



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

DISEÑO DE OBSERVADORES ROBUSTOS PARA SISTEMAS
REACTIVOS BASADOS EN LA COOPERATIVIDAD Y
DISIPATIVIDAD

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
JESÚS DAVID AVILÉS VELÁQUEZ

TUTOR PRINCIPAL
DR. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ, INSTITUTO DE INGENIERÍA
COMITÉ TUTOR
DR. LUIS A. ÁLVAREZ-ICAZA LONGORIA, INSTITUTO DE INGENIERÍA
DR. GERARDO ESPINOSA PÉREZ, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. FEBRERO 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ

Secretario: Dr. LUIS A. ALVAREZ ICAZA LONGORÍA

Vocal: Dr. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

1^{er.} Suplente: Dr. LEONID FRIDMAN

2^{d o.} Suplente: Dr. EDMUNDO GABRIEL ROCHA CÓZATL

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: SALA DE EXAMENES DE POSGRADO DE INGENIERÍA, CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO D.F.

TUTOR DE TESIS:

DR. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

FIRMA

ÍNDICE GENERAL

1..	<i>Introducción</i>	5
1.1.	Estado del arte	8
1.2.	Planteamiento del Problema	10
1.3.	Motivación	14
1.4.	Objetivos	15
1.5.	Contribución de la tesis	15
1.6.	Organización de la tesis	16
2..	<i>Fundamentos teóricos</i>	19
2.1.	Conceptos básicos	20
2.1.1.	Matrices Positivas	21
2.1.2.	Matrices No Negativas	22
2.1.3.	Matrices Metzler	22
2.2.	Sistemas positivos y cooperativos	24
2.2.1.	Sistemas positivos	25
2.2.2.	Sistemas Cooperativos	27
2.2.3.	Relaciones de los sistemas positivos y cooperativos	30
2.2.4.	Observadores intervalo	30
2.3.	Método de disipatividad	32
2.4.	Radio de estabilidad	38
2.4.1.	Perturbaciones lineales	38
2.4.2.	Perturbaciones no lineales variantes en el tiempo	40
2.5.	Estabilidad entrada-estado	42
2.6.	Polítopos	44
2.6.1.	Polítopo definido por envolvente convexa	45
2.6.2.	Polítopo definido por semi-espacios	45
2.6.3.	Polítopos definidos a partir de un conjunto cerrado	47

Índice general

3..	<i>Observadores que preservan el orden para sistemas no lineales: Caso nominal</i>	51
3.1.	Sistemas no lineales en ausencia de perturbaciones	53
3.2.	Metodología de diseño	55
3.2.1.	Método de disipatividad en el observador	56
3.2.2.	Cooperatividad en el observador	58
3.3.	Procedimiento general	59
3.4.	Procedimiento particular	61
3.5.	Propiedad de simetría	63
4..	<i>Observadores que preservan el orden para sistemas no lineales: Caso perturbado</i>	66
4.1.	Sistemas en presencia de perturbaciones	67
4.2.	Procedimientos de diseño de observadores intervalo	71
5..	<i>Tópico computacional</i>	75
5.1.	Diseño general de los observadores que preservan el orden	76
5.1.1.	La desigualdad de disipatividad	76
5.1.2.	La Desigualdad de Cooperatividad	78
5.1.3.	Acoplamiento de condiciones de cooperatividad y disipatividad	89
5.2.	Diseño particular de los observadores que preservan el orden	90
6..	<i>Resultados: Simulaciones y Validación experimental</i>	92
6.1.	Diseño general de observadores que preservan el orden	92
6.1.1.	Ejemplo 1: Reactor tanque agitado	93
6.1.2.	Ejemplo 2 Validación experimental en el sistema de tres tanques	97
6.1.3.	Ejemplo 3: Sistema caótico de Chua	106
6.1.4.	Ejemplo 4: Modelo académico	107
6.2.	Diseño de observadores utilizando el método del radio de estabilidad	115
6.2.1.	Ejemplo 1: Sistema no lineal	115
6.2.2.	Ejemplo 2: Sistema caótico de Chua	120
6.2.3.	Ejemplo 3: Validación experimental en el sistema tres tanques	125
7..	<i>Conclusiones</i>	129
	<i>Apéndice</i>	131
A..	<i>Algoritmo Computacional</i>	132

ABSTRACT

Preserving Order Observers provide an estimation that is always above or below the true variable and, in the absence of uncertainties/perturbations, the estimation converges asymptotically to the true value of the variable. In this paper we propose a novel methodology to design preserving order observers for a class of nonlinear systems in the nominal case or when perturbations/uncertainties are present. This objective is achieved by combining two important systemic properties: dissipativity and cooperativity. Dissipativity is used to guarantee the convergence of the estimation error dynamics, while cooperativity of the error dynamics assures the order preserving properties of the observer. The use of dissipativity for observer design offers a big flexibility in the class of nonlinearities that can be considered while keeping the design simple: it leads in many situations to the solution of a Linear Matrix Inequality (LMI). Cooperativity of the observer leads to a LMI. When both properties are considered simultaneously the design of the observer can be reduced, in most cases, to the solution of both a Bilinear Matrix Inequality (BMI) and a Linear Matrix Inequality (LMI). Since a couple of preserving order observers, one above and one below, provide an interval observer, the proposed methodology unifies several interval observers design methods. The design methodology has been validated experimentally in a three-tanks system, and it has also been tested numerically and compared to an example from the literature.

RESUMEN

Los observadores que preservan el orden proporcionan una estimación que está siempre por encima o por debajo de la variable real, en ausencia de perturbaciones e incertidumbres, la estimación converge asintóticamente al valor verdadero de la variable. En este trabajo, se propone una novedosa metodología para diseñar observadores que preservan el orden para una clase de sistemas no lineales en el caso nominal o cuando las perturbaciones e incertidumbres están presentes. Este objetivo es llevado a cabo, combinando dos importantes propiedades sistémicas: *disipatividad* y *cooperatividad*. La Disipatividad es usada para garantizar la convergencia de las dinámicas del error de estimación, mientras que la cooperatividad de las dinámicas del error asegura las propiedades de preservación del orden del observador. El uso de la disipatividad para el diseño del observador ofrece una gran flexibilidad en el caso de no linealidades que pueden ser consideradas, se mantiene el diseño simple: se conduce en muchas situaciones para la solución de una Desigualdad Matricial Lineal (LMI, en inglés). La Cooperatividad del observador conduce a una LMI. Cuando ambas propiedades se consideran simultáneamente el diseño del observador puede ser reducido, en la mayoría de los casos, a la solución de una Desigualdad Matricial Bilineal (BMI, en inglés) y una Desigualdad Matricial Lineal (LMI). Pues un par de observadores que preservan el orden, uno por encima y otro por debajo, proporcionan un *observador intervalo*; la metodología propuesta unifica varios métodos de diseño de observadores intervalo. La metodología de diseño ha sido validada experimentalmente en un sistema de tres tanques, y también se ha probado y comparado numéricamente con un ejemplo de la literatura.

1. INTRODUCCIÓN

Un tópico primordial en la teoría de control es la observación de estados para sistemas dinámicos, la cual se deriva de la falta de conocimiento de algunas variables de estado, ya sea porque los dispositivos de sensado no están disponibles, o bien porque tienen un alto costo y requieren de un mantenimiento constante. Así que, para conocer estas variables, comúnmente se propone un observador o estimador de estados, también llamado sensor de software, el cual está compuesto por una copia de la planta y por una inyección de salida (Luenberger, 1971).

Los observadores de estado proporcionan una estimación de las variables del estado, la cual converge asintóticamente a sus valores verdaderos, al menos cuando el modelo de la planta es perfectamente conocido y/o cuando las perturbaciones desconocidas no actúan en el sistema. En general, el problema de diseño de los observadores lineales ha sido resuelto por el esquema del estimador de Luenberger (Luenberger, 1971) y por el filtro de Kalman (Kalman y Bucy, 1961), mientras que el problema de diseño de observadores para sistemas no lineales no está totalmente solucionado. Sin embargo, el desarrollo de técnicas no lineales de observadores de estado ha tenido un gran impulso en la teoría de control en estas últimas décadas (Tuan, 1973; Rajamani, 1998; Gauthier *et al.*, 1992; Gauthier y Kupka, 2001) ver también (Bastin y Dochain, 1990; Dochain *et al.*, 1992; Gouzé *et al.*, 2000; Moreno, 2004; Avilés y Moreno, 2009). Esto se debe a que al ser los sistemas dinámicos son no lineales, es de esperarse que los observadores de estado tomen en cuenta las no linealidades del sistema con la finalidad de ofrecer mejores resultados. Generalmente, el objetivo principal de las técnicas de diseño de los observadores no lineales se enfoca en asegurar la estabilidad de los errores de estimación.

Una desventaja para ciertas aplicaciones es el hecho que durante el tiempo de convergencia no es posible confiar en la estimación dada por el observador. Decisiones tomadas en base a tal estimación puede conducir a un mal comportamiento en control (reclamamos el uso de funciones de saturación para evitar el efecto en la realimentación de salida), o decisiones equivocadas en la detección de falla. La situación es incluso peor cuando perturbaciones y/o incertidumbres están presentes. Además en numerosas aplicaciones existen variables de estado que tienden a alcanzar niveles críticos que ponen en riesgo el adecuado funcionamiento de los sistemas. Una alternativa de solución sería tener una estimación de una variable de estado que esté siempre por encima o por debajo del valor verdadero. Esto permitiría, por ejemplo, enviar una señal de alarma cuando la temperatura de un reactor nuclear está cerca de alcanzar el valor crítico máximo, antes que realmente lo alcance, si se garantiza que la temperatura estimada está por arriba de la temperatura verdadera.

Por tal motivo, en el presente trabajo se estudia el problema para acotar dinámicamente tanto por encima como por debajo a la trayectoria del estado para cualquier instante de tiempo, con la finalidad que cuando las variables del estado tiendan a exceder los niveles críticos, las cotas dinámicas lo hagan primero, previniendo al esquema de control de estos eventos, el cual realizará las correcciones pertinentes para evitar daños en el sistema. Tal comportamiento es descrito por los *Observadores que Preservan el Orden*. Los sistemas que preservan el orden se han estudiado desde hace algunas décadas en matemáticas y en control (Angeli y Sontag, 2003; Hirsch, 2003). Esta clase de sistemas es conocida como *monótona*, de la cual una subclase importante es representada los *Sistemas Cooperativos*, los cuales se definen como aquellos que preservan el orden parcial entre las trayectorias del estado y de la salida, y serán considerados como un tópico distinguido a lo largo del presente trabajo. Aunque los sistemas monótonos han encontrado un interés de crecimiento en el modelado y control, relativamente pocos trabajos han aparecido para propósitos de observación.

Los observadores intervalo están conformados por un par de observadores que preservan el orden, uno que proporciona una estimación por arriba y otro por debajo,

los cuales han sido propuestos en la literatura para proporcionar cotas garantizadas en algún instante de tiempo para los estados de un sistema dinámico incierto.

El objetivo de este trabajo es dar continuación a la línea de investigación iniciada en (Gouzé *et al.*, 2000) (ver también (Rapaport y Dochain, 2005; Moisan y Bernard, 2005)). La idea principal es plantear una novedosa metodología de diseño de los observadores que preservan orden para una clase de sistemas no lineales en el caso nominal o cuando las perturbaciones/incertidumbres están presentes, que integra el método de diseño de los observadores disipativos con la imposición de una propiedad de preservación del orden para que el error de observación llegue a ser un sistema cooperativo (Angeli y Sontag, 2003; Hirsch, 2003). Los sistemas son una extensión de aquellos propuestos en (Gouzé *et al.*, 2000), donde los observadores intervalo son introducidos. El procedimiento de diseño, cuando las perturbaciones no están presentes, consiste en tomar la dinámica del error y descomponerla en un subsistema lineal e invariante en el tiempo con una no linealidad variante en el tiempo conectada en retroalimentación. Si la no linealidad es disipativa con respecto a una función de suministro, entonces la parte lineal debe ser diseñada para ser disipativa con respecto a una función de suministro vinculada para garantizar que el lazo cerrado sea exponencialmente estable, y asegurando de esta forma la *convergencia del observador*. Asimismo, si el sistema del error de observación es un sistema cooperativo (con respecto a las perturbaciones/incertidumbres en caso que existan), entonces se asegura el ordenamiento de las trayectorias del error, dando como consecuencia que los *estimados del observador acotan dinámicamente tanto por encima como por debajo a la trayectoria del estado*, dependiendo del orden del error inicial. Los *observadores propuestos para sistemas no lineales* que cumplan cabalmente con las dos propiedades, serán aquellos observadores que preservan el orden y el error de estimación converge a cero en caso libre de perturbaciones/incertidumbres, o el error estará acotado para el caso perturbado. Esta clase de estimadores fueron definidos en (Avilés y Moreno, 2009). Para construir un observador intervalo, dos observadores que preservan el orden se ponen en paralelo: uno proporcionará una estimación por arriba y otro por debajo del estado. El diseño de los

1.1. ESTADO DEL ARTE

observadores puede ser reducido, en la mayoría de los casos, a una desigualdad matricial lineal (LMI, por sus siglas en inglés) y una desigualdad matricial bilineal (BMI), las cuales son herramientas estándar en la teoría de control. El funcionamiento de los observadores que preservan el orden se ha probado en algunas simulaciones numéricas.

1.1. Estado del arte

Los sistemas reactivos son una subclase de los sistemas dinámicos no lineales que se caracterizan por ser muy complejos, debido a diversos factores: al número de reacciones en un sistema; a su alta no linealidad; a la gran incertidumbre en el conocimiento de sus parámetros y de la estructura exacta de las ecuaciones, etc. Estos sistemas son ampliamente utilizados en las áreas de la ingeniería bioquímica y química, biotecnológica y de ecología. El tema de observación para esta clase de sistemas es importante debido a la disponibilidad limitada de los sensores en línea y a las incertidumbres relacionadas a las dinámicas del modelo. Para estos sistemas, se han desarrollado los observadores que preservan el orden, cuya primera aplicación apareció en (Gouzé *et al.*, 2000; Rapaport y Dochain, 2005), donde los observadores intervalo son introducidos y aplicados a una clase de sistemas no lineales con incertidumbre. El diseño de estos observadores se fundamenta en la teoría de los sistemas dinámicos cooperativos, considerando que las cotas por intervalos de las incertidumbres están disponibles; pero no se asegura la estabilidad de los observadores. Estos estimadores son principalmente aplicados a los sistemas biológicos para estimar parámetros o variables que no son medibles en los sistemas biológicos, para los cuales los tópicos de observación son muy desafiantes debido a la disponibilidad limitada de sensores en línea y las incertidumbres relacionadas a las dinámicas del modelo, como ejemplo en el monitoreo de plantas de tratamiento de aguas residuales (Had-Sadok y Gouzé, 2001). La validación experimental ha sido reportada en (Alcaraz-Gonzalez *et al.*, 2002) para bioreactores altamente inciertos.

Una combinación de los observadores intervalo y de los así llamados observadores

1.1. ESTADO DEL ARTE

asintóticos (Bastin y Dochain, 1990; Dochain *et al.*, 1992; Bernard y Gouzé, 2004) es propuesta en (Rapaport y Dochain, 2005), donde la observación de estados para bioprocesos bajo entradas del proceso y/o parámetros del proceso inciertos es resuelta, sin requerir del conocimiento de la cinética del proceso. Esta clase de observadores se ha aplicado a una amplia variedad de procesos químicos y bioquímicos. La desventaja potencial de los observadores asintóticos es que la velocidad de convergencia de la estimación depende totalmente de las condiciones de operación.

Una característica importante de los observadores intervalo es que ellos permiten la comparación de los estimados de algunos observadores intervalo: la mejor cota superior es la más pequeña de las cotas superiores, y viceversa para las cotas inferiores. Esto conduce a un paquete de observadores intervalo, conocido como *lote de observadores* (del término en inglés, *observers bundle*), el cual fue propuesto en (Bernard y Gouzé, 2004). Estos observadores se corren en paralelo y la mejor estimación es tomada en cada instante de tiempo. En este paquete de estimadores algunas estimaciones pueden ser inestables. En este caso, las estimaciones son llamadas *framers*, ya que no tienen propiedades de estabilidad.

Un diseño de observadores intervalo para una clase de sistemas no monótonos es propuesto en (Moisan y Bernard, 2005), y aplicados a modelos de bioprocesos; el diseño requiere del conocimiento de las cotas de las incertidumbres para asegurar el acotamiento tanto por arriba como por abajo de la trayectoria real del estado. Los observadores intervalo han sido aplicados en el proceso de fermentación por alimentación por lotes de *E. coli* (Veloso *et al.*, 2007), con el objetivo de monitorear la concentración de la biomasa, ya que la dinámica del modelo tiene perturbaciones y algunas variables del estado, como la concentración de substratos son desconocidas. Recientemente, en (Moisan y Bernard, 2010) se presentó un observador intervalo que estima las variables desconocidas del sistema eléctrico caótico de Chua, para lo cual, las incertidumbres deben satisfacer las propiedades de Lipschitz.

Debido a que la cooperatividad es una propiedad dependiente de las coordenadas, es posible usar transformaciones de coordenadas para obtener observadores intervalo en

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

coordenadas apropiadas. Esta idea ha sido utilizada recientemente en (Mazenc y Bernard, 2010, 2011) para mostrar que es posible diseñar un observador intervalo convergente exponencialmente para algún Sistema Lineal Invariante en el Tiempo con perturbaciones aditivas, para usar transformación de coordenadas variantes en el tiempo lineales

1.2. *Planteamiento del Problema*

Hasta aquí, se han mencionado trabajos con métodos particulares de diseño de observadores intervalos aplicados a ciertas clases de sistemas con incertidumbres o perturbaciones, como por ejemplo: en una planta de tratamiento de aguas residuales (Had-Sadok y Gouzé, 2001), en sistemas reactivos inciertos (Rapaport y Dochain, 2005), en el sistema eléctrico caótico de Chua (Moisan y Bernard, 2010), entre otros. Desafortunadamente, no se ha reportado ningún trabajo en la literatura que generalice a los métodos particulares de diseño de observadores intervalo, lo cual denega posibilidad alguna para que esta clase de observadores sean aplicados a diversos sistemas dinámicos. Adicionalmente, la mayoría de los métodos de diseño de observadores intervalo toman en cuenta la propiedad de cooperatividad, pero no consideran alguna propiedad de convergencia. También, es importante mencionar que los métodos propuestos de observadores intervalo existentes en la literatura están diseñados para sistemas perturbados, pero no contemplan el caso libre de perturbaciones. Por tanto, el problema principal del proyecto consiste en diseñar un observador que sea cooperativo y estable para una clase de sistemas no lineales, en ausencia y en presencia de perturbaciones o incertidumbres. Tal metodología de diseño pretende incluir y generalizar a algunos métodos de diseño de observadores intervalo de la literatura.

El problema planteado tomará en cuenta una clase de sistemas no lineales en ausencia de perturbaciones

$$\Sigma_N \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), & x(0) = x_0 \\ y = h(t, x, u) \end{cases} \quad (1.1)$$

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el *estado*, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada, and $y \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema.

El observador de estados para el sistema Σ_N está dado por la forma

$$\Omega_N \begin{cases} \dot{z} = f^+(t, z, u), & z_0^+ = g^+(x_0) \\ \hat{x} = h^+(t, z, u) \end{cases} \quad (1.2)$$

donde \hat{x} es el estimado del observador. El error de estimación se puede definir analíticamente como $e \triangleq \hat{x} - x$, por consecuencia, las dinámicas del error de observación son expresadas de la forma:

$$\dot{e} = \nu(t, e, u), \quad e(0) = e_0 \quad (1.3)$$

Tomando en cuenta la estructura matemática de los sistemas mencionados, el problema de observación definido para la clase de sistemas no lineales libres de perturbaciones consiste en diseñar un observador Ω_N , que cumpla con las siguientes peculiaridades:

- El observador Ω_N debe preservar el orden, es decir, que el estimado $\hat{x}(t)$ siempre esté por encima o por debajo de la trayectoria real del estado $x(t)$.
- El observador Ω_N debe ser convergente, es decir, que el equilibrio del sistema de error de estimación sea asintóticamente estable, lo que implica que, $\hat{x}(t)$ convergerá a los valores verdaderos del estado $x(t)$, $\|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$.

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

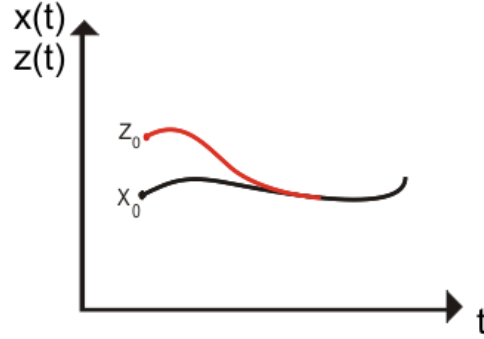


Fig. 1.1: Comportamiento del observador Σ_N cooperativo y estable

En la Figura 1.1 se muestra un ejemplo del comportamiento esperado del observador Ω_N para los sistemas no lineales en ausencia de perturbaciones, el cual tiene un estimado que está siempre por encima, y converge a sus valor verdadero en forma asintótica. Es posible extender el problema de observación, con la finalidad de utilizar sistemas no lineales en presencia de perturbaciones. Ahora, el problema consiste en diseñar un observador para una clase de sistemas no lineales perturbados, que sea cooperativo y estable. En este caso, se propone que el observador Ω_N sea utilizado para la clase de sistemas en presencia de perturbaciones.

Considere el sistema no lineal

$$\Sigma_P \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u, d), & x(0) = x_0 \\ y = h(t, x, u, d), \end{cases} \quad (1.4)$$

donde $d \in \mathbb{R}^n$ representa las perturbaciones o incertidumbres del sistema. Se asume que el término de la perturbación $d(t)$ está acotado por intervalos: $d^+(t) \succeq d(t) \succeq d^-(t)$, donde $d^+(t)$ y $d^-(t)$ son conocidas. Como se ha mencionado arriba, se propone el observador Ω_N en (1.2) para el sistema perturbado Σ_P en (1.4).

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Si el error de observación se define como $e = \hat{x} - x$, entonces la dinámica del error están dadas por

$$\dot{e} = \nu(t, e, u, d), \quad e(0) = e_0 \quad (1.5)$$

En este caso, el problema de estimación es diseñar el observador Ω_N con las características siguientes:

- El sistema del error de observación en (1.5) es cooperativo, es decir, dado para cualquier condición inicial de la estimación conocida, preserva el orden parcial con respecto a la del estado: $\hat{x}_0 \succeq x_0$ entonces

$$\hat{x}(t, \hat{x}_0) \succeq x(t, x_0)$$

para todo $t \geq t_0$.

- El observador Ω_N debe ser convergente a pesar de las perturbaciones, lo que implica que, el estimado del observador converge a una vecindad cercana de los valores verdaderos del estado, $\|\hat{x}(t) - x(t)\| < \beta(d)$ como $t \rightarrow \infty$.

El comportamiento esperado del estimado del observador Ω_N , definido para sistemas en presencia de perturbaciones, se muestra en la Figura 1.2. En caso que la perturbación sea desvaneciente, el error de estimación convergerá a cero, adquiriendo un comportamiento análogo al de la Figura 1.1.

Cabe reiterar que los observadores que se diseñan en este trabajo, pueden ser comparados en la literatura con los observadores intervalo, los cuales están solamente definidos para sistemas perturbados, ya que en los procesos no lineales tales como biológicos, (bio) químicos y de ecología, frecuentemente se tiene la presencia de perturbaciones. Tales observadores se fundamentan en la teoría de los sistemas cooperativos (Angeli y Sontag, 2003; Hirsch, 2003), la cual es una subclase de los sistemas dinámicos monótonos.

1.3. MOTIVACIÓN

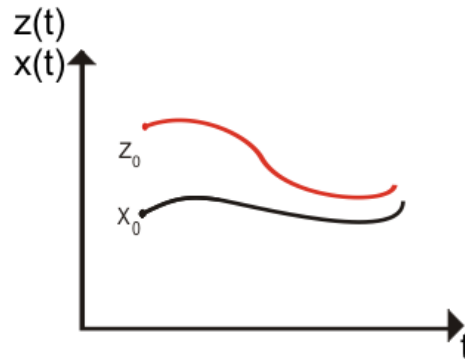


Fig. 1.2: Comportamiento del observador cooperativo con estabilidad práctica.

1.3. Motivación

Hasta aquí, se han mencionado diversos trabajos que consideran técnicas de diseño de observadores intervalo existentes en la literatura, los cuales utilizan la propiedad sistémica de cooperatividad con la finalidad de asegurar la preservación del orden parcial de la estimación observador con respecto al estado de la planta, tomando en cuenta una inicialización adecuada. Adicionalmente, los observadores intervalo de la literatura están dados para sistemas en presencia de perturbaciones e incertidumbres paramétricas, pero no consideran el caso de diseño de estimadores para sistemas libres de perturbaciones e incertidumbres. Tampoco existe trabajo que garantice la propiedad de estabilidad del observador que preserve el orden dado para sistemas perturbados.

Las dificultades mencionadas podrían ser consideradas, por ejemplo, con el método de disipatividad propuesto en (Moreno, 2004), el cual está definido para una clase de sistemas muy amplia, que considera los casos en ausencia y presencia de perturbaciones. Adicionalmente, una ventaja para utilizar este método es la unificación y generalización de diversos técnicas de diseño de observadores no lineales (Moreno, 2004).

1.4. OBJETIVOS

1.4. *Objetivos*

Objetivo general: Proponer y desarrollar una metodología de diseño de los observadores que preservan el orden, tanto para sistemas en ausencia y presencia de perturbaciones, utilizando como herramientas la propiedad de cooperatividad y el método de disipatividad.

Objetivos particulares:

Desarrollo de un método de observadores que preservan el orden para sistemas no lineales basado en la propiedad de disipatividad y cooperatividad.

a.- Proponer un observador que sea cooperativo y convergente para sistemas no lineales en ausencia de perturbaciones.

b.- Proponer un observador que sea cooperativo y convergente para sistemas no lineales en presencia de perturbaciones.

c.- Analizar la factibilidad del diseño de los observadores que preservan el orden, mediante los tipos de funciones que pueden ser asociadas a la clase de sistemas no lineales.

d.- Analizar la generalización de diversos métodos de diseño de observadores intervalo de la literatura con el método propuesto.

e.- Validar los resultados teóricos en simulación y experimentalmente.

1.5. *Contribución de la tesis*

Las principales aportaciones de este trabajo son:

- El diseño de observadores que preservan el orden para una clase de sistemas no lineales, en ausencia y presencia de perturbaciones, basados en la cooperatividad y disipatividad. La primera propiedad sistémica garantiza la preservación del orden, y la segunda asegura la convergencia del error de observación.

1.6. ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

- Se propone el diseño de los observadores intervalo para sistemas no lineales en ausencia de perturbaciones, la cual no es restrictiva a la clase de sistemas cooperativos. Para construir este observador intervalo, se requiere ejecutar de manera simultánea un par observadores que preservan el orden; las estimaciones acotarán dinámicamente al estado, por arriba y debajo de la trayectoria del estado y convergerán a los valores verdaderos del estado. *En la literatura únicamente existen trabajos que consideran el caso perturbado.*
- Se planteó el diseño de los observadores intervalo para sistemas no lineales perturbados: la estimación preservará el orden y tendrá una convergencia práctica que depende de la presencia de las perturbaciones e incertidumbres. *Enfatizamos en la propiedad de convergencia de los observadores intervalo propuestos en este trabajo, que no es considerada en trabajos relacionados de observadores intervalo en la literatura.*
- La metodología de observadores que preservan el orden propuesta aquí unifica y generaliza algunos métodos de diseño de los observadores intervalo de la literatura.
- Con el objetivo de probar experimentalmente el diseño de los observadores que preservan el orden, tanto cooperativos como intervalo, se realizaron pruebas en el sistema de tres tanques clásico modelo de Amira DTS-200.

1.6. Organización de la tesis

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En este capítulo se ha proporcionado una introducción de los observadores que preservan el orden, el estado del arte y los objetivos que se pretenden alcanzar en este proyecto de investigación. En el capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos, que posteriormente son utilizados

1.6. ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

en la metodología de diseño de los observadores intervalo para sistemas no lineales sin perturbaciones. El capítulo consta de cuatro secciones en las que se presenta el concepto de orden parcial en el espacio vectorial y matricial; después se introducen los sistemas dinámicos positivos y cooperativos, así como las relaciones existentes entre dichos sistemas. Luego se presenta el método de disipatividad con la finalidad de asegurar la estabilidad del observador que preserva el orden, y por último se expone el concepto del radio de estabilidad para sistemas lineales con perturbaciones lineales estáticas y bajo perturbaciones no lineales variantes en el tiempo. Asimismo en esta sección se muestra el vínculo entre el método de disipatividad y el radio de estabilidad.

En el capítulo 3 se presenta la metodología de diseño del observador que preserva el orden para los sistemas no lineales en ausencia de perturbaciones, considerando un par de algoritmos de diseño. El primero es la forma general de construir este observador y el segundo es un caso especial para generarlo, el cual está dado por la relación entre el método de disipatividad y el radio de estabilidad, con la ventaja de reducir el cálculo matemático que se requiere en el primer caso. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos en simulación con un par de ejemplos. En el capítulo 4 se extiende la metodología de diseño del observador que preserva el orden a los observadores intervalo. La razón es que, al considerar el observador cooperativo para un sistema con perturbaciones, la cooperatividad en las dinámicas de los errores de observación se pierde. Para recuperarla es necesario construir un par de observadores, los cuales forman un observador intervalo y que se describen en la primera sección.

En la segunda sección se analiza la estabilidad de los observadores intervalo a través de las dinámicas de los errores de estimación, las cuales tienen un comportamiento que es descrito mediante el concepto de estabilidad entrada-estados. En la tercera sección se plantea un algoritmo de diseño para esta clase de observadores. Por último, en el capítulo 5 se presentan un análisis computacional del diseño de los observadores que preservan el orden; en el capítulo 6 se exponen una serie de ejemplos en los que los observadores que preservan el orden fueron aplicados en simulación y validados experimentalmente en el sistema de Tres-Tanques del modelo de Amira DTS200. Fi-

1.6. ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

nalmente, en el capítulo 7 se indican las conclusiones del presente trabajo, así como el trabajo futuro para complementar los resultados obtenidos.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El propósito de este capítulo es introducir los conceptos primordiales de la metodología de diseño de los observadores que preservan el orden, la cual está basada en el método de la teoría disipativa (Moreno, 2004) en combinación con la propiedad sistémica de cooperatividad (Hirsch, 2003). Adicionalmente, se propone una estructura novedosa para asegurar la preservación del orden del estimado del observador con respecto al estado de la planta, la cual está relacionada con el concepto de radio de estabilidad. Más adelante, se tomarán en cuenta las nociones de polítopos, propuesta para hacer factible el diseño de los observadores intervalos presentados en este trabajo.

En la primera sección, se introducen algunas definiciones que son utilizadas a lo largo del presente trabajo, como es la representación de un orden parcial, las matrices positivas, no negativas (positivas o cero) y Metzler (Luenberger, 1979).

En particular, la matriz Metzler es una extensión de las dos primeras, y mediante ella, se pueden caracterizar a los sistemas positivos y cooperativos, los cuales tienen ciertas peculiaridades en común. Los sistemas positivos son aquellos que siempre preservan la no negatividad en sus variables de entrada, salida y del estado (Luenberger, 1979); los sistemas cooperativos son aquellos que fundamentan la conservación del orden entre las trayectorias del estado, de la entrada y de la salida (Angeli y Sontag, 2003), y son descritos en la segunda sección. En la tercera sección se presenta el método de disipatividad, que será utilizado en el diseño de los observadores que preservan el orden con la finalidad de asegurar la convergencia de los estimados. Finalmente, en la sección cuatro se presenta el concepto de polítopos, utilizados para hacer factible el diseño de los observadores propuestos, y cuya aplicación está dada en capítulos subsecuentes.

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1. Conceptos Básicos

A lo largo del presente trabajo se utiliza frecuentemente el símbolo \succeq para realizar comparaciones entre vectores y matrices. Es por ello que se incluye la definición formal.

Definición 1: El símbolo \succeq define un *orden parcial* en el espacio de vectores y matrices, lo cual está denotado mediante

$$x \succeq y \Leftrightarrow x_i - y_i \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$M \succeq N \Leftrightarrow M_{ij} - N_{ij} \geq 0, \quad M, N \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Particularmente, representa la *no negatividad* de los vectores y matrices, tal que,

$$x \succeq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$M \succeq 0 \Leftrightarrow M_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Es decir, el operador \succeq es interpretado como un conjunto de desigualdades aplicadas componente a componente; $x \succeq y$ se cumple cuando ocurre para todos sus elementos $x_i \geq y_i$, y en un caso especial cuando $x_i \geq 0$. Cabe mencionar que, en este trabajo, el símbolo \geq se emplea para definir tanto comparaciones entre cantidades escalares como matrices semidefinidas positivas. Otro concepto muy utilizado, es el cuadrante no negativo del espacio Euclidiano, cuya representación matemática se introduce enseguida.

Definición 2: La región no negativa de los vectores reales queda definida por

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n\}$$

de manera equivalente,

$$x \in \mathbb{R}_+^n \Leftrightarrow x \succeq 0.$$

Algunas definiciones y conceptos referentes a las matrices se presentan a continuación. Específicamente se citan tres tipos de matrices, las cuales tienen ciertas relaciones entre sí, y son usadas en capítulos posteriores.

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1.1. Matrices Positivas

En este apartado se estudian las matrices positivas. La definición formal de estas matrices se incorpora enseguida.

Definición 3: Una matriz $P = [p_{ij}]$ es **positiva** si todos sus elementos son mayores que cero, lo que se describe por,

$$P \succ 0 \quad \text{si } p_{ij} > 0, \quad \forall_{i,j}.$$

En particular, esta definición también se aplica para el caso vectorial. Es importante mencionar que el concepto de una matriz positiva es completamente diferente al de una matriz definida positiva, ya que en la primera se pide que todos los elementos son mayores que cero, mientras en la segunda se satisface que los menores principales y/o los valores propios de la matriz sean positivos.

Una matriz positiva P se caracteriza comúnmente por poseer un valor propio positivo dominante ($\lambda_0 > 0$) en su espectro $\rho(P)$. Dicha característica se muestra en el teorema siguiente.

Teorema 1 (Frobenius-Perron, (Luenberger, 1979)): Si A es una matriz positiva, expresada como $A \succ 0$, entonces $\exists \lambda_0 > 0$ y $x_0 \succ 0$ tales que,

1. $Ax_0 = \lambda_0 x_0$.
2. Si $\lambda \neq \lambda_0$ es algún otro valor propio de A , entonces $|\lambda| < \lambda_0$.
3. λ_0 es un valor propio de multiplicidad algebraica y geométrica 1. ◇

Lo anterior asegura la existencia del valor propio $\lambda_0 > 0$, conocido como *valor propio de Frobenius*, y de un correspondiente vector propio $x_0 \succ 0$. Esto significa que para el sistema dinámico $\dot{x} = Ax$, las trayectorias del estado convergen de forma asintótica al espacio generado por el vector propio de Frobenius.

