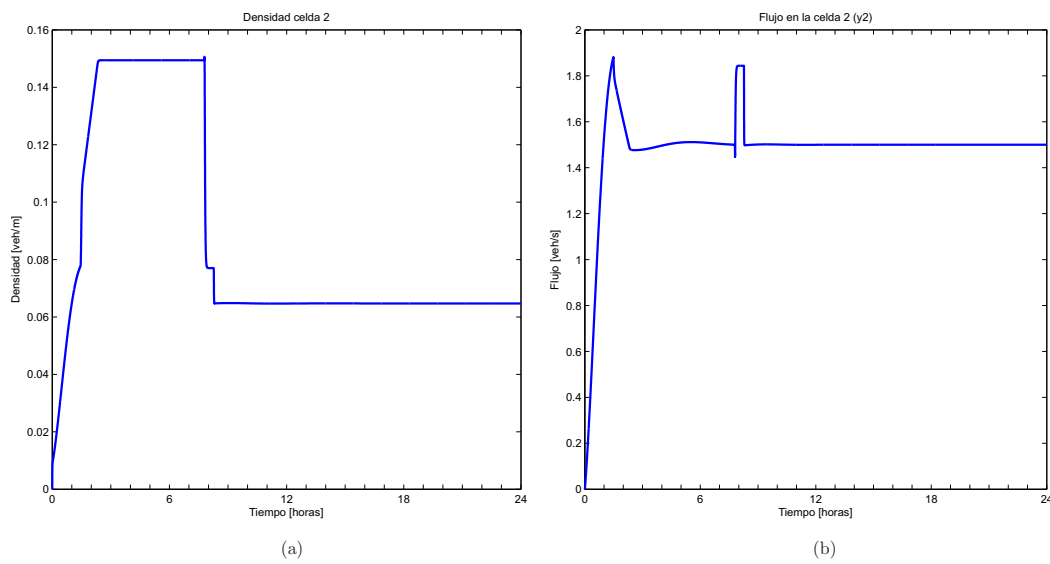


Figura 4.21: Densidad (a) y flujo (b) en la segunda celda. MHTC. Densidad en flujo congestionado y flujo libre

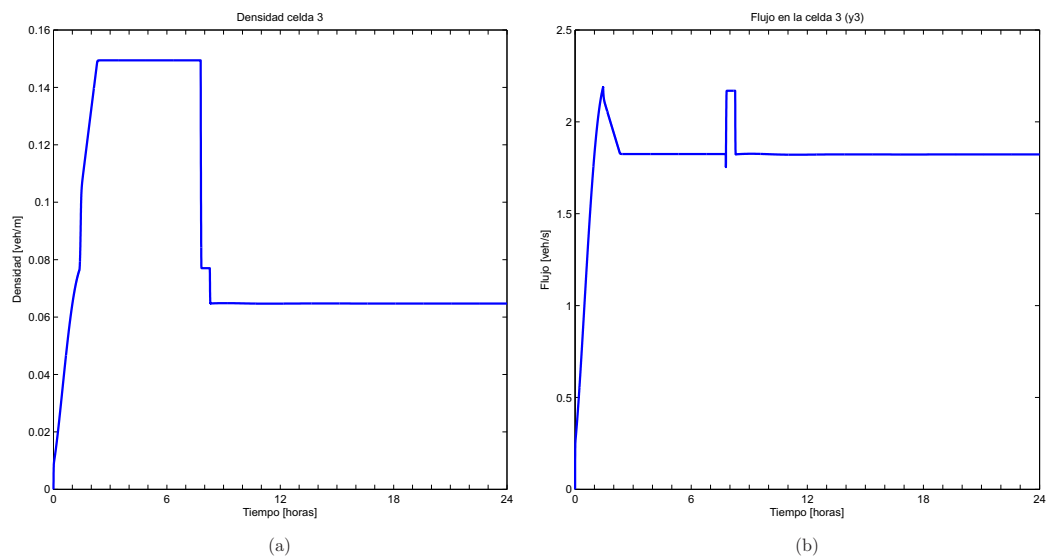


Figura 4.22: Densidad (a) y flujo (b) en la tercera celda. MHTC. Densidad en flujo congestionado y flujo libre

