



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Conjuntos Regenerativos y Recortes  
Aleatorios

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

Tatiana Carolina González Grandón

DIRECTOR DE TESIS:  
Dr. Gerónimo Uribe Bravo

2012





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. DATOS DEL ALUMNO

González  
Grandón  
Tatiana Carolina  
56 75 19 06  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
406490335

2. Datos del Tutor Dr.

Gerónimo Francisco  
Uribe  
Bravo

3. Datos del sinodal 1

Dra.  
María Emilia  
Caballero  
Acosta

4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Víctor Manuel  
Rivero  
Mercado

5. Datos del sinodal 3

Dr.  
José Luis Ángel  
Pérez  
Garmendia

6. Datos del sinodal 4

Dr.  
Arno  
Siri  
Jegousse

7. Datos del trabajo escrito

Conjuntos Regenerativos y Recortes Aleatorios  
70 p.  
2012

A mis adorados padres, que nacieron con corazones guerreros y la vida les ha hecho luchar sin cesar.

A mi Padre que con su alma solidaria siempre me ha dado todo sin límite alguno, sobretodo cariño, estímulo y agilidad mental. Escucharte siempre ha sido un deleite. Gracias por imbuirme de tus axiomas, de la esperanza revolucionaria, del creer en el ser humano . . .

A mi Madre la mujer que más admiro, siempre hemos sido consejeras y cómplices de nuestros sueños. Con tu espíritu amoroso y fortaleza me restringiste lo necesario, me enseñaste a no dejar las cosas a medias, a apostar por metas altas, y anhelo, a dominar el poder del tercer ojo. . .

A mi eterno ídolo y hermano Marcelo, el poseedor de la energía propulsora, aquel espíritu aventurero y genuino que siempre vivirá en mi corazón. El de la risa mas ácida y contagiosa. Siempre te adelantaste a explorar lares desconocidos. Tiempo es lo único que nos separa de tí. . .

A mi hermana de sangre y alma Ximena, aquella conocedora y virtuosa de las palabras. Siempre has sido mi pepe grillo, brindándome lealtad eterna, ideas infinitas con respuestas justas, moralejas y partículas mágicas. . .

A Demian y Emilia por ser mi más grande alegría.



# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi tutor Dr. Gerónimo Uribe Bravo por introducirme a destellos lo que es la investigación matemática, por exigir el trabajar y pensar independiente, y por la forma atomizada en la que vas presentando y resolviendo los problemas matemáticos para jamás perder la capacidad de asombro.

Al gran profesor Pedro Ortega, aquel sabio ilustrado en cualquier ciencia y arte, quien me alentó a estudiar matemáticas. Al Dr. Grabinsky por enseñarme del rigor matemático y su admirable estructura al impartir clases. Al Dr. Victor Rivero por enseñarme de forma tan clara conceptos fundamentales para esta tesis. Dra. Ma. Emilia Caballero por sus valiosos consejos y guía para emprender futuros pasos.

Quiero agradecerle a mis grandes amigos. Marco Figueroa por ser de mis principales mentores en éxodos matemáticos y existenciales, por inspirarme, con tu ejemplo, a ser mejor persona. Adriana Saucedo por el vínculo interminable fijado en nuestras caminatas aleatorias cotidianas, porque invariablemente siempre estás. Dora Amador por compartir delirios, viajes traviesos y conversas que han creado espesos lazos fraternales. Octavio Arizmendi quien con sus trazos artísticos y vanidosos me alegra y con sus trazos matemáticos me ilumina. Mariana Carnalla por aquel dinamismo tan tuyo que me moviliza, porque contigo se siente un fluir de entendimiento. Alexandre Ramos por emprender vuelos y viajes al impulso de nuestra versatilidad. Andrés Villasís por ser mi gran compañero y aliado universitario. A Mercedes y Ernesto por ser parte de mi familia.

A mis compañeros de la facultad Betan, Neop, Hector, Cacho y Carlita excelentes amigos y compañeros de estudio. Hicieron que las desveladas de estudio y las tareas fuesen espacios de alegría; ojalá en un futuro trabajemos juntos de nuevo.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>ix</b>
<b>1. Recurrencia y Regeneración</b>	<b>1</b>
1.1. Los Cimientos . . . . .	1
1.2. Caminatas Aleatorias . . . . .	6
1.3. La Propiedad de Markov Fuerte . . . . .	12
1.4. Teorema de Pólya . . . . .	15
1.5. Definición Conjunto Regenerativo . . . . .	17
<b>2. Conjunto Regenerativo en Cadenas de Markov</b>	<b>21</b>
2.1. Estructura Regenerativa de una cadena de Markov . . . . .	23
2.2. El conjunto de ceros de una caminata aleatoria . . . . .	25
2.3. Recorte Aleatorio Discreto . . . . .	27
2.4. El conjunto de ceros de un Galton Watson con Inmigración . . . . .	28
<b>3. Procesos Estables y Subordinadores</b>	<b>33</b>
3.1. Procesos de Lévy . . . . .	33
3.2. Procesos Poisson Puntuales . . . . .	36
3.3. Subordinadores . . . . .	37
3.4. Conexión: Conjuntos Regenerativos y Subordinadores . . . . .	46
3.5. Estabilidad . . . . .	49
<b>4. Conjunto descubierto por Recortes Aleatorios</b>	<b>55</b>
4.1. Construcción de Mandelbrot . . . . .	55
4.2. Propiedades del Conjunto Descubierto . . . . .	61
4.3. Aplicación: movimiento browniano multidimensional . . . . .	63
<b>5. Conjunto de la extinción local de los procesos CBI</b>	<b>65</b>
5.1. El problema de Polaridad . . . . .	66



# Introducción

El interés de este trabajo se centra en conjuntos regenerativos. Un conjunto regenerativo  $\mathcal{R}$  es un subconjunto aleatorio de  $\mathbb{R}$  con la propiedad que en cualquier tiempo aleatorio, el conjunto se divide en dos piezas independientes, la derecha y la izquierda (vista desde el tiempo de paro), y cada pedazo tiene la misma distribución estadística que  $\mathcal{R}$ . La motivación principal en este tema proviene de procesos estocásticos cuyo futuro es completamente independiente de su pasado en ciertos tiempos aleatorios. Estos tiempos se llaman tiempos regenerativos y la colección de estos tiempos es un conjunto regenerativo. Si el conjunto regenerativo es discreto lo podemos ordenar, en general, sin embargo, un conjunto regenerativo puede contener un número no numerable de puntos de acumulación así como intervalos de  $\mathbb{R}$ . Por ende, este concepto es la extensión natural, para un conjunto de tiempo continuo, del concepto de “evento recurrente” introducido por [Fel71] en el caso discreto. La primera definición de conjunto regenerativo fué dada por Kingman en [Kin64], pero en esta tesis, se utilizará la definición axiomática de [FM85] y también se emplea y prueba un teorema de caracterización en [Mai71], donde Maissonneuve encontró una correspondencia entre conjunto regenerativo y la imagen de un subordinador.

El propósito principal es explorar una clase particular de estos conjuntos regenerativos, la cual construyó el padre de la teoría de los fractales Benoît Mandelbrot, como una generalización del conjunto triádico de Cantor: el conjunto descubierto por recortes aleatorios. La construcción que hace Mandelbrot en [Man72] es la siguiente:

Consideremos un conjunto de puntos en el primer cuadrante del plano euclidiano, a cada uno de estos puntos  $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  le asociamos un intervalo abierto  $(x, x + y)$ . Y consideramos la siguiente construcción, llamada conjunto descubierto por recortes aleatorios:

$$\mathcal{U} = \mathbb{R}^+ - \bigcup (x, x + y)$$

donde la unión se toma sobre todos los puntos  $(x, y)$  de un proceso Poisson en  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Uno de los problemas que Mandelbrot planteó y que Shepp [She72] resuelve es saber las condiciones bajo las cuales se puede cubrir a todo  $\mathbb{R}$ , o el caso donde se observa la construcción fractálica, cuando  $\mathcal{U} \neq \mathbb{R}$ . En este trabajo se analiza la solución a este problema, así como la estructura de  $\mathcal{U}$ , las

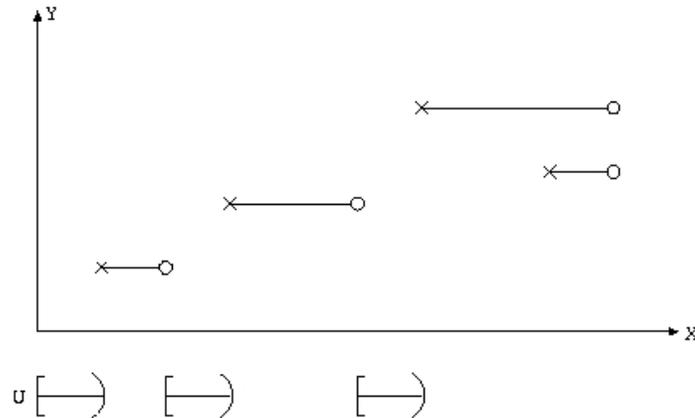


Figura 1: En esta Figura los puntos  $x$  son puntos de un P.P.P., por lo que  $x$  y  $o$  denotan respectivamente la extremidad izquierda y derecha de los intervalos que van cubriendo a  $\mathbb{R}$ . Por último, debajo de la gráfica esta la unión de intervalos que muestra el conjunto descubierto de Mandelbrot resultante.

cuales están basadas en la teoría de subordinadores y se prueban en [FFS85]. Para hacer esto más claro, se expondrá primero una versión discreta de esta construcción. Se irán presentando los temas intentando trazar un paralelismo entre el caso discreto y el continuo.

Este conjunto regenerativo que se obtiene por medio de recortes aleatorios de Mandelbrot es especial, pues es un conjunto infinitamente divisible. De ahí que surge la aplicación de estos conjuntos regenerativos obtenidos por recortes aleatorios para caracterizar al conjunto de la extinción local de los procesos de ramificación continuos con inmigración (CBI).

En el primer capítulo se definen los conceptos básicos con los que se trabajará posteriormente, sin embargo, es necesario que el lector tenga conocimiento de teoría de la medida. Se inicia con el concepto de recurrencia en caminatas aleatorias para que el lector pueda ver la generalización natural hacia la definición de conjunto regenerativo. En el capítulo dos se explora la versión discreta de los conjuntos regenerativos, siguiendo un paralelismo hacia la correspondencia de [Mai71], se demuestra una correspondencia entre conjuntos regenerativos discretos y la imagen de caminatas aleatorias no decrecientes, además se demuestra que un ejemplo de estos conjuntos lo encontramos en el conjunto de instantes en que procesos de Markov regresan a su estado inicial. Asimismo, se presenta la versión discreta del conjunto descubierto de Mandelbrot y su conexión con los procesos de ramificación Galton Watson con Inmigración. En el capítulo tres, se introduce la teoría de subordinadores y medidas de renovación, así como los teoremas importantes que posteriormente se usan en el capítulo cuatro para describir las propiedades del conjunto descubierto de Mandelbrot. En el

último capítulo se utiliza el conjunto descubierto de Mandelbrot para caracterizar al conjunto de extinción local de los procesos de ramificación continuos con inmigración (CBI).



# Capítulo 1

## Recurrencia y Regeneración

El tiempo es una componente crucial de esta realidad, todo acaece en él y por él. Los fenómenos típicos que podemos apreciar en ciertos fragmentos del tiempo son irreversibles. Cuando ocurre una explosión, los productos iniciales se consumen y es un proceso perentorio. Sin embargo, podemos reconocer en la misma temporalidad, algunos fenómenos que comparten una naturaleza especial: la recurrencia. Por ejemplo, el movimiento oscilatorio de un péndulo sin fricción; el ciclo de Carnot en termodinámica; nuestro ritmo cardiaco; y capaz, bajo ciertas creencias, la misma vida y muerte. La recurrencia significa que algo que sucede en el pasado volverá a acontecer iteradamente en el futuro. Es mediante el conjunto de tiempos de recurrencia, que se promueve y generaliza el concepto de conjunto regenerativo.

En este capítulo se presenta el esquema de procesos de Markov. En un principio, se exponen las definiciones básicas sobre las que se trabajará a lo largo de la tesis. Veremos, en el siguiente capítulo, que las caminatas aleatorias motivarán el tema de conjunto regenerativo discreto, y por ello en este capítulo nos concentraremos en sus retornos al punto de partida; se presenta el Teorema de Pólya que es un resultado pionero en el ámbito de recurrencia; por último, se define al conjunto regenerativo.

### 1.1. Los Cimientos

Empecemos recordando lo que se conoce como un espacio de probabilidad, según los axiomas dados por Kolmogorov en 1933 [Kol33].

**Definición 1.1.1.** *Una familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de un espacio  $\Omega$  es una  $\sigma$ -álgebra si*

i)  $\Omega \in \mathcal{F}$ .

ii) Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  entonces  $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

iii) Si  $A \in \mathcal{F}$  entonces  $A^c \in \mathcal{F}$

Un espacio medible es un par  $(\Omega, \mathcal{F})$  que consiste de  $\Omega$  un conjunto no vacío, y  $\mathcal{F}$  su  $\sigma$ -álgebra.

**Definición 1.1.2.** Sea  $(S, \mathcal{S})$  un espacio medible, una función  $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$  es **medible** si el conjunto

$$f^{-1}(E) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in E\} \quad (1.1)$$

pertenece a  $\mathcal{F}$  para todo  $E \in \mathcal{S}$ .

**Definición 1.1.3.** Una **medida** en  $(\Omega, \mathcal{F})$  es una función  $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- i)  $\nu(\emptyset) = 0$ .
- ii) Para toda  $A \in \mathcal{F}$  se tiene  $\nu(A) \geq 0$
- iii)  $\nu$  es  $\sigma$ -aditiva:  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  y  $A_n \cap A_m = \emptyset$  siempre que  $n \neq m$ , entonces

$$\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i).$$

**Definición 1.1.4.** Un **espacio de probabilidad** es una terna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , donde  $(\Omega, \mathcal{F})$  es un espacio de medida y  $\mathbb{P}$  es una medida de probabilidad tal que:

- i)  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$
- ii)  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

**Definición 1.1.5.** La  $\sigma$ -álgebra de Borel en un espacio topológico  $\mathbf{X}$  es la mínima  $\sigma$ -álgebra que contiene conjuntos abiertos de  $\mathbf{X}$ . La colección de todos los conjuntos de Borel en  $\mathbb{R}$ , que denotaremos por  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , es la  $\sigma$ -álgebra generada por los intervalos abiertos en  $\mathbb{R}$ .

Sabemos que una función escalar  $X$  definida en  $\Omega$  es una **variable aleatoria** si para cada  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tenemos que  $X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ .

Si estamos observando un fenómeno aleatorio es natural hablar de los sucesos que pueden ocurrir hasta un instante  $t$ . Todos estos eventos, para  $t$  fijo, forman una  $\sigma$ -álgebra contenida en la  $\sigma$ -álgebra de todos los sucesos. Para incluir este factor de tiempo en un modelo estocástico, se supone que además de la terna básica  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  se tiene una filtración.

**Definición 1.1.6.** Una **filtración** de  $(\Omega, \mathcal{F})$  es una colección de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  tal que  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  para cada  $t \in \mathbb{R}_+$  y  $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$  cuando  $0 \leq t_1 \leq t_2$ .

**Observación 1.1.7.** Al considerar dos  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}_{t_1}$  y  $\mathcal{F}_{t_2}$  tales que  $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ , se puede decir que  $\mathcal{F}_{t_2}$  contiene más información, pues tiene un mayor número de conjuntos considerados como eventos.

**Nota.** Usualmente se define un espacio de estados como un espacio medible y se utiliza la notación  $(E, \mathcal{E})$ . Nosotros usaremos  $E = \mathbb{Z}^d$  para el caso discreto y  $E = \mathbb{R}^d$  para el caso continuo. A un espacio de probabilidad filtrado lo denotaremos por  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ .

**Definición 1.1.8.** Un **proceso estocástico** es un conjunto de variables aleatorias  $\{X_t\}_{t \in T}$  definidas en el mismo espacio de probabilidad y parametrizadas por un conjunto  $T$ . Si tomamos  $T = \mathbb{N}$  se dice que el proceso es a tiempo discreto, y si  $T = \mathbb{R}_+$  es un proceso a tiempo continuo.

**Observación 1.1.9.** La teoría de procesos estocásticos procede de un afán por construir modelos matemáticos que describan fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo. Por lo que se puede interpretar a  $\Omega$  como el conjunto de resultados de un experimento aleatorio y  $\mathcal{F}$  es una estructura que agrupa eventos medibles del experimento.

**Definición 1.1.10.** Diremos que un proceso definido en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  es adaptado si la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{X_s\}_{s \leq t}$ , la cual denotamos por  $\sigma(X_s)_{s \leq t}$ , está contenida en  $\mathcal{F}_t$ . Claramente, si tenemos a la filtración canónica,  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s)_{s \leq t}$ , entonces el proceso será adaptado.

En teoría general de procesos, como dice en [Boj95], miramos a un proceso estocástico como una función de dos variables, esto es, vemos a la trayectoria como una variable aleatoria.

**Definición 1.1.11.** La trayectoria de un proceso estocástico  $\mathcal{X} : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow E$  es la sucesión  $\{X(t, \omega)\}_{t \in T}$  con  $t \in T$  dado. El proceso  $\mathcal{X} = X(t, \omega)$  es medible respecto a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_t$ .

La trayectoria corresponde a una realización u observación particular a lo largo del tiempo y es una variable aleatoria que toma valores en  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$  (en todas las funciones de valores reales).

Entre las diferentes clases de procesos estocásticos destacamos en este trabajo a las martingalas y haremos especial énfasis en los procesos markovianos.

**Definición 1.1.12.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad filtrado. Una **martingala** con respecto a una filtración dada es un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  que cumple con:

- i)  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\mathcal{F}_t$ -adaptado.  $\forall t \geq 0$ .
- ii)  $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- iii)  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad \text{siempre que } s \leq t$

Se dice que la martingala es continua cuando sus trayectorias son continuas c.s. La filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  que vamos a considerar en este trabajo, a menos que se indique otra, será la filtración canónica.

Ahora enfoquémonos en los procesos markovianos, en los cuales el comportamiento y la evolución futura del proceso no dependen más que del estado actual del proceso, y no de su evolución pasada.

**Definición 1.1.13.** Una función  $\mu : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  es un **kernel de probabilidad** si para toda  $x \in \mathbb{R}$  fija, la función  $\mu(x, \cdot)$  es una medida en  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  y para toda  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  la función  $\mu(\cdot, A)$  es medible.

**Observación 1.1.14.** Un kernel  $\mu$  es una probabilidad de transición si para toda  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\mu(x, \mathbb{R}) = 1$ .

**Definición 1.1.15.** Sea  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico y  $\mathcal{F}_t$  la filtración canónica del proceso, si para cada  $t > s \geq 0$  tenemos una probabilidad de transición  $\mu_{s,t}$ , diremos que  $X$  es un **proceso de Markov** con respecto a la filtración  $\mathcal{F}_t$  y la medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  si para toda función  $f$  medible positiva y para toda  $t > s \geq 0$  se tiene que:

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = \mu_{s,t}f(X_s)$$

Decimos que  $X$  es un proceso homogéneo si  $\mu_{s,t} = \mu_{0,t-s}$ . Para este caso definimos la función de distribución para  $x \in \mathbb{R}$  fijo:  $F(x, y, t) = \mu_t(x, (-\infty, y])$ , además definimos la densidad de transición al tiempo  $t$ , cuando ésta existe, como:

$$p(x, y, t) = \frac{d}{dy}F(x, y, t)$$

**Lema 1.1.16.** Un proceso estocástico  $X_t$  es de Markov si y sólo si para cualesquiera  $0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_n$  y  $f_i$  medible positiva se tiene que:

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{i=0}^{\infty} f_i(X_i) \right] = \int_{\mathbb{R}} \nu(dx_0) f_0(x_0) \int_{\mathbb{R}} \mu_{0t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \dots \int_{\mathbb{R}} \mu_{t_{n-1}t_n}(x_{n-1}, dx_n) f_n(x_n)$$

donde  $\nu(A) = \mathbb{P}\{X_0 \in A\}$ .

**Demostración.** Supóngase que  $X_t$  es de Markov. Usamos inducción en  $n - 1$ . Tenemos por la ley de esperanzas iteradas que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \prod_{i=0}^n f_i(X_{t_i}) \right] &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \prod_{i=0}^n f_i(X_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_{n-1}} \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \prod_{i=0}^{n-1} f_i(X_{t_i}) \mathbb{E}[f_n(X_{t_n}) \mid \mathcal{F}_{t_{n-1}}] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \prod_{i=0}^{n-1} f_i(X_{t_i}) \mu_{t_{n-1}, t_n} f(X_{t_{n-1}}) \right]. \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad se da pues  $\prod_{i=0}^{n-1} f_i(X_{t_i})$  es una función  $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$  medible y en la tercera igualdad aplicamos la propiedad de Markov al tiempo  $t_{n-1}$ . El producto de la última expresión tiene sólo  $n - 1$  factores (el último factor es  $f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) \cdot \mu_{t_{n-1}, t_n} f(X_{t_{n-1}})$ , que es función de  $X_{t_{n-1}}$ ). Por lo tanto podemos aplicar la hipótesis de inducción y vemos que la expresión anterior es igual a:

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \nu(dx_0) f_0(x_0) \int_{\mathbb{R}} \mu_{0, t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \\ &\quad \dots \int_{\mathbb{R}} \mu_{t_{n-2}, t_{n-1}}(x_{n-2}, dx_{n-1}) f_{n-1}(x_{n-1}) \int_{\mathbb{R}} \mu_{t_{n-1}, t_n} f_n(x_{n-1}) \end{aligned}$$

Para la afirmación recíproca queremos probar que para todo conjunto  $A \in \mathcal{F}_s$  y para toda función medible  $f$  se cumple que

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A f(X_t)] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mu_{s,t} f(X_s)]$$

La medida de probabilidad en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  generada por este proceso se denotará  $\mathbb{P}^X$  y su correspondiente esperanza  $\mathbb{E}$ , así tenemos que si  $Y \in \mathcal{F}$  entonces  $\mathbb{E}^X[Y] = \int_{\Omega} Y(\omega) \mathbb{P}^X(d\omega)$ , y si  $Y = \mathbf{1}_{\{X_t \in A\}}$  con  $A \in \mathcal{E}$ , esto se reduce a  $\mathbb{P}^X[X_t \in A] = P_t(x, A)$ . Más aún, para toda  $\Lambda \in \mathcal{F}$ , la función  $\mathbb{P}^X(\Lambda)$  es  $\mathcal{E}$ -medible. Si  $\Lambda = X^{-1}(A)$  esto se sigue de la ecuación anterior. El caso general se sigue por el lema de las clases monótonas, que se puede ver en la p. 2 de [Rev98], donde consideramos conjuntos de la forma:  $A = \{X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\}$ . ■

Gracias a los teoremas de aproximación para funciones medibles positivas (véase [Bar95]), utilizando el lema anterior podemos asegurar que un proceso es de Markov si y sólo si para todo  $0 < t_1 \dots < t_n$  y  $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$  se tiene que:

$$\mathbb{P}\{X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\} = \int_{\mathbb{R}} \nu(dx) \int_{A_1} \mu_{0, t_1}(x, dx_1) \dots \int_{A_n} \mu_{t_{n-1}, t_n}(X_{n-1}, dx_n)$$

Si  $X_t$  es un proceso homogéneo y existen las densidades, de lo anterior se sigue que una condición suficiente para que un proceso sea de Markov es que se cumpla:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n\} &= \\ &\int_{\mathbb{R}} \nu(dx) p(x, x_1, t_1) p(x_1, x_2, t_2 - t_1) \dots p(x_{n-1}, x_n, t_n - t_{n-1}) \end{aligned}$$

Estos resultados se pueden ver con mayor detalle en [Tud02]. Pero lo importante es que la Propiedad de Markov ahora se puede escribir como:

$$\mathbb{P}\{X_{s+t} \in A \mid \mathcal{F}_t\} = \mathbb{P}^{X_t}\{X_s \in A\} = P_s(X_t, A)$$

## 1.2. Caminatas Aleatorias

Las cadenas de Markov son procesos markovianos con espacio de estado discreto. Uno de los ejemplos más simples de cadenas de Markov son las caminatas aleatorias. Hay muchos problemas relacionados con las propiedades de las sumas de variables aleatorias que se han analizado desde el siglo XVII. El término caminata aleatoria fue acuñado por Karl Pearson quien, en 1905, publicó un problema titulado *El Problema del Caminante Aleatorio* [Pea05].

**Definición 1.2.1.** Una *caminata aleatoria* en  $\mathbb{Z}^d$  con distribución de salto  $F$  y estado inicial  $i \in \mathbb{Z}^d$  es una sucesión de variables aleatorias  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definidas sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , cuyos incrementos son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas  $\xi_i$  con distribución común  $F$ , esto es,

$$S_n = i + \sum_{i=1}^n \xi_i$$

Podemos interpretar a la caminata aleatoria  $S_n$  como la posición de una partícula después de  $n$  movimientos. Se observa que la posición de la partícula en el instante  $n + 1$  dependerá sólo de la posición en la que se encuentre en el instante  $n$ .