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1.2. Matrices No Negativas

Dado que uno se enfrenta en la práctica con matrices no negativas, que no son positivas, es necesario considerar la extensión de la teoría desarrollada para el caso en que no todas las entradas de una matriz sean estrictamente positivas. La ampliación está dada mediante el Teorema de Perron.

Definición 4: La matriz P es *no negativa* si todos sus elementos son no negativos, lo cual está descrito por,

$$P \succeq 0 \quad \text{si} \quad p_{ij} \geq 0 \quad \forall_{i,j}$$

o de manera equivalente,

$$P \in \mathbb{R}_+^{n \times m} \Leftrightarrow P \succeq 0.$$

Esta definición es completamente distinta a la que se utilizaba en el concepto de desigualdades de la forma $A \geq B$, ya que un par de matrices son comparadas: decimos que $A \geq B$ para dos matrices A y B de la misma dimensión si $A - B \geq 0$.

Muchos de los resultados importantes para las matrices positivas pueden ser extendidos a las matrices no negativas. A continuación se muestra una extensión del *Teorema del Frobenius-Perron* para esta clase de matrices.

Teorema 2 (Luenberger (1979)): Sea $P \succeq 0$. Entonces existe $\lambda_0 \geq 0$ y $x_0 \succeq 0$ tales que,

1. $Px_0 = \lambda_0 x_0$
2. Si $\lambda \neq \lambda_0$ es algún otro valor propio de A , entonces $|\lambda| \leq \lambda_0$ ◇

2.1.3. Matrices Metzler

La mayoría de los resultados que existen en las matrices positivas se amplían a las matrices no negativas, que a su vez tienen una estrecha relación con las matrices Metzler (Luenberger, 1979). Este tipo de matrices son ampliamente utilizadas en el diseño de los

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

observadores que preservan el orden. A continuación se presenta la definición formal de este tipo de matrices.

Definición 5: Una matriz A es *Metzler o cooperativa*, lo cual se expresa matemáticamente por

$$A \stackrel{M}{\succeq} 0$$

si todos los elementos fuera de la diagonal de la matriz A son no negativos, es decir, $a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$.

La matriz Metzler A tiene la propiedad de poseer un valor propio real μ_0 y un vector propio $x \succeq 0$; ya que si A es una matriz Metzler, existe una constante $\alpha > 0$, tal que la matriz $P = \alpha I + A$ es no negativa. El espectro $\rho(P)$ tiene un valor propio dominante $\lambda_0 \geq 0$ dado por el teorema de Perron-Frobenius. Por consiguiente, existe un valor propio real dominante $\mu_0 = \lambda_0 - \alpha$ (ver Figura 2.1) de la matriz A con su correspondiente vector propio no negativo $x_0 \succeq 0$, donde $\dot{x} = Ax = (P - \alpha I)x$. Lo anterior, se presenta en el Teorema siguiente

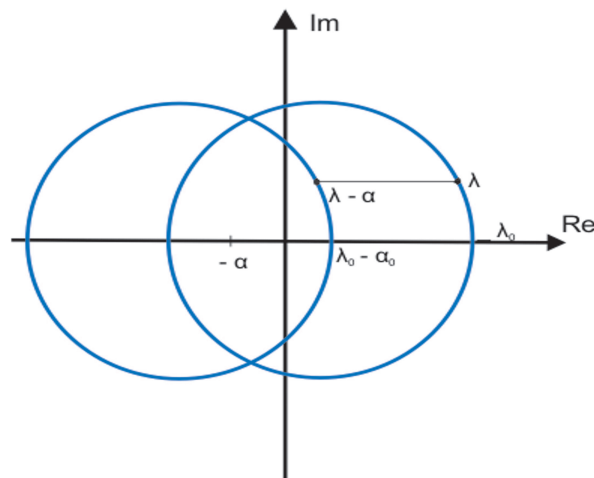


Fig. 2.1: Ubicación de los valores propios de una matriz Metzler.

2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

Teorema 3 (Luenberger (1979)): Si A es una matriz Metzler, entonces existe un valor propio $\mu_0 \geq 0$ y un vector $x_0 \succeq 0$ tales que,

1. $Ax_0 = \mu_0 x_0$
2. Si $\lambda \neq \lambda_0$ es algún otro valor propio de A , entonces $\mathbf{Re}(\mu) \leq \mu_0$. \diamond

donde $\mathbf{Re}(\mu)$ representa la parte real de los valores propios definidos como $\mu = \lambda - \alpha$, los cuales serán siempre menores que μ_0 , por similitud al Teorema de Perron-Frobenius. El Lema siguiente es una herramienta útil para la comparación de los valores propios de una matriz Metzler perturbada.

Lema 1 (Son y Hinrichsen (1996)): Sean las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$|C| \leq B \quad \Rightarrow \quad \lambda_0(A + C) \leq \mu_0(M(A) + B) \quad (2.1)$$

donde $|C| \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $M(A) = A_d + |A_o| = A_d + |A - A_d|$ es la matriz Metzler de A y $A_d = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, y μ_0 es el valor propio de Frobenius de la matriz Metzler y λ_0 es el valor propio dominante de la matriz A . En un caso en particular

$$\lambda_0(A) \leq \mu_0(M(A)) \quad (2.2)$$

Si A es una matriz Metzler,

$$\mu_0(A) \leq \mu_0(A + B) \quad (2.3)$$

\diamond

Es importante resaltar que los sistemas dinámicos positivos y/o cooperativos pueden ser caracterizados por una matriz Metzler, dando como consecuencia que poseerán trayectorias del estado que convergerán al cuadrante no negativo \mathbb{R}_+^n .

2.2. Sistemas Positivos y Cooperativos

En esta sección se estudia el comportamiento dinámico tanto de los sistemas positivos como de los sistemas cooperativos, los cuales se utilizan en los capítulos de diseño de los observadores que preservan el orden.

2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

2.2.1. Sistemas Positivos

En la actualidad existen diversos sistemas físicos como los biológicos, mecánicos, químicos, fisiológicos, entre otros, cuyas variables de estado, de entrada y salida expresan cantidades con información real mediante valores no negativos [$x(t) \succeq 0$, $u(t) \succeq 0$, y $y(t) \succeq 0$]. En la literatura, estos sistemas se conocen como *sistemas positivos*. La característica más importante de estos sistemas es que si la condición inicial del estado [$x(0)$] está en el cuadrante no negativo del espacio Euclidiano (\mathbb{R}_+^n), entonces la trayectoria del estado [$x(t)$] permanece ahí para todo tiempo futuro. Debido a lo anterior, los sistemas positivos tienen un comportamiento dinámico (asintótico) restringido. A continuación se describen a los sistemas dinámicos positivos.

Sistema No Lineal Positivo

Considere el sistema no lineal dado por

$$\Sigma_{NL} \begin{cases} \dot{x} = F(t, x, u), & x(0) = x_0 \\ y = H(t, x, u) \end{cases} \quad (2.4)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el *estado*, el cual representa el comportamiento interno del sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada, $y \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema y $t \in \mathbb{R}$ es la variable del tiempo. F es un función de campo vectorial suave y H es una función no lineal suave, ambas dependen de las variables (t, x, y) . Asumiremos que el sistema es *completo*, i.e., las trayectorias existen para todos los tiempos positivos $t \geq t_0$.

Definición 6: El sistema Σ_{NL} en (2.4) es *positivo* si

$$x_0 \succeq 0, \quad u(t) \succeq 0 \Rightarrow x(t) \succeq 0, \quad y(t) \succeq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Es decir, el sistema Σ_{NL} es positivo si *las trayectorias* [$x(t, x_0)$] generadas por el sistema Σ_{NL} , e influidas por una entrada no negativa y con condición inicial no negativa, *permanecen en la región no negativa* para todo tiempo futuro. Esto equivale a decir que el sistema Σ_{NL} es *positivo* si y sólo si, el cuadrante \mathbb{R}_+^n es un *conjunto*

2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

invariante positivo. Los sistemas no lineales positivos (sin entrada ni salida) no se caracterizan de una forma sencilla. Sin embargo, la representación de los sistemas no lineales positivos puede ser expresada mediante la Proposición siguiente.

Proposición 1 ((Mailleret, 2004)): El sistema Σ_{NL} en (2.4) sin entrada es positivo \Leftrightarrow

$$F_i(x_1 \geq 0, \dots, x_i = 0, \dots, x_n \geq 0) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

◇

Lo anterior tiene como significado que las trayectorias del estado nunca abandonan la región no negativa $[x(t) \succeq 0]$, y además, si alguna variable del estado es cero entonces, la dirección de movimiento de la trayectoria siempre es no negativa $[F_i(x(t)) \succeq 0]$, permaneciendo siempre en \mathbb{R}_+^n . En la Figura 2.2 se muestra el comportamiento de un sistema positivo de segundo orden, cuyo cuadrante no negativo es un conjunto invariante, donde toda trayectoria que emana de esta región permanece ahí para todo tiempo futuro.

Sistema Lineal Positivo

Los sistemas lineales positivos tienen un comportamiento asintótico limitado, el cual está relacionado con el teorema algebraico de Frobenius y Perron (ver página. 21), ya que asegura la existencia de un valor propio real dominante y de su correspondiente vector propio no negativo, en el cual las trayectorias del sistema convergen asintóticamente a su subespacio generado.

Sea el sistema lineal dado por

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & x(0) = x_0 \\ y = C(t)x, \end{cases} \quad (2.5)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ son matrices variantes en el tiempo, y $(x, u, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ son los vectores de estado, entrada y salida respectivamente.

2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

La clase de sistemas lineales Σ_L que son positivos puede ser caracterizada de una simple forma, lo cual está descrito en la Proposición siguiente:

Proposición 2: (Dautrebande y Bastin, 1999) El sistema Σ_L en (2.5) es **positivos**

$$\text{(C1)} \quad A \succeq 0 \Leftrightarrow a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j; \quad \text{(C2)} \quad B \succeq 0; \quad \text{(C3)} \quad C \succeq 0. \quad \diamond$$

Lo anterior muestra la caracterización de la propiedad de positividad en el sistema Σ_L en (2.5). Esta caracterización hace referencia a que si la entrada tiene una influencia no negativa en todas las variables del estado, y además, la condición inicial es no negativa del sistema Σ_L en (2.5), entonces se garantiza que las trayectorias del estado nunca abandonan el cuadrante \mathbb{R}_+^n . Por consecuencia, la salida es no negativa. Esto es debido a la dirección de movimiento de la trayectoria $x(t)$ es no negativa [$\dot{x}_i(t) \succeq 0$], provocando que $x(t)$ siempre tienda a la región no negativa (ver Figura 2.2), lo cual es asegurado si los elementos de entrada fuera de la diagonal de la matriz A son mayores o iguales que cero, es decir, si A es una matriz Metzler.

2.2.2. Sistemas Cooperativos

Los sistemas cooperativos constituyen una clase importante de los sistemas dinámicos debido a su comportamiento peculiar. Estos sistemas son *aquellos que sus trayectorias preservan el orden parcial en el estado, en la entrada y en la salida en cada tiempo, cuando las señales de entrada (si existen) y los estados iniciales son (parcialmente) ordenados* (Angeli y Sontag, 2003), cuya descripción matemática está dada en la definición siguiente.

Definición 7: El sistema no lineal Σ_{NL} (2.4) es **cooperativo** si dados

$$x_0^1 \succeq x_0^2, \quad u^1(t) \succeq u^2(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.6)$$

2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

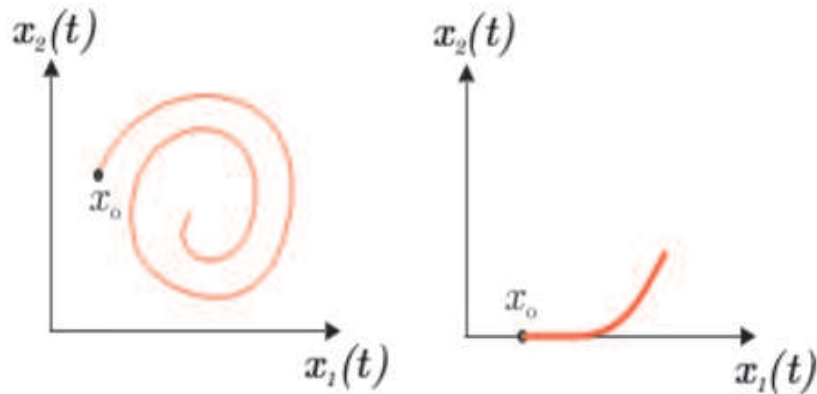


Fig. 2.2: Dos trayectorias a) y b) obtenidas al aplicar una entrada no negativa a un sistema positivo de segundo orden

entonces, las trayectorias del estado y de la salida preservan el orden parcial

$$\begin{aligned} x(t, t_0, x_0^1, u^1(t)) &\succeq x(t, t_0, x_0^2, u^2(t)) & \forall t \geq t_0 & \quad (2.7) \\ H \circ x(t, t_0, x_0^1, u^1(t)) &\succeq H \circ x(t, t_0, x_0^2, u^2(t)). \end{aligned}$$

En otras palabras, la propiedad de cooperatividad produce un ordenamiento en las trayectorias del estado y de la salida. En la figura 2.3 se muestra el comportamiento de un sistema cooperativo de segundo orden en las trayectorias $x(t)$.

Sistema No Lineal Cooperativo

En los sistemas cooperativos (Hirsch, 2003) cada variable del estado tiene una influencia no negativa de las otras variables del estado, y la entrada tiene una influencia no negativa en estas variables, lo cual está relacionado en la caracterización de dichos sistemas. A continuación se describe a los sistemas no lineales cooperativos.

Proposición 3 (Angeli y Sontag (2003)): El sistema Σ_{NL} en (2.4) es **cooperativo** si y sólo si,

2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

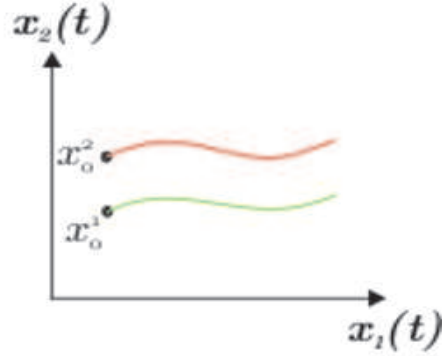


Fig. 2.3: Un sistema cooperativo preserva el orden en las trayectorias del estado

$$(C1) \quad \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]^M \succeq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \geq 0, \forall i \neq j; \quad (C2) \quad \left[\frac{\partial F_i}{\partial u_j} \right] \succeq 0; \quad (C3) \quad \left[\frac{\partial H_i}{\partial x_j} \right] \succeq 0.$$

El símbolo $\succeq 0$ representa que el Jacobiano $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ es *Metzler*, es decir, los elementos fuera de la diagonal son no negativos. Note que cuando las entradas y salidas no están presentes, la definición anterior reduce a la forma clásica, en la cual los estados iniciales ordenados implica las trayectorias del estado ordenado (Smith, 1995), lo cual es equivalente a la condición (C1).

Sistema Lineal Cooperativo

Particularmente, la caracterización de los sistemas lineales cooperativos está dada por,

Proposición 4: (Angeli y Sontag, 2003) El Sistema Lineal Σ_L en (2.5) es *cooperativo* \Leftrightarrow ,

$$(C1) \quad A \succeq 0 \Leftrightarrow a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j; \quad (C2) \quad B \succeq 0; \quad (C3) \quad C \succeq 0. \quad \diamond$$

Comparando la *Proposición 2* y *4*, se obtiene que ambas propiedades, cooperatividad y positividad, definidas para la clase de sistemas lineales son equivalentes, ya que

2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

si $x_0 \succeq 0$ and $u(t) \succeq 0$, entonces $x(t, t_0, x_0, u(t)) \succeq 0$. Sin embargo para sistemas no lineales esto no ocurre.

2.2.3. Relaciones de los sistemas positivos y cooperativos

Con base en los conceptos de los sistemas positivos y cooperativos que se presentan arriba, se obtienen las siguientes relaciones,

1. En el caso no lineal:

El sistema Σ_{NL} (2.4) cooperativo es positivo si $f(t, 0, 0) \succeq 0$ (Mailleret, 2004).

2. En el caso lineal:

El sistema Σ_L (2.5) cooperativo es equivalente al sistema Σ_L positivo.

En otras palabras, la relación existente en la clase de sistemas no lineales consiste en que un sistema cooperativo puede ser positivo, si se garantiza que $f(t, 0, 0) \succeq 0$. Sin embargo, no todo sistema positivo es cooperativo, ya que las trayectorias del estado permanecen en el cuadrante no negativo pero no siempre satisfacen el ordenamiento de dichas trayectorias, y esto tiene que ver directamente con la conservación del orden parcial de las trayectorias de estado. Para el caso lineal, las relaciones entre los sistemas cooperativos y positivos son equivalentes. Esto se debe a que los sistemas lineales tienen un punto de equilibrio en el origen, que frecuentemente representa al estado inicial, prevaleciendo la no negatividad de las trayectorias del estado y de la salida.

2.2.4. Observadores intervalo

En la literatura, se han propuesto una clase especial de estimadores, llamados *observadores intervalo* (Gouzé *et al.*, 2000) para sistemas no lineales con incertidumbres, y que están basados en las propiedades de los sistemas cooperativos (mencionadas arriba). Para esta clase de estimadores, se requiere conocimiento de las cotas por intervalo de las incertidumbres de la planta (Gouzé *et al.*, 2000; Rapaport y Dochain, 2005),

2.2. SISTEMAS POSITIVOS Y COOPERATIVOS

dando como resultado que los estimados acoten dinámicamente a las trayectorias del estado. Estos observadores han sido aplicados a una clase de sistemas no lineales con incertidumbres, especialmente modelos biológicos, procesos químicos y ecológicos. A continuación se enuncia la definición de estos observadores.

Definición 8: Un *observador intervalo* es un conjunto de observadores que proporcionan un intervalo entre las estimaciones que están por encima y por debajo de la trayectoria real del estado.

Considérese el sistema no lineal (Moisan, 2007),

$$\Omega_D \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u, d), & x(0) = x_0 \\ y = h(t, x, u) \end{cases} \quad (2.8)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada, $y \in \mathbb{R}^p$ es la salida, $d \in \mathbb{R}^n$ es el término de perturbación, el cual representa incertidumbres y/o variables exógenas del sistema. Se asume que se conocen las cotas de la perturbación y que satisfacen,

$$d^+(t, y) \succeq d(t, x) \succeq d^-(t, y) \quad (2.9)$$

Sea un par de observadores de la forma

$$\Omega_{OD} \begin{cases} \dot{z}^+ = f^+(t, z^+, d^+, u, y), & z(0)^+ = h^+(x_0) \\ \dot{z}^- = f^-(t, z^-, d^-, u, y), & z(0)^- = h^-(x_0) \end{cases} \quad (2.10)$$

donde $z^+, z^- \in \mathbb{R}^n$ son los estimados del estado de estos observadores. Los errores de observación pueden estar definidos por $e^+ = z^+ - x$ y $e^- = x - z^-$, por consecuencia, sus dinámicas se describen por:

$$\dot{e}^+ = g(t, e^+, u, c^+), \quad e^+(0) = e_0^+ \quad (2.11)$$

$$\dot{e}^- = g(t, e^-, u, c^-), \quad e^-(0) = e_0^- \quad (2.12)$$

donde $c^+ = d^+(t, y) - d(t, x)$ y $c^- = d(t, x) - d^-(t, y)$. Si los sistemas (2.11) y (2.12) pueden ser representados como sistemas cooperativos, según están definidos en

2.3. MÉTODO DE DISIPATIVIDAD

la Proposición 4, entonces las trayectorias de los errores de observación $e^+(t)$ y $e^-(t)$ preservan el orden.

El conjunto de observadores Ω_{OD} en (2.10) forman un *observador intervalo*, si y sólo si se cumple que el estado del sistema está acotado dinámicamente por los estimados de dicho observador Ω_{OD} , es decir,

$$z^+(0) \succeq x(0) \succeq z^-(0) \Rightarrow z^+(t) \succeq x(t) \succeq z^-(t) \quad (2.13)$$

En general, esta clase de observadores garantiza el ordenamiento de las trayectorias del estado en (2.13), bajo la suposición de conocer el acotamiento de la perturbación en (2.9).

2.3. Método de Disipatividad

En este trabajo, las propiedades de estabilidad del método de disipatividad se utilizan en el diseño de los observadores que preservan el orden, con la finalidad de asegurar la convergencia de los estimados. Esto se puede realizar al descomponer la estructura de la dinámica del error de observación en subsistemas que poseen las propiedades disipativas, obteniendo una representación dada por la interconexión de un sistema lineal e invariante en el tiempo con una no linealidad estática en retroalimentación (Moreno, 2004). A continuación se enuncian los conceptos más importantes de este tema.

El método disipativo ha tenido un importante auge en la teoría de control moderna, ya que al aplicarse a los sistemas físicos, sus modelos matemáticos expresan formalmente la ley de conservación de energía. En otras palabras, la cantidad de energía almacenada en el interior de los sistemas es siempre menor ó igual a la cantidad que ha sido suministrada por otros sistemas, lo que equivale a decir que estos *sistemas son capaces de almacenar y consumir energía pero no de generarla*.

Definición 9: (Willems, 1972a,) El sistema Σ_{NL} en (2.4) LTI es **disipativo** si existen una *función de almacenamiento de energía (interna)* $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (continua y positiva

2.3. MÉTODO DE DISIPATIVIDAD

semidefinida) y una *función de suministro de energía (externa)* $w : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tales que se satisface la *desigualdad disipativa*,

$$V(x(t)) \leq V(x_0) + \int_0^t w(u(\tau), y(\tau)) d\tau; \quad \forall (x_0, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (2.14)$$

Los sistemas pasivos constituyen el caso especial más importante de los sistemas disipativos, dado para igual número de entradas que de salidas (con $m = p$),

$$\dot{V}(x(t)) \leq w(u(t), y(t)) = y^T u; \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \quad (2.15)$$

Comúnmente, las funciones de almacenamiento de energía están descritas por funciones cuadráticas del estado.

Considérese una función de suministro cuadrática dada por,

$$w(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

$$= y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ con Q y R simétricas. En el caso lineal de los sistemas LTI en Σ_L con funciones de suministro en (2.16) no hay pérdida de generalidad si la función de almacenamiento es restringida ser una forma cuadrática positiva definida

$$V = x^T P x \quad P = P^T > 0. \quad (2.18)$$

Esto puede ser caracterizado por medio de una LMI.

Definición 10: El sistema (LTI) Σ_L en (2.5) es *de estado estrictamente disipativo (SSD)* con respecto a una función de suministro $w(y, u)$ en (2.16), o en forma corta (Q, S, R) -SSD, si \exists una matriz $P = P^T > 0$ y una constante $\epsilon > 0$ tal que se satisface la desigualdad disipativa:

2.3. MÉTODO DE DISIPATIVIDAD

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \epsilon P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0. \quad (2.19)$$

Definición 11: Una *no linealidad estática variante en el tiempo*

$$y = f(t, u) \quad (2.20)$$

continua a tramos en t y localmente Lipschitz en u , tal que $f(t, 0) = 0$ es *disipativa* con respecto a la función de suministro $w(y, u)$ en (2.16) ó en forma corta (Q, S, R) -D si $\forall t \geq 0$ y $u \in \mathbb{R}^m$,

$$w(y, u) = w(f(t, u), u) \geq 0. \quad (2.21)$$

Las condiciones de sector clásicas para no linealidades cuadradas (Khalil, 2002), es decir, $m = p$, pueden representarse en la forma siguiente.

1. Si f está en el sector $[K_1, K_2]$, es decir, $(y - K_1 u)^T (K_2 u - y) \geq 0$ entonces es (Q, S, R) -D con:

$$(Q, S, R) = \left(-I, \frac{1}{2}(K_1 + K_2), -\frac{1}{2}(K_1^T K_2 + K_2^T K_1) \right)$$

2. Si f está en el sector $[K_1, \infty]$, es decir, $(y - K_1 u)^T u \geq 0$ entonces es (Q, S, R) -D con:

$$(Q, S, R) = \left(0, \frac{1}{2}I, -\frac{1}{2}(K_1 + K_1^T) \right)$$

Una no linealidad multivariable f puede ser (Q_i, S_i, R_i) -D para algunas ternas (Q_i, S_i, R_i) (Moreno, 2004), es decir,

$$\omega_i(f(t, u), u) = f^T Q_i f + 2f^T S_i u + u^T R_i u \geq 0, \text{ for } i = 1, 2, \dots, \mu \quad (2.22)$$

En este caso, es fácil ver que f es $\sum_{i=1}^{\mu} \theta_i (Q_i, S_i, R_i)$ -D para todo $\theta_i \geq 0$, es decir, f es disipativa con respecto a una función de suministro $\omega_{\theta}(f, u) = \sum_{i=1}^{\mu} \theta_i \omega_i(f, u)$. Note que la desigualdad (2.21) proporciona la caracterización de la no linealidad f , ya

2.3. MÉTODO DE DISIPATIVIDAD

que significa que el gráfico de f está contenido en el subespacio correspondiente a los valores propios no negativos de la forma cuadrática (Q, S, R) . Si la forma cuadrática (Q, S, R) es semidefinida positiva, entonces la desigualdad (2.21) no proporciona alguna información acerca de la no linealidad f y por lo tanto no tiene utilidad en lo que sigue.

El Lema siguiente proporciona una generalización del criterio del círculo para sistemas no cuadrados, y muestra que la interconexión de realimentación negativa de los sistemas disipativos es internamente estable.

Lema 2: (Moreno, 2004) Sea la interconexión de la retroalimentación

$$\Xi_L : \begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \\ y = Cx(t) \\ u = -f(t, y) \end{cases} \quad (2.23)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^p$ son los vectores de estado, entrada y salida, respectivamente. Si $\exists Q, S, R$ tales que

- $f(t, y)$ es (Q, S, R) -D, y
- el subsistema Ξ_L LTI es $(-R, S^T, -Q)$ -SSD

entonces el punto de equilibrio $x = 0$ del **sistema en lazo cerrado es global y exponencialmente estable**, es decir, existen las constantes $k > 0$ and $\rho > 0$ tal que para todo x_0

$$\|x(t)\| \leq k \|x_0\| \exp(-\rho t). \quad (2.24)$$

◇

El lema 2 representa la estructura principal del método disipativo, y consiste en que si la no linealidad f es (Q, S, R) -D con respecto a una función de suministro cuadrática, entonces la parte lineal tiene que ser diseñada $(-R, S^T, -Q)$ -SSD con respecto a una función de suministro complementaria, lo cual produce que la interconexión sea global y exponencialmente estable. La figura 2.4 muestra el lazo cerrado Ξ_L en (2.23). Este

2.3. MÉTODO DE DISIPATIVIDAD

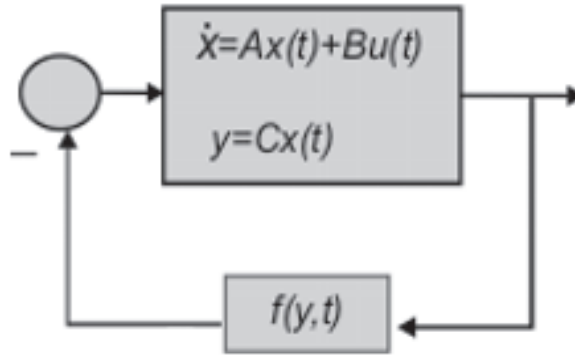


Fig. 2.4: Estructura del método de disipatividad.

esquema se usa en capítulos posteriores para el diseño de observadores que preservan el orden y observadores disipativos, ya que la dinámica del error de observación tiene un arreglo idéntico al de la figura 2.4.

Cuando las perturbaciones externas aditivas actúan en estos sistemas, la estabilidad es debilitada: x no converge asintóticamente a cero. En vez de eso, la estabilidad es práctica: las trayectorias del sistema no convergerán al origen $x = 0$, pero si la señal de entrada $b(t)$ está acotada, las trayectorias convergerán a una bola centrada en el origen, con un radio dependiente de la cota de b , y permanecerá allí para todo tiempo futuro. Esto está determinado por la propiedad de Estabilidad Entrada-Estado.

Definición 12 (Khalil (2002)): El sistema Ξ_P es *Estable Entrada-Estado* (EEE) con respecto a $b(t)$ si existe una función β clase \mathcal{KL} , una función γ clase \mathcal{K} tal que para algún estado inicial $x(t_0)$ y alguna entrada acotada $b(t)$, la solución $x(t)$ existe para todo tiempo futuro $t \geq t_0$ y satisface

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|b(\tau)\|\right)$$

2.3. MÉTODO DE DISIPATIVIDAD

Lema 3: Considere el sistema perturbado

$$\Xi_P : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + b(t), & x(0) = x_0 \\ y = Cx \\ u = -f(t, y) \end{cases} \quad (2.25)$$

donde $b(t)$ es una señal de entrada. Suponga que las condiciones del Lema 2 son satisfechas. Bajo estas condiciones, el sistema Ξ_P es *entrada-estado-estable (ISS, por sus siglas en inglés) con respecto a b*. \diamond

Prueba. Damos las pruebas a los Lemas 2 y 3. Por hipótesis (2.16) es satisfecho con $(-R, S^T, -Q)$. Tomando $V(x) = x^T P x$ como la función candidata de Lyapunov del sistema en lazo cerrado, la derivada del tiempo de $V(x)$ a lo largo de las soluciones de Ξ_P es $\dot{V} = (Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu) + 2x^T P b(t)$, o, porque de (2.19) y (2.25)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + 2x^T P b(t) \\ &\leq \begin{bmatrix} x \\ -f \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -C^T R C & C^T S^T \\ S C & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -f \end{bmatrix} - \epsilon x^T P x + 2x^T P b(t) \\ &= - \begin{bmatrix} f \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ y \end{bmatrix} - \epsilon V(x) + 2x^T P b(t) \leq -\epsilon V(x) + 2x^T P b(t), \end{aligned}$$

ya que f es (Q, S, R) -disipativa. Cuando la perturbación se desvanece, es decir $b(t) = 0$, entonces $\dot{V} \leq -\epsilon V$ y, usando el Lema de comparación Khalil (2002), sigue que

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) e^{-\epsilon t}.$$

Esto significa que

$$\lambda_{\min}(P) \|x(t)\|_2^2 \leq x^T(t) P x(t) \leq x^T(0) P x(0) e^{-\epsilon t} \leq \lambda_{\max}(P) \|x(0)\|_2^2 e^{-\epsilon t},$$

donde $\lambda_{\min, \max}(P)$ son los valores propios más pequeños y más grandes de P , respectivamente. Entonces

$$\|x(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|x(0)\|_2 e^{-\frac{\epsilon}{2} t},$$

2.4. RADIO DE ESTABILIDAD

así que $x = 0$ es un punto de equilibrio exponencial globalmente estable. Esto finaliza la prueba del Lema 2.

Cuando b es diferente de cero, la desigualdad $\dot{V} \leq -\epsilon V + 2x^T P b$ puede ser reescrito, para algún $\theta \in (0, 1)$, como

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq -(1 - \theta)\epsilon V - \theta\epsilon x^T P x + 2x^T P b \\ &\leq -(1 - \theta)\epsilon V - \theta\epsilon\lambda_{\max}(P)\|x\|_2^2 + 2\lambda_{\max}(P)\|b\|_2\|x\|_2 \\ &\leq -(1 - \theta)\epsilon V + \lambda_{\max}(P)\|x\|_2(2\|b\|_2 - \theta\epsilon\|x\|_2) \\ &\leq -(1 - \theta)\epsilon V, \quad \forall\|x\|_2 \geq \frac{2}{\theta\epsilon}\|b\|_2. \end{aligned}$$

Aplicando (Khalil, 2002, Theorem 4.19) sigue que Ξ_P es EEE con respecto a $b(t)$. ■

2.4. Radio de Estabilidad

El concepto de radio de estabilidad está definido para los sistemas lineales; y permite que para ciertas perturbaciones (lineales o no lineales), se pueda garantizar que estos sistemas permanecen estables (Son y Hinrichsen, 1996). En esta tesis se relaciona la noción del radio de estabilidad bajo perturbaciones no lineales variantes en el tiempo con la del método disipatividad, ya que ambas poseen afinidad en su estructura. El resultado de esta relación es un cálculo más sencillo para asegurar la estabilidad de sistemas no lineales en realimentación con una no linealidad variante en el tiempo. A continuación se mencionan los conceptos más importante de este tema.

2.4.1. Perturbaciones lineales

Considere el sistema lineal

$$\Omega : \dot{x} = Ax, \tag{2.26}$$

es asintóticamente estable si y solo si la matriz A es Hurwitz, es decir, $\max\{\lambda; \lambda \in \rho(A)\} < 0$, donde $\rho(A) \subset \mathbb{C}_-$ es el espectro de A . Cuando el sistema Ω en (2.26) está sujeto a *perturbaciones estructuradas* del tipo de realimentación de salida, es decir,

$$A \rightarrow A + B\Delta C,$$

2.4. RADIO DE ESTABILIDAD

el sistema perturbado está representado por

$$\Omega_p : \dot{x} = (A + B\Delta C)x, \quad \|\Delta\| < \gamma \quad (2.27)$$

donde A es Hurwitz, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ son matrices que definen la estructuras de la perturbaciones, y Δ es una matriz de perturbaciones desconocida. Esta puede ser: compleja, real y no negativa (es decir, $\Delta \in \mathbb{C}^{m \times p}$, $\Delta \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\Delta \in \mathbb{R}_+^{m \times p}$). $\|\Delta\|$ es el tamaño de la perturbación lineal y $\gamma > 0$ es una cota de dicha perturbación. Para la terna $(A; B, C)$ con $\Delta \in \mathbb{K}^{m \times p}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó \mathbb{R} ó \mathbb{R}_+ se definen 3 radios de estabilidad.

Definición 13: Si el sistema Ω en (2.26) es perturbado, y toma la forma de Ω_p en (2.27), entonces el radio de estabilidad de Ω_p es:

$$r_{\mathbb{K}} = r_{\mathbb{K}}(A; B, C) = \inf \left\{ \begin{array}{l} \|\Delta\|; \Delta \in \mathbb{K}^{m \times p}, \\ \lambda(A + B\Delta C) \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

donde $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$.