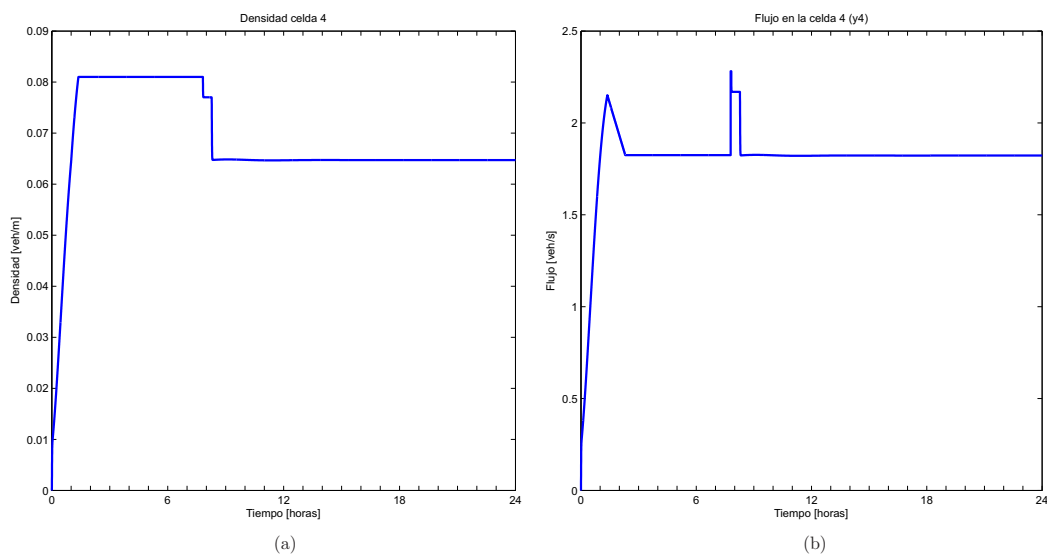


Figura 4.23: Densidad (a) y flujo (b) en la cuarta celda. MHTC. Densidad en flujo congestionado y flujo libre

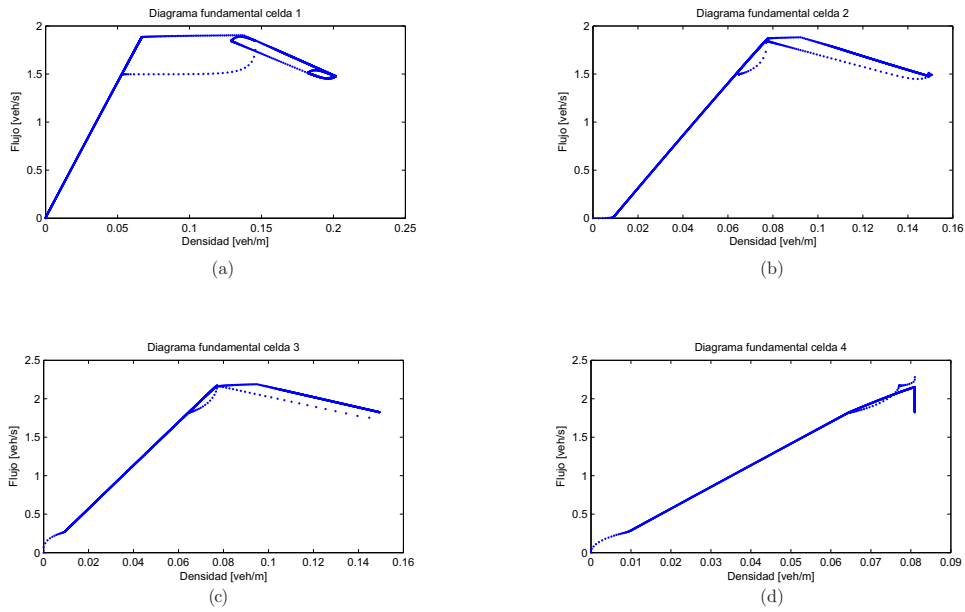


Figura 4.24: Diagramas fundamentales. Resultados del MHTC. Densidad en flujo congestionado y flujo libre