**Lema 1.2.2.** La caminata aleatoria  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es homogénea respecto al espacio, es decir

$$\mathbb{P}\{S_n = j \mid S_0 = i\} = \mathbb{P}\{S_n = j + b \mid S_0 = i + b\}$$

**Demostración.** Demostraremos que ambos lados de la igualdad son iguales.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_n = j \mid S_0 = i\} &= \mathbb{P}\{i + \sum_{k=1}^n \xi_k = j\} \\ &= \mathbb{P}\{\sum_{k=1}^n \xi_k = j - i\}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_n = j + b \mid S_0 = i + b\} &= \mathbb{P}\{i + b + \sum_{k=1}^n \xi_k = j + b\} \\ &= \mathbb{P}\{\sum_{k=1}^n \xi_k = j - i\}. \end{aligned}$$

■

**Lema 1.2.3.** La caminata aleatoria  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es homogénea respecto al tiempo

$$\mathbb{P}\{S_n = j \mid S_0 = i\} = \mathbb{P}\{S_{n+m} = j \mid S_m = i\}$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{S_n = j \mid S_0 = i\} &= \mathbb{P}\left\{i + \sum_{k=1}^n \xi_k = j\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^n \xi_k = j - i\right\}.\end{aligned}$$

y por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{S_{n+m} = j \mid S_m = i\} &= \mathbb{P}\left\{S_0 + \sum_{k=1}^{n+m} \xi_k = j \mid S_0 + \sum_{k=1}^m \xi_k = i\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{S_0 + \sum_{k=1}^m \xi_k + \sum_{k=m+1}^{n+m} \xi_k = j \mid S_0 + \sum_{k=1}^m \xi_k = i\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{i + \sum_{k=m+1}^{n+m} \xi_k = j\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\sum_{k=m+1}^{n+m} \xi_k = j - i\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^n \xi_k = j - i\right\}.\end{aligned}$$

La tercera igualdad es por la independencia de  $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , y la última porque son idénticamente distribuidas.  $\blacksquare$

**Lema 1.2.4.** *La caminata aleatoria  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  tiene la propiedad de Markov, es decir, para toda  $m, n \in \mathbb{N}$  y cualesquiera  $x_0, \dots, x_m, j \in \mathbb{Z}^d$  se cumple que*

$$\mathbb{P}\{S_{m+n} = j \mid S_0 = x_0, S_1 = x_1, \dots, S_m = x_m\} = \mathbb{P}\{S_{m+n} = j \mid S_m = x_m\}$$

**Demostración.** Notemos primero que, debido a la independencia de  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$

$$\mathbb{P}\{S_{n+m} = j \mid S_m = x_m\} = \mathbb{P}\left\{\sum_{i=m+1}^{n+m} \xi_i = j - x_m\right\}$$

Y usando la definición de probabilidad condicional se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\{S_{m+n} = j \mid S_0 = x_0, S_1 = x_1, \dots, S_m = x_m\} \\
&= \frac{\mathbb{P}\{S_{m+n} = j, S_m = x_m, S_{m-1} = x_{m-1}, \dots, S_0 = x_0\}}{\mathbb{P}\{S_m = x_m, S_{m-1} = x_{m-1}, \dots, S_0 = x_0\}} \\
&= \frac{\mathbb{P}\{S_{m+n} - S_m = j - x_m, S_m - S_{m-1} = x_m - x_{m-1}, \dots, S_1 - S_0 = x_1 - x_0, S_0 = x_0\}}{\mathbb{P}\{S_m - S_{m-1} = x_m - x_{m-1}, \dots, S_1 - S_0 = x_1 - x_0, S_0 = x_0\}} \\
&= \frac{\mathbb{P}\{\sum_{i=m+1}^{m+n} \xi_i = j - x_m, \xi_m = x_m - x_{m-1}, \dots, \xi_1 = x_1 - x_0, \xi_0 = x_0\}}{\mathbb{P}\{\xi_m = x_m - x_{m-1}, \dots, \xi_1 = x_1 - x_0, \xi_0 = x_0\}} \\
&= \frac{\mathbb{P}\{\sum_{i=m+1}^{m+n} \xi_i = j - x_m\} \mathbb{P}\{\xi_m = x_m - x_{m-1}\} \cdots \mathbb{P}\{\xi_1 = x_1 - x_0\} \mathbb{P}\{\xi_0 = x_0\}}{\mathbb{P}\{\xi_m = x_m - x_{m-1}\} \mathbb{P}\{\xi_{m-1} = x_{m-1} - x_{m-2}\} \cdots \mathbb{P}\{\xi_1 = x_1 - x_0\} \mathbb{P}\{\xi_0 = x_0\}} \\
&= \mathbb{P}\left\{\sum_{i=m+1}^{m+n} \xi_i = j - x_m\right\} \\
&= \mathbb{P}\{S_{m+n} = j \mid S_m = x_m\}.
\end{aligned}$$

■

Así vemos que cualquier caminata aleatoria es una cadena de Markov homogénea.

**Definición 1.2.5.** Una caminata aleatoria  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$  en  $\mathbb{Z}^d$  es **simple** y **simétrica** si

$$\mathbb{P}\{\xi_i = e_1\} = \cdots = \mathbb{P}\{\xi_i = e_d\} = \frac{1}{2d}$$

para cada uno de los  $d$  vectores unitarios  $e_j$ .

Veremos la ruta que toma una caminata aleatoria simple unidimensional, pues en el siguiente capítulo se usarán estas propiedades para la exposición de conjuntos regenerativos discretos.

**Definición 1.2.6.** Una caminata aleatoria  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$  con valores en  $\mathbb{Z}$  es **simple** si para toda  $i \in \mathbb{N}$ , la función de la distribución salto es Bernoulli  $\{-1, 1\}$ , donde  $\mathbb{P}\{\xi_i = 1\} = \rho$  y  $\mathbb{P}\{\xi_i = -1\} = 1 - \rho$ .

Los siguientes son resultados que son fáciles de verificar con argumentos geométricos y de combinatoria elementales.

**Lema 1.2.7.** Una trayectoria del origen al punto  $(a, b)$  existe solo si podemos encontrar enteros no negativos  $p$  y  $q$  tal que  $a = p + q$  y  $b = p - q$ . Similarmente, sea  $c > a$ , una trayectoria de  $(a, b)$  al punto  $(c, d)$  existe solo si podemos encontrar enteros no negativos  $p$  y  $q$  tal que  $c - a = p + q$  y  $d - b = p - q$ .

**Proposición 1.2.8.** Asumiendo que existe una trayectoria del origen al punto  $(a, b)$  entonces hay

$$\binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$$

distintas trayectorias del origen al punto  $(a, b) = (p + q, p - q)$ .

Nos concentraremos en la probabilidad que una trayectoria de una caminata regresará al origen en un cierto tiempo del futuro. Sea  $\mu_{0,n}(r)$  la probabilidad de transición que, empezando en el origen visita la posición  $r$  al tiempo  $n$ .

**Proposición 1.2.9.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $r \in \mathbb{Z}$ . Existe una trayectoria de  $(0, 0)$  a  $(n, r)$  si y solo si  $\frac{n+r}{2}$  es un entero entre 0 y  $n$ .*

**Demostración.** Supóngase que existe una trayectoria de  $(0, 0)$  a  $(n, r)$ . Por el Lema 1.2.7 existen enteros positivos  $p$  y  $q$  tal que  $p + q = n$  y que satisfacen  $0 \leq p \leq n$ . De la proposición anterior sabemos que el número de trayectorias al punto  $(n, r)$  es  $\binom{p+q}{p}$  donde

$$\begin{aligned} n &= p + q \\ r &= p - q. \end{aligned}$$

Y resolviendo estas ecuaciones simultáneas para  $p$  y para  $q$  nos da

$$p = \frac{n+r}{2}, \quad q = \frac{n-r}{2}$$

Como  $\frac{n+r}{2} = p$ , entonces,  $0 \leq \frac{n+r}{2} \leq n$ .

Ahora, supóngase que  $\frac{n+r}{2}$  es un entero entre 0 y  $n$ . Sea  $p = \frac{n+r}{2}$  y  $q = \frac{n-r}{2}$ . Inmediatamente, tenemos que  $0 \leq p \leq n$ . También

$$p + q = \frac{n+r}{2} + \frac{n-r}{2} = n \tag{1.2}$$

por ende,

- i)  $0 \leq p \leq n$  implica que  $0 \leq q \leq n$ .
- ii)  $p \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{Z}$  implica que  $q \in \mathbb{Z}$

Entonces  $p + q = n$  y  $p - q = r$ . También  $p$  y  $q$  son enteros no negativos, entonces por el Lema 1.1.23 existe una trayectoria entre  $(0, 0)$  y  $(n, r)$ . ■

Veamos explícitamente cual es la probabilidad de que una caminata aleatoria simple retorne al origen.

**Lema 1.2.10.** *Sea  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  una caminata aleatoria simétrica con valores en  $\mathbb{Z}$  y con  $S_0 = 0$ , entonces la probabilidad de un retorno al origen es*

$$\mu_{0,k}(0) = \begin{cases} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} & \text{si } k = 2n, \\ 0 & \text{si } k = 2n + 1. \end{cases}$$

**Demostración.** Usando lo anterior, el número de trayectorias, denotado  $N_{n,r}$ , desde el origen al punto  $(n, r)$  en términos de  $n$  y  $r$  es:

$$N_{n,r} = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+r}{2}} & \text{si } \frac{n+r}{2} \in \mathbb{Z} \text{ y } 0 \leq \frac{n+r}{2} \leq n, \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Como hay  $2^n$  distintas trayectorias de largo  $n$  vemos que:

$$\mu_{0,n}(r) = \mathbb{P}\{S_n = r\} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+r}{2}}$$

si  $\frac{n+r}{2} \in \mathbb{Z}$  y  $0 \leq \frac{n+r}{2} \leq n$ .

Un retorno al origen ocurre en un tiempo  $k$  si  $S_k = 0$ . Notamos que  $k$  es necesariamente par, y para  $k = 2n$  la probabilidad de un retorno al origen es  $\mu_{0,2n}(0)$ . ■

Por el uso frecuente de esta probabilidad, la denotaremos como  $u_{2n}$ . Entonces tenemos que

$$\mathbb{P}\{S_{2n} = 0\} = u_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \quad (1.3)$$

Veamos ahora la probabilidad del primer retorno al origen, denotada por  $f_{2n}$ . Pero antes veamos el siguiente lema:

**Lema 1.2.11.** *La probabilidad de que no ocurra retorno al origen hasta e incluyendo el tiempo  $2n$  es la misma que la probabilidad de que haya un retorno al origen al tiempo  $2n$ , i.e.*

$$\mathbb{P}\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0\} = \mathbb{P}\{S_{2n} = 0\} = u_{2n}$$

La demostración de este lema se puede encontrar en p.77 de [Fel71] y se sigue del principio de reflexión que se expondrá más adelante.

**Proposición 1.2.12.** *Sea  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sobre  $\mathbb{Z}$  una caminata aleatoria simple y simétrica. La probabilidad de que retorne por primera vez al origen esta dada por*

$$f_{2n} = \frac{\mathcal{C}_{n-1}}{2^{2n-1}}$$

donde  $f_{2n} = \mathbb{P}\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0\}$  y  $\mathcal{C}_{n-1}$  denota el  $(n-1)$ -ésimo número de Catalán.

**Demostración.** Tenemos por el lema anterior que

$$\mathbb{P}\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0\} = \mathbb{P}\{S_{2n} = 0\} = u_{2n} \quad (1.4)$$

De ahí que

$$u_{2n-2} = \mathbb{P}\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0\} \quad (1.5)$$

Entonces al tiempo  $2n$  la caminata o vuelve al cero o no lo hace, y estos son eventos disjuntos por lo que tenemos que

$$u_{2n-2} = \mathbb{P}\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n} \neq 0\} + \mathbb{P}\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n} = 0\} \quad (1.6)$$

similarmente,

$$u_{2n} = \mathbb{P}\{S_{2n} = 0\} = \mathbb{P}\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n} \neq 0\} \quad (1.7)$$

Finalmente, sea la definición de retorno por primera vez al origen al tiempo  $2n$

$$f_{2n} = \mathbb{P}\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n} = 0\} \quad (1.8)$$

Poniendo las ecuaciones (1.3) a (1.5) juntas adquirimos la siguiente relación

$$\begin{aligned} f_{2n} &= u_{2n-2} - u_{2n} \\ &= \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{2^{2n-2}} - \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \\ &= \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \left( \frac{1}{2n-1} \right) \\ &= \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n 2^{2n-1}} \\ &= \frac{\mathcal{C}_{n-1}}{2^{2n-1}} \end{aligned}$$

■

Así hemos convertido el problema del primer retorno al origen a un problema mucho más manejable de conteo de trayectorias en una celosía. Se muestra en [Sta99] que tal número de trayectorias es el número de Catalán  $\mathcal{C}_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ .

Ahora, las probabilidades  $u_{2n}$  y  $f_{2n}$  están relacionadas de una forma notable.

**Teorema 1.2.13.** *Para  $n \geq 1$ , las probabilidades  $\{u_{2k}\}$  y  $\{f_{2k}\}$  están relacionadas por la ecuación*

$$u_{2n} = f_0 u_{2n} + f_2 u_{2n-2} + \dots + f_{2n} u_0 \quad (1.9)$$

**Demostración.** Una visita al origen al tiempo  $2n$  puede ser un primer retorno, o bien el primer retorno sucedió antes, al tiempo  $2k < 2n$ , y el siguiente retorno por ende ocurre  $2n - 2k$  unidades de tiempo posterior. Podemos pensar a la expresión  $2^{2k} f_{2k}$  como el número de trayectorias de largo  $2k$  entre los puntos  $(0, 0)$  y  $(2k, 0)$  que no tocan el eje de las abscisas excepto en los vértices. Y vemos también que hay  $2^{2n} u_{2n}$  trayectorias que tienen vértice en  $(0, 0)$  y  $(2n, 0)$ . La colección de esas trayectorias puede partirse en  $n$  conjuntos, dependiendo del tiempo de primer retorno al origen. Una trayectoria en esta colección que tenga primer retorno al origen al tiempo  $2k$  consiste en un segmento inicial desde  $(0, 0)$

hasta  $(2k, 0)$ , en donde no se toca el eje de las abscisas, y un segmento terminal desde  $(2k, 0)$  hasta  $(2n, 0)$ , sin restricciones en este último segmento. Por ende, el número de trayectorias en la colección que tienen primer retorno al origen en el tiempo  $2k$  está dado por

$$2^{2k} f_{2k} 2^{2n-2k} u_{2n-2k} = 2^{2n} f_{2k} u_{2n-2k}$$

Si sumamos sobre  $k$ , entonces obtenemos

$$2^{2n} u_{2n} = 2^{2n} f_0 u_{2n} + 2^{2n} f_2 u_{2n-2} + \cdots + 2^{2n} f_{2n} u_0.$$

Por último, dividimos ambos lados de la ecuación por  $2^{2n}$ . ■

### 1.3. La Propiedad de Markov Fuerte

**Definición 1.3.1.** Una variable aleatoria  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  es un **tiempo de paro** con respecto a  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  si para cada  $t \in \mathbb{R}_+$  se cumple que  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

**Definición 1.3.2.** El primer **tiempo de arribo**  $T_i : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  de una cadena de Markov  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  al estado  $i \in E$  se define como:

$$T_i = \begin{cases} \min\{n \geq 1 : X_n = i\} & \text{si } \{n \geq 1 : X_n = i\} \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{si } \{n \geq 1 : X_n = i\} = \emptyset. \end{cases}$$

**Lema 1.3.3.** El primer tiempo de arribo  $T_i$  es un tiempo de paro respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Demostración.**  $T_i$  es el primer momento en el que la sucesión de variables aleatorias toma el valor  $i$ . Entonces para cualquier entero  $n$ , tenemos que

$$\{T_i = n\} = \{X_1 \neq i\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} \neq i\} \cap \{X_n = i\} \in \mathcal{F}_n. \quad \blacksquare$$

Veamos una generalización de la propiedad de Markov, la llamada Propiedad de Markov Fuerte. La cual nos dice que la independencia del pasado y el futuro dado el presente, se mantiene aun si el tiempo presente es determinado por un tiempo aleatorio, esto es, un tiempo de paro.

**Definición 1.3.4.** (Propiedad de Markov Fuerte)

Sea  $X$  un proceso de Markov con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  con kernel de transición  $\mu_{t,s}$ . Sea  $\tau$  un  $\mathcal{F}_t$ - tiempo de paro tal que  $\tau < \infty$  c.s. Entonces  $X$  es fuertemente Markoviano en  $\tau$  si

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau+t}) \mid \mathcal{F}_\tau] = \mu_{\tau, \tau+t} f(X_\tau)$$

**Teorema 1.3.5.** Sea  $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$  una cadena de Markov respecto a la filtración natural  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$  y sea  $\tau$  un tiempo de paro. Entonces, condicionado a  $\tau < \infty$  y  $X_\tau = i$ , se tiene que  $\{X_{\tau+n}\}_{n \geq 0}$  es cadena de Markov con la misma distribución que  $X$  y estado inicial  $i$  que es independiente de  $X_0, \dots, X_\tau$ .

**Demostración.** Sea  $A \in \mathcal{F}_\tau$  y  $j_0, \dots, j_n \in \mathbb{R}$ , entonces el evento  $A \cap \{\tau = m\}$  esta determinado por  $X_0, \dots, X_m$ . Por la propiedad de Markov al tiempo  $\tau = m$  tenemos que:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{A, X_\tau = j_0, \dots, X_{\tau+n} = j_n, X_\tau = i, \tau < \infty\} \\ &= \mathbb{P}\{X_\tau = j_0, \dots, X_{\tau+n} = j_n \mid A, X_m = i\} \mathbb{P}\{A, X_\tau = i, \tau = m\} \\ &= \mathbb{P}\{X_0 = j_0, \dots, X_n = j_n\} \mathbb{P}\{A, X_\tau, \tau = m\}. \end{aligned}$$

Entonces, al sumar sobre  $m = 0, 1 \dots$  nos queda

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{X_\tau = j_0, \dots, X_{\tau+n} = j_n, A, X_\tau = i, \tau < \infty\} \\ &= \mathbb{P}\{X_0 = j_0, \dots, X_n = j_n\} \mathbb{P}\{A, X_\tau = i, \tau < \infty\} \end{aligned}$$

y al dividir por  $\mathbb{P}\{X_\tau = i, \tau < \infty\}$  finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{X_\tau = j_0, \dots, X_{\tau+n} = j_n, A \mid X_\tau = i, \tau < \infty\} \\ &= \mathbb{P}\{X_0 = j_0, \dots, X_n = j_n\} \mathbb{P}\{A \mid X_\tau = i, \tau < \infty\}. \end{aligned}$$

■

**Corolario 1.3.6.** Sea  $\tau$  un tiempo de paro y  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una caminata aleatoria. Entonces, condicionado a  $\{\tau < \infty\}$ ,  $\hat{S}_n = S_{\tau+n} - S_\tau$  es una caminata aleatoria independiente de  $\mathcal{F}_\tau$  y se distribuye igual que  $\{S_n\}_{n \geq 0}$ . Lo que denotaremos como  $\hat{S}_n \stackrel{d}{=} S_n$ .

**Demostración.** Sea  $A \in \mathcal{F}_\tau$  y  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^d$ , tenemos que

$$\mathbb{P}\{\{\hat{S}_1 = x_1, \dots, \hat{S}_n = x_n\} \cap A \mid \tau < \infty\}$$

sumando sobre los valores que toma  $\tau$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{A \cap \{\tau = k\} \cap \{S_{\tau+1} - S_\tau = x_1 \dots S_{\tau+n} - S_\tau = x_n\}\}$$

sustituyendo

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{A \cap \{\tau = k\} \cap \{\xi_{k+1} = x_1, \dots, \xi_{k+1} + \xi_{k+2} + \dots + \xi_{k+n} = x_n\}\}$$

condicionando y sustituyendo

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{A \cap \{\tau = k\}\} \mathbb{P}\{\{\xi_{k+1} = x_1\} \mathbb{P}\{\xi_{k+2} = x_2 - x_1\} \dots \mathbb{P}\{\xi_{k+n} = x_n - x_{n-1}\}\}$$

como  $\{\xi\}_{i \geq 0}$  son variables aleatorias i.i.d. finalmente obtenemos

$$= \mathbb{P}\{A\} \mathbb{P}\{\xi_1 = x_1\} \mathbb{P}\{\xi_2 = x_2 - x_1\} \dots \mathbb{P}\{\xi_n = x_n - x_{n-1}\}.$$

■

**Lema 1.3.7.** Principio de Reflexión

Sea  $\{S_t\}$  una caminata aleatoria simétrica definida en  $\mathbb{Z}$ . Entonces, para cualquier entero  $j, k, r$

$$\mathbb{P}_k\{T_0 < r, S_r = j\} = \mathbb{P}_k\{S_r = -j\} \quad (1.10)$$

$$\text{y } \mathbb{P}_k\{T_0 < r, S_r > 0\} = \mathbb{P}_k\{S_r < 0\} \quad (1.11)$$

**Demostración.** Por la propiedad de Markov Fuerte, la caminata empieza de nuevo desde 0, cuando esta toca el 0, lo que implica que la caminata vista desde la primera vez que toca el cero, es independiente de su pasado y tiene la misma distribución que la caminata iniciada desde 0. Por ende, para cualquier  $s < r$  y  $j > 0$  se tiene que:

$$\mathbb{P}_k\{T_0 = s, S_r = j\} = \mathbb{P}_k\{T_0 = s\}\mathbb{P}_0\{S_{r-s} = j\}$$

La distribución de  $S_t$  es simétrica cuando inicia en 0, entonces el lado derecho del anterior es:

$$\mathbb{P}_k\{T_0 = s\}\mathbb{P}_0\{S_{r-s} = -j\} = \mathbb{P}_k\{T_0 = s, S_r = -j\}$$

sumando sobre  $s < r$ , obtenemos

$$\mathbb{P}_k\{T_0 < r, S_r = j\} = \mathbb{P}_k\{T_0 < r, S_r = -j\} = \mathbb{P}_k\{S_r = -j\}$$

Justificamos la última igualdad al notar que la caminata aleatoria que inicia desde  $k > 0$  debe pasar por 0 antes de alcanzar un entero negativo. Finalmente, sumando (1.3) sobre toda  $j < 0$  nos da (1.4). ■

Usando el primer tiempo de retorno, podemos especificar que tan probable es que una cadena de Markov retorne a un estado  $i \in E$ .

**Definición 1.3.8.** Un estado  $i \in E$  es **recurrente** si

$$\mathbb{P}_i\{T_i < \infty\} = 1$$

y es **transitorio** en otro caso.

**Proposición 1.3.9.** Para cualquier caminata aleatoria, las siguientes son equivalentes:

$$(i) \mathbb{P}_i\{T_i < \infty\} = 1$$

$$(ii) \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty$$

Aunque en esta tesis se usará el resultado solo para caminatas aleatorias, destacamos que esta proposición también cumple para Cadenas de Markov.

## 1.4. Teorema de Pólya

Por el año de 1882 el filósofo Friedrich Nietzsche le plantea a la humanidad la siguiente pregunta: “¿Qué ocurriría si, un día o una noche un demonio se deslizara furtivamente en la más solitaria de tus soledades y te dijese: Esta vida, como tú ahora la vives y la has vivido, deberás vivirla aún otra vez e innumerables veces, y no habrá en ella nunca nada nuevo, sino que cada dolor y cada placer, y cada pensamiento y cada suspiro, cada cosa indeciblemente pequeña y grande de tu vida deberá retornar a ti?”

Si aquel demonio se deslizó en las soledades del matemático George Pólya, éste intrigado lo resolvió en un artículo en francés titulado *Promenade au Hasard*, donde muestra que todo aquello que se mueva aleatoriamente en una o dos dimensiones volverá a su punto de partida, dado el tiempo suficiente; sin embargo, para dimensiones más altas no retorna. Por ende, dado que el hombre se desplaza en tres dimensiones, aunque el paseo de su vida se prolongue por toda la eternidad, será eludible aquella concepción nietzscheana del eterno retorno.