En otras palabras, el radio de estabilidad se define como la menor cota de la perturbación que desestabiliza al sistema Ω_p . Los tres radios de estabilidad tienen la propiedad,

$$0 \leq r_{\mathbb{C}}(A; B, C) \leq r_{\mathbb{R}}(A; B, C) \leq r_{\mathbb{R}_+}(A; B, C) \quad (2.29)$$

En el caso complejo, el radio de estabilidad es definido por

$$r_{\mathbb{C}}(A; B, C) = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \|C(j\omega I - A^{-1})B\|^{-1} \quad (2.30)$$

El radio de estabilidad complejo es utilizado para definir las propiedades de estabilidad del sistema perturbado Ω_p . Particularmente, si el sistema es positivo, $r_{\mathbb{C}}$ se reduce a un cálculo simple. Los resultados transcendentales son mencionados aquí.

Proposición 5 (Hinrichsen y Pritchard (1986)): Suponga que el espectro $\rho(A) \in \mathbb{C}_-$. Si $r_{\mathbb{C}}^2 \geq \gamma$ entonces Ω_p es asintóticamente estable.

2.4. RADIO DE ESTABILIDAD

Teorema 4 (Son y Hinrichsen (1996)): . Si Ω_p en (2.27) es un sistema positivo, es decir, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es Metzler, y además Hurwitz, $D \succeq 0$ y $E \succeq 0$ son matrices no negativas. Entonces, los radios de estabilidad están dados por

$$r = \|CA^{-1}B\|^{-1}, \quad r_{r=\mathbb{C}} = r_{\mathbb{R}} = r_{\mathbb{R}^+} \quad (2.31)$$

◇

El Teorema anterior muestra que los tres radios de estabilidad son equivalentes, por consecuencia, la propiedad de estabilidad del sistema perturbado Ω_p puede ser asegurada mediante un cálculo simple dado por r .

2.4.2. Perturbaciones no lineales variantes en el tiempo

Ahora, se considera que Ω en (2.26) está sujeto a *perturbaciones no lineales variantes en el tiempo* $f(Cx, t)$ (Son y Hinrichsen, 1996). Este sistema perturbado está representado por

$$\Omega_{np} : \dot{x} = Ax - Bf(Cx, t), \quad t > 0 \quad (2.32)$$

Se asume que $f(t, y)$ es globalmente Lipschitz en y y continua a tramos en t , tal que

$$\|f(y, t)\| \leq \gamma \|y\|, \quad y \in \mathbb{R}^p, t \geq 0, \gamma > 0 \quad (2.33)$$

El tamaño de la perturbación no lineal se mide por

$$\|f\| = \inf \{ \gamma \in \mathbb{R}_+; \forall y \in \mathbb{R}^p, t \geq 0 : \|f(y, t)\| \leq \gamma \|y\| \}$$

En la siguiente Proposición se establece la propiedad de estabilidad del sistema perturbado Ω_{np} .

Proposición 6 (Son y Hinrichsen (1996)): Suponga que el sistema perturbado Ω_{np} en (2.32) es positivo ($A \stackrel{M}{\succeq} 0$, $B \succeq 0$, $C \succeq 0$), y además A es Hurwitz. Se asume que $f(y, t)$ es globalmente Lipschitz en y y continua a tramos en t tal que la desigualdad en (2.33) sea satisfecha.

2.4. RADIO DE ESTABILIDAD

Si $\|CA^{-1}B\|^{-1} > \gamma$ con $\gamma \geq \|f\|$, entonces el sistema perturbado Ω_{np} es exponencialmente estable, es decir, existen las constantes $k > 0$, $\beta > 0$ tal que se satisface

$$\|x(t)\| \leq k \|x_0\| \exp(-\beta t), \quad t > 0, \quad \gamma > \|f\| \quad (2.34)$$

◇

Es importante mencionar que Ω_{np} se puede reescribir de la forma Ξ_L en (2.23) definido por un sistema LTI con una realimentación dada por no linealidad estática variante en el tiempo. Por lo tanto, el mismo resultado se puede obtener utilizando el método disipativo (Moreno, 2004; Avilés y Moreno, 2009). Enseguida se presenta el resultado principal que combina la teoría del radio de estabilidad con el método disipativo, en el cual la desigualdad no lineal que caracteriza al método mencionado es reemplazada por el cálculo matemático del radio de estabilidad. Este resultado está definido para no linealidades que se encuentran en un sector específico.

Lema 4: Suponga que Ξ_L en (2.23) es positivo ($A \succeq 0$, $B \succeq 0$ y $C \succeq 0$), y además A es una matriz Hurwitz. Se asume que $f(y, t)$ es (Q_N, S_N, R_N) -D = $(-I, 0, \gamma^2 I)$ -D, es decir, se cumple 2.33. Si se satisface

$$\begin{bmatrix} \gamma^{-2}I & B^T (A^{-1})^T C^T \\ CA^{-1}B & I \end{bmatrix} > 0$$

con $\gamma > 0$, entonces existen $P_\gamma = P_\gamma^T > 0$ y $\epsilon > 0$ tal que Ξ_L es *global y exponencialmente estable*. ◇

Prueba. $f(t, y)$ es globalmente Lipschitz en y y continua a tramos en t , es decir, es $(Q_N, S_N, R_N) = (-I, 0, \gamma^2 I)$ -D. Suponga $\begin{bmatrix} \gamma^{-2}I & B^T (A^{-1})^T C^T \\ CA^{-1}B & I \end{bmatrix} > 0$, entonces existe una matriz $P_\gamma > 0$ y una constante $\epsilon > 0$ tal que se satisface

$$A^T P_\gamma + P_\gamma A + \epsilon P_\gamma + \gamma^2 C^T C + P_\gamma B B^T P_\gamma = 0 \quad (2.35)$$

Esto es porque el radio de estabilidad está caracterizado por la ecuación algebraica de Riccati (Hinrichsen y Pritchard, 1986). Por consiguiente, existe un conjunto de soluciones de P_γ y ϵ tal que se satisface

$$A^T P_\gamma + P_\gamma A + \epsilon P_\gamma + \gamma^2 C^T C + P_\gamma B B^T P_\gamma \leq 0 \quad (2.36)$$

2.5. ESTABILIDAD ENTRADA-ESTADO

Aplicando Lema de Schur, se obtiene la desigualdad que caracteriza a Ξ_L con $(Q, S, R) = (-\gamma^2 I, 0, I)$ -SSD:

$$\begin{bmatrix} A^T P_\gamma + P_\gamma A + \epsilon P_\gamma + \gamma^2 C^T C & P_\gamma B \\ B^T P_\gamma & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.37)$$

■

2.5. Estabilidad entrada-estado

Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.38)$$

donde la matriz A es Hurwitz y se puede escribir la solución como

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau$$

y se usa la cota $\|e^{(t-t_0)A}\| \leq k e^{-\lambda(t-t_0)}$ con $\lambda > 0$ y $k > 0$ para estimar la solución por

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq k e^{-\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t k e^{-\lambda(t-\tau)} \|B\| \|u(\tau)\| d\tau \\ &\leq k e^{-\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\| + \frac{k \|B\|}{\lambda} \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\| \end{aligned}$$

Lo anterior significa que con una entrada-cero el estado decae exponencialmente a cero mientras que la respuesta a estado-cero está acotado para alguna entrada acotada. Además se muestra la propiedad de entrada acotada-estado acotado también se observa que la cota de la respuesta de estado-cero es proporcional a la cota de la entrada. Considere el sistema (Khalil, 2002)

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (2.39)$$

2.5. ESTABILIDAD ENTRADA-ESTADO

donde $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua a tramos en t y localmente Lipschitz en x y u . La entrada $u(t)$ es una función acotada y continua a tramos en t para todo $t \geq 0$. Suponga que el sistema nominal

$$\dot{x} = f(t, x, 0) \quad (2.40)$$

tiene un punto de equilibrio global y uniformemente estable en el origen $x = 0$.

Definición 14: El sistema $\dot{x} = f(t, x, u)$ (2.39) es estable entrada-estado (ISS) si existen una función β de clase KL y una función ϑ de clase K tal que para cualquier estado inicial $x(t_0)$ y cualquier entrada acotada $u(t)$, la solución $x(t)$ existe para todo $t \geq t_0$ y satisface

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \vartheta \left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\| \right) \quad (2.41)$$

La desigualdad (2.41) garantiza que para cualquier entrada acotada $u(t)$, el estado $x(t)$ se va a mantener acotado. Adicionalmente, con la desigualdad (2.41) si $u(t)$ converge a cero cuando $t \rightarrow \infty$, entonces el estado también converge a cero (Khalil, 2002). Asimismo, si $u(t) \equiv 0$ la desigualdad (2.41) se reduce a

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$$

La estabilidad entrada-estado equivale a que el origen del sistema nominal (2.40) sea global uniforme y asintóticamente estable. El siguiente lema es consecuencia del teorema converso de Lyapunov para la estabilidad exponencial.

Lema 5: Khalil (2002) Suponga que $f(t, x, u)$ en (2.39) es continuamente diferenciable y globalmente Lipschitz en (x, u) y continua a tramos en t . Si el sistema nominal $f(t, x, 0)$ (2.40) tiene un punto de equilibrio global y exponencialmente estable en el origen $x = 0$, entonces el sistema (2.39) es ISS. \diamond

2.6. *Polítopos*

La teoría sobre los conjuntos convexos fue desarrollada principalmente por el famoso matemático Herman Minkowski del siglo XIX, cuyas investigaciones relacionan conceptos tales como: afín, funciones convexas, hiperplano soporte, funcionales lineales sobre un conjunto convexo, entre otras. Estos conceptos abstractos son muy importantes en muchas áreas de aplicación como la economía, optimización, programación lineal, y computación, entre otras. La convexidad de un conjunto es un concepto primordial de una rama de las matemáticas, la Geometría de conjuntos convexos; a través de este concepto, se puede hablar de la teoría de programación lineal cuyo objetivo es encontrar la solución óptima a un conjunto de restricciones lineales, resultando que el conjunto donde hay que buscar la solución es un conjunto convexo.

Este apartado contiene los conceptos fundamentales de polítopos, los cuales constituyen una parte transcendental en el diseño de los observadores que preservan el orden, que es descrito en el capítulo 5. En geometría, un polítopo hace mención a la generalización de un polígono de dimensión n . Por ejemplo, un polígono es un polítopo-2, un polihedro es un polítopo-3 y policorón es un polítopo-4. Este término es utilizado en varios conceptos matemáticos relacionados.

En (Grünbaum, 2003) un polítopo convexo es un caso especial de un polítopo, teniendo la propiedad adicional que es también un conjunto convexo en el espacio de dimensión n . Los polítopos convexos toman un papel importante en el área de matemáticas, habiendo muchas aplicaciones en programación lineal. En este trabajo se utilizan un par de definiciones dadas en (Grünbaum, 2003), considerando que los polítopos convexos serán llamados simplemente polítopos; la primera está descrita por la envolvente convexa de un conjuntos de puntos y la segunda está dada por la intersección de semi-espacios.

2.6. POLÍTOPOS

2.6.1. Polígono definido por envolvente convexa

En teoría de conjuntos es bien conocido que un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si y sólo si contiene todas las combinaciones convexas de sus puntos. De forma similar, es posible definir el concepto de una envolvente convexa.

Definición 15: La envolvente convexa de un conjunto A se define como el conjunto de todas las combinaciones convexas de los puntos de A .

Definición 16: Un conjunto $P_v \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un polígono si es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^n .

De la definición anterior, un *polígono* es el conjunto $P_v \subset \mathbb{R}^n$ determinado por el conjunto finito de todos los puntos extremos de P_v (*ext* P_v). Estos puntos comúnmente son llamados *vértices* (ver figura 2.9). De aquí, que la definición sea llamada *representación de vértices*. En la Proposición siguiente se presenta la caracterización de un polígono por medio de la envolvente convexa.

Proposición 7: (Grünbaum, 2003) Un polígono P_v es la envolvente convexa de un conjunto de puntos, los cuales pueden ser representados como combinaciones convexas de los puntos de P_v . Es decir, los puntos pueden ser reescritos en la forma

$$P_v = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, n = 1, 2 \right\} \quad (2.42)$$

◇

2.6.2. Polígono definido por semi-espacios

Un hiperplano está representado como $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$ para algún vector a distinto de cero y un número real b . Otra representación de un hiperplano está dada por $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T(x - x_0) = 0\}$, donde a es el vector normal del hiperplano, x_0 permanece en el hiperplano. Los hiperplanos son convexas, ya que contienen todos los segmentos

2.6. POLÍTOPOS

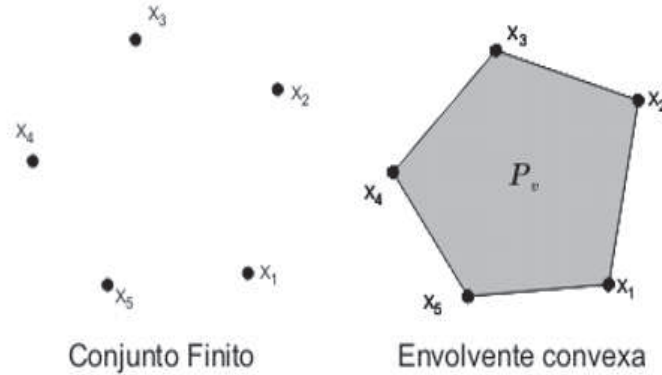


Fig. 2.5: Polígono definido por una envolvente convexa

de línea asociados a algunos de sus puntos. Cada hiperplano divide el espacio en dos conjuntos $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq b\}$ y $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$. Estos conjuntos H^+ y H^- son llamados semi-espacios. Otra representación es $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T(x - x_0) \geq 0\}$, donde a es el vector normal y x_0 permanece en la frontera.

Los polítopos también pueden representarse como la intersección de un número finito de semi-espacios. Esta definición es llamada *representación de semi-espacios* (ver figura 2.6). La caracterización está dada en la siguiente Proposición.

Proposición 8: (Grünbaum, 2003) Un polígono P_h está descrito por la intersección de semiespacios:

$$P_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \bigcap_{i=1}^k Ax \leq b \right\} \quad (2.43)$$

donde A es una matriz de dimensión $m \times n$, m es el número de semi-espacios que definen al polígono.

2.6. POLÍTOPOS

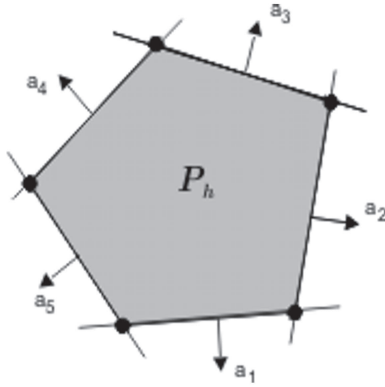


Fig. 2.6: Polígono definido por una semi-espacios

2.6.3. Polítopos definidos a partir de un conjunto cerrado

Ahora bien, dado un conjunto convexo $S \in \mathbb{R}^n$, se dice que un hiperplano H soporta a S en un punto $x \in S$, si $x \in S \cap H$ y S queda contenido en uno de los semiespacios H^+ o H^- , lo cual se muestra en la figura 2.7. Esta idea permite definir el concepto fundamental de *hiperplano soporte a un conjunto S* .

Definición 17: Dado un conjunto convexo $S \in \mathbb{R}^n$, se dice que H es un *hiperplano soporte a S* si H es tangente a S en algún punto x , que es un punto de su frontera.

En otras palabras, el hiperplano soporte $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T(x - x_0) \geq 0\}$ soporta a S en $x_0 \in \partial S$ si $x \in S \Rightarrow a^T x \leq a^T x_0$.

Además, si el hiperplano H soporta a S y $S \subset H^-$ (respectivamente, $S \subset H^+$), entonces se dice que H^- (respectivamente, H^+) es un *semiespacio soporte a S* .

Teorema 5 (Grünbaum (2003)): Si S es un conjunto convexo en \mathbb{R}^n con un interior no vacío, entonces a través de cada uno de sus puntos frontera existe un hiperplano soporte de S .

Es posible construir polítopos inscritos P_I en un conjunto cerrado convexo S , mediante la descripción de una envolvente convexa, dando como resultado que, los vértices

2.6. POLÍTOPOS

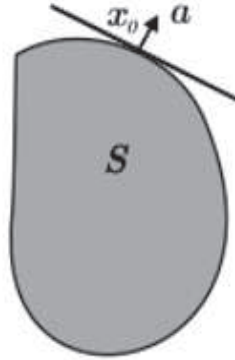


Fig. 2.7: El hiperplano soporte H soporta al conjunto S .

de los polítopos deben estar ubicados en la frontera del conjunto S . Esto se muestra en la figura 2.8.

Primeramente, se considera que S es un conjunto cerrado convexo, que describe matemáticamente la forma cuadrática de una elipsoide:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_c)^T P (x - x_c) \leq 1\} \quad (2.44)$$

donde $P = P^T > 0$. Las longitudes de los semiejes $v_{p,i}$ del conjunto S están dados por $\sqrt{1/\lambda_i}$, donde λ_i son los valores propios de P . Tomando en cuenta la ecuación anterior, la frontera del conjunto S está dada por

$$S_f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_c)^T P (x - x_c) = 1\} \quad (2.45)$$

Teorema 6 (polítopo inscrito en un conjunto cerrado): Considere el conjunto convexo cerrado S y cuya frontera es S_f en (2.45). Sea el polítopo

$$P_I = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \Delta_i \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, i = 1, \dots, k \right\} \quad (2.46)$$

Si los vertices de P_I , Δ_i , los cuales están dados por $\Delta_i \subseteq \{\pm v_{p,1}, \dots, \pm v_{p,m}\} \cup \{x_{f,1}, \dots, x_{f,k}\}$, están contenidos en S_f , entonces el polítopo P_I está inscrito en S .

2.6. POLÍTOPOS

Prueba. Si los vértices de P_I están en S_f , es decir $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\} \subset S_f$, entonces

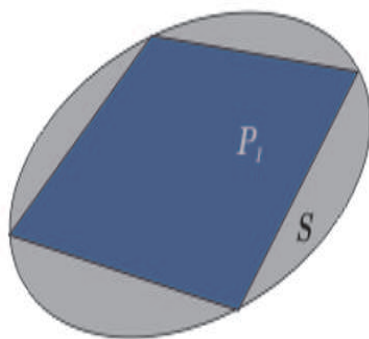
$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \Delta_i \subset S_f \Rightarrow P_I \subset S_f. \quad \blacksquare$$


Fig. 2.8: Polígono definido por una envolvente convexa

Para construir un polígono que circunscriba a un conjunto cerrado S , se requiere la aplicación del concepto de hiperplanos soportes, teniendo como finalidad el desarrollo de semi-espacios, cuyas intersecciones formarán un polígono que contenga al conjunto S . La representación matemática está descrita en el Teorema siguiente.

Teorema 7: Sea S en (2.44) un conjunto cerrado convexo, cuya frontera es S_f en (2.45). Un polígono que circunscribe a S_f está dado por

$$P_C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \bigcap_{i=1}^k d_i^T x \leq v_i \right\} \quad (2.47)$$

donde $d_i^T = S'(x_i)$ es la normal de los hiperplanos tangentes y $v_i = d_i^T x_i$. Los vértices de P_C son $x_i = D_i^{-1} V_i$, $i = 1, \dots, k$; D_i y V_i están formadas por las componentes de los hiperplanos soportes a S , que se intersecta en cada vértice x_i . \diamond

Prueba. Considere el hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^T x = v, a \neq 0\}$, los semi-espacios $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : d^T x \leq v\}$ y $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : d^T x \geq v\}$. Los vértices de P_I pueden definir la intersección de los hiperplanos tangentes de P_C con $d_i^T = S'(x_i)$ y $v_i = d_i^T x_i$.

2.6. POLÍTOPOS

Si H es tangente a S en $x_i \in S_f$, $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : d_i^T x = e_i, e_i = d_i^T x_i, i = 1, \dots, k\}$,
entonces $S_f \subset \bigcap_{i=1, \dots, k} H_i^- \Rightarrow S_f \subset P_C$. ■

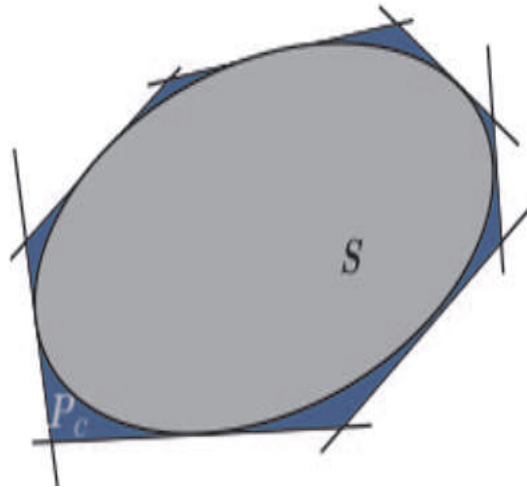


Fig. 2.9: Polígono definido por una envolvente convexa

3. OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN PARA SISTEMAS NO LINEALES: CASO NOMINAL

En este capítulo se propone una metodología de diseño de observadores que preservan el orden para sistemas no lineales libres de perturbaciones, que tienen la estructura de un subsistema LTI con una no linealidad conectada en retroalimentación, la cual se muestra en la primera sección. El observador propuesto, que toma la forma en (Moreno, 2004), tiene una estructura semejante al esquema de Luenberger. La metodología está basada en las propiedades de cooperatividad y disipatividad (ver páginas 27 y 35), las cuales se aplican en los sistemas de los errores de estimación, con la finalidad de que los estimados estén por encima ($\hat{x}(t) \succeq x(t)$) o por debajo ($x(t) \succeq \hat{x}(t)$) de la trayectoria real del estado, y además converjan a sus valores verdaderos, como se muestra en la Figura 3.1.

Es importante resaltar que para obtener simultáneamente un estimado por encima y por debajo de la trayectoria real del estado, es necesario construir un par de observadores que preserven el orden e inicializarlos adecuadamente. En esta etapa, existe una ventaja: dos observadores que preservan el orden pueden ser obtenidos y desarrollados por un sólo diseño. Esto se debe a la propiedad de simetría que satisface el estimador, lo cual se describe en la segunda sección. La clase de observadores analizada en este capítulo se puede utilizar para monitoreo de señales en aquellos sistemas, cuya planta es perfectamente conocida o se encuentren en ausencia de perturbaciones e incertidumbres. Estos observadores podrán prevenir al esquema de control cuando las variables del estado estén cerca de alcanzar niveles máximos críticos, ya que el estimado siempre estará por encima o por debajo de la trayectoria real del estado.

Definición 18 (Observador que Preserva el Orden): Considere un sistema no lineal

$$\Sigma_{\text{NLP}} : \dot{x} = F(t, x, u, w), \quad y = H(t, x, u), \quad x(0) = x_0,$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ es una *entrada* conocida, $y \in \mathbb{R}^p$ y $w \in \mathbb{R}^q$ es una entrada desconocida, representando incertidumbres y/o perturbaciones que actúan en el sistema. F y H son funciones suaves, y asumiremos que el sistema es *completo*. El sistema dinámico

$$\Omega_{\text{NLP}} : \dot{\hat{x}} = \Phi(t, \hat{x}, u, y, \bar{w}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0,$$

es un *Observador que Preserva el Orden Superior (Inferior)*, para el sistema Σ_{NLP} si (i) es completo. (ii) El error de estimación $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ converge global y asintóticamente a cero cuando la perturbación es idénticamente cero, es decir, $w(t) = 0$. (iii) Cuando los estados iniciales del observador son más grandes (más pequeños) que los estados iniciales de la planta, es decir, $\hat{x}_0 \succeq x_0$ ($\hat{x}_0 \preceq x_0$), el estado estimado será más grande (más pequeño) que el estado de la planta para todo tiempo futuro y las entradas (u, w) , es decir, $\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0, u, y(t)) \succeq x(t, t_0, x_0, u, w(t))$ o ($\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0, u, y(t)) \preceq x(t, t_0, x_0, u, w(t))$).

Aunque la condición de completitud no es estrictamente necesaria, simplifica la presentación y parece también razonable para los sistemas físicos. Un *observador intervalo* (Mazenc y Bernard, 2010, 2011) puede ser obtenido por dos observadores que preservan el orden: uno superior y otro inferior, acotando los estados de la planta. Si examinamos la condición de convergencia (ii), entonces a una estructura así llamada *framer* (por definición en el idioma inglés) será obtenido.

La condición (ii) en la Definición 18 es una condición de convergencia del observador, mientras que la condición (iii) es una condición de cooperatividad en el error de estimación. Con la finalidad de garantizar la convergencia del observador haremos uso de la teoría disipativa. Esta idea ha sido también propuesta por uno de los autores (Moreno, 2004, 2005; Rocha-Cózatl y Moreno, 2010) para diseñar observadores para una clase de sistemas no lineales. Para la misma clase de sistemas extendemos

3.1. SISTEMAS NO LINEALES EN AUSENCIA DE PERTURBACIONES

el método para hacer el observador no sólo convergente, pero también preservando el orden (Avilés y Moreno, 2009). Consideramos el primer caso de los sistemas en ausencia de perturbaciones.

3.1. *Sistemas no lineales en ausencia de perturbaciones*

En este trabajo se considere la planta no lineal sin perturbaciones e incertidumbres, cuya estructura está dada por un subsistema LTI con una perturbación no lineal conectada en retroalimentación:

$$\Pi_S \begin{cases} \dot{x} = Ax + Gf(\sigma; t, y, u) + \varphi(t, y, u), & x(0) = x_0 \\ \sigma = Hx \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $y \in \mathbb{R}^q$ es la salida medible, $\sigma \in \mathbb{R}^r$ es una función lineal del estado (no necesariamente medible), $u \in \mathbb{R}^p$ es la entrada, $f(\sigma; t, y, u) \in \mathbb{R}^m$ es una función no lineal localmente Lipschitz en σ que permite la dependencia de t y las variables medibles, y φ es una función no lineal localmente Lipschitz en (u, y) y continua a tramos en t . Además $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de estados, $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz de entrada, $H \in \mathbb{R}^{r \times n}$ es una matriz de pseudosalidas, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ es la matriz de salida. Note que muchos sistemas no lineales pueden ser representados por Π_S en (3.1) ya sea por descomposición ó mediante transformación de estados. Así que la metodología propuesta es aplicable a una clase amplia de sistemas. Cabe mencionar que el sistema Π_S en (3.1) puede ser un sistema positivo o cooperativo, pero no es un requisito para el diseño de un observador que preserve el orden.

En cualquier sistema no lineal, en particular para el sistema Π_S en (3.1) difícilmente están disponibles todas las variables del estado. Para conocer estas variables, se propone un observador de orden completo basado en la estructura de Luenberger (Moreno, 2004, 2005; Rocha-Cózatl y Moreno, 2010) para el sistema Π_S en (3.1), el cual está dado por la forma

3.1. SISTEMAS NO LINEALES EN AUSENCIA DE PERTURBACIONES

$$\Pi_O \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) + Gf(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y); t, y, u) + \varphi(t, y, u), \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (3.2)$$

donde $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es el estimado del estado x del sistema Π_S en (3.1). Las matrices de diseño del observador Π_O en (3.2) son $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$ y $N \in \mathbb{R}^{r \times q}$, las cuales son utilizadas para garantizar que el observador sea convergente, y además, su estimado preserve el orden con respecto a la trayectoria del estado real.

El error de estimación se puede definir por la diferencia del estado estimado menos el estado real, $e \triangleq \hat{x} - x$, el error de estimación de la salida como $\tilde{y} \triangleq \hat{y} - y$, y el error de estimación funcional como $\tilde{\sigma} \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$. Por lo tanto, las dinámicas del error de observación están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A + LC)e + G[f(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y); t, y, u) - f(\sigma; t, y, u)] \\ \tilde{y} &= Ce \\ \tilde{\sigma} &= He \end{aligned} \quad (3.3)$$

con $e(0) = e_0 = \hat{x}_0 - x_0$. Por consecuencia, de las dinámicas del error de observación en (3.3), se tiene $\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y) = Hx + He + NCe = \sigma + (H + NC)e$. Se define a $z \triangleq (H + NC)e = \tilde{\sigma} + N\tilde{y}$ como una función del error de estimación e , y a una nueva no linealidad dada por

$$\phi(z, \sigma; t, y, u) \triangleq f(\sigma; t, y, u) - f(\sigma + z; t, y, u) \quad (3.4)$$

Entonces, las dinámicas del error de estimación en (3.3) pueden ser reescritas de la forma

$$\Pi_E : \begin{cases} \dot{e} = A_L e + Gv, \quad e(0) = e_0 \\ z = H_N e \\ v = -\phi(\sigma, z; t, y, u) \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $A_L \triangleq A + LC$ y $H_N \triangleq H + NC$.

3.2. Metodología de diseño

A lo largo del presente capítulo, los conceptos de observadores disipativos y que preservan el orden son utilizados frecuentemente. Es por ello que se incluye las definiciones formales, las cuales son descritas para sistemas no lineales en ausencia de perturbaciones, o cuando la planta del sistema es perfectamente conocida.

Definición 19: El observador es *disipativo* si es convergente,

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0 \text{ como } t \rightarrow \infty$$

Es decir, para toda condición inicial \hat{x}_0 las trayectorias de la planta del error de estimación convergen asintóticamente a cero.

Definición 20: El observador Π_O se dice *un observador que preserva el orden superior (inferior)* para el sistema Π_S , si las dinámicas del error de estimación satisfacen dos propiedades:

1. El origen $e = 0$ es un punto de equilibrio global y asintóticamente estable.
2. El sistema del error de estimación Π_E en (3.5) es cooperativo (en el sentido clásico).

La primera condición significa $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ as $t \rightarrow \infty$. La última condición implica que:

$$\text{Si } \hat{x}_0 \succeq x_0 \implies \hat{x}(t) \succeq x(t) , \forall t \geq 0$$

$$\text{Si } \hat{x}_0 \preceq x_0 \implies \hat{x}(t) \preceq x(t) , \forall t \geq 0 .$$

Es importante resaltar que la definición de un observador disipativo asegura que su estimado convergerá a los valores verdaderos de la trayectoria del estado, mientras que un observador que preserva el orden (cooperativo) es convergente, y además, la estimación está siempre por encima o por debajo de la trayectoria real de la planta. El

3.2. METODOLOGÍA DE DISEÑO

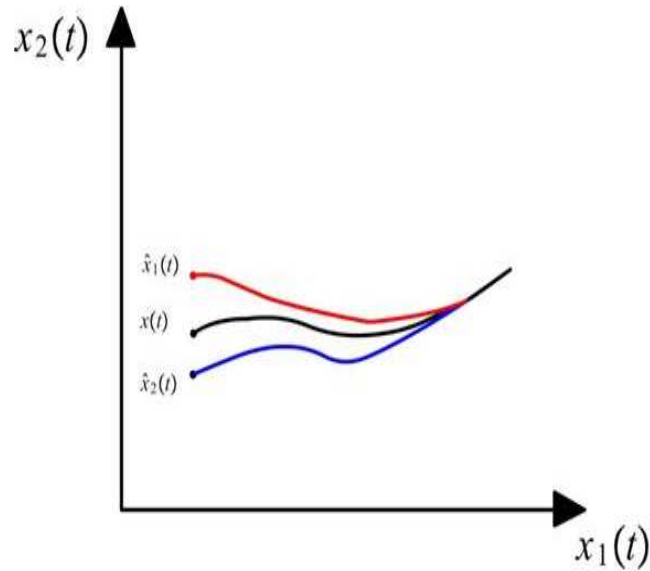


Fig. 3.1: Observador que preserva el orden para un sistema de segundo orden

comportamiento dinámico de un observador que preserva el orden para sistemas libres de perturbaciones/incertidumbres se muestra en la Figura 3.1.

Cabe resaltar que la propiedad tanto de convergencia como de preservación del orden, son aplicadas directamente a la dinámica del error de estimación Π_E en (3.5). La caracterización de ambas propiedades están descritas por el método disipativo (Moreno, 2004) y por la propiedad de cooperatividad (Angeli y Sontag, 2003), respectivamente.

3.2.1. Método de disipatividad en el observador

Para asegurar que el error de observación es convergente, el siguiente Teorema proporciona las condiciones suficientes para la estabilidad asintótica del origen de las dinámicas del error, haciendo uso de la teoría disipativa del capítulo 2 (ver pag. 35).

Teorema 8 ((Moreno, 2004)): Suponga que la no linealidad ϕ en (3.4) es (Q, S, R) -D,

3.2. METODOLOGÍA DE DISEÑO

es decir,

$$\omega(\phi, z) = \phi^T Q \phi + 2\phi^T S z + z^T R z \geq 0, \forall \sigma, z$$

se cumple. Si existen las matrices L y N , y el sistema lineal de Π_E en (3.5) es $(-R, S^T, -Q)$ -SSD, es decir, existen las matrices $P = P^T > 0$, L , N y la constante $\epsilon > 0$, tal que la desigualdad matricial

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^T R H_N & PG - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N & Q \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.6)$$

es satisfecha, entonces el observador Π_O en (3.2) es *global y exponencialmente estable* para Π_S en (3.1), es decir, existen las constantes $k > 0$ y $\rho > 0$ tal que para todo e_0

$$\|e(t)\| \leq k \|e_0\| \exp(-\rho t) \quad (3.7)$$

es satisfecha. ◇

Lo anterior significa que el observador en (3.2) es *convergente*, si la no linealidad ϕ en (3.4) es disipativa con respecto a una función de suministro $w(\phi, z)$, y el subsistema LTI del error de observación Π_E (3.5) debe ser diseñado estrictamente disipativo con respecto a una función de suministro vinculada (dada por la no linealidad ϕ). La caracterización de la no linealidad ϕ puede ser extendida, usando algunas funciones de suministro.

Teorema 9: (Moreno, 2004; Rocha-Cózatl y Moreno, 2010) Suponga que una no linealidad multivariable ϕ en (3.4) es (Q_i, S_i, R_i) -D para alguna terna (Q_i, S_i, R_i) , es decir,

$$\omega_i(\phi, z) = \phi^T Q_i \phi + 2\phi^T S_i z + z^T R_i z \geq 0, \forall \sigma; i = 1, 2, \dots, \mu \quad (3.8)$$

Si existen las matrices L , N y un vector $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_\mu)$, $\theta_i \geq 0$, tal que el subsistema lineal de Π_E en (3.5) es $(-R_\theta, S_\theta^T, -Q_\theta)$ -SSD con $(Q_\theta, S_\theta, R_\theta) = \sum_{i=1}^{\mu} \theta_i (Q_i, S_i, R_i)$,

3.2. METODOLOGÍA DE DISEÑO

es decir, existen las matrices $P = P^T > 0$, L y N , un vector $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_\mu)$ y la constante $\epsilon > 0$ tal que la desigualdad matricial

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^T R_\theta H_N & PG - H_N^T S_\theta^T \\ G^T P - S_\theta H_N & Q_\theta \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.9)$$

se satisface, entonces el *observador* Π_O en (3.2) es *global y exponencialmente estable* para Π_S . \diamond

La prueba del Teorema está basada en Lema 2 (ver la prueba del Lema 3). El diseño disipativo de los observadores presentados en el Teorema 9 es muy flexible en el tipo de no linealidades consideradas para el sistema. Además, la inclusión de formas cuadráticas múltiples (Q_i, S_i, R_i) aumenta enormemente las posibilidades del método para caracterizar a la no linealidad. En particular, algunos métodos de diseño del observador, bien conocidos en la literatura, son casos especiales de este diseño. Como ejemplos mencionamos el diseño del observador de Alta Ganancia (Gauthier *et al.*, 1992), del criterio del círculo (Arcak y Kokotovic, 2001), y del observador Lipschitz (Rajamani, 1998), *etc.* Para más detalles, consultar las referencias (Moreno, 2004, 2005; Rocha-Cózatl y Moreno, 2010).

