



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE POSGRADO EN ASTROFÍSICA

Instituto de Astronomía

ESTRUCTURA Y DINÁMICA DE GALAXIAS ESPIRALES NORMALES:  
ORDEN Y CAOS ORBITAL ESTELAR

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTORA EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

PRESENTA:  
MARÍA DE LOS ÁNGELES PÉREZ VILLEGAS

TUTORA  
DRA. BÁRBARA PICHARDO SILVA, INSTITUTO DE ASTRONOMÍA - UNAM

MÉXICO, D. F. FEBRERO 2013





*A mi mamá.*



# Agradecimientos

Quiero agradecer al Instituto de Astronomía y a la UNAM en general por todo el apoyo brindado durante la maestría y doctorado. A CONACyT por la beca otorgada, sin ella no hubiera sido posible hacer el doctorado y al proyecto PAPIIT IN11071, por el apoyo para asistir a congresos.

Mil gracias a todo el personal del Instituto de Astronomía, quienes hacen posible que lo estudiantes tengamos todo funcionando correctamente, en particular gracias a la Sra. Maru por su preocupación constante, “Playa”, Heike, Bertha (muchas muchas gracias, siempre haces que todo este listo, y gracias también por esas platicas en los momentos de histeria), Carmelito, Francisco y Alf (gracias por “revivir” a mi maquina cada que moría).

A los Doctores Luis Aguilar, Christine Allen, Gilberto Gómez, Ivanio Puerari y Bárbara Pichardo por aceptar ser mis sinodales y haber leído con mucho cuidado esta tesis. GRACIAS por cada una de sus correcciones y sugerencias lo que hicieron que esta tesis quedara mejor.

Un agradecimiento muy especial al Dr. Edmundo Moreno, usted fue una guía importante en todo este camino, siempre dispuesto a explicarme todo y darme ánimos. Una vez más le agradezco por haber leído esta tesis y corregirla sin ser un sinodal y no por eso con menos cuidado.

A Luis Aguilar, por las clases, explicaciones, interés y retos constantes. Gracias por cada uno de los consejos dados a lo largo de la maestría y doctorado. Fue realmente un honor trabajar contigo Luis.

A Marco Martos, por darme ánimos en el proceso de admisión a la maestría y creer que podía entrar, por sus comentarios como parte de mi comité tutor.

A Bárbara, por ser mi mentora, por todo el tiempo y paciencia dedicado para ex-

---

plicarme una y otra vez hasta que me quedaron claras las cosas, por escucharme y aconsejarme no sólo en lo académico sino también en lo personal, por tu preocupación continua. Gracias por ser una de las pocas personas en creer en mí desde el primer día en el que te pedí fueras mi tutora y sin pensarlo tu respuesta fue sí.

A Antonio Peimbert, por el tiempo y paciencia brindado para aclarar mis dudas, por los consejos que me diste y la preocupación a lo largo de estos años.

A mi querida Ángeles, por su compañía y por todas esas horas de risa que me hicieron más llevadero el estrés y la presión continua a lo largo de la maestría y doctorado. Me siento afortunada por haberte conocido ese día en el estacionamiento donde nos reímos (ahí comenzó todo) por llamarnos igual. Gracias por aceptar ir a Ensenada durante los generales, sin ti yo creo que me hubiera aventado a las piedras (jajaja). Esas idas a SPM que serán inolvidables, poder platicar de todo un poco. GRACIAS por siempre estar ahí.

A Ángeles Guerrero, por siempre estar ahí para brindarme su apoyo incondicional desde el primer momento que la conocí, por escucharme cuando me he sentido desesperada y ayudarme a ver que no estoy sola.

A Patricia Estrada, por el tiempo para escucharme, la preocupación y por darme valiosos consejos que me fueron de mucha utilidad.

A Gabina, por enseñarme a ver que las cosas pueden ser de una forma distinta.

A Sergio Quijano, por el apoyo incondicional, escucharme y darme ánimos cuando pensé en “tirar la toalla”, por hacer todo lo imposible para que tuviera lo necesario para continuar con este sueño, que ahora es mi realidad. Gracias por tu amor, paciencia y comprensión.

A mi papá, por hacer, aunque sin saberlo, que en mí naciera el amor a las matemáticas.

A mis hermanas Liz y Jenny, por siempre estar al pendiente de mí, escucharme y por su comprensión a largo de estos años que he tenido que alejarme.

A mi abuelita, que siempre me escucho y me dió ánimos en todo momento.

A mi mamá, por siempre creer en mí sin dudarle un minuto, no hay palabras que expresen todo mi agradecimiento hacia ti, sólo ¡GRACIAS MAMÁ! por hacerme la mujer que soy.

*María de los Ángeles Pérez Villegas.*

# Índice general

Agradecimientos	III
<b>1. Resumen</b>	<b>1</b>
1.1. Resumen . . . . .	1
1.2. Abstract . . . . .	7
<b>I CONCEPTOS INTRODUCTORIOS</b>	<b>13</b>
<b>2. Introducción General</b>	<b>15</b>
2.1. Clasificación Morfológica de Galaxias . . . . .	16
2.1.1. La Secuencia de Hubble . . . . .	18
2.2. Galaxias Espirales “Normales” . . . . .	21
2.2.1. Curvas de Rotación en Galaxias Espirales . . . . .	22
2.2.2. Orden y Caos Orbital en Galaxias . . . . .	24
2.3. Objetivos Generales y Organización de la Tesis . . . . .	29
<b>3. Parámetros Estructurales y Dinámicos de Galaxias Espirales “Normales” Motivados en Observaciones</b>	<b>33</b>
3.1. Fondo Axisimétrico . . . . .	34
3.1.1. Bulbos . . . . .	34
3.1.2. Discos . . . . .	36
3.1.3. Halos . . . . .	39
3.2. Estructura No Axisimétrica: <i>Brazos Espirales</i> . . . . .	41
3.2.1. Ángulo de Enrollamiento . . . . .	43

3.2.2. Número de brazos . . . . .	46
3.2.3. Masa Total y Ley de Densidad . . . . .	47
3.2.4. Velocidad Angular de los Brazos Espirales . . . . .	47
3.2.5. Límite Interno y Externo . . . . .	48
3.2.6. Lugar Geométrico . . . . .	49
3.2.7. Floculencia . . . . .	50
<b>II METODOLOGÍA</b>	<b>51</b>
<b>4. Modelos de Potencial para Galaxias Espirales Normales</b>	<b>53</b>
4.1. Potencial Axisimétrico . . . . .	55
4.2. Modelos de Brazos Espirales . . . . .	58
4.2.1. TWA ( <i>Potencial Coseno</i> ) . . . . .	60
4.2.2. Modelo PERLAS . . . . .	63
<b>5. Técnicas para el Análisis Orbital</b>	<b>71</b>
5.1. Diagramas de Poincaré . . . . .	73
5.2. Órbitas Periódicas . . . . .	78
5.3. Respuesta en Densidad . . . . .	81
5.4. Exponentes de Lyapunov . . . . .	83
<b>III RESULTADOS</b>	<b>87</b>
<b>6. Ajustes de los Modelos a Galaxias Espirales Normales</b>	<b>89</b>
6.1. Modelos para Galaxias Sa . . . . .	91
6.2. Modelos para Galaxias Sb . . . . .	93
6.3. Modelos para Galaxias Sc . . . . .	96
6.4. Parámetros utilizados en los Modelos Galácticos . . . . .	99
<b>7. Comparación de PERLAS y TWA en una Galaxia tipo Vía Láctea sin Barra</b>	<b>103</b>
7.1. Ajustando el Potencial y Fuerza de TWA con PERLAS . . . . .	104
7.2. Análisis Orbital en el Plano Galáctico . . . . .	112



<b>8. Restricciones a Parámetros Dinámicos y Estructurales de Galaxias</b>	<b>117</b>
<b>Espirales Normales</b>	<b>117</b>
8.1. Ángulo de Enrollamiento . . . . .	118
8.1.1. Restricción Basada en el Comportamiento Ordenado . . . . .	119
8.1.2. Restricción Basada en Caos Orbital Estelar . . . . .	131
8.2. Velocidad Angular de los brazos . . . . .	145
8.3. Masa de los Brazos . . . . .	162
<b>9. Conclusiones</b>	<b>173</b>
9.1. Trabajo en Proceso y a Futuro . . . . .	178
<b>IV APÉNDICES</b>	<b>181</b>
<b>A. Artículos</b>	<b>183</b>
A.1. Artículo: Pitch Angle Restrictions in Late Type Spiral Galaxies Based on Chaotic and Ordered Orbital Behavior . . . . .	183
A.1.1. Introduction . . . . .	185
A.1.2. Methodology and Numerical Implementation . . . . .	187
A.1.3. Results . . . . .	188
A.1.4. Conclusions . . . . .	193
A.2. Artículo: Structural Parameters Restrictions in Normal Spiral Galaxies Based on Chaotic and Ordered Orbital Behavior I: The Pitch Angle . .	198
A.2.1. Introduction . . . . .	199
A.2.2. Methodology and Numerical Implementation . . . . .	203
A.2.3. Results . . . . .	212
A.2.4. Conclusions . . . . .	221
<b>B. Esferoides Oblatos Homogéneos e Inhomogéneos</b>	<b>229</b>
<b>C. Los Métodos de Integración</b>	<b>235</b>
C.1. El Método de Bulirsch-Stoer . . . . .	235
C.2. El Método de Runge-Kutta de Orden 7mo-8vo . . . . .	237
C.3. El Método de Newton-Raphson . . . . .	238

<b>D. Parámetros para los Códigos Computacionales</b>	<b>243</b>
D.1. Código de Diagramas de Poincaré . . . . .	243
D.2. Código para las órbitas periódicas . . . . .	246
<b>Bibliografía</b>	<b>247</b>

# Capítulo 1

## Resumen

### 1.1. Resumen

En la literatura actual existen algunos modelos de potencial para galaxias espirales. Sin embargo, éstos modelan más bien galaxias específicas, además de que rara vez son accesibles, esto es, en general no proporcionan la información suficiente para construirlos. Ejemplos de estos modelos son los de Contopolous y Grosbøl (1986, 1988), para galaxias espirales normales y Kaufmann y Contopoulos (1996) para galaxias espirales barradas. El primer objetivo de esta tesis es la construcción de una familia de modelos analíticos basados en los datos observacionales que se encuentran en la literatura.

Estos modelos siguen el esquema “ideal” introducido por Hubble en 1926. El análisis se hace a través de estudios orbitales (órbitas ordenadas y caóticas), con lo cual buscamos restringir parámetros dinámicos y estructurales de las galaxias espirales normales. El esquema de clasificación de Hubble presenta varios tipos morfológicos de galaxias: elípticas, espirales normales, espirales barradas e irregulares. Nosotros nos enfocaremos en las llamadas “galaxias espirales normales”. Empleando la definición de Hubble, las galaxias espirales normales van de tempranas a tardías (Sa a Sc). Una galaxia tipo Sa posee brazos espirales muy enrollados y un bulbo central conspicuo; una galaxia tipo Sc tiene brazos espirales abiertos y filigrana<sup>1</sup> y un bulbo central muy pequeño. Sin embargo, en la “vida real”, el esquema de clasificación de Hubble no describe totalmente las galaxias, es decir, los parámetros estructurales presentan una gran dispersión entre

---

<sup>1</sup>En inglés “floculent”.

galaxias clasificadas con el mismo tipo morfológico. Ésto depende de los criterios que se han tomado en cuenta para hacer la clasificación. Hemos empleado el esquema de clasificación de Hubble en lo relativo al fondo axisimétrico (bulbo, disco y halo) para estudiar la dinámica orbital estelar sobre el disco producida por los brazos espirales en diferentes tipos morfológicos.

Para modelar las galaxias espirales normales, hemos empleado un potencial de fondo tridimensional. Los potenciales que emplea este modelo son completamente analíticos, lo que hace relativamente simple su implementación. El bulbo y disco son de la forma propuesta por Miyamoto y Nagai (1975) y un halo masivo esférico (Allen y Santillán 1991). Ajustamos los modelos de otros tipos de galaxias considerando las curvas de rotación típicas para galaxias Sa, Sb y Sc, además de las razones de masa del bulbo-disco.

El potencial más utilizado para modelar la estructura espiral es la solución analítica del TWA (Tight Winding Approximation), esto es, el *potencial coseno*. Este potencial es bidimensional y está basado en la teoría de Ondas de Densidad (Lin y Shu 1964). En este esquema los brazos espirales son una perturbación al fondo axisimétrico. En el régimen lineal, los brazos espirales son autoconsistentes con la ecuación de Poisson, esto es, brazos espirales muy débiles y con ángulos de enrollamiento pequeños. También hemos empleado otro modelo para la estructura espiral, el modelo PERLAS (sPiral arms potential foRmed by obLAte Spheroids -Pichardo et al. 2003). PERLAS es un modelo tridimensional, basado en una distribución de densidad (a diferencia de la TWA). Se basa en un principio de superposición de potenciales y consiste en colocar un conjunto de esferoides oblatos inhomogéneos individuales a lo largo de un contorno de forma espiral; los brazos se superponen sobre un fondo axisimétrico. El modelo PERLAS es ajustable a los brazos de una galaxia siempre y cuando se conozcan los parámetros observacionales que los definen.

Dado que el potencial coseno es el potencial más utilizado para modelar brazos espirales, realizamos una comparación entre el coseno y PERLAS para el caso de una galaxia tipo Vía Láctea sin barra. En esta comparación hacemos notar las diferencias, tanto entre los potenciales como entre las fuerzas, y probamos que un potencial tan simple como un coseno es incapaz de reproducir los detalles de un potencial basado en una distribución de masa.

Uno de los productos principales de la tesis es el estudio orbital estelar detallado del comportamiento caótico y ordenado en diferentes tipos de galaxias espirales, producido por el efecto de los brazos espirales sobre el disco galáctico. Estudios de este tipo requieren de una buena resolución, que desafortunadamente no se obtiene con códigos de N-cuerpos hasta el momento, donde cada partícula representa promedios de cientos o miles de masas estelares. El estudio formal de caos orbital requiere de una precisión enorme. Con base en lo anterior, en este trabajo empleamos potenciales estacionarios para modelar galaxias espirales normales.

Sobre la dinámica orbital, en lo referente al orden, las órbitas nos dan información sobre la plausibilidad de un modelo autoconsistente (es decir, ver que tanto la forma de las órbitas resultantes ayuda a soportar una distribución de masa acorde con el potencial impuesto) con lo cual seremos capaces de poner restricciones a diferentes parámetros galácticos tales como el ángulo de enrollamiento máximo (*“pitch angle”*), las velocidades de rotación máximas y mínimas de las estructuras no axisimétricas, las razones de masa de brazos contra la componente axisimétrica, entre otros, observando si los potenciales impuestos son apoyados por las órbitas (especialmente las periódicas). En lo referente al caos, de la misma forma que las órbitas periódicas pueden ayudar a determinar si un potencial dado es autoconsistente orbitalmente, encontramos que el comportamiento caótico es muy importante para restringir máximos y/o mínimos posibles para parámetros galácticos antes del desarrollo severo del caos, esto es, antes de que las órbitas caóticas destruyan la forma de las estructuras de gran escala (brazos, barras, etc).

Como se ha mencionado anteriormente, la componente más afectada por los brazos espirales es el disco galáctico. Los métodos para el estudio dinámico orbital utilizados en este trabajo son los diagramas de Poincaré (Sección 5.1) y las órbitas periódicas (con éstas calculamos la respuesta en densidad -Sección 5.2). Los diagramas de Poincaré, se crean en el espacio fase. Las órbitas periódicas, por otro lado, son las órbitas “madre” de los potenciales; estas órbitas son las que dan estructura a las demás órbitas regulares, incluso de las órbitas caóticas, si el caos es moderado. A las órbitas periódicas se les conoce como el “esqueleto dinámico” del sistema (el resto de las órbitas libra alrededor de éstas), se cierran sobre sí mismas en un número finito de vueltas a la galaxia. Las órbitas periódicas más importantes se cierran en una sola vuelta y dibujan un solo

punto en el diagrama de fase (de Poincaré). Las órbitas caóticas se ven como puntos dispersos en los diagramas de Poincaré; las regiones de órbitas caóticas pueden rodear a las órbitas periódicas, un exceso de caos destruye a los patrones, esto es, si el caos penetra hasta las órbitas periódicas.

Los diagramas de Poincaré tienen dos regiones, la llamada región prógrada, en donde las estrellas van en la misma dirección que los brazos espirales, y la región retrógrada, donde las estrellas van en dirección opuesta a los brazos. La región más interesante es la región prógrada, donde se mueve la gran mayoría de las estrellas en galaxias espirales. El caos se genera en esta región, debido principalmente al traslape de resonancias que se da en la región prógrada. En la región retrógrada las resonancias están muy separadas, por lo que la producción de caos en estas órbitas es casi mínima.

Una vez calculadas las órbitas periódicas para el potencial de brazos espirales, hemos seguido el método de Contopoulos y Grosbøl (1986) para obtener la respuesta en densidad. Este método supone que las estrellas atrapadas alrededor de una órbita circular sin perturbar (órbitas en el potencial axisimétrico), son también atrapadas alrededor de la órbita central correspondiente en presencia de la perturbación. De esta forma, calculamos una serie de órbitas periódicas y buscamos la respuesta en densidad usando la conservación de flujo de masa entre dos órbitas sucesivas.

Para los modelos galácticos, es necesario ajustar el modelo con parámetros típicos de galaxias Sa, Sb y Sc. Para esto, se realizó una búsqueda en la literatura de los parámetros dinámicos y estructurales para galaxias espirales normales. Como mencionamos anteriormente, estamos siguiendo la clasificación de Hubble para el fondo axisimétrico, por lo que nuestros modelos van de galaxias masivas a poco masivas. La curva de rotación decrece con el tipo de Hubble (van mayor a menor). Con respecto a la velocidad angular de los brazos espirales, no existen mediciones precisas para diferentes tipos morfológicos. Construimos entonces modelos que aproximan la autoconsistencia, siguiendo órbitas periódicas para aproximar las velocidades angulares de los patrones espirales en diferentes modelos. La velocidad angular de los brazos espirales determina en nuestros modelos la extensión espacial de los brazos a través de las regiones de resonancias. Como la mayoría de los modelos de brazos espirales utilizan un coseno, no se trabaja directamente con la masa de los brazos espirales, sino con la amplitud; a diferencia del potencial coseno, PERLAS representa una distribución de masa. Para probar

que los brazos espirales tienen una masa razonable, hemos calculado el parámetro  $Q_T$  (Combes y Sanders 1981), que representa la razón entre la fuerza máxima tangencial y el promedio de la fuerza radial axisimétrica.

Considerando la dispersión observacional en el valor del ángulo de enrollamiento (Kennicutt 1981; Ma et al 2000) y usando el modelo PERLAS para la estructura espiral, hemos analizado la dinámica orbital como función del ángulo de enrollamiento, para galaxias tipo Sa, Sb y Sc, con la finalidad de buscar un límite a este parámetro estructural. En este estudio hemos encontrado dos restricciones al ángulo de enrollamiento para galaxias espirales normales. La primera restricción está basada en el comportamiento ordenado. Con órbitas periódicas encontramos que el límite de la respuesta en densidad está aproximadamente en  $15^\circ$  para galaxias Sa,  $18^\circ$  para galaxias Sb y  $20^\circ$  para galaxias Sc, estos límites son hasta donde la respuesta en densidad “apoya” al potencial de brazos espirales impuesto a todos los radios. Para ángulos de enrollamiento menores, este potencial de brazos espirales podría ser de larga duración. Más allá de estos límites, la respuesta en densidad trata de “evitar” el patrón espiral impuesto, produciendo ángulos de enrollamiento más pequeños que los impuestos. En este caso los brazos espirales podrían ser explicados como una estructura más bien transiente. Al mismo tiempo, hicimos una comparación entre la respuesta en densidad y la densidad impuesta (potencial de brazos espirales, PERLAS). Con esta comparación notamos que para ángulos de enrollamiento aproximadamente hasta  $15^\circ$  (para galaxias Sa),  $18^\circ$  (para galaxias Sb) y  $20^\circ$  (para galaxias Sc), la respuesta en densidad es casi la misma que la impuesta, esto significa que la estructura espiral podría ser de larga duración. Por otro lado, si los ángulos de enrollamiento son más grandes que los límites, la respuesta en densidad no es la misma que la impuesta, por lo que los brazos espirales no son los mismos que se imponen. Esto puede ser explicado si suponemos que se tratan de estructuras transitorias.

La segunda restricción está basada en el comportamiento caótico. El límite para el ángulo de enrollamiento lo hemos obtenido con estudios en el espacio fase (diagramas de Poincaré). También tenemos un límite para cada tipo morfológico: para una galaxia Sa, el límite es  $\sim 30^\circ$ , para una Sb, el límite es  $\sim 40^\circ$  y para una galaxias Sc, el límite es  $\sim 50^\circ$ . En estos límites la región de caos domina. Sin embargo, aún existen órbitas periódicas las cuales apoyan la existencia de brazos espirales. Más allá de estos límites,

el caos llega a ser tan dominante que destruye el apoyo orbital. Con este estudio somos capaces de poner un límite a ángulos de enrollamiento máximos en galaxias espirales normales antes de que el sistema llegue a ser completamente caótico.

Finalmente hicimos estudios variando la velocidad angular y la masa de los brazos espirales buscando restricciones también para estos parámetros en diferentes tipos morfológicos. Con estos estudios notamos que el efecto sobre la dinámica orbital del disco obtenida al variar parámetros tales como la velocidad angular y la masa de los brazos espirales, está ligada al ángulo de enrollamiento.



## 1.2. Abstract

Few potential models for spiral galaxies exist on the current literature, which model rather specific galaxies, in addition to the existing models hardly accessible for their use, not giving the necessary information to build them. Examples about these models are given by Contopoulos & Grosbøl (1986, 1988) for normal spiral galaxies, and Kaufmann & Contopoulos (1996) for barred spiral galaxies. The first aim of this thesis is the construction of an analytic family of models based on observational data from literature.

Our models follow the scheme introduced by Hubble in 1926. The analysis is done through orbital studies (ordered and chaotic orbits), searching for dynamic and structural parameter restrictions in normal spiral galaxies.

The Hubble sequence has several morphological type of galaxies: elliptic galaxies, normal spirals galaxies, barred spiral galaxies and irregular galaxies. We focus in the called “normal spiral galaxies”. Using Hubble’s definition, the normal spiral galaxies ranging from “early” to “late” (Sa to Sc). An Sa galaxy possesses closed spiral arms and a conspicuous central bulge; an Sc galaxy has open and flocculent spiral arms and a small central bulge. However, in the “real life”, the Hubble scheme does not fully describe the galaxies, i.e., structural parameters present a large scatter among catalogued galaxies with the same morphological type, this depends on the criteria used to do the classification. We have used the Hubble classification scheme regarding to the axisymmetric background (bulge, disk and halo) to study the stellar orbital dynamics on the disk produced by the spiral arms in different morphological types.

To model normal spiral galaxies, we have employed a three-dimensional background potential. The potentials that this model uses are completely analytical, making their implementation fairly straightforward. The bulge and disk are of the form proposed by Miyamoto-Nagai (1975) and a massive spherical halo. We fit the models of different galaxy types considering the typical rotation curves for Sa, Sb and Sc galaxies, also of the bulge-disk mass ratio.

The most common potential used to model the spiral structure is the analytical solution of the TWA (Tight Winding Approximation), this is, the *classical cosine*, this is a two-dimensional potential and it is based on the density wave theory (Lin & Shu 1964).

In this scheme, the spiral arms are a perturbation to the axisymmetric potential. In the linear regime, the spiral arms are self-consistent with the Poisson's equation, this means that the spiral arms are faint and with small pitch angle. At the same time, we have employed another model for the spiral structure, PERLAS model (sPiral arms potEntial foRmed by obLAte Spheroids -Pichardo et al. 2003-). PERLAS is a three-dimensional model based on a density distribution (unlike the TWA), and a superposition principle of potentials; it consists placing a group of oblate, inhomogeneous spheroids along a spiral locus, the arms are superimposed on an axisymmetric background. The PERLAS model fits the arms of any galaxy provided the observational parameters that define them are known.

As the cosine potential is the most used to model spiral arms, we made a comparison between the cosine and PERLAS for a Milky Way-like galaxy, without the bar. In this comparison we show that differences between the models in both potentials and forces are large, and a simple potential such as the cosine is unable to reproduce the details of a potential based on a mass distribution.

One of the main goals of the thesis is the stellar orbital detailed study of chaotic and ordered behavior in different type of spiral galaxies produced by the spiral arms effect on galactic disks. Studies of this type require a good resolution, unfortunately this is not presently obtained with N-body simulations, where each particle represents an average of hundreds or thousands of stellar masses. The formal study of orbital chaos requires high resolution orbital studies, for this purpose, we employ stationary potentials to model normal spiral galaxies.

Concerning ordered motion, the orbits give us information of the statistic stability (by that I mean as an approximation to the self-consistency) of a given model. With this, we will be able to impose restrictions to different parameters such as the pitch angle, the angular velocity of the spiral structure and the mass ratio of the arms vs. disk, observing if the imposed potentials are supported by the orbits (mainly periodic orbits). Regarding chaotic motion, in the same manner as the periodic orbits can help to determine if a given potential is orbitally self-consistent, chaos is important to pose some restrictions to galactic parameters before the development of a severe chaos, this is, before the chaotic orbits destroy the shape of large scale structures (spiral arms, bars, etc).

As mentioned above, the most affected component by spiral arms is the galactic disk. The main methods to the orbital dynamics study are Poincaré diagrams (Section 5.1) and periodic orbits (with these we calculate the density response -Section 5.2-) that we have used. Poincaré diagrams are made in the space of positions and velocities. Periodic orbits are the main orbits in the potentials, these act as attractors of the other orbits; even of the chaotic orbits (as long as it is not pervasive). Periodic orbits are known as the “backbone” of the dynamical systems.

Chaotic orbits are seen as scattered points on Poincaré diagrams: the chaotic regions may surround periodic orbits, an excess of chaos destroys large scale patterns, i.e., if chaos penetrates up to the periodic orbits regions. Without periodic orbits, there is no orbital support to the imposed potential.

Poincaré diagrams have two regions, the prograde region where the stars move in the same direction than spiral arms and the retrograde region where the stars move in opposite direction to the spiral arms. The most interesting region is the prograde region where the great majority of stars are moving in spiral galaxies. Chaos is generated in this region, mostly due to the overlapping of resonances. In the retrograde region, the resonances are very separated, thus the production of chaos is almost null.

Once we calculated the periodic orbits to the spiral arms potential, we have followed the method of Contopoulos & Grosbøl (1986) to obtain the density response to the given spiral potential. This method assumes that the stars with orbits trapped around an unperturbed circular orbit, and with the sense of rotation of the spiral perturbation, are also trapped around the corresponding central periodic orbit in the presence of the perturbation. In this manner, we computed a series of central periodic orbits and found the density response along their extension using the conservation of mass flux between any two successive orbits.

For galactic models, is necessary to fit the model with typical parameters of galaxies Sa, Sb and Sc. For this, we searched in the literature to obtain dynamical and structural parameters for normal spiral galaxies. As mentioned above, we are following the “ideal” Hubble classification, therefore, our models ranging from massive galaxies to low mass galaxies, in this same sense, the rotation curves ranging from high to low. Regarding the angular velocity of the spiral arms, there are not confident observational values for this parameter. Then, we built orbitally self-consistent models following periodic orbits to

approximate the pattern speed in different models. The spiral arms velocity determines the inner and outer limits of the arms in our models, computing the resonance regions. Since PERLAS, unlike the cosine potential, is a relatively new potential in literature, we should prove that the spiral arms mass is reasonable; for this purpose, we calculate the parameter  $Q_T$  (Combes & Sanders 1981). It represents the ratio between the maximum amplitude of the tangential forces and the mean axisymmetric radial force.

Considering the wide scatter in the pitch angle (Kennicutt 1981; Ma et al. 2000) for each type of galaxy, with PERLAS we studied the effects on the dynamical behavior in the plane of the disk as a function of the pitch angle, ranging from  $4^\circ$  to  $40^\circ$ , for an Sa galaxy, from  $8^\circ$  to  $45^\circ$ , for an Sb galaxy and from  $10^\circ$  to  $60^\circ$ , for an Sc galaxy. In this study we present two important restrictions relative to one structural parameter of the spiral galaxies: the pitch angle. The first restriction is based on ordered behavior. With periodic orbits, we have found that the limit of the density response is at approximately  $15^\circ$  for Sa galaxies,  $18^\circ$  for Sb galaxies and  $20^\circ$  for Sc galaxies, these limits are up to which density response supports the spiral arm potential at all radii. These spiral arms potentials could be of long-lasting nature. Beyond these limits, the density response produces systematically smaller pitch angles than the imposed spiral arms. Galaxies with spiral arms beyond these limits would rather be explained as transient features. In addition, the comparison between the density response and density imposed (spiral arms potential, PERLAS), we realized that with pitch angles approximately up to  $15^\circ$  (for Sa galaxies),  $18^\circ$  (for Sb galaxies) and  $20^\circ$  (for Sc galaxies), the density response is almost the same than the density imposed, this means that the spiral arms are the same, then the spiral arms could be long-lasting structures.

The second restriction is based on chaotic behavior, and we have obtained it from phase space studies. There is also a limit for each morphological type: for an Sa, the limit is  $\sim 30^\circ$ , for an Sb, the limit is  $\sim 40^\circ$ , and for an Sc the limit is  $\sim 50^\circ$ . In these limits, the chaotic region dominates. However, it still exist periodic orbits supporting the spiral structure. Beyond these limits, chaos becomes pervasive destroying their orbital support. With this orbital study, we are able to give a limit for maximum pitch angles in normal spiral galaxies before the system becomes completely chaotic.

Finally, we studied orbital dynamics now varying other parameters as, pattern speed and mass of the spiral arms, also we were looking for restriction for these parameters

in different morphological types. In these studies we noticed that the spiral arms effect produces to the dynamical disk when we vary the pattern speed and mass is strongly linked to the pitch angle.



# Parte I

## CONCEPTOS INTRODUCTORIOS





# Capítulo 2

## Introducción General

Desde la antigüedad, el ser humano ha tenido curiosidad por observar el Universo y los fenómenos que ocurren en éste. Debido a que el ojo humano no tiene la capacidad de resolver los objetos a grandes distancias, el hombre se las ha ingeniado para construir las herramientas que le permitan entender el Universo.

El primer astrónomo que observó el cielo con un telescopio fue Galileo Galilei (1609). Galileo observó esa franja luminosa que atravesaba el firmamento y notó que se trataba de un conjunto de estrellas individuales, la Vía Láctea, nuestra Galaxia (también conocida simplemente como *La Galaxia*).

En 1755, el filósofo alemán Immanuel Kant afirmaba que la Vía Láctea era un sistema formado por miles de sistemas solares como el nuestro. Desde un planteamiento completamente teórico, Kant afirmó que era lógico suponer la existencia de otros planetas y satélites orbitando alrededor de otras estrellas, y que debían existir otras Vías Lácteas (“islas universo”, como las llamaba Kant) separadas a distancias de un orden de magnitud comparable a su tamaño.

A finales del siglo XVIII las galaxias aún no habían sido descubiertas formalmente, sólo se conocían las nebulosas y nebulosas espirales. En particular, existía una controversia de si las nebulosas espirales eran objetos que estaban dentro de nuestra Galaxia o fuera. Más tarde, Charles Messier compiló un catálogo de objetos nebulosos, el Catálogo Messier, que contenía 103 objetos, al cual denominó “*Nebulosas y Cúmulos de Estrellas*”. Posteriormente, William Herschel elaboró un catálogo, con hasta 2514 objetos de espacio profundo. En 1845, Lord Rosse construyó un nuevo telescopio y éste le

permitió distinguir las “nebulosas” irregulares de las espirales.

En 1917 Heber Curtis realizó observaciones de novas en la “nebulosa” de Messier, M31 (galaxia de Andromeda). En éstas observó que eran 10 órdenes de magnitud más débiles comparadas con las observadas en nuestra Galaxia. Con base en este estudio, Curtis sostenía que las “nebulosas espirales” eran galaxias independientes. En 1920 se llevó a cabo el llamado “Gran Debate” entre Harlow Shapley y Heber Curtis, en torno a la naturaleza de nuestra Galaxia, las “nebulosas espirales” y la dimensión del Universo. Para defender la afirmación de que M31 era una galaxia externa, Curtis argumentaba que las líneas oscuras observadas en dicha “nebulosa” eran similares a las nubes de polvo que se observan en la nuestra.

El uso de un telescopio con más resolución, le permitió a Edwin Hubble resolver las partes exteriores de algunas “nebulosas espirales” como conjuntos de estrellas individuales. Hubble pudo determinar las distancias de dichas “nebulosas” por medio de variables cefeidas. Él pudo notar que las distancias de estos objetos eran demasiado grandes como para pertenecer a la Vía Láctea. A partir de este momento se adopta el término *galaxia* (deriva de la palabra griega para leche) para referirse a esas “nebulosas”, espirales o elípticas, que se encontraban a grandes distancias de nosotros. En 1926 Hubble definió un esquema de clasificación de galaxias, este esquema aún se sigue empleando en la actualidad. Desde que Hubble (1926) introdujo su clasificación de galaxias, los astrónomos han tratado de encontrar todo tipo de correlaciones entre sus parámetros físicos (tanto dinámicos como estructurales) de las galaxias de acuerdo con su clasificación morfológica.

La presente tesis hace uso de los conocimientos actuales que hay en torno a las galaxias espirales normales y la tecnología computacional actual que nos permite aportar al entendimiento de las galaxias espirales.

## 2.1. Clasificación Morfológica de Galaxias

Los primeros pasos en el estudio de la estructura de las galaxias fueron el desarrollo de esquemas de clasificación. Edwin Hubble hizo una gran contribución a la astronomía desarrollando el primer esquema de clasificación, basado en la apariencia visual de las galaxias (Hubble 1926, 1936). El esquema de clasificación de Hubble presenta varios

tipos morfológicos de galaxias: elípticas, espirales normales, espirales con barra e irregulares. Las espirales tanto normales como barradas, van de tipos tempranos (Sa o SBa para normales o barradas, respectivamente) a tardíos (Sc o SBc), es decir, van de masas totales muy grandes (las cuales se obtienen de modelos asociándoles una razón masa luminosidad determinada), bulbos masivos y brazos espirales muy cerrados y suaves a masas totales pequeñas, bulbos poco masivos y brazos espirales abiertos y con filigrana (Hubble 1926, 1936).

La secuencia de Hubble ha sido modificada y expandida a lo largo de la historia por otros astrónomos, como Allan Sandage (1961), Gerard de Vaucouleurs (1959), Sidney van der Bergh (1960) y John Kormendy (1979); los esquemas de clasificación que sucedieron al esquema de Hubble han servido para dar una clasificación más detallada de las galaxias, aunque los fundamentos se han mantenido relativamente sin cambios.

En la Tabla 2.1 se muestran distintos esquemas que han sido empleados en la literatura y los criterios considerados para clasificar una galaxia en cada uno de los diferentes esquemas.

Sandage y de Vaucouleurs añadieron algunas modificaciones al esquema de la clasificación de Hubble, introdujeron tipos tardíos entre las galaxias Sc y las Irr I, que llamaron: Sd y Sm. Subdividieron las espirales en tipos intermedios, como por ejemplo S0/a, Sab, Sbc, Scd, también incluyeron información sobre la estructura interna y externa en las espirales. Las galaxias S0 se han separado en distintas clases en función de la absorción por polvo en sus discos o por la importancia de su barra en el caso de las SB0.

Van den Bergh descubrió que el brillo y apertura de los brazos espirales estaban relacionados con la luminosidad de la galaxia. De Vaucouleurs propuso una clasificación numérica para los tipos morfológicos (tipos T), se muestra en la Tabla 2.2.

Otra modificación ha sido la de van den Bergh, al incluir una secuencia adicional entre las galaxias lenticulares y las espirales normales. Esta secuencia de espirales, denominada “Anémica”, se designa como Aa, Aba, Ab, etc. Se caracterizan por tener una estructura espiral difusa, generalmente con bajo brillo superficial y un déficit de gas en relación con las espirales normales de morfología semejante.

TABLA 2.1: Diferentes esquemas de clasificación de galaxias

Esquema	Criterios de clasificación	Símbolos	Ejemplos
Hubble-Sandage <sup>1</sup>	Prominencia de la barra; Razón disco/bulbo; Apertura de los brazos; Grado de resolución de los brazos	E, S0, S, SB, Irr a, b, c	M87=E1 M31=Sb M101=Sc GNM=Irr I
De Vaucouleurs <sup>2</sup>	Prominencia de la barra; Razón disco/bulbo; Apertura de los brazos; Anillos	E, S0, S, SA, SB, I a, b, c, d, m  (r), (s)	M87=E1P M31=SA(s)b M101=SAB(rs)cd GNM=SB(s)c
Yerkes <sup>3</sup>	Condensación central de luz; Prominencia de la barra	k, f, g, ,a E, R, D, S, B, I	M87=KE1 M31=kS5 M101=fS1 GNM=aff2
DDO <sup>4</sup>	Estrellas jóvenes en el disco; Prominencia de la barra condensación central de luz; clase y longitud de los brazos	E, So, A, S, Ir B a, b, c I, II, ..., V	M87=E1 M31=Sb I-II M101=Sc I GNM=Ir III-IV

<sup>1</sup> Sandage 1961-1995; <sup>2</sup> de Vaucouleurs 1959; <sup>3</sup> Morgan 1958-1970; <sup>4</sup> van den Bergh 1960-1976.

### 2.1.1. La Secuencia de Hubble

La secuencia de Hubble distingue varios tipos morfológicos de galaxias (Figura 2.1), que son las elípticas, dos familias de espirales y las irregulares. Las galaxias elípticas tienen una apariencia homogénea y regular. No contienen polvo (o contienen muy poco) ni estrellas jóvenes. Se subdividen por su grado de elipticidad (medida en las isofotas),  $e = 10(a - b)/a$ , en donde  $a$  y  $b$  son los semiejes mayor y menor de la elipse, respectivamente. Una galaxia esférica ( $e = 0$ ) se clasifica como **E0**, mientras las que tienen un aspecto más elíptico ( $e = 7$ ), son **E7**.

Las galaxias espirales, tanto normales (S) como barradas (SB), van desde tipos tempranos (Sa, SBa) hasta tipos tardíos (Sc, SBc). La clasificación de las espirales se basa en tres criterios: la razón entre las luminosidades del bulbo central y el disco, el ángulo de enrollamiento de los brazos espirales y el contraste, o grado de resolución

TABLA 2.2: Clasificación T de de Vaucouleurs.

Tipo T	Descripción
-6	Elíptica compacta
-5	Elíptica, elíptica enana E, dE
-4	Elíptica E
-3	Lenticular L-, S0-
-2	Lenticular L, S0
-1	Lenticular L+, S0+
0	S0/a, S0-a
1	Sa
2	Sab
3	Sb
4	Sbc
5	Sc
6	Scd
7	Sd
8	Sdm
9	Sm, Espiral de Magallanes
10	Im, Irregular de Magallanes, Irregular Enana
11	Irregular Compacta, Regiones HII Extragalácticas

de los brazos en estrellas y regiones HII. Siguiendo estos criterios, los tipos tempranos (Sa, SBa) tienen brazos muy cerrados y con poco contraste, mientras que el bulbo es grande; los tipos tardíos (Sc, SBc) tienen brazos muy abiertos, un alto contraste y un bulbo pequeño. Entre las galaxias elípticas y las espirales, existe un tipo de galaxias que son de transición, se denominan galaxias lenticulares y se clasifican como S0 o SB0.

Las galaxias irregulares se dividen en dos tipos: las tipo I (Irr I), como las Nubes de Magallanes, carecen de simetría y de núcleo, pueden resolverse en estrellas y regiones HII; las de tipo II (Irr II) son galaxias difíciles de clasificar, un ejemplo de este tipo de galaxias son las galaxias que resultan de una interacción, ya que éstas poseen fenómenos violentos de formación estelar.

Aún cuando Hubble no lo presentó así, durante los primeros años se tomaba el esquema de clasificación de Hubble como un esquema “evolutivo”, que va de izquierda

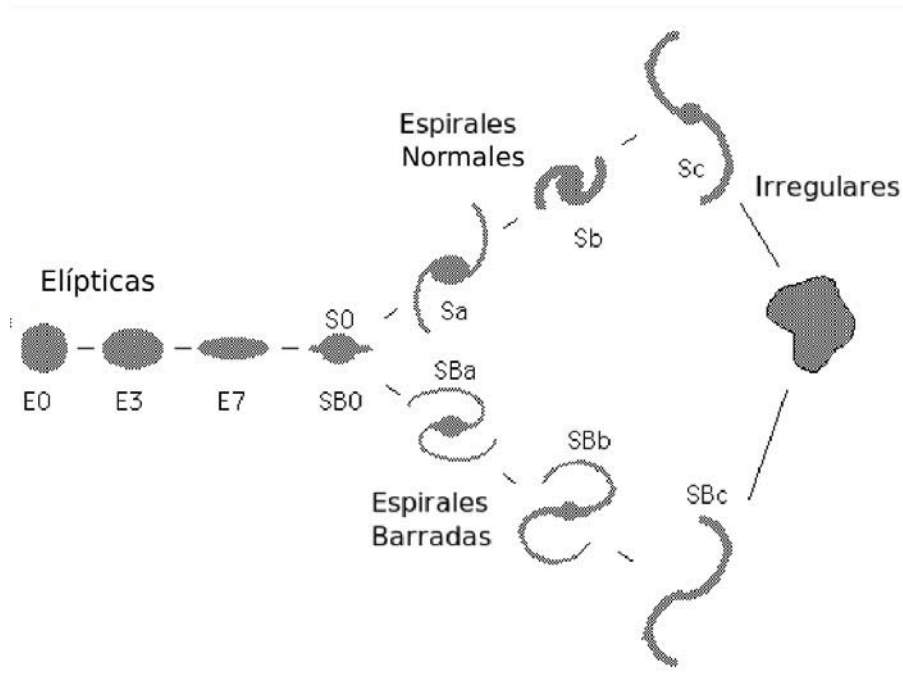


FIGURA 2.1: La figura muestra el esquema de la Secuencia de Hubble, con galaxias elípticas, galaxias espirales normales, galaxias espirales barradas y las irregulares.

a derecha, de ahí que las galaxias elípticas son conocidas como galaxias tempranas y las galaxias espirales como galaxias tardías. Al principio, se creyó erróneamente que las galaxias espirales se convertían en galaxias lenticulares y posteriormente en elípticas a medida que se agotaba el gas en la formación de estrellas y los brazos espirales se cerraban. Si ésto fuera cierto, la mayor parte de galaxias observadas serían elípticas y sus estrellas serían mucho más viejas que las estrellas de galaxias espirales.

Existe sin embargo, una gran dispersión en cada uno de los parámetros dinámicos y estructurales de las galaxias, tales como las masas de bulbos y discos (Weinzirl et al. 2009; Salucci et al. 2008; Pizagno et al. 2005; Roberts y Haynes 1994); el ángulo de enrollamiento de los brazos espirales (Kennicutt 1881; Ma et al. 2000; Ma 2002); la curva de rotación (Brosche 1971; Rubin et al. 1978; Rubin et al. 1985; Patsis et al. 1991; Sofue et al. 1999; Ma et al. 2000; Sofue y Rubin 2001), etc. Debido a esta gran dispersión no todas las galaxias pueden ser clasificadas siguiendo la definición de Hubble; una galaxia puede tener varias clasificaciones dependiendo de los criterios que

se han tomado.

La clasificación morfológica de Hubble resulta satisfactoria para corrimientos al rojo pequeños ( $z < 0.5$ ), mientras que para altos corrimientos al rojo se vuelve más difícil encontrar galaxias que sigan este esquema (van den Bergh 2002a). Ésto probablemente se deba a que las galaxias cercanas parecen haber tenido tiempo suficiente para relajarse, a diferencia de las galaxias con corrimientos al rojo grandes, que son sistemas aún en interacciones dinámicas severas.

En esta tesis se adoptará el esquema morfológico estándar de Hubble para modelar las galaxias espirales normales (Sa, Sb y Sc) y con ésto realizaremos estudios sobre la estructura orbital a través de los diferentes tipos morfológicos.

## 2.2. Galaxias Espirales “Normales”

Anteriormente se creía que el Universo estaba dominado por galaxias espirales sin barra, por lo que en el esquema de Hubble fueron llamadas *galaxias espirales normales*. Grosbøl y colaboradores (2002) realizaron observaciones en la banda K de 30 galaxias, las cuales fueron clasificadas como espirales normales de observaciones en el visible. Las observaciones (en la banda K) arrojan que el 75% de las galaxias presentan una barra o una distorsión oval en el centro galáctico. Con base a lo anterior, sugieren que el 95% de las galaxias espirales tienen algún tipo de barra o perturbación oval, aunque en muchos casos ésta es débil. La mayoría de las galaxias observadas en la banda K muestran un patrón espiral de dos brazos, de gran diseño y brazos simétricos (Grosbøl et al. 2002; Grosbøl et al. 2004).