**Teorema 1.4.1.** (Caminata en una dimensión).

*Una caminata aleatoria simple y simétrica sobre  $\mathbb{Z}$  es recurrente.*

**Demostración.** Sea  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$  una caminata aleatoria con  $E = \mathbb{Z}$ , como es simple y simétrica tenemos que  $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\xi_i = -1)$ . Sea  $S_0 = 0$  entonces

$$u_{2n} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$$

la fórmula de Stirling se puede escribir como

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\lambda_{2n} - \lambda_n} 2^{2n}$$

donde  $\frac{1}{12n+1} < \lambda_n < \frac{1}{12n}$

esto implica que existen constantes  $0 < A_1 < A_2 < \infty$  tales que

$$A_1 \frac{1}{\sqrt{\pi n}} < u_{2n} < A_2 \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

La cota inferior implica que la divergencia de la serie  $\sum_n^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$  implica la divergencia de  $\sum_n^\infty u_{2n}$ . ■

**Lema 1.4.2.**  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

Esto es consecuencia del hecho combinatorio de que un subconjunto de tamaño  $n$  de un conjunto de tamaño  $2n$  se puede escoger separando el conjunto en dos de tamaño  $n$ , luego escogiendo  $k$  del primero y  $n - k$  del segundo para toda  $0 < k < n$ .

**Teorema 1.4.3.** (Caminata en dos dimensiones).

*Una caminata aleatoria simple y simétrica sobre  $\mathbb{Z}^2$  es una cadena recurrente.*

**Demostración.**

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= \sum_{k=1}^n \frac{(2k)!}{(\alpha!)^2 (k-\alpha)!^2} \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha \left(\frac{1}{4}\right)^{n-\alpha} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-\alpha} \\
&= \frac{1}{4} \binom{2n}{n} \sum_{i=1}^n \binom{2n}{n}^2 \\
&= \frac{1}{4} \binom{2n}{n}^2 \\
&= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n}\right]^2
\end{aligned}$$

Usando el mismo argumento de la demostración anterior, por la fórmula de Stirling, existen constantes  $0 < B_1 < B_2 < \infty$  tales que

$$B_1 \frac{1}{\pi n} < \left[(2^{-2n} \binom{2n}{n})\right]^2 < B_2 \frac{1}{\pi n}.$$

La cota inferior implica que la divergencia de  $\sum_n \frac{1}{n}$  implica la divergencia de  $\sum_n u_{2n}$  acorde al criterio de comparación. ■

**Lema 1.4.4.**  $\sum_{a,b=0}^{a+b=n} \left(\frac{1}{3^n} \frac{n!}{a!b!(n-a-b)!}\right) = 1$

Los términos de la suma son de una distribución trinomial y como estamos sumando sobre todos los valores posibles que la variable aleatoria con distribución trinomial puede tomar, suma uno.

**Corolario 1.4.5.**  $\sum_{a,b=0}^{a+b=n} \left(\frac{1}{3^n} \frac{n!}{a!b!(n-a-b)!}\right)^2 \leq \max_{a,b} \left\{\frac{1}{3^n} \frac{n!}{a!b!(n-a-b)!}\right\}$

**Demostración.** Tomemos la simple cota

$$\sum_{k=0}^n \gamma_k^2 \leq \max\{\gamma_k\} \sum_{k=0}^n \gamma_k$$

y la adaptamos para sumar sobre dos variables

$$\sum_{a,b=0}^{a+b=n} \gamma_{a,b}^2 \leq \max\{\gamma_{a,b}\} \sum_{a,b=0}^{a+b=n} \gamma_{a,b}$$

donde  $\gamma_{a,b} = \left(\frac{1}{3^n} \frac{n!}{a!b!(n-a-b)!}\right)$  y el resultado se sigue como consecuencia del lema anterior. ■

**Teorema 1.4.6.** (Caminata en tres o más dimensiones).

*Una caminata aleatoria simple y simétrica sobre  $\mathbb{Z}^d$  con  $d \geq 3$  es una cadena transitoria.*

**Demostración.** Sea  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $E = \mathbb{Z}^d$ ,  $d = 3$ . Tenemos que  $\mathbb{P}\{\xi_i = e_1\} = \mathbb{P}\{\xi_i = e_2\} = \mathbb{P}\{\xi_i = e_3\} = \frac{1}{6}$ .

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= \left(\frac{1}{6}\right)^{2n} \sum_{a,b=0}^{a+b=n} \frac{(2n)!}{a!b!(n-a-b)!(n-a-b)!} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \sum_{a,b=0}^{a+b=n} \left(\frac{1}{3^n} \frac{n!}{a!b!(n-a-b)!}\right)^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \max_{a,b} \left\{ \frac{1}{3^n} \frac{n!}{a!b!(n-a-b)!} \right\} \\
&\sim \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{n!}{\left(\frac{n}{3}\right)!^3}
\end{aligned}$$

La desigualdad se sigue del Corolario 1.3.5, la aproximación en la última línea es porque el máximo ocurre en  $a = b = \frac{n}{3}$ . Ahora, siguiendo la fórmula de Stirling, tenemos que existe  $0 < C_1 < \infty$  tal que  $0 < u_{2n} \leq \frac{C_1}{2} \left(\frac{3}{\pi n}\right)^{\frac{3}{2}}$ , y como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3/2}}{2\pi^{3/2}n^{3/2}} < \infty$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} < \infty$ . Una caminata aleatoria simple y simétrica también es transitoria para dimensiones mayores a tres, pues las primeras tres coordenadas conforman una caminata aleatoria en dimensión 3 que, como acabamos de demostrar, es transitoria. ■

## 1.5. Definición Conjunto Regenerativo

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Para las siguientes definiciones denotamos a  $\mathcal{C}$  como la familia de subconjuntos cerrados de  $\mathbb{R}$ , a  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{G}$  como la familia de subconjuntos compactos y de subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$ , respectivamente. Vamos a introducir el concepto de conjunto aleatorio cerrado en  $\mathbb{R}$ , por lo que es vital introducir, previamente, la medibilidad apropiada.

**Definición 1.5.1.** (Medibilidad de Effros)

Una función  $\mathcal{R} : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$  es **Effros medible** si

$$\{\mathcal{R} \in \mathcal{A}\} = \{\omega : \mathcal{R}(\omega) \cap K \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$$

para todo  $K \in \mathcal{K}$ . La  $\sigma$ -álgebra de Effros  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$  es la más pequeña  $\sigma$ -álgebra que contiene todos los conjuntos de la forma:  $\mathcal{A} = \{F \in \mathcal{C} : F \cap K \neq \emptyset\}$  para todo  $K$  compacto, esto es  $\mathcal{B}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{A})$ .

**Definición 1.5.2.** Un **conjunto aleatorio cerrado** es una función  $\mathcal{R} : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$  Effros medible, esto es,

$$\{\omega : \mathcal{R}(\omega) \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{F}$$

para todo  $\mathcal{X} \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ .

Definamos el primero punto de un conjunto  $\mathcal{R}(\omega)$  a la derecha de  $t$  como:

$$D_t = \begin{cases} \min\{u > t : u \in \mathcal{R}(\omega)\} & \text{si } \{u > t : u \in \mathcal{R}(\omega)\} \neq \emptyset. \\ +\infty & \text{si } \{u > t : u \in \mathcal{R}(\omega)\} = \emptyset. \end{cases}$$

Asimismo, definimos al conjunto trasladado como

$$(\mathcal{R} - D_t)^+ = \begin{cases} \{r - D_t : r \in \mathcal{R}, r > D_t\} & \text{si } D_t < \infty. \\ \emptyset & \text{si } D_t = +\infty. \end{cases}$$

y observamos que como  $\mathcal{R}$  es cerrado,  $(\mathcal{R} - D_t)^+ \in \mathcal{C}$  entonces  $(\mathcal{R} - D_t)^+$  es  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ -medible. Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad filtrado, donde  $\mathcal{F}_t = \sigma\{\mathcal{R} \cap [0, t]\}$ .

**Lema 1.5.3.**  $D_t$  es un  $\mathcal{F}_t$ - tiempo de paro.

**Demostración.** Tenemos que

$$\{D_t \leq s\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } s \leq t, \\ \{\mathcal{R} \cap [t, s]\} & \text{si } s > t. \end{cases}$$

Ahora, sabemos que  $\{\mathcal{R} \cap [0, s] \cap K \neq \emptyset\} \in \sigma(\mathcal{R} \cap [0, s]) = \mathcal{F}_s$  para todo  $K$  compacto, pues  $\mathcal{R} \cap [0, s]$  es Effros-medible. En particular, sea  $K = [t, s]$  entonces probamos que  $\{\mathcal{R} \cap [t, s]\} \in \mathcal{F}_s$

**Definición 1.5.4.** Sea  $\mathcal{R}$  un conjunto aleatorio cerrado.  $\mathcal{R}$  es un **conjunto regenerativo** si para toda  $t \in \mathbb{R}$  condicionado a  $D_t < \infty$  se cumple que:

$$\mathbb{E}[f(\mathcal{R} - D_t) \mid \mathcal{F}_{D_t}] = \mathbb{E}[f(\mathcal{R})]$$

para toda  $f$  continua y acotada.

**Observación 1.5.5.** Diremos que un conjunto regenerativo es discreto si tiene valores en  $\mathbb{N}$ .

Por ende, un conjunto es regenerativo si el conjunto trasladado se distribuye igual que el original,  $(\mathcal{R} - D_t)^+ \stackrel{d}{=} \mathcal{R}$  y es independiente del pasado.

**Lema 1.5.6.** Las siguientes definiciones son equivalentes:

- 1)  $\mathbb{E}[f(\mathcal{R} - D_t) \mid \mathcal{F}_{D_t}] = \mathbb{E}[f(\mathcal{R})]$  para toda  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  medible y acotada. si y solo si
- 2)  $\mathbb{P}\{(\mathcal{R} - D_t)^+ \in T, S\} = \mathbb{P}\{\mathcal{R} \in T\}\mathbb{P}\{S\}$  para toda  $S \in \mathcal{F}_t$  y  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$  si y solo si
- 3)  $\mathbb{P}\{(\mathcal{R} - D_t)^+ \cap K \neq \emptyset \mid \mathcal{F}_{D_t}\} = \mathbb{P}\{\mathcal{R} \cap K \neq \emptyset\}$  con  $K \in \mathcal{K}$ .

**Demostración.** 1)  $\rightarrow$  2).

Sean  $S \in \mathcal{F}_{D_t}$  y  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$  y sea  $f = \mathbf{1}_{\{\cdot\}}$  que es medible y acotada.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\{(\mathcal{R} - D_t)^+ \in T, S\} &= \\
 &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{(\mathcal{R}-D_t)^+ \in T\}} \mid \mathcal{F}_{D_t}] \mathbf{1}_{\{S\}}\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{(\mathcal{R}-D_t)^+ \in T\}} \mathbf{1}_S\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\mathcal{R} \in T\}}\right] \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_S\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_S \mathbb{P}\{\mathcal{R} \in T\}\right] \\
 &= \mathbb{P}\{S\} \mathbb{P}\{\mathcal{R} \in T\}
 \end{aligned}$$

Para 2)  $\rightarrow$  1) se usa que  $\exists \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  continuas y acotadas tal que  $f_n \rightarrow \mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ .  
y 2)  $\rightarrow$  3) es un argumento de clases monótonas.

**Lema 1.5.7.** *También es equivalente probar que*

$$\mathbb{P}\{(\mathcal{R} - D_t)^+ \cap \Lambda \neq \emptyset \mid \mathcal{F}_{D_t}\} = \mathbb{P}\{\mathcal{R} \cap \Lambda \neq \emptyset\}$$

para todo  $\Lambda$  abierto.

**Demostración.** Sea el conjunto abierto  $\Lambda_n = \{x \in \mathbb{R} : d(x, \Lambda) < \frac{1}{n}\}$  que decrece a  $\Lambda$  conforme  $n \rightarrow \infty$  y donde  $\Lambda_n \subset \overline{\Lambda_n} = \{x \in \mathbb{R} : d(x, \Lambda) \leq \frac{1}{n}\}$ , con  $\overline{\Lambda_n}$  un compacto. Afirmamos que  $\{\mathcal{R} \cap \Lambda \neq \emptyset\} = \bigcap_n \{\mathcal{R} \cap \Lambda_n \neq \emptyset\}$ . La contención  $\subset$  es simple pues  $\Lambda \subset \Lambda_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . La contención recíproca es consecuencia de la propiedad de intersección finita: si  $\mathcal{R} \cap \Lambda = \emptyset$  entonces la familia decreciente de compactos  $\mathcal{R} \cap \overline{\Lambda_n}$  tiene intersección vacía y por tanto debe existir algún  $n$  tal que  $\mathcal{R} \cap \Lambda_n \subset \mathcal{R} \cap \overline{\Lambda_n} = \emptyset$



## Capítulo 2

# Conjunto Regenerativo en Cadenas de Markov

Para tener una mejor noción de conjunto regenerativo lo examinamos, en esta sección, en el caso discreto. Además, analizaremos algunos ejemplos, como el conjunto de instantes de retorno al cero en dos tipos de Cadenas de Markov: en caminatas aleatorias y en procesos de Galton Watson con Inmigración. Asimismo, veremos un conjunto regenerativo discreto formado por recortes aleatorios discretos.

**Teorema 2.0.8.**  *$\mathcal{R}$  es un conjunto regenerativo discreto si y sólo si es la imagen de una caminata aleatoria no decreciente con incrementos en  $\mathbb{N}$ .*

**Demostración.** Dado  $\mathcal{R}$  un conjunto regenerativo con valores en  $\mathbb{N}$ , vamos a construir una caminata aleatoria no decreciente cuya imagen tiene la misma distribución que  $\mathcal{R}$ . Notamos que los naturales son cerrados en  $\mathbb{R}$ .

Sea  $D_n = \min\{m \geq n : m \in \mathcal{R}\}$ . Así definido,  $D_n$  cumple que  $n \in \mathcal{R}$  si y solo si  $D_n = n$ . Por ende,  $\mathcal{R} = \{n \in \mathbb{N} : D_n = n\}$ . Como  $\mathcal{R}$  es un conjunto discreto, vemos en la figura [2.1], que  $D_n$  es una función escalonada. Sea  $S_n = \min\{u \geq 0 : D_u > n\}$  el inverso de  $D_n$ . Así pues,

$$\{S_n\}_{n \geq 0} = \mathcal{R}$$

Analicemos ahora como son los incrementos de  $\{S_n\}_{n \geq 0}$ :

$$\begin{aligned} S_{n+m} &= \min\{u \geq 0 : D_u > n+m\} \\ &= S_n + \min\{r \geq 0 : D_{r+S_n} > n+m\} \\ &= S_n + \min\{r \geq 0 : S_{n+m} < r + S_n\} \\ &= S_n + \min\{r \geq 0 : S_{n+m} - S_n < r\} \end{aligned}$$

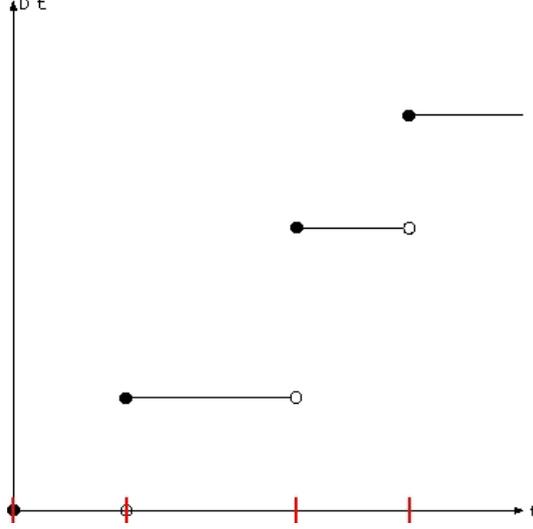


Figura 2.1: Sean los puntos rojos aquellos que pertenecen al conjunto regenerativo.

Donde en la segunda igualdad se hizo un cambio de variable y la tercera igualdad se da porque  $S_n$  es inverso de  $D_n$ , i.e.  $\{D_u > t\} = \{S_t < u\}$ . Definimos a  $\tilde{S}_m = S_{n+m} - S_n$  y a  $\tilde{D}_m$  como

$$\begin{aligned} \tilde{D}_m &= \text{mín}\{s > m : s \in (\mathcal{R} - D_{S_n})^+\} \\ &= \text{mín}\{s > m : s \in \{S_u - S_n\}_{u \geq 0}^+\} \\ &= \text{mín}\{s > m : s \in \{S_{n+m} - S_n\}_{m \geq 0}\} \\ &= \text{mín}\{s > m : s \in \{\tilde{S}_m\}\} \end{aligned}$$

Usando el hecho que  $\mathcal{R}$  es regenerativo, se tiene que  $\tilde{D}_m \stackrel{d}{=} D_m$ . Además,

$$S_{n+m} = S_n + \text{mín}\{r \geq 0 : \tilde{D}_m > r\}$$

por lo que  $S_{n+m} - S_n$  es independiente de  $\mathcal{F}_{S_n}$  y  $S_{n+m} - S_n \stackrel{d}{=} S_n$ .

Ahora probemos que la imagen de una caminata aleatoria no decreciente es regenerativa.

Sea  $\mathcal{R} = \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , y sea  $\tau_n = \text{mín}\{m \geq 0 : S_m > n\}$  un  $\mathcal{F}_n$ -tiempo de paro y  $D_n = \text{mín}\{m > n : m \in \mathcal{R}\}$ .

Es claro que  $D_n = S_{\tau_n}$ , por lo que  $\{D_n\}_{n \geq 0}$  es  $\{\mathcal{F}_{\tau_n}\}$ -adaptado.

Más aún,  $(\mathcal{R} - D_n)^+$  es el conjunto de imagenes cerradas de la caminata  $\{S_{\tau_n+m} - S_{\tau_n}\}_{m \in \mathbb{N}}$  la cual se distribuye como  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y es independiente de  $\mathcal{F}_{\tau_n}$  por el Corolario 1.2.6. Por ende,

$$\mathbb{P}\{(\mathcal{R} - D_n)^+ \cap K \neq \emptyset \mid \mathcal{F}_t\} = \mathbb{P}\{\mathcal{R} \cap K \neq \emptyset\} \text{ con } K \in \mathcal{K}.$$

■

Como los miembros de un conjunto regenerativo se pueden identificar con los valores finitos de una caminata aleatoria creciente correspondiente, es natural llamar a la distribución salto  $F = (f_1, f_2, \dots, f_\infty)$  la **distribución interarribo** del conjunto regenerativo.

**Definición 2.0.9.** Para un conjunto regenerativo discreto  $\mathcal{R}$  definimos su **medida potencial**  $U$  por

$$U(C) = \mathbb{E}(|C \cap \mathcal{R}|), \quad C \subset \mathbb{Z}^+$$

donde  $|\cdot|$  denota cardinalidad. Su derivada  $U' = (u_0, u_1, u_2, \dots)$  con respecto a una medida de conteo necesariamente existe y se llama **derivada potencial** de  $\mathcal{R}$  y de su caminata aleatoria correspondiente.

Como la variable aleatoria  $|\{t\} \cap \mathcal{R}|$  toma valores solo 0 y 1, tenemos que

$$u_t = \mathbb{E}(|\{t\} \cap \mathcal{R}|) = \mathbb{P}\{t \in \mathcal{R}\} \quad (2.1)$$

La derivada potencial de un conjunto regenerativo discreto determina la distribución interarribo de la siguiente forma:

$$f_n = u_n - \sum_{q=1}^{n-1} f_q u_{n-q} \quad (2.2)$$

$$f_\infty = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \frac{1}{\sum_{t=0}^{\infty} u_t} \quad (2.3)$$

Sabemos del teorema 1.2.13, que  $u_0 = 1$  y  $u_t = \sum_{n=1}^t f_n u_{t-n}$  para  $1 \leq t < \infty$ .

La función de distribución de un conjunto regenerativo discreto  $\mathcal{R}$  se puede escribir en términos de su distribución interarribo. Sea  $C \subset \mathbb{Z}^+$  escrito como una sucesión finita  $C = \{c_0 < c_1 < \dots < c_n\}$ , entonces

$$\mathbb{P}\{\mathcal{R} \cap \{0, 1, \dots, c_n\} = C\} = \begin{cases} \prod_{m=1}^n f_{c_m - c_{m-1}} & \text{si } c_0 = 0, \\ 0 & \text{si } c_0 \neq 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

## 2.1. Estructura Regenerativa de una cadena de Markov

Una sucesión de variables aleatorias i.i.d. es un ejemplo muy particular de una Cadena de Markov. Las variables aleatorias  $X_n$  que conforman una cadena de Markov, en general, no son independientes. Pero al usar la propiedad de

Markov Fuerte, mostraremos que podemos dividir a la cadena en pedazos i.i.d. La idea es encontrar un estado  $i$  que se visita recurrentemente, entonces el comportamiento de la cadena entre las visitas sucesivas no esta influido por el pasado ni por el futuro.

**Teorema 2.1.1.** *Los tiempos de retorno sucesivos de una Cadena de Markov a su estado inicial, forman un conjunto regenerativo discreto.*

**Demostración.** Sea  $\{X_k\}_{k \geq 0}$  una Cadena de Markov, y supóngase que  $X_0 = i$  con  $i \in E$ . Sea  $T_i^0 = 0$  el primer tiempo de arribo. Definimos a  $T_i^{(2)}$  como el tiempo de la segunda visita y recursivamente definimos

$$T_i^{(r)} = \min\{n > T_i^{(r-1)} : X_n = i\}$$

donde cada uno de estos es un tiempo de paro con respecto a la filtración canónica. Consideremos la trayectoria de la cadena entre dos visitas sucesivas al estado  $i$

$$\mathcal{X}_i^{(r)} = \{X(n, \omega) : T_i^{(r)} \leq n < T_i^{(r+1)}, r = 1, 2, \dots\}$$

Y sea también

$$\mathcal{X}_i^{(0)} = \{X(n, \omega) : 0 \leq n < T_i^{(1)}\}.$$

Observamos que  $\{\mathcal{X}_i^{(r)}\}_{r \in \mathbb{N}}$  es un conjunto de trayectorias aleatorias. Podemos referirnos a ellas como excursiones del proceso. Entonces, la cadena visita el estado  $i$  por el  $r$ -ésimo tiempo y luego se va por una  $r$ -ésima excursión  $\mathcal{X}_i^{(r)}$ , hasta que vuelve a regresar al estado  $i$ . Vemos que el tiempo que tarda la  $r$ -ésima excursión a  $i$  es:

$$S_i^{(r)} = \begin{cases} T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)} & \text{si } T_i^{(r-1)} < \infty, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Entonces, se tiene que  $\{S_i^{(r)}\}_{r \geq 1}$  es una sucesión de variables aleatorias con valores en los enteros positivos, y además son i.i.d por la Propiedad de Markov Fuerte. Por ende, la suma telescópica  $T_i^{(n)} = \sum_{r=1}^n S_i^{(r)}$  es una caminata aleatoria no decreciente con saltos naturales y por el Teorema 2.0.8 tenemos que los tiempos de retorno sucesivos de una Cadena de Markov forman un conjunto regenerativo en los naturales, i.e.  $\mathcal{R} = \{T_i^{(r)}\}_{r \geq 0}$ . ■

Encontremos ahora la distribución de estos tiempos de excursión.

**Lema 2.1.2.** *Para  $r = 2, 3, \dots$  condicionado a  $T_i^{(r-1)} < \infty$  tenemos que  $S_i^{(r)}$  es independiente de  $\{X_n\}_{n \leq T_i^{(r-1)}}$  y  $\mathbb{P}\{S_i^{(r)} = m \mid T_i^{(r-1)} < \infty\} = \mathbb{P}\{T_i = m\}$ .*

**Demostración.** Apliquemos la Propiedad de Markov Fuerte al tiempo de paro  $T = T_i^{(r-1)}$ . Entonces  $X_T = i$  con  $T < \infty$ . Por lo que condicionado a  $T < \infty$   $\{X_{T+n}\}_{n \geq 0}$  es Markov e independiente de  $\{X_t\}_{t \in \{0, 1, \dots, T\}}$ . Pero  $S_i^{(r)} = \min\{n \geq$

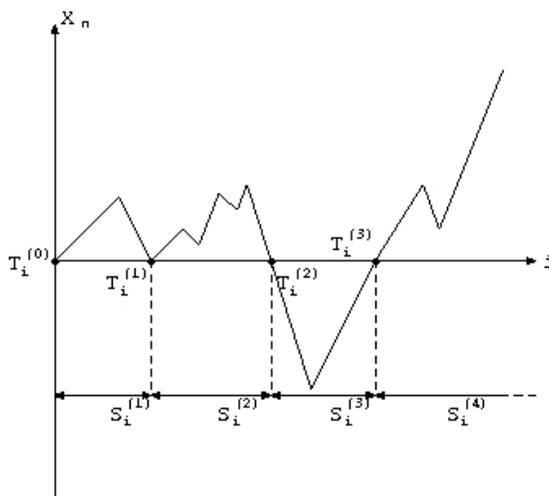


Figura 2.2:

$1 : X_{T+n} = i$  por lo que  $S_i^{(r)}$  es el primer tiempo de arribo de  $(X_{T+n})_{n \geq 0}$ . Además, por el teorema anterior, donde exponemos que  $T_i^{(n)} = \sum_{r=1}^n S_i^{(r)}$  es una caminata aleatoria no decreciente y por la proposición 1.2.12, expuesta en el capítulo previo, tenemos que:

$$\mathbb{P}\{S_i^{(r)} = m \mid T_i^{(r-1)} < \infty\} = \begin{cases} \frac{c_{n-1}}{2^{2n-1}} & \text{si } m = 2n, \\ 0 & \text{si } m = 2n - 1. \end{cases}$$

■

## 2.2. El conjunto de ceros de una caminata aleatoria

En particular, el conjunto de instantes de retorno de una caminata aleatoria al cero es un conjunto regenerativo. Es natural que ahora querramos analizar la cardinalidad de este conjunto regenerativo según las características de las caminatas. Además, en las siguientes proposiciones, se resaltaré el hecho que, un conjunto regenerativo es finito cuando existe probabilidad que nunca regrese a cero.