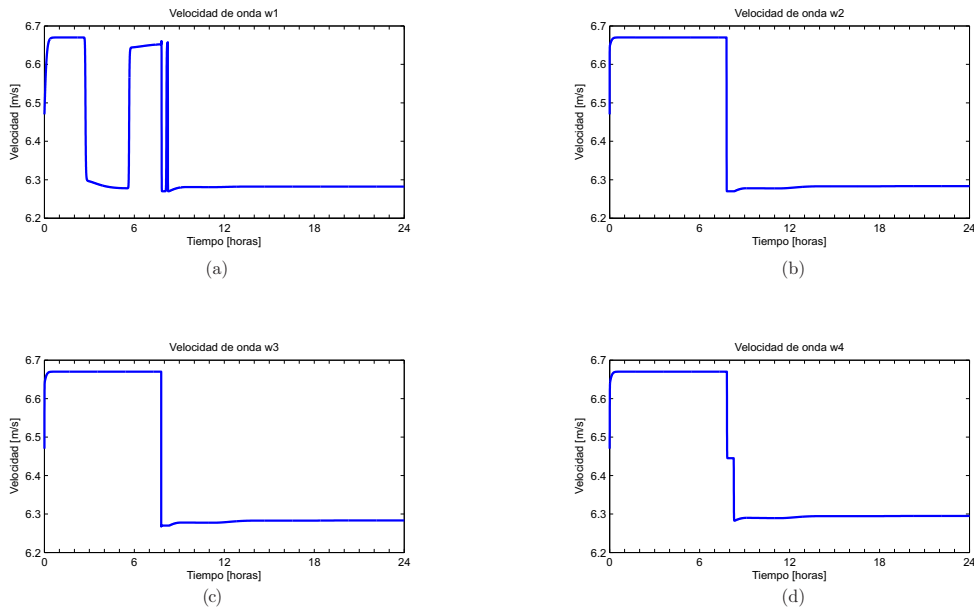


Figura 4.25: Evolución de las velocidades de onda en flujo congestionado. MHTC. Densidad flujo congestionado y flujo libre