3.2.2. Cooperatividad en el observador

De acuerdo al Teorema 8, el observador Π_O es convergente, pero no tiene alguna propiedad para preservar el orden. La cooperatividad en el observador es asegurada, haciendo que los sistemas del error de estimación Π_E en (3.5) sean un sistema cooperativo, lo cual está caracterizado en la Proposición 3, que es el caso si la matriz Jacobiana de Π_E es Metzler

$$\frac{\partial}{\partial e} \{A_L e - G\phi(z, \sigma; t, y, u)\} = A_L + G \frac{\partial f(z + \sigma; t, y, u)}{\partial z} H_N \stackrel{M}{\succeq} 0, \quad \forall z, \sigma, t, y, u.$$

Obtenemos esta última expresión notando que de (3.4) y la igualdad $z = H_N e$ sigue que

$$-\frac{\partial \phi(z, \sigma; t, y, u)}{\partial e} = \frac{\partial f(z + \sigma; t, y, u)}{\partial e} = \frac{\partial f(z + \sigma; t, y, u)}{\partial z} H_N.$$

3.3. PROCEDIMIENTO GENERAL

Note que esta condición es equivalente al hecho que la matriz

$$M(z; t, y, u) \triangleq A_L + GJ(z; t, y, u) H_N \stackrel{M}{\succeq} 0, \forall z \in \mathbb{R}^r, \forall t, y, u \quad (3.10)$$

es Metzler. Aquí $J(z; t, y, u) = \frac{\partial f(z; t, y, u)}{\partial z}$ es la matriz Jacobiana de la no linealidad de la planta Π_S en (3.1). Esto representa las condiciones necesarias y suficientes, para asegurar la cooperatividad en el observador.

3.3. Procedimiento general de diseño de observadores que preservan el orden

El Teorema siguiente proporciona las condiciones suficientes para el diseño de un observador que preserve el orden para sistemas Π_S en ausencia de perturbaciones/incertidumbres:

Teorema 10: Considere el sistema Π_S en (3.1), el observador Π_0 en (3.2) y las dinámicas del error de estimación Π_E in (3.5). Suponga que una no linealidad multivariable ϕ en (3.4) puede ser (Q_i, S_i, R_i) -D para un número finito de formas cuadráticas, es decir, (3.8) se cumple. Suponga además que existen las matrices $P = P^T > 0$, L , N , una constante $\epsilon > 0$ y un vector $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_\mu)$ tal que:

1. La condición de Disipatividad, que es la desigualdad matricial en (3.9) es satisfecha, y
2. $M \stackrel{M}{\succeq} 0$ in (3.10), es decir, las componentes $M_{ij}(z) \geq 0, \forall i \neq j, \forall z \in \mathbb{R}^r$.

Entonces, Π_0 en (3.2) es un *observador que preserva el orden superior/inferior global y exponencialmente convergente*. \diamond

Prueba. La primera parte está dada en (Moreno, 2004): por definición si Π_E en (3.5) es $(-R, S^T, -Q)$ -SSD existe una matriz $P = P^T > 0$ y una constante $\epsilon > 0$ tal que la desigualdad matricial en (3.6) es satisfecha. La aplicación del Lema 6 conduce a $\dot{V} \leq -\epsilon V(e)$, con $V(e) = e^T P e$. La segunda parte está dada por la aplicación de la

3.3. PROCEDIMIENTO GENERAL

Proposición 3: para asegurar que el observador Π_O preserve el orden es necesario que el Jacobiano de Π_E sea Metzler, es decir,

$$\frac{\partial f(e)}{\partial e} = A_L + G \frac{\partial(-\phi(z, \sigma; t, y, u))}{\partial e} = A_L + G \frac{\partial f(z + \sigma; t, y, u)}{\partial e} \stackrel{M}{\succeq} 0$$

Esta condición es equivalente a z en vez de $z + \sigma$, obteniendo

$$\frac{\partial f(e)}{\partial e} = A_L + G \frac{\partial f(z; t, y, u)}{\partial z} H_N \stackrel{M}{\succeq} 0$$

La expresión anterior está dada por M en (3.10) con $J(z; t, y, u) = \frac{\partial f(z; t, y, u)}{\partial z}$. ■

En el *Teorema* anterior se muestra el algoritmo general para desarrollar un observador que preserve el orden para sistemas en ausencia de perturbaciones, basado en la aplicación del método de dispatividad y la propiedad de cooperatividad en la dinámica del error de observación.

Nota 1: Note que el mismo sistema Π_0 es un observador que preserve el orden superior o inferior, dependiendo de las condiciones iniciales del observador está arriba ($\hat{x}_0 \succeq x_0$) o abajo ($\hat{x}_0 \preceq x_0$) de las condiciones iniciales de la planta respectivamente. Ya que la condición inicial de la planta es desconocida, para inicializar correctamente el observador que preserve el orden superior (inferior) es necesario conocer la cota superior x_0^+ (inferior x_0^-) de las posibles condiciones iniciales de la planta, es decir

$$x_0^- \preceq x_0 \preceq x_0^+. \quad (3.11)$$

Seleccionando la condición inicial del observador que preserve el orden superior(inferior) como $\hat{x}_0 \succeq x_0^+$ ($\hat{x}_0 \preceq x_0^-$) asegura el comportamiento correcto.

Nota 2: Note que para obtener simultáneamente una estimación por encima y por debajo de la trayectoria del estado, es necesario construir un par de observadores que preserven el orden e inicializarlos adecuadamente. Esto constituye un *observador intervalo*. En esta etapa, existe una ventaja que los dos observadores pueden ser obtenidos y desarrollados de un solo diseño.

3.4. PROCEDIMIENTO PARTICULAR

Nota 3: Note que el diseño del observador que preserva el orden impone una condición adicional con respecto a un observador disipativo convergente. Por lo que se espera que: i) la clase de sistemas para los cuales un observador cooperativo puede ser diseñado es un subconjunto de la del observador disipativo, y ii) las propiedades dinámicas de un observador que preserva el orden son más restrictivas que para un simple observador convergente. Por ejemplo, para un sistema es posible diseñar un observador convergente con convergencia dinámica asignable, pero que la dinámica de convergencia de un observador que preserva el orden (si existe) se restringe fuertemente. El estudio de estos tópicos es un tema importante para futuras investigaciones. Tenga en cuenta que el diseño de un observador que preserva el orden no requiere que la planta Π_S sea cooperativa.

3.4. Procedimiento particular: observadores basados en la teoría del radio de estabilidad

En este apartado se propone una estrategia novedosa para diseño de observadores disipativos y que preserven el orden, que consiste en la combinación del método de disipatividad (Moreno, 2004) con la teoría del radio de estabilidad de los sistemas positivos bajo perturbaciones no lineales variantes en el tiempo (Angeli y Sontag, 2003). Esta relación garantiza un cálculo sencillo en comparación con la desigualdad matricial que se muestra en el Teorema 10 (ver pag. 58). Cabe mencionar que este diseño está definido para no linealidades que pertenecen al sector $\|\phi(\sigma, z)\| \leq \gamma \|z\|$, lo cual es equivalente a que la no linealidad ϕ es $(-I, 0, \gamma^2 I)$ -D

Enseguida se presenta el resultado que combina la teoría del radio de estabilidad con el método disipativo, en el cual la desigualdad no lineal que caracteriza al método mencionado es reemplazada por cálculo matemático del radio de estabilidad.

Teorema 11 (Observador Disipativo): Considere el sistema Π_S en (3.1), el observador Π_0 en (3.2) y el sistema del error de estimación Π_E en (3.5). Se asume que ϕ en (3.4)

3.4. PROCEDIMIENTO PARTICULAR

es $(Q, S, R) = (-I, 0, \gamma^2 I)$ -D, es decir, satisface

$$\|\phi(z, \sigma)\| \leq \gamma \|z\|, \quad \forall z, \sigma \in \mathbb{R}^r \quad (3.12)$$

Suponga que $G \succeq 0$. Si existen las matrices L y N tales que se satisface,

1. A_L es Metzler y Hurwitz
2. $H_N \succeq 0$, y
3. $\|H_N A_L^{-1} G\|^{-1} > \gamma$

Entonces, Π_0 es *global y exponencialmente estable*. ◇

Prueba. La prueba de este Teorema consiste en la aplicación del Lema 4 en el sistema del error de observación Π_E . Es decir, se asume que Π_E es un sistema positivo (A_L es Metzler, $H_N \succeq 0$, $G \succeq 0$) así como A_L es Hurwitz. Si $\|H_N A_L^{-1} G\|^{-1} > \gamma$ entonces

$$\begin{bmatrix} A_L^T P_\gamma + P_\gamma A_L + \epsilon P_\gamma + \gamma^2 H_N^T H_N & P_\gamma G \\ G^T P_\gamma & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.13)$$

■

Bajo estas condiciones el *observador* (3.2) es *global y exponencialmente estable* para Π_S (3.1), lo cual implica que existan las constantes $k > 0$ y $\varrho > 0$ tales que para toda condición inicial e_0 se satisface:

$$\|e(t)\| \leq k \|e_0\| \exp(-\varrho t) \quad (3.14)$$

Este resultado es obtenido a través de la afinidad que tienen la estructura del radio de estabilidad bajo perturbaciones variantes en el tiempo con el sistema del error de observación. El siguiente algoritmo proporciona las condiciones suficientes para el diseño de un observador que preserva el orden:

Teorema 12 (Observador que Preserva el Orden): Considere el Π_S en (3.1), el observador Π_0 en (3.2) y el sistema del error de estimación Π_E en (3.5). Se asume que ϕ en (3.4) es $(Q, S, R) = (-I, 0, \gamma^2 I)$ -D, es decir, satisface la desigualdad en (3.12). Suponga que $G \succeq 0$. Si existen las matrices L y N tales que se satisface,

3.5. PROPIEDAD DE SIMETRÍA

1. Las condiciones del Teorema 11 para un Observador Disipativo,
2. $M(z) \succeq^M 0, \forall z \in \mathbb{R}^r$.

Entonces, Π_0 es un *observador que preserva el orden superior/inferior, global y exponencialmente estable*. \diamond

Prueba. La primera parte está dada en la prueba del Teorema 11. La segunda parte está dada por la Proposición 3 en $\Pi_E: \frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} = A_L + G \frac{\partial f(z)}{\partial z} H_N \succeq^M 0$ ■

Nota 4: Obsérvese que para obtener simultáneamente un estimado por encima y otro por debajo de la trayectoria del estado, se requiere construir dos observadores cooperativos e inicializarlos adecuadamente. Esto describe al *observador intervalo*.

Es importante mencionar que tanto en los diseños de los observadores disipativos como los que preservan el orden, ambos utilizan la combinación del método disipativo con el radio de estabilidad de sistemas positivos, se requieren encontrar solo un par de variables, L y N . En contraste con el método general propuesto en la sección anterior, se requieren hallar cuatro variables (L , N , P y ϵ) que satisfagan un problema de factibilidad de desigualdad matriciales no lineales.

3.5. Propiedad de simetría

Para asegurar que el estado se encuentre acotado dinámicamente tanto por arriba como por abajo, se necesitan construir dos observadores que preservan el orden, o bien un observador intervalo, y deben ser inicializados adecuadamente.

Considere el observador no lineal Π_O en (3.2). El error de observación también se puede definir por $e^- \triangleq x - \hat{x}$, el error de estimación de la salida como $\tilde{y}^- \triangleq y - \hat{y}$, y el error de estimación funcional como $\tilde{\sigma}^- \triangleq \sigma - \hat{\sigma}$, las dinámicas del error de estimación e^- están dadas por

3.5. PROPIEDAD DE SIMETRÍA

$$\begin{aligned}\dot{e}^- &= (A + LC)e^- + G[f(\sigma) - f(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y))] \\ \tilde{y}^- &= Ce^- \\ \tilde{\sigma}^- &= He^-\end{aligned}\tag{3.15}$$

con $e^-(0) = e_0^- = x_0 - \hat{x}_0$. La dinámica del error de observación (3.15) se tiene que $\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y) = Hx - He^- - NCe^+ = \sigma - (H + NC)e^-$. Definiendo a $z^- \triangleq (H + NC)e^- = \tilde{\sigma}^- + N\tilde{y}^-$ una función del error de estimación e^- , y a la no linealidad como

$$\phi^-(z^-, \sigma) \triangleq f(\sigma - z^-) - f(\sigma)\tag{3.16}$$

Por consiguiente, las dinámicas del error de estimación (3.15) pueden ser reescritas de la forma

$$\Pi_{E^-} \begin{cases} \dot{e}^- = A_L e^- + Gv^-, & e^-(0) = e_0^- \\ z^- = H_N e^- \\ v^- = -\phi^-(\sigma, z^-) \end{cases}\tag{3.17}$$

donde $A_L \triangleq A + LC$ y $H_N \triangleq H + NC$. De la comparación entre las no linealidades $\phi(z, \sigma)$ (3.4) y $\phi^-(z^-, \sigma)$ (3.16) se obtiene la siguiente relación,

$$\phi(z, \sigma) = -\phi^-(-z, \sigma)\tag{3.18}$$

En la siguiente proposición se muestra que sólo es necesario desarrollar un observador que preserve el orden para acotar dinámicamente, tanto por arriba como por abajo, a la trayectoria real del estado, .

Proposición 9: Sea el sistema Π_S (3.1), el observador Π_0 (3.2) y las dinámicas del error Π_E en (3.5) y Π_{E^-} en (3.17). Suponga que la no linealidad $\phi(\sigma, z)$ es (Q_i, S_i, R_i) -D. Si existen las matrices $L, N, P = P^T > 0$, la constante $\epsilon > 0$ y un vector $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_\mu)$ tal que son satisfechas las condiciones siguientes

◆ Π_E (3.5) es *estable* $\Leftrightarrow \Pi_{E^-}$ (3.17) es *estable*. Esto se debe, a que

$$\|e(t)\| \leq k \exp(-\rho t) \|e_0\| \quad \Leftrightarrow \|e^-(t)\| \leq k \exp(-\rho t) \|e_0^-\|$$

3.5. PROPIEDAD DE SIMETRÍA

◆ Adicionalmente,

$$\phi \text{ es } (Q, S, R)\text{-D} \Leftrightarrow \phi^- \text{ es } (Q, S, R)\text{-D}$$

◆ Π_E es cooperativo $\Leftrightarrow \Pi_{E^-}$ es cooperativo.

$$\begin{aligned} e(0) \triangleq \hat{x}(0) - x(0) \succeq 0 &\Rightarrow e^+(t) \triangleq \hat{x}(t) - x(t) \succeq 0 \\ e^-(0) \triangleq x(0) - \hat{x}(0) \succeq 0 &\Rightarrow e^-(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t) \succeq 0 \end{aligned}$$

entonces, el **diseño de** Π_0 en (3.2) con $\Pi_E \Leftrightarrow$ **diseño de** Π_0 en (3.2) con Π_{E^-} . ◇

La proposición anterior se refiere a que una vez resuelto el diseño de un observador que preserva el orden superior, no se requiere hacer otro diseño con el estimado por debajo del estado, ya que este último está resuelto por el primero, y viceversa. Esto se debe a la propiedad de simetría que tiene el observador Π_O en (3.2) : si el observador es estable para el error de observación Π_E , entonces también va a ser estable para Π_{E^-} porque se trata de la misma representación de la dinámica del error pero definida de diferente manera ($e^- = -e$). Además, las no linealidades disipativas $\phi(z, \sigma)$ en (3.4) y $\phi^-(z, \sigma)$ en (3.16) tienen las mismas matrices (Q, S, R) . Por esta razón, se propone que las matrices de diseño (L, N) de los observadores (3.2) sean iguales, obteniendo que las desigualdades disipativas tanto del observador con el estimado por encima de la trayectoria del estado y del observador con el estimado por debajo (3.6) son equivalentes. Asimismo, los Jacobianos de las dinámicas de los errores de estimación son idénticos, es decir, $M(z) = M^-(z^-)$.

4. OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN PARA SISTEMAS NO LINEALES: CASO PERTURBADO

En este capítulo se complementa la metodología propuesta del diseño de los observadores que preservan el orden, proponiendo los estimadores conocidos como *observadores intervalo*, desarrollados para una clase de sistemas no lineales en presencia de perturbaciones. Los observadores intervalo propuestos en este trabajo son análogos a los introducidos en el trabajo Gouzé *et al.* (2000), teniendo la diferencia que la propiedad de la convergencia práctica es asegurada aquí. La razón de proponer estos observadores es que si se considera un observador que preserva el orden para un sistema en presencia de perturbaciones, entonces se pierde la propiedad cooperatividad en las dinámicas de los errores de estimación. Para recuperar la cooperatividad en los errores de estimación, se necesitan construir dos observadores que preservan el orden con términos de corrección ante las perturbaciones del sistema, los cuales forman a un observador intervalo. Los términos de corrección están definidos como las cotas superior e inferior de las perturbaciones.

Las estimaciones de los observadores intervalo acotan dinámicamente, tanto por encima como por debajo, a la trayectoria real del estado, a pesar de la presencia de las perturbaciones, lo cual se describe en la primera sección. Estas estimaciones deben ser inicializadas adecuadamente para asegurar la preservación del orden. Es importante mencionar que la convergencia a cero del error de estimación es debilitada, y se considerará la convergencia práctica, que es descrita por medio de la Estabilidad Entrada-Estados en los sistemas de los errores de observación. En la sección 2 se presentan los algoritmos de diseño de los observadores que preservan el orden para sistemas perturbados, los cuales representan las generalizaciones de los algoritmos propuestos en el

4.1. SISTEMAS EN PRESENCIA DE PERTURBACIONES

capítulo anterior.

4.1. Sistemas en presencia de perturbaciones

Considérese el siguiente sistema no lineal en presencia de perturbaciones:

$$\Psi_S \begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Gf(\sigma; t, y, u) + \pi(t, x) + \varphi(t, y, u), & x(0) = x_0 \\ \sigma = Hx(t) \\ y = Cx(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $y \in \mathbb{R}^q$ es la salida medible, $\sigma \in \mathbb{R}^r$ es una función lineal del estado (no necesariamente medible), $u \in \mathbb{R}^p$ es la entrada, $f(\sigma) \in \mathbb{R}^m$ es una función no lineal localmente Lipschitz en σ que permite la dependencia en t y en las variables medibles, φ es una función no lineal conocida localmente Lipschitz en (u, y) y continua a tramos en t , y $\pi(t, x) \in \mathbb{R}^n$ es una perturbación que representa las variables exógenas y las incertidumbres del sistema.

Si el observador Π_0 en (3.2) se utiliza para la planta Ψ_S , entonces las resultantes dinámicas de los errores de estimación

$$\Pi_E^p : \begin{cases} \dot{e} = A_L e + Gv - \pi(t, x), & e(0) = e_0 \\ z = H_N e \\ v = -\phi(\sigma, z), \end{cases} \quad (4.2)$$

no convergerán a cero, si la perturbación no es desvaneciente. Además, ya que en general $\pi(t, x)$ no es una señal de entrada ordenada, las dinámicas del error de estimación tampoco serán cooperativas. Es decir, $\pi(t, x)$ puede estar dada por,

- ▶ Si $\pi(t, x) \preceq 0 \Rightarrow$ la cooperatividad prevalece en Π_E^p .
- ▶ Si $\pi(t, x) \succeq 0 \Rightarrow$ la cooperatividad no prevalece en Π_E^p .

Esto significa que cuando la entrada toma valores negativos, prevalece la propiedad de cooperatividad en el sistema de error de estimación Π_E^p en (4.2), y como consecuencia el estimado del observador Π_O en (3.2) acota por encima a la trayectoria de Ψ_S . Sin

4.1. SISTEMAS EN PRESENCIA DE PERTURBACIONES

embargo, cuando la entrada toma valores no negativos, se pierde la cooperatividad en dicho error.

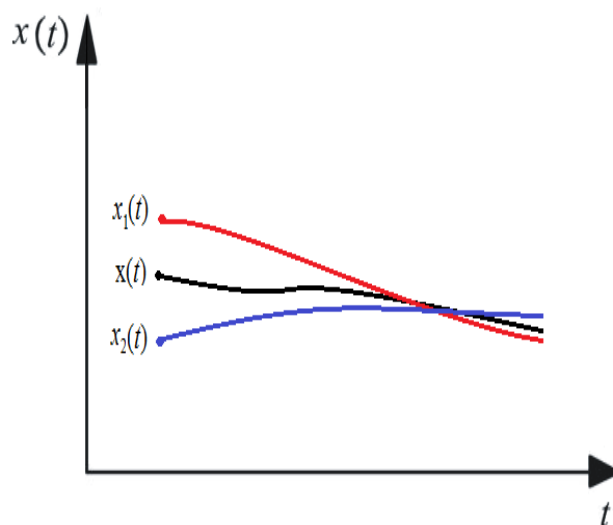


Fig. 4.1: Observador que no preserva el orden.

Para solucionar estos problemas referentes a la presencia de entradas desconocidas, requeriremos que el error de estimación no sea convergente, pero esté acotado cuando la incertidumbre esté acotada, y converja cuando la perturbación sea desvaneciente. Esto está planteado por los *observadores intervalo* para sistemas perturbados. Estos observadores contienen un término de corrección $\pi^+(t, y)$ definido como la cota superior de la entrada $\pi(t, x)$, con la finalidad de recuperar la cooperatividad en las dinámicas del error de observación en (4.2). Los observadores que preservan el orden para sistemas Ψ_S difieren de los observadores presentados en el capítulo anterior por el hecho de que su convergencia es práctica: la estimación del observador converge a una vecindad de la trayectoria real del estado, y es de un solo lado cooperativa. Esto significa que un solo observador asegura proporcionar una estimación por encima o por debajo del estado.

4.1. SISTEMAS EN PRESENCIA DE PERTURBACIONES

Asumiremos obtener un observador que preserve el orden superior (inferior) que contenga las cotas superior (inferior) conocidas de la perturbación, y $\pi(t, x)$ satisface

$$\pi^+(t, y) \succeq \pi(t, x) \succeq \pi^-(t, y), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x, y \quad (4.3)$$

donde $\pi^+(t, y)$ y $\pi^-(t, y)$ son funciones continuas Lipschitz conocidas.

En la literatura existen algunos trabajos relacionados con los observadores intervalo, que han sido introducidos en (Gouzé *et al.*, 2000). Estos observadores no tienen la propiedad de convergencia; en contraste, los observadores intervalo propuestos aquí aseguran esta propiedad.

Considere los estimadores superior Ψ_{O^+} e inferior Ψ_{O^-} para el sistema Ψ_S de la forma

$$\Psi_{O^+} \begin{cases} \dot{\hat{x}}^+ = A\hat{x}^+ + Gf(\hat{\sigma}^+ + N^+(\hat{y}^+ - y)) \\ \quad + L^+(\hat{y}^+ - y) + \pi^+(t, y) + \varphi(t, y, u) \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}^+, \quad \hat{x}^+(0) = \hat{x}_0^+ \\ \hat{y} = C\hat{x}^+ \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\Psi_{O^-} \begin{cases} \dot{\hat{x}}^- = A\hat{x}^- + Gf(\hat{\sigma}^- + N^-(\hat{y}^- - y)) \\ \quad + L^-(\hat{y}^- - y) + \pi^-(t, y) + \varphi(t, y, u) \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}^-, \quad \hat{x}^-(0) = \hat{x}_0^- \\ \hat{y} = C\hat{x}^- \end{cases} \quad (4.5)$$

donde x^+ y \hat{x}^- son las estimaciones superior e inferior de x . Las matrices $L^+ \in R^{n \times q}$, $N^+ \in R^{r \times q}$ y $L^- \in R^{n \times q}$, $N^- \in R^{r \times q}$ tienen que ser diseñadas para garantizar las propiedades de convergencia y cooperatividad. Note que en Ψ_{O^+} y en Ψ_{O^-} se han introducidos las cotas superior e inferior de la perturbación (4.3). Esto permite que las dinámicas de los errores sean cooperativas. Definiendo los errores como $e^+ \triangleq \hat{x}^+ - x$ y $e^- \triangleq x - \hat{x}^-$ (y las otras variables de forma similar), las dinámicas de los errores de observación están dadas por

$$\Psi_{E^+} \begin{cases} \dot{e}^+ = A_L^+ e^+ + Gv^+ + b^+ \\ z^+ = H_N^+ e^+, \quad e^+(0) = e_0^+ \succeq 0 \\ v^+ = -\phi^+(z^+, \sigma) \end{cases} \quad (4.6)$$

4.1. SISTEMAS EN PRESENCIA DE PERTURBACIONES

$$\Psi_{E^-} \begin{cases} \dot{e}^- = A_L^- e^- + Gv^- + b^- \\ z^- = H_N^- e^-, \quad e^-(0) = e_0^- \succeq 0 \\ v^- = -\phi^-(z^-, \sigma) \end{cases} \quad (4.7)$$

donde $A_L^+ \triangleq A + L^+C$, $H_N^+ \triangleq H + N^+C$, $A_L^- \triangleq A + L^-C$, $H_N^- \triangleq H + N^-C$ y las no linealidades $\phi^+(z^+, \sigma)$ y $\phi^-(z^-, \sigma)$ están definidas en una forma similar a (3.4).

Los errores de incertidumbre

$$b^+ \triangleq \pi^+(t, y) - \pi(t, x) \quad (4.8)$$

$$b^- \triangleq \pi(t, x) - \pi^-(t, y) \quad (4.9)$$

actúan como entradas en los sistemas de errores de estimación Ψ_{E^+} en (4.6) y Ψ_{E^-} en (4.7). Note que el observador Ψ_{O^+} (Ψ_{O^-}) es un *observador que preserva el orden superior* (*inferior*) para Ψ_S si las dinámicas de los errores de estimación Ψ_{E^+} (Ψ_{E^-}) satisfacen dos propiedades:

1. Es Estable Entrada-Estados (EEE) con respecto a b^+ (b^-), y
2. El sistema de error Ψ_{E^+} (Ψ_{E^-}) es cooperativo con la entrada b^+ (b^-) y salida e^+ (e^-).

La primera condición significa que el error de estimación e^+ (e^-) será finalmente acotado por una cota dependiente de b^+ (b^-) y que convergerá a cero si $b^+(t) \rightarrow 0$ ($b^-(t) \rightarrow 0$) as $t \rightarrow \infty$. La última condición implica que

$$\hat{x}_0^+ \succeq x_0 \implies \hat{x}^+(t) \succeq x(t), \quad (x_0 \succeq \hat{x}_0^- \implies x(t) \succeq \hat{x}^-(t)), \quad \forall t \geq 0,$$

es decir, los observadores que preservan el orden, y las trayectorias de Ψ_{O^+} (Ψ_{O^-}) están siempre por arriba (por abajo) de las trayectorias verdaderas de la planta, a pesar de las perturbaciones. Note que aquí, en contraste con el caso nominal, el observador que preservan el orden superior (inferior) está solo ordenado de un lado. Esto significa que $\hat{x}_0^+ \preceq x_0 \not\Rightarrow \hat{x}^+(t) \preceq x(t)$ ($\hat{x}_0^- \succeq x_0 \not\Rightarrow \hat{x}^-(t) \succeq x(t)$).

El comportamiento dinámico de los observadores observadores que preservan el orden superior e inferior se muestra en la Figura 4.2.

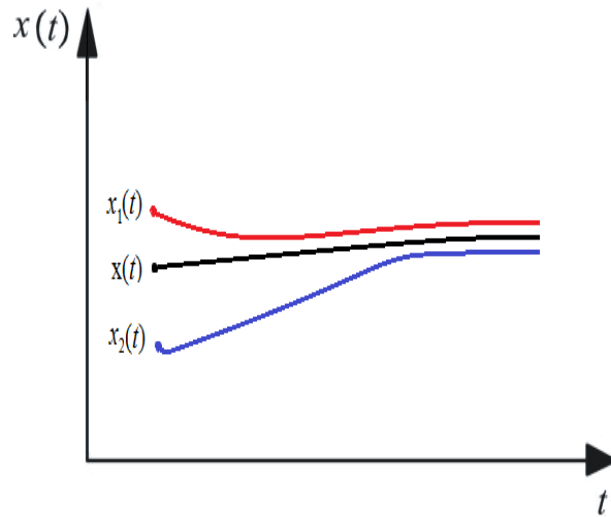


Fig. 4.2: comportamiento dinámico de un observador intervalo

4.2. Procedimientos de diseño de observadores intervalo

En esta sección se presentan un par de algoritmos de diseño de los observadores que preservan el orden superior/inferior. En estos, una propiedad que se modifica con respecto a los observadores que preservan el orden para sistemas en ausencia de perturbaciones es la convergencia de los errores de estimación Ψ_{E+} en (4.6) y Ψ_{E-} en (4.7), obteniendo como resultado que Ψ_{O+} , Ψ_{O-} no convergerán exponencialmente a los valores verdaderos de la trayectoria del estado, como en el caso de los observadores no lineales para sistemas libre de perturbaciones. Sin embargo, se puede asegurar la convergencia es debilitada, y es considerada como práctica: la estabilidad de Ψ_{E+} en (4.6) y de Ψ_{E-} en (4.7) se define con el concepto entrada-estados estable (EEE) (Khalil, 2002).

El caso de diseño de observadores que preservan el orden para sistemas perturbados generaliza al de los observadores para sistemas en ausencia de perturbaciones, ya que si las entradas b^+ y b^- de las dinámicas de los errores de observación Ψ_{E+} en (4.6) y

4.2. PROCEDIMIENTOS DE DISEÑO DE OBSERVADORES INTERVALO

Ψ_{E^-} en (4.7) son desvanecientes, entonces los errores de estimación e^+ y e^- convergen a cero. En caso que las entradas b^+ y b^- no desvanezcan, las estimaciones de los observadores Ψ_{O^+} y Ψ_{O^-} acotan dinámicamente, tanto por encima como por debajo, a la trayectoria del estado de Ψ_S y convergen asintóticamente a una vecindad de los valores verdaderos del estado.

El Teorema siguiente establece las condiciones suficientes para el diseño de un observador que preservan. Establecemos el resultado solo por el observador que preserva el orden superior Ψ_{O^+} , pero es también válido para el observador que preserva el orden inferior.

Teorema 13: Considere la planta perturbada Ψ_S en (4.1), y asumimos que la no linealidad ϕ^+ in (3.4) es (Q_i, S_i, R_i) -Disipativa para un número finito de formas cuadráticas, es decir, (3.8) permanece. Suponga además que existen las matrices constantes $P^+ = P^{+T} > 0$, L^+ , N^+ , un escalar constante $\epsilon^+ > 0$, y un vector $\theta^+ = (\theta_1^+, \dots, \theta_\mu^+)$, $\theta_i^+ \geq 0$, tal que:

1. La condición de Disipatividad, es decir la desigualdad matricial en (3.9) es satisfecha, y
2. $M(z; t, y, u) \stackrel{M}{\succeq} 0$ en (3.10) es Metzler $\forall z \in \mathbb{R}^r, \forall t, y, u$.

Bajo estas condiciones el sistema Ψ_{O^+} in (4.4) es un *observador que preserva el orden superior* *EEE globalmente* para la planta Ψ_S .

Prueba. La condición de convergencia 1 es derivada del Lema 3. La condición de cooperatividad 2 sigue de la Proposición 3, pero note que los mapeos entrada y salida son para nuestro caso la identidad, y por lo tanto su matriz Jacobiana es no negativa. ■

Ya que ambas no linealidades ϕ^+ y ϕ^- dependen solo de la misma no linealidad f , por consiguiente si ϕ^+ es (Q_i, S_i, R_i) -D entonces también lo es ϕ^- . Esto implica que si las condiciones del Teorema 13 son satisfechas para Ψ_{O^+} , también deberían ser

4.2. PROCEDIMIENTOS DE DISEÑO DE OBSERVADORES INTERVALO

satisfechas para Ψ_{O-} los mismos valores de los parámetros y , en particular, con las mismas matrices del observador $L^+ = L^-$ y $N^+ = N^-$. Esto significa que si es posible diseñar un observador que preserve el orden superior, también es posible diseñar un observador que preserve el orden inferior, y *viceversa*. Además, ambos observadores pueden tener (pero no es necesario) las mismas matrices $L^+ = L^-$ y $N^+ = N^-$.

Si ambos observadores que preservan el orden superior Ψ_{O+} en (4.4) e inferior Ψ_{O-} en (4.5) son puestos (se ejecutan) en paralelo, y además si existen las cotas conocidas de las condiciones iniciales (3.11) y de las perturbaciones (4.3) de la planta, y los observadores son inicializados adecuadamente, entonces un *observador intervalo* es obtenido para la planta perturbada Ψ_S , así que las siguientes condiciones permanecen:

$$\widehat{x}_0^+ \succeq x_0^+ \succeq x_0 \succeq x_0^- \succeq \widehat{x}_0^- \implies \widehat{x}^+(t) \succeq x(t) \succeq \widehat{x}^-(t). \quad (4.10)$$

Note que el Teorema 13 puede ser visto como una generalización del Teorema 10. De hecho, configurando $\pi^+(t, y) \equiv 0$ el observador que preserve el orden superior Ψ_{O+} en (4.4) e $\pi^-(t, y) \equiv 0$ en el inferior Ψ_{O-} en (4.5), se obtiene un observador intervalo para el caso nominal. Además, el conjunto de valores para las matrices del observador L y N que satisfacen las condiciones de los Teoremas 13 y 10 son los mismos, ya que las condiciones en estos Teoremas no dependen de la perturbación.

Con el objetivo de extender la metodología propuesta de los observadores que preservan el orden para los sistemas libres de perturbación a los observadores para sistemas perturbados, a continuación se presenta el Teorema que combina el método disipativo con la teoría del radio de estabilidad definido para sistemas positivos, obteniendo un simple cálculo que requiere de un par de variables, en comparación, con la desigualdad matricial no lineal que requiere de cuatro variables.