Definimos  $N_i = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=i\}}$  el número de visitas  $n \geq 1$  que una cadena de Markov hace al estado  $i$ . Entonces el evento  $\{N_i \geq 1\}$  es el mismo que el evento  $\{T_i < \infty\}$ . En el siguiente lema vemos que podemos calcular la distribución de  $N_i$  en términos de la probabilidad de retorno  $F_i = \mathbb{P}_i\{T_i < \infty\}$

**Lema 2.2.1.** Para  $r \in \mathbb{N}$  tenemos que  $\mathbb{P}\{N_i > r\} = F_i^r$

**Demostración.** Sea  $X_0 = i$  entonces  $\{N_i > r\} = \{T_i^{(r)} < \infty\}$ . Cuando  $r = 0$  el resultado es cierto. Supongamos inductivamente, que es cierto para  $r$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N_i > r + 1\} &= \mathbb{P}\{T_i^{(r+1)} < \infty\} \\ &= \mathbb{P}\{T_i^{(r)} < \infty, S_i^{(r+1)} < \infty\} \\ &= \mathbb{P}\{S_i^{(r+1)} < \infty \mid T_i^{(r)} < \infty\} \mathbb{P}\{T_i^{(r)} < \infty\} \\ &= F_i F_i^r \\ &= F_i^{r+1} \end{aligned}$$

■

**Proposición 2.2.2.** (Cardinalidad de Conjuntos de Ceros)

- 1) El conjunto de ceros de una caminata aleatoria simple y simétrica sobre  $\mathbb{Z}^d$  con  $d = 1, 2$  es un conjunto infinito.
- 2) El conjunto de ceros de una caminata aleatoria simple y simétrica sobre  $\mathbb{Z}^d$  con  $d \geq 3$ , es un conjunto finito.

**Demostración.**

Sea  $C$  el conjunto de ceros de  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una caminata aleatoria simple y simétrica sobre  $\mathbb{Z}^d$ . Se sigue del teorema de Pólya que

$$\mathbb{P}\{T_0 < \infty\} = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 1, 2, \\ < 1 & \text{si } d \geq 3. \end{cases}$$

Si  $\mathbb{P}\{T_0 < \infty\} = 1$ , por el lema 2.2.1,  $\mathbb{P}\{N_0 = \infty\} = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{N_0 > r\} = 1$ . Por lo que para  $d = 1, 2$  se tiene que  $|C| = \aleph_0$ .

Si  $\mathbb{P}\{T_0 < \infty\} < 1$ , por el mismo lema,

$$\mathbb{E}[N_0] = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}\{N_0 > r\} = \sum_{r=0}^{\infty} F_0^r = \frac{1}{1 - F_0} < \infty$$

Por ende  $\mathbb{P}\{N_0 = \infty\} = 0$ . Por lo que para  $d \geq 3$  se tiene que  $|C| < \infty$  c.s. ■

**Proposición 2.2.3.** El conjunto de ceros de una caminata aleatoria asimétrica es un conjunto regenerativo finito.

**Demostración.** Sea  $P_{i,i+1} = p \neq q = P_{i,i-1}$ . Sabemos que la  $\mathbb{E}\{S_n\} = n(p-q)$ . Por la Ley Fuerte de los Grandes números se cumple que

$$\mathbb{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = p - q\} = 1$$

Si  $p > \frac{1}{2}$  entonces  $p - q > 0$  por lo que  $S_n > 0$  para  $n$  suficientemente grande casi seguramente. Si  $p < \frac{1}{2}$  entonces  $p - q < 0$  por lo que  $S_n < 0$  para  $n$  suficientemente grande casi seguramente. En cualquier caso, no regresa a 0 con probabilidad positiva. ■

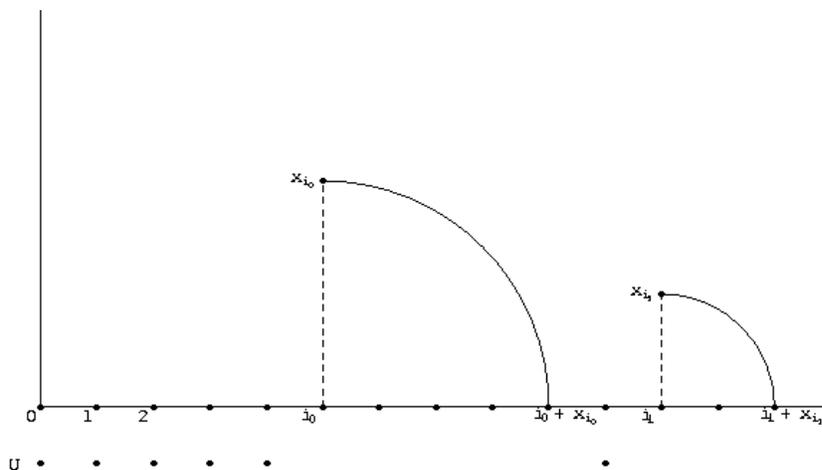


Figura 2.3: Vemos como la altura  $X_{i_0}$  es la variable aleatoria correspondiente a  $i_0$  y con ella quitamos todos los puntos  $\{i_0, \dots, i_0 + X_{i_0}\}$ , de tal forma que debajo de la gráfica se muestra el conjunto descubierto discreto resultante.

## 2.3. Recorte Aleatorio Discreto

**Definición 2.3.1.** Sea  $\{Z_i\}_{i \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias con soporte en  $\mathbb{N}$ . Un **recorte aleatorio discreto** que inicia en  $i \in \mathbb{N}$  con duración  $Z_i$  es el conjunto  $\{i, i + 1, \dots, i + Z_i\}$ .

**Definición 2.3.2.** Sea  $\{X_i\}_{i \geq 0}$  una sucesión de variables aleatorias i.i.d con soporte en  $\mathbb{N}$ . Definimos al **conjunto descubierto de naturales** como:

$$\mathcal{U} = \mathbb{N} - \bigcup_{i=0}^{\infty} \{j \in \mathbb{N} : i \leq j < i + X_i\}$$

**Nota.** Si  $r \in \mathcal{U}$ , entonces  $X_r = 0$ , pues  $\{j : r \leq j < r + X_r\} = \emptyset$ .

**Teorema 2.3.3.** El conjunto descubierto  $\mathcal{U}$  es un conjunto regenerativo discreto.

**Demostración.** Sea  $\mathcal{F}_{d_n} = \{C \in \mathcal{F}_{\infty} : C \cap \{d_n > k\} \in \mathcal{F}_k, k > 0\}$ , donde  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \dots \subset \mathcal{F}_{\infty}$ . Primero demostraremos que  $d_n = \inf\{m > n : m \in \mathcal{U}\}$  es  $\mathcal{F}_n$ -tiempo de paro.

Si  $k > n$  existe  $a \in \mathbb{N}$  tal que  $k = a + n$ . Ahora, veamos que

$$\{d_n > a + n\} = \{\mathcal{U} \cap \{n, n + 1, \dots, n + a\} = \emptyset\}$$

y por la nota anterior

$$\{\mathcal{U} \cap \{n, n + 1, \dots, n + a\} = \emptyset\} = \bigcap_{i=1}^a \{X_{i+n} > 0\}$$

por ende,

$$\{d_n > k\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } k \leq n, \\ \bigcap_{i=1}^k \{X_{i+n} > 0\} & \text{si } k > n. \end{cases}$$

por tanto,  $\{d_n > k\} \in \mathcal{F}_k$ .

Probemos ahora que  $\mathbb{P}\{(\mathcal{U} - d_n)^+ \cap K \neq \emptyset \mid \mathcal{F}_{d_n}\} = \mathbb{P}\{\mathcal{U} \cap K \neq \emptyset\}$ . Sean  $k_1 < k_2 < \dots < k_e$  tal que  $k_i \in K$  con  $K \in \mathcal{K}$  y  $m \in \mathcal{F}_{d_n}$ .

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{k_1, \dots, k_e \in (\mathcal{U} - d_n)^+ \mid \mathcal{F}_{d_n}\} \\ &= \mathbb{P}\left\{ \bigcap_{j_1 < k_1} \{X_{l+j_1} < k_1 - j_1\} \cap \{X_{k_1} = 0\} \cap_{j_2 < k_2} \{X_{l+j_2} < k_2 - j_2\} \cap \{X_{k_2} = 0\} \dots \right. \\ & \quad \left. \dots \cap_{j_e < k_e} \{X_{l+j_e} < k_e - j_e\} \cap \{X_{k_e} = 0\} \cap \underbrace{m \cap \{d_n = l\}}_{\in \mathcal{F}_{d_n}} \right\} \end{aligned}$$

como  $k_1 < \dots < k_e$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}\left\{ \bigcap_{j_e < k_e} \{X_{l+j_e} < k_e - j_e\} \cap_{i=1}^e \{X_{k_i} = 0\} \cap m \cap \{d_n = l\} \right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{ \bigcap_{j_e < k_e} \{X_{j_e} < k_e - j_e\} \cap_{i=1}^e \{X_{k_i} = 0\} \right\} \mathbb{P}\{m \cap \{d_n = l\}\} \\ &= \mathbb{P}\left\{ \bigcap_{j_1 < k_1} \{X_{j_1} < k_1 - j_1\} \cap \{X_{k_1} = 0\} \cap_{j_2 < k_2} \{X_{j_2} < k_2 - j_2\} \cap \{X_{k_2} = 0\} \dots \right. \\ & \quad \left. \dots \cap_{j_e < k_e} \{X_{j_e} < k_e - j_e\} \cap \{X_{k_e} = 0\} \right\} \mathbb{P}\{m \cap \{d_n = l\}\} \\ &= \mathbb{P}\{k_1, k_2, \dots, k_e \in \mathcal{U}\} \mathbb{P}\{m \cap \{d_n = l\}\} \end{aligned}$$

Donde la tercera igualdad se sigue de la propiedad de Markov, con  $d_n < \infty$ ,  $\{X_{d_n+j}\}_{j \geq 0} \stackrel{d}{=} \{X_j\}_{j \geq 0}$ .  $\blacksquare$

## 2.4. El conjunto de ceros de un Galton Watson con Inmigración

Ahora vamos a aplicar el conjunto regenerativo obtenido por recortes aleatorios discretos para caracterizar al conjunto de ceros de un proceso Galton Watson con Inmigración. Veremos previo a ello una pequeña introducción a este modelo.

En 1874 Francis Galton y H.W. Watson trabajaron en el problema de extinción de familias, mostrando como la probabilidad se puede aplicar al estudio del desarrollo azaroso de familias o poblaciones. Tenían como hipótesis que las familias distinguidas son más dadas a desaparecer que las ordinarias. Esta indagación dio nacimiento, después de varios años de olvido, al estudio de los procesos de ramificación.

**Definición 2.4.1.** *Un proceso Galton Watson es una sucesión de variables*

aleatorias  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $Z_0 = 1$  y

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{n,i}$$

donde  $\{\xi_{n,i}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con ley de distribución  $\rho_k = \mathbb{P}\{\xi_{i,n} = k\}$ .

$Z_n$  denota el número de individuos al tiempo  $n$ .

$\xi_{i,n}$  denota al número de descendientes directos del individuo  $i$  al tiempo  $n$ .

El proceso de Galton Watson con Inmigración es un modelo matemático que describe el crecimiento de una población, el cual consiste en un número finito de tipos de individuos, quienes se reproducen aleatoriamente, y además, tiene un componente de inmigración aleatorio en cada generación.

**Definición 2.4.2.** Sean  $\{\xi_{i,n}\}_{i,t \in \mathbb{N}}$  y  $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  familias de variables aleatorias i.i.d. con soporte en  $\mathbb{N}$  y cuyas leyes de distribución son  $\rho$  y  $\nu$  respectivamente. Definimos el proceso de **Galton Watson con Inmigración**,  $X_n$  como:

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{i,n} + \theta_n, \text{ con } X_0 = 0$$

en donde:

$X_n$  denota el número de individuos al tiempo  $n$ .

$\xi_{i,n}$  denota al número de descendientes directos del individuo  $i$  al tiempo  $n$ .

$\theta_n$  denota el número de inmigrantes al tiempo  $n$ .

**Proposición 2.4.3.** El proceso de Galton-Watson con inmigración es una cadena de Markov.

**Demostración.** Definamos una función  $f_{x_{i-1}}(\xi_{1,i}, \dots, \xi_{x_{i-1},i}, \theta_i)$  como una suma de componentes, donde su dominio esta determinado por el número de coordenadas  $x_k + 1$ . Definamos iteradamente

$$Z_1 = f_{x_0}(\xi_{1,1}, \xi_{2,1}, \dots, \xi_{x_0,1}, \theta_1), \dots, Z_n = f_{x_{n-1}}(\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \dots, \xi_{x_{n-1},n}, \theta_n)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{Z_1 = k_1, \dots, Z_n = k_n\} \\ &= \mathbb{P}\{f_{x_0}(\xi_{1,1}, \xi_{2,1}, \dots, \xi_{x_0,1}, \theta_1) = k_1, \dots, f_{x_{n-1}}(\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \dots, \xi_{x_{n-1},n}, \theta_n) = k_n\} \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\{f_{x_{i-1}}(\xi_{1,i}, \dots, \xi_{x_{i-1},i}, \theta_i) = k_i\} \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se sigue por la independencia de los vectores aleatorios.

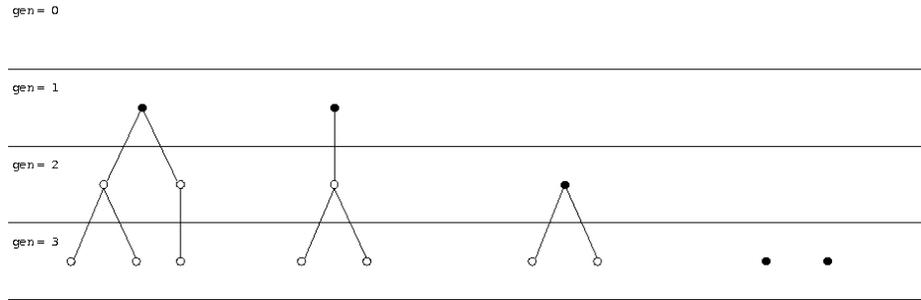


Figura 2.4: Se inicia con una población sin personas, y a cada generación llega un número aleatorio de padres y cada inmigrante da lugar a un árbol genealógico (GW).

**Proposición 2.4.4.** *Supóngase que la función generadora de  $\{\xi_{i,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es  $f(\cdot)$  y de  $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es  $g(\cdot)$ , entonces la función generadora del GWI,  $X_n$  es*

$$\mathbb{E}_k[s^{X_n}] = f(s)^k g(s) \quad (2.5)$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_k[s^{X_n}] &= \mathbb{E}_k[s^{\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{i,n} + \theta_n}] \\ &= \mathbb{E}_k[s^{\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{i,n}}] \mathbb{E}[s^{\theta_n}] \\ &= \prod_{r=1}^k \mathbb{E}_r[s^{\xi_{i,n}}] \mathbb{E}[s^{\theta_n}] \\ &= f(s)^k g(s) \end{aligned}$$

Donde la segunda y tercera igualdad se dan por la independencia de las variables aleatorias y la última porque están idénticamente distribuidas. ■

Veamos en la figura [2.4] la intención que se tiene de dar una nueva definición de procesos GWI en términos de procesos GW, donde se empaqueta el término de inmigración. Al tiempo  $n$ ,  $\theta_n$  nuevos individuos inmigran a la población y empiezan  $\theta_n$  nuevos procesos GW independientes.

**Definición 2.4.5.** *Un Galton Watson con Inmigración se puede ver como la suma de componentes de procesos Galton Watson, donde cada inmigrante  $\theta_n$  me da lugar a nuevos procesos GW independientes:  $\{Z_{i,j}(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  y  $j = 1, \dots, \theta_n$ , donde*

$$X_N = \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^{\theta_n} Z_{j,n}(N-n) \quad (2.6)$$

**Definición 2.4.6.** Decimos que ocurre extinción local al instante  $n$  si  $X_n = 0$ .

Dado que la extinción de una población modelada mediante GWI se regenera con componentes aleatorios de inmigración vemos como otro ejemplo, que las visitas al estado inicial (o cero) de esta Cadena de Markov, forma un conjunto regenerativo discreto. En el siguiente teorema, construimos un conjunto puntual cuyos recortes aleatorios discretos son los ceros de un proceso GWI.

**Definición 2.4.7.** El conjunto de tiempos de extinción de un GWI es

$$\mathcal{L} = \{n \in \mathbb{N} : X_n = 0\}$$

**Teorema 2.4.8.** El conjunto de extinciones locales tiene la misma distribución que un conjunto de recortes aleatorios.

**Demostración.**

Sea  $\{T_i\}_{i \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias i.i.d con ley  $\zeta$  y soporte en  $\mathbb{N}$  y sea  $Y_n = \max\{0, T_1, T_2, \dots, T_{\theta_n}\}$ . Donde,  $T_i$  = tiempo (en generaciones) que dura la familia del pionero  $i$ .  $Y_n$  = tiempo máximo que dura la familia de cada pionero que llegó al tiempo  $n$ . Ahora definimos al conjunto descubierto:

$$\mathcal{U}_g = \mathbb{N} - \bigcup_{i=1}^{\infty} \{j \in \mathbb{N} : i \leq j < i + Y_i\}$$

Si  $m \in \mathcal{U}_g$  entonces  $Y_m = 0$  por lo que  $\theta_m = 0$  (no llegaron inmigrantes al tiempo  $m$ ) y además implica que  $i + Y_i < m$  para toda  $i < m$ , por lo que ninguna familia dura hasta la generación  $m$ . Por ende, dado que no hay migración y la reproducción no dura hasta el tiempo  $m$ ,  $X_m = \sum_{i=1}^{m-1} \xi_{i,m} + \theta_m = 0$ , entonces  $m \in \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{U}_g \subset \mathcal{L}$ .

Si  $m \in \mathcal{L}$  entonces  $\sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^{\theta_n} Z_{j,m}(m-n) = 0$  por lo que  $\theta_n = 0$  y  $Z_i(m) = 0$  entonces  $Y_n = 0$ ,  $m \in \mathcal{U}_g$ . Entonces, tenemos por construcción que  $\mathcal{U}_g = \mathcal{L}$  y por teorema 2.3.3  $\mathcal{L}$  es un conjunto regenerativo discreto. ■



## Capítulo 3

# Procesos Estables y Subordinadores

La intención de este capítulo es introducir una familia fundamental de procesos estocásticos a tiempo continuo: los subordinadores. Se recomienda para mayor profundidad ver [Sat99], y [BB04]. La teoría aquí expuesta concierne las propiedades estadísticas de sus trayectorias. Al final del capítulo se probará la biyección entre un conjunto regenerativo y la imagen cerrada de un subordinador.

### 3.1. Procesos de Lévy

Los procesos de Lévy son procesos estocásticos cuyos incrementos en intervalos de tiempo no sobrepuestos son independientes y cuyos incrementos son estacionarios en el tiempo. Además, son continuos en probabilidad. Los procesos de Lévy constituyen una clase fundamental de procesos estocásticos, para un estudio más completo, véase [Ber98].

**Definición 3.1.1.** *Un proceso estocástico  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  tiene **incrementos independientes** si para toda  $n \geq 1$  y  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$  las variables aleatorias  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes.*

**Definición 3.1.2.** *Un proceso estocástico  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  tiene **incrementos estacionarios** si para toda  $s, t \geq 0$  la distribución de  $X_{t+s} - X_s$  no depende de  $s$ . Alternativamente, decimos que  $X$  tiene incrementos estacionarios si para toda  $0 \leq s \leq t$  se tiene que  $X_t - X_s$  es igual en distribución a  $X_{t-s}$ .*

**Definición 3.1.3.** *Un proceso estocástico  $L = \{L_t\}_{t \geq 0}$  definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  es un **proceso de Lévy** si:*

1.  $L$  tiene incrementos independientes.
2.  $L$  tiene incrementos estacionarios.
3.  $\mathbb{P}\{L_0 = 0\} = 1$ .



Figura 3.1: Ejemplo de Movimiento Browniano

4.  $L$  tiene trayectorias càdlàg (continuas por la derecha y con límite por la izquierda) casi seguramente.

Uno puede pensar a los Procesos de Lévy como una extensión de la familia clásica de las caminatas aleatorias. Con esta definición se forma una clase muy rica de procesos. Veamos un ejemplo de un proceso de Lévy, el único que es continuo, el Movimiento Browniano.

**Ejemplo 3.1.4.** (Movimiento Browniano)

Un proceso de Lévy  $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$  definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  con trayectorias continuas y distribución Normal  $(0, t)$  al tiempo  $t$  es un movimiento Browniano.

Mencionemos ahora, una de las propiedades más importantes de los procesos de Lévy, la divisibilidad infinita.

**Definición 3.1.5.** Una distribución  $\mu$ , es infinitamente divisible si para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe una medida  $\mu_n$  tal que  $\mu = \mu_n^{*n}$  donde

$$\mu_n^{*n} = \underbrace{\mu_n * \mu_n * \mu_n * \cdots * \mu_n}_n$$

Donde  $*$  denota el producto de convolución.

A continuación presentamos una relación importante entre los procesos de Lévy y la propiedad de divisibilidad infinita:

**Proposición 3.1.6.** Si  $L$  es un proceso de Lévy, entonces para toda  $t \geq 0$  la distribución de  $L_t$  es infinitamente divisible.

**Demostración.** Sean  $\{L_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Lévy;  $t \geq 0$  fija, y  $n \in \mathbb{N}$  y  $\mu$  la distribución de  $L_t$ . Tenemos que  $L_t$  se puede escribir como la siguiente suma telescópica:

$$L_t = L_{\frac{t}{n}} + (L_{\frac{2t}{n}} - L_{\frac{t}{n}}) + \cdots + (L_t - L_{\frac{(n-1)t}{n}}) \quad (3.1)$$

donde  $\{L_{\frac{it}{n}} - L_{\frac{(i-1)t}{n}} : i \in \mathbb{N}\}$  es una familia de variables aleatorias i.i.d por la propiedad de incrementos estacionarios e independientes. Sea  $\mu_n$  su distribución, entonces:

$$\mu = \mu_n^{*n}.$$

Por lo tanto  $\mu$  es una medida infinitamente divisible.  $\blacksquare$

Por otro lado, es también cierto que una distribución infinitamente divisible determina a un único proceso de Lévy. La demostración de esto se puede encontrar en [Sat99] o en [Pro90].

**Definición 3.1.7.** *Un proceso de Lévy tiene la propiedad de que para todo  $t \geq 0$*

$$\mathbb{E}[e^{i\theta L_t}] = e^{-t\Phi(\theta)}$$

donde  $\Phi(\theta) = \Phi_1(\theta)$  es el exponente característico de  $L_1$ , el cual tiene una distribución infinitamente divisible. Llamamos a  $\Phi(\theta)$  el **exponente característico** del proceso de Lévy.

**Teorema 3.1.8.** *Si  $\{L_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Lévy tal que  $\mathbb{E}[L_t] < \infty$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , entonces*

$$\{L_t - E[L_t]\}_{t \geq 0},$$

es martingala.

**Demostración.** Sea  $A_t = L_t - E[L_t]$ , entonces:

$$\mathbb{E}[L_{t+s} | \mathcal{F}_s^L] = \mathbb{E}[L_{t+s} - L_s | \mathcal{F}_s^L] + \mathbb{E}[L_s | \mathcal{F}_s^L]$$

Como  $L$  tiene incrementos independientes

$$\mathbb{E}[L_{t+s} - L_s | \mathcal{F}_s^L] = \mathbb{E}[L_{t+s}] - \mathbb{E}[L_s]$$

por lo que:

$$\mathbb{E}[L_{t+s} - \mathbb{E}[L_{t+s}] | \mathcal{F}_s^L] = L_s - \mathbb{E}[L_s]$$

por tanto  $A_t$  es martingala.  $\blacksquare$

Ahora nos centraremos en estudiar la estructura trayectorial de un proceso de Lévy y pondremos particular incapié en la de subordinadores. Un resultado importante de procesos de Lévy es la llamada fórmula de Lévy-Khintchine, cuya prueba fue dada en 1930 por De Finetti y Kolmogorov y mejorada por Lévy y Khintchine.