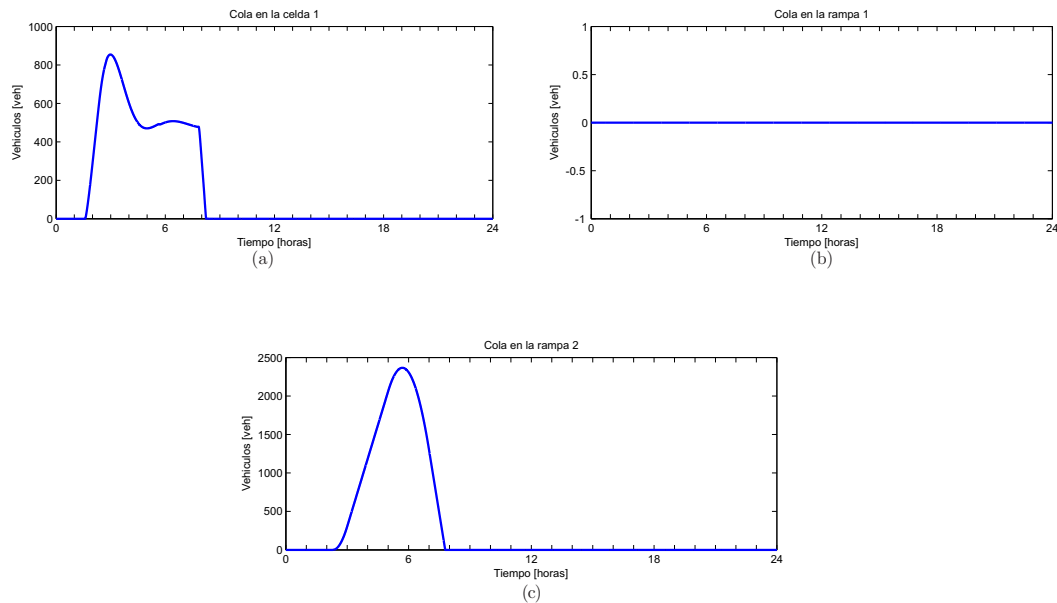


Figura 4.26: Colas en la primera celda (a) y en las rampas de acceso (b),(c). MHTC

Cuando se analiza la dinámica en un cierto espacio de carretera siempre es indispensable la validación del modelo propuesto mediante simulaciones numéricas. Al considerar la simulación de un cierto segmento de carretera es necesaria la adecuada calibración del modelo de modo que se obtengan resultados lo más cercanos a la realidad. En este sentido, dadas las características macroscópicas del MHTC, es posible emplear técnicas de calibración para los parámetros asociados a la sección de carretera tales como la velocidad en flujo libre, densidad de atascamiento, densidad crítica y velocidad nominal de flujo congestionado. En (Gunes Dervisoglu and Varaiya, 2009) se presenta una técnica automática que presenta resultados favorables. Para completar la calibración del MHTC deben elegirse parámetros asociados a la dinámica histerética que produzcan que el modelo se empalme correctamente con los datos obtenidos a través de mediciones y/o estimaciones. La definición de un posible método analítico que produzca esta calibración se deja como un problema abierto y como trabajo futuro.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se estableció un modelo macroscópico de tráfico vehicular nombrado como Modelo Histerético de Transmisión por Celdas (MHTC). La principal característica de este modelo es la incorporación de los efectos histeréticos que se presentan en el flujo vehicular cuando se realizan procesos de aceleración o desaceleración. Esta característica resulta ser novedosa dentro de la perspectiva macroscópica. Para la elaboración del modelo se estableció como eje de inicio el Modelo de Transmisión por Celdas presentado en (Daganzo, 1994).

La incorporación de los efectos histeréticos se realiza a partir de la asociación del modelo de fricción dinámica presentado en (Dahl, 1968). El MHTC incorpora la dinámica histerética considerando la evolución en los niveles de densidad de una determinada celda en una sección de carretera estudiada. De esta forma, al presentarse una sección con niveles de densidad en flujo congestionado, el MHTC detecta los cambios asimétricos en los niveles de flujo. Así mismo, considerando perfiles de flujo adecuados que sean capaces de sostener un determinado estado en densidad k_i y que además demanden enteramente la capacidad o flujo máximo y_{max} asociado a la sección, el MHTC reproduce eficazmente la pérdida de capacidad que se presenta cuando los vehículos atraviesan por algún punto de congestión sin alcanzar inmediatamente su velocidad en flujo libre, una vez que han librado el punto. Este mismo escenario se presenta y se modela con el Modelo Asimétrico de Transmisión por Celdas (MATC) (Gomes, 2004) a través de una tasa de descarga f_d menor a la velocidad en flujo libre. El MATC considera la presencia de un monitor que indique los niveles de congestión

y densidad en ciertos puntos específicos de la sección. Por su parte, el MHTC realiza esta aproximación de forma automática y sin la necesidad de un nuevo parámetro a calibrar.