Las galaxias espirales normales están formadas por un fondo axisimétrico (bulbo, disco y halo) y una componente no axisimétrica (brazos espirales). Una de las características más prominentes de las galaxias de disco son los brazos espirales que le dan su nombre a las galaxias más abundantes del Universo, las *galaxias espirales* (éstas representan el 70% de las galaxias en general –van Den Bergh 1998).

El disco de las galaxias espirales tiene rotación diferencial. Para estudiar la rotación de las galaxias se emplean observaciones espectroscópicas en el óptico y en radio. Una forma de observar en el óptico es con espectroscopía de rendija larga a diferentes ángulos, mientras que en radio se pueden realizar observaciones espectroscópicas de la línea de

21-cm del hidrógeno neutro (HI). Las observaciones en radio se llevan a cabo mediante dos técnicas; la primera consiste en medir la luz integrada (total) de la línea de 21-cm de la galaxia; la otra técnica consiste en cartografiados interferométricos de esta línea. El hidrógeno neutro en las galaxias espirales se encuentra principalmente fuera de las regiones centrales, con un máximo en la densidad superficial a varios kiloparsecs del centro. Por su parte, el gas en las regiones centrales se encuentra en su mayor parte en forma molecular (H<sub>2</sub>), lo que se deduce a partir de los mapas de distribución del monóxido de carbono (CO).

Las galaxias espirales muestran grandes cantidades de gas y polvo en los brazos, en donde también se encuentra evidencia de formación estelar reciente. Se cree que la mayor parte de formación estelar se lleva a cabo en la región de los brazos espirales. Sin embargo, en estudios realizados acerca de la formación estelar en la región de los brazos y en la región interbrazo, se concluye que la formación estelar en la región interbrazo es significativa también, incluso en galaxias espirales de gran diseño (Foyle et al. 2010).

La masa de los brazos espirales es baja comparada con la masa total del disco (hasta el 5% de la masa del disco, para una galaxia tipo Vía Láctea –Pichardo et al. 2003). Sin embargo, su distribución de masa es tal que afecta severamente la dinámica orbital interna de las galaxias, produciendo órbitas periódicas de alta elipticidad, regiones resonantes e importantes regiones de caos en el plano galáctico.

### 2.2.1. Curvas de Rotación en Galaxias Espirales

La curva de rotación de las galaxias espirales es la mejor herramienta para determinar las masas en galaxias espirales, además de proveer información fundamental para entender la dinámica, evolución y formación de galaxias espirales (Sofue & Rubin 2001).

La rotación de las galaxias fue descubierta cuando Slipher en 1914 detectó una inclinación en las líneas de absorción en el espectro de M31 y la galaxia del Sombrero. Al mismo tiempo Wolf (1914) también notó una inclinación en las líneas en el espectro de M81. A partir de este momento comenzó el estudio de la rotación de las galaxias.

Schwarzschild en 1954 analizó nuevamente la rotación de M31 y en su estudio reafirmó que la masa sigue la luz. De una manera más profunda, de Vaucouleurs (1959) concluyó que más allá de la velocidad máxima, la velocidad de transición decrece asintó-



ticamente como una kepleriana conforme incrementa la distancia al centro. Se esperaba este comportamiento en las curvas de rotación ya que se pensaba que disminuía la masa con el radio. Sin embargo, al realizar las primeras observaciones en radio de hidrógeno neutro en galaxias externas, la curva de rotación medida para M31 presenta una caída lenta (van de Hulst et al. 1957), aunque para M33 la curva de rotación medida es plana (Volders 1959). Volders (1959) incluso notó que una curva de rotación plana, generaría un conflicto con el valor de las constantes de Oort para nuestra Galaxia, que implicaba un curva de rotación cayendo en la posición del Sol.

Las curvas de rotación determinadas de las líneas de emisión, como  $H\alpha$ , HI y CO, son particularmente útiles para derivar la distribución de masa en galaxias de disco debido a que estas líneas trazan el movimiento de las estrellas de población I.

Existen distintos trazadores para medir la curva de rotación. Las líneas de  $H\alpha$ , [NII] y [SII], han sido tradicionalmente empleadas, pero también se tienen líneas de HI, que son una herramienta poderosa para obtener la cinemática de galaxias espirales gracias a que su escala radial es 3 a 4 veces más grande que la escala radial del disco estelar. El CO es útil para las regiones centrales de las galaxias espirales (Sofue 1996, 1997) y las líneas de máseres revelan la rotación a escalas de 0.1 pc alrededor del agujero negro supermasivo (Lindqvist et al. 1992; Izumiura et al. 1995,1999; Deguchi et al. 2000). Las nebulosas planetarias lejanas y las galaxias satélite se emplean para determinar la masa a grandes distancias del centro galáctico. Para galaxias cercanas se puede obtener la curva de rotación a partir de las velocidades de regiones HII en los discos (Rubin y Ford 1970,1983; Zaritsky et al. 1989, 1990, 1994).

Medir la curva de rotación en el centro de una galaxia no es fácil. Aún son lugares misteriosos y en muy pocos casos se puede inferir la cinemática estelar o del gas en esta región. Obtener el campo de velocidades en una escala de decenas de parsecs está limitado a muy pocas galaxias.

La espectroscopía ha hecho posible derivar la curva de rotación en el centro de las galaxias gracias a su gran intervalo dinámico y una extracción más precisa del bulbo (Rubin y Graham 1987; Woods et al. 1990; Rubin et al. 1997; Sofue et al. 1998, Bertola et al. 1998). Sin embargo, la espectroscopía óptica tiene un problema y es la extinción provocada por el polvo. Este problema puede ser minimizado utilizando las longitudes de onda del CO, ya que en este caso la extinción es despreciable. Si se combinan la

espectroscopía óptica y las líneas de CO se puede obtener una curva de rotación de alta precisión (Sofue 1996, 1997; Sofue et al. 1997, 1998). El único caso donde se obtiene una curva de rotación central de alta resolución es el de la Galaxia (Gilmore et al. 1990).

Las primeras observaciones que se hicieron en el centro de M31, muestran una velocidad muy alta en el núcleo (Babcock 1939, Lallemond et al. 1960). Para galaxias espirales masivas, las altas velocidades en el núcleo parecen ser una propiedad universal, pero para ser detectadas se necesita una resolución muy alta en las observaciones. En general en las regiones más internas de una galaxia se muestran velocidades de rotación elevadas (Walkers 1989, Ford et al. 1994, Kormendy y Richstone 1995, Bertola et al. 1998, Kormendy 2001), que muestran una evidencia de la existencia de agujeros negros masivos.

La curva de rotación del disco manifiesta la distribución de la densidad de masa superficial en el disco. La velocidad de rotación del disco alcanza un máximo a un radio de aproximadamente dos veces el radio de escala para un disco exponencial. Por ejemplo, para una galaxia masiva de tipo morfológico Sb, la rotación máxima del disco se da a un radio de 5 a 6 kpc, que corresponde aproximadamente a dos veces su radio de escala (Sofue y Rubin 2001). La curva de rotación total es plana debido a la contribución del halo oscuro masivo.

Las curvas de rotación que se modelan en esta tesis para galaxias espirales normales están dominadas por el bulbo en la parte central para evitar generar una inestabilidad global (como una barra). Por supuesto, nuestros modelos son estacionarios y no pueden producir una barra, pero sí podemos hacer el potencial lo más autoconsistente posible, tomando este tipo de consideraciones.

### 2.2.2. Orden y Caos Orbital en Galaxias

Cuando hablamos de *caos*, la primera idea que en general viene a la mente es de carácter negativo, como una imperfección, algo que causa inquietud y, más aún, se ve como una forma del Mal. Para la mitología griega el **Caos** es aquello que existe antes de todos los dioses y fuerzas elementales, es decir, el estado primigenio del cosmos infinito. El término *caos* proviene del griego antiguo (*Χάος*), que significa “espacio que se abre” o “hendidura”. Para los babilonios, el caos proviene de Tiamat, el dragón babilónico del

caos, cuya destrucción a manos de Marduk (dios de las tormentas) permite la creación del Universo.

Pero, ¿qué es el caos físico?. En 1776 Pierre Simon de Laplace afirmaba de manera categórica que si se conociera la velocidad y la posición de todas las partículas del Universo en un instante dado, entonces sería posible conocer el pasado y/o predecir el futuro para toda la historia del Universo. Por más de 100 años fue aceptada la afirmación de Laplace, y ésto produjo que la gente pensara que no hay libre albedrío, es decir, todo estaba determinado. Sin embargo, en la naturaleza intervienen muchos factores impredecibles y la física alrededor de los sistemas influyen en las condiciones iniciales, por lo que estamos lejos de predecir fenómenos donde domina el caos, como la meteorología.

El primero en descubrir el caos fue Henri Poincaré (1880), mientras intentaba resolver el problema de tres cuerpos se encontró con una serie de órbitas que no eran periódicas ni cuasi periódicas. Años más tarde, Jacques Hadamard (1898) publica un estudio sobre movimiento caótico (en este momento aún no era llamado caos) de una partícula libre deslizándose sin fricción en una superficie de curvatura negativa (cóncava) constante. Hadamard demuestra que todas las trayectorias de las partículas son inestables en el sentido de que poseen trayectorias que divergen exponencialmente una de otra, además el flujo resultante debe ser “mezclado”. La teoría del caos fue desarrollada básicamente por matemáticos bajo el nombre de “Teoría Ergódica”. Estudios un poco más tarde, fueron desarrollados por G.D. Birkhoff, para el problema de tres cuerpos; A. N. Kolmogorov, en astrofísica (turbulencia); M.L. Cartwright y J.E. Littlewood, en ingeniería.

A pesar de todo este conocimiento previo obtenido en la primera mitad del siglo XX, no es sino hasta la segunda mitad del siglo XX cuando se formaliza el conocimiento de su existencia e importancia y se vuelve evidente para muchos científicos que la teoría lineal prevaleciente simplemente no podía explicar el comportamiento de ciertos experimentos como el mapa logístico (“arquetipo” del caos).

Las propiedades que identifican y definen al caos es la dependencia extrema de un sistema dinámico a sus condiciones iniciales ( esto es, la más mínima incertidumbre en las condiciones iniciales se amplifica exponencialmente, alcanzando dimensiones macroscópicas que impiden definir que sucederá a largo plazo) y el mezclado en el espacio

fase. Los investigadores que trabajan en dinámica no lineal utilizan el término *caos* para referirse al comportamiento irregular e impredecible, aunque determinista de los sistemas no lineales. Los sistemas caóticos son sistemas no lineales, pero no necesariamente esto implica que un sistema no lineal sea caótico.

Una órbita irregular es la que no tiene al menos un número independiente de integrales aislantes de movimiento igual al número de grados de libertad y no tiene una estructura difeomórfica a un toro de dimensión 3 en espacio fase. Una órbita caótica tiene necesariamente dependencia sensible a las condiciones iniciales, además de requerir que el flujo en el espacio fase sea “mezclado”.

El diagrama de Venn que se muestra en la Figura 2.2, ilustra los diferentes tipos de órbitas. Las órbitas son regulares o irregulares; una órbita puede tener dependencia a las condiciones iniciales o no, a pesar de ser regular o irregular; una órbita caótica tiene necesariamente dependencia a las condiciones iniciales; una órbita sensible a las condiciones iniciales no necesariamente es caótica. En nuestros modelos galácticos, al ser conservativos, todas las órbitas irregulares son caóticas y poseen dependencia sensible a las condiciones iniciales.

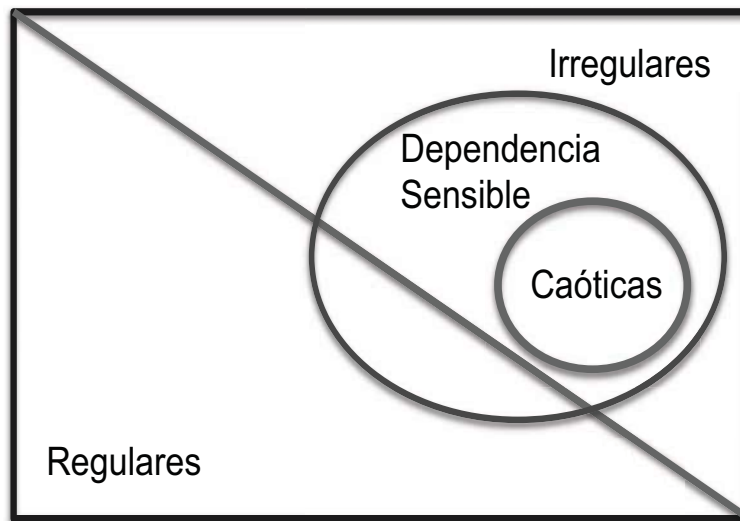


FIGURA 2.2: Diagrama de Venn mostrando los subconjuntos de órbitas.

Mediante el uso de órbitas, nos interesa estudiar el comportamiento, tanto ordenado como caótico en galaxias espirales normales. La respuesta dinámica de las estrellas

depende naturalmente de la estructura intrínseca de la galaxia que orbitan. Debido a la estructura complicada de las galaxias, estos sistemas son altamente no lineales (no responden a la teoría lineal). En dinámica no lineal, el caos representa una de las características más intrincadas (y confusas) de los sistemas dinámicos, tanto en el sentido del análisis de sus propiedades, como en el sentido de su simple determinación. La distinción entre el movimiento ordenado y uno caótico en un sistema dinámico es fundamental en muchas áreas de la ciencia. Esta distinción es particularmente difícil en sistemas con muchos grados de libertad, básicamente porque no es fácil su visualización en el espacio fase, por lo que se requieren herramientas que den información acerca de las características de las órbitas caóticas y ordenadas para sistemas conservativos. Como ya se ha mencionado anteriormente, la característica principal del caos es su dependencia sensible a las condiciones iniciales. Esta dependencia se distingue por un número característico de Lyapunov (LCN por sus siglas en inglés) positivo; por otro lado si LCN es cero o negativo, la órbita es ordenada (Sección 5.4). Otra herramienta útil en la determinación de la existencia de caos orbital es los diagramas de fase (o diagramas de Poincaré) que muestran el caos en forma de puntos dispersos en ciertas regiones y energías orbitales (Sección 5.1).

Los brazos espirales o las barras están formados principalmente de órbitas ordenadas, aunque hay evidencia de que las órbitas caóticas pueden reforzar estructuras como brazos o barras (Kaufmann y Contopoulos 1996; Patsis et al. 1997a; Harsoula et al. 2011 ). Los brazos en galaxias espirales normales producen perturbaciones (en la fuerza radial) en general del orden de 2-10% en un fondo axisimétrico (Contopoulos 2007). En el caso de las barras, éstas producen perturbaciones al fondo axisimétrico de casi el 100% . Las regiones de caos más importante se ubican alrededor y fuera de corotación así como en la parte más externa de la barra.

La influencia del medio ambiente en la estructura interna de las galaxias de disco fue investigada por van den Bergh (2002b, 2002c), quien observó un conjunto de 930 galaxias del norte del catálogo revisado de Shapley-Ames (Sandage y Tammann 1981). De esta muestra, él no encontró cambio estadístico en la morfología de barras o estructuras espirales como función de su medio ambiente lo cual sugiere que dicha estructura primaria depende de las propiedades intrínsecas de la galaxia madre. La tasa de colisión de las galaxias de disco locales fue estimada por Keel y Wu (1995) fue de 4.2 por el

tiempo de Hubble para pares y 0.33 por el tiempo de Hubble extrapolado para todas las espirales. Esto indica que la mayoría de las galaxias de disco cercanas han tenido hasta 5 Ga (aproximadamente corresponde a  $z \approx 0.5$ ) para alcanzar un estado cuasi estacionario. Por lo tanto, es razonable creer que el comportamiento caótico observado en la parte central de la mayoría de las galaxias de disco se debe a las propiedades dinámicas intrínsecas que poseen (Grosbøl 2003).

Desde mi punto de vista, considero que la característica más espectacular que se aprecia en las galaxias espirales son los brazos, de ahí el interés que tengo por estudiar esta estructura. Aunque, también considero que los brazos espirales han sido subestimados debido a la baja masa que tienen comparados con la masa del disco (hasta 5% -Pichardo et al. 2003). Han sido tratados únicamente como una perturbación del potencial axisimétrico, pero la distribución que presentan hace que tenga efectos importantes en la dinámica del disco. Por otro lado, la naturaleza de los brazos espirales es aún controversial y sus efectos orbitales en diferentes tipos de galaxias es apenas entendida. Adicionalmente, la producción de caos orbital originada por los brazos espirales, es muy intrigante.

## **Estabilidad Estadística: Aproximación a la Autoconsistencia Orbital.**

Formalmente para decir que un sistema es autocosistente se debe cumplir con la ecuación de Poisson y Boltzmann, hablando de potenciales analíticos individuales, es posible cumplir con la definición de autoconsistencia. Sin embargo, no existe un potencial monolítico capaz de modelar una galaxia, en potenciales estacionarios, esto se hace mediante la suma de varios potenciales individuales, haciendo de complicado a imposible demostrar su autoconsistencia de forma analítica estricta.

La forma que nos queda para aproximarnos a un modelo autoconsistente es a través del estudio orbital, para ello se requiere de dos cosas principalmente: la órbitas no deben ser dominadas completamente por caos y el sistema debe poseer órbitas periódicas, definidas como las “órbitas madre” de los potenciales o como el “esqueleto dinámico” que le da forma a los potenciales. Ejemplos de esto, una estrella individual forma órbitas periódicas como círculos (dando forma a los discos), una barra forma órbitas elípticas

y los brazos espirales forman elipses u óvalos con los apocentros sistemáticamente acomodados a lo largo de los brazos. Las órbitas, incluso las caóticas (cuando el caos no es dominante), siguen a las órbitas periódicas formando tubos alrededor de éstas. La existencia de órbitas periódicas que refuercen el potencial impuesto, hace plausible el potencial.

## 2.3. Objetivos Generales y Organización de la Tesis

En la literatura actual existen pocos modelos de potencial para galaxias espirales, los cuales modelan más bien galaxias específicas además de que los que existen rara vez son accesibles para su uso ya que no proporcionan la información necesaria para construirlos. Ejemplos de estos modelos son los de Contopoulos y Grosbøl (1986, 1988), para galaxias espirales normales y Kaufmann y Contopoulos (1996) para galaxias espirales barradas. Nos proponemos crear una familia de modelos estacionarios (probados orbitalmente con órbitas periódicas y estudios de orden y caos orbital) que simulen las características generales observadas de galaxias espirales normales desde tempranas a tardías, tales como curvas de rotación, razones de masas de sus componentes, factores de escala, tamaño de las estructuras no axisimétricas y sus velocidades angulares de rotación, ángulo de enrollamiento de los brazos, etc. Estos modelos serán además ajustables y aplicables a galaxias específicas, toda vez que se conozcan algunos de sus parámetros observacionales. Una vez creada esta familia de modelos estudiaremos el efecto de las diferencias morfológicas entre las galaxias sobre las órbitas estelares.

Es importante mencionar que una familia de modelos y el objetivo para el que serán creados sólo puede realizarse con potenciales estacionarios analíticos ó semianalíticos, dado que los modelos de N-cuerpos, aunque tienen la ventaja innegable de la autoconsistencia, no es factible manipular sus parámetros para modelar galaxias específicas a detalle, aunado al hecho de que para estudios orbitales detallados, especialmente de caos, la resolución espacial y temporal necesaria resultaría prohibitiva en el sentido del tiempo de cómputo.

Sobre la dinámica orbital, en lo referente al orden, las órbitas nos pueden dar información de la estabilidad estadística (con ésto me refiero a una aproximación a la autoconsistencia orbital) de un modelo dado con lo cual seremos capaces de poner

restricciones a diferentes parámetros galácticos tales como el ángulo de enrollamiento máximo (“*pitch angle*”), las velocidades de rotación máximas y mínimas de las estructuras no axisimétricas, las razones de masa de brazos contra la componente axisimétrica, entre otros, observando si los potenciales impuestos son apoyados por las órbitas (especialmente las periódicas). En lo referente al caos, de la misma forma que las órbitas periódicas pueden ayudar a determinar si un potencial dado es autoconsistente orbitalmente, el caos es muy importante para restringir máximos y mínimos posibles para parámetros galácticos antes del desarrollo severo del caos, esto es, antes de que las órbitas caóticas destruyan la forma de las estructuras (brazos, barras, etc).

En conclusión, nos interesa responder una serie de preguntas importantes en dinámica estelar como son, ¿qué parámetros son los que propician el movimiento desordenado?, ¿es relevante el estudio del caos en galaxias?, ¿cómo cambia la dinámica caótica y ordenada para galaxias al cambiar su morfología intrínseca?, ¿podemos dar restricciones a los parámetros estructurales de las galaxias por medio del caos orbital y órbitas ordenadas?, etc.

El propósito general es la creación de una familia de modelos, basados en observaciones, de galaxias espirales normales, desde galaxias tardías a tempranas como los define la secuencia de Hubble, probando su estabilidad estadística con estudios de órbitas periódicas. Una vez creados estos modelos, realizaremos un estudio orbital con diagramas de fase para estudiar los efectos sobre la dinámica orbital ordenada y caótica de diferentes morfologías galácticas.

El objetivo final es avanzar en nuestro entendimiento de la relación entre la estructura orbital y la morfología galáctica.

La tesis ha sido dividida en 9 capítulos y 4 apéndices. El Capítulo 1 es el resumen breve del trabajo realizado (en Inglés y Español), el presente Capítulo (2) es una introducción general. En el Capítulo 3 se presentan los parámetros estructurales de galaxias espirales normales, basados en observaciones. En el Capítulo 4 se dan los modelos de potencial para galaxias espirales normales (el potencial axisimétrico y el potencial de los brazos espirales). En el Capítulo 5 se presentan las técnicas para el análisis orbital. En el Capítulo 6 tenemos el ajuste a los modelos para cada una de los tipos morfológicos empleados. En el Capítulo 7 se muestra una comparación entre el modelo PERLAS y la extensión de la TWA (potenciales empleados en este trabajo) para brazos abiertos,



aplicado al caso de una galaxia tipo Vía Láctea sin barra. En el Capítulo 8 tenemos las restricciones a parámetros estructurales y dinámicos en galaxias espirales normales. En el Capítulo 9 las conclusiones de la tesis. Finalmente en los Apéndices A, B, C y D, se presentan, respectivamente, los artículos publicados, se presenta las fuerzas y el potencial de un esferoide oblato inhomogéneo, los integradores empleados para la evolución dinámico estelar y finalmente, una breve descripción de los códigos empleados y los parámetros de entrada que requieren.



## Capítulo 3

# Parámetros Estructurales y Dinámicos de Galaxias Espirales “Normales” Motivados en Observaciones

Las galaxias espirales son sistemas dinámicos de gran complejidad comparados con las galaxias elípticas (consideradas como uno de los sistemas estelares más simples en el Universo -Binney y Merrifield 1998). Las galaxias espirales son la suma de varias componentes: una condensación brillante central (bulbo), el cual asemeja a una galaxia elíptica; esta condensación se localiza en el centro de un disco delgado, en el cual se observan brazos espirales que pueden llegar a ser muy conspicuos, todo esto inmerso en halos supermasivos de materia oscura.

Para modelar diferentes tipos morfológicos de galaxias espirales normales (Sa, Sb y Sc), es importante conocer el comportamiento de cada componente que conforma estos enormes sistemas. Se puede dividir a sus componentes en dos grupos: el fondo axisimétrico: bulbo, disco y halo; la estructura no axisimétrica: barras y/o brazos espirales, en este caso sólo me enfocaré en los brazos espirales que definen las galaxias espirales normales (i.e. sin barra).

## 3.1. Fondo Axisimétrico

Para hacer menos complejo el estudio y modelaje del potencial gravitacional de una galaxia, se separa por componentes: bulbo, disco y halo.

### 3.1.1. Bulbos

Los bulbos de las galaxias de disco están compuestos por decenas de miles de millones de estrellas concentradas hacia la región central. Los podemos observar en la mayoría de las galaxias espirales y se van haciendo menos importantes de galaxias espirales de tipo temprano a tardíos (en tipos morfológicos muy tardíos, los bulbos son muy pequeños o incluso carecen de bulbos). La población estelar tipo II domina en los bulbos galácticos. Baade (1944), fue el primero en resolver estrellas individuales de regiones centrales de varias galaxias cercanas (galaxias espirales y algunas elípticas), donde la componente esferoidal dominaba<sup>1</sup>. Del análisis del brillo y color de sus imágenes estelares, Baade notó que las estrellas más brillantes tanto en galaxias elípticas como en la componente esferoidal de galaxias espirales eran las gigantes rojas, las cuales son muy diferentes en apariencia a las estrellas azules que dominan los brazos espirales en los discos de las galaxias.

Los bulbos de las galaxias espirales de tipo temprano suelen ser muy prominentes; morfológicamente son parecidos a las galaxias elípticas de baja luminosidad y los bulbos pequeños de las galaxias espirales de tipo tardío son más parecidos de los discos (Kormendy 1993; Wyse et al. 1997; Kormendy y Kennicutt 2004). Los bulbos clásicos, como ya hemos mencionado, están formados principalmente por estrellas viejas, son figuras aproximadamente esféricas con perfiles de brillo más parecidos a los clásicos de Vaucouleurs, con un perfil  $r^{1/4}$ . Los bulbos de galaxias tardías por otra parte, están formados por estrellas más parecidas a las del disco, su perfil de brillo es exponencial, son pequeños en tamaño aparente y considerablemente menos masivos. Los bulbos de las galaxias tardías no siguen la ley de de Vaucouleurs  $r^{1/4}$  (Andredakis, Peletier y Balcells 1995). De acuerdo con la dispersión que encontraron Andredakis et al. (1995),

---

<sup>1</sup>Estas observaciones sugirieron a Baade la existencia de dos poblaciones estelares: **Población I**, las cuales contienen estrellas azules luminosas, acompañadas de polvo y gas; y **Población II**, las cuales están dominadas por estrellas rojas luminosas en un ambiente casi libre de gas y polvo.

se encuentran tanto bulbos clásicos como bulbos exponenciales en los diferentes tipos morfológicos, pero para los tipos tardíos sólo se encuentran bulbos exponenciales. El perfil de brillo superficial de los bulbos también se ajusta por una distribución de Sérsic  $r^{1/n}$  (Kormendy y Kennicutt 2004), donde el índice  $n$  de Sérsic está relacionado con el tipo morfológico (Andredakis, Peletier, y Balcells 1995). La razón bulbo-disco, con un valor de 4 corresponde a galaxias espirales tempranas y un valor de 1 para galaxias espirales tardías.

Los bulbos y discos son física y dinámicamente diferentes. El disco es plano y está dominado por rotación; el bulbo es esférico, se sostiene contra la gravedad principalmente por la dispersión de velocidades, es un sistema dinámicamente más caliente que el disco. Es difícil decir si la separación entre bulbo y disco es real o sólo se busca separarlos para estudiarlos con mayor detalle, es probable que una interacción dinámica existe entre las diferentes componentes en las regiones más densas e internas de las galaxias. Separar ambas componentes sólo usando fotometría superficial ha sido un problema desde siempre. Existen varias técnicas de descomposición bulbo-disco en la literatura, éstas pueden ser en una dimensión (Kormendy 1977; Schombert y Bothin 1987; Andredakis y Sanders 1994) o en dos dimensiones (Capaccioli et al. 1987; Simien y Michard 1990; Scorza y Bender 1990; Byun 1992; de Jong 1996a).

Una vez que se logran separar las componentes de bulbo y disco, es interesante buscar las correlaciones entre los valores de los parámetros que son determinados por los ajustes necesarios para hacer la descomposición, incluso buscar las correlaciones con el tipo morfológico de Hubble (Simien y de Vaucouleurs 1986; Kent 1985). Un parámetro útil es la **fracción del bulbo**, esto es, la fracción de luminosidad total que contribuye el bulbo ( $B/T$ ). La fracción del bulbo está relacionada con la razón disco-bulbo ( $D/B$ ) que se cita frecuentemente en la literatura como:  $D/B = (\frac{B}{T})^{-1} - 1$ . La ventaja de  $B/T$  es que está confinado al intervalo (0,1).

La Figura 3.1 muestra la correlación entre la fracción del bulbo ( $B/T$ ), donde  $T$  es la contribución total de luminosidad. Las galaxias lenticulares tienen un valor promedio de 0.65 y las galaxias Sc y tardías tienen un valor promedio de 0.15. Esta correlación apoya la idea de que la clasificación de Hubble está basada en lo prominente del bulbo.

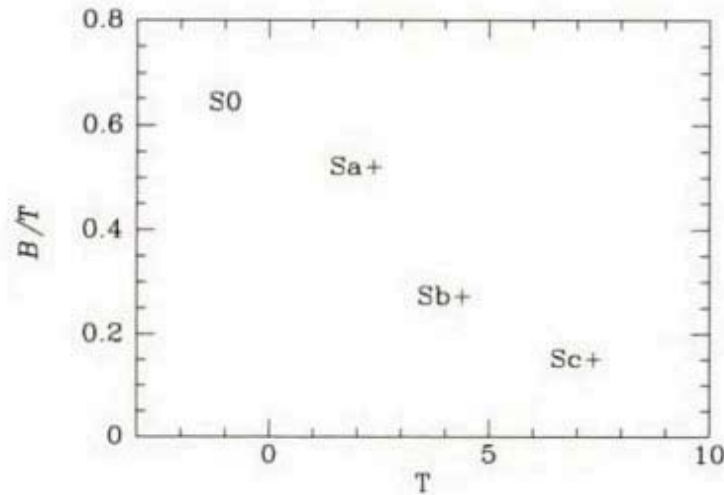


FIGURA 3.1: En esta gráfica se muestra la correlación que existe entre la fracción bulbo,  $B/T$ , donde  $B$  es la contribución de luminosidad del bulbo y  $T$  es la total, bulbo más disco. Se puede observar que para tipos de Hubble tardíos (T), la contribución del bulbo es más pequeña que para galaxias de tipo temprano. Esta figura fue tomada de Binney y Merrifield (1998).

En el caso ideal, nos gustaría investigar la forma de los bulbos en tres dimensiones utilizando el mismo tipo de análisis que se aplica a galaxias elípticas, esto se debe a que la contribución de luz que aportan las otras componentes en las galaxias espirales complican las cosas. Por ejemplo, si una galaxia espiral posee un bulbo muy aplanado hacia el plano galáctico, será muy difícil separar la contribución de luz del bulbo de la contribución del disco. Hacer la distinción entre el bulbo y la barra es aún más complejo, si tenemos una estructura esferoidal prolata en la cual el eje mayor cae en el plano de la galaxia de disco, bien podría ser identificado como un bulbo prolato o una barra (Binney y Merrifield 1998).

### 3.1.2. Discos

Los discos de las galaxias contienen una fracción sustancial de la materia bariónica y del momento angular del Universo. Contienen (o poseen) estructuras como barras y brazos espirales, que vuelven muy compleja la dinámica estelar en los discos. La mayor parte de la evolución en estas galaxias se da en los discos galácticos, esto es, la formación estelar, los brazos espirales, las barras y anillos. En esta componente de las galaxias

se encuentra la mayor cantidad de gas y polvo, por lo que la población estelar que domina en esta región es joven (Población I). El gas y polvo en el disco incrementa de galaxias espirales tempranas a tardías, de esta forma la parte más prominente de las galaxias espirales tardías es el disco y todo el material que se encuentra en éste rota diferencialmente<sup>2</sup>. Esta rotación es lo que sostiene a los discos galácticos.

La presencia de distorsiones ovales (barras suaves), barras y la estructura espiral puede tener un efecto importante en el cambio de la estructura del disco (Kormendy y Kenniccut 2004; Kormendy 2007; entre otros). Los estudios fotométricos que se hicieron de galaxias de disco iniciaron con el trabajo de Reynolds (1913); Reynolds buscaba estudiar la estructura del disco y su distribución de luminosidad. Más tarde se hizo fotometría de discos muy débiles (bajo brillo superficial), estos estudios fueron de enorme importancia para los discos galácticos ya que revelaron la naturaleza exponencial de la distribución de brillo superficial (de Vaucouleurs 1959; Freeman 1970) y la función (exponencial) frecuentemente usada para describir el perfil de brillo superficial radial de los discos en galaxias espirales,

$$\Sigma_{\text{disco}}(r) = \Sigma_0 e^{-r/h} \quad (3.1)$$

o en magnitudes

$$\mu_{\text{disco}}(r) = \mu_0 + 1.086r/h \quad (3.2)$$

donde  $\mu_0(\Sigma_0)$  es el brillo superficial central (luminosidad) y  $h$  la longitud de escala del disco exponencial.

## Radio Isofotal

El tamaño del disco de una galaxia es un parámetro importante en las simulaciones de galaxias, desafortunadamente no hay un límite físico simple para determinar el tamaño de un disco (o de un bulbo). Para calcular el tamaño aproximado de una galaxia se acostumbra medir hasta cierta “isofota” en las observaciones, esto se conoce como

---

<sup>2</sup>Se dice que una galaxia rota diferencialmente cuando la velocidad angular del material depende del radio, mientras más cerca del centro galáctico, mayor es la velocidad.

radio isofotal o diámetro isofotal<sup>3</sup>. La isofota que frecuentemente se emplea es la isofota  $D_{25}$ , ésta tiene un brillo superficial en la banda  $B$  de 25 mag arcsec<sup>-2</sup>, también se puede encontrar como  $R_{25} \equiv \frac{1}{2}D_{25}$ ,  $R_{25}$  se le conoce como el radio de de Vaucouleurs (Binney y Tremaine 1994). Las galaxias espirales tienen radios de disco entre 10 y 25 kpc, medidos en  $R_{25}$  (de Lapparent et al. 2011). Otro radio isofotal que aún se sigue empleando es el radio de Holmberg, el cual corresponde a un brillo superficial en la banda  $B$  de 26.5 mag arcsec<sup>-2</sup>.

### Longitud de Escala

La longitud de escala de los discos es uno de los parámetros estructurales más importantes; nos dice básicamente cómo están distribuidas las estrellas radialmente, con esta información se puede obtener una distribución de masa, dada una relación M/L (e.g. Fathi et al. 2010). Esta distribución de masa dada funciona como una restricción primaria para determinar un posible escenario de formación (Lin y Pringle 1987, Dutton 2009), lo que da importantes pistas sobre la evolución de la galaxia. Sin embargo, un problema en la longitud de escala de galaxias muestra un gran intervalo de valores aunque es predominantemente pequeña en galaxias espirales de tipo tardío.

Por otra parte, de Jong (1996) y Graham y de Blok (2001) concluyen que en la longitud de escala en galaxias de disco, no se espera una dependencia con el tipo morfológico para galaxias que van entre Sa y Scd. Fathi et al. (2010) determinaron la longitud de escala para más de 30,000 galaxias en diferentes longitudes de onda (5 bandas) y el promedio de la longitud de escala en la banda  $r$  en ese trabajo es de  $3.79 \pm 2.05$  (es muy similar en las bandas ópticas  $-g, r, i,$  y  $z-$ ). Fathi et al. (2010) concluyen que la longitud de escala es independiente de la banda y la morfología de la galaxia, siendo consistente con resultados previos en la literatura (de Jong 1996; Graham y de Blok 2001). Fathi et al. (2010) encuentran una relación de la longitud de escala con la masa del disco: galaxias con masas pequeñas ( $10^9 - 10^{10}M_{\odot}$ ) tienen longitudes de escala pequeñas ( $1.5 \pm 0.7$  kpc), galaxias con masas grandes ( $10^{11} - 10^{12}M_{\odot}$ ) tienen longitudes de escala más grandes ( $5.7 \pm 1.9$  kpc).

---

<sup>3</sup>Las **isofotas** son contornos de brillo superficial constante, y son aproximadamente elipses concéntricas. El diámetro o radio isofotal, es el diámetro o radio en el cual un nivel de brillo superficial dado se alcanza.



### 3.1.3. Halos

En astrofísica se se ha usado el término *materia oscura* para denotar que cualquier forma de materia cuya existencia es inferida únicamente por sus efectos gravitacionales, sin poder ser detectada observacionalmente. La primera evidencia de la existencia de materia oscura fue encontrada por el astrónomo suizo Fritz Zwicky en 1933, al mismo tiempo ya se empleaba la ley de Hubble para determinar una escala de distancia extragaláctica. Adicionalmente, ya se tenían mediciones de las curvas de rotación para varias galaxias cercanas.

El trabajo de Zwicky se basó en mediciones de velocidades radiales para siete galaxias a lo largo del cúmulo de Coma; con estas mediciones, él quería obtener la masa total del cúmulo usando el teorema del virial. Lo siguiente que hizo Zwicky fue comparar la razón masa-luminosidad del cúmulo con la razón masa-luminosidad obtenida de la curva de rotación de las galaxias, encontró una discrepancia, había 400 veces más masa de la esperada. La gravedad de las galaxias visibles en el cúmulo resultaba ser muy poca para tal velocidad orbital, por lo que se necesitaba mucha más para explicar esta discrepancia. Esto se conocía como el *problema de la masa faltante*. Basado en estas pruebas, Zwicky concluyó que debía existir alguna forma de materia invisible o “materia oscura” que es indetectable excepto a través de su fuerza gravitacional (Zwicky 1933).

Durante varias décadas, el resultado obtenido por Zwicky (1933) no fue apoyado por ninguna otra observación, hasta que en la década de los 50, cuando los astrónomos ya eran capaces de medir curvas de rotación de galaxias espirales e incluso de la Vía Láctea, se retomó la teoría de la materia faltante (materia oscura). En las curvas de rotación se espera observar una caída con el radio más lenta que la kepleriana, esto debido a que el disco contribuye a la masa hasta una distancia dada, cuando termina la galaxia. Sin embargo, al medir la curva de rotación de distintas galaxias, notaron que la velocidad no caía con el radio, sino que se mantenía constante, lo que significa que la masa aumenta con el radio (Rubin y Ford 1970; Rubin et al. 1978). En la Figura 3.2 se muestra un esquema de la curva de rotación teórica (línea punteada) y la curva de rotación observacional (línea continua). Uno de los mejores indicadores de la existencia de materia oscura es la diferencia entre la masa de una galaxia estimada por la luminosidad y la masa estimada por las velocidades de rotación. Todo lo anterior

sugiere que las galaxias espirales están embebidas en halos extendidos de materia oscura.

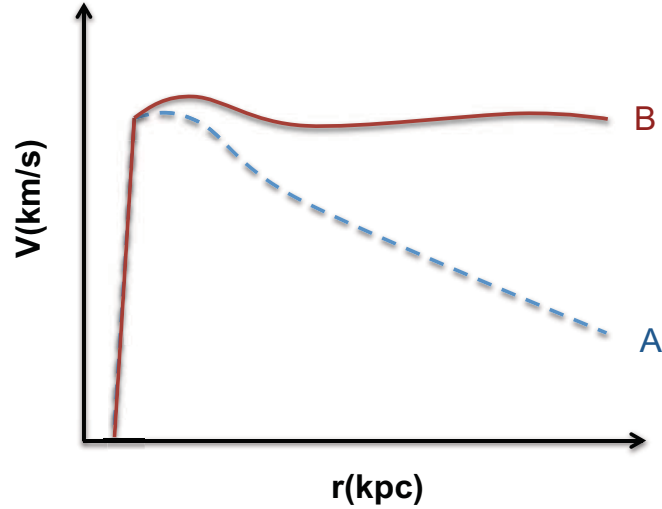


FIGURA 3.2: Curva de rotación de una galaxia espiral. (A) representa la curva de rotación teórica y (B) la observada. La materia oscura juega un papel importante para explicar las curvas de rotación planas.

La conclusión de que una curva de rotación plana es debido al halo de materia oscura alrededor de una espiral, requiere que la teoría de gravitación Newtoniana se mantenga a distancias cosmológicas. Sin embargo, muchos astrónomos han propuesto que esta teoría carece de fundamentos y que la materia faltante para obtener curvas de rotación planas (observadas) puede ser explicada por una teoría alternativa, que requiere de una modificación a la dinámica Newtoniana que sea aplicada a grandes distancias (MOND -Milgrom 1983a, 1983b, 1983c).

Con base en las observaciones, el perfil de densidad de los halos de materia oscura de cualquier masa puede ser ajustado por un perfil “universal” (Navarro et al. 1997), Navarro, Frenk & White (NFW), este perfil de densidad es dado por:

$$\frac{\rho(r)}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{\delta_c}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2}, \quad (3.3)$$

donde  $r_s$  es un radio de escala,  $\delta_c$  es una densidad característica (adimensional) y  $\rho_{\text{crit}} = 3H^2/8\pi G$ , es la densidad crítica ( $H$  es la constante de Hubble, actualmente  $H = 74.3 \pm 3.1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  -Chávez et al. 2012). Las curvas de rotación observadas son compatibles con un halo NFW. Por otro lado, si las velocidades de rotación de las

galaxias se encuentran en un intervalo de  $200 - 300 \text{ km s}^{-1}$ , se predice que pueden tener halos de materia oscura con una masa típica de  $1.8 \times 10^{12} M_{\odot}$ , dentro de un radio de 300 kpc (Navarro et al. 1996).

### 3.2. Estructura No Axisimétrica: *Brazos Espirales*

La estructura no axisimétrica que contienen las galaxias espirales normales son los brazos espirales<sup>4</sup>, es una de las características más prominentes que posee este tipo de galaxias; aproximadamente el 70 % de las galaxias (sin incluir las enanas) son espirales (van Den Bergh 1998).

Los brazos espirales de una galaxia son más azules que el resto del disco y la emisión en  $H\alpha$  (de las regiones HII) demuestra que los brazos son sitios de formación estelar (y por ejemplo, las estrellas masivas no se alejan mucho de su lugar de nacimiento antes de que mueran unos  $10^7$  años después). En la banda roja, los brazos espirales parecen más suaves y más anchos, por lo que también los brazos espirales albergan estrellas de población vieja.

La estructura espiral puede tomar muchas formas. Algunas galaxias presentan una estructura espiral de **gran diseño**, esto significa, que al observar a la galaxia en la banda  $B$ , el disco está dominado por dos brazos espirales, Algunos ejemplos de espirales de gran diseño son: M51, M81 y M100. Elmegreen y Elmegreen (1982) hicieron una clasificación de brazos espirales. Esta clasificación van de 1 a 12, donde los brazos caóticos, fragmentados y asimétricos se les asigno el número 1 y son brazos simétricos de gran diseño el número 12. Aproximadamente el 10 % de las galaxias espirales poseen brazos de gran diseño (Elmegreen y Elmegreen 1987), la mayoría de las galaxias tiene estructura espiral floculenta (ver sección 3.2.7).

Desde el comienzo de los estudios de los brazos espirales, se han realizado estudios sistemáticos de la forma matemática para modelarlos. Danver (1942), Kennicutt(1981) y Kennicutt y Hodge (1982) ajustaron diferentes tipos de curvas espirales y concluyeron que los brazos espirales se representan mejor por espirales logarítmicas.

Los brazos espirales pueden ser clasificados por su orientación relativa a la dirección

---

<sup>4</sup>La estructura espiral fue descubierta en 1845 por William Paersons, esto antes de que se definiera una galaxia como un objeto aislado externo a nuestra Galaxia.

de rotación de la galaxia como *leading* o *trailing* (Figura 3.3). Si consideramos una estrella ubicada en el brazo espiral y el punto más externo del brazo (final del brazo) está en la dirección de la rotación galáctica, se llaman brazos *leading*, por el contrario si el punto más externo del brazo está en dirección opuesta a la rotación galáctica, se llaman brazos *trailing* (la mayoría de las galaxias poseen este tipo de brazos).

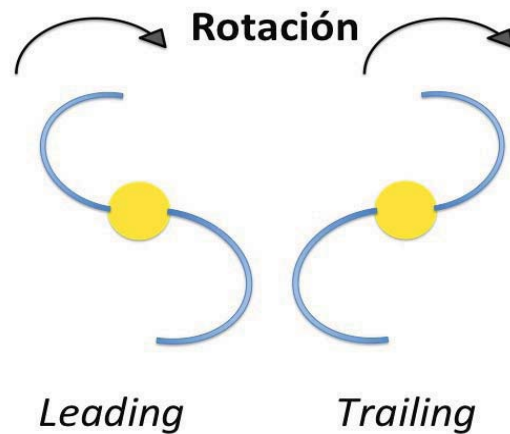


FIGURA 3.3: Brazos *leading* y *trailing*.