**Teorema 3.1.9.** **Fórmula de Lévy-Khintchine**

*Una ley de probabilidad  $\mu$  de una variable aleatoria con valores en los reales es infinitamente divisible con exponente característico  $\phi$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} \mu(dx) = e^{-\Phi(\theta)}, \text{ para } \theta \in \mathbb{R}$$

*si y solo sí existe una tripleta  $(a, \sigma, \Pi)$ , donde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \geq 0$  y  $\Pi$  es una medida concentrada en  $\mathbb{R} - \{0\}$  que satisface  $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty$ , tal que*

$$\Phi(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}a^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}) \Pi(dx) \text{ para cada } \theta \in \mathbb{R}$$

La prueba de este teorema es complicada y la excluimos de este trabajo, pero para el lector interesado lo referimos a [Sat99]. La medida  $\Pi$  es la llamada **medida de Lévy** y es importante notar que es única. Como veremos más adelante, la medida  $\Pi$  describe el tamaño y razón de los saltos del proceso.

## 3.2. Procesos Poisson Puntuales

Un proceso puntual es una distribución aleatoria de puntos en un espacio de estados  $(E, \mathcal{B}(E))$ , con  $\mathcal{B}(E)$  la  $\sigma$ -álgebra de borel de subconjuntos de  $E$ . Nosotros usaremos más adelante que  $E = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

**Definición 3.2.1.** Sea  $\{x_i\}_{i \geq 1}$  una colección numerable de puntos de  $E$  y  $A \in \mathcal{B}(E)$ . Una **medida aleatoria puntual**  $\mu$  en  $E$  cumple que:

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{x_i(\omega) \in A\}}$$

y si  $K \in \mathcal{B}(E)$  es compacto, entonces  $m(K) < \infty$ .

Designamos por  $M_p(E)$  al espacio de todas las medidas puntuales definidas en  $E$  y definimos la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}_p(E)$  de subconjuntos de  $M_p(E)$  como la más pequeña  $\sigma$ -álgebra que contiene todos los conjuntos de la forma

$$\{m \in M_p(E) : m(F) \in B\}$$

para  $F \in \mathcal{B}(E)$ ,  $B \in \mathcal{B}([0, \infty])$ .

**Definición 3.2.2.** (Procesos Puntuales)

Un proceso puntual es una función medible

$$\Xi : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$$

de un espacio de probabilidad al espacio de todas las medidas puntuales de  $E$ .

**Definición 3.2.3.** Un **Proceso de Poisson Puntual (P.P.P.)** definiendo en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , con intensidad  $\nu$  es una colección  $\{\Xi(A, \omega)\}_{A \in \mathcal{B}(E)}$ ,  $\omega \in \Omega$  tal que:

(1)  $\Xi(\cdot, \omega)$  es una medida puntual en  $(E, \mathcal{B}(E))$  para cada  $\omega \in \Omega$ .

(2)  $\Xi(A, \cdot)$  es Poisson con media  $\nu(A)$ :  $\mathbb{P}\{\Xi(A) = k\} = \frac{e^{-\nu(A)}(\nu(A))^k}{k!}$  para todo  $A \in \mathcal{B}(E)$ .

(3) Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}(E)$  son conjuntos disjuntos entonces  $\Xi(A_1, \cdot), \Xi(A_2, \cdot), \dots$  son variables aleatorias independientes.

**Observación 3.2.4.** Se designa **sucesión de átomos** asociados a un P.P.P. a  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  con  $\Xi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_i(\omega) \in A\}}$ .

### 3.3. Subordinadores

**Definición 3.3.1.** *Un subordinador  $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Lévy unidimensional cuyas trayectorias son crecientes casi seguramente.*

La distribución de un subordinador esta dada por la transformada de Laplace de su distribución unidimensional.

**Definición 3.3.2.** *Una función  $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es un **exponente de Laplace** si cumple que:*

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda Y_t}) = e^{-t\Phi(\lambda)}$$

A continuación vamos a hacer un análisis de las trayectorias y saltos de un subordinador para culminar con la descomposición Lévy-Itô y la fórmula de Lévy-Khintchine para un subordinador. Cuando pruebas Lévy-Khintchine para subordinadores hay una simplificación importante, el proceso de Lévy se escribe como suma de sus saltos y de un proceso de Lévy no decreciente y continuo, éste último es una función lineal. La idea de la construcción se basa en que un proceso cádlag tiene cantidad finita de saltos grandes en un compacto y a lo más infinito numerable de saltos pequeños. Tenemos un subordinador y le quitamos los saltos grandes, probamos que nos queda una deriva. Iremos construyendo la medida de Lévy a través de un proceso de conteo de los saltos del subordinador y la sucesión de tiempos de salto. [Pro05] hace esta construcción para procesos de Lévy, aquí hacemos el caso más simple para subordinadores pues solo hay saltos positivos, ya que es un proceso no decreciente.

**Definición 3.3.3.** *Sea  $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$  un subordinador, definido en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  con  $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s)_{s \leq t}$  para todo  $t \geq 0$ . Sea  $\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$  tal que  $0 \notin \beta$ , definimos a  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-} \in \beta$  como un **salto grande**.*

Como  $Y$  es cádlag entonces el conjunto  $\{s \geq 0 : \Delta Y_s \in \beta\} \cap [0, t] < \infty$  para toda  $t \geq 0$ . Por lo que podemos definir:

**Definición 3.3.4.** *El tiempo en el que el proceso  $Y$  tiene el  $n$ -ésimo salto cuya magnitud está en  $\beta$*

$$T_1^\beta = \min\{s : \Delta Y_s \in \beta\} \text{ y recursivamente}$$

$$T_n^\beta = \min\{s \geq T_{n-1} : \Delta Y_s \in \beta\}$$

**Lema 3.3.5.** *Tenemos que  $T_1^\beta > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^\beta = \infty$  y  $\{T_i^\beta\}_{i \geq 1}$  es una sucesión de tiempos de paro con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .*

**Demostración.** Como  $0 \notin \bar{\beta}$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que si  $\Delta Y_t \in \beta$ , entonces  $|\Delta Y_t| \geq \epsilon$ . Y dada la continuidad por la derecha de  $Y$  en  $0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 \leq t < \delta$ , entonces  $|Y_t| < \frac{\epsilon}{2}$ , por lo que para toda  $t \in [0, \delta)$ , se tiene que  $|\Delta Y_t| < \epsilon$ , por lo que  $Y$  no tiene saltos en  $\beta$  en  $[0, \delta)$  y entonces  $T_1^\beta \geq \delta$ . Por otro lado, en  $[0, t]$  sólo hay una cantidad finita de saltos que pertenecen a  $\beta$ , por lo que  $T_n^\beta$  pertenece a  $[0, t]$  sólo para una cantidad finita de índices y como  $t > 0$  es arbitraria, se sigue que  $T_n^\beta \rightarrow \infty$ . Seguimos con la tercera afirmación. Como  $0 \notin \beta$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\beta \subset (-\infty, \epsilon] \cup [\epsilon, \infty) = \beta'$ . Sea  $\beta'_m = (-\infty, -\epsilon + \frac{1}{m}) \cup (\epsilon - \frac{1}{m}, \infty)$ ,  $B_{q,p,m} = \{X_q - X_p \in \beta'_m\}$  entonces se probará que el conjunto:

$$A = \bigcup_{r \in [s, t]} \{\Delta Y_r \in \beta'\}$$

es igual al conjunto

$$B = \left( \bigcup_{r \in [s, t]} \{\Delta Y_r \in \beta'\} \right) \cup \left( \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{K=1}^{\infty} \bigcap_{k=K}^{\infty} \bigcup_{\substack{p, q \in (s, t) \cap \mathbb{Q} \\ 0 < q - p < \frac{1}{k}}} B_{q,p,m} \right)$$

Primero probemos que  $A \subset B$ .

Sea  $r$  en  $(s, t)$  tal que  $\Delta Y_r \in \beta'$ , entonces  $\Delta Y_r \in \beta'_m$  para toda  $m \geq 1$ . Sea  $K \in \mathbb{N}$  tal que  $K > \max\left(\frac{1}{r-s}, \frac{1}{t-r}\right)$ . Para toda  $k \geq K$ , consideramos  $p_k \in (r - \frac{1}{2k}, r) \cap \mathbb{Q}$  y  $q_k \in (r, r + \frac{1}{2k}] \cap \mathbb{Q}$ , por lo que  $0 < q_k - p_k < \frac{1}{k}$  y  $p_k, q_k \in (s, t)$ . Los límites de las dos sucesiones  $p_k$  y  $q_k$  existen y son iguales a  $r$ . Puesto que  $Y_t$  tiene trayectorias cádlág  $\lim_{k \rightarrow \infty} Y_{p_k} - Y_{q_k} = \Delta Y_r \in \beta'_m$  y  $\beta'_m$  es abierto, entonces para toda  $m \geq 1$  existe  $K \geq 1$  tal que para toda  $k \geq K$ ,  $Y_{q_k} - Y_{p_k} \in \beta'_m$ . Esto implica que para toda  $m \geq 1$  existe  $K \geq 1$  tal que para toda  $k \geq K$  existen  $p, q \in (s, t) \cap \mathbb{Q}$  con  $0 < q - p < \frac{1}{k}$  (en este caso  $p_k$  y  $q_k$ ) tales que  $Y_q - Y_p \in \beta'_m$ . Por ende,  $A \subset B$ .

Ahora probemos que  $B \subset A$ . Supongamos que el conjunto

$$\left( \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{K=1}^{\infty} \bigcap_{k=K}^{\infty} \bigcup_{\substack{p, q \in (s, t) \cap \mathbb{Q} \\ 0 < q - p < \frac{1}{k}}} B_{q,p,m} \right)$$

es distinto del vacío, esto implica que existen dos sucesiones de racionales  $p_k$  y  $q_k$  tal que  $0 < q_k - p_k < \frac{1}{k}$  y  $Y_q - Y_p \in \beta_m$ . Como son acotadas tienen una subsucesión convergente respectiva  $\{p_{k_l}\}_{l \geq 1}$  y  $\{q_{k_l}\}_{l \geq 1}$ . Ahora, el límite de estas dos debe ser el mismo, digamos  $r_m \in [s, t]$ , ya que como se mencionó  $0 < q_k - p_k < \frac{1}{k}$ . Afirmamos que  $p_k < r_m \leq q_k$ , pues si sucede lo contrario,  $q_k < r_m$  o  $p_k \geq r_m$  para una cantidad infinita de índices, entonces podríamos extraer una subsucesión de  $(Y_{p'_k} - Y_{q'_k})_{k \in \mathbb{N}}$  convergente a  $Y_{r_{m-}} - Y_{r_{m-}} = 0$  en el primer caso y  $Y_{r_m} - Y_{r_m} = 0$  en el segundo, lo que es una contradicción pues  $Y_{p'_k} - Y_{q'_k} \in \beta'_m$

para toda  $k \in \mathbb{N}$  y  $0 \notin \beta'_m$  (si  $m > \frac{1}{m}$ ). Por ende, para toda  $m > \frac{1}{\epsilon}$  existe un rea  $r_m \in [s, t]$  tal que  $\Delta Y_{r_m} \in \beta'_m$ . Como el salto en  $r_m$  excede a  $\epsilon/2$  si  $m > \frac{2}{\epsilon}$ , entonces  $\{r_m : m \geq 1\} < \text{inf ty}$  (pues un proceso cádlág tiene en un compacto una cantidad finita de saltos mayores a una constante positiva previamente fijada [Sil04]). Si  $r \in [s, t]$  es tal que  $r_m = r$  para una cantidad infinita de índices, entonces  $\Delta Y_r \in \beta'_m$  para una cantidad infinita de índices, por lo que  $\Delta Y_r \in \beta'$ . Esto nos permite concluir que  $B \subset A$ .

Debemos notar además que lo anterior significa que el conjunto  $\bigcup_{r \in [s, t]} \{\Delta Y_r \in \beta\} \in \mathcal{F}_t$ , pues  $\bigcup_{r \in [s, t]} \{\Delta Y_r \in \beta'\} \in \mathcal{F}_t, Y_q - Y_p \in \beta'_m \in \mathcal{F}_t$  para toda  $m \geq 1, K \geq 1, k \geq K$  y  $p, q \in (s, t) \cap \mathbb{Q}$  con  $0 < q - p < \frac{1}{k}$ . Ahora,  $T_1^{\beta'}$  es un tiempo de paro, pues si  $t = 0$  entonces  $\{T_1^{\beta'} \leq t\} = \emptyset \in \mathcal{F}_0$ , pues  $T_1^{\beta'} > 0$ . Si  $t > 0$ , se puede utilizar lo anterior, ya que  $\{T_1^{\beta'}\} = \bigcup_{r \in [0, t]} \{\Delta Y_r \in \beta'\}$  por lo que  $\{T_1^{\beta'} \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

Para  $n \geq 1$  se tiene

$$\{T_{n+1}^{\beta'} \leq t\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (0, t)} (\{T_n^{\beta'} < q\} \bigcup \bigcup_{r \in [q, t]} \{\Delta Y_r \in \beta'\})$$

y como

$$\{T_n^{\beta'} < q\} = \bigcup_{m \geq 1} \{T_n^{\beta'} \leq q - \frac{1}{m}\}$$

. Así se verifica que  $T_{n+1}^{\beta'}$  es tiempo de paro si  $T_n^{\beta'}$  lo es. Por tanto,  $T_n^{\beta'}$  es tiempo de paro respecto a  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  para toda  $n \geq 1$ . Como

$$\{T_1^\beta \leq t\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{T_i^{\beta'} \leq t, T_1^\beta = T_i^{\beta'}\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{T_i^{\beta'} \leq t, \Delta Y_{T_i^{\beta'}} \in \beta, \Delta Y_{T_j^{\beta'}} \notin \beta \text{ soj } < i\}$$

se sigue que  $T_1^\beta$  es tiempo de paro. Además

$$\{\exists r \in [s, t] \Delta Y_r \in \beta\} = \bigcup_{k \geq 1} \{T_k^{\beta'} \in [s, t], \Delta Y_{T_k^{\beta'}} \in \beta\}$$

por lo que el anterior conjunto pertenece a  $\mathcal{F}_t$ . Como  $\{T_{n+1}^\beta \leq t\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0, t]} \{T_n^\beta < s, \exists r \in [s, t], \Delta Y_r \in \beta\}$  se verifica por inducción que  $T_n^\beta$  es tiempo de paro respecto a  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . ■

Continuamos ahora asociando un proceso de conteo a estos tiempos de paro.

**Nota.** Una herramienta conveniente para analizar los saltos del subordinador es la medida aleatoria de saltos del proceso. Al ser  $\{T_i^\beta\}_{i \geq 1}$  tiempos de paro les asociamos el proceso de conteo

$$\mu_t^\beta = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{T_n^\beta < t\}}$$

por ende  $\mu_t^\beta = n$  si y sólo si el proceso  $Y$  tiene  $n$  saltos en el intervalo  $[0, t]$ . Otra forma de expresar a  $\mu_t^\beta$  es

$$\mu_t^\beta = \sum_{0 \leq r \leq t} 1_{\{\Delta Y_r \in \beta\}}$$

es decir el proceso  $\mu_t^\beta$  cuenta el número de saltos del proceso  $Y$  de tamaño en  $\beta$  al tiempo  $t$ . Consideramos a la medida puntual  $\beta \rightarrow \mu(\omega; t, \beta)$  para  $t, \omega$  fijas y con  $\beta \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}-\{0\}}$ .

Ahora veamos que  $\{\mu_t^\beta\}_\beta$  es un proceso de poisson. Primero, es  $\mathcal{F}_t^\beta$ -medible por ser suma de indicadoras de eventos que pertenecen a dicha  $\sigma$ -álgebra si  $0 \notin \bar{\beta}$ . En general  $\mu_t^\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_t^{\beta \cap (\mathbb{R} - (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))}$ , por lo que  $\mu_t^\beta$  es también  $\mathcal{F}_t$ -medible. Como  $\mu_{t+s}^\beta - \mu_s^\beta$  se construye a partir de  $\{Y_{r+s} - Y_s\}_{r \geq 0}$  de la misma manera que se construye  $\mu_t^\beta$  a partir de  $\{Y_r\}_{r \geq 0}$ , se sigue que  $\mu_{t+s}^\beta - \mu_s^\beta$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$  y que tiene la misma distribución que  $\mu_t^\beta$ . De aquí se sigue que  $\{\mu_t^\beta\}_{t \geq 0}$  tiene incrementos independientes y estacionarios, donde la independencia se justifica pues si  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , entonces  $\mu_{t_n}^\beta - \mu_{t_{n-1}}^\beta$  es independiente de  $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$ , por lo que es independiente de  $\{\mu_{t_i}^\beta - \mu_{t_{i-1}}^\beta\}_{i=1, \dots, n-1}$ , de donde

$$\mathbb{P}\{\mu_{t_i}^\beta - \mu_{t_{i-1}}^\beta \in A_i\} = \mathbb{P}\{\mu_{t_n}^\beta - \mu_{t_{n-1}}^\beta \in A_n\} \mathbb{P}\{\mu_{t_i}^\beta - \mu_{t_{i-1}}^\beta \in A_i\}_{i=1 \dots n-1}$$

y al aplicar esto  $n-1$  veces se concluye que

$$\mathbb{P}\{\mu_{t_i}^\beta - \mu_{t_{i-1}}^\beta \in A_i\}_{i=1 \dots n} = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\{\mu_{t_i}^\beta - \mu_{t_{i-1}}^\beta \in A_i\}$$

Vemos así que  $\{\mu_t^\beta\}_{t \geq 0}$  es un proceso Poisson a cuyo parámetro le denotamos  $\pi(\beta)$ . La intensidad del proceso de Poisson es  $\pi(\beta) = \mathbb{E}[\mu_1^\beta]$ . Esta será la medida que caracterizará al subordinador, la cual es llamada medida de Lévy. Para esto definamos a las funciones  $\pi_i$  con las cuales definiremos a la medida de Lévy:

$$\pi_i : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \pi_i(\beta) = \mathbb{E} \left[ \mu_1^{\beta \cap (\frac{1}{i}, \frac{1}{i-1}]} \right] \text{ y } \pi_0(\beta) = \mathbb{E} \left[ \mu_1^{\beta \cap [1, \infty]} \right]$$

**Teorema 3.3.6.** *Existe una única medida definida sobre  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}-\{0\}}$  que coincide con  $\pi$ , llamada **medida de Lévy** asociada a  $Y$ , sobre la familia de elementos de la anterior  $\sigma$ -álgebra cuya cerradura no contenga a 0.*

**Demostración.** Sea  $\pi_i : \mathcal{B}_{\mathbb{R}-\{0\}} \rightarrow [0, \infty)$  dada por  $\pi_0(\beta) = \pi(\beta \cap (-\infty, -1) \cup (1, \infty))$  y  $\pi_i(\beta) = \pi(\beta \cap ([-\frac{1}{i}, -\frac{1}{i+1}) \cup (\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]))$  para  $i \geq 1$ . Por lo anterior,  $\pi_i$  es  $\sigma$ -aditiva para toda  $i \in \mathbb{N}$ , de donde  $\pi_i$  es una medida finita. Si  $\beta \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}-\{0\}}$  es tal que  $0 \notin \bar{\beta}$ , entonces existe  $I \geq 1$  tal que  $\beta \cap [-\frac{1}{I}, \frac{1}{I}] = \emptyset$ , de donde  $\pi_i(\beta) = 0$  para toda  $i \geq I$ . Por lo anterior se obtiene

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i(\beta) = \sum_{i=0}^{I-1} \pi_i(\beta) = \pi(\beta \cap ((-\infty, \frac{1}{I}) \cup (\frac{1}{I}, \infty))) = \pi(\beta).$$

Entonces,  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i$  es una medida  $\sigma$ -finita, coincide con  $\pi$  sobre la familia de elementos de  $\mathcal{B}_{\mathbb{R} - \{0\}}$  cuya cerradura no contiene a  $\beta$ . Si  $\pi'$  es una medida que coincida con  $\pi$  en la familia anterior, entonces

$$\begin{aligned} \pi'(\beta) &= \pi'(\beta \cap ((-\infty, \frac{1}{I} \cup (\frac{1}{I}, \infty))) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi'(\beta \cap ([-\frac{1}{i}, -\frac{1}{i+1}) \cup (\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}])) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i(\beta) \end{aligned}$$

■

El siguiente resultado se sigue y nos muestra la descomposición de trayectorias en un subordinador.

**Teorema 3.3.7.** (Descomposición Lévy-Itô)

Sea  $Y$  un subordinador entonces se tiene que para toda  $t \geq 0$

$$Y_t = dt + \sum_{0 \leq s \leq t} \Xi_s$$

donde  $d \geq 0$  es el coeficiente de deriva,  $\Xi_s$  es un proceso Poisson puntual.

**Demostración.** Sea  $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $(\mathcal{B}_{\mathbb{R} - \{0\}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ -medible finita. Esto implica que  $f$  es integrable respecto a  $\pi$  sobre  $\beta$  s  $0 \notin \beta$ , pues entonces la medida  $\mu_t^\beta$  es una medida de conteo con soporte finito. Por ende  $\int_\beta f d\mu_t(\omega) < \infty$ . Si  $f$  es una función simple  $f = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{\beta_j}$ , entonces

$$\int_\beta f d\mu_t(\omega) = \sum_{j=1}^n a_j \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T^{\beta_i} \cap \beta_j \leq t\}}(\omega)$$

por lo que  $\omega \rightarrow \int_\beta f d\mu_t(\omega)$  es una variable aleatoria  $\mathcal{F}_t$ -medible en este caso. Luego al extender esto a funciones medibles no negativas se verifica que  $\omega \rightarrow \int_\beta f d\mu_t(\omega)$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible. Como la medida  $\mu_t(\omega)$  es de conteo y valuada en  $\beta$  es igual a la cardinalidad de  $\{0 < s \leq t : \Delta Y_s \in \beta\}$  se sigue

$$\int_\beta f d\mu_t(\omega) = \sum_{0 < s \leq t} f(\Delta Y_s) \mathbf{1}_{\{\Delta Y_s \in \beta\}}.$$

Mediante la anterior representación se verifica que  $(\omega \rightarrow \int_\beta f d\mu_t(\omega))_{t \geq 0}$  tiene incrementos independientes y estacionarios por lo que es un subordinador. Por lo tanto, se puede integrar a la función identidad  $I(x) = x$  al ser límite creciente de funciones simples (usando el teorema de convergencia monótona):

$$\int I d\mu_t^\beta = \sum_{0 < s \leq t} \Delta Y_s \mathbf{1}_{\{\Delta Y_s \in \beta\}} = \Xi_t^\beta$$

Usamos esta representación del proceso de saltos  $\Xi_t$  y así se construye su función característica.

$$\Phi_{\Xi_t^\beta}(u) = \mathbb{E}[e^{-u \int Id\mu_t^\beta}]$$

Se toma de nuevo una función simple  $f = \sum_{j=1}^n a_j 1_{A_j}$ , donde  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Como los conjuntos  $A_j$  no se intersectan entonces las variables aleatorias  $\int_{A_j \cap \beta} f d\mu_t^\beta$  son independientes, entonces:

$$\mathbb{E}[e^{-u \int f d\mu_t^\beta}] = \mathbb{E}[e^{-u \sum_{j=1}^n a_j m_{u_t}^{\beta \cap A_j}}] = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[e^{-u a_j m_{u_t}^{\beta \cap A_j}}]$$

que es el producto de funciones características de procesos Poisson independientes con parámetro  $\mathbb{E}(\Xi_t^{\beta \cap A_i}) = \pi(\beta \cap A_i)$  y la función característica se convierte en:

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^n \exp \left\{ t \pi(\beta \cap A_j) (e^{-u a_j} - 1) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^n t \pi(\beta \cap A_j) (e^{-u a_j} - 1) \right\} \\ &= \exp \left\{ t \int_{\beta} (e^{-u f} - 1) d\pi(dx) \right\} \end{aligned}$$

Considérense de nuevo funciones simples crecientes que aproximen a la función identidad, de nuevo usamos el teorema de convergencia monótona se ve que la función característica de  $\Xi_t^\beta$  es igual a

$$\exp \left\{ t \int_{\beta} (e^{-uI} - 1) d\pi(dx) \right\}$$

Como hay que deducir la función característica de  $\Xi_t$  para cualquier boreliano, se define  $\beta_n = (1/n, \infty)$  entonces la función indicadora  $\mathbf{1}_{\beta_n}$  es creciente respecto a  $n$  y por el teorema de convergencia monótona, la función característica de  $\Xi_t$  está dada por:

$$\Phi_{\Xi_t}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{\Xi_t^{\beta_n}}(u) = \exp \left\{ t \int_{(0, \infty)} (e^{-ux} - 1) d\pi(dx) \right\} \quad (3.2)$$

Sea

$$Z_t = Y_t - \Xi_t$$

Éste es un proceso de Lévy creciente y continuo ya que  $Y$  es càdlàg, y le estamos quitando las únicas discontinuidades que puede tener, los saltos  $\Xi_t$ .  $Z_t$  tiene esperanza finita ya que un proceso de Lévy con saltos acotados tiene esperanza finita. (Véase [BB04]). Al aplicar el teorema 3.1.8 al proceso  $\{Z_t\}_{t \geq 0}$  obtendremos una martingala continua cuya variación es finita. Por resultados

en p. 62 de [Rev98] se tiene que  $Z$  es un caso degenerado de una martingala continua, i.e. una constante. Entonces,  $Z_t = dt$ , con  $d$  una constante y  $\Xi_t$  un P.P.P. ■

El siguiente teorema da una condición analítica necesaria y suficiente para ser el exponente de Laplace de un subordinador. Este resultado se deriva de lo anterior.