Teorema 14: Considere Ψ_S en (4.1), el observador Ψ_{O+} en (4.4) y el sistema del error de estimación Ψ_{E+} en (4.6). Se asume que $\pi(t, x)$ satisface (4.3). Suponga que $\phi^+(z^+, \sigma)$ es $(Q, S, R) = (-I, 0, \gamma^2 I)$ -D, es decir, satisface la desigualdad en (3.12). Si existen las matrices L^+ y N^+ tales que se satisface:

1. A_L^+ es Metzler y Hurwitz

4.2. PROCEDIMIENTOS DE DISEÑO DE OBSERVADORES INTERVALO

2. $H_N^+ \succeq 0$,
3. $\|H_N A_L^{-1} G\|^{-1} > \gamma$,
4. $M^+ = A_L^+ + G \frac{\partial f(z^+)}{\partial z^+} H_N^+$ es Metzler $\forall z^+ \in \mathbb{R}^r$

Entonces, Ψ_{E^+} es *EEE* con respecto a b^+ tal que

$$\|e^+(t)\| \leq k \|e^+(0)\| \exp(-\rho t) + \delta \sup(\|b^+\|) \quad (4.11)$$

con $k > 0$ y $\rho > 0$. Además, Ψ_{E^+} es un sistema cooperativo, es decir, $e^+(0) \succeq 0 \implies e^+(t) \succeq 0, \forall t \geq 0$, pero si $e^+(0) \preceq 0 \not\Rightarrow e^+(t) \preceq 0, \forall t \geq 0$. Por lo tanto, las estimaciones de Ψ_{O^+} (4.4) están siempre por encima de las trayectorias reales de la planta, es decir,

$$\hat{x}_0^+ \succeq x_0 \implies \hat{x}^+(t) \succeq x(t), \forall t \geq 0$$

a pesar de las perturbaciones. ◇

Prueba. La prueba es similar a la demostración del Teorema 11, cambiando en la segunda parte que está dada por la aplicación de la Proposición 3. ■

Si el Teorema anterior es satisfecho y Ψ_{E^-} (4.7) también cumple con las condiciones, entonces Ψ_{O^+} (4.4) y Ψ_{O^-} (4.5) forman un *observador intervalo* para el sistema Ψ_S porque se cumple:

$$\hat{x}_0^+ \succeq x_0 \succeq \hat{x}_0^- \implies \hat{x}^+(t) \succeq x(t) \succeq \hat{x}^-(t) \quad (4.12)$$

5. TÓPICO COMPUTACIONAL

El diseño general de los *observadores que preservan el orden*, para sistemas no lineales en ausencia y presencia de perturbaciones e incertidumbres, se reduce a la solución de un par de desigualdades matriciales: (a) una desigualdad matricial bilineal (BMI, por sus siglas en inglés) para asegurar la convergencia y (b) una desigualdad matricial lineal (LMI, por sus siglas en inglés) para asegurar la cooperatividad. En este capítulo se hace un estudio minucioso de las desigualdades mencionadas, proponiendo que la desigualdad disipativa sea considerada como un problema de factibilidad de una BMI, y la desigualdad que caracteriza a la propiedad cooperatividad sea una LMI. Esto es hecho para evitar el acoplamiento entre variables de las desigualdades de disipatividad y de cooperatividad, cuando son llevadas al ambiente de las LMI's. Adicionalmente, se realiza un análisis detallado para la desigualdad que caracteriza la cooperatividad en los observadores; es importante resaltar que esta desigualdad depende de una variable del estado, por consecuencia, se tendrían que calcular infinitas LMI's para asegurar esta propiedad. Ante ello, se ha obtenido los resultados siguientes: cuando se maneja una función escalar $f(\sigma)$, se puede resolver este inconveniente con un par de LMI's; en el caso general, cuando se utilice una función multivariable, es posible solucionar el problema con un conjunto finito de LMI's. El diseño se ha probado con algunos ejemplos que son utilizados en la literatura de los con observadores intervalo (Gouzé *et al.*, 2000; Rapaport y Dochain, 2005; Moisan y Bernard, 2010).

5.1. DISEÑO GENERAL DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

5.1. Diseño general de los observadores que preservan el orden

El diseño de los observadores que preservan el orden (o intervalo) para la clase de sistemas no lineales en el caso nominal o en presencia de perturbaciones/incertidumbres, se reduce a la solución de dos desigualdades matriciales (ver Teorema 10 y 13):

- (i) Para las matrices de convergencia L , N , $P = P^T > 0$, una constante $\epsilon > 0$ y un vector $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_\mu) \succeq 0$ tienen que ser encontradas tal que la Desigualdad Matricial (DM) (3.9) es satisfecha, y
- (ii) Para las matrices de cooperatividad L , N tienen que ser encontradas tal que la condición $M \stackrel{M}{\succeq} 0$ en (3.10) es también satisfecha.

A continuación discutiremos algunos tópicos en la solución de estas desigualdades.

5.1.1. La desigualdad de disipatividad

La naturaleza de la desigualdad matricial en (3.9) se ha estudiado en (Moreno, 2004, 2005; Rocha-Cózatl y Moreno, 2010). Aquí mencionamos algunos resultados y proporcionamos algunos nuevos. En general, esta desigualdad (3.9) es no lineal en las variables $(L, N, P, \epsilon, \theta)$. Aunque, bajo algunas condiciones importantes, el problema anterior puede ser convertido en un problema de factibilidad de una desigualdad matricial lineal (LMI, por sus siglas en inglés), para lo cual una solución puede ser efectivamente encontrada por algunos algoritmos en la literatura (El Ghaoui y Niculescu, 1999; Boyd *et al.*, 1994) y en Matlab.

1. Una primera observación es que el producto ϵP convierte a (3.9) no lineal en las dos variables. Aunque, es fácil ver que puede ser reemplazado ϵP siempre por el término ϵI , donde I es la matriz identidad, la factibilidad del problema no cambia. Para ver esto, que existe ϵ y P que cumplen la desigualdad en (3.9), la

5.1. DISEÑO GENERAL DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

DM puede ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \varepsilon I + H_N^T R_\theta H_N & PG - H_N^T S_\theta^T \\ G^T P - S_\theta H_N & Q_\theta \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \varepsilon I - \varepsilon P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Si $\varepsilon \leq \lambda_{\min}(P)\varepsilon$, entonces la matriz de la parte izquierda de la desigualdad en (5.1) es negativa semidefinida. En contraste, un argumento similar muestra que si matriz de la parte izquierda de la desigualdad en (5.1) es negativa semidefinida, existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que DM (3.9) sea satisfecha. Así ambas desigualdades son equivalentes. Para discusiones más adelante, asumiremos que en (3.9) el término εP se ha sustituido por el término εI .

2. La fuente principal de la no linealidad en (3.9) es debido a los términos $S_\theta H_N$ y $H_N^T R_\theta H_N$, donde los términos bilineales en θ y N aparecen, pero también un término cuadrático en N . Si N es fijado, por ejemplo, para el diseño de un observador de Alta Ganancia, donde $N = 0$ (Moreno, 2004, 2005), entonces (3.9) es una LMI en $P, \varepsilon, PL, \theta$. Note que, una vez que los valores de P y PL han sido obtenidos, entonces el valor de L puede ser fácilmente calculado de $L = P^{-1}(PL)$, ya que P es invertible.
3. Una alternativa es hacer θ fijo. Esta es una situación natural cuando la no linealidad ϕ es (Q, S, R) -Disipativa para una forma cuadrática, es decir, (3.8) permanece con $\mu = 1$. Esto es siempre el caso si la no linealidad f en Π_S es escalar, es decir, $m = r = 1$, o si es cuadrada (es decir, $m = r$) y las no linealidades son desacopladas, $f(\sigma) = [f_1(\sigma_1), \dots, f_m(\sigma_m)]$. En estas situaciones múltiples (no triviales) de las condiciones de disipatividad para ϕ son imposibles (Moreno, 2005; Rocha-Cózatl y Moreno, 2010). Consideraremos situaciones diferentes:
 - a) Si $R_\theta = 0$, por ejemplo si todo $R_i = 0$, (3.9) es nuevamente una LMI en P, ε, PL, N . En algunas situaciones es posible transformar el problema con $R_\theta \neq 0$ en uno con $R_\theta = 0$ por la transformación de lazo (ver (Rocha-Cózatl y Moreno, 2010)).

5.1. DISEÑO GENERAL DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

b) Si $R_\theta > 0$, y usando el complemento de Schur, uno puede transformar la desigualdad (3.9) en una Desigualdad Matricial equivalente

$$\begin{bmatrix} -R_\theta^{-1} & -H_N & 0 \\ -H_N^T & PA_L + A_L^T P + \epsilon I & PG - H_N^T S_\theta^T \\ 0 & G^T P - S_\theta H_N & Q_\theta \end{bmatrix} \leq 0, \quad (5.2)$$

que es otra vez una LMI en P, ϵ, PL, N .

c) Si $R_\theta \leq 0$ una condición *suficiente* para (3.9) es la Desigualdad Matricial

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \epsilon I & PG - H_N^T S_\theta^T \\ G^T P - S_\theta H_N & Q_\theta \end{bmatrix} \leq 0,$$

que es una LMI en P, ϵ, PL, N .

En general, una solución a (3.9) puede ser encontrada usando software especializado para problemas de Desigualdades Matriciales No Lineales, por ejemplo el software Pennon/Penbmi. Alternativamente uno puede usar un solucionador LMI eficiente, fijando iterativamente la matriz N , o el vector θ en casos (3a-3c) de arriba.

5.1.2. La Desigualdad de Cooperatividad

Considere el conjunto $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^{m \times r}$ de todos los valores tomados por el Jacobiano de la no linealidad f , es decir,

$$\mathcal{J} = \left\{ \Gamma \in \mathbb{R}^{m \times r} \mid \Gamma = J(z; t, y, u) = \frac{\partial f(z; t, y, u)}{\partial z}, \forall z, t, y, u \right\}. \quad (5.3)$$

La desigualdad (3.10) es una LMI en L, N , para todo $J \in \mathcal{J}$. Sin embargo, ya que \mathcal{J} es un conjunto con un número infinito incontable de puntos, (3.10) corresponde a un número *infinito* de LMIs. Esta es una tarea difícil, y es de interés reducir el número de LMIs para ser checado por un número finito. En los párrafos siguientes será mostrado que es posible encontrar un número *finito* q de puntos Ω_i en $\mathbb{R}^{m \times r}$ tal que si la desigualdad (3.10) es satisfecho en estos puntos, es decir $A_L + G\Omega_i H_N \stackrel{M}{\succeq} 0 \forall i = 1, \dots, q$, entonces será satisfecho para todo $J \in \mathcal{J}$.

5.1. DISEÑO GENERAL DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

La idea básica es muy simple. Asumimos que el conjunto \mathcal{J} es acotado. Este es el caso si la no linealidad $f(\sigma; t, y, u)$ es globalmente Lipschitz en σ , uniformemente en (t, y, u) . En este caso, es siempre posible encontrar un politopo que contiene \mathcal{J} (tomar por ejemplo un hipercubo que contiene a \mathcal{J}). Debido a la propiedad de convexidad de la desigualdad (3.10) es suficiente checarlo en los vértices de tal polítopo para concluir que es satisfecho en el conjunto completo \mathcal{J} . El refinamiento del polítopo, agregando vértices extras mientras reduce su tamaño, proporcionará condiciones menos conservativas. La desigualdad (3.10) es una LMI en las variables L, N , para cada $J(z; t, y, u) = \frac{\partial f(z; t, y, u)}{\partial z}$. Ya que $J(z; t, y, u)$ toma un número infinito de valores, tenemos que tratar con la dificultad del problema de resolver un número infinito de LMIs.

Mostraremos que si la no linealidad $\phi(z; \sigma, t, y, u) = f(\sigma; t, y, u) - f(z + \sigma; t, y, u)$, definida en (3.4), satisface una condición de sector, es decir, si existen dos matrices constantes $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$ y $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tal que para todo σ, t, y, u y para todo z la desigualdad

$$[\phi(z; \sigma, t, y, u) - K_1 z]^T [K_2 z - \phi(z; \sigma, t, y, u)] \geq 0 \quad (5.4)$$

es satisfecha, entonces el conjunto de valores en los cuales la desigualdad (3.10) tiene que ser verificada puede ser reducido considerablemente. De hecho, mostraremos que bajo la condición (5.4) el conjunto \mathcal{J} está contenido en un conjunto *convexo* Υ , y solo será necesario verificar la desigualdad (3.10) en la *frontera de* Υ . Esto es establecido en la siguiente proposición.

Proposición 10: Sea $z \rightarrow f(z; t, y, u) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función multivariable, continua en t, y, u y continuamente diferenciable en z . Suponga que $\phi(z; \sigma, t, y, u) = f(\sigma; t, y, u) - f(z + \sigma; t, y, u)$ es en el sector $[K_1, K_2]$, es decir, para algunas matrices constantes $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$ y $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times r}$ (5.4) se cumple. Si las matrices

$$A_L + G \Delta H_N \stackrel{M}{\succeq} 0 \quad (5.5)$$

son Metzler para todo $\Delta \in \Upsilon_f$, definido por

$$\Upsilon_f = \left\{ \Gamma \in \mathbb{R}^{m \times r} \mid (\Gamma + K_1)^T (K_2 + \Gamma) = 0 \right\}, \quad (5.6)$$

5.1. DISEÑO GENERAL DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

entonces la condición $M(z; t, y, u) \stackrel{M}{\succeq} 0$ en (3.10) es satisfecho $\forall z \in \mathbb{R}^r$, y para todo t, y, u . \diamond

Prueba. La demostración está dada en tres partes:

- (i) Primero, mostramos que cuando la no linealidad ϕ permanecen al sector $[K_1, K_2]$, entonces $\mathcal{J} \subset \Upsilon$, donde

$$\Upsilon \triangleq \left\{ \Gamma \in \mathbb{R}^{m \times r} \mid [\Gamma + K_1]^T [K_2 + \Gamma] \leq 0 \right\}. \quad (5.7)$$

Por el Teorema de Valor Medio (ver (Vidyasagar, 2002, p. 51)) uno puede escribir

$$\phi(z; \sigma, t, y, u) = - \left(\int_0^1 J(\sigma + \theta z; t, y, u) d\theta \right) z, \quad (5.8)$$

donde la matriz $\Theta(z; \sigma, t, y, u) \triangleq \int_0^1 J(\sigma + \theta z; t, y, u) d\theta$ es continua en todos sus argumentos.

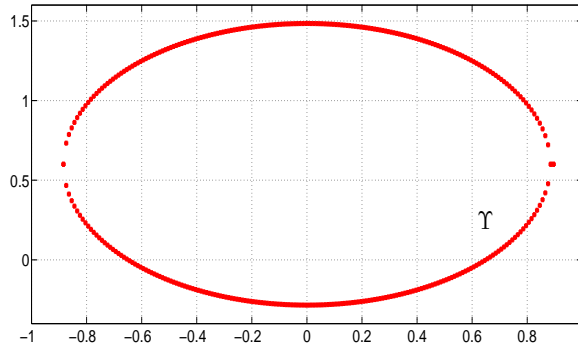


Fig. 5.1: Conjunto de $\Gamma \in \mathbb{R}^2$, cuando $f(\cdot)$ es una función multivariable.

La condición del sector (5.4) puede ser equivalentemente expresada como

$$- \left(\int_0^1 z^T [J(\sigma + \theta z; t, y, u) + K_1]^T [K_2 + J(\sigma + \theta z; t, y, u)] z d\theta \right) \geq 0. \quad (5.9)$$

5.1. DISEÑO GENERAL DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

Esto implica que $\mathcal{J} \subset \Upsilon$. Es obvio que si (5.5) es satisfecho para todo $\Delta \in \Upsilon$ desigualdad (3.10) continua.

- (ii) Ahora mostramos que Υ es un conjunto convexo. La convexidad de Υ sigue del hecho de la desigualdad $[\Gamma + K_1]^T [K_2 + \Gamma] \leq 0$, usando el Lema de Shur, puede ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} K_1^T K_2 + K_1 \Gamma + \Gamma^T K_2 & -\Gamma^T \\ -\Gamma & -I \end{bmatrix} \leq 0,$$

que es una LMI en Γ .

- (iii) Finalmente, mostramos que si (5.5) es satisfecho para todo $\Delta \in \Upsilon_f$, la frontera de Υ , entonces es también satisfecha para todo $\Delta \in \Upsilon$. Para esto note que si $A_L + G\Delta_1 H_N \succeq^M 0$ y $A_L + G\Delta_2 H_N \succeq^M 0$ para dos matrices Δ_1 y Δ_2 , entonces ;p que sigue para cada escalar $\alpha \in [0, 1]$

$$\alpha (A_L + G\Delta_1 H_N) + (1 - \alpha) (A_L + G\Delta_2 H_N) = A_L + G(\alpha\Delta_1 + (1 - \alpha)\Delta_2) H_N \succeq^M 0,$$

mostrando que la desigualdad (5.5) es convexa en Δ . Esto implica que es suficiente checar (5.5) en la frontera de Υ .

■

Nota 5: Recordamos que ϕ estando en el sector $[K_1, K_2]$ es equivalente a ϕ con (Q, S, R) -Disipativa, donde $(Q, S, R) = (-I, \frac{1}{2}(K_1 + K_2), -\frac{1}{2}(K_1^T K_2 + K_2^T K_1))$.

Una versión más general de la Proposición, con la misma prueba básicamente, puede ser obtenido de la siguiente forma. Cuando ϕ es (Q, S, R) -Disipativa, con $Q < 0$, entonces

$$\phi^T Q \phi + 2\phi^T S z + z^T R z = \int_0^1 z^T \{ J^T(\theta) Q J(\theta) - 2J^T(\theta) S + R \} z d\theta \geq 0$$

5.1. DISEÑO GENERAL DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

donde $J(\theta) = J(\sigma + \theta z; t, y, u)$. Es claro que si $\mathcal{J} \subset \Upsilon$, donde Υ es el conjunto de matrices $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tal que

$$\Gamma^T Q \Gamma - 2\Gamma^T S + R = \begin{bmatrix} R - \Gamma^T S - S^T \Gamma & \Gamma^T \\ \Gamma & -Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Ya que Υ es convexo, es suficiente con verificar la desigualdad (5.5) en su frontera Υ_f , definida como el conjunto de $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tal que $\Gamma^T Q \Gamma - 2\Gamma^T S + R = 0$.

Note también que si ϕ satisface algunas condiciones de disipatividad (Q_i, S_i, R_i) , para $i = 1, \dots, \mu$, con $Q_i < 0$, entonces la Proposición anterior es válida para cada condición de sector con un conjunto de la frontera Υ_{fi} . Para simplificar la presentación, restringimos en lo que sigue al caso de una condición de disipatividad, o cuando el vector θ es fijado.

La proposición anterior reduce substancialmente el tamaño de matrices, en donde la condición de cooperatividad (3.10) tiene que ser verificada. El conjunto de vectores $\Gamma \in \mathbb{R}^m$, que satisfacen la expresión (5), es decir,

$$\Upsilon \triangleq \{ \Gamma \in \mathbb{R}^m \mid \Gamma^T Q \Gamma - 2\Gamma^T S + R \geq 0 \}$$

donde $Q < 0$, representa una elipsoide en \mathbb{R}^m (Boyd *et al.*, 1994) (ver Figura 5.2).

Dada una elipsoide Υ construimos polítopos convexos:

- (i) Seleccione $k > 1$ puntos $\Delta_i \in \Upsilon_f \subset \mathbb{R}^m$ de la frontera Υ_f de Υ , y construya el polítopo convexo cerrado $P_I \subset \mathbb{R}^m$ como la envolvente convexa (combinación convexa) de todos estos puntos (Grünbaum, 2003), es decir,

$$P_I = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \Delta_i \in \mathbb{R}^m \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, i = 1, \dots, k \right\}. \quad (5.10)$$

$\Delta_i, i = 1, \dots, k$ son los vértices de P_I . En particular, seleccionamos todos los vértices de la elipsoide como los vértices del polígono P_I . En un refinamiento de P_I , otros puntos de Υ_f son agregados al conjunto de vértices de P_I . Es fácil ver que el polítopo P_I está inscrito en Υ , es decir, $P_I \subset \Upsilon$ (ver Figura 5.2).

5.1. DISEÑO GENERAL DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

- (ii) En cada vértice Δ_i de P_I hay un *hiperplano soporte* H_i , que es tangente a Υ_f . El polígono $P_C \subset \mathbb{R}^m$ puede ser equivalentemente definida como la intersección de los semi-espacios cerrados obtenidos de los hiperplanos soportes, o de la envolvente convexa de los puntos de intersección Ω_i de los hiperplanos soporte H_i (see (Grünbaum, 2003)), es decir,

$$P_C = \left\{ \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i \Omega_i \in \mathbb{R}^m \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i = 1, i = 1, \dots, \kappa \right\}. \quad (5.11)$$

$\Omega_i, i = 1, \dots, \kappa$ son los vértices de P_C (ver Figura 5.2). Es fácil mostrar que el polígono P_C circunscribe a Υ , es decir $\Upsilon \subset P_C$.

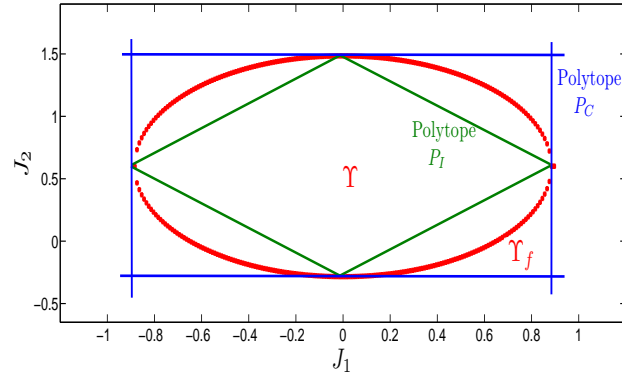


Fig. 5.2: Aproximaciones de Υ en \mathbb{R}^2 : P_C es el polígono que circunscribe a Υ_f , P_I está inscrito en Υ_f .

Los vértices de ambos polígonos P_I y P_C juegan un papel crucial aquí, ya que hay un número finito de puntos (ver Figura 5.2) en los cuales la condición de cooperatividad es probada. Esto corresponde a un número finito de LMI's.

Para satisfacer que la matriz Jacobiana $A_L + GJ(z)H_N \stackrel{M}{\succeq} 0$ in (3.10) $\forall z \in \mathbb{R}^r$ se requiere el cumplimiento de la Proposición siguiente

Proposición 11: Sea Υ en (5.7) un conjunto convexo cerrado, cuya frontera es Υ_f en (5.6).

5.1. DISEÑO GENERAL DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

Coop1) Si que la condición de cooperatividad $A_L + GJH_N \succeq^M 0$ en (3.10) es satisfecha para todo $J \in \mathcal{J}$. Entonces $A_L + G\Delta_i H_N \succeq^M 0$ es satisfecha para todo vértice $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ de P_I .

Coop2) Si $A_L + G\Omega_i H_N \succeq^M 0$ es satisfecha en cada vértice $\{\Omega_1, \dots, \Omega_k\}$ de P_C . Entonces $A_L + GJH_N \succeq^M 0$ en (3.10) es satisfecha para todo $J \in \mathcal{J}$.

Prueba.

(i). Primeramente mostraremos que el polígono P_I está inscrito en el conjunto Υ_f .

Si los vértices de P_I están en Υ_f , es decir $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\} \subset \Upsilon_f$, entonces $\sum_{i=1}^k \alpha_i \Delta_i \subset \Upsilon_f \Rightarrow P_I \subset \Upsilon_f$.

(ii). La segunda parte es probar que el polígono P_C circunscribe a Υ_f .

Considere el hiperplano $H = \{\Omega \in \mathbb{R}^{r \times m} \mid d^T \Omega = f, a \neq 0\}$, los semi-espacios $H^- = \{\Omega \in \mathbb{R}^{r \times m} : d^T \Omega \leq f\}$ y $H^+ = \{\Omega \in \mathbb{R}^{r \times m} : d^T \Omega \geq f\}$. Los vértices de P_I pueden definir la intersección de los hiperplanos tangentes de P_C en (5.11) con $d_i^T = \Upsilon'(\Delta_i)$ y $e_i = d_i^T \Delta_i$.

Si H es tangente a Υ in Δ_i , $H_i = \{\Delta \in \mathbb{R}^n : d_i^T \Delta = e_i, e_i = d_i^T \Delta_i, i = 1, \dots, k\}$,

entonces $\Upsilon_f \subset \bigcap_{i=1, \dots, k} H_i^- \Rightarrow \Upsilon_f \subset \bigcap_{i=1}^k H_i^- \Rightarrow \Upsilon_f \subset P_C$

(iii). Por convexidad, la tercera parte se trata de que si $A_L + G\Delta_i H_N \succeq^M 0$ y $A_L + G\Omega_i H_N \succeq^M 0$, $i = 2m, \dots, k$, entonces $M(z) \succeq^M 0, \forall z \in \mathbb{R}^r$.

Las aproximaciones del conjunto Υ están dadas por los polítopos P_I y P_C , las cuales representan las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la cooperatividad en (3.10). Es necesario que $M(z) \succeq^M 0$ evaluada en los vértices de P_I es satisfecha; en otro caso, la restricción de cooperatividad no es satisfecha en los observadores que preservan el orden propuestos aquí. Además, es suficiente

5.1. DISEÑO GENERAL DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

que $M(z) \succeq^M 0$ evaluada en los vértices de P_C (polígono que circunscribe a Υ) es satisfecha para asegurar que $M(z) \succeq^M 0$ es satisfecha $\forall z \in \mathbb{R}^r$.

■

La prueba de estos hechos es similar a la prueba de la Proposición 10. Verificando la condición de cooperatividad del polígono inscrito P_I , que constituye una condición *necesaria* para (3.10). Si no es satisfecha en *algún* vértice de P_I , entonces la condición en (3.10) no se cumple. Por otro lado, checando la condición de cooperatividad en el polígono que circunscribe P_C constituye una condición *suficiente* para (3.10). Si es satisfecho en *todos* los vértices de P_C , entonces la condición en (3.10) es verificada.

Es importante mencionar que para asegurar que un polígono P_I esté inscrito en el conjunto Υ_f y otro polígono P_C circunscribe a Υ_f , se requieren conocer los vértices de hiperelipsoide. La construcción de los polígonos será inicializada con los vértices de la hiperelipsoide, agregando un número mayor de vértices para tener una mayor afinidad con la hiper-elipsoide.

Nota 6: Note que si el número de vértices de los polígonos es incrementado, las aproximaciones P_I y P_C tendrán una mayor afinidad a Υ_f . Cuando esto sucede los cálculos para asegurar la propiedad de cooperatividad también serán incrementados. Por lo tanto, el problema de cooperatividad en (3.10) se puede aproximar arbitrariamente por un conjunto de LMI's, el cual está dado por el número de vértices de los polígonos P_I y P_C .

Es importante mencionar que si $M(z)$ no es Metzler en alguno de los vértices de P_C , llamado Ω_x , entonces un refinamiento en P_C con respecto a Ω_x es propuesto. Este refinamiento consiste en generar nuevos vértices para el polígono P_C , el cual será más cercano a Υ_f y al vértice Ω_x . El procedimiento para refinar es el siguiente,

- (a) Diseñar una línea recta del origen del conjunto Υ al vértice Ω_x ,

5.1. DISEÑO GENERAL DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

- (b) Encontrar la intersección Δ_{k+1} de esta línea con Υ_f . Δ_{k+1} es un vértice del polígono refinado P_I .
- (c) Construir un hiperplano soporte (hiperplano soporte) H_{k+1} de Υ en Δ_{k+1} y encontrar los puntos de intersección con todos los hiperplanos soporte. Estos puntos definen a los nuevos vértices $\Omega_{\kappa+1}, \dots, \Omega_{\kappa+g}$ para el polígono refinado P_C .
- (d) Las condiciones **Coop1**) y **Coop2**) son checadas en los nuevos vértices de P_I y P_C . Si el resultado no es certero, entonces un nuevo refinamiento es propuesto, que va desde el inciso (a).

La iteración finaliza cuando un resultado adecuado es obtenido (se verifica la propiedad de cooperatividad), o cuando el número de iteraciones es suficientemente grande.

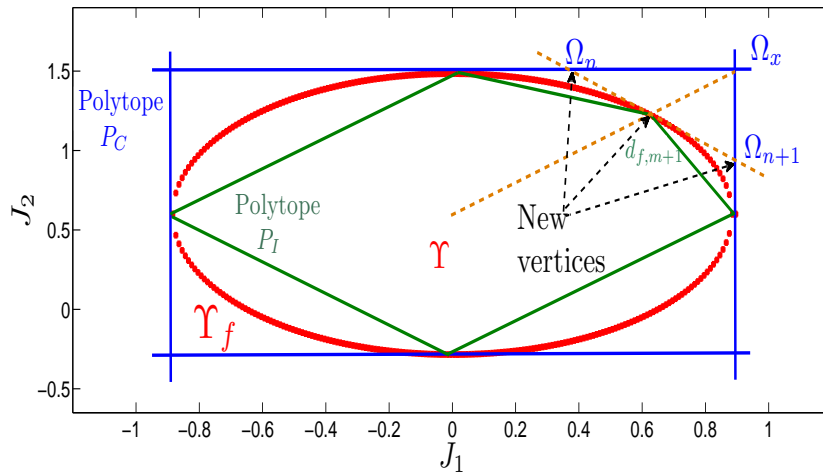


Fig. 5.3: Cálculo de nuevos vértices v_H , cuando v_x no satisface la restricción de cooperatividad

Es importante mencionar que el diseño de los observadores que preservan propuesto está restringido en el manejo de las funciones multivariadas $f(\sigma) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en el sistema Π_S o en Ψ_S , debido a la definición de los polítopos que circunscriben a la elipsoide P_C no está descrita en el espacio de matrices.

5.1. DISEÑO GENERAL DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

La solución propuesta para resolver el problema de la verificación de la condición de cooperatividad (3.10), que incluye las proposiciones 10 and 11 como también el criterio de refinamiento se ha implementado en un algoritmo numérico para diseñar los observadores que preservan el orden, usanso el software comercial PENBMI, y ha sido utilizado para el cálculo de algunos ejemplos que son presentados en el siguiente capítulo.

Caso particular: una función escalar

En particular, cuando $f(z)$ es una función escalar, el requisito que M es Metzler está dado por la desigualdad

$$M_p(z) = A + LC + \frac{\partial f(z)}{\partial z}G[H + NC] \succeq^M 0, \forall z \quad (5.12)$$

que es visto como un conjunto (infinito) de LMI's en las variables L y N .

En este caso, mostramos que $M_p(z) \succeq^M 0$ en (5.12) se satisface $\forall z$ si y solo si $M_p(z) \succeq^M 0$ es satisfecho en dos valores. El siguiente algoritmo proporciona las condiciones necesarias y suficientes para que $M_p(z) \succeq^M 0$ se satisfaga.

Proposición 12: Considere el Jacobiano $M_p(z)$ en (5.12). Asuma que $f(z)$ es una función escalar y que la no linealidad $\phi \in [K_1, K_2]$ con $K_1 \in \mathbb{R}$ y $K_2 \in \mathbb{R}$. La condición que $M_p(z) \succeq^M 0$ es satisfecha si y solo si es satisfecho por dos valores:

- Tomar para $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$ el valor $K_1 = \min \frac{\partial f(z)}{\partial z}$, y
- Tomar para $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$ el valor $K_2 = \max \frac{\partial f(z)}{\partial z}$. ◇

Prueba. Considere el conjunto de valores de $J(z)$, obtenido por las condiciones de sector clásicas para la no linealidad ϕ y del Teorema del Valor Medio (TVM) para una función escalar,

$$\Xi = \left\{ J(z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid [J(z) - K_1]^T [K_2 - J(z)] \geq 0, \forall z \right\}$$

5.1. DISEÑO GENERAL DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

donde $J(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}$, $K_1 = \min \left\{ \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right\}$ y $K_2 = \max \left\{ \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right\}$. Adicionalmente, considere $K = (1 - \alpha)K_1 + \alpha K_2$ con $\alpha \in [0, 1]$ con $K_1 \leq K \leq K_2$, es decir, K es el valor del conjunto $J(z)$ que se encuentra entre K_1 y K_2 .

Es satisfecho que :

$$1. M_{K_1} = A_L + K_1 G H_N \stackrel{M}{\succeq} 0, \quad y$$

$$2. M_{K_2} = A_L + K_2 G H_N \stackrel{M}{\succeq} 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \alpha)M_{K_1} + \alpha M_{K_2} \stackrel{M}{\succeq} 0, \quad \alpha \in [0, 1]$$

$$\Leftrightarrow A_L + [(1 - \alpha)K_1 + \alpha K_2] G H_N \stackrel{M}{\succeq} 0, \quad \alpha \in [0, 1]$$

$$\Leftrightarrow A_L + K G H_N \stackrel{M}{\succeq} 0, \quad K_1 \leq K \leq K_2$$

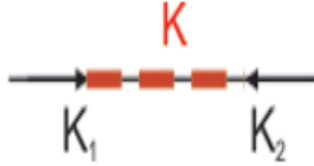


Fig. 5.4: Conjunto de valores que puede tomar K .

■

Con la proposición anterior, los cálculos son reducidos considerablemente, y solo se requieren calcular dos LMI's con la finalidad que $M_p(z) \stackrel{M}{\succeq} 0$ es satisfecha $\forall z$.

Nota 7: En particular, en el caso escalar, $z \rightarrow f(z; t, y, u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, el conjunto Υ es el intervalo $[K_1, K_2]$ y su frontera son los dos puntos extremos $\Upsilon_f = \{K_1, K_2\}$. En este caso es suficiente checar (3.10) para estos dos valores de J . Una situación

5.1. DISEÑO GENERAL DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

similar ocurre en el caso diagonal, es decir, $z \rightarrow f(z; t, y, u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $z_i \rightarrow f_i(z_i; t, y, u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, m$, donde Υ_f consiste de un número finito de puntos.

5.1.3. Acoplamiento de condiciones de cooperatividad y disipatividad

En los párrafos anteriores, se pudo observar que la condición de cooperatividad (3.10) puede ser reducida a un número finito de LMI's en las variables de diseño de L y N . La condición de disipatividad (3.9), aunque en general es una desigualdad matricial no lineal, puede ser reducida bajo algunas circunstancias a una LMI en los parámetros de diseño P, ϵ, PL, N . Note que cuando se intenta resolver simultáneamente ambas desigualdades un problema aparece: mientras (3.10) es lineal en L la desigualdad disipativa (3.9) es lineal en PL , así que ambas desigualdades son acopladas en una manera no lineal (bilineal).

Una solución posible es resolver las desigualdades en una forma iterativa. Se propone aquí una solución adicional a este problema, consistiendo en mirar a la desigualdad de disipatividad como una desigualdad matricial bilineal (BMI, por sus siglas en inglés) en P y L , y usando un software adecuado para su solución. Entonces, el acoplamiento de las variables de ambas desigualdades (3.9) y (3.10) no es considerado, y por lo tanto, el diseño de los observadores que preservan el orden consiste en la solución de una BMI y una LMI. La primera está dada por la desigualdad (3.9) y la segunda por (3.10).