Pero ¿qué son los brazos espirales?, ¿cuál es su origen?, ¿cómo rotan?, ¿de qué están compuestos?. La naturaleza y el origen de los brazos espirales aún es controversial. No se conoce a ciencia cierta qué los formó ni su tiempo de vida. Una de las primeras explicaciones para los brazos espirales era que, debido a la rotación diferencial del disco, cualquier perturbación evolucionaba enrollándose con la rotación. Sin embargo, a esta teoría se le encontró una inconsistencia, con el paso del tiempo el material continuaría enrollándose y no se observarían la cantidad de galaxias con brazos espirales que vemos ni existirían brazos espirales con ángulos de enrollamiento grandes, a esto se le conoce como **el problema del enrollamiento** (Wilczynski 1896). Se propusieron entonces dos soluciones a este problema: (1) los brazos espirales actúan como ondas de densidad, recorriendo el disco pero no llevan el mismo material, este tipo de brazos espirales es de larga duración; (2) los brazos espirales como estructuras transientes, esto es, el brazo se origina de alguna forma y se destruye en escalas de tiempo cortas.

En esta sección describiremos los parámetros dinámicos y estructurales de los brazos espirales:

- \* Ángulo de enrollamiento.
- \* Número de brazos.
- \* Masa total y ley de densidad.
- \* Velocidad angular.
- \* Límite interno y externo.
- \* Lugar geométrico.
- \* Flokulencia.

### 3.2.1. Ángulo de Enrollamiento

El ángulo de enrollamiento (*pitch angle*) se define como el ángulo que se forma entre la tangente al brazo en el punto de cruce entre un círculo (a cualquier radio y centrado en el núcleo de la galaxia) y el brazo espiral y la tangente al círculo en este mismo punto (ver Figura 3.4). Siguiendo estrictamente la definición de la secuencia de Hubble (Hubble 1926), las galaxias espirales de tipo Sa tienen ángulos de enrollamiento pequeños y las galaxias espirales de tipo Sc tienen ángulos de enrollamiento grandes.

Al ser el ángulo de enrollamiento un parámetro que mide el grado de enrollamiento de los brazos espirales, se suele emplear este parámetro como uno de los criterios para definir el tipo de Hubble (1926), por ejemplo, galaxias con bulbos conspicuos tienden a tener brazos muy enrollados, según la clasificación de Hubble.

Medir el ángulo de enrollamiento es un trabajo sumamente complicado en la Vía Láctea. Una de las herramientas importantes para el cálculo de este parámetro es el uso de campos magnéticos, basados en datos de polarización de la luz estelar, encuentran las líneas de campo como espirales (Heiles 1995). Las líneas de campo magnético parecen seguir los brazos espirales (Beck 1993, Heiles 1995), lo que permite la construcción de mapas de la Galaxia a gran escala. Para galaxias externas por otra parte, aunque también puede resultar complicado, es considerablemente más simple que en la Vía Láctea.

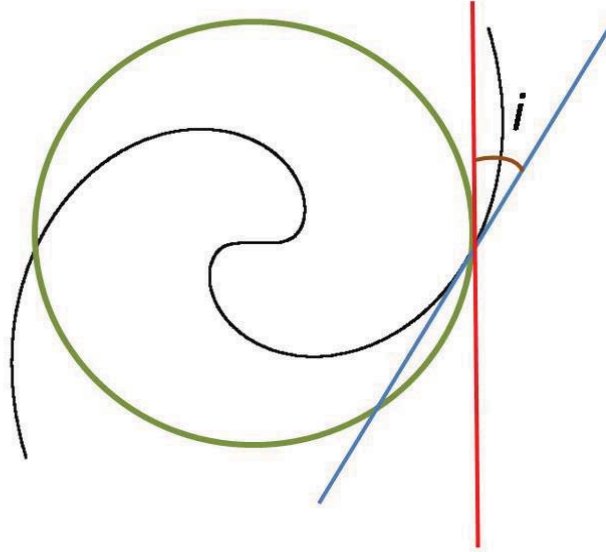


FIGURA 3.4: El ángulo de enrollamiento es el ángulo  $i$ , que se forma entre la tangente a el brazo y la tangente a la circunferencia.

### Métodos para Medir el Ángulo de Enrollamiento

Para medir el ángulo de enrollamiento de una galaxia, primero es necesario conocer la orientación de la galaxia. La orientación está especificada por dos parámetros: la inclinación del plano del disco con respecto al plano del cielo y el ángulo de posición del eje mayor aparente. Conocer estos dos parámetros es necesario por dos razones: (a) la estructura espiral aparente se distorsiona por la inclinación de la galaxia en el plano del cielo, por lo que la imagen de la galaxia debería ser deproyectada para verla aproximadamente de frente; (b) la velocidad de rotación de la galaxia, derivada de mediciones espectroscópicas, debe también ser corregida por la inclinación (Savchenko y Reshetnikov 2011). Existen varios métodos para medir el ángulo de enrollamiento, aquí presento dos de éstos.

El primer método está basado directamente en buscar el ángulo entre las tangentes al brazo espiral y una circunferencia local centrada en el núcleo de la galaxia. Si el

brazo espiral está representado en coordenadas polares,  $r = r(\phi)$  (la coordenada del origen en el centro galáctico), el ángulo de enrollamiento,  $i$ , puede ser determinado por la siguiente ecuación (ver Binney y Tremaine 1994)

$$i = \text{arcctg} \left( r \left| \frac{d\phi}{dr} \right| \right). \quad (3.4)$$

Los pasos principales para determinar el ángulo de enrollamiento son: (1) determinar las coordenadas del centro de la galaxia; (2) encontrar las coordenadas polares de varios puntos del brazo espiral ( $\sim 10$  puntos); (3) aplicar la ecuación 3.4 para obtener el conjunto de ángulos de enrollamiento correspondientes a los diferentes segmentos del brazo; (4) se promedian los ángulos de enrollamiento para encontrar el resultado final.

El segundo método está basado en un análisis de Fourier de la distribución de puntos en los brazos espirales de la galaxia (Considerere y Athanassoula 1982).

En la literatura se conocen varios trabajos donde se determinan ángulos de enrollamiento de los brazos espirales. Danver (1942) calcula el ángulo de enrollamiento para 98 galaxias cercanas; Kennicutt (1981) midió la forma de los brazos espirales de 113 galaxias cercanas entre Sa y Sc; Ma (2002) también realiza mediciones del ángulo de enrollamiento para distintos tipos morfológicos. Las mediciones de este parámetro presentan una gran dispersión como se muestra en la Figura 3.5. La dispersión que existe en este parámetro nos lleva a estudiarlo con más detalle (ver Sección 8.1).

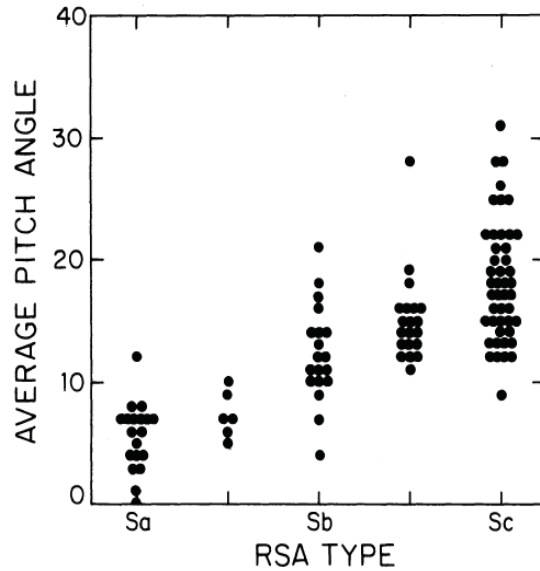


FIGURA 3.5: La Figura muestra el ángulo de enrollamiento para distintos tipos de Hubble y la dispersión que se observa en este parámetro. La Figura fue tomada de Kennicutt (1981).

### 3.2.2. Número de brazos

La mayoría de las galaxias espirales tiene dos brazos y son aproximadamente simétricos.

Para determinar la posición y el número de brazos espirales en una galaxia se emplean distintos trazadores, tales como regiones HII, estrellas de baja masa, gas y polvo. En algunas (pocas) galaxias se había notado que en el óptico y en el infrarrojo se observaba un número de brazos diferente. Sin embargo, si hacemos comparaciones con imágenes en ambas longitudes de onda se sabe que la mayoría de las galaxias presentan dos brazos espirales masivos y simétricos.

La estructura espiral en la banda K representa principalmente la parte estelar vieja de las galaxias. La morfología típica del patrón espiral en galaxias observadas en la banda K muestra dos brazos simétricos (Grosbøl et al. 2002).

En la tesis se ha empleado patrones espirales de dos brazos, como lo sugieren las observaciones en la banda K, que muestran la componente estelar vieja (y más abundante y masiva en conjunto) de las galaxias.



### 3.2.3. Masa Total y Ley de Densidad

En la literatura, no se habla de la masa de los brazos espirales dado que este resulta un parámetro extremadamente difícil de medir. En general se habla entonces de razones de fuerza radial entre el fondo axisimétrico y los brazos espirales. Patsis, Contopoulos y Grosbøl (1991) hacen un estudio de galaxias espirales normales en el cual encuentran una correlación entre el ángulo de enrollamiento y la razón de fuerza radial de los brazos a la fuerza del potencial axisimétrico de fondo, que va del 0.9 % al 16 %. Un resultado más reciente encuentra perturbaciones del 2 % para galaxias espirales de tipo temprano y 10 % para galaxias espirales de tipo tardío (Contopoulos 2007). Basándonos en el modelo PERLAS (Pichardo et al. 2003), que emplearemos en este trabajo, podemos traducir estos porcentajes de fuerza en una razón de masa del brazo con respecto al disco,  $M_{Br}/M_D = 0.01 - 0.15$ .

Con respecto a la ley de densidad de los brazos espirales, se considera que siguen una ley exponencial a lo largo del eje de simetría de los brazos, basada en el fundamento observacional de que los discos de las galaxias espirales caen exponencialmente con la distancia galactocéntrica (Amaral y Lépine 1997; Drimmel 2000).

### 3.2.4. Velocidad Angular de los Brazos Espirales

Las ondas espirales suponen que la autogravedad de las estrellas y las nubes de gas pueden compensar la tendencia de una espiral cinemática a enrollarse dando como resultado un patrón que rota rígidamente con una sola velocidad,  $\Omega_p$ . Éste es un parámetro importante en los brazos espirales, el cual determina el intervalo de modos de las espirales y fija la ubicación de las resonancias. La velocidad angular del patrón se da como:

$$\Omega_p = \Omega - \frac{\kappa}{m}, \quad (3.5)$$

donde  $\Omega$  es la velocidad angular de las estrellas en el disco,  $\kappa$  es la frecuencia epicíclica y  $m$  es el número de brazos. Si consideramos  $m = 2$ , entonces  $\Omega_p = \Omega - \kappa/2$ .

Aunque aún es materia de controversia, es costumbre suponer que los brazos espirales giran como un cuerpo rígido a una velocidad angular  $\Omega_p$ . En una muestra de 13 galaxias espirales normales de distintos tipos morfológicos (Contopoulos y Grosbøl

1986, 1988; Patsis, Contopoulos y Grosbøl 1991), muestran que la velocidad angular del patrón espiral va de aproximadamente  $60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  para galaxias espirales de tipo temprano a  $11 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  para galaxias espirales de tipo tardío. En este trabajo, buscaremos con nuestros modelos para galaxias de tempranas a tardías, restricciones a este amplio espectro de posibilidades de velocidades angulares.

### 3.2.5. Límite Interno y Externo

Las estrellas pueden reforzar el patrón espiral sólo si la frecuencia con la que atraviesan al patrón espiral,  $m|\Omega_p - \Omega(R)|$ , es más lenta que su frecuencia epicyclica,  $\kappa(R)$ , es decir:  $m|\Omega_p - \Omega| < \kappa$ , por lo tanto,  $\Omega_p < \Omega + \frac{\kappa}{m}$  y  $\Omega_p > \Omega - \frac{\kappa}{m}$ . Los puntos donde  $\Omega_p = \Omega - \frac{\kappa}{m}$  y  $\Omega_p = \Omega + \frac{\kappa}{m}$ , se llaman resonancia interna de Lindblad (RIL) y resonancia externa de Lindblad (REL), respectivamente. El radio donde las estrellas tienen la misma velocidad angular que la velocidad del patrón se conoce como la resonancia de corotación. Otra resonancia importante es la 4/1, esto es donde las órbitas dan 4 ciclos radiales por un acimutal. En la Figura 3.6 se muestra la posición de las resonancias considerando una  $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ .

Los brazos espirales pueden propagarse en la región entre la resonancia de interna de Lindblad y la resonancia externa de Lindblad (Lynden-Bell y Kalnajs 1972; Spark y Gallagher 2000). Un estudio realizado por Contopoulos y Grosbøl (1986, 1988) y Patsis, Contopoulos y Grosbøl (1991), donde modelan galaxias espirales a partir de una muestra estadística de espirales normales, concluyen que las “espirales fuertes” no llegan más allá de la resonancia 4/1 debido a que ya no son autoconsistentes (esto es, las órbitas dejan de apoyar la estructura espiral de dos brazos). Las “espirales débiles”, por otra parte, pueden llegar hasta la resonancia de corotación o incluso hasta la resonancia externa de Lindblad (Vauterin y Dejonghe 1996; Kikuchi, Korchagin y Mayama 1997). La respuesta del gas para espirales estelares autoconsistentes, siguen a las estrellas arriba de la resonancia 4/1, pero más allá, se tiene en general un brazo débil múltiple extendiéndose hasta la resonancia de corotación (Patsis et al. 1994; Patsis 1997).

En este trabajo, calcularemos la posición aproximada de las resonancias que según la teoría, delimitan los brazos hacia el interior (resonancia interna de Lindblad), y hacia el exterior (la resonancia de corotación). La posición de las resonancias que hemos em-

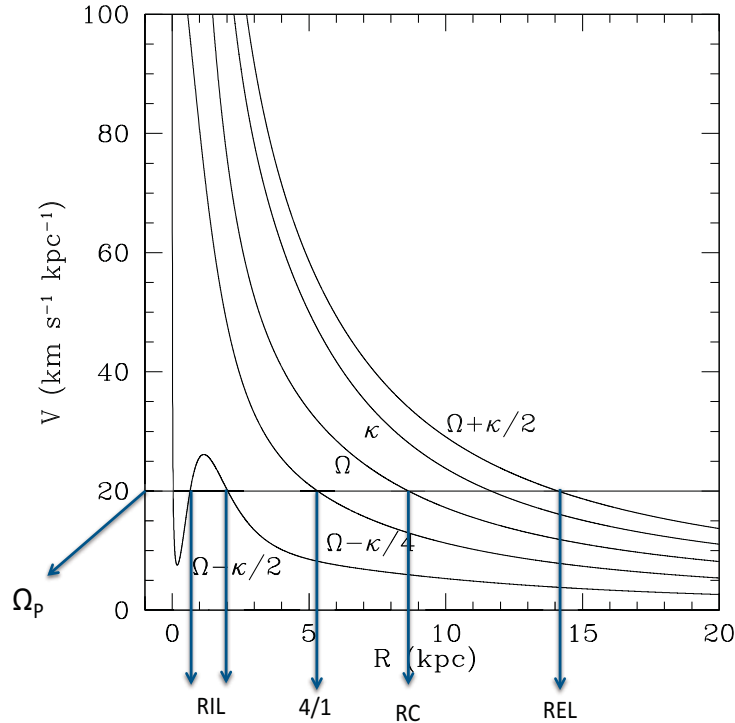


FIGURA 3.6: Resonancias principales dado un patrón espiral( $\Omega_p$ ): la Resonancia Interna de Lindblad (RIL), la resonancia de Corotación (RC), la resonancia 4/1 y la Resonancia Externa de Lindblad (REL).

pleado para delimitar el inicio y fin de los brazos espirales dependen del tipo morfológico y la velocidad del patrón espiral.

### 3.2.6. Lugar Geométrico

Las regiones HII son una de las características observacionales más conspicuas en las galaxias. Estas se concentran principalmente a lo largo de los brazos espirales. Hemos empleado un patrón espiral logarítmico de dos brazos dado que la mayoría de las galaxias de disco presentan sólo dos brazos masivos. En la Vía Láctea por ejemplo, hay una fuerte controversia con el número de brazos, sin embargo, incluso en nuestra Galaxia, parece ser que las observaciones de estrellas más viejas (que representan la mayor masa), trazan un patrón de dos brazos (Drimmel 2000).

### 3.2.7. Floculencia

En el esquema de Hubble, las galaxias tardías son considerablemente más floculentas, esto es, los brazos se ven en el óptico más fragmentados. Cabe hacer notar, que las llamadas galaxias floculentas son un extremo casi opuesto a las galaxias de gran diseño en el sentido de que los brazos en galaxias floculentas parecen ser de naturaleza más transiente que las increíbles estructuras de las galaxias de gran diseño, sin embargo, las galaxias de gran diseño tardías presentan más floculencia que las tempranas. No debe confundirse entonces la floculencia en galaxias con el concepto de galaxias floculentas. Las galaxias floculentas tienen un disco estelar viejo con pequeñas estructuras, los brazos cortos y caóticos, vistos en fotografías en el azul parecen ser regiones de autopropagación de formación de estrellas en el movimiento del gas (Elmegreen y Thomasson 1993). Para las galaxias catalogadas como floculentas existe un modelo alternativo al de ondas de densidad espiral, conocido como “modelo de formación estelar estocástica” (Gerola y Seiden 1978). Este método se basa en el proceso de explosión de supernovas constante. Las regiones de formación estelar están acomodadas de manera aleatoria (estocástica), donde generarán estrellas masivas de forma aleatoria, las cuales se convertirán en supernovas. Los brazos espirales resultantes duran poco tiempo pero se generan de manera continua de modo que la estructura espiral general se mantiene.

Parte II

METODOLOGÍA



# Capítulo 4

## Modelos de Potencial para Galaxias Espirales Normales

Los primeros modelos de galaxias eran extremadamente simples. Primero porque no existía la información observacional necesaria para restringir mejor los modelos y segundo por la capacidad computacional muy limitada. En los últimos años, grandes avances tanto en la obtención de datos observacionales como en el poder de cómputo han facilitado la creación de modelos de galaxias cada vez más complejos y realistas que logran acercarse un poco más al universo observable. Sin embargo, aún estamos lejos de tener un modelo que considere todos los procesos físicos que intervienen en una galaxia.

Actualmente no se cuenta con un potencial “único” (o monolítico) que logre modelar una galaxia. Un modelo galáctico se obtiene de considerar que las galaxias están formadas por un conjunto de componentes (agujero negro central, bulbo, disco grueso, disco delgado, un halo masivo, brazos espirales, barra o una distorsión oval). Por lo tanto, es necesario saber cuáles son las componentes galácticas que afectan al sistema dinámico que se estudia y formar el modelo galáctico. Uno de los objetivos de la tesis es estudiar el efecto de los brazos espirales sobre la dinámica estelar en el disco de galaxias espirales sin barra, por lo que las componentes que se modelan son: bulbo, disco, halo y brazos espirales.

Entre los códigos mejor conocidos para simulaciones de galaxias están los de N-cuerpos (Sellwood 1987), los tipo SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics* -Gingold y

Monaghan 1977; Monaghan 2012), los códigos estacionarios (Binney 2001) y los magnetohidrodinámicos (como Zeus). Los códigos de N-cuerpos están basados en simular aditivamente las interacciones entre todas las partículas que forman un sistema estelar, como una galaxia. En un sistema cada partícula se ve afectada gravitacionalmente por el resto a través de la ley de gravitación de Newton. Debido a que no es posible resolver de forma analítica las ecuaciones de movimiento de tres (excepto el caso restringido) o más partículas, se recurre a algoritmos numéricos para aproximar una solución. En una simulación de N-cuerpos se calcula la fuerza neta sobre cada partícula a cada tiempo. Esto limita severamente el número de partículas que se pueden simular.

La ventaja más importante que poseen los códigos de N-cuerpos es que cumplen directamente la ecuación de Poisson y de Boltzmann; esto quiere decir que son autoconsistentes en todo momento, es decir, se sigue la evolución temporal recalculando las fuerzas y el potencial, considerando a cada paso los cambios estructurales del sistema. Este tipo de códigos nos permiten estudiar la evolución de una galaxia y la formación de estructuras como brazos y barras. Sin embargo, un problema con este tipo de códigos es el alto costo computacional, que obliga a sacrificar la resolución para estudios dinámicos de gran escala. Adicionalmente, los códigos de N-cuerpos no son fácilmente manipulables para, por ejemplo, modelar un sistema específico.

Por otro lado, los códigos estacionarios están basados en todas las componentes descritas por el potencial galáctico  $\Phi(x, y, z, t)$ , aunque es invariante en el tiempo, suponemos que las estructuras de gran escala de las galaxias (brazos y barras), duran el equivalente a varias vueltas a su galaxia. El uso de modelos estacionarios nos da la ventaja de ajustar parámetros específicos de una galaxia. Sin embargo, no son autoconsistentes, aunque se puede aproximar la autoconsistencia orbital, esto es, se buscan entonces las órbitas que “apoyan” a las estructuras que la componen.

Cuando se trata de estudios más “finos”, como en el caos orbital, se requiere una estructura muy resuelta del potencial. Esta resolución no puede ser obtenida fácilmente con códigos del tipo de N-cuerpos, donde cada partícula representa  $10^4 M_{\odot}$  en el mejor de los casos. Adicionalmente, los expertos en caos orbital recomiendan un error máximo en la constante de Jacobi de al menos  $10^{-10}$ ; esto se puede obtener con códigos estacionarios más fácilmente. Como ya se ha mencionado en la Sección 2.3, el propósito principal de esta tesis es realizar el análisis orbital detallado del comportamiento caótico y ordenado



en diferentes tipos morfológicos de galaxias espirales, por lo tanto, se requiere de modelos ajustables de muy alta resolución y baratos computacionalmente y los obtenemos mejor de modelos estacionarios.

En este Capítulo se presenta una descripción de los potenciales empleados en la tesis para modelar galaxias espirales normales (Sa, Sb y Sc). Como se mencionó en el Capítulo 3, las galaxias espirales están formados por un potencial de fondo (fondo axisimétrico) formado por un bulbo, disco y halo. Adicionalmente, trabajamos con un potencial no axisimétrico realista de los brazos espirales.

## 4.1. Potencial Axisimétrico

Para modelar las galaxias, hemos elegido un potencial de fondo tridimensional, basado en el modelo de Allen y Santillán (1991). Este modelo analítico fue hecho para la distribución de masa de la Galaxia, pero puede ser ajustado a otras galaxias. Los potenciales que emplea este modelo son completamente analíticos, lo que hace relativamente fácil su implementación y es continuo en todo punto, al igual que sus derivadas. Este potencial está compuesto por un bulbo y un disco, ambos de la forma propuesta por Miyamoto y Nagai (1975) y un halo masivo esférico.

El bulbo central tiene un potencial de la forma,

$$\Phi_1(R, z) = -\frac{M_1}{(R^2 + z^2 + b_1^2)^{1/2}}, \quad (4.1)$$

y la densidad correspondiente,

$$\rho_1(R, z) = \frac{3b_1^2 M_1}{4\pi(R^2 + z^2 + b_1^2)^{5/2}}, \quad (4.2)$$

donde  $M_1$  es la masa del bulbo,  $R^2 = x^2 + y^2$  y  $b_1$  es la longitud de escala, las unidades que se utilizan son unidades galácticas, esto implica que  $G = 1$ , las unidades de longitud son en kpc, la velocidad en  $10 \text{ km s}^{-1}$  y la masa es  $2.32 \times 10^7 M_\odot$ .

Considerando coordenadas Cartesianas y suponiendo que los potenciales empleados son conservativos, la fuerza está dada por,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla\Phi = -\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right). \quad (4.3)$$

Por lo tanto las fuerzas en coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  para el bulbo son,

$$F_{B_x}(x, y, z) = -\frac{M_1 x}{(x^2 + y^2 + z^2 + b_1^2)^{3/2}}, \quad (4.4)$$

$$F_{B_y}(x, y, z) = -\frac{M_1 y}{(x^2 + y^2 + z^2 + b_1^2)^{3/2}}, \quad (4.5)$$

$$F_{B_z}(x, y, z) = -\frac{M_1 z}{(x^2 + y^2 + z^2 + b_1^2)^{3/2}}. \quad (4.6)$$

Para la componente del disco, el potencial está dado por,

$$\Phi_2(R, z) = -\frac{M_2}{\left(R^2 + \left[a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}\right]^2\right)^{1/2}}, \quad (4.7)$$

la densidad correspondiente al potencial de la ecuación anterior,

$$\rho_2(R, z) = \left(\frac{b_2^2 M_2}{4\pi}\right) \left(\frac{a_2 R^2 + [a_2 + 3(z^2 + b_2^2)^{1/2}][a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}]^2}{(R^2 + [a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}]^2)^{5/2} (z^2 + b_2^2)^{3/2}}\right), \quad (4.8)$$

donde  $M_2$  es la masa del disco,  $a_1$  y  $b_1$  son longitudes de escala y  $R^2 = x^2 + y^2$ .

Haciendo uso de la ecuación 4.3, las fuerzas correspondientes al disco se muestran a continuación,

$$F_{D_x}(x, y, z) = -\frac{M_2 x}{(x^2 + y^2 + [a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}]^2)^{1/2}}, \quad (4.9)$$

$$F_{D_y}(x, y, z) = -\frac{M_2 y}{(x^2 + y^2 + [a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}]^2)^{1/2}}, \quad (4.10)$$

$$F_{D_z}(x, y, z) = -\frac{M_2 z}{(x^2 + y^2 + [a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}]^2)^{1/2}}. \quad (4.11)$$

Finalmente, para la componente del halo, donde  $r = \sqrt{R^2 + z^2} \leq r_{max} = 100$  kpc,

$$\Phi_3(r) = -\frac{M(r)}{r} - \frac{M_3}{1.02 a_3} \left[ -\frac{1.02}{1 + (r/a_3)^{1.02}} + \ln\{1 + (r/a_3)^{1.02}\} \right]_r^{100}, \quad (4.12)$$

la densidad,

$$\rho_3 = (r) = \frac{M_3}{4\pi a_3 r^2} (r/a_3)^{1.02} \frac{[2.02 + (r/a_3)^{1.02}]}{[1 + (r/a_3)^{1.02}]^2}, \quad (4.13)$$

donde

$$M(r) = \frac{M_3(r/a_3)^{2.02}}{1 + (r/a_3)^{1.02}}.$$

$M_3$ , en este caso, no es la masa del halo sino un factor para la masa del halo,  $a_3$  es la longitud de escala.

El halo tiene simetría esférica, por lo que es valido considerar que la fuerza es,

$$\mathbf{F} = \frac{GM(r)}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r,$$

donde  $G = 1$  y sustituyendo  $M(r)$ , la fuerza es,

$$\mathbf{F} = \frac{M_3(r/a_3)^{2.02}}{r^2(1 + (r/a_3)^{1.02})} \hat{\mathbf{e}}_r,$$

por lo que las fuerzas para el halo en coordenadas Cartesianas son,

$$F_{H_x}(x, y, z) = -\frac{x}{r^3} \frac{M_3(r/a_3)^{2.02}}{1 + (r/a_3)^{1.02}}, \quad (4.14)$$

$$F_{H_y}(x, y, z) = -\frac{y}{r^3} \frac{M_3(r/a_3)^{2.02}}{1 + (r/a_3)^{1.02}}, \quad (4.15)$$

$$F_{H_z}(x, y, z) = -\frac{z}{r^3} \frac{M_3(r/a_3)^{2.02}}{1 + (r/a_3)^{1.02}}. \quad (4.16)$$

Los parámetros utilizados en el fondo axisimétrico para los tres modelos de galaxias espirales normales, se muestran en la Tabla 4.1.

Teniendo el potencial de cada una de las componentes axisimétricas, el potencial axisimétrico total es:

$$\Phi(R, z) = \Phi_1(R, z) + \Phi_2(R, z) + \Phi_3(R, z) \quad (4.17)$$

TABLA 4.1: Parámetros empleados para los potenciales del fondo axisimétrico.

Parámetros	Sa	Sb	Sc
$M_1$ ( $10^{10}M_\odot$ )	11.6	4.85	1.02
$M_2$ ( $10^{10}M_\odot$ )	12.88	12.13	5.10
$M_3^{(\dagger)}$ ( $10^{11}M_\odot$ )	3.48	2.32	0.64
$b_1$ (kpc)	2.5	1.7	1.0
$a_2$ (kpc)	7.0	5.0	5.3178
$b_2$ (kpc)	1.5	1.0	0.25
$a_3$ (kpc)	18.0	16.0	12.0

<sup>(†)</sup> $M_3$  no representa la masa del halo, sólo es un factor de la masa.

## 4.2. Modelos de Brazos Espirales

Actualmente, el modelaje de galaxias no se limita solamente al estudio orbital en galaxias axisimétricas, sino que también se incluyen estructuras no axisimétricas (brazos espirales y/o barras), ésto es con la finalidad de analizar el efecto dinámico que estas estructuras generan sobre el disco galáctico.

El potencial más utilizado para modelar la estructura espiral es la TWA (Tight-Winding Approximation), al que llamaremos “*potencial coseno*”. Este potencial es bidimensional y simula brazos espirales del tipo Lin y Shu (1964). Este modelo está basado en la idea de “ondas de densidad” propuestas por P. O. Lindblad (1960), el cual sugiere una estructura espiral cuasi estacionaria (significa que el patrón espiral es de larga duración, esto es, permanece sin cambio rotando como cuerpo rígido por muchos periodos orbitales). En la literatura se pueden encontrar otros modelos de brazos espirales. Sin embargo, la mayoría está basada en un coseno (Amaral y Lépine 1997; Lépine, Mishurov y Dedikov 2001; Cox y Gómez 2002). Es importante mencionar que el modelo del coseno es básicamente una solución matemática, que considera que los brazos espirales son sólo una perturbación al disco galáctico.

En la teoría de *ondas de densidad*, los brazos espirales se formarán si las estrellas y el gas se mueve en orbitas elípticas donde el ángulo del eje mayor varía suavemente

como una función del radio, formando la estructura espiral en las regiones donde la separación radial entre las orbitas consecutivas es menor (Figura 4.1).

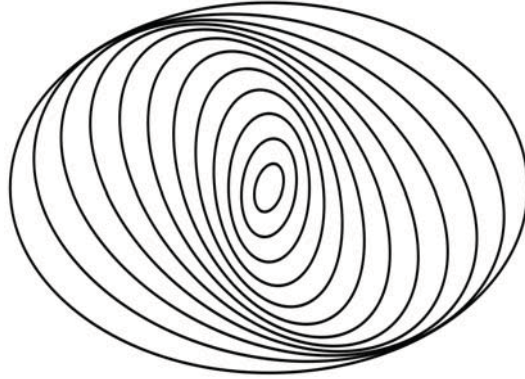


FIGURA 4.1: Respuesta del movimiento promedio de las estrellas a la presencia de un potencial no axisimétrico, como los brazos espirales.

El modelo es simple y analítico pero tiene limitaciones, por ejemplo, es autoconsistente (en el sentido de la ecuación de Poisson en 2D) sólo para ángulos de enrollamiento de los brazos menores a  $6^\circ$ , aproximación conocida como *tight winding*, es decir, “enrollamiento apretado” (Binney y Tremaine 1994). De esta forma, una de las ventajas importantes de este modelo, que es la autoconsistencia, sólo es válida para el modelaje de galaxias muy tempranas. Más aún, el potencial coseno es un potencial bidimensional, aplicable en el plano galáctico. Existen aproximaciones que extienden este potencial incluyendo la coordenada  $z$  perpendicular al plano galáctico (Martos y Cox 1998, con una forma exponencial del potencial en  $z$ ; Patsis y Grosbøl 1996, con una función  $\text{sech}^2(z)$ ; Lindblad, Lindblad y Athanassoula 1996), éstas no resultan en 3D consistentes con la ecuación de Poisson ni necesariamente autoconsistentes orbitalmente, esto es, los potenciales impuestos no son apoyados necesariamente por la estructura orbital. Este modelo de potencial no considera su autogravedad en el sentido de que supone los mínimos del potencial como en un modelo de brazo local (Martos y Cox 1998), es decir, la posición de los mínimos corresponde al centro geométrico exacto del brazo espiral, lo cual no es necesariamente correcto cuando uno incluye la contribución total del patrón espiral.

Por otro lado, también en la literatura existe un modelo único tridimensional que representa brazos espirales reales. Este modelo es conocido como PERLAS (**s**piral arms

potential formed by oblate spheroids -Pichardo et al 2003). En la Sección 4.2.2 se detalla este modelo.

Hemos empleado dos modelos para los brazos espirales, TWA y PERLAS. Uno de los objetivos de usar los dos modelos es realizar una comparación y analizar si los estudios orbitales presentan diferencias considerables entre estos dos modelos. En la Sección 7 mostraremos la comparación entre TWA y PERLAS para el caso de una galaxia tipo Vía Láctea.

#### 4.2.1. TWA (*Potencial Coseno*)

El potencial de la TWA, se puede representar con una función simple y periódica que depende de la distancia galactocéntrica y del acimut en la siguiente forma,

$$\Phi = g(r) \cos(m\varphi + f(r)), \quad (4.18)$$

donde  $r$  y  $\phi$  son coordenadas polares en el plano galáctico,  $m$  determina el número de brazos ( $m = 2$ , produce un patrón de dos brazos),  $g(r) = -AR \exp^{-\epsilon_s R}$  define la amplitud de la espiral (Contopoulos y Grosbøl 1986),  $A$  es la amplitud en  $\text{km}^2 \text{s}^{-2} \text{kpc}^{-1}$ ,  $\epsilon_s$  es el inverso de la longitud de escala radial,  $f(r)$  es la fase que contiene la geometría del patrón espiral y su dirección respecto a la rotación galáctica. Para la función  $f(r)$ , hemos empleado la forma dada por Roberts, Huntley & van Albada (1979),

$$f(R) = \frac{-2}{N \tan i_0} \ln \left[ 1 + \left( \frac{R}{R_s} \right)^N \right], \quad (4.19)$$

donde  $R_s$  es la distancia galactocéntrica a la cual el patrón espiral comienza y  $N$  determina la forma de los brazos desde su salida (desde el bulbo o barra; si  $N = 0$  significa que los brazos se prolongan como si fueran una barra, en un ángulo de  $180^\circ$ , mientras que  $N \rightarrow \infty$  significa una salida de los brazos formando un ángulo de  $90^\circ$  respecto a una barra central imaginaria),  $i_0$  es el ángulo de enrollamiento de los brazos espirales en el límite  $R \rightarrow \infty$ . El signo negativo implica un enrollamiento del patrón espiral en sentido de las manecillas del reloj. El ángulo de enrollamiento  $i$ , está dado por,

$$\tan i = \left[ 1 + \left( \frac{R_s}{R} \right)^N \right] \tan i_0. \quad (4.20)$$

Entonces, si  $N \rightarrow \infty$  y  $R < R_s$ , el patrón que tendremos como resultado será una barra (debido a que  $i \rightarrow 90^\circ$ ), en el caso de  $R > R_s$  se encuentra el patrón espiral con  $i \rightarrow i_0$ . Para los modelos emplearemos el caso donde  $N \gg 1$ .

Para obtener el patrón espiral de dos brazos es necesario hacer  $2\varphi + f(R) = 0$ , esto da las dos ramas espirales considerando  $R \geq R_s$ ,

$$R_1 = R_s(e^{\varphi N \tan i_0} - 1)^{1/N}, \quad \varphi \geq \frac{\ln 2}{N \tan i_0}, \quad (4.21)$$

$$R_2 = R_s(e^{\varphi N \tan i_0} - 1)^{1/N}, \quad \varphi \geq -\pi + \frac{\ln 2}{N \tan i_0}, \quad (4.22)$$

En la Figura 4.2, se muestran las dos ramas de los brazos espirales en el límite  $N \rightarrow \infty$ .

Anclados en el sistema de los brazos espirales y haciendo uso de coordenadas Cartesianas  $x', y'$ , asumimos que el origen es el centro galáctico (ver Figura 4.2). Por lo tanto, las coordenadas de cualquier punto  $(x'_1, y'_1)$  sobre la espiral  $R_1$  son,

$$\begin{aligned} x'_1 &= R_1 \cos \varphi, \\ y'_1 &= R_1 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Por simetría con respecto al origen, dado un punto  $(x'_1, y'_1)$  en el primer brazo, las coordenadas en el segundo brazo son,

$$\begin{aligned} x'_2 &= -x'_1, \\ y'_2 &= -y'_1. \end{aligned}$$

Ahora, si hacemos la sustitución de la ecuación 4.19 en la ecuación 4.18, así mismo la amplitud  $g(r)$ , el potencial coseno es,

$$\Phi(R) = -ARe^{-\epsilon_s R} \cos \left( 2\varphi - \frac{2}{N \tan i} \ln \left[ 1 + \left( \frac{R}{R_s} \right)^N \right] \right), \quad (4.23)$$

donde  $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . Las fuerzas correspondientes en coordenadas Cartesianas para el potencial coseno son,

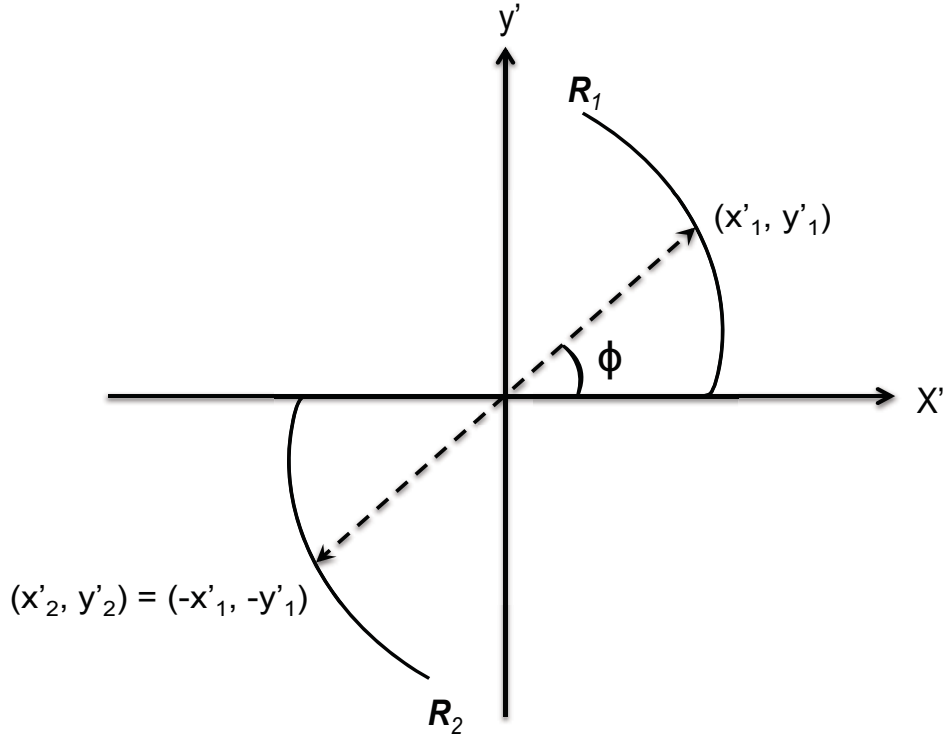


FIGURA 4.2: Las dos ramas del patrón espiral que se obtienen en el límite  $N \rightarrow \infty$ , por la simetría de los brazos espirales.

$$\begin{aligned}
 F_{Br_x} = & AR^{-1}e^{\epsilon_s R} \left\{ x \cos \left( \frac{2}{N \tan i} \ln \left[ 1 + \left( \frac{R}{R_s} \right)^N \right] \right) \right. \\
 & \left( 2 - \frac{\epsilon_s(x^2 - y^2)}{R} - \frac{(x^2 - y^2)}{R^2} + \frac{4xyR^{N-2}}{\tan i(R_s^N + R^N)} \right) \\
 & + 2 \operatorname{sen} \left( \frac{2}{N \tan i} \ln \left[ 1 + \left( \frac{R}{R_s} \right)^N \right] \right) \\
 & \left. \left( y - \frac{x^2 y \epsilon_s}{R} - \frac{(x^2 - y^2)xR^{N-2}}{\tan i(R_s^N + R^N)} - \frac{x^2 y}{R^2} \right) \right\}, \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{Br_y} = & AR^{-1}e^{\epsilon_s R} \left\{ y \cos \left( \frac{2}{N \tan i} \ln \left[ 1 + \left( \frac{R}{R_s} \right)^N \right] \right) \right. \\
 & \left( -2 - \frac{\epsilon_s(x^2 - y^2)}{R} - \frac{(x^2 - y^2)}{R^2} + \frac{4xyR^{N-2}}{\tan i(R_s^N + R^N)} \right)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & +2 \operatorname{sen} \left( \frac{2}{N \tan i} \ln \left[ 1 + \left( \frac{R}{R_s} \right)^N \right] \right) \\
 & \left( x - \frac{xy^2 \epsilon_s}{R} - \frac{(x^2 - y^2)yR^{N-2}}{\tan i(R_s^N + R^N)} - \frac{xy^2}{R^2} \right) \}.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

### 4.2.2. Modelo PERLAS

En la actualidad sólo hay un modelo tridimensional para brazos espirales basado en una distribución de densidad: PERLAS (Pichardo et al. 2003). Aunque este modelo fue hecho inicialmente para los brazos espirales de la Vía Láctea, tiene la característica de que se pueden ajustar los parámetros libremente de manera que podemos modelar los brazos de cualquier galaxia (siempre que se conozcan sus parámetros estructurales).

La idea se basa en un principio de superposición y consiste en colocar un conjunto de esferoides oblatos inhomogéneos (Apéndice B) individuales, a lo largo de un lugar geométrico (*locus* -ver ecuación 4.19) de forma espiral. Estos objetos son como las cuentas de un collar, pero tienen la libertad de traslaparse para representar una distribución de masa suave. Los brazos espirales son superpuestos sobre en un fondo axisimétrico (ver figura 4.3).

Para modelar la distribución de masa de los brazos espirales, se emplea el mismo locus espiral logarítmico de Roberts, Huntley y van Albada (1979; ecuación A.2), que fue descrito en el potencial coseno (ver Sec. 4.2.1).

Para ubicar los esferoides a lo largo de las dos ramas espirales  $R_1$  y  $R_2$  que se muestran en la Figura 4.2, se necesita conocer la separación entre los centros de los esferoides.