Se realizó un análisis dinámico del MHTC. Con dicho análisis fue posible establecer los puntos de equilibrio del modelo tanto en flujo libre como en flujo congestionado. En un escenario completo de flujo libre, el MHTC no detecta cambios asimétricos en los niveles de densidad y por tanto su dinámica es equivalente al MTC. En flujo congestionado, los equilibrios dependen de la dinámica histerética y son tres dependiendo en que sentido evoluciona el flujo. La validación de estos resultados teóricos se llevó a cabo a través de resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas. De igual forma, se realizó el análisis de estabilidad del MHTC considerando una sección dividida en tres celdas y con una rampa de acceso. Para este análisis se contempló una dinámica asociada a valores nominales de densidad de forma que fuera posible establecer una dinámica de error. Se consideraron cuatro escenarios. En el primero se consideró a la sección con densidad en flujo libre para todas las celdas después un escenario con todas las celdas congestionadas, posteriormente una sección con las dos primeras celdas en flujo libre y la última con flujo congestionado y finalmente las celdas iniciales con flujo congestionado y la última con flujo libre. Del análisis de estabilidad se concluye que los primeros tres escenarios se consideran estables en el sentido de Lyapunov mientras que el último es inestable.

Se realizaron simulaciones numéricas del MHTC. Con base en los resultados obtenidos se puede concluir que efectivamente el MHTC acopla la dinámica histerética de modo que es posible recalcular la velocidad de onda en flujo congestionado a fin de aproximar la asimetría dada en los cambios de densidad. Del mismo modo, esta aproximación produce que el MHTC modele la pérdida de capacidad a diferencia del MTC que considera cambios instantáneos en la velocidad. Estas características son apreciadas en un diagrama fundamental.

Finalmente, a manera de recomendación y como trabajo a futuro se sugiere la elaboración de un método analítico que logre calibrar automáticamente los parámetros involucrados en el MHTC. Estos parámetros son los propios asociados a la sección estudiada y a la dinámica histerética. Por último, se requiere probar el modelo en esquemas de control de tráfico vehicular basados en la regulación del flujo a través de las rampas de acceso. Un esquema plausible es el presentado en (M. Papageorgiou and Blosseville, 1991).

Referencias

- Ansorge, R. (1990). What does the entropy condition mean in traffic flow theory? *Transportation Research*, Part B, 24(2).
- D. Gazis, R. H. and Weiss, G. (1962). Density oscillations between lanes of a multilane highway. *Operations Research*, 10(5).
- Daganzo, C. F. (1994). The Cell Transmission Model: A Dynamic Representation of Highway Traffic Consistent with the Hydrodynamic Theory. *Transportation Research -B*, 28:269–287.
- Daganzo, C. F. (1995a). The cell transmission model, part II: Network traffic. *Transportation Research Board*, 29B No. 2:79–93.
- Daganzo, C. F. (1995b). A finite difference approximation of the kinematic wave model. *Transportation Research*, 29B:261–276.
- Daganzo, C. F. (1999). The Lagged Cell-Transmission Model. In *Proceedings of the 14th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, pages 81–104, Jerusalem, Israel.
- Dahl, P. (1968). A solid friction model. Technical Report TOR-0158(3107-18)-1, Aerospace Corp, El Segundo, CA.
- D.R. Leonard, P. G. and Taylor, N. (1989). CONTRAM: structure of the model. *Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne*.
- G. Liu, A. L. and Michalopoulos, P. (1998). Improved high Order model for freeway traffic flow. In *TRB 77th Meeting*, Washington, DC.