Las BMI's son bien conocidas en control (ver (El Ghaoui y Niculescu, 1999; Tuan y Apkarian, 2000) y la referencia dentro de ellas), y existen algunos algoritmos para resolverlas. El software PENBMI es un solucionador para las BMI's (Kocvara y Stingl, 2003, 2004). Hemos implementado la solución anterior, incluyendo la Proposición 12 como el criterio de refinamiento con ayuda del software PENBMI y YALMIP. Este software ha sido usado para calcular los ejemplos presentados en la sección siguiente.

5.2. DISEÑO PARTICULAR DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

5.2. Diseño particular de los observadores que preservan el orden

El diseño particularizado de los observadores disipativos y de los que preservan el orden (cooperativo e intervalo convergente), que está dado por la combinación del método de disipatividad con la teoría del radios de estabilidad de sistemas positivos, se reduce a la solución de cuatro y cinco desigualdades matriciales, respectivamente (ver Teorema 11 y 12):

► Para las matrices de convergencia L y N tienen que ser encontradas tal que

1. A_L es Metzler y Hurwitz.
2. $H_N \succeq 0$
3. $\|H_N A_L^{-1} G\|^{-1} > \gamma$

son satisfechas.

► Para las matrices de cooperatividad L , N tienen que ser encontradas tal que la condición $M \stackrel{M}{\succeq} 0$ en (3.10) es también satisfecha.

Las tres primeras condiciones del diseño de un observador disipativo pueden ser convertidas en un problema de factibilidad de las desigualdades matriciales lineales (LMI) en las variables L y N , y la última condición está dada por un problema de una Desigualdad Matricial No lineal.

Para ello, una solución puede ser encontrada utilizando un software especializado para problemas de Desigualdades Matriciales No Lineales, como es el caso del software Pennon/Penbmi, primer solucionador de propósito general para las Desigualdades Matriciales No Lineales (Kocvara y Stingl, 2003, 2004).

Ahora bien, el diseño de los observadores que preservan el orden (cooperativo e intervalo convergente) se reduce a la solución de un observador disipativo en combinación con la condición $M \stackrel{M}{\succeq} 0$ en (3.10), la cual puede ser tratado como un problema

5.2. DISEÑO PARTICULAR DE LOS OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

de factibilidad de las LMI's en las variables L y N . Un problema de diseño de los observadores que preservan el orden surge en (3.10), ya que M depende de la variable z , así que representa un número infinito de LMI's. En particular, cuando $f(z)$ es una función escalar en (3.10) el requisito para que M sea Metzler está dada por un par de LMI's: tomando $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$ por el valor de $K_2 = \max(\frac{\partial f(z)}{\partial z})$ y tomando $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$ por el valor de $K_1 = \min(\frac{\partial f(z)}{\partial z})$. Desafortunadamente, cuando $f(z)$ es una función multivariable en (3.10) no puede ser reducido a un número finito de LMI's, pero puede ser aproximado a un conjunto de LMI's. Esto se puede mirar en la sección anterior.

Tomando en cuenta estos diseños particulares, que relacionan la teoría de disipatividad con el radio de estabilidad de los sistemas positivos, es importante mencionar que para el diseño de ambos observadores, disipativos y los que preservan el orden, solo se requiere encontrar un par de matrices, L y N , lo cual hace más sencillo esta metodología de diseño, ya que en el caso general se requiere del conocimiento de cuatro variables L , N , P y ϵ .

6. RESULTADOS: SIMULACIONES Y VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

En este capítulo se presentan los resultados, tanto en simulación numérica como en forma experimental, de la aplicación de la metodología de diseño de los observadores que preservan el orden (Avilés y Moreno, 2009), descrita en los capítulos 4 y 5. A continuación se ilustra la metodología de diseño de los observadores propuestos, usando algunos ejemplos de observadores intervalo propuestos en la literatura. Además, la metodología es validada experimentalmente en el sistema de tres tanques clásico del modelo Amira DTS-200.

6.1. *Diseño general de observadores que preservan el orden*

En este apartado se presentan algunos ejemplos, con la finalidad de diseñar observadores que preserven el orden para sistemas en ausencia y presencia de perturbaciones e incertidumbres, mediante la desigualdad matricial no lineal que caracteriza al método disipativo en conjunción con la desigualdad matricial lineal (LMI, por sus siglas en inglés) que representa a la propiedad de cooperatividad.

Es importante mencionar que la desigualdad que caracteriza al método de disipatividad es tratada como un problema de factibilidad de las desigualdades matriciales bilineales (BMI's, por sus siglas en inglés). El objetivo de esto es desacoplar las variables de las desigualdades de cooperatividad y disipatividad. Para ello, los observadores que preservan el orden se han desarrollado mediante el software Penmbi. Este solucionador está completamente integrado dentro del ambiente de Matlab a través de la versión 3.0 de la interface de Yalmip. La combinación de Penmbi y Yalmip propor-

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

ciona una herramienta efectiva para resolver muchos problemas de control.

6.1.1. Ejemplo 1: Reactor tanque agitado

Considere un reactor tanque agitado (STR, por sus siglas en inglés) (Rapaport y Dochain, 2005):

$$\Sigma_{2a} \begin{cases} \dot{x}_b = -D(t)x_b + \mu(s)x_b \\ \dot{s} = D(t)(S_{in} - s) - \frac{1}{Y}\mu(s)x_b \\ y = s \end{cases} \quad (6.1)$$

donde k es el coeficiente de producción, μ es la tasa de crecimiento específica, D es la tasa de disolución, s es la concentración del substrato en el reactor, S_{in} es la concentración del substrato influente, y x_b es la concentración de la biomasa en el reactor. La tasa de crecimiento específica está dada por la Ley Monod:

$$\mu(s) = \mu_0 \frac{s}{k_s + s} \quad (6.2)$$

donde μ_0 es la máxima tasa de crecimiento específica y k_s es la constante de saturación. En (Rapaport y Dochain, 2005) observadores intervalo para este sistema fueron propuesto, con el objetivo de estimar la concentración de la biomasa x_b a partir de las mediciones en línea de s , y teniendo como incertidumbres la tasa de crecimiento específica μ y S_{in} . Además un análisis detallado de las condiciones de convergencia y los límites del comportamiento alcanzado de los observadores fue dado.

Ilustraremos los resultados usando nuestra aproximación y la relación con el trabajo detallado (Rapaport y Dochain, 2005). Consideraremos nuevamente dos escenarios para el diseño del observador intervalo:

(i) Consideramos que no hay perturbaciones en el modelo, y diseñamos el observador usando los resultados del capítulo 3. (ii) Consideramos que la tasa de crecimiento específica μ es incierta, diseñamos un observador intervalo usando los resultados del capítulo 4.

Para este ejemplo es imposible diseñar un observador intervalo en las coordenadas de Σ_{2a} ya que la condición de cooperatividad (3.10) no puede ser satisfecha, lo cual fue

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

notificado en (Rapaport y Dochain, 2005). Para explicar esto, note primero que para esta matriz M tiene la forma

$$M(z; t, y) = \begin{bmatrix} -D(t) + l_1 - \mu(y) \frac{N}{Y} & -\mu(y) \frac{1}{Y} \\ l_2 + \mu(y) N & -D(t) + \mu(y) \end{bmatrix}.$$

Ya que hay un término negativo fuera de la diagonal, que depende de L , y N , entonces la cooperatividad es violada por el observador.

Debido a que la cooperatividad es una propiedad que depende de las coordenadas, es posible diseñar un observador que preserve el orden en las nuevas coordenadas.

$x = [x_b, z]^T$, con $z = x_b + Ys$, donde el modelo está dado por

$$\Sigma_{2b} \begin{cases} \dot{x}_b = -D(t)x_b + \mu(s)x_b \\ \dot{z} = -D(t)z + D(t)Y S_{in} \\ y = \frac{1}{Y}(z - x_b). \end{cases} \quad (6.3)$$

Es posible escribir el sistema nominal en la forma de Π_S en (3.1) con las matrices dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} -D(t) & 0 \\ 0 & -D(t) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ H = [0 \quad 1], \quad C = \left[\frac{1}{Y} \quad -\frac{1}{Y} \right].$$

El vector de inyección de entrada/salida $\varphi(t, y, u)$, que consiste de señales conocidas que afectan la dinámica de la planta, está dada por

$$\varphi(t, y) = \begin{bmatrix} D(t)Y \\ 0 \end{bmatrix} S_{in}(t),$$

y $f(\sigma, y) = \mu(y)\sigma$. La no linealidad incremental $\phi(\sigma, z) = \mu(y)\sigma - \mu(y)(\sigma + z) = -\mu(y)z$ is (Q, S, R) -D with $(Q, S, R) = (-1, -0,5, 0)$, i.e. $\phi \in [-1, 0]$. La convergencia del observador es garantizado si la desigualdad de disipatividad (3.9) es satisfecha. Para este caso la matriz M en (3.10) es

$$M(z; t, y) = \begin{bmatrix} -D(t) + \frac{l_1}{Y} & -\frac{l_1}{Y} \\ \frac{l_2}{Y} + \mu(y) \frac{N}{Y} & -\left(D(t) + \frac{l_2}{Y}\right) + \mu(y) \left(1 - \frac{N}{Y}\right) \end{bmatrix},$$

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

así que la condición de Cooperatividad es satisfecha si $l_1 \leq 0$ and $l_2 + \mu(y) N \geq 0$. Cuando ambas desigualdades de disipatividad (3.9) y cooperatividad (3.10) son satisfechas, así que el Teorema 10 es satisfecho, un observador intervalo de la forma de (4.4)-(4.5) puede ser diseñado, con los términos $\pi^+ = \pi^- = 0$. Note que este observador intervalo es similar al propuesto por (Rapaport y Dochain, 2005), excepto por dos diferencias: (i) Asumimos que \hat{x}^- es siempre no negativo, así que nuestro observador es un poco más sencillo que el de (Rapaport y Dochain, 2005). Nuestra suposición es razonable, y es usualmente satisfecha. (ii) Nuestro observador intervalo tiene un término de inyección extra, $N^\pm (\hat{y}^\pm - y)$, ingresado en la no linealidad. Aunque, ya que la no linealidad en este ejemplo es afín en el estado no medido, es decir, $\mu(s) x_b$, entonces el error de estimación es de hecho lineal variante en el tiempo, y el término de inyección debido a N llega a ser también lineal, agregando al término de corrección con la ganancia l_2 . Por lo tanto, el término de corrección adicional no ocasiona ningún comportamiento cualitativo diferente al observador en (Rapaport y Dochain, 2005) para este ejemplo. Esto es claro en las simulaciones de abajo. Note que nuestro método generaliza el método propuesto en (Rapaport y Dochain, 2005).

Utilizando los mismos parámetros como en (Rapaport y Dochain, 2005), es decir, $k_s = 5 \text{ g/l}$, $S_{in} = 5 \text{ g/l}$, $D = 0,05 \text{ h}^{-1}$, $\mu_0 = 0,33 \text{ h}^{-1}$ y $Y = 0,5$, donde D y S_{in} son constantes, es posible encontrar numéricamente (usando por el software Penbmi) que para los valores

$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ 19,991 \end{bmatrix}, N = -10, P = 10^6 \begin{bmatrix} 7,8109 & -0,0007 \\ -0,0007 & 0,00004 \end{bmatrix}, \epsilon = 183,232$$

ambas desigualdades (3.9) y (3.10) son satisfechas. Seleccionamos en el observador intervalo $N^+ = N^- = N$ y $L^+ = L^- = L$.

La figura 6.1 muestra el comportamiento del observador intervalo. Las condiciones iniciales para la planta fueron $x_{b0} = 1,05 \text{ g/l}$ and $s_0 = 0,9 \text{ g/l}$, y para el observador intervalo fueron

$$\begin{aligned} \hat{x}_b^+(0) &= 1,5 \text{ g/l}, \hat{x}_b^-(0) = 0 \text{ g/l}, \\ \hat{z}^+(0) &= 0,45 \text{ g/l}, \hat{z}^-(0) = 1,95 \text{ g/l}. \end{aligned}$$

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

Tal como se esperaba el error de estimación preserva el ordeny converge exponencialmente a cero. Como es explicado en (Rapaport y Dochain, 2005) la velocidad de convergencia no puede ser mejorada mucho sin violar la condición de cooperatividad.

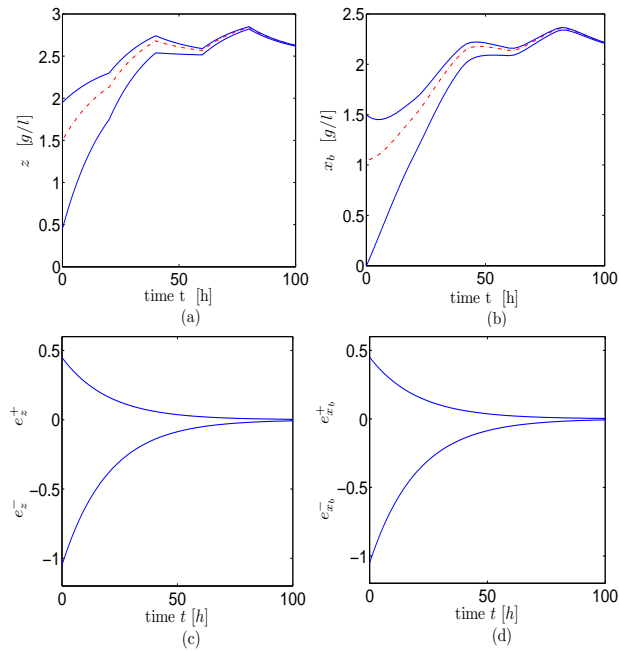


Fig. 6.1: Simulación del bioreactor (—), la estimación del observador intervalo propuesto (---) y sus errores de estimación para el caso nominal.

Diseño del Observador Intervalo para el reactor tanque agitado con incertidumbres

Ahora consideramos que la tasa de crecimiento específica μ en (6.2) es incierta, y está acotada entre las cotas inferior y superior conocida

$$\mu^-(s) \leq \mu(t, s) \leq \mu^+(s) .$$

En particular, asumimos que $\mu^\pm(s)$ están dados por modelos Monod (6.2) con $\mu_0^+ = 0,495 \text{ h}^{-1}$ y $\mu_0^- = 0,165 \text{ h}^{-1}$. El observador intervalo es de la forma (4.4)-(4.5), donde

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

los términos π^+ y π^- están dados por

$$\pi^+(t, y) = 0,165 \frac{y}{k_s + y} x_b^+, \quad \pi^-(t, y) = -0,165 \frac{y}{k_s + y} x_b^-.$$

Usando los mismos parámetros como en el diseño anterior, encontramos numéricamente un conjunto diferente de parámetros que satisfacen ambas desigualdades (3.9) y (3.10)

$$L = \begin{bmatrix} -0,5847 \\ 561,2413 \end{bmatrix}, \quad N = -10, \quad P = 10^4 \begin{bmatrix} 4,2090 & -0,0025 \\ -0,0025 & 0,0068 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 506,6.$$

Elegimos también un observador intervalo $N^+ = N^- = N$ and $L^+ = L^- = L$. Para comparación diseñamos también el observador propuesto en (Rapaport y Dochain, 2005), que corresponde a la estructura dada por (4.4)-(4.5) con $l_1 = 0$, $l_2 = 2,255$, y $N = 0$. La figura 6.2 muestra el comportamiento de las trayectorias de la planta, ambos observadores intervalo y sus respectivos errores de estimación, cuando las condiciones iniciales son las mismas como en el párrafo anterior.

Como es de esperarse el error de estimación preserva el orden y converge exponencialmente a una cota final (diferente de cero). La velocidad de convergencia otra vez no puede ser mejorada sin violar la condición de cooperatividad, ya que ambos observadores intervalo son esencialmente idénticos, y tienen el mismo comportamiento. El punto de interés aquí es que la metodología de los observadores que preservan el orden permite unificar algunos métodos de observadores intervalo.

6.1.2. Ejemplo 2 Validación experimental en el sistema de tres tanques

Para el Sistema Clásico de Tres-Tanques, hemos utilizado el modelo Amira DTS200 y diseñado observadores intervalo usando el método propuesto en las secciones anteriores. Este sistema puede ser visto como un prototipo de muchas aplicaciones de procesos industriales y nuestros resultados fueron probados en simulación y validados experimentalmente, para ilustrar el comportamiento y propiedades de los observadores que preservan el orden en un ambiente realista (ver figura 6.3).

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

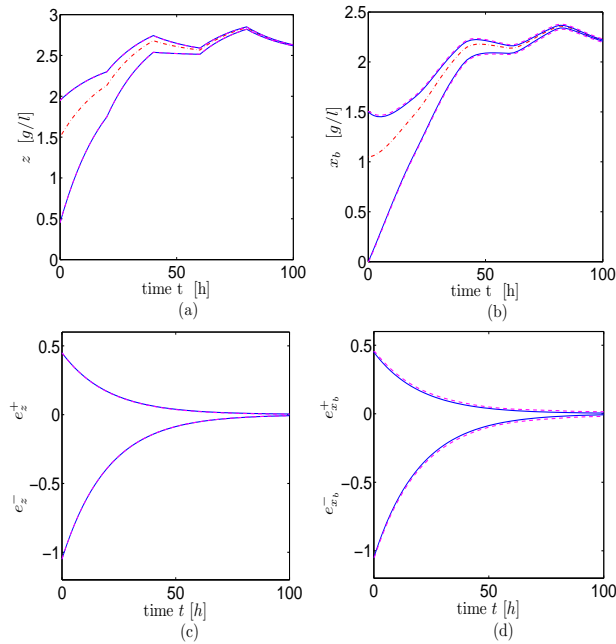


Fig. 6.2: Simulación de las trayectorias del bioreactor (—), las estimaciones inferior/superior de nuestro observador intervalo (---), las del observador intervalo propuesto en (Rapaport y Dochain, 2005) (· · ·), y sus errores de estimación cuando hay una incertidumbre en la tasa de crecimiento específica máxima μ_0 .

El sistema a tratar consiste de tres tanques de acrílico conectados entre sí por válvulas, y además se considera una válvula para el flujo de salida en el tanque 2; un par de flujos de entrada y un par de mediciones son contemplados.

El problema de observación consiste en estimar el nivel h_3 del Tanque 3, a partir de las mediciones en línea de los niveles h_1 y h_2 de los Tanques 2 y 3. El modelo matemático del sistema de tres tanques está representado por

$$\Sigma_T : \begin{cases} A_T \frac{dx_1}{dt} = Q_1(t) - Q_{13}(x_1 - x_3) \\ A_T \frac{dx_2}{dt} = Q_2(t) + Q_{32}(x_3 - x_2) - Q_{20}(x_2) \\ A_T \frac{dx_3}{dt} = Q_{13}(x_1 - x_3) - Q_{32}(x_3 - x_2) \end{cases} \quad (6.4)$$

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

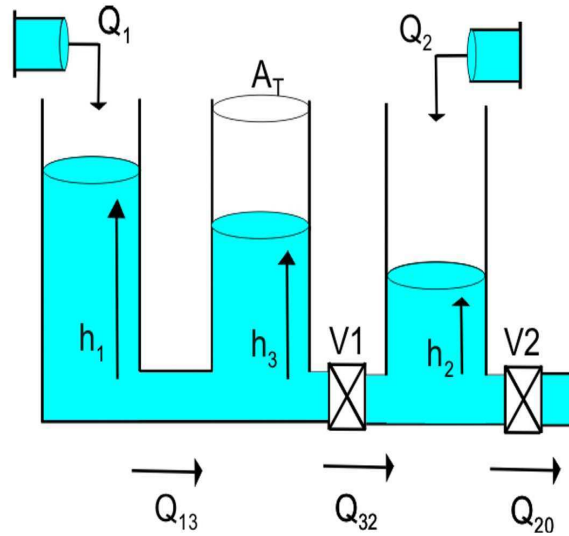


Fig. 6.3: Sistema de tres tanques, modelo de Amira DTS-200.

El estado del sistema está dado por los niveles de los tres tanques $x = [h_1, h_2, h_3]$. Las mediciones del sistema son los niveles h_1 y h_2 . A_T representa el área de la base de los tres tanques cilíndricos. Los flujos de entrada (volumétrica) en los Tanques 2 y 1 son Q_2 y Q_1 , respectivamente. Q_{32} es el flujo entre Tanques 2 y 3, a través de la válvula $V1$, y Q_{20} es el flujo, a través de la válvula $V2$, que va del Tanque 2 al exterior del sistema. Q_{13} es el flujo entre los Tanques 1 y 3. Estos flujos, que son dependientes de la diferencia de niveles de los tanques conectados, son descritos por:

$$Q_{32}(x_3 - x_2) \triangleq K_{32} \operatorname{sgn}(x_3 - x_2) \sqrt{2g|x_3 - x_2|}$$

$$Q_{13}(x_1 - x_3) \triangleq K_{13}(x_1 - x_3)$$

$$Q_{20}(x_2) \triangleq K_{20}\sqrt{2gx_2}$$

donde $K_{13} = a_{13}S_n$, $K_{32} = a_{32}S_n$ y $K_{20} = a_{20}S_n$. Los parámetros de estas válvulas para la configuración experimental están enlistados en la Tabla 6.1.

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

Parámetros	Valores numéricos
S_n	$5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$
g	9.81 m/s^2
a_{13}	8.5720
a_{20}	0.7026
a_{32}	0.4883
$\frac{1}{A_T}$	64.977 $1/\text{m}^2$

Tab. 6.1: Parámetros para la configuración experimental del sistema de Tres tanques Σ_T .

Es posible escribir el sistema (nominal) en la forma Π_S en (3.1) con las matrices dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(-K_{31})}{A_T} & 0 & \frac{K_{31}}{A_T} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{31}}{A_T} & 0 & \frac{-K_{31}}{A_T} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{A_T} \\ \frac{1}{A_T} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H = [0 \quad 1 \quad -1], C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de entradas conocidas u consiste de dos flujos Q_1 y Q_2 , es decir $u = [Q_1, Q_2]^T$, y el vector de inyección entrada/salida $\varphi(t, y, u)$, consistente de las señales que afectan las dinámicas de la planta, está dado por

$$\varphi(t, y, u) = \frac{1}{A_T} \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) - Q_{20}(x_2) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, la no linealidad (interna) en el modelo $f(\sigma)$ está dada por $f(\sigma) \triangleq K_{32} \operatorname{sgn}(\sigma) \sqrt{2g|\sigma|}$, y depende de la variable $\sigma = x_2 - x_3$, la cual es una función lineal de los estados, es decir, $\sigma = Hx$, y no es medible, ya que depende de la variable del estado no medible x_3 .

Consideraremos dos escenarios para el diseño de los observadores intervalo:

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

1. Consideramos que no hay presencia de perturbaciones en el modelo, y diseñamos el observador usando los resultados de la Subsección 3.1.
2. Consideramos una perturbación para el sistema que consiste en una fuga en el Tanque 3, la cual fluye hacia afuera del sistema. Es posible escribir el sistema (perturbado) en la forma Ψ_S en (4.1) con las mismas matrices como para el modelo nominal y con un vector de perturbación $\pi(t, x) = [0, 0, \pi_3(t)]^T$. Conocemos que $\pi_3(t)$ permanece entre los valores $\pi^- \leq \pi(t) \leq \pi^+$. Diseñamos un observador intervalo usando los resultados de la Subsección 4.1.

Diseño del observador intervalo

Para ambos escenarios diseñamos las mismas matrices del observador L y N . La no linealidad incremental definida en (3.4) está dada por

$$\phi(z, \sigma) = K_{32} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \sqrt{2g|\sigma|} - \operatorname{sgn}(\sigma + z) \sqrt{2g|\sigma + z|} \right),$$

la cual es una no linealidad escalar en el sector $[-\infty, 0]$. Aunque es posible satisfacer las condiciones del Teorema 10 usando este sector, las ganancias requeridas del observador son muy altas. Ya que el valor infinito se debe a la falta de diferenciabilidad de la raíz cuadrada en Q_{20} , es razonable considerar una aproximación suave de esta función, que tiene una pendiente finita en zero, sin alterar la exactitud del modelo para predecir los resultados experimentales. Hemos encontrado que usando una función de aproximación, perteneciente al sector $\phi \in [-0,1, 0]$, o equivalentemente, siendo (Q, S, R) -Disipativo con $(Q, S, R) = (-1, -0,05, 0)$ resultados experimentales razonables son obtenidos, con ganancias para implementarse en la práctica. Usando estos datos resolvemos ambas desigualdades, la disipativa en (3.9) y la cooperativa en (3.10) usando un solucionador BMI¹, y hemos obtenido como soluciones las matrices siguientes

¹ hemos usado el software PENBMI.

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

$$L = \begin{bmatrix} -518,317 & 53,9564 \\ 118,9967 & -303,4840 \\ 122,9429 & 278,2979 \end{bmatrix}, N = [0 \quad 10],$$

$$P = \begin{bmatrix} 18,6334 & 39,3332 & 39,3332 \\ 39,3332 & 84,2404 & 84,2334 \\ 39,3332 & 84,2334 & 84,2327 \end{bmatrix}, \epsilon = 0,1796 .$$

Ya que el Teorema 10 es satisfecho es posible diseñar un observador que preserva el orden, y por lo tanto un observador intervalo por correr en paralelo dos observadores que preservan el orden inicializados adecuadamente, una estimación superior y otra inferior con respecto a la trayectoria de la planta. Hemos utilizado algunas ganancias para ambos observadores, y entonces $L = L^+ = L^-$, $N = N^+ = N^-$, $P = P^+ = P^-$, $\epsilon = \epsilon^+ = \epsilon^-$. Para propósitos de comparación un observador en lazo abierto ha sido diseñado, es decir,

$$L = 0 \text{ and } N = 0.$$

Note que este observador en lazo abierto es también un observador que preserva el orden, ya que las condiciones del Teorema 10 son satisfechas con estos valores de L y N .

Validación experimental de los observadores intervalo.

Realizamos tres experimentos en el sistema para probar los dos observadores intervalo diseñados. Los dos primeros toman en cuenta el caso nominal, mientras que en el tercer experimento una fuga en el Tanque 3 causa una perturbación para el problema de observación.

Experimento 1: Para esta prueba consideramos el caso sin fuga en el tanque 3. Los flujos de entrada son *constant*es con los valores $Q_1^0 = 2,4425 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ y $Q_2^0 = 1,9889 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$. Los estados iniciales para la planta fueron $x_{10} = 0,14 \text{ m}$, $x_{20} = 0,04 \text{ m}$ y $x_{30} = 0,09 \text{ m}$, y las condiciones iniciales para ambos observadores intervalo y en lazo abierto

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

fueron $\hat{x}_0^+ = (0,22, 0,13, 0,16)$ para el observador que preserva el orden superior, y $\hat{x}_0^- = (0,07, 0,02, 0,05)$ para el inferior.

La figura 6.4 muestra el comportamiento de los estados reales y estimados de los observadores intervalo y en lazo abierto bajo estas condiciones. Note que ambos observadores preservan el orden, así que los estados estimados están por encima y por debajo de los valores reales para todo tiempo. Nótese además que los estados estimados \hat{x}_1^+ y \hat{x}_1^- , \hat{x}_2^+ y \hat{x}_2^- del observador intervalo, que corresponden a las variables medidas, converge muy rápido, pero esto no es el caso para el observador en lazo abierto. La convergencia de la estimación para el estado no medido x_3 no es tan rápida como en el caso de las variables medibles, pero los errores de estimación e_3^+ y e_3^- convergen mucho más rápido para el observador intervalo que en lazo abierto. Esto muestra que la inclusión de los términos de inyección $N(\hat{y}^\pm - y)$ and $L(\hat{y}^\pm - y)$ en el observador intervalo acelera la convergencia de la estimación. Note que e_3 para el observador intervalo crece muy rápido en la fase inicial, y entonces decrece monótonamente. Esto explica porque en la figura 6.4 los estados iniciales para ambos observadores son aparentemente diferentes. En este caso, ya que no han sido consideradas incertidumbres para el modelo de la planta, los estados estimados de ambos observadores convergen (exponencialmente) a los valores verdaderos.

Experimento 2: Para esta prueba consideramos el caso sin fuga en el Tanque 3. La entrada de flujos son *variantes periódicamente* como $Q_1(t) = 7,3284 \times 10^{-5} \sin(0,1t) \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ y $Q_2(t) = 1,9889 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$. Las condiciones iniciales para la planta fueron $x_{10} = 0,14$ m, $x_{20} = 0,04$ m y $x_{30} = 0,15$ m, mientras que las condiciones para ambos observadores son las mismas como en el Experimento anterior 1.

La figura 6.5 muestra el comportamiento del estado real x_3 y su estimación por el observador intervalo bajo estas condiciones. Nuevamente los estados estimados están por encima/por debajo de los valores verdaderos para todo tiempo, y convergen (exponencialmente) a sus valores verdaderos.

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

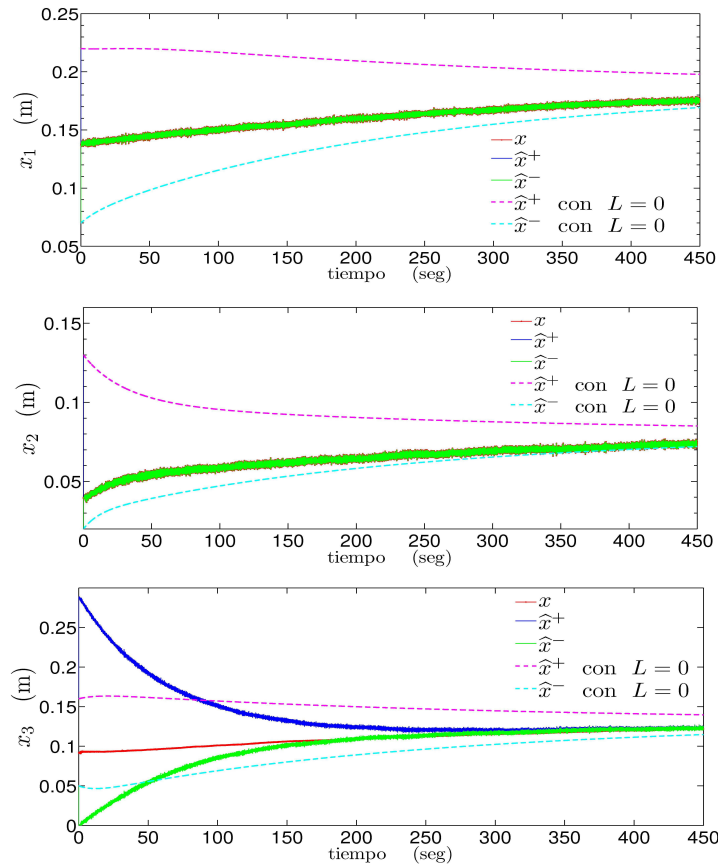


Fig. 6.4: Comportamiento del sistema de tres tanques, y de los observadores cooperativo y en lazo abierto.

Experimento 3: Para este caso consideramos el caso *con* una fuga en el Tanque 3. Los flujos de entrada *constant*es, tomando los mismos valores como en el Experimento 1. Las condiciones iniciales para la planta y para el observador intervalo son las mismas que en el Experimento anterior 1. Las cotas para la fuga en el tercer Tanque son consideradas ser ni más grandes que $\pi_3^+ = 3,5899 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ ni menores que $\pi_3^- = 1,5763 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$, así que (4.3) permanece.

La figura 6.6 muestra el comportamiento del estado real x_3 y su estimación para el observador intervalo bajo estas condiciones. Note que los estados estimados están

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

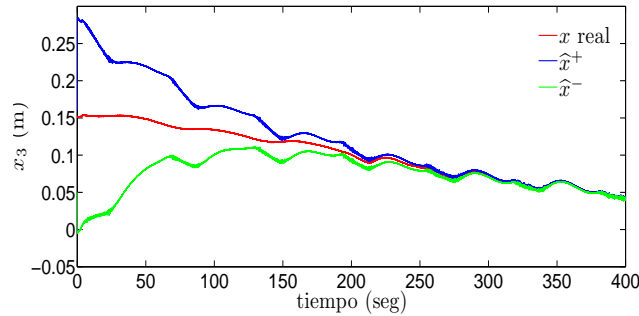


Fig. 6.5: Estado real y estimado x_3 para el sistema de Tres-Tanques con entradas variantes en el Experimento 2. El estado real es la línea continua — (rojo) y los estados estimados del observador intervalo son las líneas continuas — (azul y verde).

arriba/abajo de sus valores verdaderos para todo tiempo. Aunque, en contraste al caso nominal considerado en los dos Experiments previos, el error de estimación no converge a cero, pero converge (exponencialmente) a una cota final. La cota inferior estimada x_3^- del nivel en el Tanque 3 (no medible) puede servir como un indicador cuando el Tanque esté cerca de vaciarse, antes de que pase realmente. O la cota superior estimada x_3^+ del mismo estado es un indicador del posible sobreflujo en el mismo tanque.

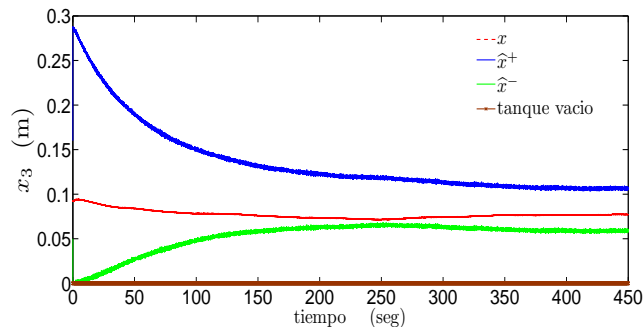


Fig. 6.6: Estado real y estimado x_3 para el sistema de Tres-Tanques con una fuga en el Tanque 3 en el experimento 3. El estado real es una línea continua — (rojo) y los estados estimados del observador intervalo son líneas continuas — (azul y verde).

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

6.1.3. Ejemplo 3: Sistema caótico de Chua

Considere el sistema eléctrico caótico de Chau que se caracteriza principalmente por dos aspectos: primero, es no forzado, es decir, no está alimentado por fuentes de corriente alterna y segundo, está compuesto por dos partes: una parte que presenta un comportamiento típico de un oscilador amortiguado (dos condensadores, una resistencia y una bobina) y otra parte que constituye el único elemento no lineal denominado *diodo de Chua*. Este elemento, causante de la no linealidad actúa como la fuente de energía de todo el circuito; se ocupa de retroalimentarlo y lo mantiene oscilando.

El sistema de Chua está descrito por las ecuaciones dinámicas:

$$\Sigma_2 \begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha [x_2 - x_1 (1 + b) - g(x_1)] \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 - \gamma x_3 \\ y = x_2 \end{cases} \quad (6.5)$$

con

$$g(x_1) = \frac{1}{2} (a - b) [|x_1 + 1| - |x_1 - 1|]$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ y $a, b \in \mathbb{R}^-$ son parámetros del sistema.