Para una curva dada  $R(\varphi)$  tenemos,

$$\begin{aligned}
 x' &= R \cos \varphi, \\
 y' &= R \operatorname{sen} \varphi,
 \end{aligned}$$

donde  $dx'$  y  $dy'$  son,

$$dx' = -R \operatorname{sen} \varphi d\phi + dR \cos \varphi,$$

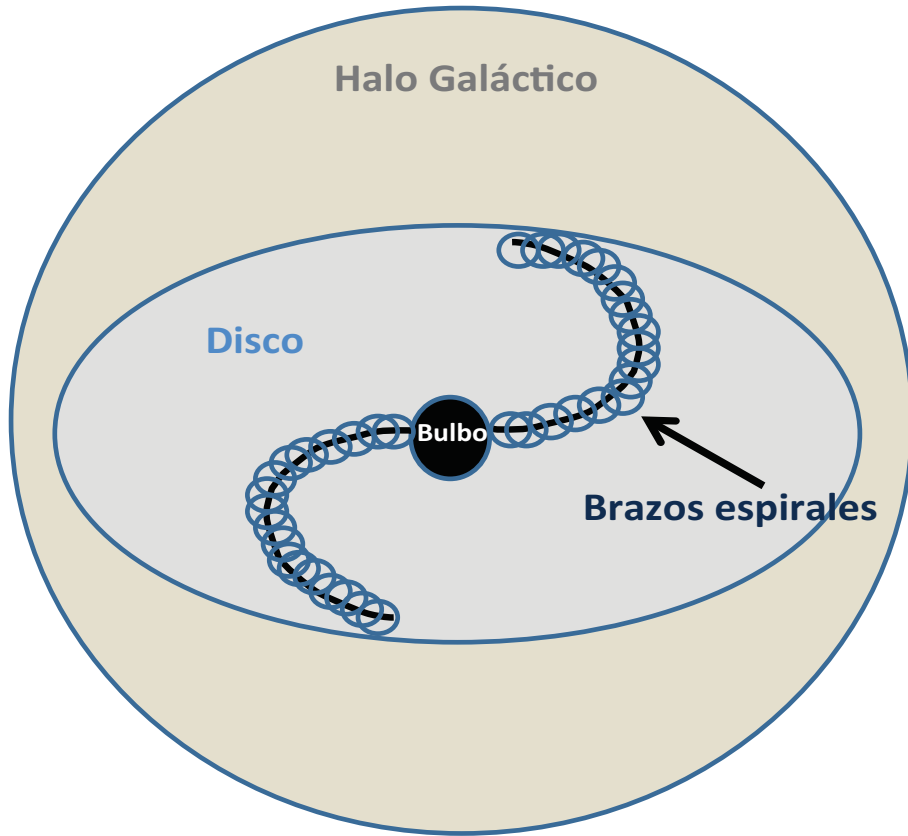


FIGURA 4.3: Esquema de la superposición de los brazos espirales formando por esferoides oblatos inhomogéneos al potencial axisimétrico.

$$dy' = R \cos \varphi d\phi + dR \operatorname{sen} \varphi,$$

donde la diferencial de la longitud de arco,  $ds$  es,

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx')^2 + (dy')^2, \\ ds &= \sqrt{R^2(d\varphi)^2 + (dR)^2} \\ &= \left\{ R^2 + \left( \frac{dR}{d\varphi} \right)^2 \right\}^{1/2} |d\varphi|. \end{aligned}$$

Utilizando  $R_1(\varphi)$  de la expresión 4.22, derivamos con respecto a  $\varphi$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{d\varphi} &= \frac{d}{d\varphi} \left\{ R_s [e^{\varphi N \tan i_o} - 1]^{1/N} \right\} \\ &= R_s \tan i_o e^{\varphi N \tan i_o} (e^{\varphi N \tan i_o} - 1)^{\frac{1}{N} - 1}. \end{aligned}$$

Si llamamos  $U(\varphi) = \varphi N \tan i_0$ , tenemos,

$$\frac{dR_1}{d\varphi} = R_s \tan i_0 e^{U(\varphi)} (e^{U(\varphi)} - 1)^{\frac{1}{N}-1}.$$

Haciendo uso de las relaciones anteriores,  $ds$  queda como,

$$\begin{aligned} ds &= \left\{ R_s^2 (e^U - 1)^{2/N} + R_s^2 \tan^2 i_0 e^{2U} [e^U - 1]^{2(\frac{1}{N}-1)} \right\}^{1/2} d\varphi \\ &= R_s (e^U - 1)^{\frac{1}{N}-1} \{ e^{2U} \sec^2 i_0 - 2e^U + 1 \}^{1/2} d\varphi. \end{aligned}$$

Si tomamos  $s = 0$  donde comienza el brazo,

$$s(\varphi) = R_s \int_{\varphi_1}^{\varphi} (e^U - 1)^{\frac{1}{N}-1} \{ e^{2U} \sec^2 i_0 - 2e^U + 1 \}^{1/2} d\varphi, \quad (4.26)$$

donde  $\varphi_1 = \frac{\ln 2}{N \tan i_0}$ .

La longitud de arco  $s_n = nds$ , donde  $n = 1, 2, 3, \dots, n_0$  con  $n_0$  es el número total de esferoides en el brazo  $R_1$ . Los ángulos  $\varphi_n$  y las distancias  $R_{1n}(\varphi_n)$ , se obtienen de la ecuación 4.26. En número  $n_0$  se obtiene especificando la distancia máxima  $R_{1f}$ , para el patrón espiral. Si  $\varphi_f$  es el ángulo acimutal dado por,

$$\varphi_f = \frac{1}{N \tan i_0} \ln \left[ 1 + \left( \frac{R_{1f}}{r_s} \right)^N \right]. \quad (4.27)$$

Por lo tanto, de  $s(\varphi_f)$  (ecuación 4.26), obtenemos la longitud de arco máxima a considerar y  $n_0$ . Conociendo  $\varphi_n$  de los centros de los esferoides, las distancias correspondientes  $R_{1n}$  son,

$$R_{1n} = R_s (e^{\varphi_n N \tan i_0} - 1)^{1/N} \quad (4.28)$$

Ahora, se necesita conocer la posición de un punto dado en el espacio,  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ , respecto al centro de cada esferoide. Esta posición se requiere para calcular el potencial y fuerza totales. En coordenadas Cartesianas  $(x', y')$ , el vector de posición del centro del  $n$ -ésimo esferoide en el brazo  $R_1$  es,

$$\mathbf{r}'_{1n} = R_{1n} (\hat{\mathbf{i}}' \cos \varphi_n + \hat{\mathbf{j}}' \sen \varphi_n).$$

La posición del mismo esferoide en el brazo  $R_2$ , es  $\mathbf{r}'_{2n} = -\mathbf{r}'_{1n}$ . La posición de  $\mathbf{r}'$ , respecto al centro del esferoide  $n$ -ésimo en el brazo  $R_1$  es,

$$\mathbf{r}''_{1n} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_{1n},$$

y su posición respecto al esferoide  $n$ -ésimo en el brazo  $R_2$ ,

$$\mathbf{r}''_{2n} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_{2n} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}'_{1n}.$$

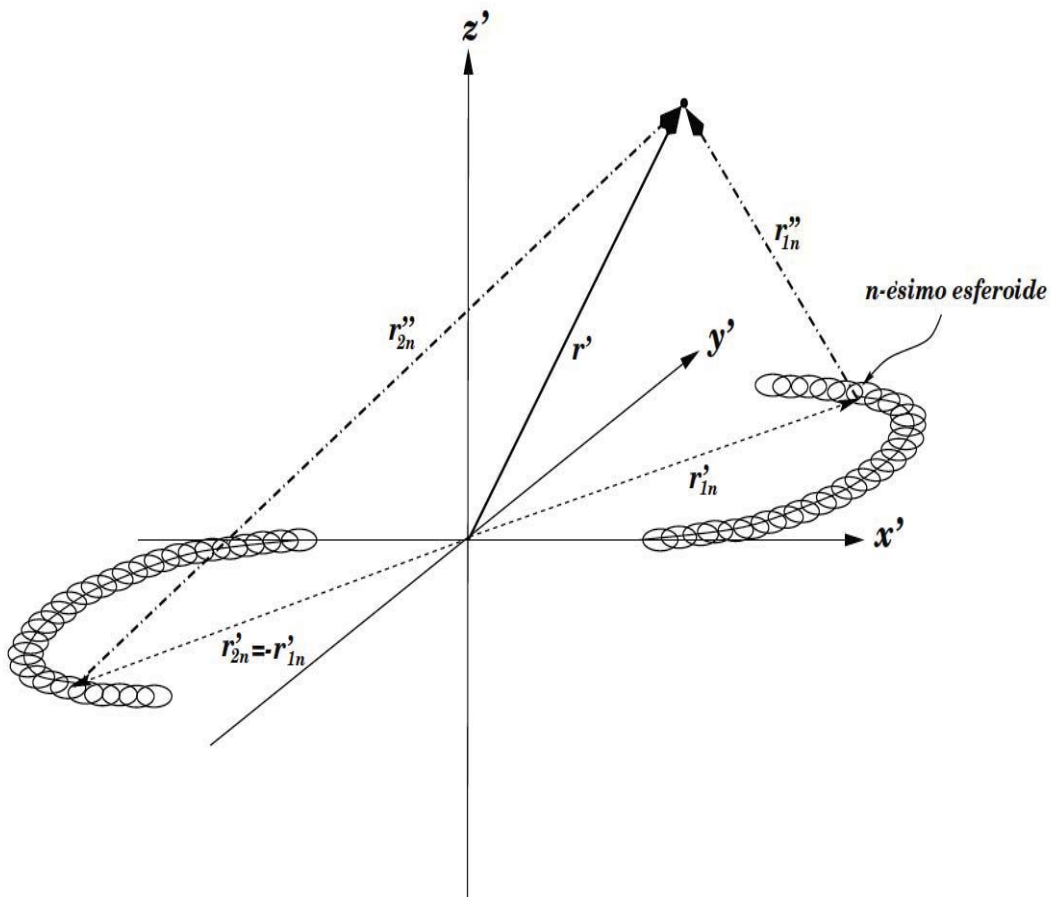


FIGURA 4.4: Posición vectorial del punto arbitrario  $\mathbf{r}'$  respecto a los centros de los esferoides. Figura tomada de la Tesis de Doctorado de Barbara Pichardo (2003).

En la Figura 4.4 , se muestran los vectores de posición hacia los centros de los esferoides. De aquí,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{1_n}'' &= \hat{\mathbf{i}}'x' + \hat{\mathbf{j}}'y' + \hat{\mathbf{k}}'z' - R_{1_n}(\hat{\mathbf{i}}' \cos \varphi_n + \hat{\mathbf{j}}' \sin \varphi_n) \\ &= \hat{\mathbf{i}}'(x' - R_{1_n} \cos \varphi_n) + \hat{\mathbf{j}}'(y' - R_{1_n} \sin \varphi_n) + \hat{\mathbf{k}}'z',\end{aligned}$$

y para el segundo brazo,

$$\mathbf{r}_{2_n}'' = \hat{\mathbf{i}}'(x' + R_{1_n} \cos \varphi_n) + \hat{\mathbf{j}}'(y' + R_{1_n} \sin \varphi_n) + \hat{\mathbf{k}}'z'.$$

Llamando

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{1_n}'' &= \hat{\mathbf{i}}'(x' - R_{1_n} \cos \varphi_n) + \hat{\mathbf{j}}'(y' - R_{1_n} \sin \varphi_n), \\ \mathbf{R}_{2_n}'' &= \hat{\mathbf{i}}'(x' + R_{1_n} \cos \varphi_n) + \hat{\mathbf{j}}'(y' + R_{1_n} \sin \varphi_n),\end{aligned}$$

tenemos,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{1_n}'' &= \mathbf{R}_{1_n}'' + \hat{\mathbf{k}}'z', \\ \mathbf{r}_{2_n}'' &= \mathbf{R}_{2_n}'' + \hat{\mathbf{k}}'z'.\end{aligned}$$

De lo anterior, la coordenada radial cilíndrica del punto  $\mathbf{r}'$  respecto al n-ésimo esferoide en el brazo  $R_1$  es,

$$\begin{aligned}R_{1_n}'' = |\mathbf{R}_{1_n}''| &= \{(x' - R_{1_n} \cos \varphi_n)^2 + (y' - R_{1_n} \sin \varphi_n)^2\}^{1/2} \\ &= \{x'^2 + y'^2 + R_{1_n}^2 - 2R_{1_n}(x' \cos \varphi_n + y' \sin \varphi_n)\}^{1/2},\end{aligned}\quad (4.29)$$

el n-ésimo esferoide para el brazo  $R_2$ ,

$$R_{2_n}'' = |\mathbf{R}_{2_n}''| = \{x'^2 + y'^2 + R_{1_n}^2 + 2R_{1_n}(x' \cos \varphi_n + y' \sin \varphi_n)\}^{1/2}. \quad (4.30)$$

En ambos casos la coordenada cilíndrica  $z'$  es la misma.

Las coordenadas cilíndricas  $(R_{1_n}'', z')$ ,  $(R_{2_n}'', z')$ , son las coordenadas que se emplean para obtener las contribuciones de los esferoides n-ésimos en los brazos espirales  $R_1$  y  $R_2$  al potencial y fuerzas totales en el punto  $\mathbf{r}'$ .

Ajustamos el modelo PERLAS a una ley de densidad que cae exponencialmente a lo largo del brazo. Además, individualmente, cada esferoide inhomogéneo tiene una ley de densidad lineal,  $\rho(a) = \rho_0 + \rho_1 a$ , donde  $a$  es el semieje mayor del esferoide, y  $\rho_0$  y  $\rho_1$  son funciones de la distancia galactocéntrica al centro de los esferoides. En el modelo se considera que la caída exponencial de los brazos es desde donde empieza el brazo, en  $R_s$ .

La densidad central de los esferoides está dada por,

$$\rho_0(R) = \rho_{0t} e^{-(R-R_s)/\Delta}, \quad (4.31)$$

donde  $\Delta$  es la longitud de escala para la exponencial. Dependiendo del tipo morfológico de la galaxia hemos empleado un valor distinto para  $\Delta$ . Utilizando la masa de un esferoide oblato inhomogéneo (ver Apéndice B), la masa de los brazos espirales es,

$$M_{Br} = \frac{2}{3} \pi a_r^3 \sqrt{1-e^2} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} \rho_{0n}, \quad (4.32)$$

donde  $a_r$  es el valor de  $a$  correspondiente a  $\rho = 0$ , es decir, la frontera del esferoide,  $e = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$  es la excentricidad ( $a$ ,  $c$  son los semiejes mayor y menor, respectivamente) y  $\rho_{0n}$  es la densidad central del  $n$ -ésimo esferoide. Sustituyendo la ecuación 4.31 en la ecuación 4.32 tenemos,

$$M_{Br} = \frac{2}{3} \pi a_r^3 \sqrt{1-e^2} \rho_{0t} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{-(R_{1n}-R_s)/\Delta}. \quad (4.33)$$

Despejando  $\rho_{0t}$ ,

$$\rho_{0t} = \frac{3M_{Br}}{2\pi a_r^3 \sqrt{1-e^2} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{-(R_{1n}-R_s)/\Delta}}, \quad (4.34)$$

Si tomamos la masa de los brazos como una fracción de la masa del disco, es decir  $M_{Br} = \alpha M_D$  y utilizando  $\rho_{1t} = -\rho_{0t}/a_r$ , rearrreglamos la ecuación 4.35, tenemos,

$$-2\pi \sqrt{1-e^2} \rho_{1t} = \frac{3\alpha M_D}{a_r^4 \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{-(R_{1n}-R_s)/\Delta}}. \quad (4.35)$$

Si llamamos,

$$A_{cte} = -\frac{2\pi \sqrt{1-e^2} \rho_{1t}}{e^4},$$

en el caso de que la densidad sea constante, pero si la densidad es exponencial, además tenemos,

$$\rho_1(R) = e^{-(R-R_s)/\Delta} \rho_{1t},$$

entonces,

$$A_{cte} = -\frac{2\pi\sqrt{1-e^2}p_1(R)}{e^4} = -\frac{2\pi\sqrt{1-e^2}e^{-(R-R_s)/\Delta}}{e^4},$$

de donde,

$$A_{exp}(R) = A_{cte}e^{-(R-R_s)/\Delta}.$$

La fuerza total de los brazos espirales sobre un punto dado  $\mathbf{r}'$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Br}(\mathbf{r}') &= \hat{\mathbf{i}}' F_{Br_{x'}} + \hat{\mathbf{j}}' F_{Br_{y'}} + \hat{\mathbf{k}}' F_{Br_{z'}} \\ &= \hat{\mathbf{i}}' 2A_{cte} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{(-R_{1n}-R_t)/\Delta} \{ \mathfrak{S}_R(R''_{1n}, z', \beta_{1n})(x' - R_{1n} \cos \varphi_n) \\ &\quad + \mathfrak{S}_R(R''_{2n}, z', \beta_{2n})(x' + R_{1n} \cos \varphi_n) \} \\ &\quad + \hat{\mathbf{j}}' 2A_{cte} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{(-R_{1n}-R_t)/\Delta} \{ \mathfrak{S}_R(R''_{1n}, z', \beta_{1n})(y' - R_{1n} \sin \varphi_n) \\ &\quad + \mathfrak{S}_R(R''_{2n}, z', \beta_{2n})(y' + R_{1n} \sin \varphi_n) \} \\ &\quad + \hat{\mathbf{k}}' A_{cte} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{(-R_{1n}-R_t)/\Delta} \{ \mathfrak{S}_z(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) \\ &\quad + \mathfrak{S}_z(R''_{2n}, z', \beta_{2n}) \}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde, dependiendo del subíndice, se indica si es la rama  $R_1$  o  $R_2$  de los brazos espirales,  $\mathfrak{S}_R(R''_{1n}, z', \beta_{1n})$  y  $\mathfrak{S}_R(R''_{2n}, z', \beta_{2n})$ , se definen como,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_R(R, z, \beta) &= -\frac{1}{2} a_r e^{(\beta - \sin \beta \cos \beta) + \sqrt{R^2 + z^2}} \\ &\quad - \sqrt{R^2 \cos^2 \beta + z^2} + \frac{1}{3R^2} [(R^2 \cos^2 \beta + z^2)^{3/2} - (R^2 + z^2)^{3/2}] \\ &\quad + z \ln \frac{(\sqrt{R^2 \cos^2 \beta + z^2} + z)(\sqrt{R^2 + z^2} - z)}{R^2 \cos \beta}. \end{aligned}$$

De la misma forma,  $\mathfrak{S}_z(R''_{1n}, z', \beta_{1n})$  y  $\mathfrak{S}_z(R''_{2n}, z', \beta_{2n})$  se definen como,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_z(R, z, \beta) &= -2a_r e z(\tan \beta - \beta) \\
 &+ z \left[ \frac{a \cos^2 \beta + 1}{\cos^2 \beta} \sqrt{R^2 \cos^2 \beta + z^2} - 3\sqrt{R^2 + z^2} \right] \\
 &+ (R^2 - 2z^2) \ln \frac{\left( \sqrt{R^2 \cos^2 \beta + z^2} + z \right) \left( \sqrt{R^2 + z^2} - z \right)}{R^2 \cos \beta}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, el potencial total de los brazos espirales es,

$$\Phi_{Br}(\mathbf{r}') = 2A_{cte} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{-(R_{1n}-R_s)/\Delta} \{ \Psi(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) + \Psi(R''_{2n}, z', \beta_{2n}) \}, \quad (4.37)$$

donde  $\Psi(R''_{1n}, z', \beta_{1n})$  y  $\Psi(R''_{2n}, z', \beta_{2n})$  se definen como,

$$\begin{aligned}
 \Psi(R, z, \beta) &= -\frac{1}{6}e^3 a_r^3 \beta + \frac{1}{2}e a_r \left[ \frac{1}{2}R^2(\beta - \text{sen } \beta \cos \beta) + z^2(\tan \beta - \beta) \right] \\
 &+ \frac{1}{9} \left[ (R^2 + z^2)^{3/2} - (R^2 \cos^2 \beta + z^2)^{3/2} \right] + \frac{1}{3} \left[ \frac{3}{2}z^2 - R^2 \right] \sqrt{R^2 + z^2} \\
 &+ \frac{1}{3} \left[ R^2 - z^2 \left( \frac{2 \cos^2 \beta + 1}{2 \cos^2 \beta} \right) \right] \sqrt{R^2 \cos^2 \beta + z^2} - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3}z^2 \right) \\
 &z \ln \frac{\left( \sqrt{R^2 \cos^2 \beta + z^2} + z \right) \left( \sqrt{R^2 + z^2} - z \right)}{R^2 \cos \beta}. \quad (4.38)
 \end{aligned}$$



# Capítulo 5

## Técnicas para el Análisis Orbital

El comportamiento caótico es una de las características más complicadas de los sistemas dinámicos no lineales, tanto en el sentido del análisis de sus propiedades, como en el sentido de su simple determinación.

La determinación del caos desde el punto de vista numérico requiere de una gran precisión en la integración de órbitas. Esto se debe principalmente a la enorme sensibilidad del caos a las condiciones iniciales. Para este efecto, hemos utilizado para la integración de órbitas el método de Bulirsch-Stoer (Apéndice C.1). Este método es uno de los integradores numéricos más precisos y veloces, además de ser eficaz con potenciales complejos como es el modelo PERLAS. Para potenciales más simples como el potencial coseno, empleamos el método de Runge-Kutta (Apéndice C.2).

Aún con una buena precisión, la determinación de caos en un sistema, requiere varias pruebas. Los diagramas de Poincaré, representan uno de los mejores métodos de diagnóstico del comportamiento caótico. Otros criterios de diagnóstico se construyen usando transformadas de Fourier tanto para hidrodinámica como para dinámica estelar (Carpintero y Aguilar 1998), los exponentes de Lyapunov y *stretching numbers* (Contopoulos y Voglis 1996), entre los más importantes considerando la naturaleza no disipativa del tipo de sistemas que estamos modelando (y en general de los sistemas estelares).

La componente más afectada por los brazos espirales es el disco galáctico. Para hacer un análisis de lo que sucede en el plano galáctico existen métodos diferentes para el estudio de la estructura orbital; para este trabajo emplearemos: diagramas de

Poincaré y órbitas periódicas.

Un sistema como una galaxia es complicado debido a que está formada por varias componentes: bulbo, disco, halo, brazos espirales, barra, etc. Para seguir su evolución temporal  $(x(t), y(t), z(t))$ , se integran las ecuaciones de movimiento y se estudia una muestra grande de órbitas. De esta forma el potencial total de la galaxia en coordenadas Cartesianas toma la forma,

$$\Phi(x, y, z) = \Phi_0(x, y, z) + \Phi_{Br}(x, y, z),$$

donde  $\Phi_0$  es el potencial axisimétrico y  $\Phi_{Br}$  es el potencial de los brazos espirales.

Necesitamos conocer la posición y velocidad de la partícula en cada punto; esta información nos dará la ubicación en el espacio fase. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{dz}{dt} &= \dot{z} \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Si consideramos un potencial no axisimétrico (con los brazos espirales) y resolvemos las ecuaciones anteriores, en el marco de referencia en el cual los brazos están fijos, estamos en un sistema no inercial, con velocidad angular  $\Omega_P$  (la de los brazos espirales).

Las ecuaciones de movimiento se resuelven en el sistema de referencia no inercial. Las ecuaciones de transformación de un sistema de referencia inercial a uno no inercial son:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega}_P \times \mathbf{r}',$$

donde  $\mathbf{v}'$  y  $\mathbf{v}$  son las velocidades en los sistemas de referencia no inercial e inercial respectivamente,  $\boldsymbol{\Omega}_P$  es la velocidad angular del patrón espiral, y finalmente  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  es la posición de la partícula. La aceleración es:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2\boldsymbol{\Omega}_P \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\Omega}_P \times (\boldsymbol{\Omega}_P \times \mathbf{r}'),$$

donde  $\mathbf{a}'$  y  $\mathbf{a}$  son las aceleraciones en el sistema de referencia no inercial e inercial respectivamente; se toma  $\frac{d\Omega_P}{dt} = 0$ .

En este sistema de referencia, tenemos un potencial estacionario, es decir, el potencial no cambia en el tiempo. Es importante saber qué cantidades se conservan en

un potencial dado, por ejemplo, si se trata de un potencial axisimétrico que consta de un bulbo, un disco y un halo, las integrales de movimiento que se conservan son dos, la energía, dado que el potencial es independiente del tiempo y el momento angular, debido a la simetría acimutal (en el sistema de referencia inercial).

En una aproximación mejor al potencial de una galaxia, necesitamos incluir estructuras no axisimétricas (brazos espirales y/o barras, por ejemplo) con cierta velocidad angular. Algunas de estas componentes hacen que toda simetría se rompa, por lo que las integrales de movimiento conocidas desaparecen. Sin embargo, en una galaxia con el fondo axisimétrico y los brazos espirales con una velocidad angular constante, vista desde el sistema de referencia no-inercial que se mueve con los brazos espirales, existe una integral de movimiento conocida como integral de Jacobi. La integral de Jacobi sirve como un diagnóstico de error, que deben mantener al mínimo las partículas (estrellas) a lo largo de su órbita.

La mayoría de las galaxias tienen brazos *trailing*. La velocidad angular se mide respecto a la dirección del polo norte de las galaxias, esto quiere decir que si los brazos rotan en el sentido de las manecillas del reloj, ésta es negativa:

$$\boldsymbol{\Omega}_P = -\Omega_P \hat{\mathbf{k}}', \quad \Omega_P > 0,$$

con  $\mathbf{k}'$  en la dirección del polo norte galáctico. Así, la integral de Jacobi, se define de la siguiente forma,

$$E_J = \frac{1}{2}v'^2 + \Phi_0 + \Phi_{Br} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega}_P \times \mathbf{r}'|^2,$$

donde  $\Phi_0$  y  $\Phi_{Br}$  son los potenciales por unidad de masa axisimétrico y de los brazos respectivamente. El término  $\frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega}_P \times \mathbf{r}'|^2$ , se conoce como *potencial centrífugo*. Si al potencial centrífugo le sumamos el potencial total ( $\Phi_0 + \Phi_{Br} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega}_P \times \mathbf{r}'|^2$ ), se le conoce como *potencial efectivo*.

En coordenadas Cartesianas, la energía de Jacobi es,

$$E_J = \frac{1}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) + \Phi_0(x', y', z') + \Phi_{Br}(x', y', z') - \frac{1}{2}\Omega_P^2(x'^2 + y'^2). \quad (5.1)$$

## 5.1. Diagramas de Poincaré

El espacio real (posiciones) no proporciona la información necesaria para determinar la naturaleza de las órbitas, por lo que el estudio del comportamiento orbital se realiza

en cortes del espacio fase, que consideran posición y velocidad.

Uno de los diagnósticos más seguros para la determinación del caos en sistemas conservativos, son los diagramas de Poincaré. Estos diagramas se crean en el espacio fase.

El espacio fase de una estrella en coordenadas Cartesianas tiene seis dimensiones,  $x', y', z', \dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'$ . Si sólo estamos en el plano de la galaxia, tenemos cuatro dimensiones,  $x', y', \dot{x}', \dot{y}'$ . La constante de Jacobi se conserva en el sistema no inercial y se puede graficar el movimiento de la estrella en un espacio tridimensional, puede ser  $x', y', \dot{x}'$ , de manera que  $\dot{y}'$ , está determinada (tendrá dos opciones de signo ya que la integral de Jacobi es cuadrática) con el valor de  $E_J$ . Sólo se pueden analizar los puntos donde la estrella cruza un plano en el espacio fase, en este caso se considera  $y' = 0$ . Sólo se grafican los puntos  $(x', \dot{x}')$  cuando  $\dot{y}' > 0$ , es decir, se toman los puntos  $x', \dot{x}'$  y cada vez que la estrella cruza el eje  $x'$  en la dirección positiva del eje  $y'$ . Se toman los cruces de las órbitas sobre el eje  $x'$  con  $\dot{y}' > 0$ , para reducir el tiempo de integración y obtener el doble de puntos, se tomaron los cruces de las órbitas con  $\dot{y}' < 0$ , ésto es posible por la simetría que tienen los brazos espirales. Los cruces con  $\dot{y}' < 0$  se incorporan al diagrama de Poincaré con  $\dot{y}' > 0$  graficando los puntos  $x' \rightarrow -x', \dot{x}' \rightarrow -\dot{x}'$ .

En este tipo de diagramas tenemos varios tipos de órbitas (Figura 5.1). Las órbitas periódicas son las que se cierran sobre sí mismas en un número finito de vueltas a la galaxia, entre éstas, las más importantes son las que se cierran en una sola vuelta. Las órbitas “ordenadas” aparecen como curvas pobladas densamente de puntos que representan cada cruce de la órbita con el eje  $x'$ ; éstas órbitas rodean en su mayoría a las órbitas periódicas, que aparecen en los cortes como puntos o series cortas de puntos. Las órbitas cuasiperiódicas forman curvas unidimensionales en el espacio fase y rodean en general a las periódicas.

El caos por otro lado, aparece en forma de puntos dispersos que llenan densamente regiones enteras de estos diagramas y pueden por ejemplo rodear órbitas periódicas en muchos casos. En casos de caos total del sistema se destruyen los patrones no axisimétricos, el caos penetra hasta las periódicas y ya no hay órbitas que soporten el potencial impuesto. Estas órbitas llenan completamente la zona permitida para una energía de Jacobi dada, es decir, el diagrama de Poincaré completo para una  $E_J$  determinada.

Al graficar todos los puntos en un diagrama de  $\dot{x}'$  vs.  $x'$ , se obtiene un diagrama de

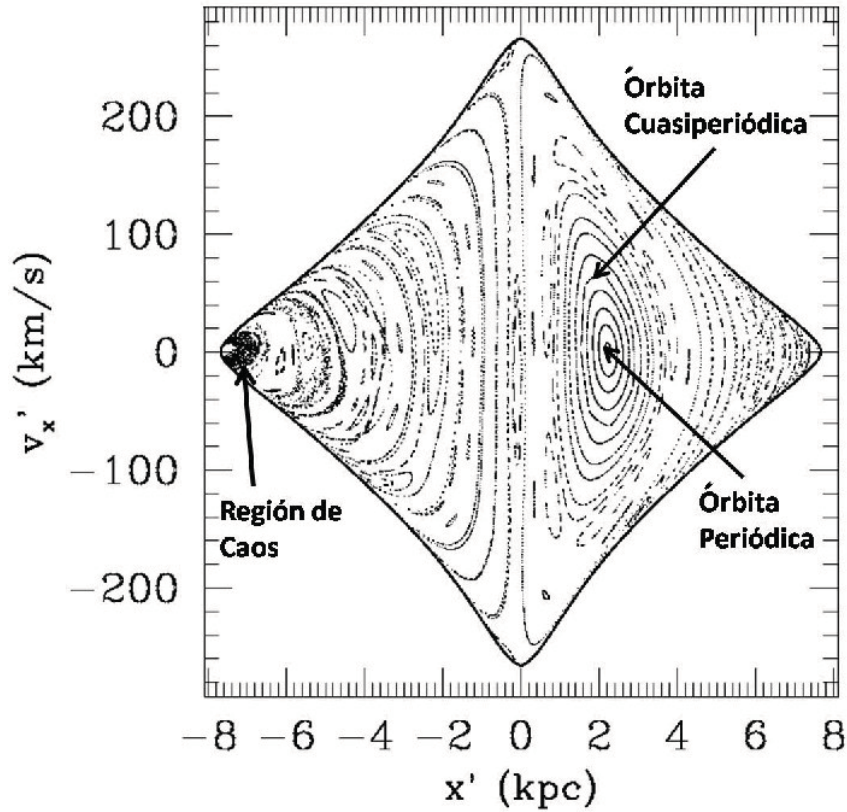


FIGURA 5.1: Ejemplo de un diagrama de Poincaré, en éste se muestran los tipos de órbitas que aparecen en el diagrama. La región con  $x' > 0$  es llamada “retrógrada”, y la región  $x' < 0$ , es llamada “prógrada”.

Poincaré (Figura 5.1). Estos diagramas fueron propuestos por Henry Poincaré, también son conocidos como cortes de Poincaré. En estos diagramas se puede notar la existencia de una integral de movimiento adicional a la de Jacobi, de lo contrario, el espacio limitado por la constante de Jacobi estaría lleno densamente y no se apreciarían las curvas.

Hemos considerado que  $\Omega_P < 0$ , por lo que una órbita prógrada es la que cruza el eje  $x' < 0$  (en el sistema no inercial) tal que  $\dot{y} > 0$  (más correctamente el cruce es prógrado, no la órbita). Por otra parte, la órbitas retrógradas son aquellas para las que  $x' > 0$  y tienen  $\dot{y} > 0$ . Por lo tanto, se dice que la parte derecha del diagrama de Poincaré ( $x' > 0$ ) es la región retrógrada, mientras que la parte izquierda ( $x' < 0$ ) es la

región prógrada.

Para una constante de Jacobi dada, se construye una familia de órbitas como las de la Figura 5.1. Estas órbitas están restringidas a un área en el plano  $(x', \dot{x}')$ , definida por la restricción  $E_J \geq \frac{1}{2}\dot{x}'^2 + \Phi_{eff}(x', 0)$ , donde  $\Phi_{eff}(x', y') = \Phi_0(x', y') + \Phi_{Br}(x', y') - \frac{1}{2}\Omega_P^2(x'^2 + y'^2)$ , es el potencial efectivo.

Para ilustrar el comportamiento en el espacio real de las órbitas que componen a un diagrama de Poincaré, en las Figuras 5.2 y 5.3 mostramos algunos ejemplos de órbitas en el espacio de configuración (espacio real) en el sistema no inercial (sobre los brazos espirales).

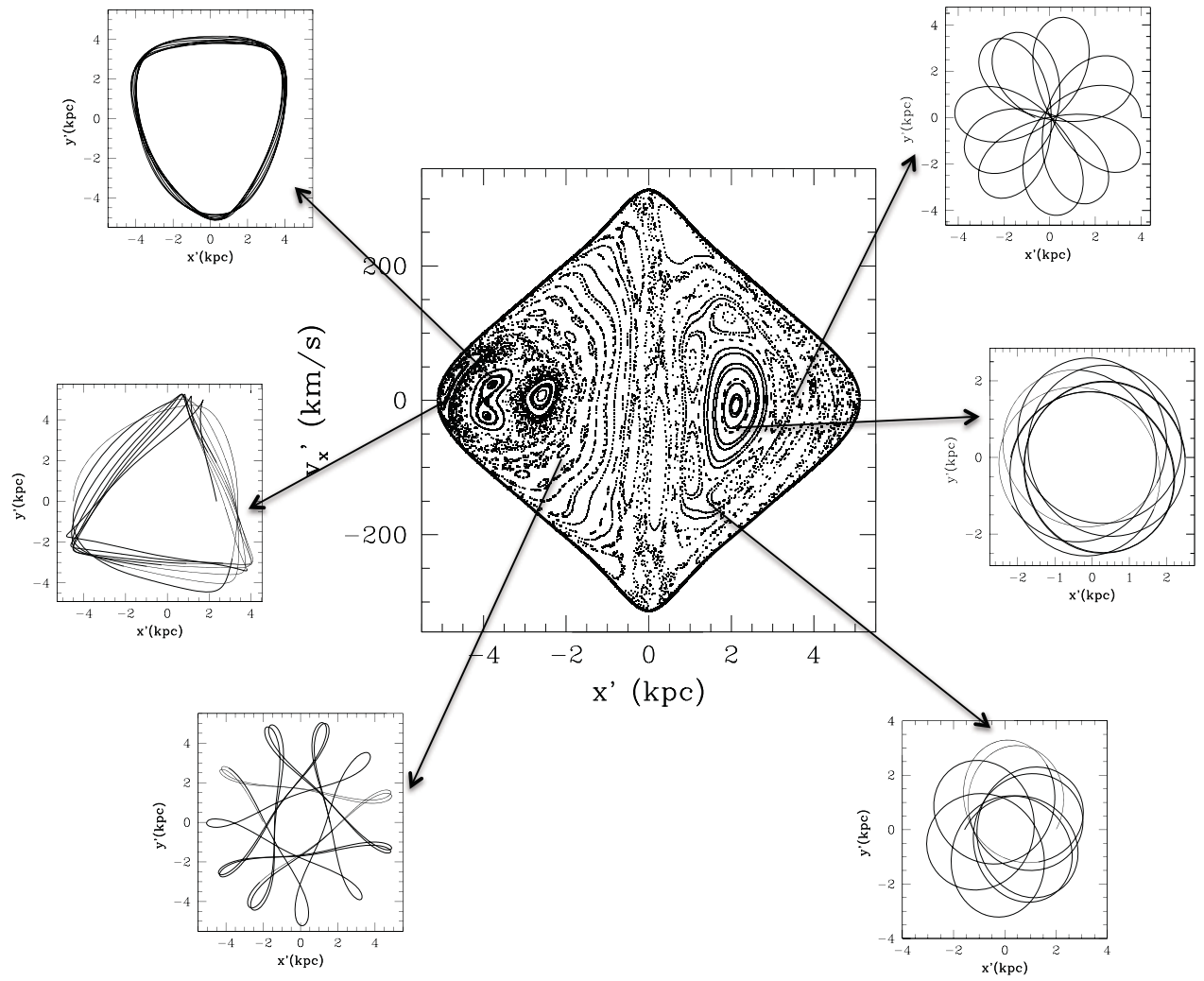


FIGURA 5.2: Seis ejemplos de órbitas individuales en el espacio de configuración en el sistema no inercial. Las flechas indican a que órbita corresponde en el espacio fase.

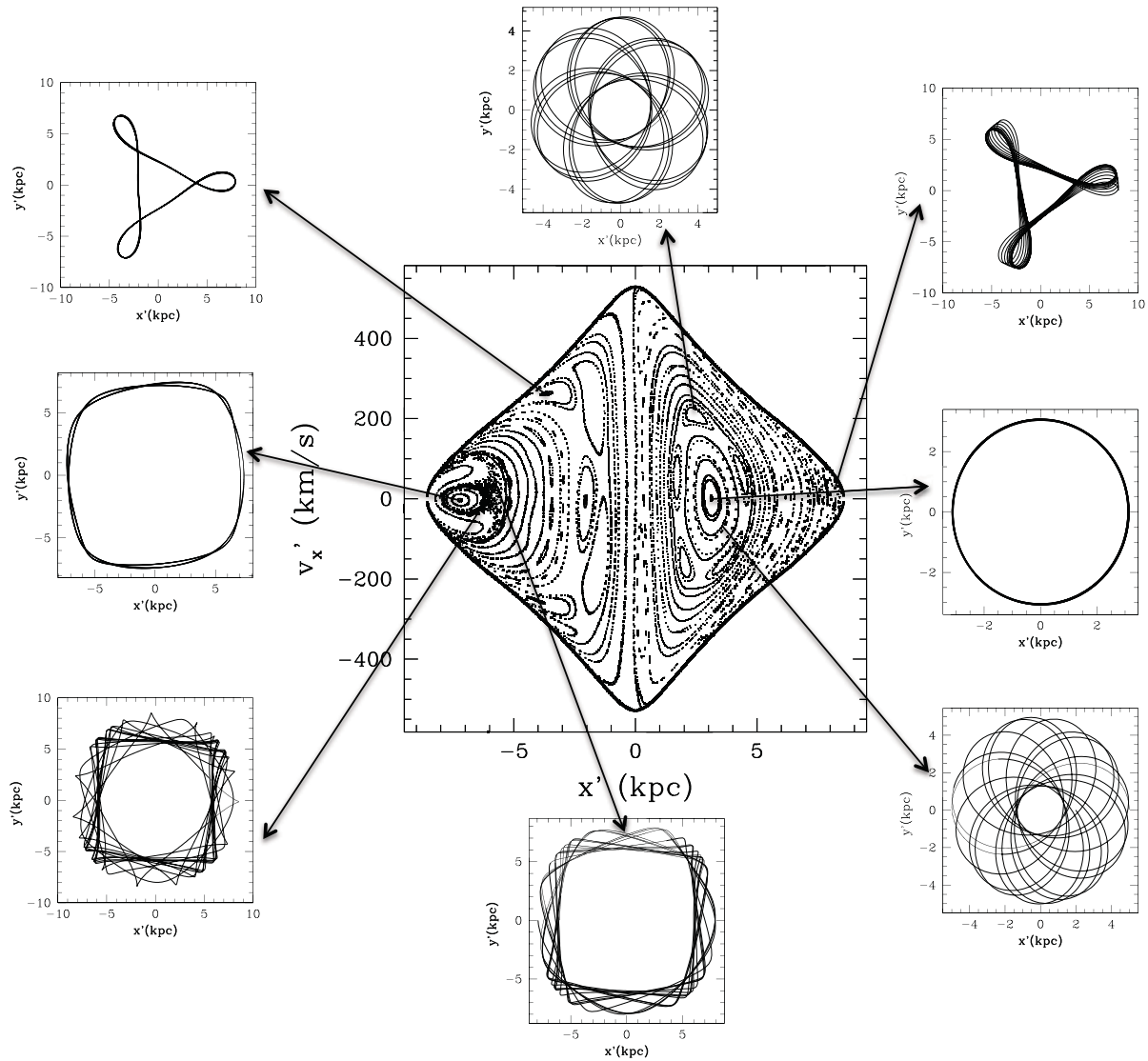


FIGURA 5.3: Ocho ejemplos de órbitas individuales en el espacio de configuración en el sistema no inercial. Las flechas indican a que órbita corresponde en el espacio fase.

## 5.2. Órbitas Periódicas

Las órbitas periódicas son las órbitas más simples en los potenciales. Éstas actúan como atractores del resto de las órbitas en el sentido de que son seguidas por órbitas no periódicas, incluso por las órbitas caóticas, que forman tubos alrededor de éstas.



Las órbitas periódicas son capaces de mantener estructuras de gran escala como los brazos espirales o las barras, por lo tanto, en dinámica estelar las órbitas periódicas son conocidas como el “esqueleto dinámico” de las distribuciones de masa. En los diagramas de Poincaré, las órbitas periódicas producen un número finito de puntos; alrededor de estos puntos se forman órbitas ordenadas, islas e incluso regiones de caos (ver Sección 5.1).

Las órbitas periódicas que nos interesa obtener son las conocidas como órbitas  $2/1$ <sup>1</sup>, esto es con el potencial axisimétrico más el potencial de brazos espirales.

El programa que calcula las órbitas periódicas a una distancia del centro galáctico, utiliza el método Newton-Raphson (Apéndice C.3) en dos dimensiones. Los pasos para obtener una órbita periódica se describen a continuación.

Se requiere de una predicción para las condiciones iniciales de la órbita periódica, la mejor predicción en este caso es la periódica circular (correspondiente las órbitas  $1/1$ , en este potencial son circulares). Las órbitas son lanzadas desde  $y' = 0$ , sobre el eje  $x' > 0$  con  $v'_y > 0$ . De esta forma calculamos las condiciones iniciales con la siguiente relación,

$$v_c = \left( x' \left| \frac{d\Phi_0}{dx'} \right| \right)^{1/2}, \quad (5.2)$$

que define la velocidad circular de un potencial axisimétrico  $\Phi_0$ . Obtenemos con esto la predicción de la velocidad inicial para las órbitas periódicas correspondientes que deseamos calcular en el potencial total  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_{Br}$ , proporcionando sólo la posición sobre el eje  $x'$ .

Dado que las órbitas periódicas tienen la característica de trazar la misma órbita con periodos cortos de la vida de una galaxia, utilizamos esta propiedad para encontrarlas, esto es, estudiamos las órbitas periódicas desde una condición inicial dada, entre todas las órbitas vecinas, buscando aquella que regresa aproximadamente a la misma posición inicial. Con el método de Newton-Raphson, se buscan las raíces de las siguientes ecuaciones de error,

$$x'_f - x'_i = 0, \quad (5.3)$$

$$v'_{xf} - v'_{xi} = 0, \quad (5.4)$$

---

<sup>1</sup>Las órbitas  $2/1$  son aquellas que tienen dos ciclos radiales por uno acimutal.

donde  $x'_i$  es la posición inicial desde donde lanzamos la órbita en el eje  $x'$  y  $v'_{xi}$  es la velocidad inicial en ese punto,  $x'_f$  es la posición después de una vuelta completa, cuando interseca la órbita el eje  $x'$  nuevamente, y  $v'_{xf}$  es la velocidad correspondiente.

Una vez encontrada la raíz, lo que significa encontrar la órbita cuyo error (que corresponde a la diferencia entre el punto final y el inicial) después de una vuelta completa sea menor que  $10^{-5}$  en unidades de kpc para  $x'$  y el mismo error para  $v'_x$  en unidades de 10 km/s, obtenemos las condiciones iniciales requeridas para la órbita que son  $x'$ ,  $v'_x$  y  $E_J$ , donde  $E_J$  es la constante de Jacobi que calculamos en el plano galáctico de acuerdo a,

$$E_J = \frac{1}{2}(v'^2_x + v'^2_y) + \Phi(x', y') - \frac{1}{2}\Omega_p^2(x'^2 + y'^2). \quad (5.5)$$

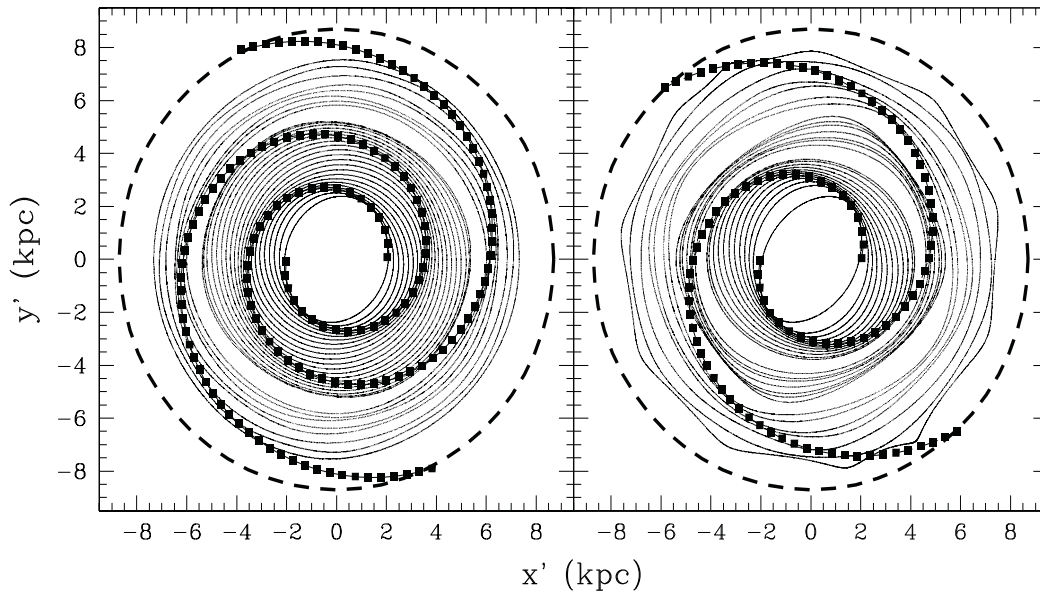


FIGURA 5.4: Órbitas periódicas en el sistema de referencia no inercial para el caso de una galaxia Sc, para un ángulo de enrollamiento de  $10^\circ$  (gráfica de la izquierda) y  $15^\circ$  (gráfica de la derecha), para  $M_{Br}/M_D = 0.03$ , en ambos casos.