**Teorema 3.3.8.** (De Finetti, Lévy, Khintchine).

(i) Si  $\Phi$  es el exponente de Laplace de un subordinador  $Y$ , entonces existe un único par  $(k, d)$  de números reales no negativos y una única medida  $\pi$  en  $(0, \infty)$  con  $\int(1 \wedge x)\pi(dx) < \infty$ , tal que para cada  $\lambda \geq 0$

$$\Phi(\lambda) = k + d\lambda + \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-\lambda x})\pi(dx) \quad (3.3)$$

(ii) Al contrario, cualquier función  $\Phi$  que puede ser expresada en la forma de (3.2) es el exponente de Laplace de un subordinador.

**Demostración.** Dado el resultado anterior, tenemos que  $Y_t = dt + \sum_{0 \leq s \leq t} \Xi_s$ , por lo que derivar la función característica de un subordinador es inmediato:

$$\Phi_{Y_1}(u) = \exp \left\{ -k - du - \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-ux})\pi(dx) \right\}. \quad (3.4)$$

Para  $t > 1$  ocurre lo mismo,

$$\Phi_{Y_t}(u) = \exp \left\{ -tk - tdu - t \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-ux})\pi(dx) \right\}.$$

El resultado se explica al pensar que la medida  $\pi$  proviene de tomar la esperanza del límite de un proceso de Poisson compuesto, el cual tiene la propiedad de tener incrementos independientes y estacionarios, por lo tanto  $\mu(n, \lambda) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n \mu(1, \lambda)$  y al conocer la esperanza al tiempo uno podemos hacer la siguiente construcción de a medida de Lévy para tiempos  $n \in \mathbb{N}$

$$\pi_n(\lambda) = \mathbb{E}[\mu_n \lambda] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \mu_1^\lambda\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\mu_1^\lambda] = n\pi(\lambda)$$

Este argumento se extiende a los racionales y después a todos los reales con el argumento de continuidad de medidas infinitamente divisibles. ■

**Nota.** Uno llama a  $k$  el término de desaparición o muerte,  $d \geq 0$  la deriva, y  $\pi$  la medida Lévy que satisface  $\pi(\{0\}) = 0$  y  $\int(1 \wedge x)\pi(dx) < \infty$ . Hablando intuitivamente, la medida de Lévy describe el número esperado de saltos en una cierta altura  $x$  y en un intervalo de tiempo 1. No tiene masa en el origen y la masa cerca del origen está acotada, esto es, solo un número finito de saltos

pueden ocurrir. Al definir  $\pi(\{\infty\}) = k$ , la medida  $\pi$  se extiende a una medida en  $(0, \infty]$ . Entonces, la medida  $\bar{\pi}(x) = \pi((x, \infty])$  en  $(0, \infty)$  es la cola de la medida de Lévy.

La fórmula de Lévy Khintchine se puede reescribir como

$$\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} = d + \int_0^\infty e^{-\lambda x} \bar{\pi}(x) dx, \text{ con } \bar{\pi}(x) = k + \pi((x, \infty)).$$

Notemos que el término de muerte y el coeficiente de la deriva están dados por:

$$k = \Phi(0), \quad d = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}.$$

La medida de renovación de un subordinador es el tiempo esperado que un subordinador se encuentra en un determinado conjunto boreliano.

**Definición 3.3.9.** La **medida de renovación**  $U$  de un subordinador  $Y$  esta dada por:

$$U(B) = \int_0^\infty \mathbb{P}\{Y_t \in B\} dt \quad \text{con } B \in \mathcal{B}([0, \infty))$$

donde la función de distribución de la medida de renovación esta dada por:

$$U(x) = \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{Y_t \leq x\}} dt \right], \quad x \geq 0$$

es conocida como la **función de renovación**.

**Observación 3.3.10.** Si introducimos la inversa continua del subordinador  $Y$  entonces

$$L_t = \sup\{s \geq 0 : Y_s \leq t\} = \inf\{s > 0 : Y_s > t\}, \quad t \geq 0$$

vemos que  $U(t) = \mathbb{E}[L_t]$ :

$$\mathbb{E}[L_t] = \int_0^\infty \mathbb{P}\{L_t \geq s\} ds = \int_0^\infty \mathbb{P}\{Y_s \leq t\} ds = U(t)$$

La medida de renovación es importante pues caracteriza la ley del subordinador.

**Lema 3.3.11.** La transformada de Laplace de la medida de renovación es

$$\mathcal{L}(U(\lambda)) = \int_{[0, \infty)} e^{-\lambda x} U(dx) = \frac{1}{\Phi(\lambda)}$$

**Lema 3.3.12.** Sea  $\mathbb{E}\{Y_1\} = \mu \in (0, \infty]$  entonces para toda  $h > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t+h) - U(t) = \frac{h}{\mu}$$

Es consecuencia del teorema de renovación discreto presentado en [Fel71]. Pero veamos un teorema análogo en la vecindad de  $0+$  cuando el coeficiente de deriva es positivo.

**Proposición 3.3.13.** [Nev61]

Supóngase que  $d > 0$ . Entonces la medida de renovación es absolutamente continua y tiene densidad positiva continua  $u : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  dado por

$$u(x) = \frac{\mathbb{P}\{\exists t \geq 0 : Y_t = x\}}{d}$$

En particular,  $u(0) = \frac{1}{d}$ .

**Demostración.** Como  $d > 0$  la transformada de Laplace de la medida de renovación tiene que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} U(dx) = \frac{1}{\Phi(\lambda)} \frac{1}{d\lambda}$$

cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Por el teorema Tauberiano de Karamata, que se puede ver en [BB04], esto implica

$$U(\epsilon) \sim \frac{\epsilon}{d} = \epsilon u(0) \quad (3.5)$$

cuando  $\epsilon \rightarrow 0+$ . Si aplicamos la propiedad de Markov al tiempo de paro  $L_x = \inf\{t \geq 0 : Y_t > x\}$  nos da

$$\begin{aligned} U(x + \epsilon) - U(x) &= \mathbb{E} \left[ \int_{L_x}^\infty \mathbf{1}_{\{Y_t \in x, x + \epsilon\}} dt \right] \\ &= \int_{[x, x + \epsilon]} \mathbb{P}\{Y_{L_x} \in dy\} U(x + \epsilon - y) \\ &= \mathbb{P}\{Y_{L_x} = x\} U(\epsilon) + \int_{(x, x + \epsilon]} \mathbb{P}\{S_{L_x} \in dy\} U(x + \epsilon - y) \end{aligned}$$

Donde el segundo término del sumando esta acotado superiormente por  $\mathbb{P}\{Y_{L_x} \in (x, x + \epsilon]\} U(\epsilon) = o(U(\epsilon))$ . Deducimos de (3.4) que

$$d^{-1} \mathbb{P}\{\exists t : Y_t = x\} = d^{-1} \mathbb{P}\{S_{L_x} = x\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{U(x + \epsilon) - U(x)}{\epsilon}$$

la primera igualdad se debe a que  $L_x$  depende continuamente en  $x$ . En particular, la medida de renovación es absolutamente continua; entonces denotaremos por  $u(x)$  a su versión de función de densidad, que se identifica por la formula anterior. Notamos que  $u(x) \leq 1/d$  y que por una aplicación de la propiedad de markov en  $L_x$  se tiene que

$$du(x + y) = \mathbb{P}\{\exists t : Y_t = x + y\} \geq \mathbb{P}\{\exists t : Y_t = x\} \mathbb{P}\{\exists t : Y_t = y\} = d^2 u(x) u(y) \quad (3.6)$$

Para probar la continuidad de  $u$  en  $x = 0$ , fijamos  $\eta > 0$  y consideramos el conjunto de Borel  $B_\eta = \{x \geq 0 : 1/d \leq u(x) + \eta\}$ . Como  $u$  es acotada superiormente por  $1/d$ , vemos de ?? que 0 es un punto de densidad de  $B_\eta$  donde  $\lambda([0, \epsilon] \cap B_\eta) \sim \epsilon$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0^+$  donde  $\lambda$  es la medida de Lebesgue. Eso implica que para algún  $a > 0$  y cada  $0 < x < a$  podemos encontrar  $y, y' \in B_\eta$  tal que  $x = y + y'$ . Usamos 3.6 y deducimos

$$u(x) \geq du(y)u(y') \geq d\left(\frac{1}{d} - \eta\right)^2$$

tal que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \frac{1}{d} = u(0)$ .

Probamos ahora continuidad en una  $x > 0$  arbitraria. De 3.6

$$\lim_{y \rightarrow x^-} \sup u(y) \leq u(x) \leq \lim_{y \rightarrow x^+} \inf u(y)$$

Por un lado, la continuidad por la derecha de las trayectorias muestra que  $y_n$  es una sucesión que decrece hacia  $x$ , entonces

$$\limsup \{\exists t : Y_t = y_n\} \subset \{\exists t : Y_t = x\}$$

entonces por una aplicación del lema de Fatou

$$\lim_{y \rightarrow x^+} \sup u(y) \leq u(x)$$

Por el otro lado, un aplicación de la propiedad de Markov como en 3.6 nos da que para toda  $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}\{\exists t : Y_t = x\} \leq \mathbb{P}\{\exists t : Y_t = \epsilon\} \mathbb{P}\{\exists t : Y_t = x - \epsilon\} + \mathbb{P}\{\forall t : Y_t \neq \epsilon\}$$

sabemos que el segundo término de la suma tiene a 0 cuando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , entonces

$$\lim_{y \rightarrow x^-} \inf u(y) \geq u(x)$$

y la continuidad de  $u$  se ha probado. Finalmente, sabemos que  $u$  es positiva en alguna vecindad de 0, y se sigue de 3.6 que  $u$  es positiva dondequiera. ■

### 3.4. Conexión: Conjuntos Regenerativos y Subordinadores

**Teorema 3.4.1.** *Un conjunto es regenerativo si y sólo si es la imagen cerrada de un subordinador, i.e.*

$$\mathcal{R} = \{\overline{Y_t}\}_{0 \leq t < \infty}$$

**Demostración.** Dado  $\mathcal{R}$  un conjunto regenerativo, vamos a construir un subordinador cuya imagen cerrada tiene la misma distribución que  $\mathcal{R}$ .

Sea  $D_t = \min\{s > t : s \in \mathcal{R}\}$ . Así definido,  $D_t$  cumple que  $t \in \mathcal{R}$  si y solo si  $D_t = t$ . Por ende,  $\mathcal{R} = \{t \in \mathbb{R} : D_t = t\}$ .

Sea  $Y_t = \min\{u \geq 0 : D_u > t\}$  el inverso de  $D_t$  i.e.  $\{D_u > t\} = \{Y_t < u\}$ . Así pues,

$$\{\bar{Y}_t\}_{t \geq 0} = \mathcal{R}$$

Analicemos ahora como son los incrementos de  $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ :

$$\begin{aligned} Y_{t+s} &= \min\{u \geq 0 : D_u > t+s\} \\ &= Y_t + \min\{r \geq 0 : D_{r+Y_t} > t+s\} \\ &= Y_t + \min\{r \geq 0 : Y_{t+s} < r+Y_t\} \\ &= Y_t + \min\{r \geq 0 : Y_{t+s} - Y_t < r\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_s &= \min\{u > s : u \in (\mathcal{R} - D_{Y_t})^+\} \\ &= \min\{u > s : u \in \{Y_r - Y_t\}_{r \geq 0}^+\} \\ &= \min\{u > s : u \in \{Y_{t+s} - Y_t\}_{s \geq 0}\} \\ &= \min\{u > s : u \in \{\tilde{Y}_t\}\} \end{aligned}$$

Usando el hecho que  $\mathcal{R}$  es regenerativo, se tiene que  $\tilde{D}_s \stackrel{d}{=} D_s$ . Además,

$$Y_{t+s} = Y_t + \min\{r \geq 0 : \tilde{D}_s > r\}$$

por lo que  $Y_{t+s} - Y_t$  es independiente de  $\mathcal{F}_{Y_t}$  y  $Y_{t+s} - Y_t \stackrel{d}{=} Y_t$ .

Ahora probemos que la imagen cerrada de un subordinador es regenerativa. Sea  $\mathcal{R} = \{\bar{Y}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ , y sea  $T_\tau = \min\{t \geq 0 : Y_\tau > t\}$  un  $\mathcal{F}_\tau$ -tiempo de paro y  $D_t = \min\{s > t : s \in \mathcal{R}\}$ .

Es claro que  $D_\tau = S_{T_\tau}$ , por lo que  $\{D_\tau\}_{\tau \geq 0}$  es  $\{\mathcal{F}_\tau\}$ -tiempo de paro. Más aún,  $(\mathcal{R} - D_\tau)^+$  es el conjunto de imagenes cerradas del subordinador  $\{Y_{T_\tau+s} - Y_\tau\}_{s \geq 0}$  el cual se distribuye como  $\{Y_\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}}$  y es independiente de  $\mathcal{F}_{T_\tau}$ . Por ende,

$$\mathbb{P}\{(\mathcal{R} - D_t)^+ \cap K \neq \emptyset \mid \mathcal{F}_{D_t}\} = \mathbb{P}\{\mathcal{R} \cap K \neq \emptyset\} \text{ con } K \in \mathcal{K}.$$

■

Por ende, la distribución de un conjunto regenerativo en  $\mathbb{R}^+$  está caracterizado por un par descriptor  $(d, \pi)$  que proviene de la descomposición Lévy-Itô.

Ahora podemos hablar de la **medida potencial**  $U$  de  $\mathcal{R}$  con subordinador correspondiente  $Y$ , que está dada por:

$$U(\beta) = \mathbb{E}[\lambda\{t : Y_t \in \beta\}], \beta \subset \mathbb{R}^+, \beta \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}.$$

Si  $U$  es absolutamente continua con respecto a  $\lambda$ , entonces  $\frac{dU}{d\lambda}$  es la **derivada potencial** de  $\mathcal{R}$ .

Un problema interesante de conjuntos aleatorios es saber su cardinalidad. El siguiente resultado concierne su medida de Lebesgue. Usaremos a  $L_t = \inf\{s \geq 0 : Y_s > t\}$  como la inversa continua de  $Y$ .

**Proposición 3.4.2.**

$$\lambda\{\mathcal{R} \cap [0, t]\} = \lambda\{\{Y_s\}_{s \geq 0} \cap [0, t]\} = dL_t \text{ c.s. para todo } t \geq 0$$

donde  $d$  es el coeficiente de deriva y  $\lambda$  la medida de Lebesgue en  $[0, \infty)$ . En particular,  $\mathcal{R}$  tiene medida de Lebesgue cero c.s. si y sólo si  $d = 0$ , y decimos que  $\mathcal{R}$  es ligero, en otro caso, decimos que  $\mathcal{R}$  es pesado.

**Demostración.** La primera igualdad se sigue del teorema anterior, donde  $\mathcal{R}$  y  $\{Y_s\}_{s \geq 0}$  difieren a lo más de un numero numerable de puntos que tienen medida de Lebesgue cero. Notemos que es suficiente tratar el caso  $k = 0$  pues el caso  $k > 0$  será seguido por una introducción de una muerte en algún tiempo independiente.

Sea  $\mathcal{R}^c = [0, \infty) \setminus \mathcal{R}$  el complemento de  $\mathcal{R}$  y su descomposición canónica dada por

$$\mathcal{R}^c = \bigcup_{s \in \{0 \leq s < \infty : \Delta_s > 0\}} (Y_{s-}, Y_s)$$

En particular, para toda  $t \geq 0$  fija, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda\{\mathcal{R}^c \cap [0, Y_t]\} &= \sum_{s \leq t} \Xi_s \\ &= Y_t - dt \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por la descomposición Lévy-Itô. De aquí se sigue entonces que  $\lambda\{\mathcal{R} \cap [0, Y_t]\} = dt$  para toda  $t \geq 0$ . Como la cantidad de la derecha depende continuamente en  $t$ , esto implica por un argumento de monotonicidad que

$$\lambda\{\mathcal{R} \cap [0, Y_t]\} = \lambda\{[0, Y_{t-}] \cap \mathcal{R}\} = dt$$

Reemplazamos a  $t$  por  $L_t = \inf\{s \geq 0 : Y_s > t\}$  la inversa continua de  $Y$ , donde  $t \in [Y_{L_t-}, Y_{L_t}]$ . ■

Cabe notar que la derivada potencial existe si  $d > 0$  y no existe si  $d = 0$  y  $\pi(0, \infty] < \infty$ .

**Proposición 3.4.3.**

- i) [Kes69] Si la deriva es  $d = 0$  entonces  $\mathbb{P}\{x \in \mathcal{R}\} = 0 \forall x \geq 0$
- ii) [Nev61] Si  $d > 0$  entonces  $u(x) = \frac{\mathbb{P}\{x \in \mathcal{R}\}}{d}$

Ahora concentremos nuestra atención en las extremidades derecha e izquierda de  $\mathcal{R}$  vistas desde un punto fijo  $t \geq 0$ :

$$g_t = \max\{s < t : s \in \mathcal{R}\} \text{ y } D_t = \min\{s > t : s \in \mathcal{R}\}.$$

Decimos que  $\{D_t\}_{t \geq 0}$  y  $\{g_t\}_{t > 0}$  son procesos de primera y última pasada en  $\mathcal{R}$  respectivamente. Observamos que estos procesos se pueden expresar en términos de  $Y$  y su inversa  $L$  como sigue:

$$g_t = Y(L_{t-}) \text{ y } D_t = Y(L_t) \text{ para toda } t \geq 0 \text{ c.s}$$

Ahora veamos una expresión para la distribución del par  $(g_t, D_t)$  en términos de la función de renovación y la cola de la medida de Lévy.

**Lema 3.4.4.** *Para todos  $a, b, t \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq a < t \leq a + b$  tenemos*

$$\mathbb{P}\{g_t \in da, D_t - g_t \in db\} = \pi(db)U(da) \text{ , } \mathbb{P}\{g_t \in da, D_t = \infty\} = kU(da).$$

en particular, para  $a \in [0, t)$ ,

$$\mathbb{P}\{g_t \in da\} = \bar{\pi}(t - a)U(da)$$

Para la demostración de este lema véase [BB04] sección 1.4.

**Lema 3.4.5.** *Para toda  $\lambda, q > 0$*

$$\int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{E}[\exp\{-\lambda g_t\}] dt = \frac{\Phi(q)}{q\Phi(\lambda + q)}$$

**Demostración.** Se ve del lema anterior que  $\mathbb{P}\{g_t < t = D_t\} = 0$  para toda  $t > 0$ , se sigue que  $\mathbb{P}\{g_t = t\} = \mathbb{P}\{t \in \mathcal{R}\}$ . Usando la proposición 3.4.3 y que la transformada de Laplace de la medida de renovación es  $\frac{1}{\Phi}$ , se tiene que

$$\int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}\{g_t = t\} dt = \frac{d}{\Phi(q)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{E}[\exp\{-\lambda g_t\}] dt &= \int_0^\infty e^{-qt} (e^{-t\lambda} \mathbb{P}\{g_t = t\} + \int_{[0, t)} e^{-\lambda s} \bar{\pi}(t - s) U(ds)) dt \\ &= \frac{d}{\Phi(q + \lambda)} + \int_0^\infty dt \int_{[0, t)} U(ds) e^{-q(t-s)} \bar{\pi}(t - s) e^{-(\lambda+q)s} \\ &= \frac{d}{\Phi(q + \lambda)} + \mathcal{L}U(q + \lambda) \mathcal{L}\bar{\pi}(q) \\ &= \frac{d}{\Phi(q + \lambda)} + \frac{1}{\Phi(q + \lambda)} \left( \frac{\Phi(q)}{q} - d \right). \end{aligned}$$

■

### 3.5. Estabilidad

En la siguiente sección se utilizará  $\mu$  para denotar a una distribución y a  $\varphi_\mu$  como la función característica asociada a la distribución  $\mu$ .

**Definición 3.5.1.** (Proceso de Lévy estable) [Ber98]

Sea  $(X_t, t \geq 0)$  un proceso de Lévy. Se dice que es estable de índice  $\alpha > 0$  si satisface la condición de autosimilaridad:

para toda  $k > 0$  el proceso:

$$k^{-1/\alpha} X_{kt} \quad (3.7)$$

tiene la misma distribución que  $X_t$  para cada  $t \geq 0$ .

Equivalentemente

**Definición 3.5.2.** Sea  $\varphi_\mu$  la función característica de  $X_1$ , entonces:

$$\varphi_\mu(z)^k = \varphi_\mu(k^{1/\alpha} z) \quad (3.8)$$

Hay que notar que (3.7) implica que  $X_{kt} \stackrel{d}{=} k^{1/\alpha} X_t$  y la función característica de  $X_k$  es  $\varphi_\mu(z)^k$ , entonces la función característica de  $k^{1/\alpha} X_t$  es  $\varphi_\mu(k^{1/\alpha} z)$ , como ambas se distribuyen igual su función característica es la misma.

Ahora, (3.8) implica (3.7) es inmediato ya que  $\varphi_\mu(z)^k$  es la función característica de  $X_k$  y  $\varphi_\mu(k^{1/\alpha} z)$  la función característica de  $k^{1/\alpha} X_1$ , como los dos procesos tienen la misma función característica se distribuyen igual y por lo tanto  $k^{-1/\alpha} X_{kt} \stackrel{d}{=} X_t$ .

Existen otras definiciones de autosimilitud para procesos estocásticos. A continuación se mencionan algunas de ellas.

Sea  $X_t$  un proceso estocástico, se dice que éste es:

- Autosimilar general si para toda  $a > 0$  existen  $b > 0$  y  $c(t)$  tal que:

$$X_{at} \stackrel{d}{=} bX_t + c(t) \quad (3.9)$$

Sea  $\mu$  una distribución infinitamente divisible y  $X_t$  el proceso de Lévy asociado a  $\mu$ , entonces se dice que  $X$  es:

- Proceso estable general- si para toda  $a > 0$  se pueden encontrar  $b > 0$  y  $c \in R^d$  tal que :

$$\varphi_\mu(z)^a = \varphi_\mu(bz)e^{i(c \cdot z)} \quad (3.10)$$

**Ejemplo 3.5.3.** Como proceso estable estricto está el movimiento Browniano.

Se sabe que si  $B_t$  es un movimiento Browniano entonces  $B_t \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$  para toda  $a > 0$  y para todo  $t \geq 0$ .

**Proposición 3.5.4.** Sea  $\{L_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Lévy en  $\mathbb{R}^d$  con tripleta generadora  $(A, \pi, \gamma)$  y  $U$  una matriz de  $n \times d$ , entonces  $\{UL_t\}_{t \geq 0}$  es de nuevo un proceso de Lévy en  $\mathbb{R}^n$  con tripleta generadora:

$$(UAU', [\pi U^{-1}]_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}}, \gamma_U)$$

donde  $\gamma_U = U\gamma + \int Ux(1_E(Ux) - 1_D(x))\pi(dx)$

**Demostración.** Sea  $U = (u_{ij})_{i=1 \dots d, j=1 \dots n}$ . Ahora, el vector  $UL_t = (\sum_{j=1}^d u_1^j L_t^j, \sum_{j=1}^d u_2^j L_t^j, \dots, \sum_{j=1}^d u_n^j L_t^j)$  tiene también incrementos independientes y estacionarios, no es difícil ver que  $\{UL_t\}_{t \geq 0}$  es también un proceso de Lévy.

Para ver como es la tripleta generadora de éste proceso hay que observar que:

$$E[\exp(i\langle z, UL_1 \rangle)] = E[\exp(i\langle U'z, L_1 \rangle)]$$

Usando la fórmula de Lévy-Khintchine, vemos:

$$\begin{aligned} E[\exp(i\langle U'z, L_1 \rangle)] &= \exp\{-1/2\langle U'z, AU'z \rangle + i\langle \gamma, U'z \rangle \\ &\quad + \int (e^{i\langle U'z, x \rangle} - 1 - i\langle U'z, x \rangle 1_D(x))\pi(dx)\} \\ &= \exp\{-1/2\langle z, UAU'z \rangle + i\langle \gamma_U, z \rangle \\ &\quad + \int (e^{i\langle z, y \rangle} - 1 - i\langle z, y \rangle 1_D(y))\pi U^{-1}(dy)\} \end{aligned}$$

donde  $\gamma_U = U\gamma + \int Ux(1_D(Ux) - 1_D(x))\pi(dx)$  ■

**Teorema 3.5.5.** El índice de un proceso de Lévy estable  $L_t$  no trivial satisface  $0 < \alpha \leq 2$ .

**Demostración.** Supongamos que la tripleta de  $L_t$  es  $(A, \pi, \gamma)$ , entonces la tripleta generadora de  $L_{at}$  es

$$(aA, a\pi, a\gamma), \tag{3.11}$$

donde  $a \geq 1$ .