Diseño del observador cooperativo

Para este diseño Π_S, Π_O, Π_E son considerados. El estado del sistema está dado por $x = [x_1, x_2, x_3]^T$. Por ello, las matrices de Π_S, Π_O, Π_E están definidas por

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha(1+b) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2}(a-b) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H = [1 \ 0 \ 0], \quad C = [0 \ 1 \ 0],$$

$$f(\sigma) = [|\sigma + 1| - |\sigma - 1|]$$

donde los valores de los parámetros están dados en la siguiente tabla

Las condiciones iniciales son $x_{10} = 0, x_{20} = 0$ y $x_{30} = 0$. La no linealidad $\phi(\sigma, z) = [|\sigma + 1| - |\sigma - 1|] - [|\sigma + z + 1| - |\sigma + z - 1|]$ es (Q, S, R) -D = $(-1, 0.5, 0)$ -

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

Parámetros	Valores numéricos
α	11.85
β	14.9
γ	0.29
a	-1.14
b	-0.71

D, es decir, $\phi \in [0, 1]$. Las matrices de diseño del observador cooperativo son obtenidas a través del software comercial Penbmi/Tomlab junto con el analizador Yalmip 3.0 son

$$L = 1 \times 10^7 \begin{bmatrix} 0,043426 \\ -1,44326 \\ 0,077343 \end{bmatrix}, \quad N = -10$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.69344 & 0.0110 & -0.1822 \\ 0.0110 & 1.6381 & 0.4910 \\ -0.182249 & 0.4910 & 9.2647 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 1.2770$$

tal que la desigualdad de disipatividad y cooperatividad sean satisfechas. Por lo tanto, el Teorema 10 es satisfecho y un observador cooperativo puede ser diseñado.

En la figura 6.7 se presenta el comportamiento de los observadores propuestos en este trabajo y de observadores intervalos propuestos en (Moisan y Bernard, 2010). El sistema considerado es el circuito caótico de Chua.

6.1.4. Ejemplo 4: Modelo académico

Para ilustrar el método general de diseño de los observadores que preservan el orden, se considera el modelo no lineal:

$$\Sigma_A \begin{cases} \dot{x}_1 = -18x_1 + 14x_2 + 6x_3 + f(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_3 = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (6.6)$$

donde $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1+x_1+x_2^2+x_3}$. En este caso, el problema de observación consiste en estimar las variables x_2 y x_3 a partir de las medición de x_1 .

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

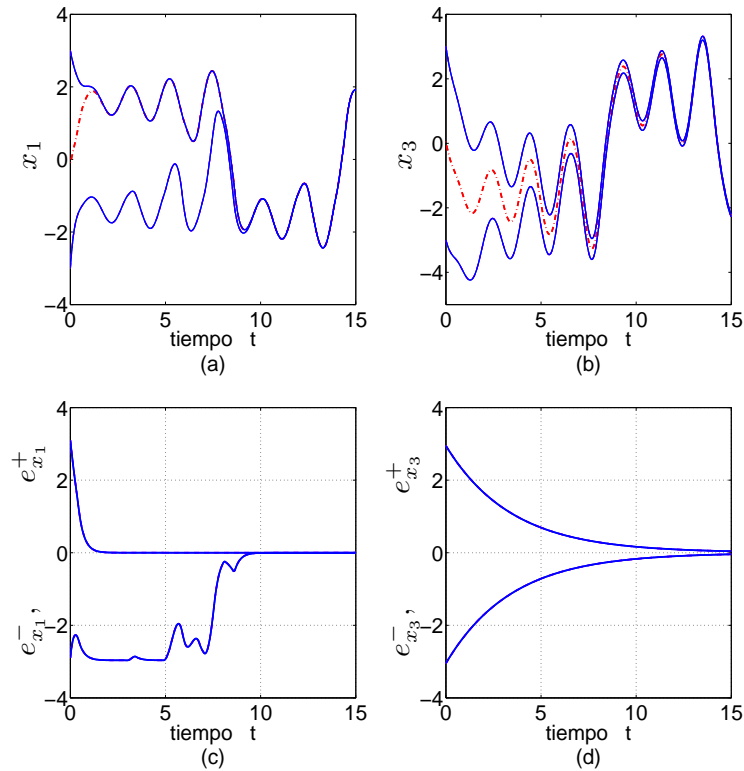


Fig. 6.7: Simulaciones del sistema de Chua (-), comportamiento dinámico del observador intervalo prepuesto en este trabajo (línea continua) y del observador intervalo propuesto en Moisan y Bernard (2010) (-), y sus respectivos errores de observación.

Diseño del observador cooperativo

Es recomendable que al diseñar los observadores que preservan el orden, ya sea el observador cooperativo o intervalo, el sistema Σ_A en (6.6) sea llevado a la forma de los sistemas Π_S , Π_0 , y Π_E , con el objeto de aplicar la metodología de diseño que ha sido mencionada con anterioridad en programas computacionales, como es el caso de Matlab en conjunto con Penbmi/Tomlab y el analizador Yalmip, y por consecuencia obtener las variables de los estimadores.

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

Las matrices de Π_S, Π_0, Π_E están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} -18 & 14 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0], \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con $f(\sigma) = \frac{1}{1+\sigma_1^2+\sigma_2}$, con $\sigma_1 = x_1 + x_3$ y $\sigma_2 = x_2$. Adicionalmente, la no linealidad $\phi(\sigma, z) = \frac{1}{1+(\sigma_2)^2+\sigma_1} - \frac{1}{1+(\sigma_2+z_2)^2+\sigma_1+z_1}$ es (Q, S, R) -D con $Q = 1, S = 5/2 [0, 1]$ y $R = \begin{bmatrix} 25 & 25/2 \\ 25/2 & 0 \end{bmatrix}$. Las matrices de diseño del observador cooperativo son obtenidas a través del software comercial Penbmi/Tomlab junto con Yalmip 3.0:

$$L = 1 \times 10^3 \begin{bmatrix} -1.1153 \\ 0.0020 \\ 0.0013 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$P = 1 \times 10^7 \begin{bmatrix} 0.000001663 & 0.000000006 & -0.000000188 \\ 0.000000006 & 0.466873223 & -0.80616682 \\ -0.000000188 & -0.80616682 & 1.412925 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 2.6857$$

tales que la desigualdad de disipatividad y cooperatividad se cumplen. Por lo tanto, el Teorema 10 es satisfecho y un observador cooperativo puede ser diseñado.

Para verificar el cumplimiento de la propiedad de cooperatividad en los observadores propuestos, se aplicaron las herramientas matemáticas-computacionales presentadas en el capítulo anterior. Primeramente, definimos el conjunto de valores de $J(z)$ en (5.7) para este ejemplo:

$$J_1^2(z) + (b_1 + c_1) J_1(z) + b_1 c_1 + J_2^2(z) + (b_2 + c_2) J_2(z) + b_2 c_2 \leq 0$$

donde $b_1 = -5, c_1 = 5, b_2 = 0, c_2 = 5$. Esta expresión matemática representa geoméricamente una elipse, cuyos ejes coordenados están dados por $J_1(z)$ y $J_2(z)$, como se muestra en la figura 6.8.

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

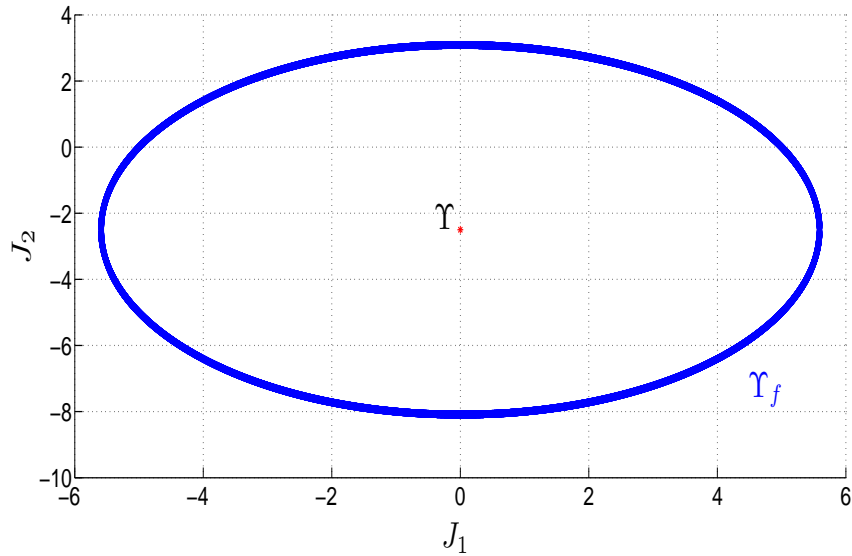


Fig. 6.8: Conjunto de valores $J(z)$ proporcionado por el sistema Σ_A

En este ejemplo, la propiedad de cooperatividad será asegurada en los observadores propuestos, si la condición (5.5) se cumple en todos los valores de la frontera del conjunto $J(z)$, Υ_f , lo cual constituye un número infinito de cálculos. Por ende, se ha propuesto en el capítulo anterior la construcción de un par de aproximaciones del conjunto Υ_f , mediante un polígono inscrito en Υ_f y un polígono que circunscribe a dicho conjunto. El primero está definido por la envolvente convexa de los vértices de la elipse Υ

$$\Delta = \begin{bmatrix} -5.5901 & -2.5 \\ 5.5901 & -2.5 \\ 0 & -8.0901 \\ 0 & 3.090 \end{bmatrix}$$

aunado con valores que pertenecen a Υ_f . Estos valores serán tomados en cuenta en la restricción (5.5), y son parte fundamental del análisis de cooperatividad, ya que forman una condición necesaria para diseñar observadores que preservan el orden.

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

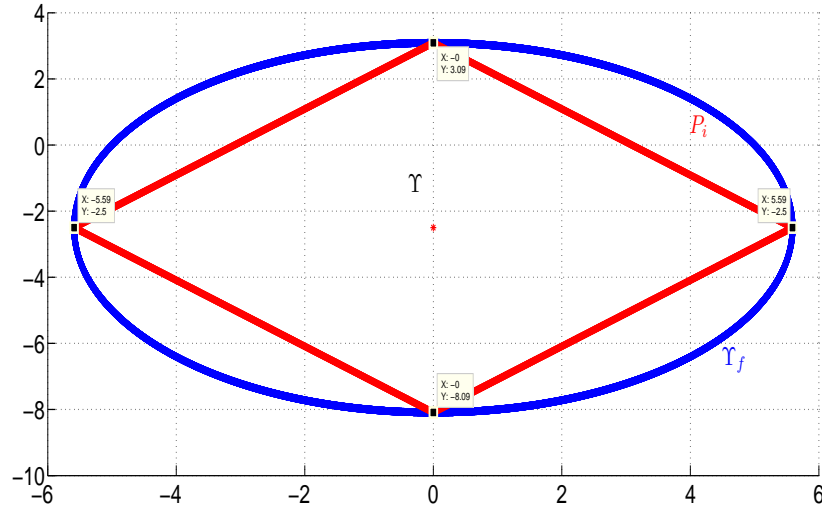


Fig. 6.9: Polígono P_i inscrito en el conjunto Υ_f .

La segunda aproximación consiste en la creación del polígono que circunscribe al conjunto de valores de $J(z)$, P_c . Este polígono está formado por la intersección de hiperplanos soportes al conjunto de $J(z)$, que en este caso particular son segmentos de recta tangentes a los vértices de Υ . Los vértices del polígono P_c son obtenidos por la intersección de los hiperplanos soportes:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 5.5901 & 3.0901 \\ -5.5901 & 3.0901 \\ -5.5901 & -8.0901 \\ 5.5901 & -8.0901 \end{bmatrix}$$

y también son parte primordial del análisis de cooperatividad; la segunda condición en el Teorema 11 indica que la matriz Jacobiana $M(z)$ será cumplida en los valores de Ω , ya que proporcionan una condición suficiente para asegurar la cooperatividad en los observadores que han sido propuestos en este trabajo (ver Fig. 6.10).

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

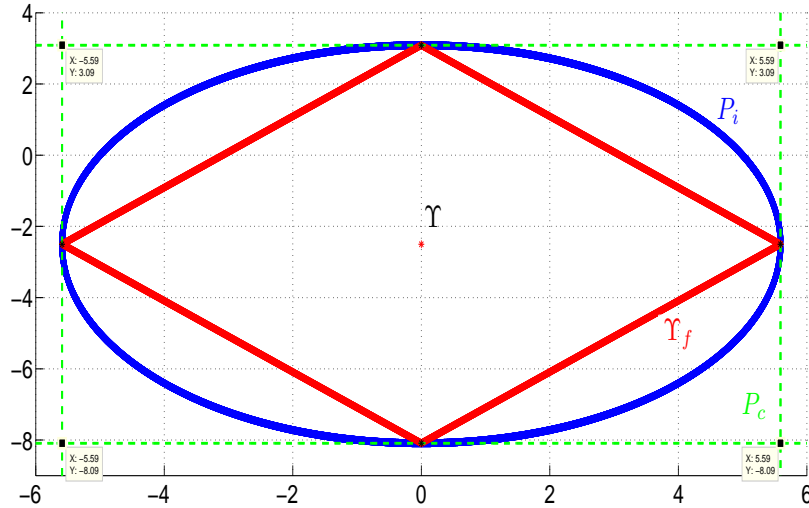


Fig. 6.10: Polıtopo P_c que circunscribe al conjunto Υ

Las simulaciones presentadas en la figura 6.11 muestran que el comportamiento dinámico tanto del sistema Σ_A como de los observadores cooperativos, cuyas estimaciones acotan dinámicamente por encima y por debajo al estado (x) . Es claro ver que la velocidad de convergencia de las estimaciones de la variable medible (x_1) es mucho más rápida que la de las variables no medibles (x_2, x_3) , para ambos observadores cooperativos. Para los observadores las matrices de diseño son $L = L^+ = L^-$, $N = N^+ = N^-$, $P = P^+ = P^-$ y $\epsilon = \epsilon^+ = \epsilon^-$. Las condiciones iniciales de los observadores son $\hat{x}_0^+ = (1, 1, 1)$, $\hat{x}_0^- = (0.1, 0.1, 0.1)$

En la figura 6.12 se presenta el comportamiento de los errores de estimación de los observadores cooperativos. Es fácil ver que el error de estimación para x_1 converge a cero mucho más rápido que los errores para x_2 y x_3 .

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

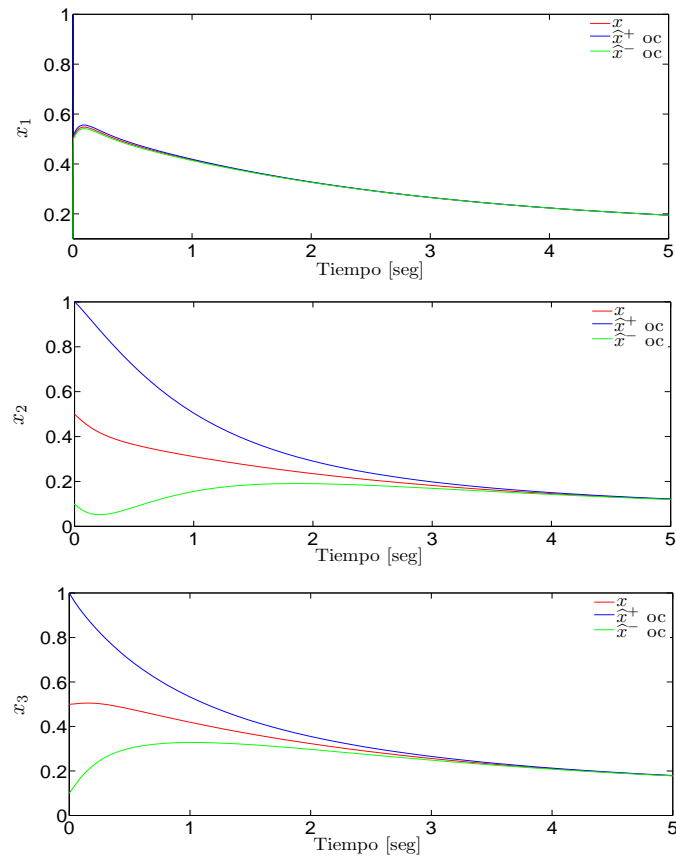


Fig. 6.11: Comportamiento dinámico del sistema Σ_A y de estimados de los observadores cooperativos.

Es importante mencionar que la condición de cooperatividad en el Teorema 10 es satisfecha mediante las aproximaciones politópicas de P_i y P_c , considerando las matrices de diseño L y N obtenidas de los programas computacionales Matlab, Penbmi-Yalmip. En el apéndice A se muestra el algoritmo computacional utilizado para calcular las matrices de diseño y verificar las condiciones de cooperatividad para el presente ejemplo. Si algún vértice de la aproximación P_c no hubiera satisfecho la condición de

6.1. DISEÑO GENERAL DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

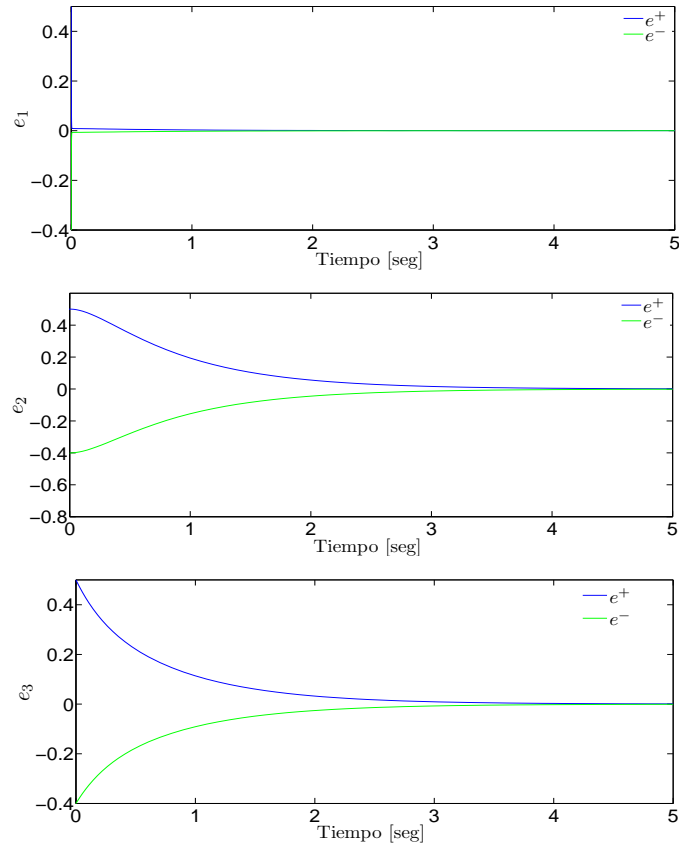


Fig. 6.12: Comportamiento dinámico de los errores de estimación.

cooperatividad, entonces se realiza un proceso de refinamiento que consiste en hallar vértices cercanos que cumplan con dicha condición. Si un vértice de P_i no cumple con la condición de cooperatividad, entonces no es posible construir observadores que preserven el orden, ya que los valores que pertenecen P_i también pertenecen al conjunto frontera Υ_f , y estos representan condiciones necesarias para el cumplimiento de la cooperatividad.

6.2. DISEÑO DE OBSERVADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL RADIO DE ESTABILIDAD

6.2. Diseño de observadores utilizando el método del radio de estabilidad

El funcionamiento de los observadores disipativos y que preservan el orden ha sido probado en algunas simulaciones numéricas, y también ha sido validado experimentalmente en el sistema de tres tanques.

6.2.1. Ejemplo 1: Sistema no lineal

Objetivo del ejemplo. Se desea diseñar un observador cooperativo con la finalidad que sus estimados acoten dinámicamente a las trayectorias del estado tanto por arriba como por abajo. Esto se debe realizar con un único diseño del observador cooperativo. Adicionalmente, se pretende comparar con un observador en lazo abierto

Para ilustrar la metodología de diseño de los observadores disipativos y de los que preservan el orden, utilizando el método del radio de estabilidad se considera el siguiente ejemplo académico.

$$\Sigma_x \begin{cases} \dot{x}_1 = -18x_1 + 14x_2 + f(x_2) \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 3x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (6.7)$$

donde $f(x_2) = \frac{1}{1+x_2^2}$. El estado del sistema está dado por $x = [x_1, x_2]^T$.

Primeramente, el sistema no lineal Σ_x tiene que ser llevado a la forma de los sistemas Π_S, Π_O, Π_E . Para ello, las matrices de Π_S, Π_O, Π_E están definidas por

$$A = \begin{bmatrix} -18 & 14 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ H = [0 \ 1], \quad C = [1 \ 0], \\ f(\sigma) = (\sigma) = \frac{1}{1 + \sigma^2}$$

La no linealidad $\phi(\sigma, z) = f(\sigma) - f(\sigma + z) = \frac{1}{1+\sigma^2} - \frac{1}{1+(\sigma+z)^2}$ es (Q, S, R) -D = $(-1, 0, 0.2109)$ -D con $\gamma = 0.4593$ es decir, $\phi \in [-0.6495, 0.6495]$.

6.2. DISEÑO DE OBSERVADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL RADIO DE ESTABILIDAD

Las matrices de diseño del observador cooperativo son obtenidas a través del software comercial Penbmi/Tomlab junto con el analizador Yalmip 3.0:

$$L = 1 \times 10^7 \begin{bmatrix} -9,4 \\ 4,3 \end{bmatrix}, \quad N = 0$$

tal que el Teorema 12 es satisfecho y un observador cooperativo puede ser diseñado. El diseño del observador cooperativo se desarrolla utilizando la relación del radio de estabilidad con el método de disipatividad ($\|H_N A_L^{-1} G\|^{-1} > \gamma$), derivando las restricciones que contemplan a las variables de diseño para el cumplimiento del Teorema 12:

- Para garantizar la estabilidad, las matrices de diseño cumplen con:
 - A_L sea Metzler, se requiere que $l_2 \geq -1$,
 - A_L sea Hurwitz, es necesario que $21 > l_1$, y $2.8571 - 0.2142l_1 > l_2$
 - $H_N \succeq 0$, lo que implica que $N \geq 0$

- Para garantizar cooperatividad:

$M(z)$ sea Metzler, se requiere que $l_2 \geq -1$.

Las condiciones anteriores muestran que el diseño de un observador disipativo es análogo al de un observador cooperativo, debido a la similitud de las restricciones. Es posible comparar los resultados teóricos entre los observadores propuestos, con un observador en lazo abierto, $L = 0$ y $N = 0$. A continuación se presenta la comparación entre los resultados obtenidos para este par de observadores.

$$\begin{array}{ccc} \|H_N(A_L)^{-1}G\|^{-1} & \geq & \|HA^{-1}G\|^{-1} \geq \gamma \\ 962.3636 & > & 40 & > & 0.4593 \end{array}$$

En particular, en este ejemplo el radio de estabilidad con inyección de salida (dado por el observador cooperativo) se incrementa en comparación con el radio de estabilidad sin

6.2. DISEÑO DE OBSERVADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL RADIO DE ESTABILIDAD

inyección de salida (el observador en lazo abierto) a través de la ganancia L , siempre y cuando se garantice que la matriz A_L sea Metzler y Hurwitz. Lo anterior se debe a que la matriz de ganancia se considera un grado de libertad para el radio de estabilidad con inyección de salida.

Los valores propios de la parte lineal de los observadores son

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= [-18.81, \quad -2.1185] \\ \lambda(A_L) &= [-35.84, \quad -2.9531]\end{aligned}$$

En este caso, nótese que el valor propio dominante (-2.9531) del observador cooperativo es mayor que el valor propio dominante del observador sin inyección de salida (-2.1185), lo que resulta que *la velocidad de convergencia del observador con inyección de salida es más rápida que la del observador sin inyección*.

Por otro lado, si la matriz de ganancia tiene elementos no negativos, por ejemplo con $L^+ = [3.5, 1.01]$, entonces el radio de estabilidad con inyección de salida se reduce en comparación con la constante γ ,

$$\begin{aligned}\|HA^{-1}G\|^{-1} &\geq \|H_N(A_{L^+})^{-1}G\|^{-1} && \geq \gamma \\ 40 &> 7.6418 && > 0.4593\end{aligned}$$

Los valores propios están ubicados en:

$$\lambda(A_{L^+}) = [-16.5732 \quad -0.9268]$$

De lo anterior se observa que el observador en lazo abierto convergerá más rápido que el observador cooperativo con la matriz de ganancia no negativa. Esto se debe a que (ver. pag 24):

Si A es una matriz Metzler entonces, $\mu(A) \leq \mu(A_{L^+})$, $L \succeq 0$.

6.2. DISEÑO DE OBSERVADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL RADIO DE ESTABILIDAD

Es decir, el valor propio de Frobenius del observador cooperativo es mayor o igual que el valor propio de Frobenius del observador en lazo abierto. Por lo tanto, al proponer una matriz de ganancia con elementos no negativos se tiene el inconveniente de reducir el radio de estabilidad con respecto al del observador sin inyección de salida, incluso con respecto a la cota γ .

En las figuras 6.13 y 6.14 se muestra el comportamiento del radio de estabilidad ($\|H_N A_L^{-1} G\|^{-1} > \gamma$) para el sistema en lazo cerrado, con respecto a las matrices de diseño L y N , tomando en cuentas las restricciones anteriores para la construcción de observadores cooperativos.

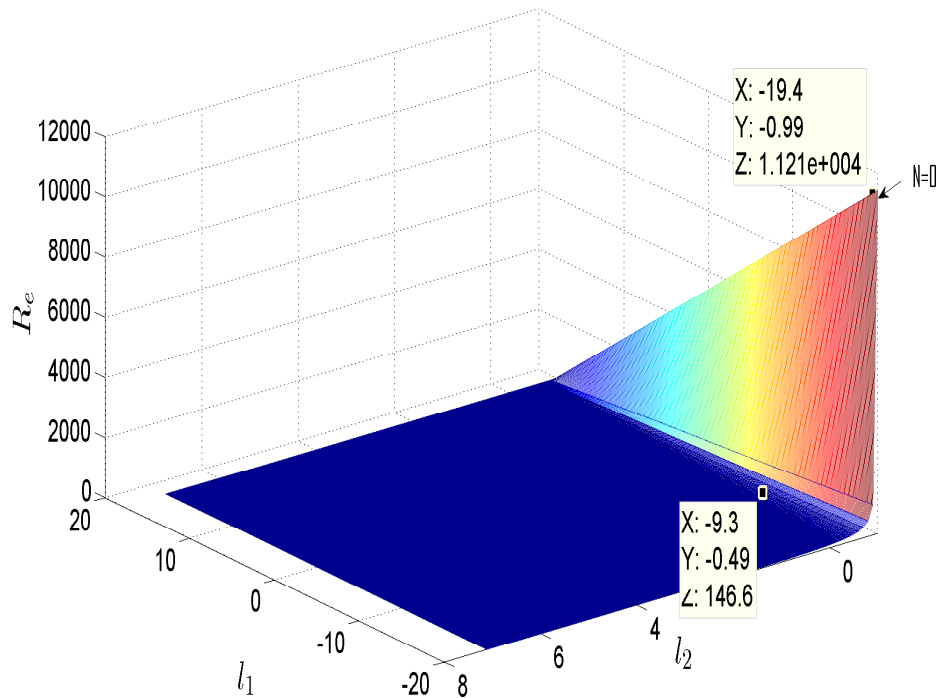


Fig. 6.13: Comportamiento del radio de estabilidad vs las ganancias L y N .

6.2. DISEÑO DE OBSERVADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL RADIO DE ESTABILIDAD

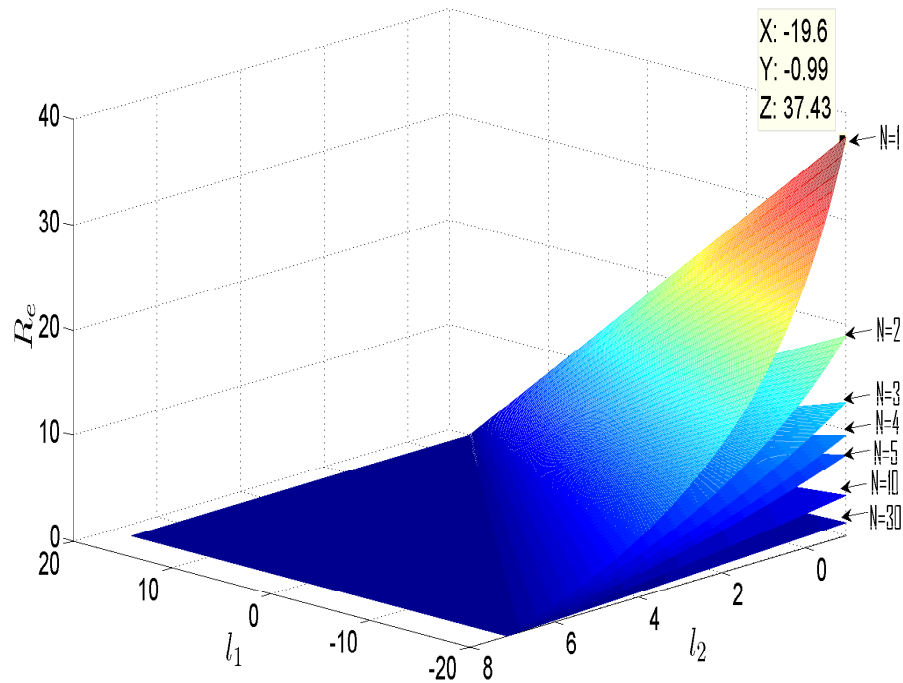


Fig. 6.14: Comportamiento del radio de estabilidad vs las ganancias L y N .

A continuación se muestran los resultados obtenidos en simulación. En las figuras 6.15 y 6.16 se realiza la comparación de un observador cooperativo con un observador en lazo abierto [$L = 0^T$]. Es fácil ver que la velocidad de convergencia del observador cooperativo es más rápida que la del observador en lazo abierto. Debido a la propiedad de simetría del observador cooperativo no es necesario hacer otro diseño para que el estado esté acotado dinámicamente por debajo, ya que este diseño está resuelto por el diseño del observador cooperativo con el estimado por arriba. Por lo tanto, las matrices de diseño del estimador por encima del estado satisfacen al observador con el estimado por debajo y como consecuencia, la velocidad de convergencia y el radio de estabilidad en ambos estimadores son los mismos.

6.2. DISEÑO DE OBSERVADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL RADIO DE ESTABILIDAD

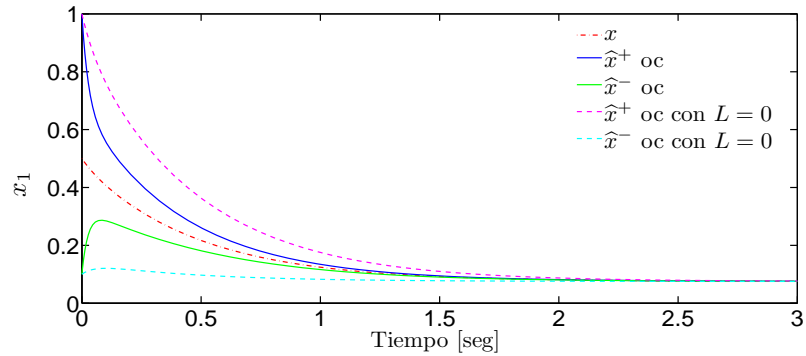


Fig. 6.15: Estimado del observador cooperativo y del observador en lazo abierto para x_1 .

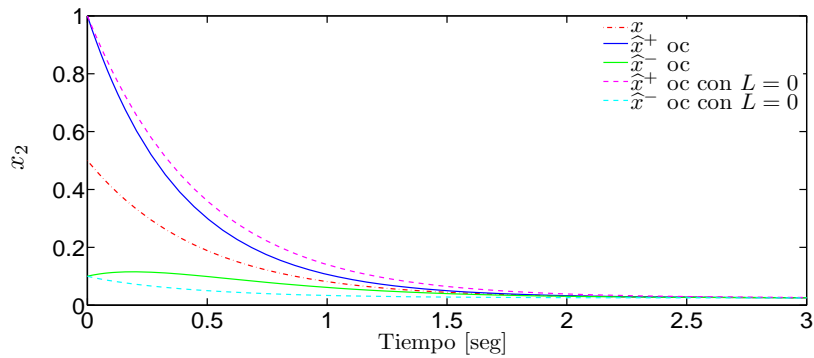


Fig. 6.16: Estimado del observador cooperativo y del observador en lazo abierto para x_2 .

En las figuras 6.17 y 6.18 se realiza la comparación de un observador cooperativo, que tiene matrices de diseño no negativas, con un observador en lazo abierto [$L = 0^T$]. En este caso, se observa que la velocidad de convergencia del estimador cooperativo es más lenta que la del del observador en lazo abierto.

6.2.2. Ejemplo 2: Sistema caótico de Chua

Considere el sistema eléctrico caótico de Chua, donde su modelo matemático es descrito en el ejemplo no. 2 de la sección previa. A continuación se presentan el diseño

6.2. DISEÑO DE OBSERVADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL RADIO DE ESTABILIDAD

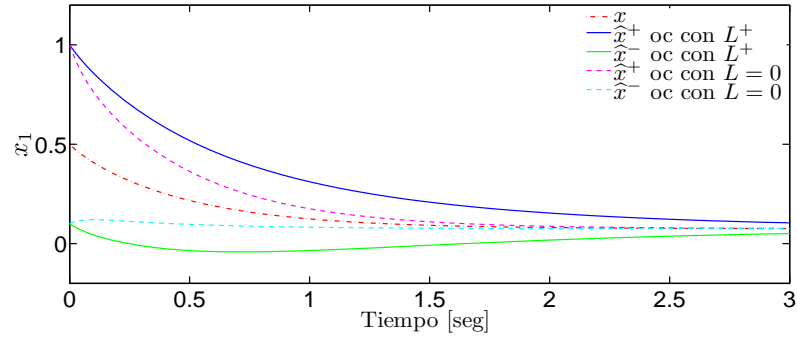


Fig. 6.17: Estimado del observador cooperativo y del observador en lazo abierto para x_1 .

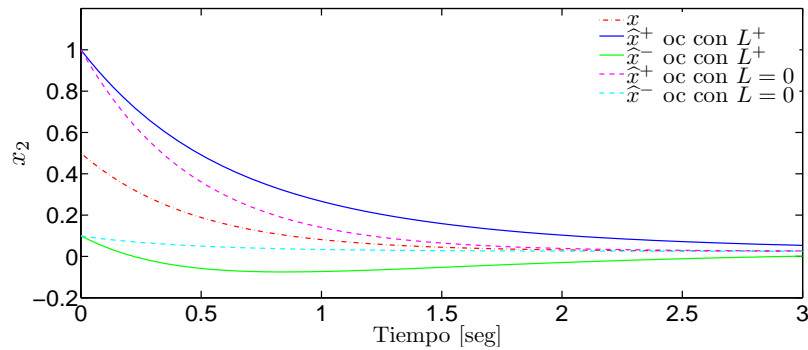


Fig. 6.18: Estimado del observador cooperativo y del observador en lazo abierto para x_2 .

del observador disipativo y de los observadores que preservan el orden.