### 5.3. Respuesta en Densidad

Para cuantificar el apoyo que dan las órbitas periódicas al potencial de brazos espirales, hemos calculado la respuesta en densidad de los brazos espirales empleando el método de Contopoulos y Grosbøl (1986). La respuesta en densidad es donde un grupo de órbitas producen un incremento en la densidad, que se define como,

$$\rho r \dot{\theta}' \Delta r = \rho_c r_c \dot{\theta}'_c \Delta r_c, \quad (5.6)$$

donde  $\rho$  es la densidad en el punto  $(r, \theta)$ ,  $\dot{\theta}' = \Omega - \Omega_P$  es la velocidad angular en el marco de referencia rotante,  $\Delta r$  es la distancia entre dos órbitas sucesivas en dirección radial, el subíndice  $c$  se refiere a las cantidades correspondientes para una órbita circular (es decir, sin perturbación) con la misma energía de Jacobi.

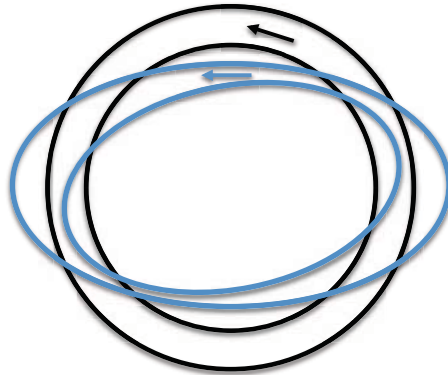


FIGURA 5.5: Deformación de una órbita circular a una órbita elíptica al introducir una perturbación espiral.

El método de Contopoulos y Grosbøl considera que las órbitas periódicas son circulares si no existe una perturbación en el potencial axisimétrico. Alrededor de las órbitas periódicas oscilan todas las demás formando tubos; al introducir una perturbación, como los brazos espirales, las órbitas periódicas ya no serán circulares, sino que serán deformadas en elipses como se muestra en la Figura 5.5, pero los tubos de material alrededor de las órbitas periódicas siguen siendo los mismos (Contopoulos 1979). Se hace entonces la suposición de que la materia que inicialmente se encuentra contenida entre dos órbitas circulares se conservará después de introducir una perturbación espiral (Figura 5.6); esta consideración hace válido el uso de la ecuación 5.6.

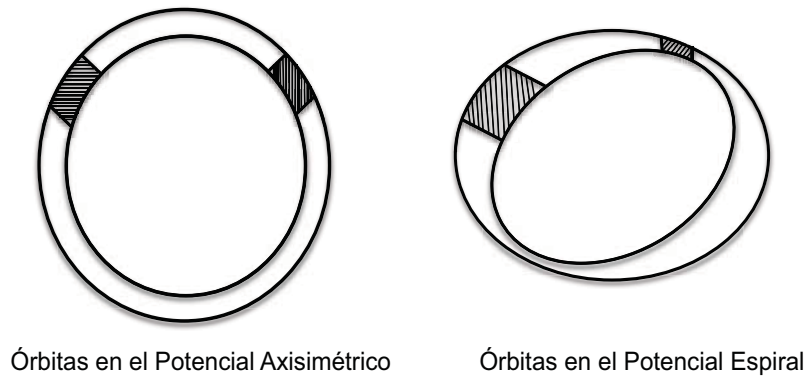


FIGURA 5.6: Conservación de flujo de masa.

Calculamos una serie de órbitas periódicas centrales y encontramos la respuesta en densidad usando la conservación de flujo de masa entre dos órbitas sucesivas. Adicionalmente, buscamos la posición de la respuesta en densidad máxima a lo largo de cada órbita periódica. Una vez teniendo la posición de la respuesta en densidad máxima, lo comparamos con la posición de los centros de los esferoides que forman el brazo del modelo PERLAS, esto es con la finalidad de verificar si el brazo que fue impuesto (PERLAS), coincide con la respuesta en densidad máxima, como se muestra en la gráfica izquierda de la Figura 5.7. Al mismo tiempo, con la respuesta en densidad a lo largo de cada órbita periódica central, calculamos el promedio de la respuesta en densidad alrededor de cada una de estas posiciones, tomando en cuenta una venticidad de 500 pc de radio. Con esto comparamos la respuesta en densidad con la densidad impuesta. La densidad impuesta es la suma de la densidad del disco axisimétrico en el plano del disco y la densidad central de los brazos espirales, un ejemplo de esto se presenta en la gráfica de la derecha de la Figura 5.7.

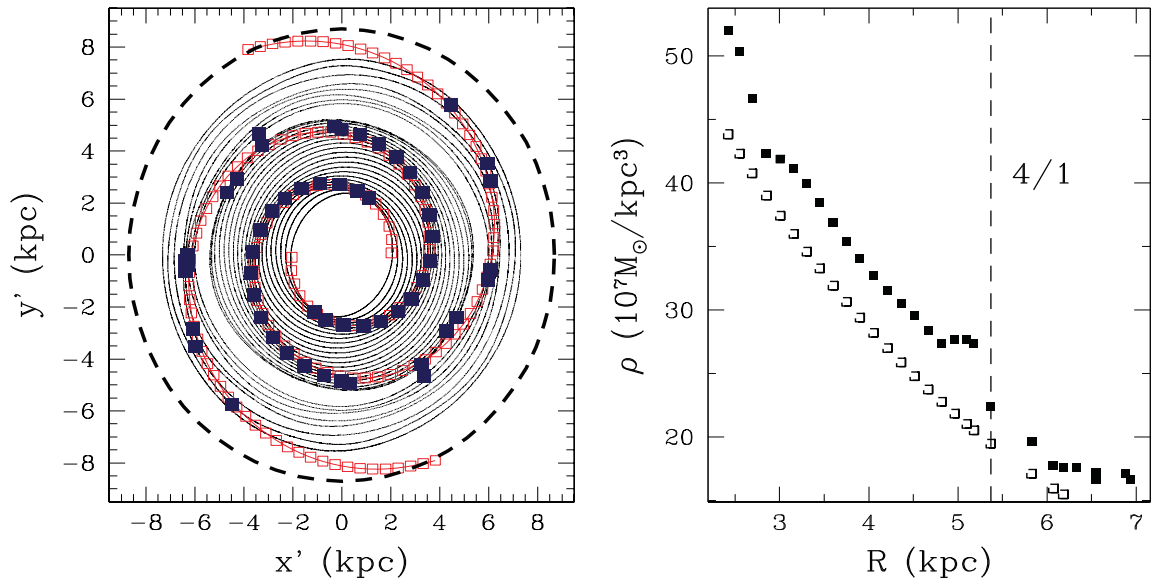


FIGURA 5.7: La gráfica a la izquierda muestra la posición de la respuesta en densidad máxima (cuadros rellenos) y el locus impuesto (cuadros vacíos). La gráfica a la derecha muestra la respuesta en densidad (cuadros rellenos) y la densidad impuesta (cuadros vacíos).

## 5.4. Exponentes de Lyapunov

Una de las características más complicadas de los sistemas dinámicos no lineales es el fenómeno del caos, tanto en el sentido del análisis de sus propiedades, como en el sentido de su simple determinación.

Uno de los diagnósticos más empleados y seguros para la determinación del caos son los diagramas de Poincaré, pero éstos sólo se pueden hacer en dos dimensiones por lo que para el análisis de caos en sistemas no axisimétricos en tres dimensiones, estos diagramas no se pueden construir. Sin embargo, existe un método para cuantificar la sensibilidad a las condiciones iniciales para el comportamiento caótico, los Exponentes Característicos de Lyapunov (LCE, por sus siglas en Inglés).

El caos en sistemas deterministas muestra una dependencia muy sensible a las condiciones iniciales. Esto implica que si dos partículas tienen trayectorias que comienzan

muy cerca una de la otra en el espacio fase éstas se moverán alejándose exponencialmente en períodos de tiempo cortos en promedio. Esto es, si  $d_0$  es una medida de la distancia inicial entre dos puntos, a un pequeño tiempo más tarde, la distancia es  $d(t) = d_0 2^{\lambda t}$ , donde  $\lambda$  es el exponente de Lyapunov.

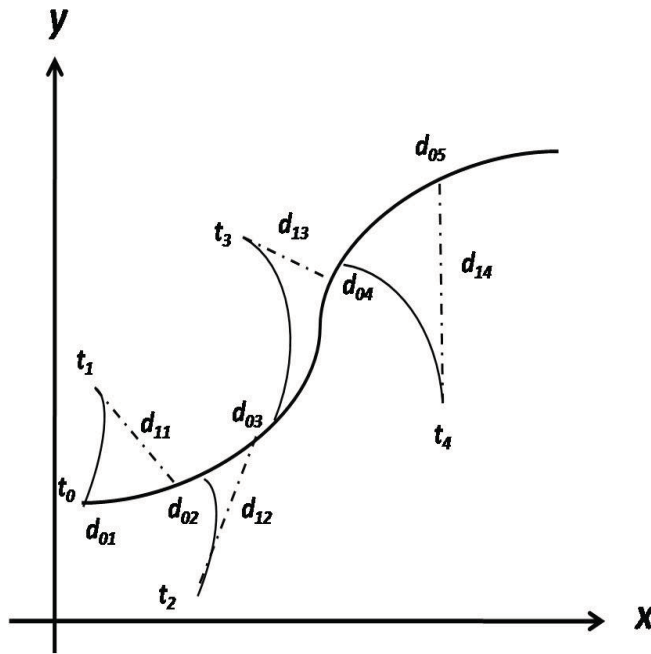


FIGURA 5.8: Esquema del cambio de distancia entre dos órbitas cercanas, utilizado para definir el primer exponente de Lyapunov .

Para definir una medida de la divergencia de dos órbitas muy próximas, se promedia el crecimiento exponencial en muchos puntos a lo largo de la trayectoria como se muestra en la Figura 5.8. Se comienza entonces con una trayectoria de referencia la que se conoce como *fiduciaria* y un punto o una trayectoria cercana y se mide  $d(t)/d(0)$ . Cuando  $d(t)$  se hace muy grande, se busca una nueva trayectoria cercana y se define un nuevo  $d_0(t)$ . Se define el primer exponente de Lyapunov por la expresión,

$$\lambda = \frac{1}{t_0 - t_N} \sum_{i=1}^N \log_2 \left( \frac{d_{1i}}{d_{0i}} \right). \tag{5.7}$$

Entonces, el criterio para caos es,

$$\lambda > 0 \text{ caos,}$$

$\lambda < 0$  movimiento regular,

$\lambda = 0$  movimiento regular en un sistema conservativo.

Para una revisión de los exponentes de Lyapunov ver Wolf(1986).





Parte III

**RESULTADOS**



# Capítulo 6

## Ajustes de los Modelos a Galaxias Espirales Normales

El primer objetivo de esta tesis es la construcción de una familia de modelos analíticos basados en observaciones.

Previamente en el Capítulo 4, se mostraron los potenciales que utilizamos para cada una de las componentes que forman las galaxias espirales normales (bulbo, disco, halo y brazos espirales). En este Capítulo presentamos los parámetros necesarios para ajustar cada tipo morfológico que hemos modelado (galaxias Sa, Sb, y Sc).

En la literatura, los parámetros estructurales y dinámicos necesarios para definir un tipo morfológico específico son la masa del bulbo, del disco, del halo y de los brazos espirales (para el caso del modelo PERLAS) o amplitud del brazo (para el caso del potencial coseno), la curva de rotación, el tamaño del disco, radio de escala, ángulos de enrollamiento, velocidad angular de los brazos espirales y límites de inicio y fin de los brazos espirales. Todos estos parámetros presentan una gran dispersión dentro de un mismo tipo de Hubble. Sin embargo, era necesario elegir una clasificación de galaxias, y la más simple es la clasificación de Hubble. Por lo tanto, hemos elegido para las masas del fondo axismétrico seguir la definición de Hubble para galaxias espirales normales, de bulbos prominentes y masivos con brazos muy cerrados a bulbos pequeños y poco masivos con brazos abiertos.

Obtener la masa del bulbo y disco de forma independiente no es simple. Las observaciones proporcionan la luminosidad, con lo que hay que hacer una suposición sobre

la razón  $M/L$ ; de la misma forma, no se obtiene la del bulbo y disco de manera independiente. Suponiendo que la masa tiene una relación directa con la luminosidad se obtiene la masa del bulbo y disco juntos. Lo que es posible tener, es la razón bulbo-total (la luminosidad del bulbo más la del disco),  $(B/T)$ , la cual se obtiene aplicando a la fotometría técnicas de descomposición (Scorza y Bender 1990; de Jong 1996a). Adicionalmente podemos obtener la razón  $(B/D)$ , para calcular la masa del bulbo y del disco.

Obtener la masa del halo masivo no es de forma directa. Una herramienta poderosa para determinar la masa del halo es la curva de rotación. Si conocemos la velocidad típica y la forma de la curva de rotación de un tipo específico de galaxia, la masa del halo se obtiene de ajustar la curva de rotación.

Para determinar si la masa de los brazos espirales empleada está dentro de los límites razonables para un brazo típico, calculamos el parámetro  $Q_T$  (Combes y Sanders 1981). Este parámetro ha sido aplicado tanto a barras como a brazos espirales (Buta y Block 2001; Laurikainen y Salo 2002; Vorovyov 2006; Kalapotharakos et al. 2010) para medir la fuerza de las estructuras. El parámetro  $Q_T$  se define como,

$$Q_T(R) = \frac{F_T^{\max}(R)}{|\langle F_R(R) \rangle|}, \quad (6.1)$$

donde

$$F_T^{\max} = \left| \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \Phi(R, \theta)}{\partial \theta} \right) \right|_{\max},$$

representa la amplitud máxima de la fuerza tangencial al radio  $R$ , y  $|\langle F_R(R) \rangle|$  es el promedio de la fuerza radial axisimétrica en el mismo radio, derivado de la componente  $m = 0$  del potencial gravitacional. En la literatura, el valor máximo razonable para este parámetro es de 0.4, para brazos espirales (Buta et al. 2005).

El límite interno y externo de los brazos espirales está dado por la posición de la resonancia interna de Lindblad y corotación, respectivamente (Lynden-Bell y Kalnajs 1972). Estos límites dependen de un parámetro adicional, la velocidad angular del patrón. La velocidad angular de los brazos fija el límite interno y externo. Siguiendo la tendencia que presentan las galaxias espirales normales, donde la velocidad de rotación de las galaxias decrece de tempranas a tardías, utilizamos una velocidad angular de los brazos espirales mayor en  $S_a$  que en  $S_c$ .

## 6.1. Modelos para Galaxias Sa

Para el caso de una galaxia tipo Sa, la razón  $B/D$  es de 0.9 (Block et al. 2002; Weinzirl et al. 2009), lo que significa que el bulbo tiene una masa correspondiente al 90% la masa del disco.

Una galaxia tipo Sa puede tener velocidades de rotación de entre 370 km/s a 160 km/s (Rubin et al. 1985; Sofue et al. 2001). El valor de la velocidad de rotación que hemos empleado es de 320 km/s, un valor típico para galaxias Sa. En la Figura 6.1 se muestra la curva de rotación que se utiliza en este trabajo para una galaxia tipo Sa.

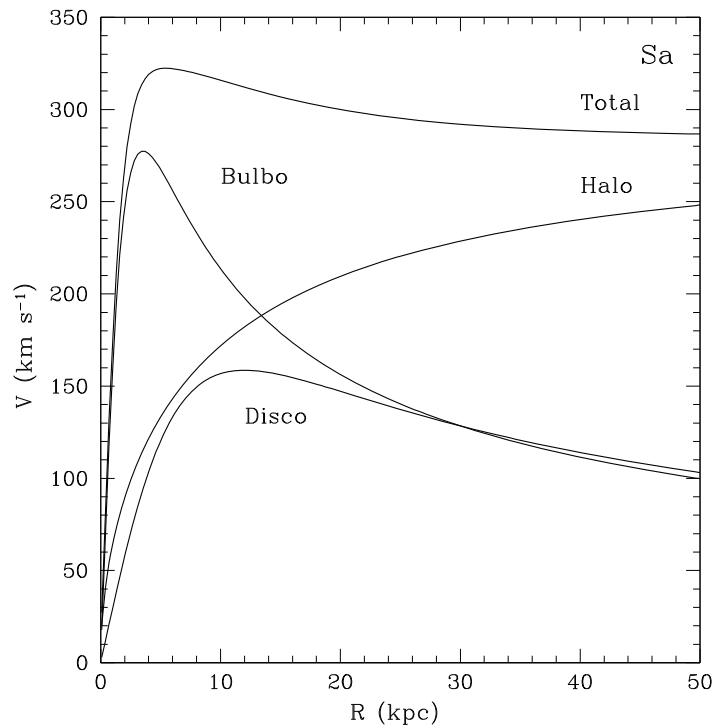


FIGURA 6.1: Curva de rotación para una galaxia tipo Sa. Se muestra la curva total y la contribución de las tres componentes de masa (bulbo, disco y halo) a la curva de rotación.

En la Figura 6.2, se presentan las curvas de velocidad angular y las resonancias obtenidas utilizando el modelo de masa para una galaxia tipo Sa. En este caso no tenemos clara la posición de la resonancia interna de Lindblad, por lo que se ha considerado como límite interno de los brazos espirales 3 kpc. El límite externo está en la posición

de corotación en 10.6 kpc. Estos límites son considerando que la velocidad angular del patrón espiral es de  $30 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ .

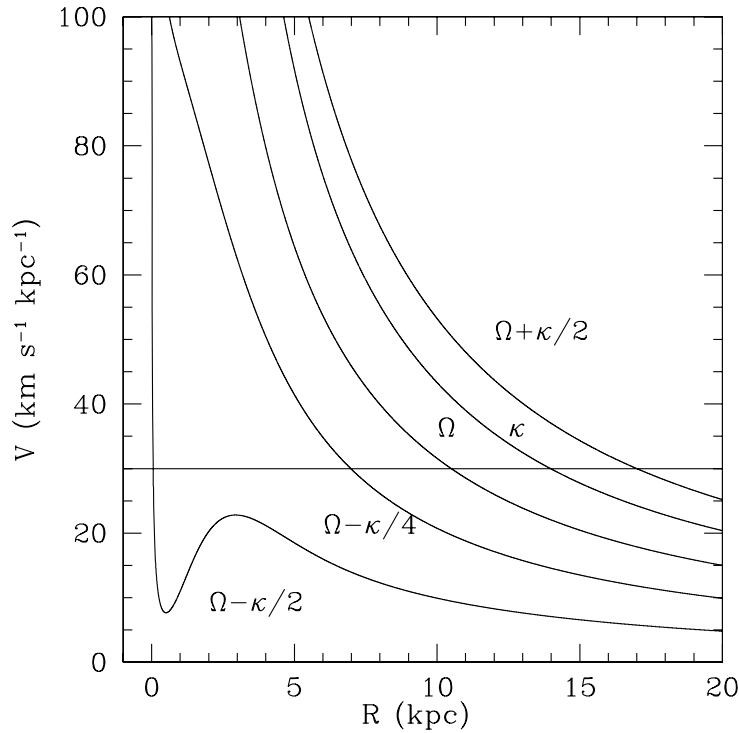


FIGURA 6.2: Curvas de velocidad angular y posición de las resonancias principales para el modelo de una galaxia tipo Sa. La línea horizontal muestra la velocidad angular del patrón espiral,  $\Omega_P = 30 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ .

Como se mencionó en la Sección 3.2.3, el modelo PERLAS asigna un porcentaje de la masa del disco a los brazos espirales. La masa que le asignamos a los brazos espirales es del 3% de la masa del disco. De esta manera, la masa que se le asigna a los brazos espirales se le resta a la masa total del disco, por lo que no se introduce masa adicional al modelo.

La Figura 6.3 muestra el valor máximo del parámetro  $Q_T$  (ecuación 6.1) en distintos ángulos de enrollamiento. El ángulo de enrollamiento varía de casi  $0^\circ$  hasta  $\sim 90^\circ$ . Con esto, se nota que al abrir los brazos espirales como una barra ( $90^\circ$ ), la fuerza que el brazo ejerce sobre el fondo axisimétrico está dentro de los límites para espirales,  $(Q_T)_{\text{max}} = 0.4$  (Buta et al. 2005).

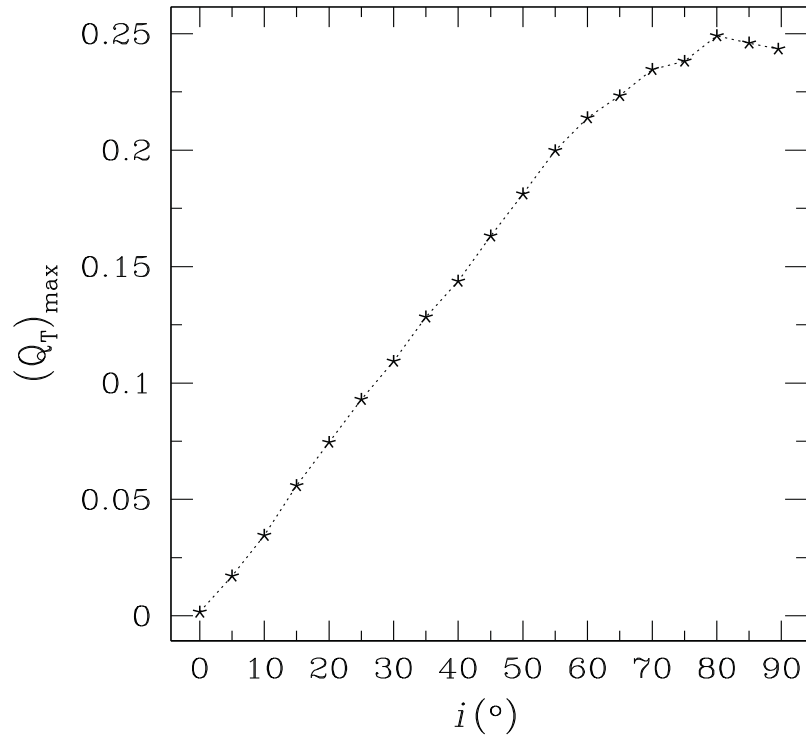


FIGURA 6.3:  $(Q_T)_{\max}$  representa el valor máximo del parámetro  $Q_T(R)$  dependiendo del ángulo de enrollamiento ( $i$ ) del modelo de brazos espirales (PERLAS), para una galaxia tipo Sa.

## 6.2. Modelos para Galaxias Sb

En un modelo de masa para una galaxia tipo Sb, la razón  $B/D$  típica es de  $\sim 0.4$  (Block et al. 2002; Weinzirl et al. 2009). Este tipo de galaxias presentan bulbos menos masivos, comparado con los de galaxias tipo Sa (Sección 6.1), éste sólo tiene el 40% de la masa del disco.

Una galaxia tipo Sb tiene velocidades de rotación de entre 330 km/s a 144 km/s (Rubin et al. 1985; Sofue et al. 2001). El valor de la velocidad de rotación utilizado en este trabajo es de 250 km/s. En la Figura 6.4 se muestra la curva de rotación para un modelo de masa de una galaxia tipo Sb.

Las curvas de velocidad angular y posición de las resonancias principales de la Fi-

gura 6.5, muestran que a diferencia de las resonancia de la Figura 6.2, tenemos dos resonancias internas de Lindblad, la más externa, localizada a 2.29 kpc marca el inicio del brazo, ésto considerando que la velocidad angular del patrón espiral es de  $25 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ . Por lo tanto el límite interno y externo de los brazos espirales es 2.29 kpc y 11.14 kpc, respectivamente.

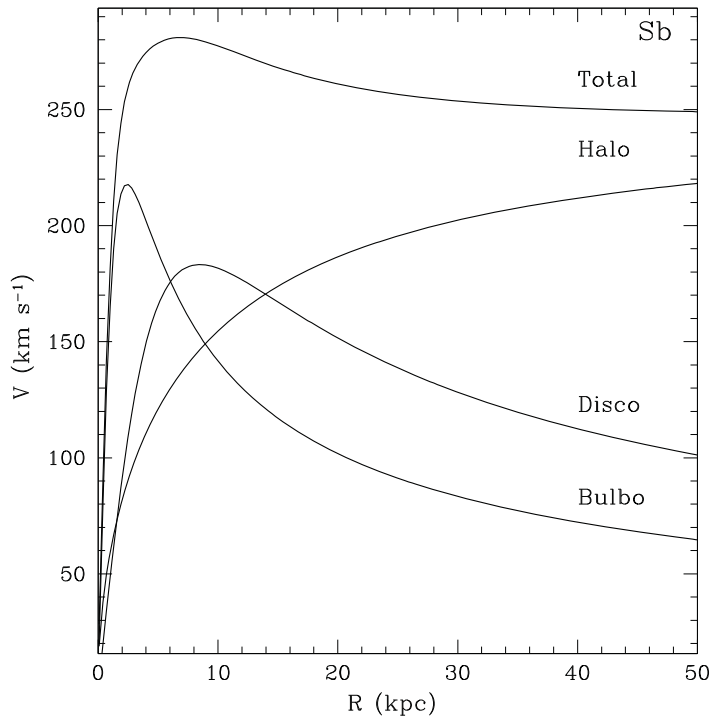


FIGURA 6.4: Curva de rotación para una galaxia tipo Sb. Se muestra la curva total y la contribución de las tres componentes de masa (bulbo, disco y halo) a la curva de rotación.

Al igual que en el caso de una galaxia tipo Sa, la masa de los brazos espirales que se ha considerado es de 3% la masa del disco (la masa asignada a los brazos se resta de la masa del disco). Aunque es el mismo porcentaje de la masa para ambos modelos, el brazo del modelo de una galaxia tipo Sb es menos masivo, esto debido a que la masa total que posee el modelo de galaxia tipo Sb es menor que en el modelo de una galaxia Sa.



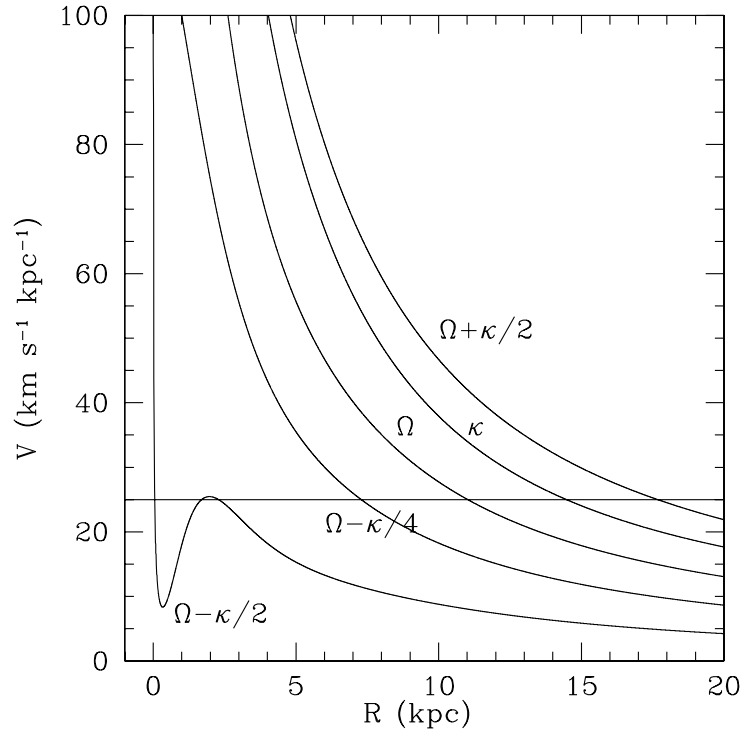


FIGURA 6.5: Curvas de resonancias para el modelo galáctico de una galaxia tipo Sb. La línea horizontal muestra la velocidad angular del patrón espiral,  $\Omega_p = 25 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ .

La Figura 6.6 muestra el valor máximo del parámetro  $Q_T$  (ecuación 6.1) en distintos ángulos de enrollamiento. El ángulo de enrollamiento varía de casi  $0^\circ$  hasta  $\sim 90^\circ$ . La fuerza que el brazo ejerce sobre el fondo axisimétrico está dentro de los límites para espirales,  $(Q_T)_{\text{max}} = 0.4$  (Buta et al 2005). Con lo anterior, vemos que la masa utilizada para los brazos espirales es pequeña.

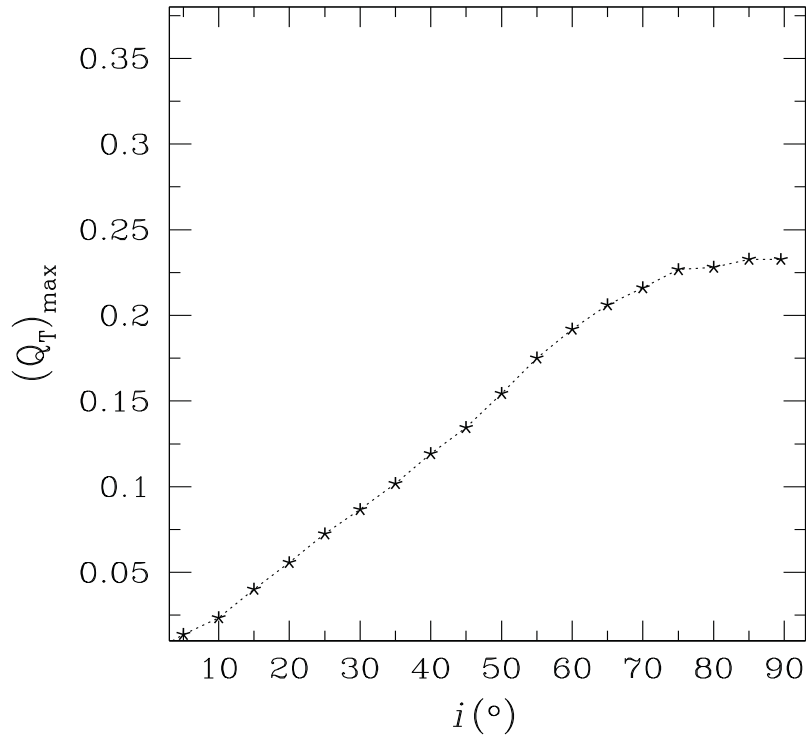


FIGURA 6.6:  $(Q_T)_{\max}$  representa el valor máximo del parámetro  $Q_T(R)$  dependiendo del ángulo de enrollamiento ( $i$ ) del modelo de brazos espirales (PERLAS), para una galaxia tipo Sb.

### 6.3. Modelos para Galaxias Sc

Las galaxias clasificadas como Sc (de acuerdo con el esquema de Hubble), poseen un bulbo muy pequeño (comparado con su disco) o incluso carecen de bulbo. Para el modelo de galaxias tipo Sc, la razón  $B/D$  que se consideró es de 0.2 (Block et al. 2002; Weinzirl et al. 2009). En este caso, tenemos un bulbo poco masivo (sólo el 20% de la masa del disco) comparado con los modelos para galaxias Sa (Sección 6.1) y Sb (Sección 6.2).

El intervalo de velocidades de rotación de galaxias tipo Sc está entre 300 km/s y 100 km/s (Rubin et al. 1985; Sofue et al. 2001). La velocidad de rotación utilizada en nuestros modelos es de 170 km/s. En la Figura 6.7 se muestra la curva de rotación para

un modelo de masa de una galaxia tipo Sc.

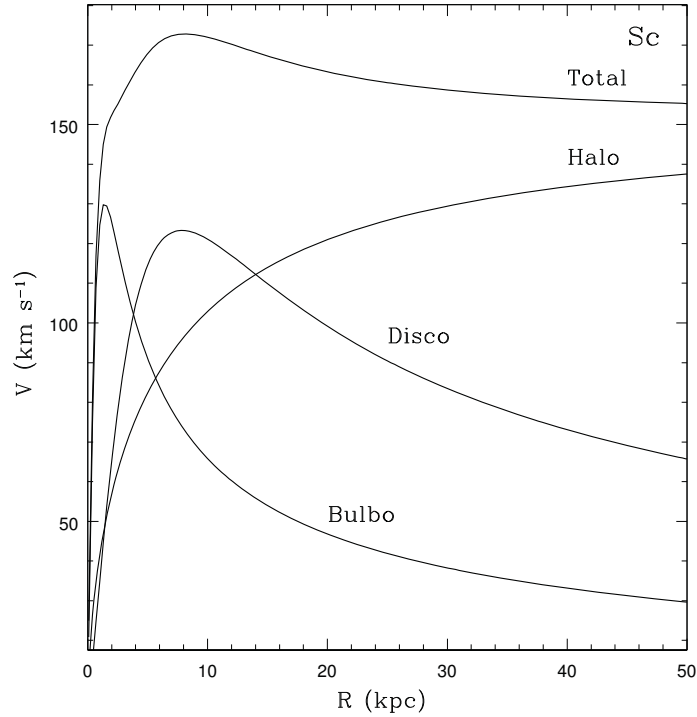


FIGURA 6.7: Curva de rotación para una galaxia tipo Sc. Se muestra la curva total y la contribución de las tres componentes de masa (bulbo, disco y halo) a la curva de rotación.

Se ha mencionado en diferentes Secciones (3.2.5, 6.1 y 6.2) que el límite interno y externo de los brazos espirales depende de la posición de la resonancia interna de Lindblad y corotación. Sin embargo, si una espiral es “fuerte”, el soporte orbital al brazo espiral alcanza máximo la resonancia 4/1 (Contopoulos y Grosbøl 1986, 1988). Por otro lado, si la espiral es “débil”, se extiende hasta corotación o incluso hasta las resonancia externa de Lindblad (Vauterin y Dejonghe 1996). En los tres modelos galácticos (Sa, Sb y Sc), los brazos se terminan en corotación.

La Figura 6.8 muestra las curvas de resonancias para un modelo de masa de una galaxia típica Sc. La resonancia interna de Lindblad y corotación se ubican en 2.03 kpc y 8.63 kpc, respectivamente. Ésto, para una velocidad angular de los brazos espirales de  $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ .

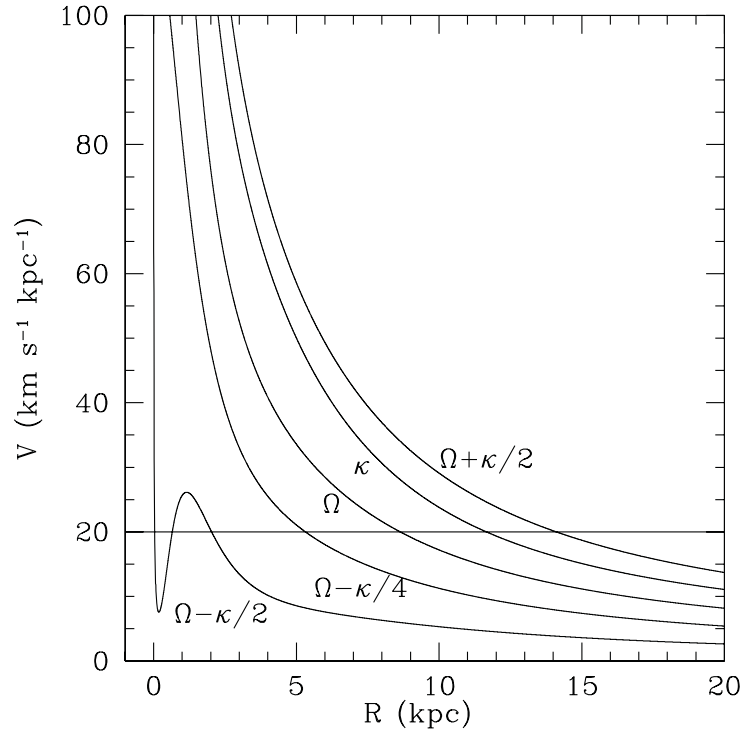


FIGURA 6.8: Curvas de velocidad angular y posición de las resonancias principales para el modelo galáctico de una galaxia tipo Sc. La línea horizontal muestra la velocidad angular del patrón espiral,  $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ .

Como en los modelos anteriores (galaxias tipo Sa y Sb), la masa de los brazos espirales es de 3% la masa del disco; de la misma forma que en los casos anteriores, la masa asignada a los brazos se sustrae de la masa del disco. La Figura 6.9 muestra el valor máximo del parámetro  $Q_T$  (ecuación 6.1) en distintos ángulos de enrollamiento. El ángulo de enrollamiento varía de casi  $0^\circ$  hasta  $\sim 90^\circ$ . La fuerza que el brazo ejerce sobre el fondo axisimétrico, sigue dentro de los límites para espirales,  $(Q_T)_{\text{max}} = 0.4$  (Buta et al 2005). Incluso en el modelo para una galaxia tipo Sc, la masa que utilizamos en este trabajo para los brazos espirales es conservadora.

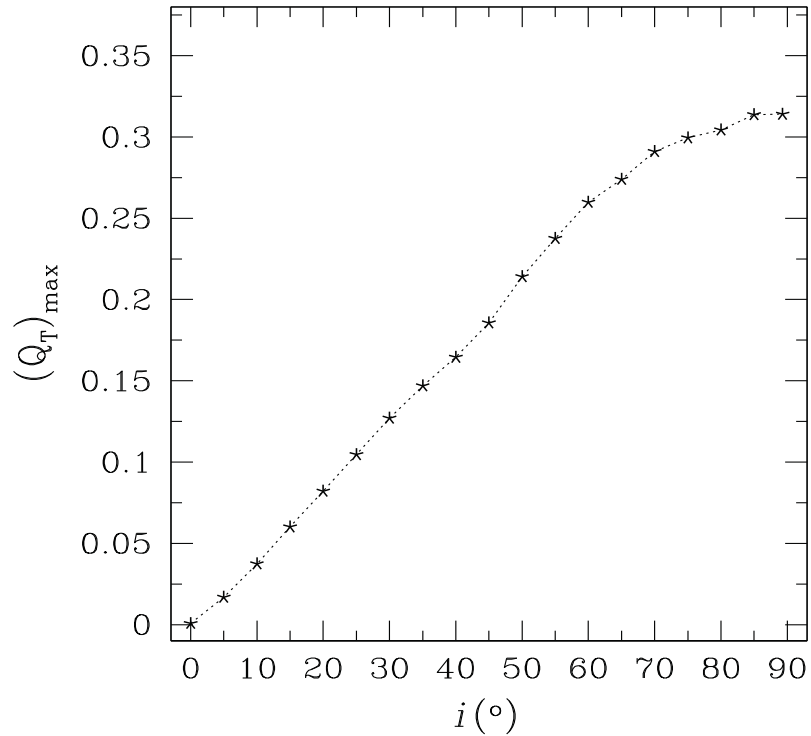


FIGURA 6.9:  $(Q_T)_{\max}$  representa el valor máximo del parámetro  $Q_T(R)$  dependiendo del ángulo de enrollamiento ( $i$ ) del modelo de brazos espirales (PERLAS), para una galaxia tipo Sc.

## 6.4. Parámetros utilizados en los Modelos Galácticos

En esta Sección se recopilan todos los parámetros observacionales obtenidos de la literatura para galaxias espirales normales en forma de una tabla.

La Tabla 6.1, presenta los parámetros necesarios para ajustar cada uno de los modelos. En la columna 1 están los parámetros, para el modelo PERLAS, se requiere: la ubicación geométrica de los brazos (locus), número de brazos, el ángulo de enrollamiento, la razón de masas brazo-disco ( $M_{Br}/M_D$ ), longitud de escala, velocidad del patrón ( $\Omega_P$ ), posición de la resonancia interna de Lindblad (RIL) y corotación (CR) para el límite interno y externo de los brazos, respectivamente.

TABLA 6.1: Parámetros observacionales recopilados para galaxias espirales normales.

Parámetro	Valor				Referencia
	<i>Brazos Espirales</i>				
	Sa	Sb	VL <sup>(§)</sup>	Sc	
Locus		Logarítmico			1,9
Número de brazos		2			2
Ángulo de enrollamiento(°)	4-40	8-45	15.5	10-60	3,7
$M_{Br}/M_D$		0.03			
Longitud de escala (kpc)	7	5	2.5	3	4,5
$\Omega_P^{(*)}$ (km s <sup>-1</sup> kpc <sup>-1</sup> )	-30	-25	-20	-20	1,6
RIL (kpc)	3	2.29	2.8	2.03	
CR (kpc)	10.6	11.14	10.9	8.63	
Límite interno (kpc)	3	2.29	2.6	2.03	10
Límite externo (kpc)	10.6	11.14	12	8.63	11
	<i>Componente Axisimétrica</i>				
$M_D/M_H^{(\dagger)}$	0.07	0.09	0.1	0.1	4,8
$M_B/M_D$	0.9	0.4	0.16	0.2	5,8
$V_{max}$ (km s <sup>-1</sup> )	320	250	220	170	7
$M_D$ (10 <sup>10</sup> M <sub>⊙</sub> )	12.8	12.14	8.56	5.10	4
$M_B$ (10 <sup>10</sup> M <sub>⊙</sub> )	11.6	4.45	1.41	1.02	12
$M_H$ (10 <sup>12</sup> M <sub>⊙</sub> )	1.64	1.25	0.8002	0.485	13
Longitud de escala del disco(kpc)	7	5	2.5	3	4,5

(§) Datos tomados de Allen y Santillán 1991 y Pichardo et al. 2003.

(\*) Sentido de las manecillas del reloj.

(†) A un radio de 100 kpc.

Referencias —1) Grosbøl & Patsis 1998. 2) Drimmel et al. 2000; Grosbøl et al. 2002. 3) Kennicutt 1981. 4) Pizagno et al. 2005 5) Weinzirl et al. 2009. 6) Patsis et al. 1991; Fathi et al. 2009. 7) Ma et al. 2000; Brosche 1971; Sofue & Rubin 2001. 8) Block et al. 2002. 9) Pichardo et al. 2003. 10) Basado en la posición de la RIL. 11) Basado en la posición de Corotación. 12) Basado en  $M_B/M_D$ . 13) Basado en  $M_D/M_H$ .

Para el modelo axisimétrico se requiere: la razón de masas bulbo-disco ( $M_B/M_D$ ) y disco-halo( $M_D/M_H$ ), la masa del disco ( $M_D$ ), masa del bulbo ( $M_B$ ), masa del halo ( $M_H$ ), la velocidad máxima de la curva de rotación ( $V_{max}$ ) y la longitud de escala del disco.

En la columna 2 están los datos de una galaxia tipo Sa, en la columna 3 están los datos de una galaxia tipo Sb, en la columna 4 están los datos correspondientes a una galaxia tipo Vía Láctea, en la columna 5 se muestran los datos para una galaxia tipo Sc y finalmente en la columna 6 están las referencias.

Como puede notarse, los parámetros que describen a la Vía Láctea están aproximadamente entre las galaxias Sb y Sc. La Vía Láctea se clasifica entonces como tipo SBbc.





# Capítulo 7

## Comparación de PERLAS y TWA en una Galaxia tipo Vía Láctea sin Barra

En la TWA (potencial coseno), el potencial en un punto dado se determina por las propiedades de los brazos espirales en una vecindad pequeña alrededor de ese punto. Ésta es entonces una aproximación local (ecuación 4.18). A pesar de que el potencial coseno es una solución severamente idealizada del potencial de los brazos, que considera a los brazos como una perturbación suave al fondo axisimétrico, es ampliamente utilizado por su simplicidad matemática y su fácil implementación (ver Sección 4.2.1).

A diferencia del potencial coseno, en el modelo PERLAS, el potencial en un punto es determinado de la contribución de toda la estructura espiral. Esto lo convierte un potencial más realista, además de estar basado en una distribución física de masa (ver Sección 4.2.2).

En este Capítulo realizamos una comparación entre estos potenciales buscando diferencias y efectos de éstas sobre la dinámica orbital, con un estudio detallado de orden y caos orbital estelar.

## 7.1. Ajustando el Potencial y Fuerza de TWA con PERLAS

Para hacer la comparación entre PERLAS y el potencial coseno, ajustamos primero los potenciales y las fuerzas, de manera que su amplitud (o fuerza) sea comparable.

Los datos que utilizamos para modelar una galaxia tipo Vía Láctea sin barra, se muestran en la Tabla 6.1. La única diferencia es que usamos tres masas diferentes de los brazos espirales, 1%, 3% 5% de la masa del disco, esta última es la masa máxima para los brazos, donde el modelo tipo Vía Láctea es aproximadamente autoconsistente orbitalmente (Pichardo et al. 2003).