- Gomes, G. and Horowitz, R. (2006). Optimal freeway ramp metering using the asymmetric cell transmission model. *Transportation Research Part C*, 14:244–262.
- Gomes, G. C. (2004). *Optimization and Microsimulation of On-ramp Metering for Congested Freeways*. PhD thesis, UC Berkeley.
- Greenshields, B. (1934). A study of traffic capacity. In *Proceedings of the 14th Annual Meeting of the Highway Research Board*.
- Gunes Dervisoglu, Gabriel Gomes, J. K. R. H. and Varaiya, P. (2009). Automatic calibration of the fundamental diagram and empirical observations on capacity.
- H. Kazama, M. Nakajima, S. T. and Nakamura, H. (2003). Some strategies for highway congestion mitigation in desaturated condition. *Intelligent Transportation Systems*, 2:12–15.
- Jaimes, O. A. R. (2008). *Estimación y control de tráfico vehicular*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Kuhne, R. (1984). Macroscopic Freeway Model for Dense Traffic -Stop-Start Waves and Incident Detection. In *Ninth International Symposium on Transportation and Traffic Theory*.
- Landau, L. and Lifshitz, E. (1980). *Statistical Physics*. Pergamon Press Ltd.
- Larraga, M. and Álvarez Icaza, L. (2010). Cellular automaton model for traffic flow based on safe driving policies. *Physica A*, 389:5425–5438.
- Laura Muñoz, Xiaotian Sun, R. H. and Álvarez Icaza, L. (2003). Traffic density estimation with the cell transmission model. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3750–3755, Denver, Colorado.
- Laura Munoz, Xiaotian Sun, R. H. and Álvarez Icaza, L. (2007). A Piecewise-Linearized Cell Transmission Model and Parameter Calibration Methodology. *Transportation Research Record*, 1965/2006:183–191.
- Lighthill, M. and Whitham, G. (1955). On kinematic waves II: A theory of traffic flow on long crowded roads. In *Proceedings of the Royal Society of London*, pages 317–345.

- M. Papageorgiou, B. P. and Schmidt, G. (1983). Comparison of macroscopic models for control of freeway traffic. *Transportation Research Part B*, 17(2).
- M. Papageorgiou, H. H.-S. and Blosseville, J. (1991). ALINEA: a local feedback control law for on-ramp metering. *Transportation Research Record*, 1320:58–64.
- Nagel, K. and Schreckenberg, M. (1992). A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal de Physique I*, 2:2221–2229.
- Newell, G. (1993). A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, I: General theory, II: Queueing at freeway bottlenecks, III: Multidestination flows. *Transportation Research Part B*, 27 (4).
- Payne, H. (1971). Models of freeway traffic and control. In *Simulation Council Proceedings*, 1, ch 6.
- Pipes, L. (1969). Vehicle accelerations in the hydrodynamic theory of traffic flow. *Transportation Research*, 3.
- Richards, P. I. (1956). Shockwaves on the Highway. *Operations Research*, 4 No. 1:42–51.
- Rosas-Jaimes, O. and Álvarez Icaza, L. (2005). Density and velocity estimation in traffic flow. In *16th Triennial World Congress*, pages 144–149, Prague, Czech Republic.
- S.Schochet (1988). The instant response limit in Whitham’s non linear traffic model: Uniform well-posedness and global existence. *Asymptotic Analysis 1*, pages 263–282.
- Transportation Research Board (1994). *Highway Capacity Manual*. National Research Council, Washington, D.C, third edition.
- Treiber, M. and Helbing, D. (2001). Microsimulations of freeway traffic including control measures. *Automatisierungstechnik*, 49:478–484.
- Treiterer, J. and Myers, J. (1974). The hysteresis phenomenon in traffic flow. *Transportation and Traffic Theory*, 4.
- Vilar, L. and de Souza, A. (1994). Cellular automata models for general traffic conditions on a line. *Physica (A)*, 211:84–92.

- Wilco Burghout, Haris N. Koutsopoulos, I. A. (2005). Hybrid mesoscopic-microscopic traffic simulation. *Transportation Research Record*.
- Wohl, M. and Martin, B. V. (1967). *Traffic System Analysis*. McGraw Hill Series in Transportation.
- Zhang, H. (1999). A mathematical theory of traffic hysteresis. *Transportation Research Part B*, 33:1–23.