Diseño de observador cooperativo

Para este diseño Π_S , Π_0 , y Π_E son considerados. El estado inicial es $x_0 = [-0,1, 0,2, 0,005]$. Las matrices of Π_S , Π_0 , and Π_E están dadas en el ejemplo no.2 de las sección anterior Así que, la función no lineal es $f(\sigma) = [|\sigma + 1| - |\sigma - 1|]$. Los valores de los parámetros son los mismos del ejemplo de Chua de la sección previa. La no linealidad $\phi(\sigma, z) = [|\sigma + 1| - |\sigma - 1|] - [|\sigma + z + 1| - |\sigma + z - 1|]$ is (Q, S, R) -D = $(-1, 0, 2)$ -D, es decir, $\phi \in [-2, 2]$, donde la constante $\gamma = 1$. Las matrices

6.2. DISEÑO DE OBSERVADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL RADIO DE ESTABILIDAD

de diseño del observador disipativo son obtenidas a través del software comercial de Penon/Tomlab:

$$L = \begin{bmatrix} -10 \\ -154 \\ 15 \end{bmatrix}, N = [0]$$

así que las restricciones del Teorema 12 son satisfechas. Entonces, el observador cooperativo puede ser construido. El diseño del observador cooperativo se desarrolla utilizando la relación del radio de estabilidad con el método de disipatividad ($\|H_N A_L^{-1} G\|^{-1} > \gamma$), derivando las restricciones que contemplan a las variables de diseño para el cumplimiento del Teorema 12:

- Para garantizar la estabilidad, las matrices de diseño cumplen con:
 - A_L sea Metzler, se requiere que $l_1 \geq -11.85$, y $l_3 \geq 14.9$
 - A_L sea Hurwitz, es necesario que $l_2 < 4.7265$, y $7.7731 - 3.7265l_2 - l_1 > l_3$
 - $H_N \succeq 0$, lo que implica que $N \geq 0$
- Para garantizar cooperatividad:
 - $M(z)$ sea Metzler, se requiere que $l_1 \geq -11.85$, y $l_3 \geq 14.9$.

Tomando en cuenta los parámetros del sistema y las matrices de diseño, el radio de estabilidad está dado por

$$\begin{aligned} \|H_N(A_L)^{-1}G\|^{-1} &\geq \gamma \\ 1.3462 &> 1 \end{aligned}$$

En este ejemplo, el radio de estabilidad con inyección de salida (dado por el observador cooperativo) se incrementa de forma limitada con respecto a la cota γ . En las figuras 6.19 se muestra el comportamiento del radio de estabilidad ($\|H_N A_L^{-1} G\|^{-1} > \gamma$) para

6.2. DISEÑO DE OBSERVADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL RADIO DE ESTABILIDAD

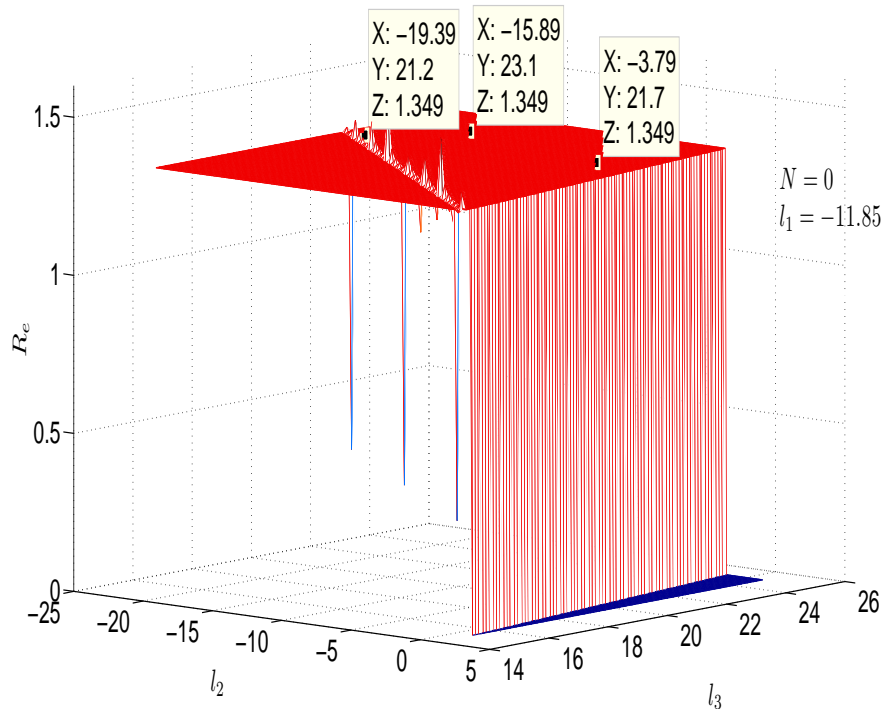


Fig. 6.19: Comportamiento del radio de estabilidad vs las ganancias L y N .

el sistema en lazo cerrado, con respecto a las matrices de diseño L y N , tomando en cuenta las restricciones anteriores para la construcción de observadores cooperativos.

Los valores propios de la parte lineal de los observadores son

$$\lambda(A_L) = [-10.94, -3.19, -0.27]$$

Las condiciones anteriores muestran que el diseño de un observador disipativo es afín al de un observador cooperativo, debido a la similitud de las restricciones. Como consecuencia de las restricciones que se deben cumplir en la matriz A_L , la convergencia de los estimados de los observadores propuestos tienen un comportamiento asintótico limitado. Mediante la propiedad de simetría de los observadores propuestos, es posible obtener simultáneamente un par de observadores cooperativos: una estimación por

6.2. DISEÑO DE OBSERVADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL RADIO DE ESTABILIDAD

encima y por debajo de la trayectoria del estado con una inicialización adecuada. Entonces, $L = L^+ = L^-$, $N = N^+ = N^-$, y $\hat{x}_0^+ = (3, 3, 3)$, $\hat{x}_0^- = (-3, -3, -3)$.

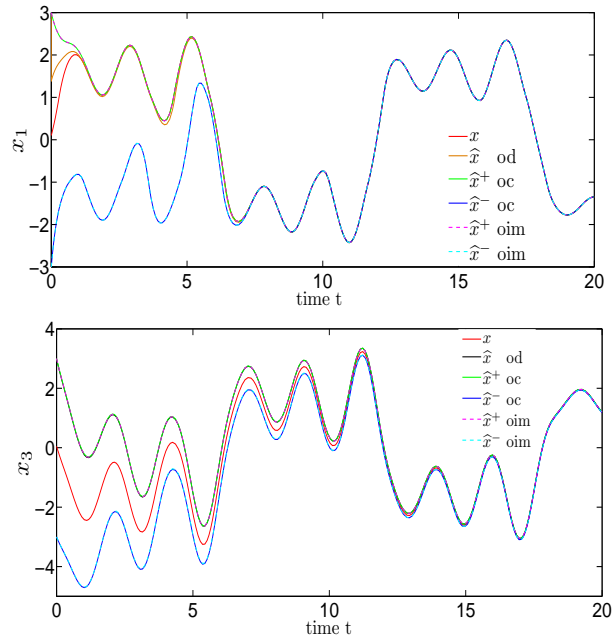


Fig. 6.20: Comportamiento dinámico del sistema de Chua, del observador disipativo (od) y del observador cooperativo, y de un observador intervalo (oim).

El observador cooperativo propuesto es comparado con un observador intervalo de Moisan y Bernard (2006), con valores para el diseño del estimador $\Theta = [-\alpha \ 0 \ \beta]$. En la figura 6.20 se ilustra el comportamiento dinámico del sistema de Chua, del observador disipativo (od), de los observadores cooperativos propuestos aquí, y estimadores propuestos en (Moisan y Bernard, 2006) (oim). Es fácil ver que la convergencia del observador cooperativo es similar que la del observador intervalo propuesto en (Moisan y Bernard, 2006). El punto atractivo aquí es que la metodología del observador cooperativo unifica algunos métodos de diseño de los observadores intervalo.

6.2. DISEÑO DE OBSERVADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL RADIO DE ESTABILIDAD

6.2.3. Ejemplo 3: Validación experimental en el sistema tres tanques

El observador disipativo y los observadores que preservan el orden han sido validados experimentalmente en el sistema clásico de tres tanques del modelo de Amira DTS200 (ver Figura 6.3) para ilustrar su comportamiento y propiedades. Este sistema puede ser visto como un prototipo de muchas aplicaciones industriales. El estado del sistema está

Diseño del observador disipativo

Para este diseño Π_S , Π_0 , y Π_E son considerados. El modelo matemático del sistema de tres tanques, las condiciones iniciales, los flujos de entrada y de las válvulas, así como los parámetros del sistema están dados en el ejemplo no. 4 de la sección anterior. Las matrices del observador disipativo son obtenidas por el software de Tomlab:

$$L = \begin{bmatrix} -15 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, N = [0 \quad 2]$$

así que las restricciones del Teorema 11 son satisfechas y un observador disipativo puede ser diseñado.

Diseño del observador cooperativo

Para este diseño Π_S , Π_0 , Ψ_E son considerados. Las matrices A , G , C , H , y las no linealidades $f(\sigma)$ están en el diseño del ejemplo no. 4 de la sección previa. Para este observador, las soluciones son:

$$L = \begin{bmatrix} -15 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 5 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, N = [0 \quad 2]$$

Entonces las restricciones del Teorema 12 son satisfechas y un observador cooperativo puede ser diseñado. Adicionalmente, es posible obtener simultáneamente un

6.2. DISEÑO DE OBSERVADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL RADIO DE ESTABILIDAD

par de observadores cooperativos con el mismo diseño: un estimado por encima y otro por debajo de la trayectoria del estado, teniendo una inicialización adecuada. Entonces, $L = L^+ = L^-$, $N = N^+ = N^-$, $\hat{x}_0^+ = (0.22m, 0.13m, 0.016m)$, y $\hat{x}_0^- = (0.07m, 0.02m, -0.05m)$.

La validación experimental del observador disipativo (od) y de los observadores cooperativos (oc) es presentada en la figura 6.21. Es claro ver que el observador disipativo converge más rápido que los observadores cooperativos. Esto es esperado, ya que el observador cooperativo además de satisfacer la propiedad de disipatividad tiene que satisfacer la cooperatividad. No necesariamente la estimación del observador disipativo debe preservar el orden.

Diseño del observador intervalo

Para este diseño $\Psi_S, \Psi_0, \Psi_{E^+}$ y Ψ_{E^-} son considerados. Las matrices A, G, C, H , y la no linealidad $f(\sigma)$ están en el diseño del observador disipativo. Para este observador, las soluciones son las mismas que el diseño del observador cooperativo, es decir, $L = L^+ = L^-$ y $N = N^+ = N^-$. Entonces las restricciones del Teorema 14 son satisfechas y los observadores intervalo se han diseñado.

Adicionalmente, una fuga de agua en el tercer tanque es considerada ($\pi(t, x) \in \mathbb{R}^3$; $\pi_1 = 0, \pi_2 = 0$ y sólo es tomado en cuenta π_3). Tal fuga no será más grande que $\pi_3^+ = -0.0005$ y menor que $\pi_3^- = -0.0009$. Por lo que, se satisface (4.3).

La figura 6.22 muestra el comportamiento del observador intervalo que acota por encima y por debajo a x_3 , apesar de la perturbación o incertidumbre de la fuga de agua (π_3). Además, el tercer estimado de Ψ_{O^-} indica cuando el tercer tanque está apunto de vaciarse, antes de que pase realmente. Así que este estimado proporciona una señal de alarma al sistema de control con la finalidad de evitar daños o accidentes en el sistema de tres tanques.

6.2. DISEÑO DE OBSERVADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL RADIO DE ESTABILIDAD

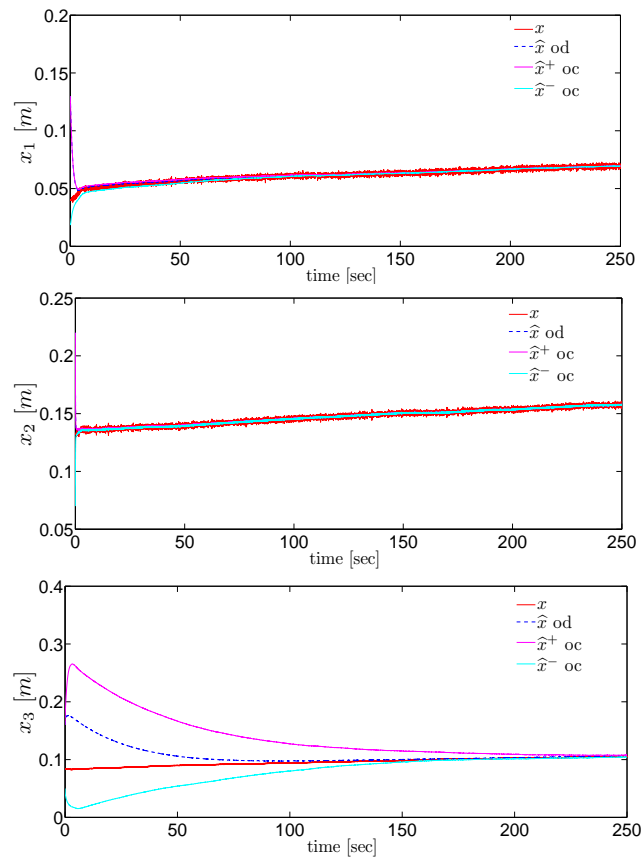


Fig. 6.21: Comportamiento del sistema de tres tanques en x_3 , del observador disipativo (od) y de los observadores cooperativos (oc).

6.2. DISEÑO DE OBSERVADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL RADIO DE ESTABILIDAD

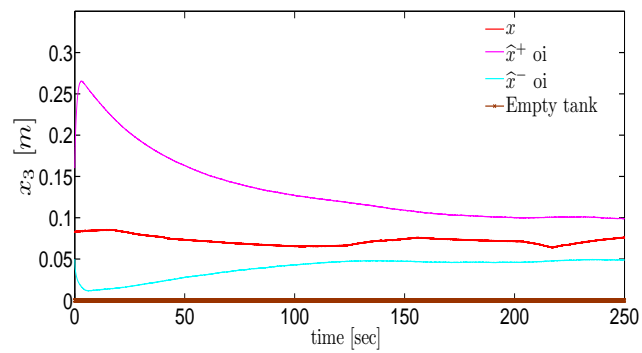


Fig. 6.22: Comportamiento del sistema de tres tanques en x_3 en presencia de una fuga y del observador intervalo

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta una metodología de diseño de los observadores que preservan el orden, para una amplia clase de sistemas no lineales, en ausencia y presencia de perturbaciones e incertidumbres, utilizando el método de disipatividad con la propiedad sistémica de cooperatividad. La metodología asegura teóricamente que los estimados de los observadores que preservan el orden están siempre por encima o por debajo de la trayectoria del estado, tomando en cuenta una adecuada inicialización, y convergen asintóticamente a sus valores verdaderos, en el caso libre de perturbaciones. Los observadores que preservan orden aunados con la convergencia del error de estimación cero se definen en este trabajo como observadores cooperativos.

La metodología propuesta es ampliada para utilizar sistemas no lineales con perturbaciones aditivas. En este caso perturbado, la cooperatividad en los sistemas de los errores de estimación juega un rol crucial, requiriendo un par de observadores de estados que contienen términos de corrección conocidos, para asegurar esta propiedad. Sin embargo, la convergencia converge a una vecindad de sus valores verdaderos. Estos estimadores son definidos en este proyecto como observadores intervalo convergentes.

En los capítulos 3 y 4 se proporcionan un par de algoritmos de diseño de los observadores que preservan el orden. El primero representa el diseño general de los estimadores propuestos, el cual está caracterizado por una Desigualdad Matricial No Lineal, dada por el método de disipatividad, y por una desigualdad Matricial Lineal, dada por la condición de cooperatividad. Para este diseño, se necesitan encontrar cuatro variables. El segundo algoritmo es un diseño particularizado, que combina el método disipativo con la teoría del radio de estabilidad de los sistemas positivos, con el propósito de

simplificar dicho diseño mediante la sustitución de la Desigualdad Matricial No Lineal por un cálculo sencillo. En este diseño se requiere hallar solo un par de variables.

Un estudio minucioso de la factibilidad del diseño general de los observadores que preservan se muestra en el capítulo 5, donde son resueltas un par de dificultades. La primera consiste en el desacoplamiento de las variables de las desigualdades mencionadas, cuando se intenta resolverlas de forma simultánea. Para esto, se propone que el diseño de los observadores que preservan el orden se ha reducido a la solución de una BMI y una LMI. El segundo problema hace referencia a la condición de cooperatividad, donde se requiere resolver un número infinito de LMI's. La solución a esta dificultad es que debe de solucionar un conjunto finito de LMI's, cuando es considerada una función multivariable en el sistema, y solamente un número finito de LMI's, cuando se trata de una función escalar. El diseño de estos observadores fue desarrollado en software comercial Penon/Tomlab.

Finalmente, en el capítulo 6 se valida experimentalmente la metodología de diseño de los observadores propuestos en el sistema de tres tanques del modelo de Amira DTS-200, y es probado con algunos ejemplos que han sido utilizados en la literatura de los observadores intervalo.

APÉNDICE

A. ALGORITMO COMPUTACIONAL

En este apéndice se presenta el algoritmo computacional que fue utilizado en el ejemplo 5 del capítulo anterior para la aplicación de la metodología de diseño de los observadores que preservan el orden (Avilés y Moreno, 2009; ?).

Definición de los parámetros del sistema

En esta parte del programa se definen todos los parámetros del sistema no lineal, el cual es llevado a la forma de Π_s

```
clc
clear all

disp( ' INSTITUTO DE INGENIERÍA - UNAM ');
disp( ' DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y COMPUTACIÓN ');
disp( ' ');
disp( ' PROGRAMA PARA DISEÑAR OBSERVADORES...
...      QUE PRESERVAN EL ORDEN      ');
disp( ' ');
disp( ' ');
disp( '      INGRESA LOS DATOS DE TU SISTEMA ');
disp( ' ');
disp( ' ');

disp('MATRIZ A:');
A=input('A=');
```

```

disp(' ');
[nA,mA]=size(A);
while nA~=mA
disp(' ');
disp('LA MATRIZ A DEBE SER CUADRADA!!!')
disp(' ');
disp('MATRIZ A:');
A=input('A=');
disp(' ');
[nA,mA]=size(A);
end
disp('MATRIZ G:');
G=input('G=');
disp(' ');
[nG,mG]=size(G);
while nA~=nG
disp(' ');
disp('LA MATRIZ G NO TIENE LA DIMENSIÓN ADECUADA!!!')
disp(' ');
disp('MATRIZ G:');
G=input('G=');
disp(' ');
[nG,mG]=size(G);
end
disp('MATRIZ C:');
C=input('C=');
disp(' ');
[nC,mC]=size(C);
while nA~=mC

```

```

disp(' ');
disp('LA MATRIZ C NO TIENE LA DIMENSIÓN ADECUADA!!')
disp(' ');
disp('MATRIZ C:');
C=input('C=');
disp(' ');
[nC,mC]=size(C);
end
disp('MATRIZ H:');
H=input('H=');
disp(' ');
[nH,mH]=size(H);
while mH~=mC
disp(' ');
disp('LA MATRIZ H NO TIENE LA DIMENSIÓN ADECUADA!!')
disp(' ');
disp('MATRIZ H:');
H=input('H=');
disp(' ');
[nH,mH]=size(H);
end

```

Definición de la no linealidad $f(\sigma)$

Aquí se define el tipo de no linealidad que utiliza el sistema no lineal. Además, se desarrolla el conjunto de valores de $J(z)$, Υ .

```

clc
disp('QUE TIPO DE FUNCIÓN f(z) TIENE TU SISTEMA?')
disp(' 1. f: R -> R')
disp(' 2. f: R^n -> R')

```

```

disp(' 3. f: R^n -> R^m' )
disp(' ')
nolinealidad=input('>> Opción: ');
if nolinealidad==2
disp('PROPORCIONA LOS SECTORES [K1,K2]:');
K1=input('K1= ');
disp(' ');
K2=input('K2= ');
%%%%%%%%% CONDICIÓN DE SECTOR %%%%%%%%%%
    S= 0.5*(K1+K2) *(1.2*K23)/2      % 0.4683
    R= -0.5*(K1'*K2+K2'*K1)
    Q= -eye(nA-mG)

syms xx yy A B
b1 =-5; c1 =5;
b2 = 0; c2 =5;
xc1=-(b1+c1)/2;
xc2=-(b2+c2)/2;
a=sqrt(((b1-c1)/2)^2+((b2-c2)/2)^2)
b=sqrt(((b1-c1)/2)^2+((b2-c2)/2)^2);
F=((xx-xc1)/a).^2+ ((yy-xc2)/b).^2-1;
hold on
x0=[xc1;xc2];
plot(xc1, xc2,'r*')
x=0;
gamma=(x+b1)*(c1+x);
x_min=-0.5*(c1+b1)-0.5*sqrt((c1-b1)^2+(c2-b2)^2);
x_max=-0.5*(c1+b1)+0.5*sqrt((c1-b1)^2+(c2-b2)^2);
%%%%%%%%% CONJUNTO J(z)%%%%%%%%%

```

```

contador1=0;
for x= x_min:0.0001:x_max
contador1=contador1+1;
    if gamma<0.25*(b2-c2)^2
%       disp('Se cumplio la parte positiva');
%       roots=solve(f);
% raices = vpa(roots,4);
yM1(contador1)=-0.5*(c2+b2)+0.5*sqrt((b2-c2)^2+4*(x-b1)*(c1-x));
yml(contador1)=-0.5*(c2+b2)-0.5*sqrt((b2-c2)^2+4*(x-b1)*(c1-x));
xe(contador1)=x;
end
end
yy1=[yml;yM1];
plot(xe,yy1,'b*')
hold on

```

Definición de los polítopos P_i y P_c

En esta parte se definen los vértices de los polítopos P_i y P_c , que serán considerados en la condición de cooperatividad.

```

%%%%%%%%%%
pp11= 1/(((b1-c1)/2)^2+((b2-c2)/2)^2);
pp12=0;
pp21=0;
pp22= 1/(((b1-c1)/2)^2+((b2-c2)/2)^2);
PP=[pp11 pp12; pp21 pp22]
sqrt(eig(inv(P)))
eigP=eig(P);val_P=sqrt(1./eigP)
%%%%%%%%%% vértices de P_i %%%%%%%%%%
x0=[xc1 xc2]

```

```

DELTA=[x0-[sqrt(1./eigP(1)) 0]
x0+[sqrt(1./eigP(1)) 0]
x0-[0 sqrt(1./eigP(2))]
x0+[0 sqrt(1./eigP(2))]
%%%%%Politopo P_i%%%%%%%%%
contador=0;
for lambda= 0:0.001:1
contador=contador+1;
h1(:,contador)=lambda*(v1)+(1-lambda)*v4;
h2(:,contador)=lambda*(v1)+(1-lambda)*v3;
h3(:,contador)=lambda*(v3)+(1-lambda)*v2;
h4(:,contador)=lambda*(v2)+(1-lambda)*v4;
end
%%%%% politopo P_C %%%%

syms yy xx
ccc=0.0000000000000001;
p11a=diff(F,xx);
p11a=subs(p11a,vertices(1,1)+ccc);
p11b=diff(F,yy);
p11b=subs(p11b,vertices(1,2)+ccc);
p21a=diff(F,xx);
p21a=subs(p21a,vertices(2,1)+ccc);
p21b=diff(F,yy);
p21b=subs(p21b,vertices(2,2)+ccc);
p31a=diff(F,xx);
p31a=subs(p31a,vertices(3,1)+ccc);
p31b=diff(F,yy);
p31b=subs(p31b,vertices(3,2)+ccc);

```

```

p41a=diff(F,xx);
p41a=subs(p41a,vertices(4,1)+ccc);
p41b=diff(F,yy);
p41b=subs(p41b,vertices(4,2)+ccc);
contador1=0;
xxe=0;
for xxx= 2*x_min:0.0001:2*x_max
    contador1=contador1+1;
    m1=-(p11a/p11b);
    bb1=(p11a/p11b)*vertices(1,1)+vertices(1,2);
    m2=-(p21a/p21b);
    bb2=(p21a/p21b)*vertices(2,1)+vertices(2,2);
    m3=-(p31a/p31b);
    bb3=(p31a/p31b)*vertices(3,1)+vertices(3,2);
    m4=-(p41a/p41b);
    bb4=(p41a/p41b)*vertices(4,1)+vertices(4,2);
    yyy1(1,contador1)= m1*xxx+bb1;
    yyy2(1,contador1)= m2*xxx+bb2;
    yyy3(1,contador1)= m3*xxx+bb3;
    yyy4(1,contador1)= m4*xxx+bb4;
    xxe(contador1)=xxx;
end
%%%%%% vertices de P_c %%%%%%%
AA0= [p21a p21b; p31a p31b]
B0 = -1*[p21a*(-vertices(2,1))+ p21b*(-vertices(2,2));
        p31a*(-vertices(3,1))+ p31b*(-vertices(3,2))]
V0= inv(AA0)*B0
AA1= [p11a p11b; p41a p41b]
B1 = -1*[p11a*(-vertices(1,1))+ p11b*(-vertices(1,2));

```

```

        p41a*(-vertices(4,1))+ p41b*(-vertices(4,2))]
V1= inv(AA1)*B1
AA2= [p11a p11b; p31a p31b]
B2 = -1*[p11a*(-vertices(1,1))+ p11b*(-vertices(1,2));
        p31a*(-vertices(3,1))+ p31b*(-vertices(3,2))]
V2= inv(AA2)*B2
AA3= [p21a p21b; p41a p41b]
B3 = -1*[p21a*(-vertices(2,1))+ p21b*(-vertices(2,2));
        p41a*(-vertices(4,1))+ p41b*(-vertices(4,2))]
V3= inv(AA3)*B3

```

Definición de las condiciones de los observadores que preservan el orden En esta parte se describen las restricciones para diseñar observadores que preservan el orden, en el algoritmo computacional.

```

%%%%%%%%%%%%%RESTRICCIONES %%%%%%%%%%%%%%
F = set(DD<=0);
%set(DD<=0.005*eye(size(DD +1)))
F= F + set(norm(L,1)<=2700)
F= F + set(P>0);
%F= F + set(P>0.0001*eye(3)) % chua
%F= F + set(P([1 2 3 5])>=0.5) ;
F = F + set(eps>0);
% F + set(HN([1 2 3 4 5 6])>=0)
F = F + set(M1(EFD)>=0)
F = F + set(M2(EFD)>=0)
F = F + set(M3(EFD)>=0)
F = F + set(M4(EFD)>=0)
%F = F + set(M1O(EFD)>=0)
%F = F + set(M2O(EFD)>=0)

```

```

%F = F + set(M3O(EFD)>=0)
%F = F + set(M4O(EFD)>=0)
%
%%%%%%%%% SOLUCIONES %%%%%%%%%%
%solution = solvesdp(F)
solution = solvesdp(F, det(P), sdpsettings('solver','penbmi'))
checkset(F)
P_opt=double(P)
epsi_opt=double(epsi)
L_opt=double(L)
N_opt=double(N)
%%%%%%%%% VERIFICACION %%%%%%%%%%
vp_P=eig(P_opt)

DD1=[(A+L_opt*C)'*P_opt+P_opt*(A+L_opt*C)... ..+HN'*R*HN+epsi_opt*]
... P_opt*G-HN'*S' ; (P_opt*G-HN'*S')' ...
... Q];
vp_DD=eig(DD1)
epsi_opt=epsi_opt/2
N=N_opt
HN=H+N*C
M1= A+L_opt*C+G*DELTA(1,:) *HN
M2= A+L_opt*C+G*DELTA(2,:) *HN
M3= A+L_opt*C+G*DELTA(3,:) *HN
M4= A+L_opt*C+G*DELTA(4,:) *HN
M1= A+L_opt*C+G*OMEGA(1,:) *HN
M2= A+L_opt*C+G*OMEGA(2,:) *HN
M3= A+L_opt*C+G*OMEGA(3,:) *HN
M4= A+L_opt*C+G*OMEGA(4,:) *HN

```

BIBLIOGRAFÍA

- Alcaraz-Gonzalez, V., J. Harmand, A. Rapaport, J. Steyer, V. Gonzalez-Alvarez y C. Pelayo-Ortiz.** 2002. Software sensors for highly uncertain WWTPS: a new approach based on interval observers. *Water Res.* (36). 2515.
- Angeli, D. y D. Sontag.** 2003. Monotone control systems. *IEEE Transactions Automatic* 48(10). 1684–1698.
- Arcak, M. y P. Kokotovic.** 2001. Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica* 37(12). 1923–1930.
- Avilés, J. y J. Moreno.** 2009. Cooperative observers for nonlinear systems. *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, China* 6125–6130.
- Bastin, G. y D. Dochain.** 1990. On-line estimation and adaptive control of bioreactors. *Elsevier, Amsterdam.*
- Bernard, O. y J. Gouzé.** 2004. Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models. *Journal of Process Control* 14(3). 765–774.
- Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron y V. Balakrishnan.** 1994. *System and Control Theory.* third edn. Philadelphia: SIAM.
- Dautrebande, N. y G. Bastin.** 1999. Positive linear observers for positive linear systems. *Proceedings of the European Control Conference, Karlsruhe, Germany.* 251–260.

BIBLIOGRAFÍA

- Dochain, D., M. Perrier y B. Ydstie.** 1992. Asymptotic observers for stirred tank reactors. *Chem. Eng. Sci.* 47. 4167.
- El Ghaoui, L. y S. Niculescu.** 1999. Advances in linear matrix inequality methods in control. *SIAM. Philadelphia.*
- Gauthier, J., H. Hammouri y S. Othman.** 1992. A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors. *IEEE. Trans. Automatic Control.* 37. 875–880.
- Gauthier, J. y I. Kupka.** 2001. Deterministic observation theory and applications. *Cambridge University Press. Cambridge, UK.*
- Gouzé, J. L., A. Rapaport y M. Z. Hadj-Sadok.** 2000. Interval observers for uncertain biological systems. *Int. J. Control* 133(1-2). 45–56.
- Grünbaum, B.** 2003. *Convex polytopes*. second edn. Seattle, USA: Springer.
- Had-Sadok, M. y J. Gouzé.** 2001. Estimation of uncertain models of activated sludge processes with interval observers. *Journal of Process Control* 11(36). 299–310.
- Hinrichsen, D. y A. Pritchard.** 1986. Stability radii of linear systems. *Systems and Control Letters* 7. 1–10.
- Hirsch, M.W. and Smith, H.** 2003. Chap. competitive and cooperative systems: a mini-review lecture notes on control and information sciences 294. springer-verlag, heidelberg. Proceedings of the First Multidisciplinary Symposium on Positive Systems (POSTA 2003).
- Kalman, R. y R. Bucy.** 1961. New results in linear filtering and prediction theory. *Trans. ASME.* (83). 95–108.
- Khalil, H. K.** 2002. *Nonlinear Systems*. third edn. New York, USA: Prentice Hall.
- Kocvara, M. y M. Stingl.** 2003. Pennon. a code for convex nonlinear and semidefinite programming. *Methods and Software* 18. 317–333.

BIBLIOGRAFÍA

- Kocvara, M.** y **M. Stingl.** 2004. Penbmi, version 2.0. see www.penopt.com for a free developer version. 317–333.
- Luenberger, D.** 1971. Lyapunov functions and stability in control theory. *IEEE Trans. Automat. Control* 16. 596–602.
- Luenberger, D.** 1979. *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*. J. Wiley. New York.
- Mailleret, L.** 2004. Stabilisation globale de systèmes dynamiques positifs mal connues. Applications en biologie. *PhD thesis. Université de Nice Sophia Antipolis. France.*
- Mazenc, F.** y **O. Bernard.** 2010. Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles.. *IEEE Trans. on Aut. Control* 55(2). 523–527.
- Mazenc, F.** y **O. Bernard.** 2011. Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances.. *Automatica* 47. 140–147.
- Moisan, M.** 2007. *Synthèse d’Observateurs par Intervalles pour des Systèmes Biologiques Mal Connus*. PhD thesis. Université de Nice Sophia Antipolis. décembre 2007.
- Moisan, M.** y **O. Bernard.** 2005. Interval observers for non monotone systems. application to bioprocess models. *Proceedings of the 16th IFAC World conference, Prague, Czech Republic.*
- Moisan, M.** y **O. Bernard.** 2006. Robust interval observers for uncertain chaotic systems. *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on Decision and Control.*
- Moisan, M.** y **O. Bernard.** 2010. Robust interval observers for global lipschitz uncertain chaotic systems. *Systems & Control Letters.*
- Moreno, J. A.** 2004. Observer design for nonlinear systems: A dissipative approach. *Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control SSSC2004.*

BIBLIOGRAFÍA

- Moreno, J.** 2005. *Approximate observer error linearization by dissipativity methods*. In: T. Meurer, K. Graichen and E.D. Gilles (Eds.). *Control and observer design for nonlinear finite and Infinite dimensional systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 322.. Springer-Verlag, Berlin.
- Rajamani, R.** 1998. Observers for lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Cont.*
- Rapaport, A. y D. Dochain.** 2005. Interval observers for biochemical processes with uncertain kinetics and inputs. *Mathematical Biosciences* (192). 235–253.
- Rocha-Cózatl, E. y J. Moreno.** 2010. Dissipative design of unknown input observers for systems with sector nonlinearities.. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 21(14). 1623–1644.
- Smith, H.** 1995. Monotone dynamical systems: An introduction to the theory of competitive and cooperative systems. *American Mathematical Society*.
- Son, N. y D. Hinrichsen.** 1996. Robust syability of positive continuos time systems. *Systems and Control Letters* 17. 649–659.
- Tuan, F.** 1973. Observing the state of nonlinear dynamic systems. *Int. J. Con.*
- Tuan, H. y P. Apkarian.** 2000. Low nonconvexity-rank bilinear matrix inequalities: Algorithms and applications in robust controller and structure designs. *IEEE Trans. on Automatic Control* 11(45). 2111–2117.
- Veloso, A., I. Rocha y E. Ferreira.** 2007. Estimation of biomass concentration using interval observers in an *E. coli* fed-batch fermentation. *10th International IFAC Symposium on Computer Applications in Biotechnology. Cancún, México*.
- Vidyasagar, M.** 2002. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall.
- Willems, J.** 1972a. Dissipative dynamical systems, part I: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis. Automatica* 45. 321–351.

BIBLIOGRAFÍA

Willems, J. 1972*b*. Dissipative dynamical systems, part II: Linear systems with quadratic supply rates. *Archive for Rational Mechanics and Analysis. IEEE Trans. Automat. Contr.*