Para el potencial axisimétrico utilizamos el modelo de Allen y Santillán (1991, de aquí en adelante lo llamaremos A&S). El modelo A&S está compuesto por bulbo y disco de la forma propuesta por Miyamoto y Nagai (1975), además de un halo masivo esférico que se extiende hasta 100 kpc (estos potenciales se muestran en la Sección 4.1). Este modelo considera  $R_0 = 8.5$  kpc, como la distancia Galactocéntrica del Sol y  $V_0(R_0) = 220$  km s<sup>-1</sup>, como la velocidad circular en la posición del Sol. En la Tabla 7.1 se dan los valores de las constantes que utiliza el potencial axisimétrico.

La ubicación geométrica de los brazos espirales, está dada por la ecuación 4.19 para ambos modelos. La función amplitud,  $g(r)$ , del potencial coseno se presentó en la Sección 4.2.1.

TABLA 7.1: Constantes para el modelo de A&S

Componente	Constante	Valor
Bulbo	$M_1$	$1.40 \times 10^{10} M_\odot$
	$b_1$	0.3873 kpc
Disco	$M_2$	$8.56 \times 10^{10} M_\odot$
	$a_2$	5.3178 kpc
	$b_2$	0.2500 kpc
Halo	$M_3^{(\dagger)}$	$1.07 \times 10^{10} M_\odot$
	$a_3$	12.0 kpc

<sup>(†)</sup>  $M_3$  no representa la masa del halo, sólo es un factor de masa.

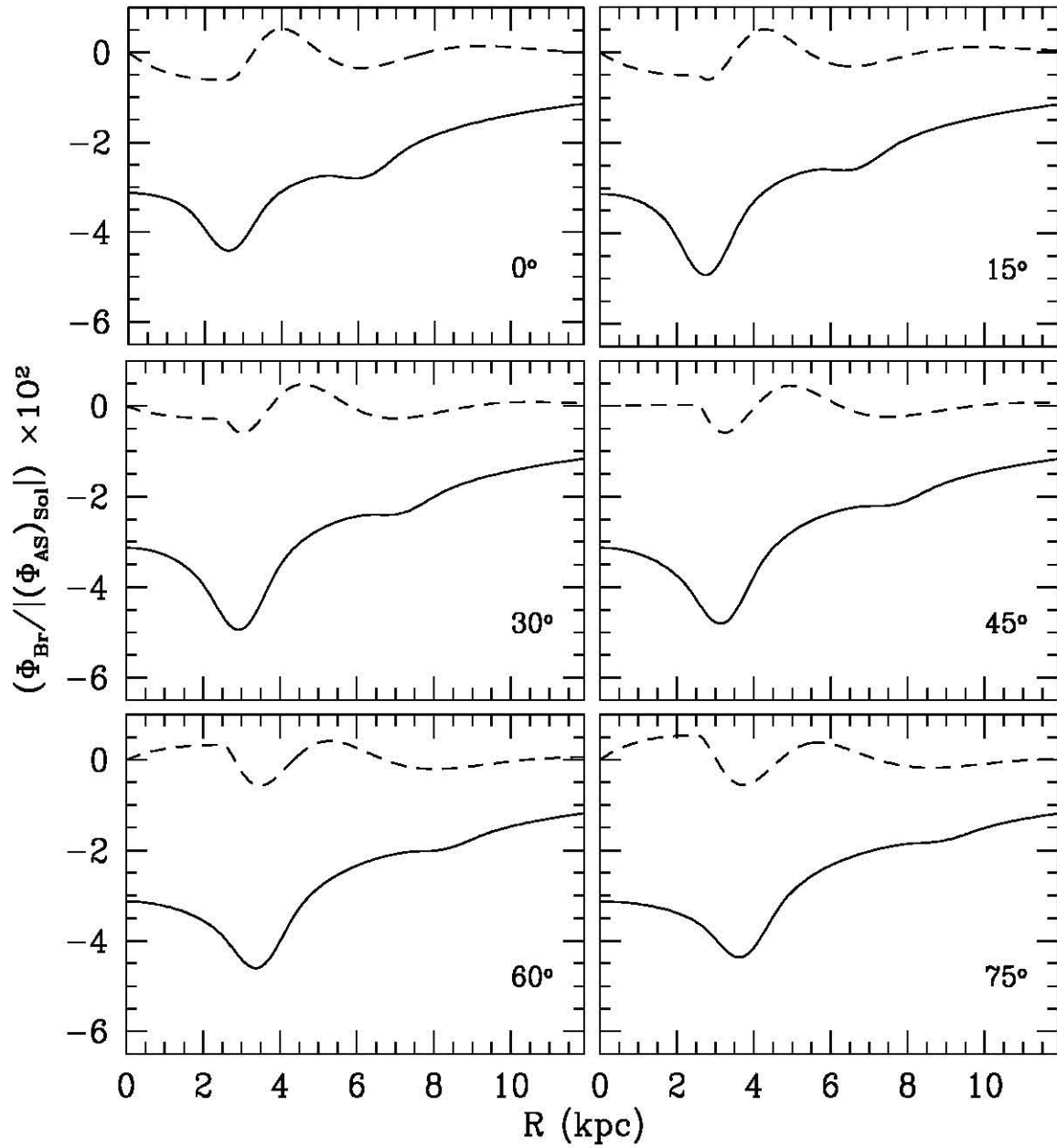


FIGURA 7.1: Potencial radial a lo largo de distintas líneas radiales, empezando en  $0^\circ$  hasta  $165^\circ$ , en separaciones de  $15^\circ$ . El potencial radial está normalizado con el valor absoluto del potencial en la posición del Sol en el modelo de Allen y Santillán (1991). La línea sólida corresponde al modelo PERLAS y la línea punteada corresponde al potencial coseno. Los brazos espirales tienen una masa del 5% la masa del disco

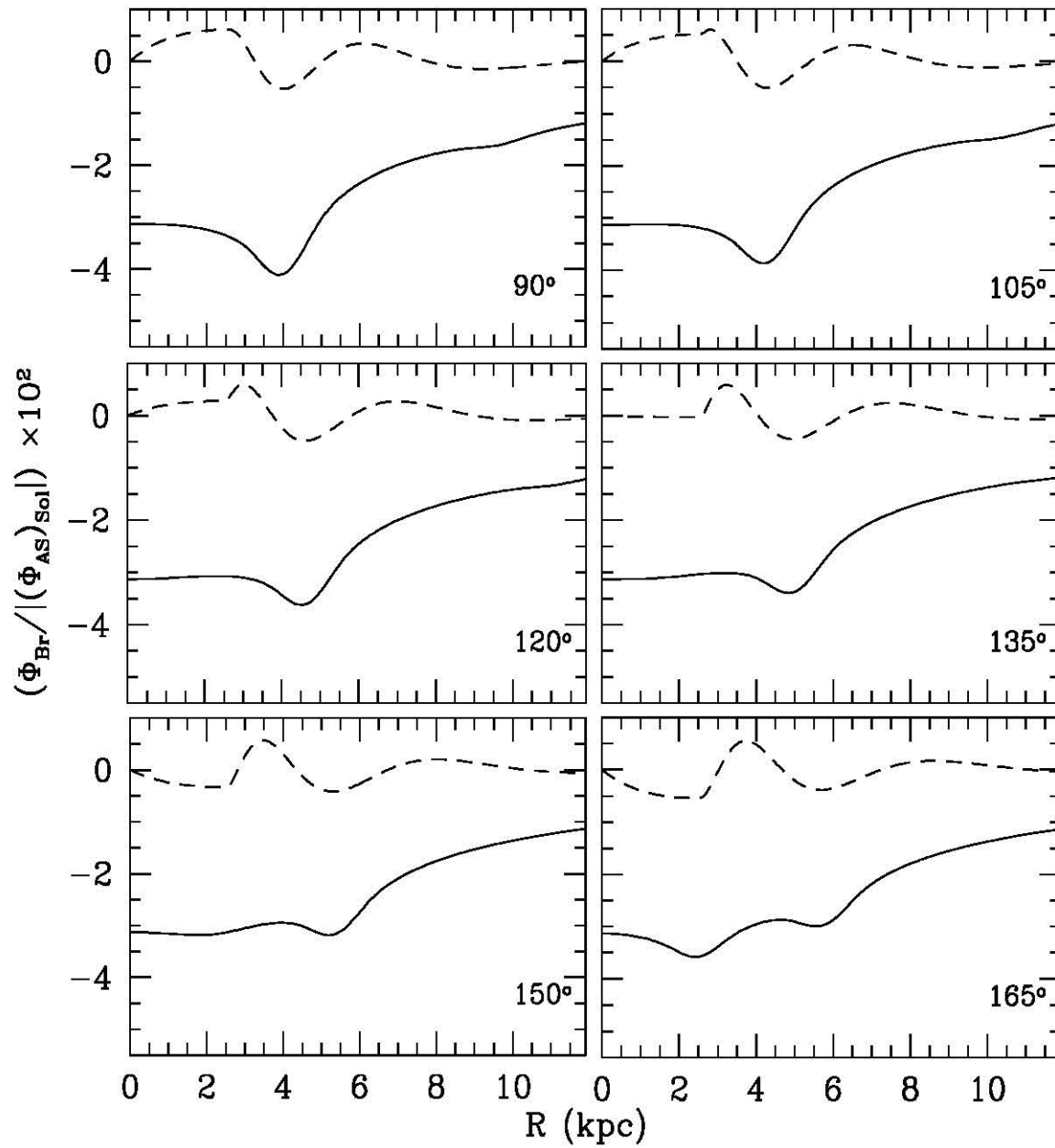


FIGURA 7.1: (Continuación).

La Figura 7.1 muestra el potencial radial a distintas líneas radiales. Estas líneas son cada 15° en acimut, empezando en 0° hasta 165°; buscamos ver como es el potencial

coseno (línea punteada) y PERLAS (línea sólida). En esta figura, vemos que los potenciales radiales son muy distintos entre sí. El potencial coseno (línea punteada) oscila alrededor de cero, PERLAS, es un potencial definido negativo.

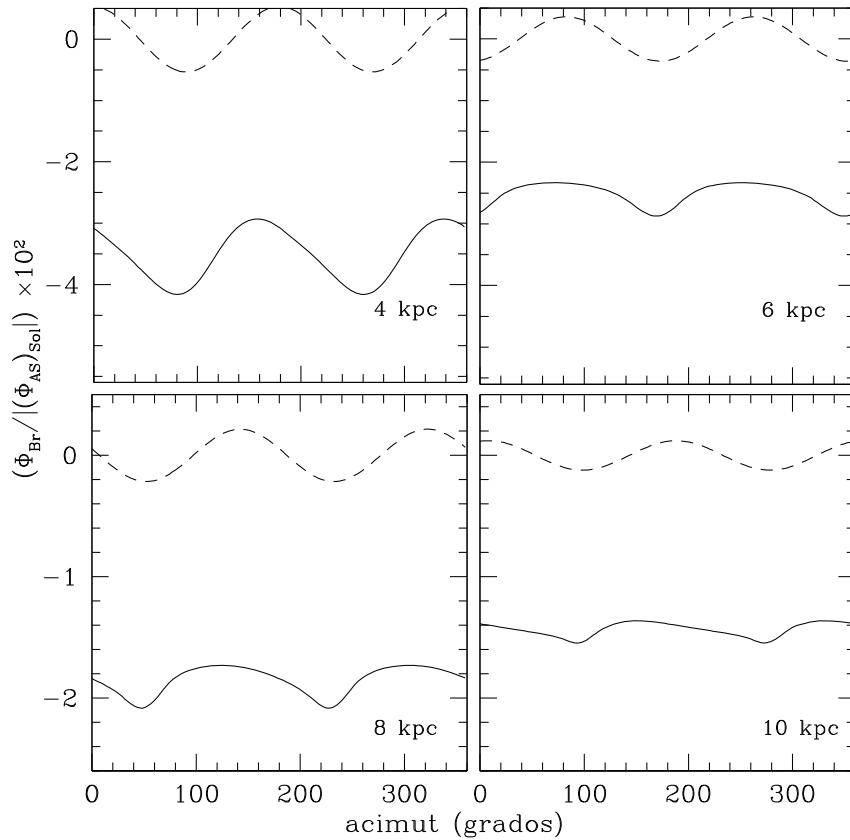


FIGURA 7.2: Potencial acimutal a distintos radios: 4 kpc (panel superior izquierdo), 6 kpc (panel superior derecho), 8 kpc (panel inferior izquierdo) y 10 kpc (panel inferior derecho). El potencial acimutal está normalizado con valor absoluto del potencial en la posición del Sol, en el modelo A&S. La línea sólida corresponde al modelo PERLAS y la línea punteada corresponde al potencial coseno. Los brazos espirales tienen una masa del 5% la masa del disco.

En la Figura 7.2, se muestra el potencial acimutal calculado a distintos radios, la línea sólida corresponde al modelo PERLAS y la línea punteada es el potencial coseno. En este caso también se observa que el potencial coseno oscila en 0 y PERLAS es negativo en todos los puntos.

En la Figura 7.3, comparamos la fuerza radial del modelo de coseno (línea punteada)

con el modelo PERLAS (línea sólida). Se calcula la fuerza radial en distintas líneas radiales, entre  $0^\circ$  y  $165^\circ$ , el acimut incrementa  $15^\circ$  cada línea radial.

El potencial coseno tiene el inconveniente de que se necesita buscar la amplitud apropiada dependiendo de la fuerza que se requiere para el brazo. Con PERLAS, al asignarle una masa a los brazos espirales ya tenemos la fuerza correspondiente para esa masa. Con ésto ajustamos, la amplitud correspondiente para el potencial coseno, de acuerdo a la fuerza que da el modelo PERLAS.

Buscamos que los máximos y mínimos de la fuerza coincidan lo mejor posible entre los dos modelos. El valor de la constante  $A$  de la amplitud en la Figura 7.3 es de  $950 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \text{ kpc}^{-1}$  (para los casos donde la  $M_{Br}/M_D = 0.01$  y  $0.03$ ,  $A = 350$  y  $650 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \text{ kpc}^{-1}$ , respectivamente). Con este valor de  $A$ , obtenemos el mejor ajuste para una masa de los brazos espirales de 5 % la masa del disco. Este valor de  $A$  fue elegido comparando los dos modelos tanto la fuerza radial (Figura 7.3) en distintas líneas radiales como la fuerza acimutal a distintos radios (Figura 7.4). En las Figuras 7.3 y 7.4 se observa que las amplitudes son muy parecidas, pero los detalles del potencial y fuerzas son muy diferentes entre los dos modelos, lo que genera diferencias severas en la dinámica orbital. En los últimos 4 paneles de la Figura 7.3, el potencial coseno tiene un mínimo que ya no se ajusta con PERLAS. Si disminuimos la amplitud  $A$ , probablemente ajustaría mejor esta parte, pero en los primeros paneles se desajustaría, por lo que es necesario buscar un “compromiso” con la fuerza radial en cada acimut y la fuerza acimutal a cada uno de los radios.

En la Figura 7.4, se tiene la fuerza acimutal calculada a lo largo de varios círculos centrados en el origen Galáctico (4, 6, 8 y 10 kpc). En PERLAS (línea sólida) se observa cómo en los mínimos existe un ligero corrimiento hacia el centro Galáctico, esto se debe a que el modelo es autogravitante, esto es, que cada punto siente el efecto de todo el brazo. El potencial coseno (línea punteada) no muestra este corrimiento, debido a su naturaleza de aproximación local.

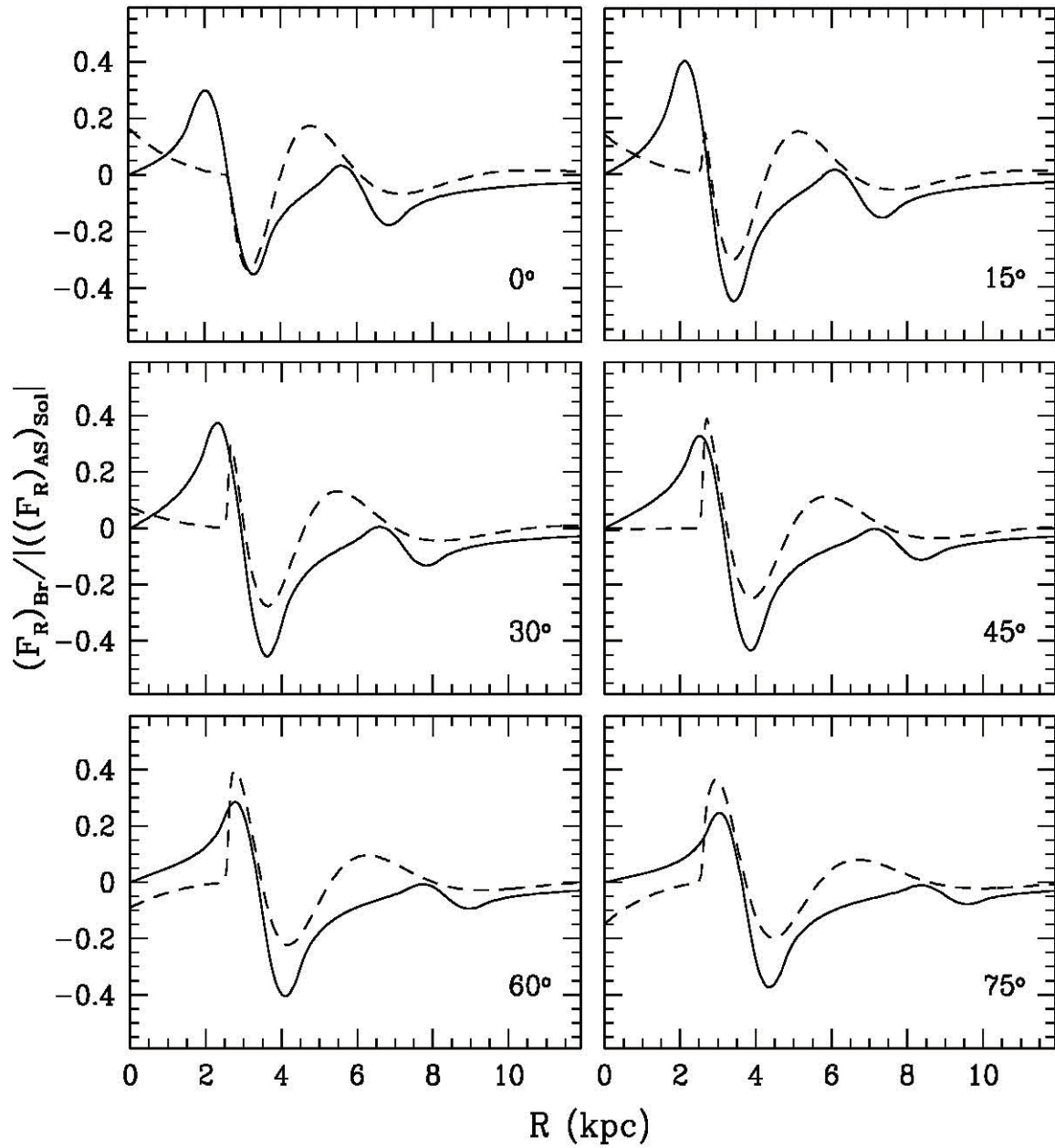


FIGURA 7.3: Fuerza radial a lo largo de distintas líneas radiales, empezando en  $0^\circ$  hasta  $165^\circ$ , en separaciones de  $15^\circ$ . La fuerza radial está normalizada con el valor absoluto de la fuerza en la posición del Sol en el modelo A&S. La línea sólida corresponde al modelo PERLAS y la línea punteada corresponde al potencial coseno. Los brazos espirales tienen una masa del 5% la masa del disco.

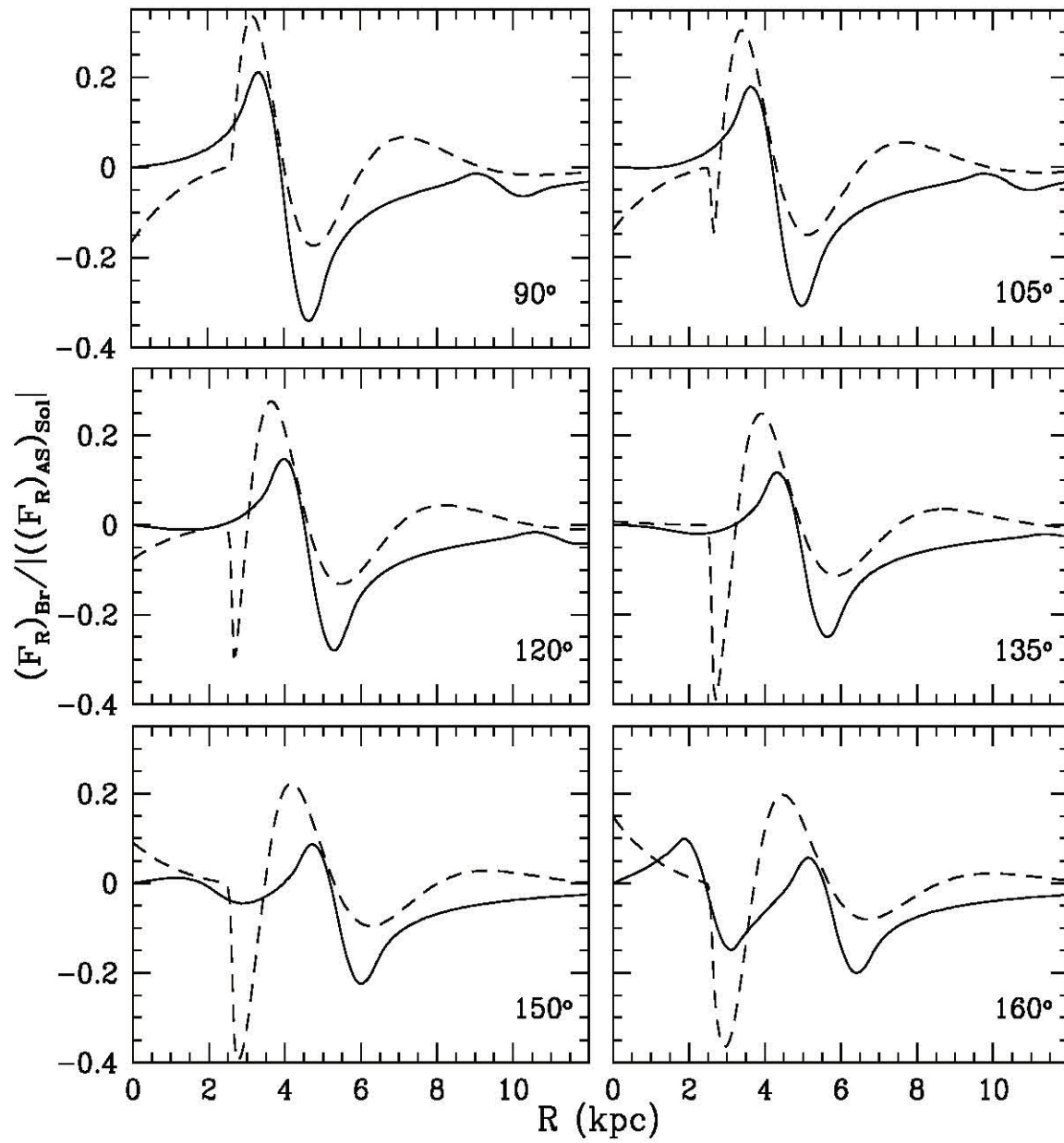


FIGURA 7.3: (Continuación).



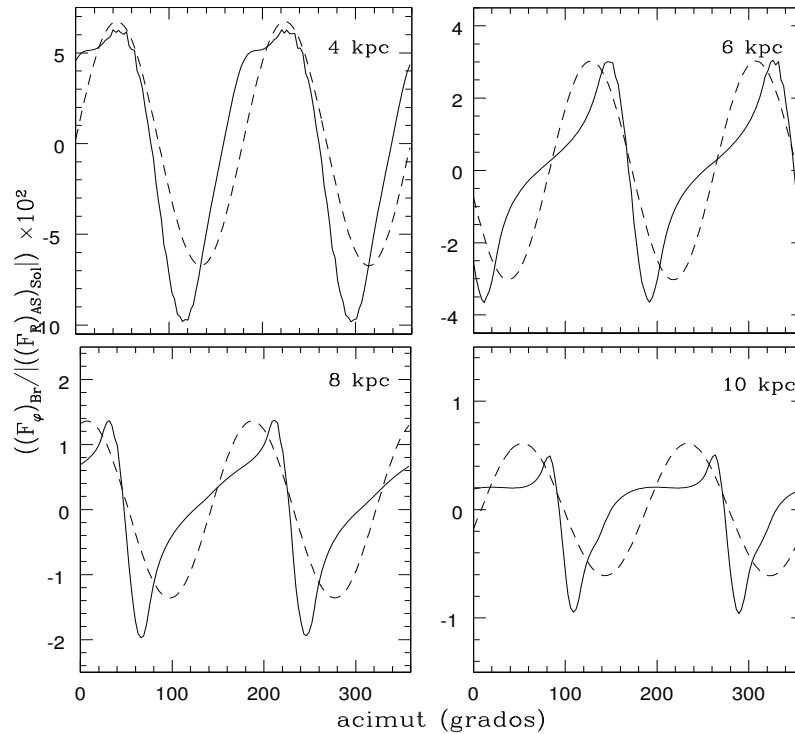


FIGURA 7.4: Fuerza acimutal a distintos radios: 4 (panel superior izquierdo), 6 (panel superior derecho), 8 (panel inferior izquierdo) y 10 (panel inferior derecho) kpc. La fuerza acimutal está normalizada al valor absoluto de la fuerza en la posición del Sol, en el modelo A&S. La línea sólida corresponde al modelo PERLAS y la línea punteada corresponde al potencial coseno. Los brazos espirales tienen una masa del 5% la masa del disco.

Ajustar la amplitud de las fuerzas (tanto radial como acimutal) del potencial coseno con PERLAS, de tal forma que sea comparable a la amplitud de los brazos en ambos modelos, no es una tarea sencilla; de hecho, no es posible hacer un ajuste exacto en todos los puntos a un potencial tan complicado como PERLAS, con un modelo tan simplificado como el potencial coseno. De esta forma, lo que buscamos es un ajuste lo mejor posible a la fuerza radial y acimutal entre los dos modelos. Si se desea cambiar algunos de los parámetros del modelo coseno, es necesario hacer de nuevo el ajuste de fuerza, lo que hace poco práctico el modelo.

Con las Figuras 7.1 - 7.4, se confirma que existen diferencias importantes en la forma de las fuerzas entre los dos modelos, lo cual producirá a su vez diferencias significativas en la dinámica orbital.

## 7.2. Análisis Orbital en el Plano Galáctico

Una vez ajustada la amplitud del modelo del coseno a la fuerza del modelo PERLAS, construimos diagramas de Poincaré en el plano Galáctico y estudiamos las diferencias entre los dos modelos. Para este estudio consideramos energías de Jacobi desde -1800 hasta -1400 ( $10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ).

En las Figuras 7.5 a 7.7, se muestran mosaicos con seis diagramas de Poincaré. Para los diagramas de la izquierda de cada mosaico empleamos el modelo cosenoidal y para los de la derecha el modelo PERLAS. La amplitud para el potencial coseno corresponde a la razón de fuerza radial del brazo *vs.* la fuerza axisimétrica, que a su vez corresponde aproximadamente a la misma fuerza que el modelo PERLAS proporciona con una masa de  $M_{Br}/M_D=0.01$  (Figura 7.5), 0.03 (Figura 7.6) y 0.05 (Figura 7.7).

Los diagramas de Poincaré para órbitas en el plano galáctico, son similares hablando en términos generales. Sin embargo, si se observa con más detalle, en los diagramas construidos con PERLAS la estructura orbital es más rica y complicada que con los hechos con el potencial coseno. Estas diferencias se magnifican en estudios más sensibles como el comportamiento caótico o estudios hidrodinámicos.

En la Figura 7.5, se presenta un caso de baja masa de los brazos,  $M_{Br}/M_D = 0.01$ . Aquí no son evidentes las diferencias entre los dos modelos, debido a que con un brazo débil (o poco masivo) nos aproximamos al régimen lineal. En la Figura 7.6 se observa el mismo comportamiento: los diagramas son muy similares; en este caso, la masa es  $M_{Br}/M_D = 0.03$ .

En la Figura 7.7 se muestra el caso donde la masa es alta,  $M_{Br}/M_D = 0.05$ . En este mosaico es importante hacer notar que, en el diagrama del potencial coseno con una energía  $E_j = -1800$  (diagrama superior izquierdo del mosaico de la Figura 7.7), la región de caos es mayor comparada con PERLAS en esa misma energía.

Cerca del centro galáctico, las fuerzas del potencial coseno presenta picos muy pronunciados (ver Figura 7.3, segunda parte) que inducen un comportamiento caótico espurio.

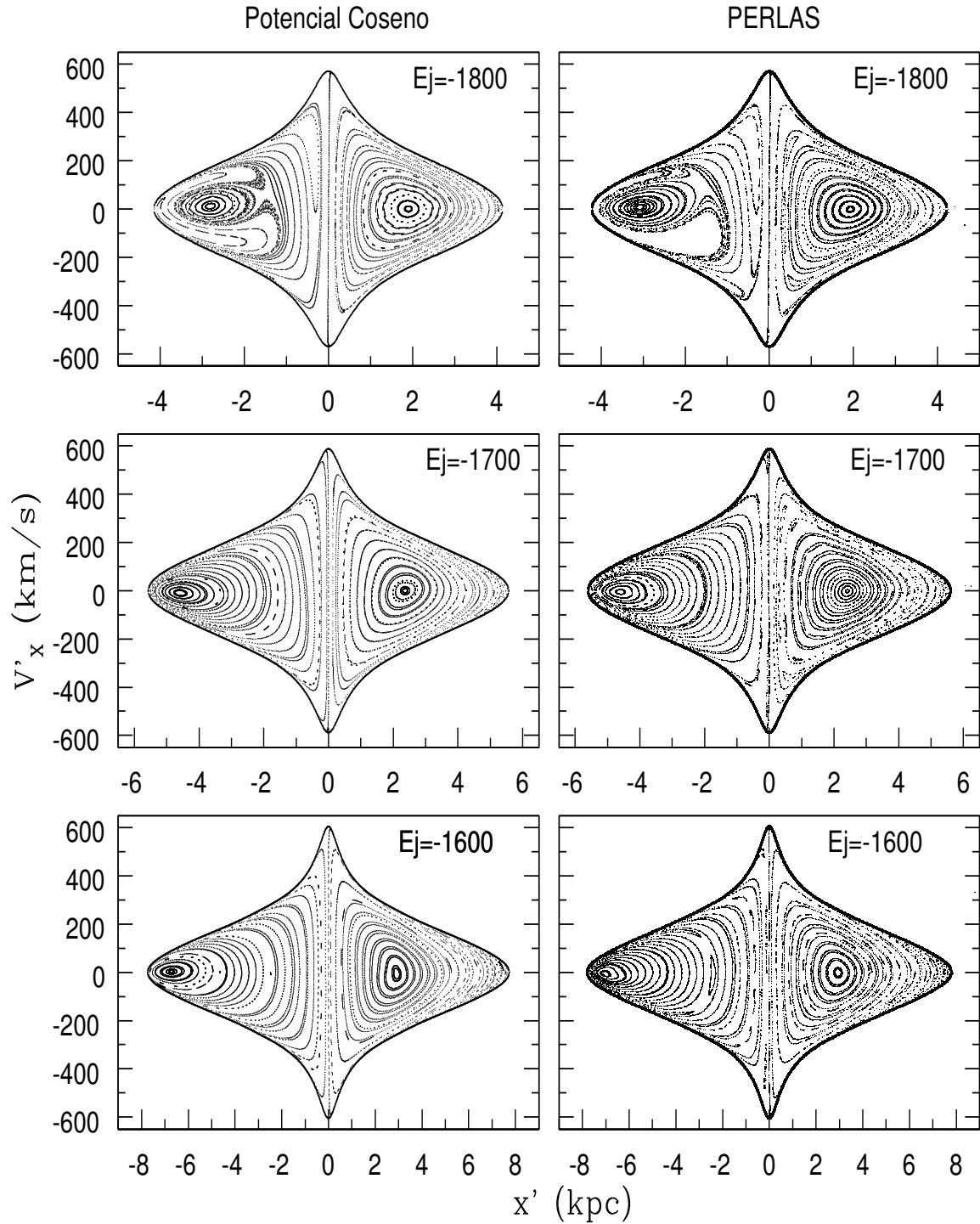


FIGURA 7.5: Diagramas de Poincaré con distintas energías de Jacobi, de -1800 a -1600 ( $10^2 \text{km}^2 \text{s}^{-2}$ ). Los paneles de la izquierda corresponden a diagramas empleando el modelo de coseno para los brazos, los paneles de la derecha corresponden a diagramas empleando para los brazos espirales el modelo PERLAS. La razón de masas es  $M_{Br}/M_D = 0.01$ .

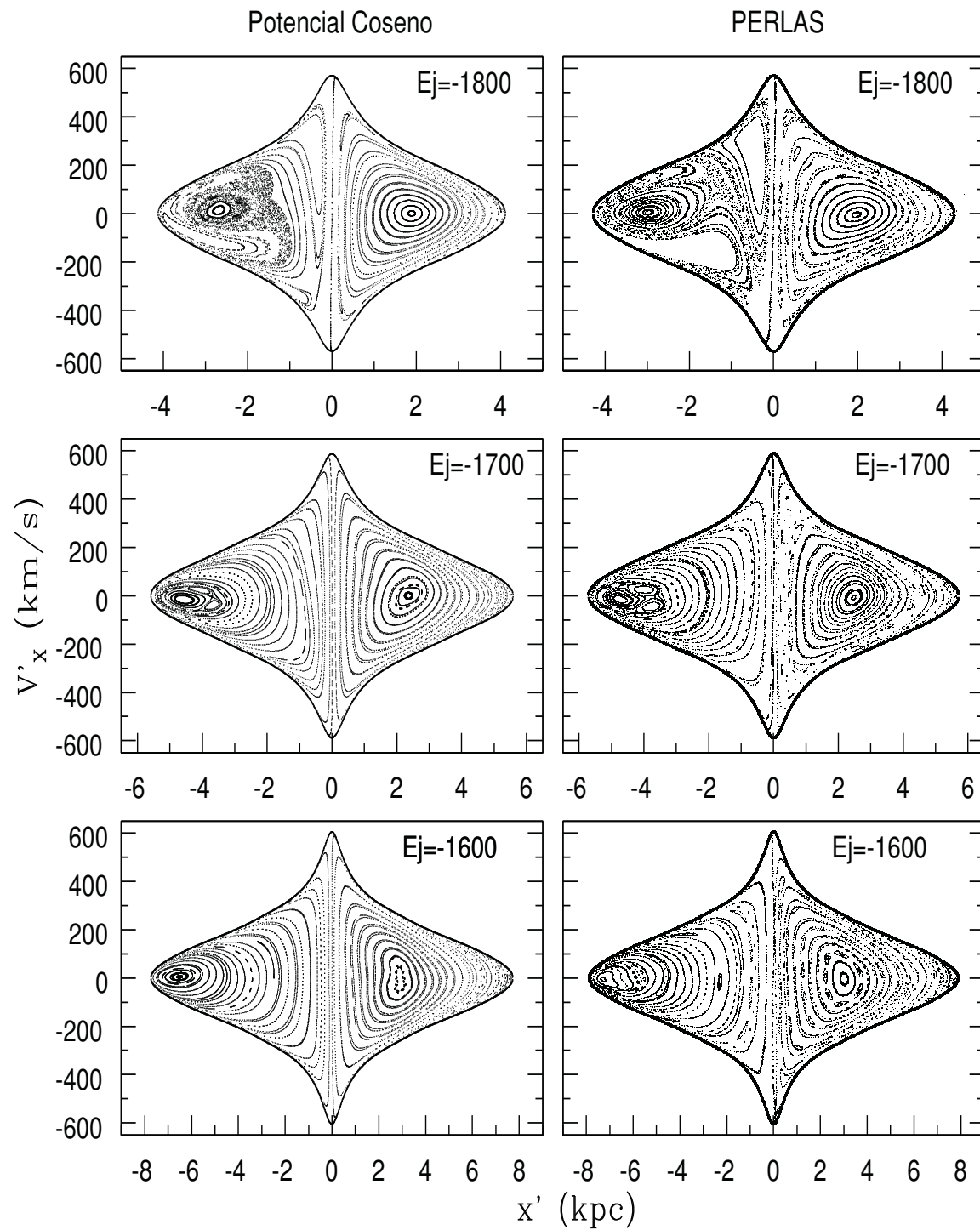


FIGURA 7.6: Lo mismo que en la Figura 7.5 pero para  $M_{Br}/M_D = 0.03$ .

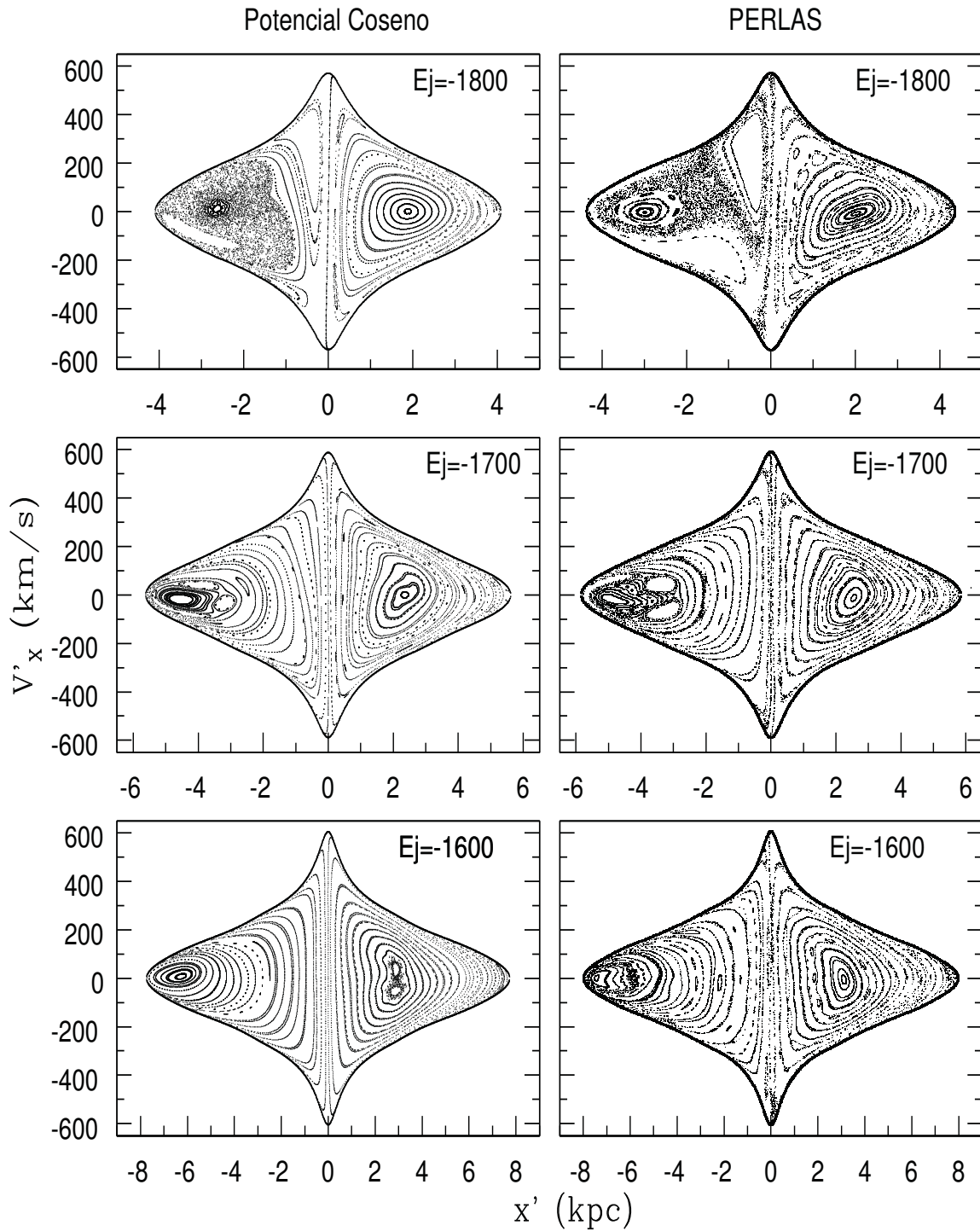


FIGURA 7.7: Lo mismo que en la Figura 7.5 pero para  $M_{Br}/M_D = 0.05$ .

En los diagramas con energía  $E_j = -1600$  son ya evidentes las diferencias entre los modelos. Notemos que en diagramas del potencial coseno (diagrama inferior izquierdo del mosaico de la Figura 7.7), en la región retrógrada surge caos, lo que es poco probable por la separación entre resonancias. En el diagrama de PERLAS, con la misma energía (diagrama inferior derecho del mosaico de la Figura 7.7), en la región prógrada, es notable la riqueza en órbitas así como regiones de caos que no están presentes en el diagrama del modelo coseno.

Mediante varios experimentos comparando el potencial coseno con PERLAS en condiciones similares, fuerza de los brazos ángulo de enrollamiento, masa, velocidad angular de los brazos, concluimos que el potencial coseno es incapaz de reproducir los detalles de un potencial basado en una distribución de masa tridimensional que representa una mejor aproximación a los brazos espirales de las galaxias.

## Capítulo 8

# Restricciones a Parámetros Dinámicos y Estructurales de Galaxias Espirales Normales

Con la familia de modelos para galaxias espirales normales, construidos de los potenciales y parámetros presentados en los Capítulos 4 y 6, respectivamente, hicimos un estudio exhaustivo en el plano del disco, que es la componente más afectada por la dinámica de los brazos espirales. De esta forma, este estudio tiene como finalidad analizar el efecto dinámico que los brazos espirales tienen sobre las órbitas estelares en diferentes tipos morfológicos de galaxias.

A lo largo de este trabajo, se ha dado énfasis en la dispersión observacional que presenta cada uno de los parámetros necesarios para modelar galaxias espirales normales. De ahí el interés de buscar si existe un límite en alguno de estos parámetros.

Los parámetros dinámicos y estructurales de los brazos espirales que estudiamos en este trabajo son: el ángulo de enrollamiento, la velocidad angular y la masa. Estas restricciones están basadas en el comportamiento ordenado y caótico de las órbitas estelares.

En lo referente al orden, las órbitas nos dan información del equilibrio estadístico de un modelo. Con esto, me refiero a que las órbitas “apoyan” a los potenciales impuestos (especialmente las órbitas periódicas), lo cual nos ayuda a restringir el parámetro particular que se estudia. Por otro lado, en lo referente al caos, se necesita también

la presencia de órbitas periódicas, que son las que mantienen las estructuras de gran escala, como los brazos espirales. Un sistema completamente caótico no forma estructuras a gran escala, aunque hay evidencia de que las órbitas caóticas pueden reforzar las características morfológicas observadas (Kaufmann y Contopoulos 1996; Patsis et al. 1997a; Harsoula et al. 2011), como brazos espirales y barras. Adicionalmente, existen análisis orbitales sobre modelos dinámicos que sugieren que el movimiento caótico tiene un papel importante en las espirales (Contopoulos 1983, 1995; Contopoulos et al. 1987; Grosbøl 2003) y de la posible naturaleza caótica que apoya a la estructura espiral (Patsis 2006; Voglis et al 2006, 2006b; Romero-Gómez et al 2007; Contopoulos y Patsis 2008; Patsis et al. 2009). Esto, sin embargo, no quiere decir que un brazo espiral emerja de un sistema completamente caótico.

## 8.1. Ángulo de Enrollamiento

Analizamos la dinámica orbital estelar como función del ángulo de enrollamiento, mediante un estudio orbital detallado con órbitas periódicas, la respuesta en densidad y estudios en el espacio fase (diagramas de Poincaré). Todo esto para determinar si existe un límite máximo que restrinja al ángulo de enrollamiento.

Para cada tipo morfológico elegimos un fondo axisimétrico típico (los parámetros empleados son los correspondientes a la distribución de masa que se muestra en la Tabla 6.1, primera parte) siguiendo la definición de Hubble para galaxias espirales normales (Sección 2.1). En la Tabla 8.1 se muestran los valores de las constantes que necesitan las componentes (bulbo, disco y halo) del modelo axisimétrico (Sección 4.1) para cada tipo morfológico, basados en el modelo de masa que se presentó en la Tabla 6.1. Los valores de la Tabla 8.1 están dados en Unidades Galácticas.

El potencial de fondo axisimétrico se mantiene fijo (construimos un potencial de fondo correspondiente a cada tipo de galaxia:  $S_a$ ,  $S_b$  y  $S_c$ ). Al potencial de fondo, le superponemos un potencial bisimétrico de brazos espirales (PERLAS -Sección 4.2.2-).