Definamos ahora una transformación de una medida  $\rho$ , por

$$T_r \rho(B) = \rho\left(\frac{B}{r}\right),$$

para  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  y  $r > 0$  Entonces usando la proposición anterior y haciendo  $b = a^{1/\alpha}$  se puede dar una representación de la tripleta generadora de  $bL_t$ , como la matriz  $U$  de la proposición (3.1.10) es en este caso la matriz diagonal:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} b & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & b \end{pmatrix}$$

Entonces  $UAU' = a^{2/\alpha}A$  y la tripleta generadora es

$$(a^{2/\alpha}A, T_b\pi, \gamma_U) \quad (3.12)$$

Donde  $\gamma_U$  es igual que en la proposición (3.1.10) .

Ahora, la unicidad de la tripleta generadora de un proceso de Lévy nos indica que (3.11) y (3.10) son iguales ya que son la tripleta generadora del mismo proceso, por lo tanto suponiendo que  $A \neq 0$  entonces  $aA = a^{2/\alpha}A$  y por lo tanto  $\alpha = 2$ .

Suponer que el proceso  $L$  es no trivial asegura que si  $A=0$  entonces  $\pi \neq 0$ . Estudiemos este caso, si  $\pi \neq 0$  entonces tendremos que, de nuevo, siendo (3.11) y (3.10) la tripleta generadora del mismo proceso.  $a\pi = T_b\pi$  por lo tanto  $a^n\pi = T_{b^n}\pi$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  ya que  $a(a\pi(B)) = aT_b\pi(B) = a\pi(B/b) = T_{b^2}\pi(B)$ . De igual forma se demostrará que  $a^{-1}\pi = T_{b^{-1}}\pi$ :

$$aT_{b^{-1}}\pi(B)\nu = a\pi(bB) = T_b\pi(bB) = \pi(B)$$

y por lo tanto  $a^{-1}\pi = T_{b^{-1}}\pi$ , de donde se sigue que  $a^{-n}\pi = T_{b^{-n}}\pi$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

En resumen

$$a^n\pi = T_{b^n}\pi \quad (3.13)$$

Para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Definamos ahora al siguiente conjunto

$$S_n(b) = (x \in \mathbb{R}^d : b^n < |x| \leq b^{n+1}),$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Es claro entonces que  $S_n(b) = b^n S_0(b)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  y por lo tanto

$$\pi(S_n(b)) = T_{b^n}\pi(S_0(b)) = a^n\pi(S_0(b)) \quad (3.14)$$

Como estamos suponiendo que  $\pi \neq 0$  entonces  $\pi(S_0(b)) \neq 0$  ya que de otra forma  $\pi(S_n(b))$  sería cero para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

La propiedad  $a^n\pi = T_{b^n}\pi$  puede expresarse:

$$a^n \int 1_B(x)\pi(dx) = \int 1_B(b^n x)\pi(dx),$$

usando el Teorema de convergencia monótona para  $f_n(x) = |x|^2 1_{S_n(b)}$  y entonces denotando a  $x' = b^{-n}x$  tenemos para todo  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \int |x|^2 1_{S_n(b)}\pi(dx) &= \int 1_{S_0(b)}(b^{-n}x)|x|^2\pi(dx) \\ &= a^{-n} \int 1_{S_0(b)}(x')|b^n x'|^2\pi(dx') \\ &= a^{-n(1-2h)} \int_{S_0(b)} |x|^2\pi(dx). \end{aligned}$$

La primera igualdad sigue del hecho de que  $x \in S_n(b)$  si y sólo si  $b^{-n}x \in S_0(b)$ . La segunda igualdad se sigue del cambio de variable  $x' = b^{-n}x$ , que implica que  $\pi(dx') = \pi(d\frac{x}{b^n})$  y por (3.13) obtenemos  $a^{-n}\pi(dx') = \pi(dx)$ . Entonces sólo es necesario sacar de la integral  $|b^2| = a^{2/\alpha}$  y la tercera igualdad se sigue. Ahora, recordemos que  $\pi$  es una medida de Lévy. Por lo tanto

$$\int_{|x|<1} |x|^2 \pi(dx) < \infty,$$

y podemos expresar esta misma integral de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{|x|<1} |x|^2 \pi(dx) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{S_{-n}(b)} |x|^2 \pi(dx) \\ &= \int_{S_0(b)} |x|^2 \pi(dx) \sum_{n<1} a^{-n(1-2/\alpha)} \end{aligned}$$

entonces, si  $m = -n$ ,  $\sum_{m=0}^{\infty} (a^{1-2/\alpha})^m < \infty$ , como  $a > 1$  la serie solo converge si  $(1 - 2/\alpha) < 0$  lo cual solo pasa si  $\alpha > 2$ . ■

**Observación 3.5.6.** La matriz  $A$  de la tripleta generadora de un proceso de Lévy, es conocida como la parte gaussiana del proceso; y por la demostración anterior podemos afirmar que si el proceso de Lévy estable tiene parte gaussiana, entonces su índice de estabilidad es forzosamente 2. Por lo tanto la familia de distribuciones gaussianas estables tienen todas índice de estabilidad 2, la relación contraria es fácil de ver, en efecto sólo se debe recordar que la función característica de toda medida gaussiana  $\mu$  es de la forma

$$\phi_{\mu}(z) = e^{(z \cdot Az)/2 + i(\gamma \cdot z)}$$

La ecuación (3.10) con  $b = a^{1/2}$  (con índice de estabilidad 2) y  $c = (-a^{1/2} + a)\gamma$ .

**Teorema 3.5.7.** La medida de Lévy de un subordinador  $\alpha$ -estable tiene la forma:

$$\pi(dx) = \frac{k}{x^{\alpha+1}} dx$$

Donde  $\alpha \in (0, 1]$  y  $k$  es una constante.

**Demostración.** Queremos conocer explícitamente la forma de un subordinador estable y para ello se compara al exponente de Laplace con la integral de la función gamma la cual se expresa:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Se usará la siguiente notación,  $\mathcal{L}(\lambda) = e^{-\phi(\lambda)}$  y por ende  $\phi(\lambda)$  será el exponente de Laplace, entonces la propiedad de estabilidad se expresa como:

$$a\phi(\lambda) = \phi(a^{\frac{1}{\alpha}}\lambda),$$

para todo  $\lambda, a > 0$ .

En particular la igualdad es cierta para  $a = \lambda^{-\alpha}$ , al sustituir se tiene que

$$\phi(\lambda) = \lambda^\alpha \phi(1)$$

Por otro lado

$$\phi(\lambda) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \pi(dx)$$

y si se nota que  $1 - e^{-\lambda x} = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy$  entonces

$$\phi(\lambda) = \int_0^\infty \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy \pi(dx)$$

Usando el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración, obtenemos que

$$\phi(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} \int_y^\infty \pi(dx) dy = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} \pi(y, \infty) dy$$

Escrito de una forma más conveniente vemos,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y} \pi(y, \infty) dy = \frac{k}{\lambda^{1-\alpha}} \quad (3.15)$$

donde  $k = \phi(1)$ .

Recordando que la función gamma cumple:

$$1 = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{\lambda^s x^{s-1}}{\Gamma(s)} dx,$$

al despejar y evaluando en  $s = 1 - \alpha$  se encuentra que

$$\frac{k}{\lambda^{1-\alpha}} = k \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} dx, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Por lo tanto podemos igualar las ecuaciones (3.10) y (3.11). Como la transformada de Laplace es única y la medida de Lévy también, se determinará así la forma de la cola de la distribución

$$\pi(y, \infty) = k \frac{y^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Si derivamos ésta, conseguiremos la forma explícita de la medida de Lévy

$$d\pi(y, \infty) = \pi(dy) = \frac{k\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

■

Hay subordinadores estrictamente estables para índices positivos no mayores a 1. El de índice 1 sucede cuando  $d = 1$  y  $\pi = 0$ . De otra forma, sea  $\alpha \in (0, 1)$ ,

$$d = 0 \text{ y, } \frac{d\pi}{d\lambda}(x) = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)x^{1+\alpha}} \text{ donde } 0 < x < \infty, \pi\{\infty\} = 0$$

y su correspondiente medida potencial se puede calcular usando transformada de Laplace:

$$\frac{dU}{d\lambda}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)t^{1+\alpha}}, \text{ con } 0 \leq t < \infty.$$

Para estos subordinadores estrictamente estables de índice  $\alpha$  hay claramente su correspondiente conjunto regenerativo.



## Capítulo 4

# Conjunto descubierto por Recortes Aleatorios

En este capítulo, se considera el subconjunto cerrado  $\mathcal{U}$  de los reales no negativos que se dejan descubiertos por una familia de recortes aleatorios formados de un proceso de Poisson puntual [Man72]. Este conjunto es regenerativo; uno puede expresar su exponente de Laplace en términos de la medida característica del P.P.P. Esto nos permite explorar la estructura de  $\mathcal{U}$ , cuando cubre a todo  $\mathbb{R}$ , cuando es acotado, cuando tiene medida de Lebesgue positiva y sus dimensiones fractálicas. Todo esto se hace con base en la correspondencia entre los conjuntos regenerativos y los subordinadores, que se probó en el capítulo 3. Por último, veremos una prueba de la no recurrencia del movimiento Browniano multidimensional en términos de los recortes aleatorios.

### 4.1. Construcción de Mandelbrot

**Definición 4.1.1.** Sea  $\{(s_i, \Delta_{s_i})\}_{i \geq 1}$  una sucesión de átomos asociados a  $N \subset E = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , un Proceso de Poisson Puntual con intensidad  $\nu = \lambda \otimes \pi$ , donde  $\lambda$  es una medida de Lebesgue y  $\pi$  es una medida de Lévy. Un **recorte aleatorio** es una función que asocia a cada átomo, un intervalo de la forma  $(s_i, s_i + \Delta_{s_i})$ .

**Definición 4.1.2.** El **conjunto descubierto de Mandelbrot** es el complemento de la unión de recortes aleatorios en  $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ , esto es:

$$\mathcal{U} = [0, \infty) - \bigcup_{i=1}^{\infty} (s_i, s_i + \Delta_{s_i}).$$

hacemos énfasis que  $0 \in \mathcal{U}$ .

**Definición 4.1.3.**  $T \in \mathbb{R}^+$  es el primer punto del conjunto de recortes.

$$T = \inf\{t > 0 : (t, \Delta_t) \in E\}.$$

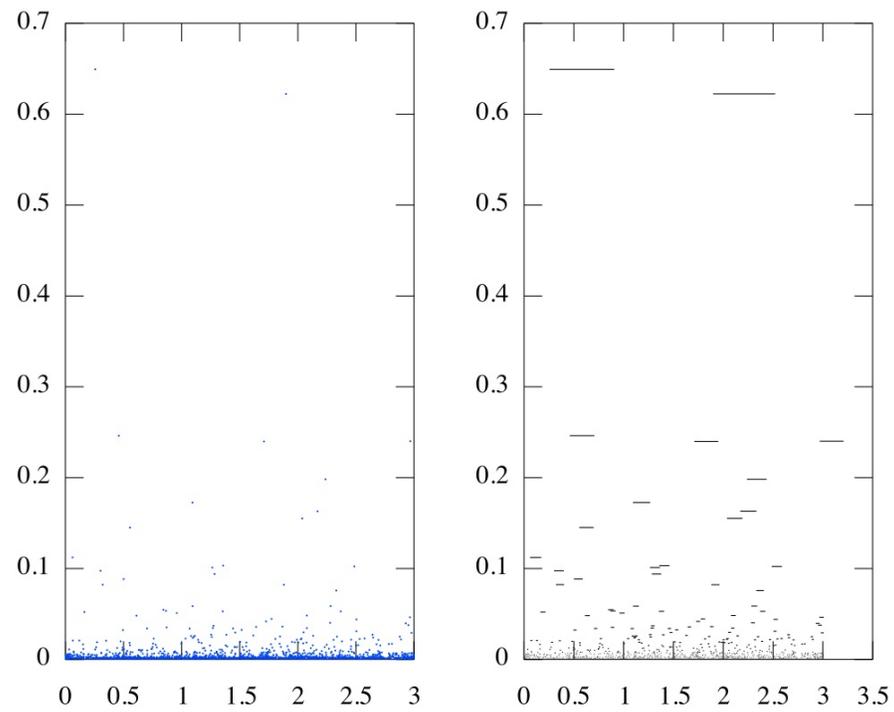


Figura 4.1: De lado izquierdo tenemos una realización aleatoria poisson y de lado derecho se encuentran los recortes aleatorios correspondientes al unir los puntos. Aquí se ve claramente la estructura autosimilar de este conjunto regenerativo y como es una generalización del conjunto de Cantor.

**Lema 4.1.4.**  $T$  se distribuye  $\exp(\pi(0, \infty))$ .

**Demostración.** Sea  $A = (0, s) \times (0, \infty) \in \mathcal{B}(E)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{T > s\} &= \mathbb{P}\{\inf\{t > 0 : (t, \Delta_t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\} > s\} \\ &= \mathbb{P}\{\Xi(0, s) \times (0, \infty) = 0\} \\ &= \exp\{-s\pi(0, \infty)\} \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad se da pues no hay puntos antes de  $s$ . ■

**Observación 4.1.5.** Veamos que si  $\pi(0, \infty) < \infty$  entonces  $\forall x > 0$

$$\Xi[(a, b) \times (x, \infty)] \stackrel{d}{=} \text{Poiss}(b - a) \times \pi(x, \infty) < \infty.$$

Con  $\pi(0, \infty) = \infty$ , por ende cuando  $x \rightarrow 0$  el número de realizaciones tiende a infinito.

**Teorema 4.1.6.** El conjunto descubierto de Mandelbrot  $\mathcal{U}$  es un conjunto regenerativo.

**Demostración.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  un espacio filtrado tal que  $\mathcal{F}_t = \sigma(\Xi([0, t] \times A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$  y sea  $\mathcal{F} = \sigma(\{\Xi(A) \in B\}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), B \subset \mathbb{N})$  Notamos que  $\mathcal{U}$  es complemento de conjunto abierto, por ende es un conjunto cerrado. Esto es,  $\mathcal{U} : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$ . Vimos en 1.5.3 que  $\{D_t \leq s\} \in \mathcal{F}_s$ .

Veamos ahora que es Effros medible.

Basta probar que  $\{\mathcal{U} \cap \Lambda \neq \emptyset\}$  es medible para todo  $\Lambda$  abierto de  $\mathbb{R}$ . Ahora, escribimos  $\Lambda$  como  $\Lambda = \cup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$  con  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\{\mathcal{U} \cap \Lambda \neq \emptyset\} = \{\mathcal{U} \cap \cup_n (a_n, b_n) \neq \emptyset\} \tag{4.1}$$

$$= \cup_{n \in \mathbb{N}} \{\mathcal{U} \cap (a_n, b_n) \neq \emptyset\} \tag{4.2}$$

Ahora queremos asociar a éste tipo de conjuntos con conjuntos formados de P.P.P. Para esto, notamos que si queremos que un intervalo abierto  $(a, b)$  intersekte al conjunto descubierto, es necesario que haya una sucesión de átomos en la franja abierta, como se ve en la figura [4.2].

Definimos al conjunto de puntos que están en la franja determinada por el abierto  $(a, b)$  como  $T_{(a,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x < a, a - x < y \text{ ó } x \in (a, b), y > 0\}$ . Así vemos que el conjunto  $\{\mathcal{U} \cap (a_n, b_n) \neq \emptyset\} = \{\Xi(T_{(a_n, b_n)}) \neq 0\}$ . Por ende, reescribimos (4.1), de tal forma que

$$\{\mathcal{U} \cap \Lambda \neq \emptyset\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{\Xi(T_{(a_n, b_n)}) \neq 0\} \in \mathcal{F}.$$

Ya que vimos que es Effros medible, vamos a probar que es un conjunto regenerativo. Queremos probar que  $\mathbb{P}\{(U - D_t)^+ \cap \Lambda \neq \emptyset \mid \mathcal{F}_\varnothing\} = \mathbb{P}\{U \cap \Lambda \neq \emptyset\}$  para  $\Lambda$  fijo. Pero antes, dado que  $D_t$  es un tiempo aleatorio daremos una cubierta para irlo fijando.

Tomamos una cubierta de  $\mathbb{R}^+$ ,  $\Theta = \{\cup_{i=1}^{\infty} [l_i, l_{i+1}) : l_i < l_{i+1}, |l_{i+1} - l_i| < \frac{1}{n}\}$ , entonces  $\{D_t \in \mathbb{R}\} = \{\cup_{i=1}^{\infty} \{D_t \in [l_i, l_{i+1})\}\}$  Por tanto tenemos que,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\{(\mathcal{U} - D_t)^+ \cap (a, b) \neq \emptyset \mid \mathcal{F}_{D_t}\} \\
&= \mathbb{P}\{\{(\mathcal{U} - D_t)^+ \cap (a, b) \neq \emptyset\} \cap S \cap \{D_t \in [l_i, l_{i+1})\}\} \\
&= \mathbb{P}\{\mathcal{U} \cap (D_t + a, D_t + b) \neq \emptyset, S \cap \{D_t \in [l_i, l_{i+1})\}\} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\mathcal{U} \cap (D_t + a, D_t + b) \neq \emptyset, S \cap \{D_t \leq l_{i+1}\}\} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\mathcal{U} \cap (l_{i+1} + a, l_{i+1} + b) \neq \emptyset, S \cap \{D_t \leq l_{i+1}\} \cap \{l_i \in \mathcal{U}\}\} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\underbrace{\Xi(T_{(l_{i+1}+a, l_{i+1}+b)}) \neq 0}_{\text{depende de } \Xi_{(l_{i+1}, \infty)}}, \underbrace{S \cap \{D_t \leq l_{i+1}\} \cap \{l_i \in \mathcal{U}\}}_{\text{depende de } \Xi_{(0, l_{i+1})}}\}
\end{aligned}$$

como son disjuntos se sigue de 3.2.3 que:

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\Xi(T_{(l_{i+1}+a, l_{i+1}+b)}) \neq 0\} \mathbb{P}\{S \cap \{D_t \leq l_{i+1}\} \cap \{l_i \in \mathcal{U}\}\}$$

por homogeneidad:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\Xi(T_{(a,b)}) \neq 0\} \mathbb{P}\{S \cap D_t \in [l_i, l_{i+1})\} \\
&= \mathbb{P}\{\mathcal{U} \cap (a, b) \neq \emptyset\}
\end{aligned}$$

■

El siguiente teorema nos permite identificar el conjunto descubierto como la imagen de algún subordinador  $Y$ , cuando 0 no es un punto aislado en  $\mathcal{U}$ . Esto motiva a dar una fórmula explicita de la exponente de Laplace  $\Phi$  de  $Y$  en términos de la medida de intensidad  $\nu = \pi \times \lambda$  del proceso de Poisson puntual, pero notemos que los siguientes criterios quedan en terminos de la medida de Lévy  $\pi$  y donde denotamos a  $\bar{\pi}(s) = \pi(s, \infty)$ .

$$\int e^{-\lambda t} \exp\left\{\int \int \pi \times \lambda(dy, ds) \mathbf{1}_{\{y>s:t<s<1\}}\right\} = \int e^{-\lambda t} \exp \int_t^1 \bar{\pi}(s) ds$$

**Teorema 4.1.7.** [FFS85] Si  $\int_0^1 \exp\left\{\int_t^1 \bar{\pi}(s) ds\right\} dt = \infty$ , entonces  $\mathcal{U} = \{0\}$ .

En otro caso,  $\mathcal{U}$  es un conjunto regenerativo y su exponente de Laplace del subordinador correspondiente está dada por

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = c \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \exp\left\{\int_t^1 \bar{\pi}(s) ds\right\} dt$$

con  $\lambda > 0$  y  $c > 0$ .

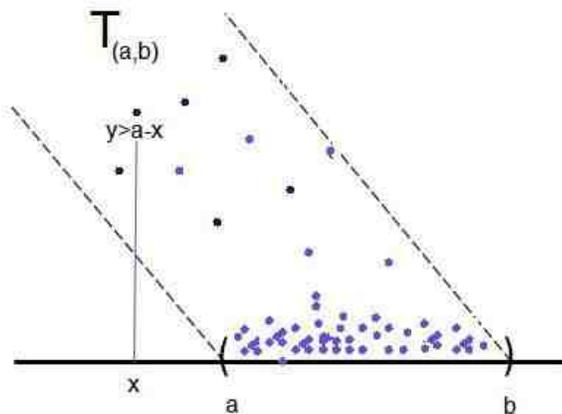


Figura 4.2: Se depicta al conjunto  $T_{a,b} \subset \mathbb{R}_+^2$ .

**Nota.** Usando el hecho que la transformada de Laplace de la medida de renovación es  $\frac{1}{\Phi}$ , uno puede expresar de otro modo éste teorema como sigue: Cuando el conjunto descubierto es no trivial la medida de renovación es absolutamente continua con densidad

$$u(t) = c \exp \left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s) ds \right\}, \quad t \geq 0 \quad (4.3)$$

Por ejemplo, cuando la cola de la medida de intensidad  $\bar{\pi}(x) = \beta x^{-1}$  para algún  $\beta > 0$  entonces  $\exp\{\int_t^1 \bar{\pi}(s) ds\} = t^{-\beta}$ . Obtenemos de este teorema que  $\mathcal{U} = \{0\}$  c.s. si  $\beta \geq 1$  y en otro caso  $\Phi(\lambda) = \lambda^{1-\beta}$ . Por lo que notamos que si  $\beta < 1$  entonces  $\mathcal{U}$  es la imagen cerrada de un subordinador estable con índice  $1 - \beta$ .

**Demostración.** Probaremos el teorema primero cuando el Proceso de Poisson Puntual es discreto y luego deduciremos el caso general por aproximación.

Primero supóngase que  $\bar{\pi}(0^+) < \infty$ ; en particular  $\int_0^1 \exp\left\{\int_t^1 \bar{\pi}(s) ds\right\} dt < \infty$ .

Entonces  $\{s_i, \Delta_{s_i}\}_{i \geq 0}$  es la sucesión de átomos asociada a un P.P.P. discreto y  $\mathcal{U}$  contiene alguna vecindad a la derecha del origen por el lema anterior con la medida de Lebesgue de  $\mathcal{U}$  positiva.

Sea  $t > 0$  un punto fijo el cual está descubierto si y sólo si  $\Delta_s \leq t - s$  para toda  $s < t$  lo que implica que:

$$\mathbb{P}\{t \in \mathcal{U}\} = \exp \left\{ - \int_0^t \bar{\pi}(t-s) ds \right\} > 0$$

se sigue de la proposición [3.4.4(ii)] que la densidad de renovación de  $\mathcal{U}$  en  $t$  es  $u(t) = d^{-1} \exp\{-\int_0^t \bar{\nu}(t-s) ds\}$  que es lo mismo que (4.2). Por lo que se prueba

así el teorema en el caso discreto.

Ahora deducimos el caso general cuando  $\bar{\pi}(0^+) = \infty$  por aproximación. Para cada entero  $n > 0$ , sea  $\Delta_s^{(n)} = \{\Delta_{s_t} : t \geq 0 \text{ y } \Delta_{s_t} > \frac{1}{n}\}$  tal que  $\{s_t, \Delta_s^{(n)}\}$  denota el P.P.P. discreto restringido a  $(\frac{1}{n}, \infty)$  y  $\mathcal{U}^{(n)}$  el conjunto descubierto correspondiente. Sabemos que el exponente de Laplace asociado a  $\mathcal{U}^{(n)}$  está dado por

$$\frac{1}{\Phi^{(n)}(\lambda)} = c_n \int_0^\infty e^{-\lambda t} \exp \left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s \vee n^{-1}) ds \right\} dt.$$

Para cada  $s > 0$ ,  $\bar{\pi}(s \vee n^{-1})$  incrementa a  $\bar{\pi}(s)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Se sigue que la medida de probabilidad en  $[0, \infty)$ ,

$$c_n e^{-t} \exp \left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s \vee n^{-1}) ds \right\} dt$$

converge en el sentido débil a

$$c_\infty e^{-t} \exp \left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s) ds \right\} dt$$

si  $\int_0^1 \exp \left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s) ds \right\} dt < \infty$ , donde  $c_\infty$  denota la constante que normaliza, y hacia la masa puntual 0 de Dirac en otro caso. Considerando la transformada de Laplace, deducimos que para toda  $\lambda > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^{(n)}(\lambda) = \Phi^{(\infty)}(\lambda)$ , donde

$$\frac{1}{\Phi^{(\infty)}(\lambda)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \int_0^1 \exp \left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s) ds \right\} dt = \infty, \\ c_\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} \exp \left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s) ds \right\} dt & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Por otro lado,  $\{\mathcal{U}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión decreciente de conjuntos aleatorios cerrados y  $\mathcal{U} = \bigcap_n \mathcal{U}^{(n)}$ . Como consecuencia se tiene que

$$G_t^{(n)} = \sup\{s \leq t : s \in \mathcal{U}^{(n)}\} \rightarrow \sup\{s \leq t : s \in \mathcal{U}\} = G_t \text{ (cuando } n \rightarrow \infty)$$

Deducimos del lema 3.4.5 que para cada  $\lambda > 0$

$$\int_0^\infty e^{-t} \mathbb{E}[\exp\{-\lambda G_t\}] dt = \frac{1}{\Phi^{(\infty)}(\lambda + 1)} \quad (4.5)$$

Supóngase primero que  $\int_0^1 \exp\{\int_t^1 \bar{\pi}(s) ds\} dt < \infty$ . Vemos de (4.3) que  $\Phi^{(\infty)}(\lambda) \rightarrow \infty$  cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  y junto con (4.4),  $\mathbb{P}\{G_t = 0\} = 0$  para  $t \geq 0$ . Esto significa entonces, que 0 no es un punto aislado en  $\mathcal{U}$ . Dado que  $\mathcal{U}$  es un conjunto regenerativo, comparamos (4.4) con el lema 3.4.5 lo que muestra que su exponente de Laplace debe ser  $\Phi = \Phi^{(\infty)}$ .