Para analizar el comportamiento del ángulo de enrollamiento en diferentes tipos galácticos, variamos el ángulo con base en la gran dispersión observacional que presenta este parámetro (Kennicutt 1981; Ma et al, 2000), aunque se sabe que la clasificación de Hubble categoriza a las galaxias como tempranas (galaxias  $S_a$ ) si poseen ángulos de



TABLA 8.1: Constantes para el modelo axisimétrico.

Componente	Constante	Sa	Sb	Sc
Bulbo	$M_1$ ( $10^{10} M_\odot$ )	11.6	4.85	1.02
	$b_1$ (kpc)	2.5	1.7	1.0
Disco	$M_2$ ( $10^{11} M_\odot$ )	1.28	1.21	0.51
	$a_2$ (kpc)	7.0	5.0	5.3178
	$b_2$ (kpc)	1.5	1.0	0.25
Halo <sup>(†)</sup>	$M_3$ ( $10^{11} M_\odot$ )	3.48	2.32	0.64
	$a_3$ (kpc)	18.0	16.0	12.0

(†)  $M_3$  no representa la masa del halo, sólo un factor de masa.

enrollamiento muy pequeños, y tardías (galaxias Sc) si poseen ángulos de enrollamiento muy abiertos. Considerando la dispersión en el valor del ángulo de enrollamiento, parece ser que Hubble usó la envolvente de esta distribución para su clasificación. Los valores utilizados para el ángulo de enrollamiento se encuentran en un intervalo de  $4^\circ$  a  $40^\circ$ , para una galaxia tipo Sa, de  $8^\circ$  a  $45^\circ$  para una galaxia tipo Sb y de  $10^\circ$  a  $50^\circ$ , para una galaxia tipo Sc.

En este estudio, encontramos dos restricciones para el ángulo de enrollamiento en galaxias espirales normales. La primera restricción está basada en el comportamiento ordenado (análisis con órbitas periódicas) y la segunda restricción está basada en el comportamiento caótico (análisis con diagramas de Poincaré). A continuación se explican detalladamente ambas restricciones.

### 8.1.1. Restricción Basada en el Comportamiento Ordenado

Cuando se utilizan potenciales estacionarios, como es nuestro caso, la autoconsistencia se puede probar a primera aproximación a través de la construcción de órbitas periódicas. Como se mencionó en la Sección 5.2, las órbitas periódicas son importantes porque actúan como el “esqueleto dinámico” de los sistemas, ya que las demás órbitas libran alrededor de éstas.

Actualmente, existe una gran controversia sobre la naturaleza de los brazos espira-

les, particularmente si son una estructura de larga duración o una estructura transiente (Sellwood 2012; Pérez-Villegas et al. 2012). La probabilidad de mantener brazos espirales de larga duración incrementa con la existencia de órbitas periódicas que apoyen a la estructura espiral.

En este trabajo realizamos un estudio de órbitas periódicas para cada tipo morfológico variando el ángulo de enrollamiento (Figuras 8.1 - 8.3). A lo largo de cada órbita periódica, buscamos la respuesta en densidad, esto es, la posición de la respuesta máxima sobre el plano galáctico. En las Figuras 8.1 - 8.3 mostramos la ubicación de la respuesta máxima en densidad con los cuadros rellenos. Esta posición representa el lugar donde se produce un acumulamiento en densidad. Los cuadros vacíos representan al patrón espiral impuesto. Comparamos entonces, la posición de la respuesta máxima con la posición del potencial de brazos espirales.

En la Figura 8.1, se muestra un mosaico de órbitas periódicas y la respuesta máxima en densidad (cuadros rellenos) para un modelo de masa de una galaxias tipo Sa. Para ángulos de enrollamiento pequeños (de  $4^\circ$  a  $10^\circ$ ), la respuesta máxima en densidad coincide con el potencial espiral impuesto (cuadros vacíos). También se observa cómo las órbitas periódicas que se encuentran y apoyan a los brazos espirales llegan más allá de la resonancia  $4/1$  ( $\sim 7$  kpc). Para el ángulo de  $15^\circ$ , la respuesta máxima en densidad coincide con el patrón impuesto hasta antes de la resonancia  $4/1$ , donde tiene una ligera desviación. Sin embargo, al pasar la posición aproximada de la resonancia  $4/1$ , la respuesta en densidad sigue nuevamente al brazo impuesto. Para los ángulos de enrollamiento de  $18^\circ$  a  $30^\circ$ , no se encuentran órbitas periódicas más allá de la resonancia  $4/1$  que apoyen a los brazos espirales; la respuesta máxima en densidad precede sistemáticamente al potencial del patrón espiral, es decir, la respuesta máxima produce brazos espirales con un ángulo de enrollamiento más pequeño que el del potencial impuesto de brazos espirales.

En la Figura 8.2, se muestra un mosaico de órbitas periódicas y respuesta máxima en densidad (cuadros rellenos) para una distribución de masa de una galaxia tipo Sb. En los paneles superiores (ángulo de enrollamiento de  $8^\circ$  a  $15^\circ$ ), las órbitas periódicas apoyan a los brazos más allá de la resonancia  $4/1$  ( $\sim 8.6$  kpc); aunque no logran llegar hasta corotación ( $\sim 11$  kpc), la respuesta en densidad sigue al patrón espiral impuesto. Para  $18^\circ$  en el ángulo de enrollamiento, se tiene un comportamiento similar al que se

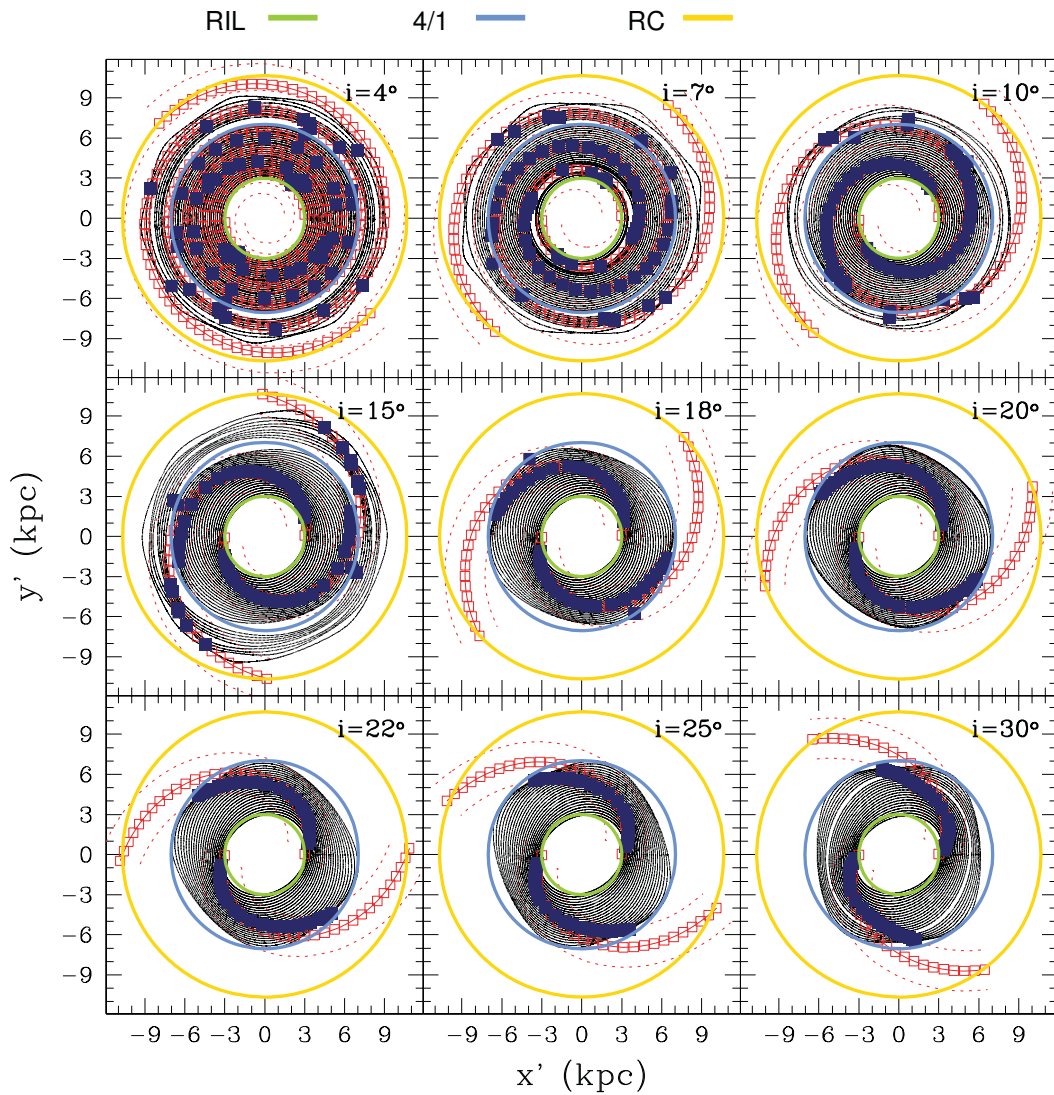


FIGURA 8.1: Órbitas periódicas y respuesta máxima en densidad (cuadros rellenos) para un modelo de masa de una galaxia tipo Sa (Tabla 6.1). Se grafica la ubicación geométrica (cuadros vacíos) para el modelo tridimensional de brazos espirales (PERLAS), la línea punteada indica el ancho de los brazos. Variamos el ángulo de enrollamiento de  $4^\circ$  a  $30^\circ$ . Las resonancias están en 3.0 kpc (RIL), 7.04 kpc (4/1) y 10.67 kpc (RC).

observa en la Figura 8.1 para un ángulo de enrollamiento de  $15^\circ$ . Para ángulos entre  $25^\circ$  y  $40^\circ$ , la respuesta en densidad no sigue al potencial de brazos, sino que forma un ángulo de enrollamiento menor al que se impone en el potencial de brazos. En el mismo intervalo (de  $25^\circ$  a  $40^\circ$ ), las órbitas periódicas que se obtienen no llegan más allá de la

resonancia 4/1.

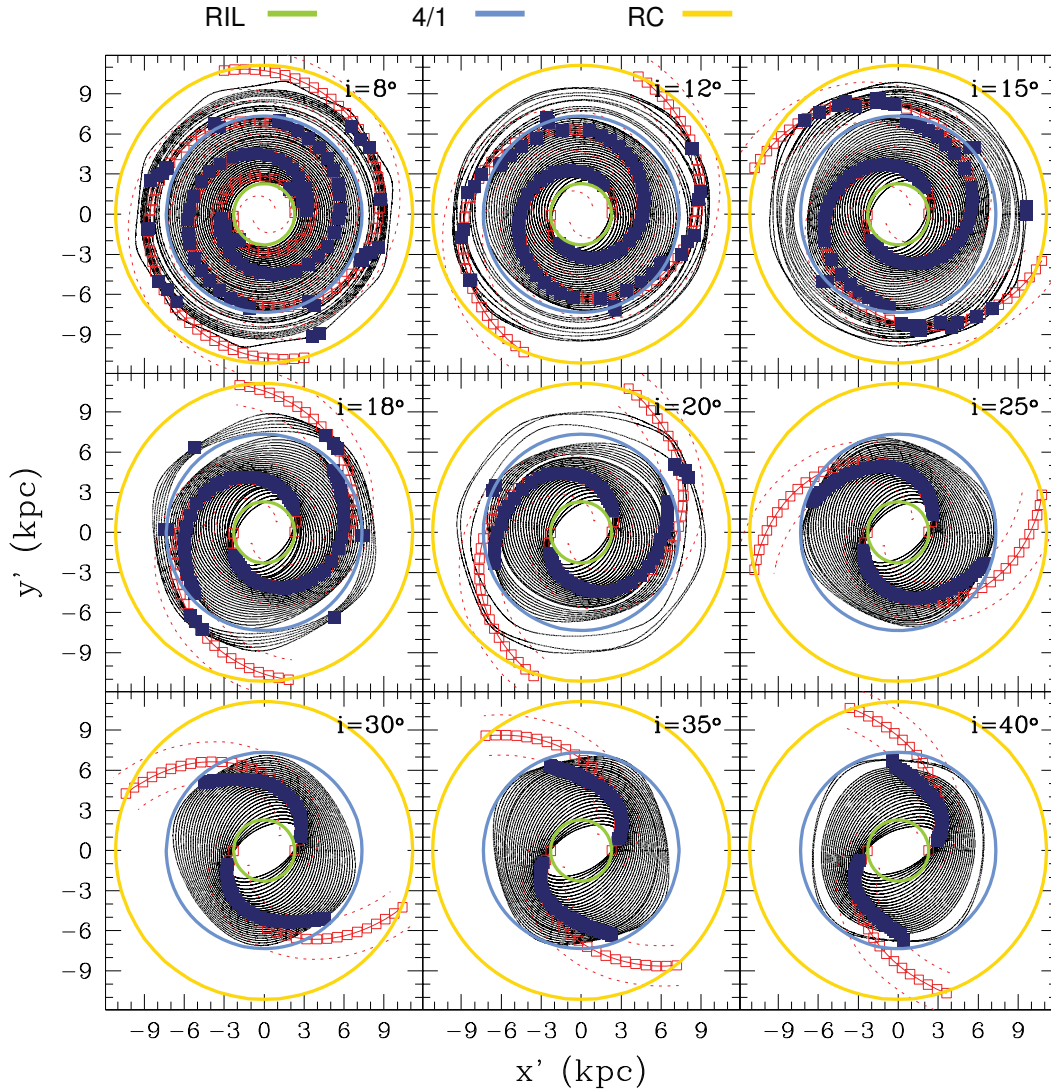


FIGURA 8.2: Lo mismo que en la Figura 8.1 pero para una distribución de masa de una galaxia tipo Sb (Tabla 6.1) y el ángulo de enrollamiento varía de  $8^\circ$  a  $40^\circ$ . Las resonancias están en 2.29 kpc (RIL), 7.34 kpc (4/1) y 11.14 kpc (RC).

La Figura 8.3 es un mosaico de órbitas periódicas y respuesta máxima en densidad para un modelo de masa de una galaxia tipo Sc. Se nota que hay un comportamiento similar al observado en las Figuras 8.1 y 8.2, sólo que la respuesta en densidad coincide con el potencial de brazos espirales hasta  $\sim 20^\circ$ . Más allá, la respuesta en densidad

ya no sigue al patrón de brazos impuesto, sino que forma un ángulo de enrollamiento menor. Para ángulos de enrollamiento de  $30^\circ$  en adelante, no se encuentran órbitas periódicas más allá de la resonancia 4/1 ( $\sim 6.5$  kpc) que apoyen el potencial de brazos espirales.

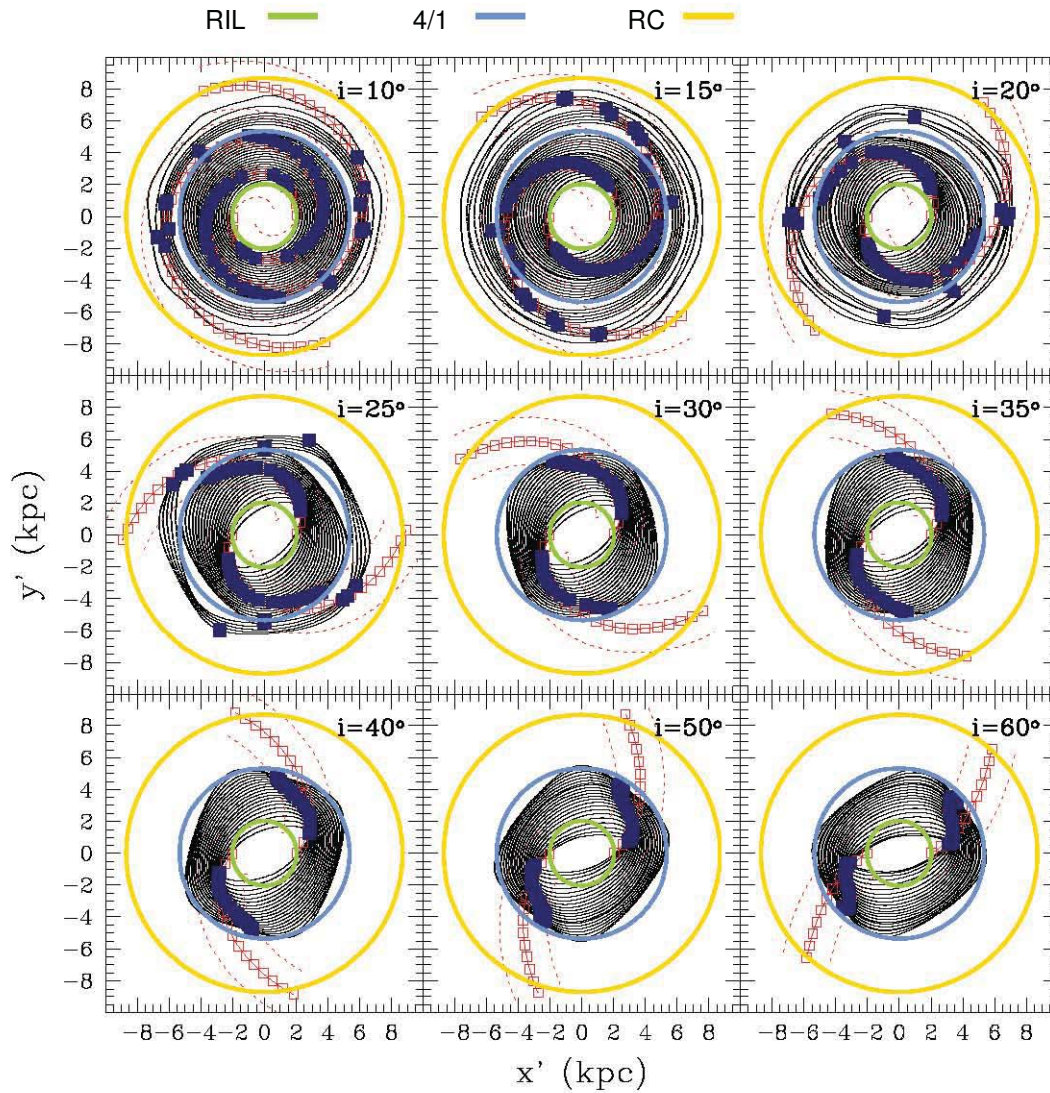


FIGURA 8.3: Lo mismo que en la Figura 8.2 pero para una distribución de masa de una galaxia tipo Sc (Tabla 6.1) y el ángulo de enrollamiento varía de  $10^\circ$  a  $60^\circ$ . Las resonancias están en 2.03 kpc (RIL), 5.35 kpc (4/1) y 8.7 kpc (RC).

Basados en el comportamiento ordenado de las órbitas, en particular en el análisis de órbitas periódicas, una primera restricción que encontramos para el ángulo de enrollamiento es hasta dónde la respuesta máxima en densidad apoya al potencial de brazos espirales. Estos límites son  $\sim 15^\circ$ ,  $\sim 18^\circ$  y  $\sim 20^\circ$  para galaxias tipo Sa, Sb y Sc, respectivamente. Para ángulos de enrollamiento menores a los límites mencionados anteriormente, los brazos espirales podrían ser considerados como una estructura de larga duración, debido a que después de varias vueltas a la galaxia, las órbitas y la respuesta en densidad siguen apoyando a los brazos espirales impuestos. En galaxias con ángulos de enrollamiento mayores a estos límites ( $15^\circ$ ,  $18^\circ$  y  $20^\circ$ ), los brazos espirales podrían ser explicados como una estructura más bien transiente. El brazo espiral que se obtiene de la respuesta en densidad ya no coincide con el potencial de brazos impuesto, por lo que los brazos espirales no actúan como los impuestos. Adicionalmente, para complementar y reforzar el resultado obtenido con las órbitas periódicas, comparamos la respuesta en densidad de los brazos espirales (cuadros rellenos de las Figuras 8.4 - 8.6) con la densidad impuesta (cuadros vacíos de las mismas Figuras). En la Figura 8.4, presentamos la respuesta en densidad de los brazos (cuadros rellenos) y la densidad impuesta (cuadros vacíos) para una distribución de masa para una galaxia Sa. El ángulo de enrollamiento varía de  $4^\circ$  a  $30^\circ$ . Para ángulos menores a  $10^\circ$ , la respuesta en densidad se ajusta muy bien a la densidad impuesta. Para  $15^\circ$ , la respuesta en densidad está por encima de la densidad impuesta, pero aún se ajusta razonablemente bien. Más allá de  $15^\circ$ , la respuesta en densidad ya no se ajusta con la densidad impuesta. Al ser diferentes las densidades, estamos hablando de brazos espirales diferentes, apoyando la naturaleza transiente de la estructura espiral para explicar brazos con grandes ángulos de enrollamiento.

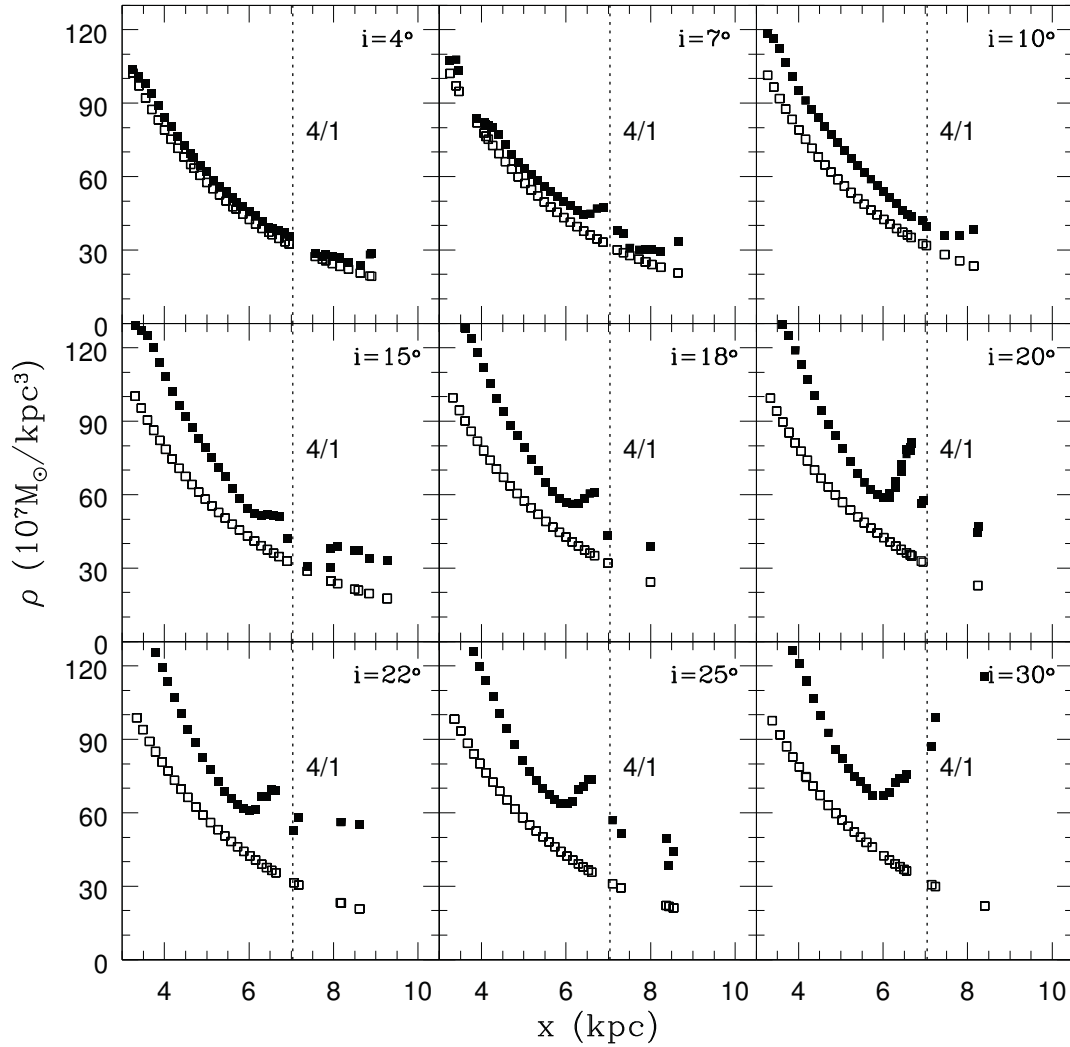


FIGURA 8.4: Respuesta en densidad (cuadros rellenos) de los brazos espirales y densidad impuesta (cuadros vacíos) para un modelo de masa de una galaxia tipo Sa. El ángulo de enrollamiento varía de  $4^\circ$  a  $30^\circ$ . La resonancia 4/1 está en 7.04 kpc.

La Figura 8.5, muestra la respuesta en densidad de los brazos (cuadros rellenos) y la densidad impuesta (cuadros vacíos), considerando una distribución de masa para una galaxia Sb. Variamos el ángulo de enrollamiento de  $8^\circ$  a  $40^\circ$ . Como mencionamos antes, en las órbitas periódicas para este modelo de masa (Figura 8.2), para ángulos de enrollamiento menores a  $18^\circ$ , la densidad de la respuesta y la densidad impuesta

ajustan, más allá de este ángulo, las densidades no ajustan.

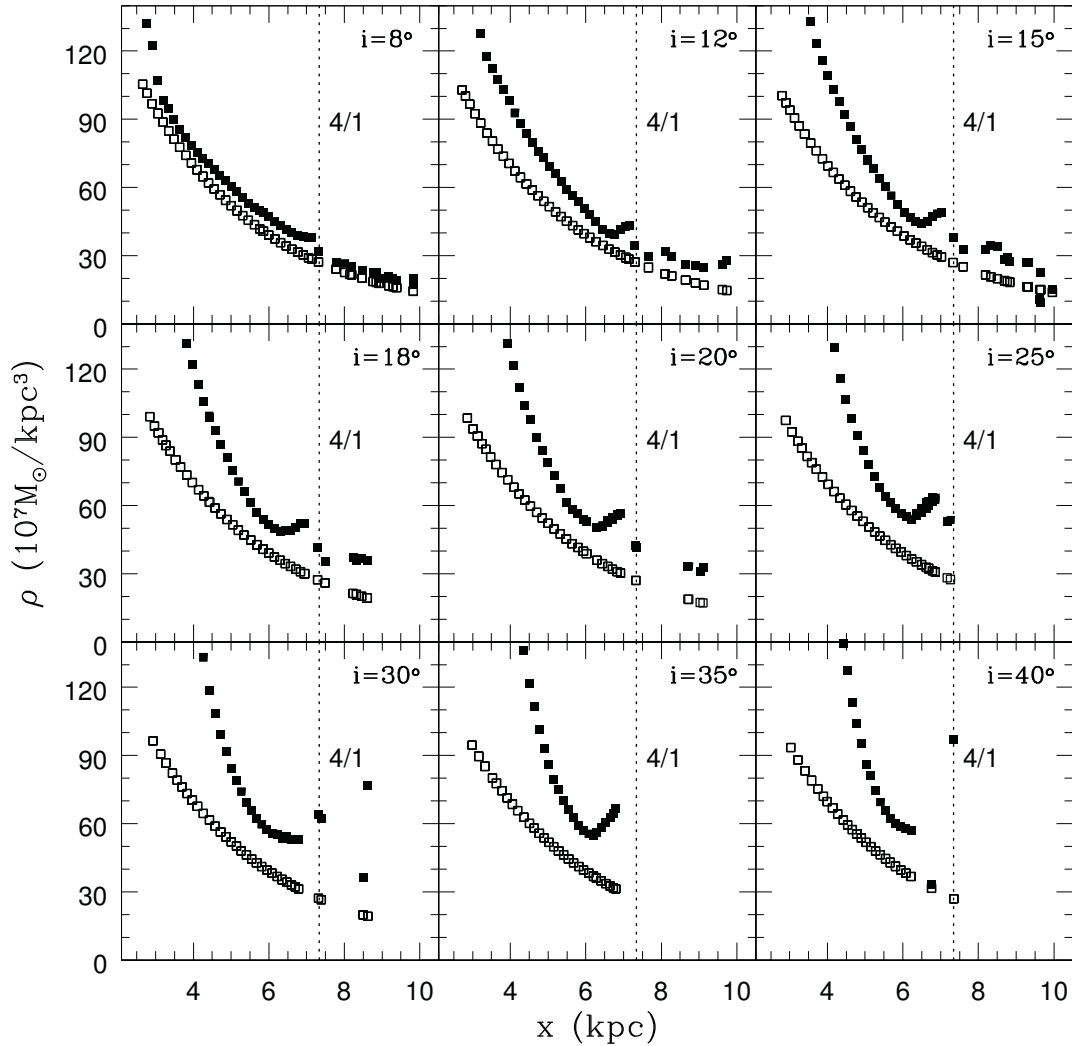


FIGURA 8.5: Respuesta en densidad (cuadros rellenos) de los brazos espirales y densidad impuesta (cuadros vacíos) para un modelo de masa de una galaxia tipo Sb. El ángulo de enrollamiento varía de  $8^\circ$  a  $40^\circ$ . La resonancia 4/1 está en 7.34 kpc.

En la Figura 8.6, muestra la densidad impuesta (cuadros vacíos) y la respuesta (cuadros rellenos) para un modelo de masa de una galaxia Sc. El ángulo de enrollamiento varía de  $10^\circ$  a  $60^\circ$ . Esta Figura es consistente con el resultado obtenido con las órbitas periódicas (Figura 8.3) para este modelo de masa, donde para ángulos de enrollamiento



menores a  $20^\circ$  la respuesta en densidad se ajusta a la densidad impuesta razonablemente bien, más allá, las densidades no coinciden.

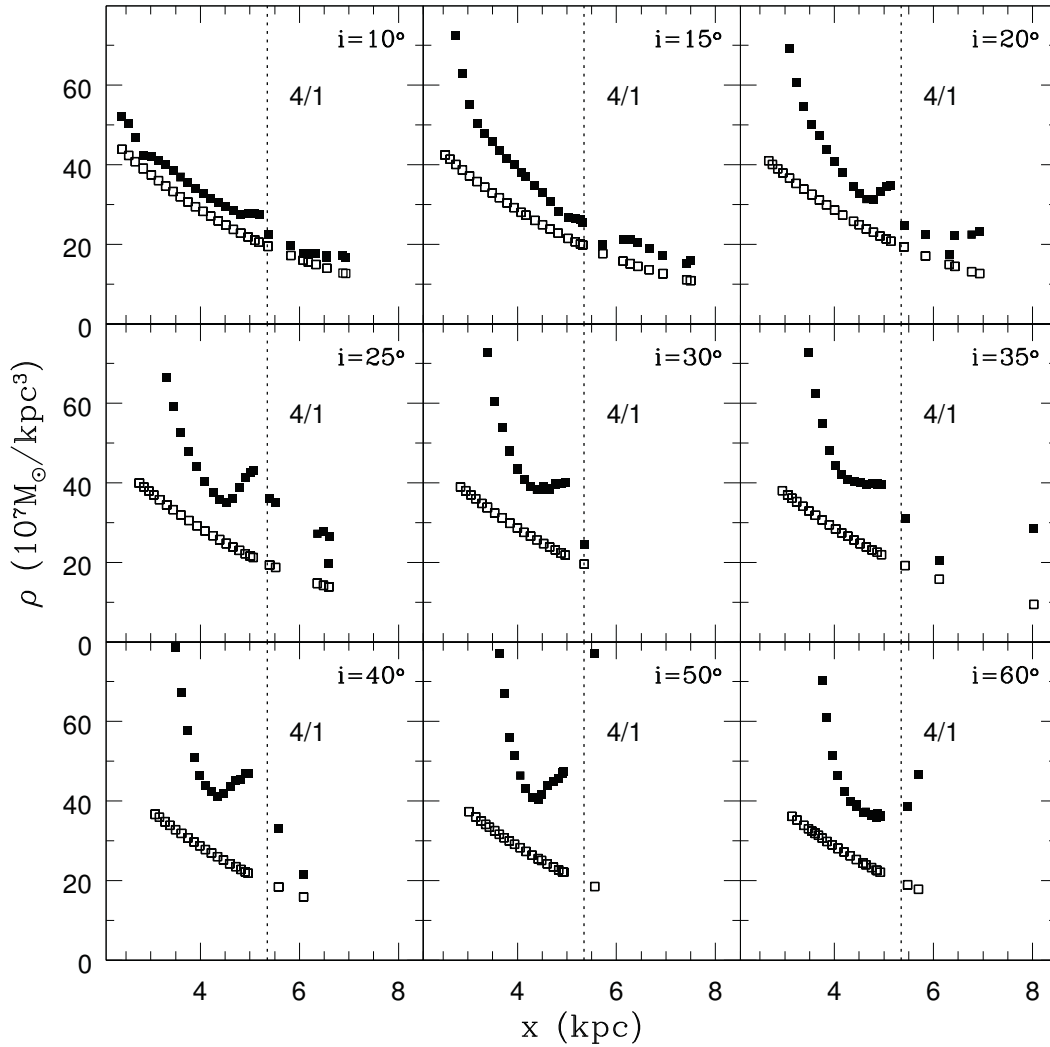


FIGURA 8.6: Respuesta en densidad (cuadros rellenos) de los brazos espirales y densidad impuesta (cuadros vacíos) para un modelo de masa de una galaxia tipo Sc. El ángulo de enrollamiento varía de  $10^\circ$  a  $60^\circ$ . La resonancia 4/1 está en 5.35 kpc.

La respuesta en densidad (cuadros rellenos) para cada tipo morfológico mostrada en las Figuras 8.4 - 8.6, es mayor a la densidad impuesta (cuadros vacíos). Para obtener un mejor ajuste entre estas densidades es necesario desconcentrar la densidad del po-

tencial impuesto, de esta manera la respuesta en densidad será menor. Una forma para desconcentrar la densidad del brazo impuesto es haciendo más ancho del brazo espiral. Sin embargo, medir el ancho de los brazos no es trivial, debido a la presencia de gas y polvo en grandes cantidades en este tipo de galaxias. En la familia de modelos que construimos, el ancho de los brazos utilizado es 2 kpc (Kennicutt y Hodge 1982).

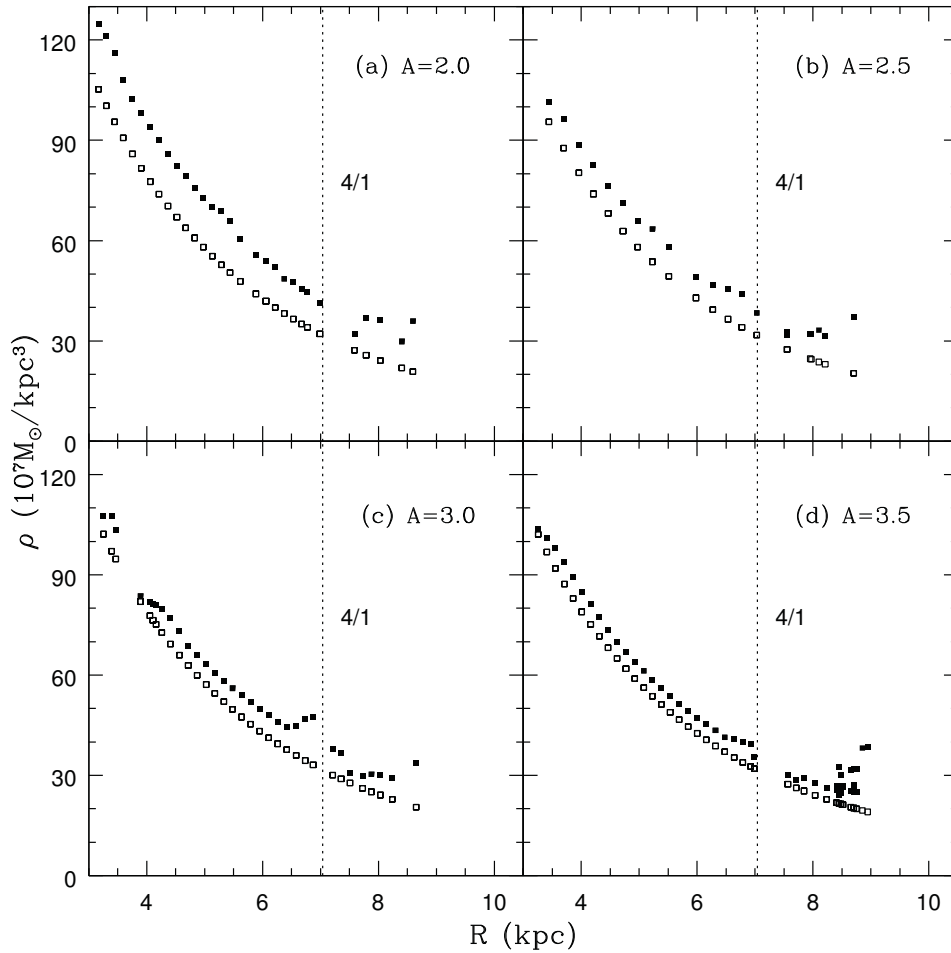


FIGURA 8.7: Respuesta en densidad (cuadros rellenos) de los brazos espirales y densidad impuesta (cuadros vacíos) para un modelo de masa de una galaxia tipo Sa, variando el ancho del brazo espiral. En (a) el ancho del brazo es de 2 kpc; en (b) es de 2.5 kpc; en (c) es de 3 kpc; en (d) es de 3.5 kpc. El ángulo de enrollamiento en todos los casos es de  $7^\circ$ . La resonancia 4/1 está en 7.34 kpc.

En la Figura 8.7 se muestra la respuesta en densidad (cuadros rellenos) y la densidad impuesta (cuadros vacíos) de los brazos espirales para el modelo de masa de una galaxia

tipo Sa, con un ángulo de enrollamiento de  $7^\circ$ ; en este caso sólo cambia el ancho de los brazos espirales. En el caso (a) de la Figura 8.7, el ancho del brazo es de 2 kpc, se observa que la forma de la curva es muy similar, pero la respuesta en densidad es mayor por un factor de 1.2 con respecto a la densidad impuesta. En el caso (b) de la Figura 8.7, el ancho del brazo es de 2.5 kpc, y se nota que la diferencia entre las dos curvas es menor, por lo que hacer más ancho al brazo, se obtiene un mejor ajuste entre la densidad impuesta y la respuesta en densidad. Para el caso (c) de la Figura 8.7, el ancho del brazo es de 3 kpc, las densidades se ajustan mejor que en los casos anteriores. Finalmente, en el caso (d) de la Figura 8.7 el ancho del brazo es de 3.5 kpc, la diferencia entre las densidades es muy pequeña en este caso. Siguiendo este comportamiento, podríamos continuar ensanchando el brazo para que las densidades coincidan perfectamente. Claramente, tendríamos un brazo cada vez más “suave”, lo que significa acercarnos al régimen lineal, pero los brazos espirales que se observan en las galaxias, en su mayoría muy prominentes, no parecen estar en el régimen lineal.

Para ángulos de enrollamiento pequeños, como es el caso de la Figura 8.8 ( $7^\circ$ ), existe un problema con un brazo muy ancho, se traslapan los brazos espirales, principalmente hacia el centro de la galaxia (en la primera parte del brazo). Al traslapar los brazos espirales, las partículas parecen NO detectar el potencial del brazo espiral.

En Figura 8.8, se muestran las órbitas periódicas y la respuesta máxima en densidad, para un modelo de masa de una galaxia tipo Sa. Estas órbitas periódicas, corresponden a cada uno de los casos presentados en la Figura 8.7. En la Figura 8.8 (a), se considera un ancho en el brazo de 2 kpc. Aquí se observa como la posición de la respuesta en densidad coincide muy bien con el potencial del brazo impuesto, aunque no sólo tomamos en cuenta esto, también utilizamos la comparación de la respuesta en densidad y la densidad impuesta (Figura 8.7), y en (a) para ambas Figuras (8.7 y 8.8), nos da un mejor ajuste la Figura 8.8. Buscamos entonces un compromiso entre ambas. En la Figura 8.8 (b), el ancho del brazo es de 2.5 kpc, la posición de la respuesta máxima en densidad (cuadros rellenos) no es tan continua como en (a), sin embargo la densidad máxima cae en el potencial del brazo impuesto. En (c) de la Figura 8.8, el ancho del brazo es de 3.0 kpc, la posición de la respuesta en densidad apoya al brazo impuesto y, junto con (c) de la Figura 8.7, este caso se ajusta mejor que en los anteriores. Finalmente en (d) de la Figura 8.8, el ancho del brazo es de 3.5 kpc, se nota que no se encuentra

respuesta en densidad que apoye al brazo impuesto en la primera parte del brazo. Esto se debe a que con este ancho, los brazos se traslapan. Como se mencionó anteriormente, se observa también cómo se encuentra respuesta en densidad en el inicio del brazo, pero después de desvía y brinca una parte del brazo, para ya tener la posición de la respuesta máxima en densidad que apoya al resto de los brazos que se impusieron. A pesar de que las curvas se ajustaban bien en (d) de la Figura 8.7, con el comportamiento de la respuesta en densidad de (d) en la Figura 8.8, el ancho de 3.5 kpc para el brazo no es apropiado. Después de este análisis, el mejor valor que encontramos para el ancho de los brazos espirales antes de comprometer el comportamiento de las órbitas es de 3 kpc, el caso (c) de las Figuras 8.7 y 8.8.

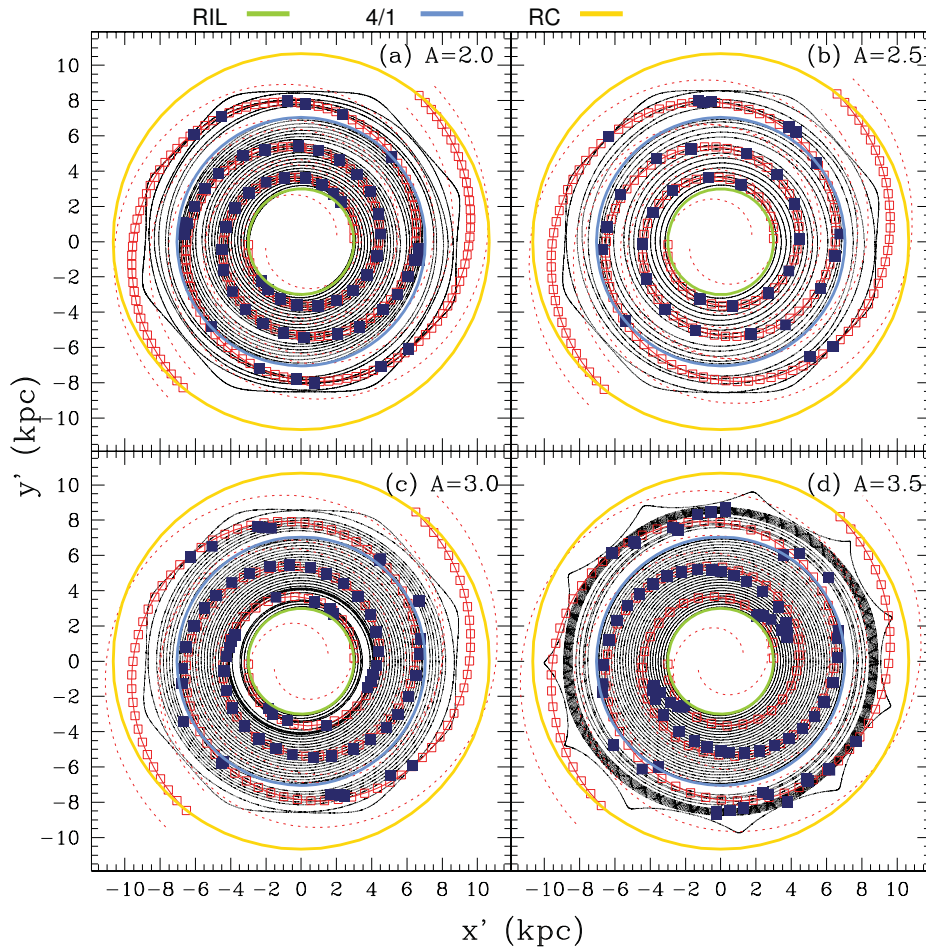


FIGURA 8.8: Órbitas periódicas, posición de los brazos impuestos (cuadros vacíos) y posición de la respuesta máxima en densidad (cuadros rellenos) para un modelo de masa de una galaxia Sa, variando el ancho del brazo espiral. En (a) el ancho del brazo es de 2 kpc; en (b) es de 2.5 kpc; en (c) es de 3 kpc; en (d) es de 3.5 kpc. El ángulo de enrollamiento en todos los casos es de  $7^\circ$ . Las resonancias están en 3.0 kpc (RIL), 7.04 kpc (4/1) y 10.67 kpc (RC).