Finalmente, supóngase que  $\int_0^1 \exp\{\int_t^1 \bar{\pi}(s) ds\} dt = \infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^{(n)}(\lambda) = 1$  para cada  $\lambda > 0$ . Deducimos de (4.4) que  $\mathbb{P}\{G_t = 0\} = 1$  para  $t \geq 0$ , esto es  $\mathcal{U} = \{0\}$  c.s.  $\blacksquare$

**Lema 4.1.8.**  $\mathcal{U}$  tiene medida de Lebesgue positiva si  $\int_0^1 \bar{\pi}(t)dt < \infty$  y tiene medida de Lebesgue cero si  $\int_0^1 \bar{\pi}(t)dt = \infty$ .

**Demostración.** Sabemos de la proposición 3.4.2 que un conjunto regenerativo es ligero o pesado conforme  $d = 0$  ó  $d > 0$ . Por otra parte, también tenemos que

$$d = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} \quad (4.6)$$

De acuerdo al Teorema 4.1.4 tenemos que

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = c \int_0^\infty e^{-\lambda t} \exp\left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s)ds \right\} dt$$

entonces por integración por partes

$$\frac{\lambda}{\Phi(\lambda)} = c \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t}) \bar{\pi}(t) \exp\left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s)ds \right\} dt, \lambda > 0$$

y deducimos por convergencia monótona y (4.1) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} &= c \int_0^\infty \bar{\pi}(t) \exp\left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s)ds \right\} dt \\ &= c \exp\left\{ \int_0^1 \bar{\pi}(s)ds \right\} - c \exp\left\{ - \int_1^\infty \bar{\pi}(s)ds \right\}. \end{aligned}$$

Así concluimos que  $d = 0$  si y sólo si  $\int_0^1 \bar{\pi}(s)ds = \infty$ . ■

## 4.2. Propiedades del Conjunto Descubierta

**Corolario 4.2.1.** Si  $\int_1^\infty \exp\{-\int_1^t \bar{\pi}(s)ds\}dt = \infty$ , entonces  $\mathcal{U}$  no está acotado c.s. En otro caso,  $\mathcal{U}$  es acotado c.s y la distribución del punto más grande descubierta

$$g_\infty = \sup\{s \geq 0 : s \in \mathcal{U}\}$$

esta dado por

$$\mathbb{P}\{g_\infty \in dt\} = k^{-1} \exp\left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s)ds \right\} dt, \text{ con } k = \int_0^\infty \exp\left\{ \int_t^1 \bar{\nu}(s)ds \right\} dt.$$

**Demostración.** Se sigue de [BG61] que la probabilidad que  $\mathcal{U}$  esté acotado es 0 ó 1 según a razón de muerte  $k = \Phi(0)$  es cero o positiva. Se sigue del teorema anterior que

$$k = 0 \Leftrightarrow \int_1^\infty \exp\{-\int_1^t \bar{\pi}(s)ds\} = \infty$$

Cuando  $\mathcal{U} \neq \{0\}$  es acotado c.s.

Ahora, la fórmula para la distribución de  $g_\infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{g_\infty \in dt\} &= d^{-1}u(g_\infty) \\ &= \frac{c \exp\{\int_t^1 \bar{\pi}(s)ds\}dt}{d} \\ &= \frac{c \exp\{\int_t^1 \bar{\pi}(s)ds\}dt}{\int_0^\infty \exp\{c \int_t^1 \bar{\pi}(s)ds\}dt} \end{aligned}$$

Donde la primera igualdad se sigue de proposición 3.4.3, la segunda de la ecuación (4.2) y la tercera del lema 3.4.5  $\blacksquare$

Ahora dirigimos nuestra atención a las dimensiones fractálicas del conjunto descubierto. Para calcular la dimensión de un fractal es necesario calcular de alguna manera la forma en la que la gráfica llena parcial o totalmente el plano. Por supuesto, existen varios enfoques para hacerlo, nosotros usaremos dos. El método de conteo de cajas es posiblemente la noción mas simple entre las dimensiones fractálicas en uso (Véase [Fal90]).

**Definición 4.2.2.** *Sea un subconjunto  $F \subset [0, \infty)$  acotado y distinto del vacío y sea  $N_\epsilon(F)$  el más pequeño número de intervalos de largo (a lo más)  $\epsilon > 0$  que pueden cubrir a  $F$ . Entonces las dimensiones por el método de conteo de cajas inferior y superior estan definidas como:*

$$\underline{\dim}_B(F) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \inf \frac{\log N_\epsilon(F)}{\log \frac{1}{\epsilon}}, \quad \overline{\dim}_B(F) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup \frac{\log N_\epsilon(F)}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

respectivamente. Cuando estas dos cantidades son iguales, su valor común se llama **dimensión de caja** de  $F$ .

Siguiendo a [BG61], introducimos los llamados índices inferiores y superiores del exponente de Laplace  $\Phi$ :

**Definición 4.2.3.**

$$\begin{aligned} \underline{\text{ind}}(\Phi) &= \sup \left\{ \rho > 0 : \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi(\lambda) \lambda^{-\rho} = \infty \right\} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \inf \frac{\log \Phi(\lambda)}{\log \lambda} \\ \overline{\text{ind}}(\Phi) &= \inf \left\{ \rho > 0 : \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi(\lambda) \lambda^{-\rho} = 0 \right\} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup \frac{\log \Phi(\lambda)}{\log \lambda} \end{aligned}$$

con la convención usual  $\sup \emptyset = 0$ .

**Teorema 4.2.4.** *Tenemos que c.s. para todo  $t \geq 0$*

$$\underline{\dim}_B(\mathcal{R} \cap [0, t]) = \underline{\text{ind}}(\Phi) \quad \text{y} \quad \overline{\dim}_B(\mathcal{R} \cap [0, t]) = \overline{\text{ind}}(\Phi)$$

La prueba de este teorema sale de alcance de esta tesis, pues usa un teorema Tauberiano de Haan and Stadtmuller pero su prueba se puede encontrar en capítulo 5 de [BB04].

**Corolario 4.2.5.** *Los índices inferiores y superiores del conjunto  $\mathcal{U}$  están dados por:*

$$\underline{ind}(\Phi) = \sup \left\{ \rho : \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\rho} \exp \left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s) ds \right\} = 0 \right\} = 1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup \left( \frac{\int_t^1 \bar{\pi}(s) ds}{\log \frac{1}{t}} \right)$$

$$\overline{ind}(\Phi) = \inf \left\{ \rho : \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\rho} \exp \left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s) ds \right\} = \infty \right\} = 1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \inf \left( \frac{\int_t^1 \bar{\pi}(s) ds}{\log \frac{1}{t}} \right)$$

**Demostración.** Nos concentramos en probar el índice inferior pero es análogo para el otro. Tenemos del teorema 4.1.4 la fórmula de  $\Phi$

$$\begin{aligned} \underline{ind}(\Phi) &= \sup \left\{ \rho : \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^\rho \int_0^\infty e^{-\lambda t} \exp \left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s) ds \right\} dt = 0 \right\} \\ &= \sup \left\{ \rho : \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{\rho-1} \int_0^\infty e^{-t} \exp \left\{ \int_{t/\lambda}^1 \bar{\pi}(s) ds \right\} dt = 0 \right\} \end{aligned}$$

Usando la desigualdad inmediata

$$\int_0^\infty e^{-t} \exp \left\{ \int_{t/\lambda}^1 \bar{\pi}(s) ds \right\} dt \geq e^{-1} \exp \left\{ \int_{1/\lambda}^1 \bar{\pi}(s) ds \right\},$$

y deducimos que

$$\underline{ind}(\Phi) \leq \sup \left\{ \rho : \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\rho} \exp \left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s) ds \right\} = 0 \right\}.$$

Para probar la desigualdad opuesta podemos asumir que existe  $\rho > 0$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\rho} \exp \left\{ \int_t^1 \bar{\pi}(s) ds \right\} = 0$$

Recordemos que la medida de renovación tiene densidad  $u$  dada por (4.1), entonces  $u(t) = o(t^{\rho-1})$  y entonces  $U(t) = o(t^\rho)$  mientras  $t \rightarrow 0^+$  para cada  $\epsilon > 0$ . Aplicamos  $U(x) \asymp \frac{1}{\Phi(1/x)}$  y  $\frac{\Phi(x)}{x} \asymp I(1/x) + d$  de [BB04] proposición (1.4) y esto implica que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-\rho} \Phi(\lambda) = \infty$  entonces  $\underline{ind}(\Phi) \geq \rho$ . ■

### 4.3. Aplicación: movimiento browniano multidimensional

Finalmente, veamos una aplicación del conjunto descubierto de Mandelbrot para probar que el movimiento browniano multidimensional es no recurrente.

El conjunto de tiempos cuando un movimiento Browniano que empieza en 0 en  $\mathbb{R}$  es en 0 es un conjunto regenerativo en  $\mathbb{R}^+$ . Su par descriptor, identificado por [Lév48] Sección 50, está dada por

$$d = 0 \text{ y } \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{1}{4}x^{-3/2}, \quad 0 < x < \infty \text{ con } \nu\{\infty\} = 0$$

**Definición 4.3.1.** *Los recortes aleatorios son **estadísticamente autosimilares** si la distribución de los puntos  $(s, \Delta_s)$  se deja sin cambios por cualquier similitud cuyo vértice es un punto arbitrario del eje  $s$  y cuyo radio  $r$  es positivo.*

**Proposición 4.3.2.** *Los recortes aleatorios son autosimilares si y sólo si  $\pi(z) = \vartheta/z + \pi_0$  con  $\vartheta > 0$  y  $\pi_0 < \infty$ .*

**Teorema 4.3.3.** *Sea  $W(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t))$  un movimiento browniano  $m$ -dimensional, éste es no recurrente c.s. para  $m \geq 2$ .*

**Demostración.** El movimiento Browniano  $m$  dimensional es un vector aleatorio cuyas  $m$  coordenadas  $W_k(t)$  son independientes, idénticamente distribuidos movimientos brownianos unidimensionales. Un cero de  $W(t)$  es un cero común de las  $m$  funciones  $W_k(t)$ . Como el conjunto de ceros de  $W_k(t)$  es idéntico en distribución al conjunto descubierto correspondiente a recortes aleatorios con  $\pi(z) = -\frac{1}{2z}$ . El conjunto de ceros de  $W(t)$  es idéntico en distribución al conjunto descubierto con  $\pi(z) = -\vartheta/z$  y  $\vartheta = \frac{m}{2}$ . Para todo  $m \geq 2$ ,  $\vartheta \geq 1$ , el conjunto de ceros se reduce a 0 c.s. y entonces es c.s. que el movimiento Browniano multidimensional nunca regresa al origen. ■

## Capítulo 5

# Conjunto de la extinción local de los procesos CBI

En este capítulo se aplicará al conjunto regenerativo obtenido por recortes aleatorios para caracterizar al conjunto de la extinción local de los procesos de ramificación continuos con inmigración (CBI). Estos procesos fueron introducidos por Kawazu y Watanabe en [Kaw71] como el límite de procesos con inmigración discretos (GWI). En este mismo artículo los autores muestran que en general un proceso CBI tiene una representación en términos de las exponentes de Laplace  $F(u)$  y  $R(u)$  de dos procesos de Lévy independientes: un subordinador  $X^F$  y un proceso de Lévy espectralmente positivo  $X^R$ , los cuales pueden ser interpretados como los mecanismos de inmigración y ramificación respectivamente. Para ver más sobre este tema se recomienda [Hea65] y [Pin72].

**Definición 5.0.4.** *Un proceso de Markov a tiempo continuo  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  con espacio de estados  $E = [0, \infty)$  es un proceso de ramificación continuo con inmigración si tiene exponente de Laplace:*

$$-\log \mathbb{E}_x[e^{-\lambda X_t}] = v(t, \lambda) + xu(t, \lambda).$$

**Teorema 5.0.5.** [Kaw71]. *Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso CBI, entonces las funciones  $u(t, \lambda)$  y  $v(t, \lambda)$  son  $t$ -diferenciables con derivadas*

$$\varphi(\lambda) = \frac{\partial u(t, \lambda)}{\partial t} \Big|_{t=0}, \text{ y } \phi(\lambda) = \frac{\partial v(t, \lambda)}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

que tienen forma de Lévy-Khintchine

$$\varphi(\lambda) = -\alpha\lambda^2 + \beta\lambda - \int_{(0, \infty)} (e^{-\lambda\xi} - 1 + \lambda \frac{\xi}{1 + \xi^2}) \Pi_1(d\xi),$$

$$\phi(\lambda) = b\lambda - \int_{(0, \infty)} (e^{\lambda\xi} - 1) \Pi_2(d\xi),$$

donde  $\alpha, b \in \mathbb{R}_+$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  y  $\Pi_1, \Pi_2$  son medidas de Lévy en  $(0, \infty)$ . Y donde  $u(t, \lambda)$ , y  $v(t, \lambda)$  toman valores en  $\mathbb{R}_+$  y satisfacen las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(t, \lambda) &= \varphi(u(t, \lambda)), \quad u(0, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}v(t, \lambda) &= \phi(v(t, \lambda)), \quad v(0, \lambda) = 0\end{aligned}$$

Denotaremos al proceso  $X$  como  $CBI(\varphi, \phi)$  con mecanismo de ramificación  $\varphi$  y mecanismo de inmigración  $\phi$  y su ley de probabilidad la denotamos  $\mathbb{P}_x^{\varphi, \phi}$ .

Considerando una población que su evolución es modelada mediante el proceso de Galton Watson con inmigración definido en 2.4.2, donde la ley de probabilidad de reproducción es  $\mu$  en  $\mathbb{N}$  y la ley de probabilidad de inmigración es  $\nu$  en  $\mathbb{N}$ . Vemos que  $Z_n$  es el número de individuos en la generación  $n$ , entonces  $Z$  es una cadena de Markov que inicia en  $k$ , y la denotaremos por  $GWI_k(\mu, \nu)$ . Si tenemos dos poblaciones independientes con la misma ley de reproducción pero distinta ley de inmigración, entonces la población resultante también es  $GWI$  pero con una ley de inmigración resultante de la convolución de las primeras. Esto es,

$$GWI_{k_1}(\mu, \nu_1) * GWI_{k_2}(\mu, \nu_2) = GWI_{k_1+k_2}(\mu, \nu_1 * \nu_2).$$

Siguiendo el paralelismo, si  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son los exponentes de Laplace de dos subordinadores en cero, también tenemos la siguiente propiedad de convolución:

$$\mathbb{P}_x^{\varphi, \phi_1} * \mathbb{P}_y^{\varphi, \phi_2} = \mathbb{P}_{x+y}^{\varphi, \phi_1 + \phi_2}$$

**Lema 5.0.6.**  $CBI(\varphi, \phi)$  tiene una distribución infinitamente divisible en el espacio de Skorohod.

**Demostración.** Como  $\frac{\phi}{n}$  es un mecanismo de inmigración si  $\phi$  lo es, tenemos que

$$\mathbb{P}_x^{\varphi, \phi} = \underbrace{\mathbb{P}_{x/n}^{\varphi, \frac{\phi}{n}} * \dots * \mathbb{P}_{x/n}^{\varphi, \frac{\phi}{n}}}_n$$

■

**Nota.** El espacio de Skorohod es el espacio de trayectorias cádlág en  $[0, \infty]$ .

## 5.1. El problema de Polaridad

En esta sección veremos una representación de un proceso  $CBI$  mediante procesos de poisson puntuales, que nos lleva a la solución de un criterio en términos de  $\varphi$  y  $\phi$  para decidir si 0 es polar para un  $CBI(\varphi, \phi)$ . Los ceros de  $CBI$  se pueden ver como un conjunto de recortes aleatorios.

**Definición 5.1.1.** 0 es polar para un  $CBI(\varphi, \phi)$  si para toda  $x \neq 0$

$$\mathbb{P}_x^{\varphi, \phi} \{\exists t \geq 0, X_t = 0\} = 0$$

Recordemos como en 2.6 describimos a un Galton Watson con Inmigración en términos de procesos Galton Watson formados a partir de inmigrantes. En el escenario de un CBI, vamos a hacer una construcción donde la inmigración es un subordinador con deriva cero y medida de Lévy  $\Pi$  y exponente de Laplace  $\phi$ . Sea

$$\Xi = \sum_n \delta_{(s_n, x_n, f_n)}$$

un proceso de poisson puntual definido en  $(0, \infty) \times (0, \infty) \times D$ , (donde  $D$  es un espacio de Skorohod) con intensidad  $\nu$  dada por

$$\nu(ds, dx, df) = ds\Pi(dx)\mathbb{P}_x^\phi(df).$$

la cual esta en términos del tiempo, tamaño del salto, y una función asociada al salto, respectivamente.

Independiente de  $X_i$ , sea  $\hat{X}$  un  $CB(\varphi)$  que inicia en  $x \geq 0$ . Consideramos el proceso  $X$  en  $D$  definido por

$$X_t = \hat{X}_t + \sum_{s_n \leq t} f_n(t - s_n).$$

Probemos que  $X$  es un  $CBI(\varphi, \phi)$  que inicia en  $x$ . Utilizamos en un principio la formula exponencial para PPP:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\lambda X_t}] &= e^{-xu_t(\lambda)} e^{-\int_0^\infty \int_D (1 - e^{-\lambda f(t-s)}) \mathbb{P}_y(df) \Pi(dy) ds} \\ &= e^{-xu_t(\lambda)} e^{-\int_0^t \int_0^\infty (1 - e^{-y u_{t-s}(\lambda)}) \Pi(dy) ds} \\ &= e^{-xu_t(\lambda)} e^{-\int_0^t \phi(u_{t-s}(\lambda)) ds} \\ &= e^{-xu_t(\lambda)} e^{-v_t(\lambda)} \end{aligned}$$

Para probar que  $X$  es un CBI vemos su esperanza condicional. Sea  $\mathcal{F}_t = \sigma\left(\sum_{s_n \leq t} \delta_{(s_n, x_n, f_n^{t-t_n})}\right)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda \sum_{t \leq s_n \leq t+s} f_n(t+s-s_n)} \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-\lambda \sum_{t \leq s_n \leq t+s} f_n(t+s-s_n)}\right] \\ &= e^{\int_t^{t+s} \phi(u_{t+s-r}(\lambda))} \\ &= e^{-v_t(\lambda)} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda \sum_{t \leq s_n \leq t} f_n(t+s-s_n)} \mid \mathcal{F}_t\right] &= e^{-\sum_{s \leq t} f_n(t-s) u_s(\lambda)} \\ &= e^{u_s(\lambda) X_t}. \end{aligned}$$

Por ende,

$$\mathbb{E} \left[ e^{-\lambda X_{t+s}} \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{-X_t u_s(\lambda) - v_s(\lambda)}$$

Como consecuencia el conjunto de ceros de  $X$  bajo  $\mathbb{P}_0^{\varphi, \phi}$  admite el modelo de recortes aleatorios. Sea  $e(f)$  el tiempo de llegada a cero de  $f \in D$ . Sea  $\mu$  la imagen de la medida  $\int_0^\infty \Pi(dx) \mathbb{P}_x(\cdot)$  bajo  $e$ , tal que

$$\mu((t, \infty)) = \int_0^\infty (1 - e^{-xu_t(\lambda)}) \Pi(dx) = \phi(u_t(\lambda)).$$

Sea  $\Xi = \sum \delta_{(s_n, e_n)}$  un PPP con intensidad  $\lambda \times \mu$  donde  $\lambda$  es la medida de Lebesgue y consideremos el conjunto descubierto

$$\mathcal{R} = \mathbb{R} - \cup_{n \in \mathbb{N}} (s_n, s_n + e_n).$$

entonces  $\mathcal{R}$  tiene la misma distribución que el conjunto de ceros de  $X$ .

**Lema 5.1.2.**

*0 es polar para un CBI( $\varphi, \phi$ ) si y solo si  $\int_0^1 \exp \int_t^1 \phi(u_s(\lambda)) ds dt = \infty$*

Dada la construcción anterior esto se da por uno de los teoremas más importantes respecto a la caracterización de un conjunto regenerativo, probado en el capítulo 4, 4.1.7.

# Bibliografía

- [Bar95] R. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*. New York : John Wiley, 1995.
- [BB04] F. Bertoin, J. Martinelli and P. Bernard. Subordinators: Examples and applications. In *Lectures on Probability Theory and Statistics*, volume 1717 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 1–91. Springer Berlin / Heidelberg, 2004.
- [Ber98] J. Bertoin. *Lévy Processes*. Number 121. Cambridge University Press, 1998.
- [BG61] R. Blumenthal and R. Gettoor. Sample functions of stochastic processes with independent increments. *J. Math. Mech*, 10:493–516, 1961.
- [Boj95] Tomasz Bojdecki. *Teoría general de procesos e integración estocástica*. Sociedad Matemática Mexicana, 1995.
- [Fal90] K. Falconer. *Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications*. Wiley, Chichester, 1990.
- [Fel71] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volume 2. Wiley, New-York., 1971.
- [FFS85] P. Fitzsimmons, B. Fristedt, and L. Shepp. The set of real numbers left uncovered by random covering intervals. *Probability Theory and Related Fields*, 70:175–189, 1985. 10.1007/BF02451427.
- [FM85] B. Fitzsimmons, P. Fristedt and B. Maisonneuve. Intersections and limits of regenerative sets. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw*, 70:157–173, 1985.
- [Hea65] C.R. Heathcote. A branching process allowing immigration. *Journal of the Royal Statistical Society*, 27(1):138–143, 1965.
- [Kaw71] Shinzo Kawazu, Kiyoshi y Watanabe. Branching processes with immigration and related limit theorems. *Theory of Probability and its Applications*, XVI(1):36–54, 1971.

- [Kes69] H. Kesten. Hitting probabilities of single points for processes with stationary independent increments. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 93, 1969.
- [Kin64] J. Kingman. The stochastic theory of regenerative events. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, II:180–224, 1964.
- [Kol33] A. Kolmogorov. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: Springer, 1933.
- [Lév48] Paul Lévy. *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*. Gauthier-Villars, 1948.
- [Mai71] B. Maisonneuve. Ensembles régénératifs, temps locaux et subordinateurs. In *Séminaire de Probabilités V Université de Strasbourg*, volume 191 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 147–169. Springer Berlin / Heidelberg, 1971. 10.1007/BFb0058856.
- [Man72] B. Mandelbrot. Renewal sets and random cutouts. *Probability Theory and Related Fields*, 22:145–157, 1972. 10.1007/BF00532733.
- [Nev61] Jacques Neveu. Une generalisation des processus à accroissements positifs independants. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 25:36–61, 1961. 10.1007/BF02992774.
- [Pea05] K. Pearson. The problem of the random walk. *Nature*, LXXII:294, 1905.
- [Pin72] M. Pinsky. Limit theorems for continuous state branching processes with immigration. *Bulletin of the AMS*, 78(2):242–244, 1972.
- [Pro90] *Stochastic Integration and Differential Equations, A New Approach*. Springer-Verlag, 1990.
- [Pro05] P. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, 2005.
- [Rev98] M. Revuz, D. y Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, 3 edition, 1998.
- [Sat99] K. Sato. *Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 1999.
- [She72] L.A. Shepp. Covering the line with random intervals. *Wahrscheinlichkeitstheorie verw.*, Gebiete 23:163–170, 1972.
- [Sil04] D. Silvestrov. *Limit theorems for randomly stopped stochastic processes*. Springer, 2004.
- [Sta99] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume II. Cambridge University Press, 1999.

- 
- [Tud02] C. Tudor. *Procesos Estocásticos*. Sociedad Matemática Mexicana, 2002.