### 8.1.2. Restricción Basada en Caos Orbital Estelar

La segunda restricción que encontramos para el ángulo de enrollamiento en galaxias espirales normales esta basada en el comportamiento caótico de las órbitas estelares. Para este estudio, hicimos un barrido de energías de Jacobi en el espacio fase, para entender el efecto en la dinámica orbital en el plano galáctico al incrementar el ángulo de enrollamiento en galaxias espirales normales. Con este estudio encontramos un límite

máximo para el ángulo de enrollamiento, en donde el caos llega a ser tan penetrante que destruye todas las órbitas ordenadas. Si las órbitas caóticas llegan a penetrar hasta las órbitas periódicas principales (las órbitas que apoyan las estructuras de gran escala), esto significa que las órbitas de las estrellas no apoyan al patrón de los brazos espirales y, por lo tanto, no es factible sostener una estructura dada.

Presentamos un mosaico de diagramas de  $5 \times 4$  en el espacio fase para cada tipo morfológico (Figuras 8.9 - 8.11). Como en el análisis de órbitas periódicas (Sección 8.1.1), en este caso también usamos el mismo fondo axisimétrico construido para una galaxia tipo Sa, Sb y Sc, basados en los parámetros de la Tabla 6.1, sólo variamos el ángulo de enrollamiento. El valor de la energía de Jacobi está en el intervalo de  $E_J = -4050$  a  $-3278 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$  para una galaxia tipo Sa, de  $E_J = -3150$  a  $-2445 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$  para una galaxia tipo Sb y de  $E_J = -1080$  a  $-1021 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$  para una galaxia tipo Sc. Con estos intervalos de energías cubrimos la extensión total de los brazos espirales. La parte derecha de cada diagrama de Poincaré representa la región prógrada en el sistema de referencia de los brazos espirales.

En la Figura 8.9 se muestran diagramas de Poincaré para una distribución de masa de una galaxia tipo Sa, el ángulo de enrollamiento va de  $4^\circ$  (línea superior de los diagramas) a  $30^\circ$  (línea inferior de los diagramas). En los ángulos de enrollamiento entre  $4^\circ$  y  $10^\circ$  (primeras dos líneas de estos diagramas), la mayoría de las órbitas son ordenadas y simples, las órbitas periódicas principales apoyan a los brazos espirales hasta corotación. Sin embargo, el inicio del caos surge desde un ángulo de enrollamiento de  $10^\circ$  y una  $E_J = -3278 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ , muy cerca de corotación. Conforme incrementamos el ángulo de enrollamiento, en  $19^\circ$  (tercera línea de los diagramas), el comportamiento orbital es más complejo, se presentan islas resonantes. Para  $30^\circ$  (línea inferior del diagrama), la región caótica cubre la mayor parte de las órbitas ordenadas prógradas. Para ángulos de enrollamiento más allá de  $30^\circ$ , el caos penetra hasta las órbitas periódicas principales, destruyendo el soporte orbital. Para una galaxia tipo Sa, encontramos entonces que el límite para el ángulo de enrollamiento es de  $\sim 30^\circ$ , con base en su comportamiento estocástico.

En la Figura 8.10 se presentan diagramas de Poincaré para un modelo de masa de una galaxia tipo Sb, el ángulo de enrollamiento va de  $12^\circ$  (línea superior de los diagramas) a  $40^\circ$  (línea inferior de los diagramas). Para ángulos de enrollamiento de  $10^\circ$

o menores, las órbitas ordenadas dominan. Al incrementar el ángulo de enrollamiento, a  $12^\circ$  (primera línea de los diagramas), el comportamiento orbital es principalmente ordenado, pero cerca de corotación existe ya una pequeña región caótica. Para  $21^\circ$  (segunda línea de los diagramas), el inicio del caos es muy evidente. En este ángulo de enrollamiento, en las diferentes  $E_J$ , se aprecia una variedad de órbitas. Para  $30^\circ$  (tercera línea de los diagramas), la región de caos incrementa y se observa una estructura más compleja así como islas resonantes. Para  $40^\circ$  (línea inferior de los diagramas), las órbitas caóticas cubren casi toda la región prógrada. Para ángulos de enrollamiento mayores de  $40^\circ$ , el caos incrementa hasta destruir todas las órbitas periódicas que dan apoyo a los brazos espirales. El límite en el ángulo de enrollamiento para una galaxia tipo Sb es de  $\sim 40^\circ$ .

En la Figura 8.11, presentamos diagramas de Poincaré para un modelo de masa de una galaxia tipo Sc, el ángulo de enrollamiento va de  $20^\circ$  (línea superior de los diagramas) a  $50^\circ$  (línea inferior de los diagramas). En ángulos de enrollamiento menores a  $20^\circ$  el comportamiento orbital es completamente ordenado. Para un ángulo de enrollamiento de  $20^\circ$  (primera línea de los diagramas), hay un comportamiento ordenado, la mayoría de las órbitas son simples aunque comienza a observarse una pequeña región de caos cerca de corotación. Al incrementar el ángulo de enrollamiento a  $30^\circ$  (segunda línea de los diagramas), el comportamiento orbital es más complejo, se nota la presencia de islas resonantes y la región de caos ya es importante, pero ésta sigue estando contenida por órbitas cuasiperiódicas estables. Para  $40^\circ$  (tercera línea de los diagramas), el caos es penetrante y compromete el espacio fase disponible alrededor de las órbitas periódicas estables. Para  $50^\circ$  (línea inferior de los diagramas), la región caótica cubre prácticamente todas las órbitas prógradas regulares, aproximándose a las órbitas periódicas principales. Para ángulos de enrollamiento mayores de  $50^\circ$  el caos destruye todas las órbitas periódicas. Encontramos de aquí que el límite para el ángulo de enrollamiento para una galaxia tipo Sc es de  $\sim 50^\circ$ .

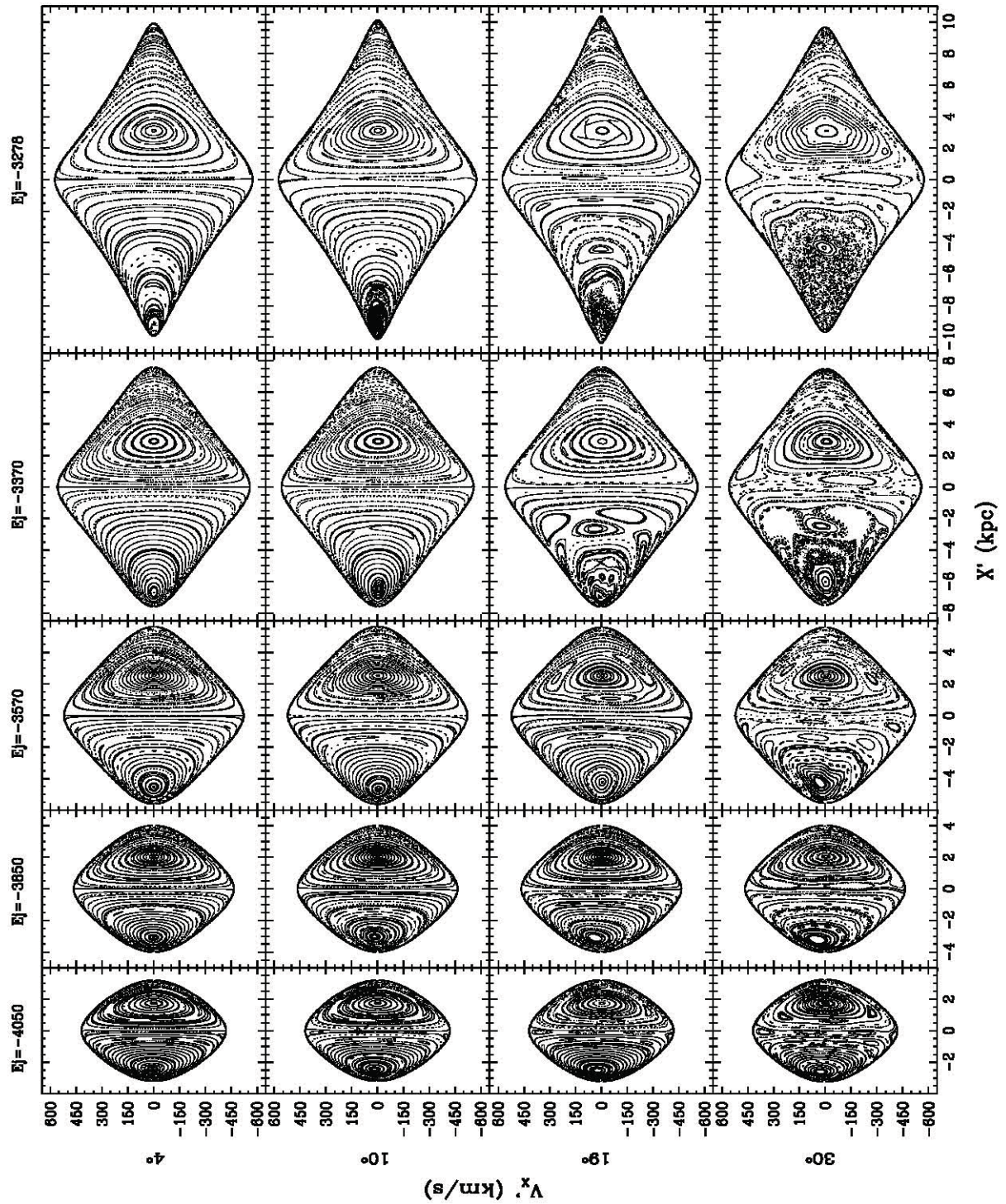


FIGURA 8.9: Diagramas de Poincaré con  $E_J = [-4050, -3278]$ , en unidades de  $10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ . Con ángulos de enrollamiento de  $4^\circ$  a  $30^\circ$ . Con un modelo de masa para una galaxia tipo Sa. Los brazos espirales tiene una masa de 3% la masa del disco.



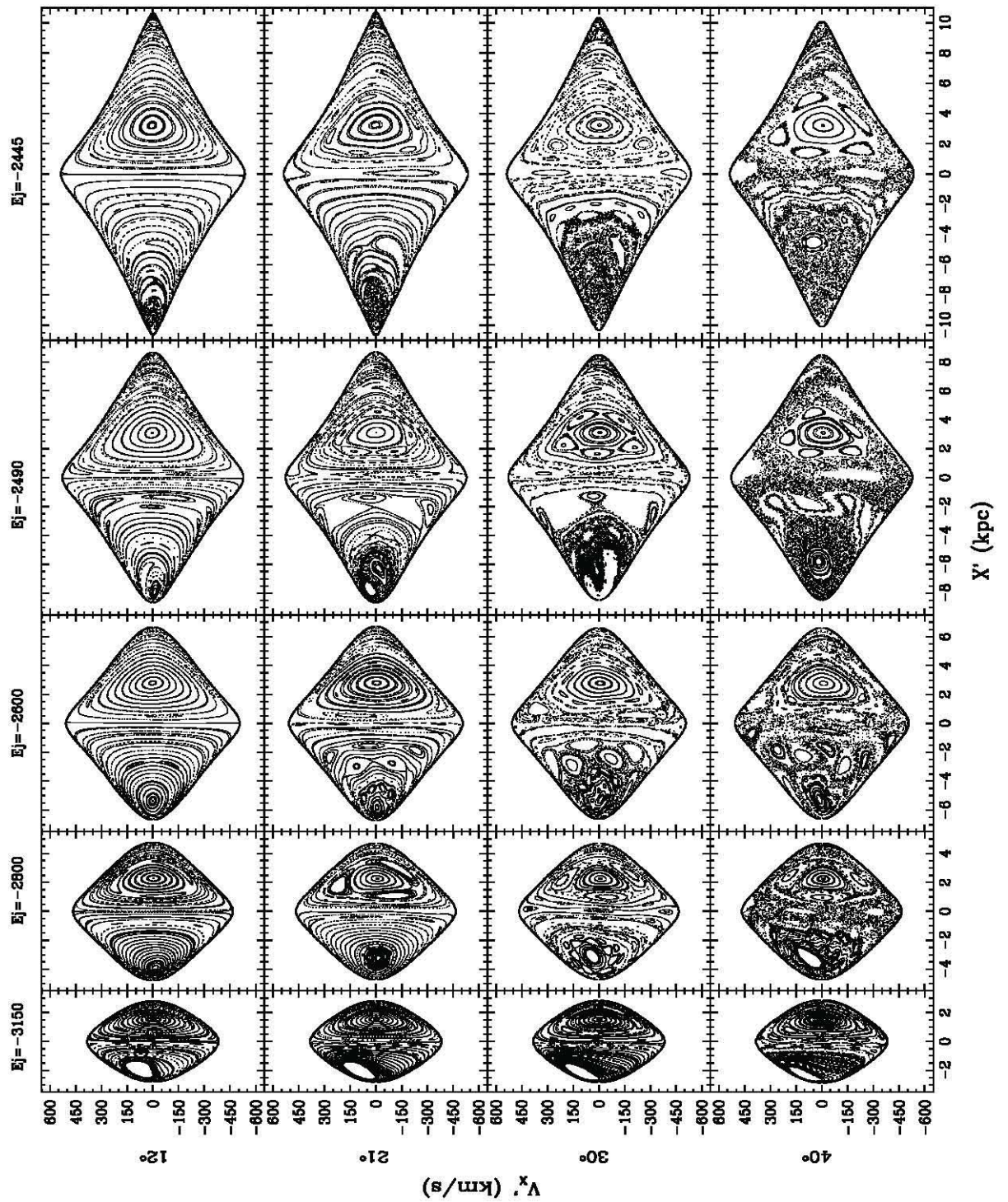


FIGURA 8.10: Diagramas de Poincaré con  $E_J = [-3150, -2445]$ , en unidades de  $10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ . Con ángulos de enrollamiento de  $12^\circ$  a  $40^\circ$ . Con un modelo de masa para una galaxia tipo Sb. Los brazos espirales tiene una masa de 3% la masa del disco.

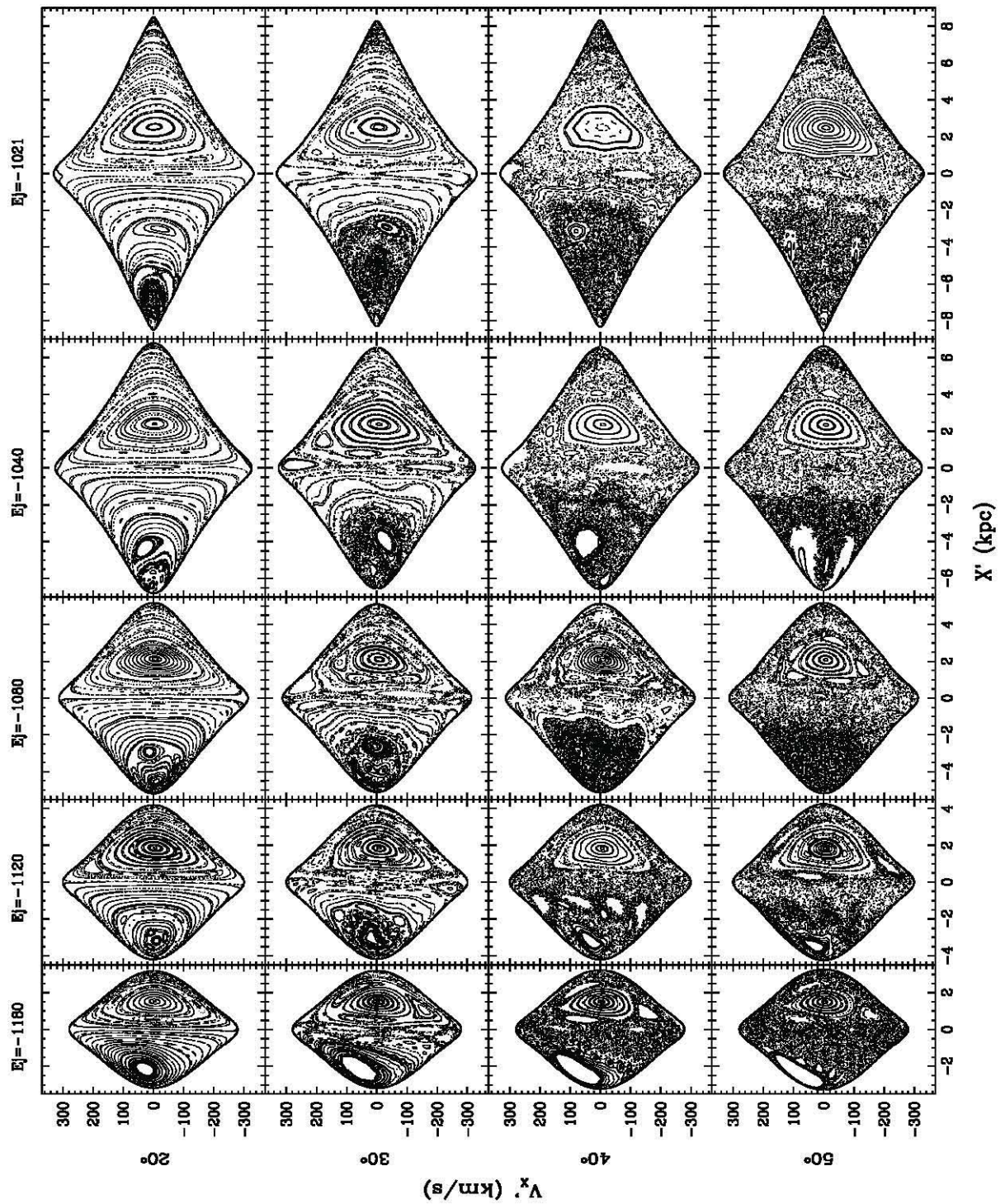


FIGURA 8.11: Diagramas de Poincaré con  $E_J = [-1180, -1021]$ , en unidades de  $10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ . Con ángulos de enrollamiento de  $20^\circ$  a  $50^\circ$ . Con un modelo de masa para una galaxia tipo Sc. Los brazos espirales tiene una masa de 3% la masa del disco.

Con el estudio orbital realizado en el espacio fase notamos que la estructura orbital se vuelve más compleja de galaxias tipo tempranas (Sa) a tardías (Sc) y conforme se incrementa el ángulo de enrollamiento, el comportamiento caótico se vuelve más y más importante, hasta el punto en donde se destruyen las órbitas periódicas principales.

El límite que hemos encontrado para el ángulo de enrollamiento incrementa hacia tipos tardíos. Este límite está relacionado con la masa que se le asigna a los brazos espirales. Para cada tipo morfológico, la razón  $M_{Br}/M_D$  es la misma, esto es, la masa del brazo depende de la masa del disco. Las masas que se utilizan en los modelos de las Figuras 8.9 - 8.11 decrece hacia galaxias de tipo tardío y la masa que se dió a los brazos espirales, sin importar el tipo morfológico fue de 3% la masa del disco; esto significa que la masa de los brazos espirales decrece en estos modelos hacia galaxias de tipo tardío.

En la Figura 8.12, se presenta un mosaico de  $5 \times 3$  de diagramas de Poincaré, para un modelo de masa de una galaxia tipo Sa. Las energías de Jacobi son las mismas que en la Figura 8.9. El ángulo de enrollamiento varía de  $30^\circ$  (línea superior de los diagramas) a  $40^\circ$  (línea inferior de los diagramas). La diferencia entre esta Figura y la 8.9, es la masa de los brazos espirales, en este caso es de 1.2% la masa del disco. Esta masa corresponde al 3% de la masa del disco que usamos para modelar una galaxia tipo Sc, es decir, es la masa que le asignamos a los brazos espirales de una galaxia tipo Sc. Comparando los diagramas de Poincaré que tienen un ángulo de enrollamiento de  $30^\circ$  mostrados en las Figuras 8.9 (última línea de los diagramas) y 8.12 (primera línea de los diagramas), se observa que para el caso donde la masa de los brazos es de 3% la masa del disco (Figura 8.9), es el límite antes de que se destruyan todas las órbitas periódicas principales; para el caso en donde la masa de los brazos corresponde a 1.2% (Figura 8.12) la masa del disco, la región de caos aún no cubre lo suficiente el espacio fase permitido para las órbitas prógradas, aún existen órbitas periódicas que apoyan a los brazos espirales. La masa de los brazos es un factor importante que interviene para encontrar un límite máximo para el ángulo de enrollamiento. Entonces, si la masa de los brazos es pequeña, existen órbitas periódicas que dan apoyo a los brazos espirales con ángulos de enrollamiento más grandes. Por lo tanto, los límites que hemos encontrado para el ángulo de enrollamiento basado en el comportamiento caótico, resultarían más grandes.

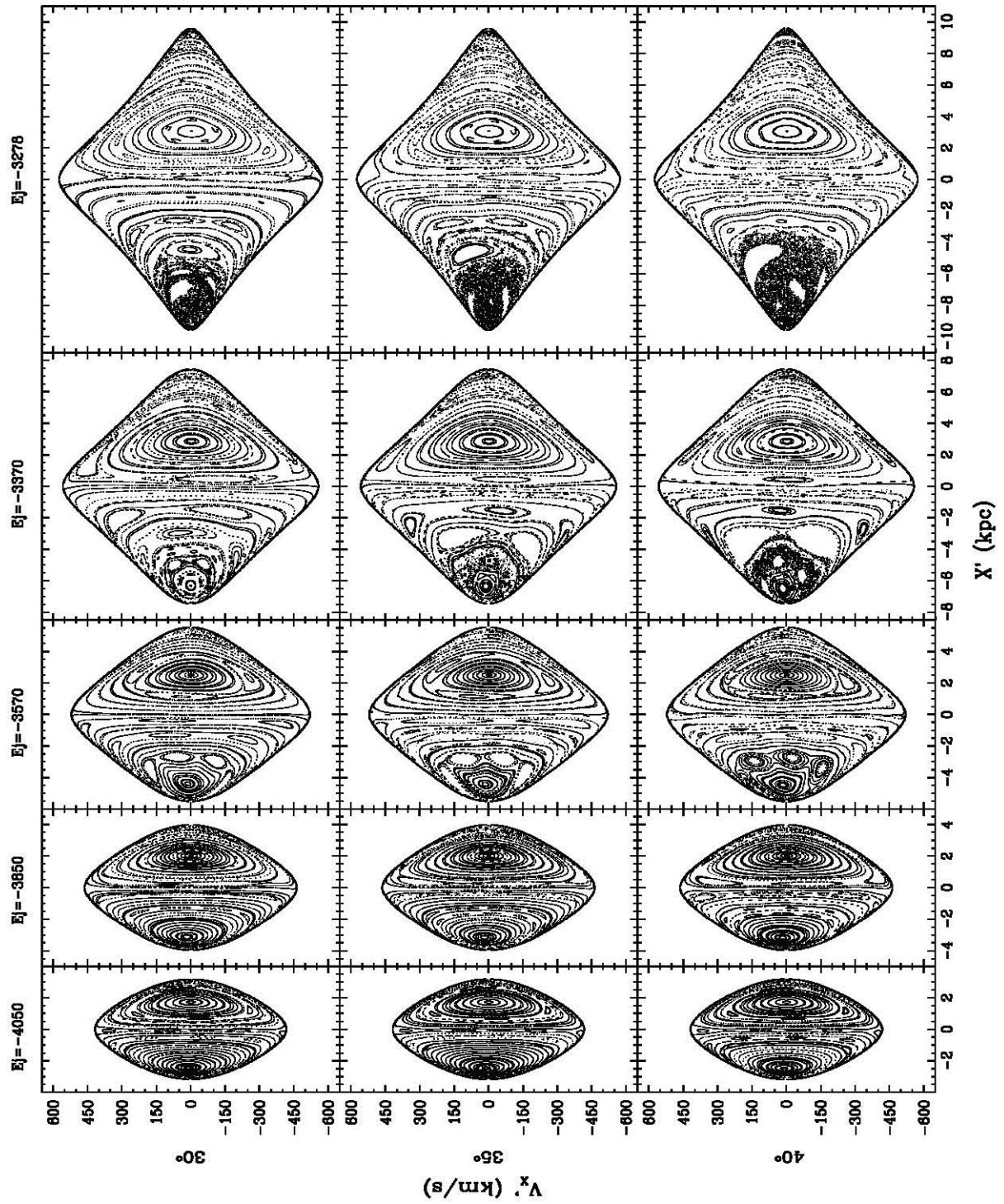


FIGURA 8.12: Lo mismo que en la Figura 8.9. El ángulo de enrollamiento va de  $30^\circ$  a  $40^\circ$  y la razón  $M_{Br}/M_D = 0.012$ .

### Efecto del Halo en las Órbitas Caóticas

Utilizando una distribución de masa para una galaxia tipo Sc, modificamos la masa del halo de materia oscura y analizamos el efecto de esta componente sobre la dinámica orbital.

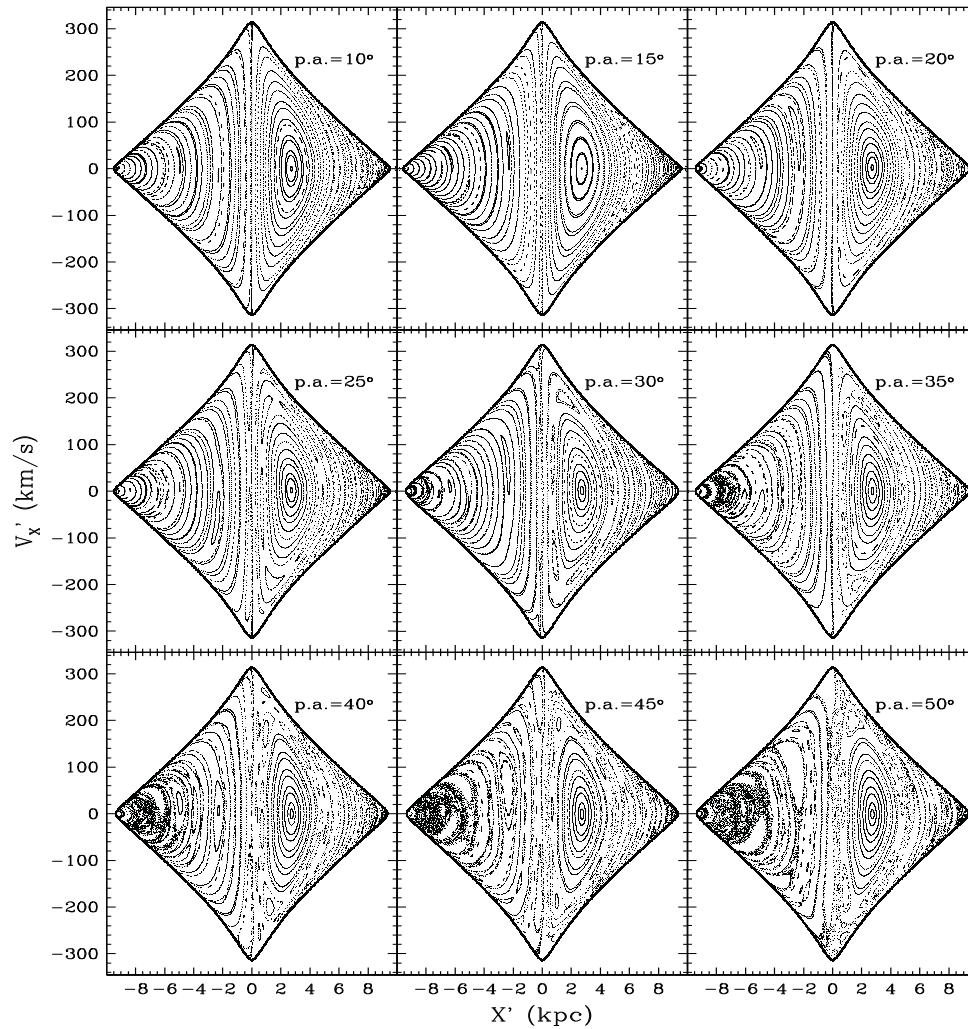


FIGURA 8.13: Diagramas de Poincaré para un modelo de masa de una galaxia tipo Sc con  $E_J = -1790 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ . Se utiliza una razón  $M_{Br}/M_D = 0.02$  y  $M_D/M_H = 0.027$  a un radio de 100 kpc. El ángulo de enrollamiento va de  $10^\circ$  a  $50^\circ$ .

Al cambiar la masa del halo, estamos modificando el modelo axisimétrico de masa y por lo tanto, la curva de rotación también cambia; esto es, al aumentar la masa del halo aumenta la velocidad de rotación de la galaxia.

En la Figura 8.13, se presenta un mosaico de diagramas de Poincaré de  $3 \times 3$ , para una galaxia tipo Sc, con una razón  $M_D/M_H = 0.027$  a un radio de 100 kpc, la velocidad de rotación es  $V_{max} = 230$  km/s. Variamos el ángulo de enrollamiento de  $10^\circ$  a  $50^\circ$ . Para ángulos de enrollamiento menores a  $30^\circ$ , el comportamiento orbital de la región prógrada es completamente ordenado. Para  $35^\circ$ , en las órbitas prógradas existe una pequeña región caótica que se encuentra contenida por órbitas ordenadas. Para ángulos de enrollamiento de  $40^\circ$  y  $45^\circ$ , la región de caos va creciendo ligeramente y ya se observan órbitas más complejas. Finalmente, para  $50^\circ$ , el caos crece pero aún existen órbitas periódicas que apoyan a la estructura espiral, y se podría aumentar más el ángulo de enrollamiento sin que el caos destruya las órbitas periódicas principales. Para el caso presentado en la Sección 8.1.2,  $\sim 50^\circ$  es el límite para el ángulo de enrollamiento de una galaxia tipo Sc, basado en el comportamiento caótico.

En la Figura 8.14, presentamos un mosaico de  $3 \times 3$  de diagramas de Poincaré para un modelo de masa de una galaxia Sc. Aquí disminuimos la masa del halo de materia oscura, la razón  $M_D/M_H = 0.05$  a un radio de 100 kpc. Con este halo, la curva de rotación es de  $v_{max} = 170$  km/s. El ángulo de enrollamiento lo incrementamos de  $10^\circ$  a  $50^\circ$ . Para ángulos de enrollamiento de  $10^\circ$  a  $20^\circ$ , las órbitas son ordenadas y simples. En  $25^\circ$ , se nota una pequeña región de caos en la zona prógrada contenida por órbitas ordenadas. Para ángulos entre  $30^\circ$  y  $45^\circ$ , la región de caos incrementa considerablemente, las órbitas son más complejas y se hacen presentes islas resonantes. Para  $50^\circ$ , el espacio fase permitido para las órbitas prógradas está casi cubierto por caos, sin embargo se conservan las órbitas periódicas principales.

En la Figura 8.15, se presenta un mosaico de  $3 \times 3$  de diagramas de Poincaré con una razón  $M_D/M_H = 0.1$ , para esa masa del halo, la curva de rotación es de  $V_{max} = 140$  km/s. Para ángulos de enrollamiento menores a  $20^\circ$ , el comportamiento es ordenado, después de este ángulo, el caos crece conforme incrementa el ángulo de enrollamiento, las órbitas ya no son simples y se presentan islas resonantes. Para  $50^\circ$ , el caos es tan penetrante que prácticamente cubre casi todo el espacio fase permitido para las órbitas prógradas.

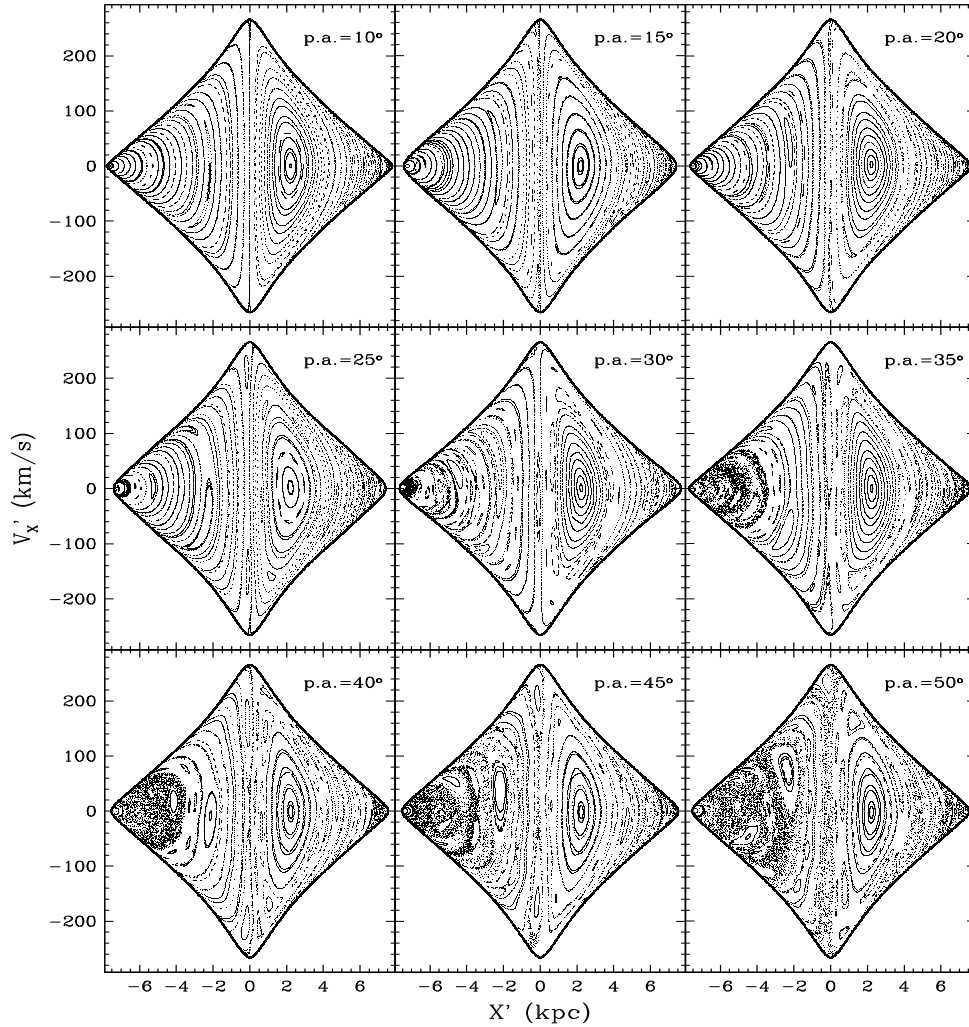


FIGURA 8.14: Diagramas de Poincaré para un modelo de masa de una galaxia tipo Sc con  $E_J = -1109 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ . Se utiliza una razón  $M_{Br}/M_D = 0.02$  y  $M_D/M_H = 0.05$  a un radio de 100 kpc. El ángulo de enrollamiento va de  $10^\circ$  a  $50^\circ$ .

La diferencia entre las Figuras 8.13 - 8.15 es la masa del halo; el resto de los parámetros son los mismos. En la comparación de esta Figuras notamos que, para el caso donde la masa del halo es más grande (Figura 8.13), las regiones de comportamiento caótico son ligeramente menores que para el caso donde el halo es más pequeño (Figura 8.15).

La masa del halo influye en las órbitas caóticas. El halo suaviza el comportamiento caótico. En este caso, el límite para el ángulo de enrollamiento basado en comportamiento caótico (Sección 8.1.2) aumenta ligeramente respecto a los casos con masas del halo menores.

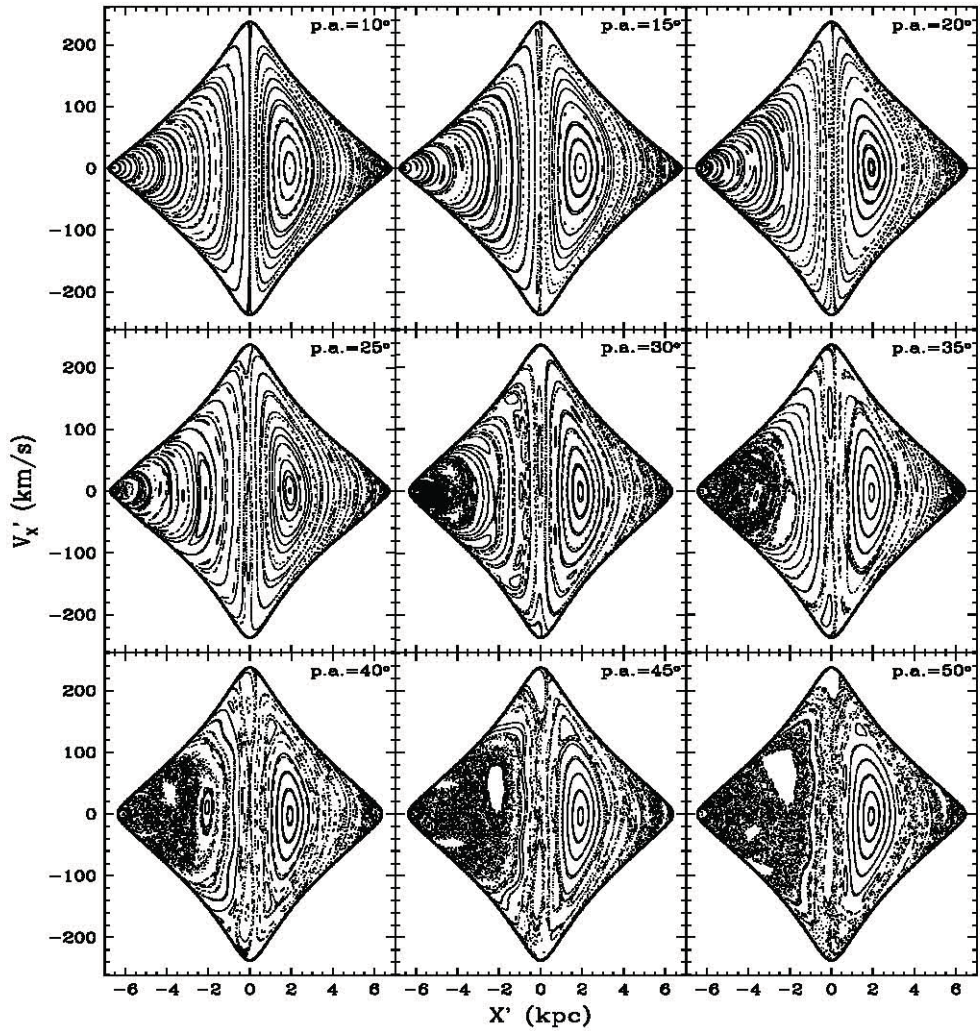


FIGURA 8.15: Diagramas de Poincaré para un modelo de masa de una galaxia tipo Sc con  $E_J = -700 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ . Se utiliza una razón  $M_{Br}/M_D = 0.02$  y  $M_D/M_H = 0.1$  a un radio de 100 kpc. El ángulo de enrollamiento va de 10° a 50°.



Por otro lado, al disminuir la masa del halo, el caos crece rápidamente con el ángulo de enrollamiento. El límite encontrado para el ángulo de enrollamiento disminuye. Es importante mencionar que, aunque la presencia del halo masivo disminuye la extensión de las regiones caóticas, esto no significa que apoye la presencia de los brazos espirales. Un halo masivo tiende a suavizar las estructuras no axisimétricas induciendo que las órbitas periódicas se circularicen.

### Modificando la Altura del Brazo Espiral

Un parámetro del modelo PERLAS es la altura del brazo. Analizaremos el efecto de este parámetro sobre la dinámica orbital al disminuir la altura, en particular sobre las órbitas periódicas.

En todos los modelos anteriores que se han presentado, la altura del brazo medida desde el plano medio del disco es de  $z_{Br} = 0.5$  kpc. Si aumentamos o disminuimos esta altura, el resultado en los brazos espirales es desconcentrar o concentrar la masa del brazo.

En la Figura 8.16, mostramos un mosaico de  $3 \times 3$  diagramas de Poincaré, para el caso de una galaxia tipo Sc. Esta Figura es similar a la Figura 8.14, la diferencia es que en la Figura 8.16 concentramos el brazo espiral, cambiando la altura de 0.5 kpc a 0.2 kpc. Al concentrar el brazo, la fuerza que ejerce éste sobre las estrellas es mayor. Si el “golpe” que el brazo espiral le da disco es mayor, provocará un incremento en el comportamiento caótico a ángulos de enrollamiento menores que en el caso de brazos con concentración menor.

En los ángulos de enrollamiento de  $10^\circ$  a  $20^\circ$ , de la Figura 8.16, el comportamiento de las órbitas es ordenado, esto coincide con la Figura 8.14 (con los mismos ángulos) y se debe a que el brazo espiral es suave si el ángulo de enrollamiento es pequeño o es de baja densidad. A partir de  $25^\circ$ , los diagramas de Poincaré entre estas dos Figuras (8.14 y 8.16) ya no tienen el mismo comportamiento; en el caso donde la altura del brazo es de 0.2 kpc (Figura 8.16), el caos es mayor. Para un ángulo de enrollamiento de  $30^\circ$  en adelante, en el espacio fase disponible para las órbitas prógradas, va creciendo el comportamiento caótico de manera gradual conforme vamos incrementado el ángulo de enrollamiento.

Comparando de manera global a las Figuras 8.14 y 8.16, se observa la misma ten-

dencia, en el caso de un brazo más concentrado ( $z_{Br} = 0.2$ ), el caos surge poco antes ( $\sim 25^\circ$ ). Para ángulos de enrollamiento mayores ( $\gtrsim 30^\circ$ ), la cantidad de caos aumenta con  $z_{Br} = 0.2$ . Sin embargo, la cantidad de caos generada entre los dos modelos con diferentes  $z_{Br}$ , no difiere mucho; esto significa que la altura del brazo espiral no es un parámetro para el desarrollo del caos (afortunadamente, dado que se conoce muy poco de esta característica en galaxias).

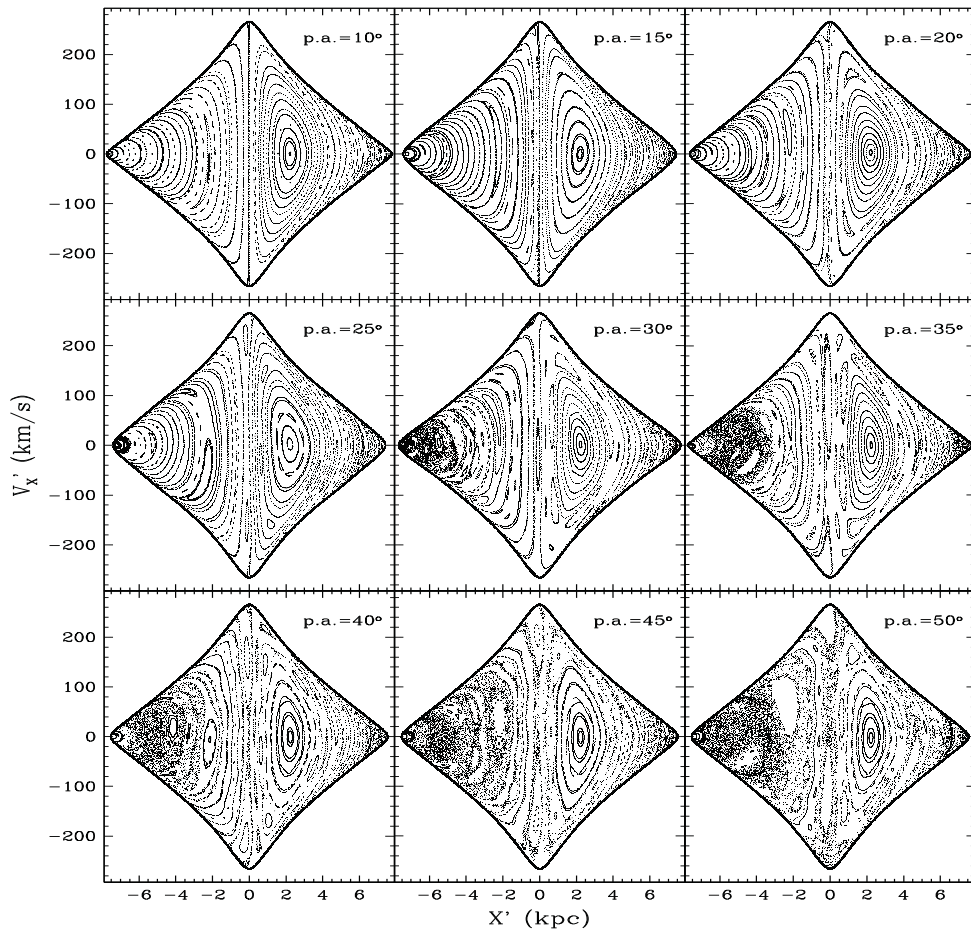


FIGURA 8.16: Lo mismo que en la Figura 8.14. La altura del brazo medida desde el plano medio del disco es de 0.2 kpc.

## 8.2. Velocidad Angular de los brazos

En esta Sección presentamos el efecto en la dinámica orbital del disco galáctico al variar la velocidad angular ( $\Omega_P$ ) de los brazos espirales en los diferentes tipos morfológicos de galaxias.

El modelo de masa para el fondo axisimétrico que se utilizó para cada tipo de galaxia se muestra en la Tabla 6.1. Los brazos espirales tiene una masa de 3% la masa del disco ( $M_{Br}/M_D = 0.03$ ). Para cada uno de los modelos, la velocidad angular,  $\Omega_P$ , va de -10 a -60 km s<sup>-1</sup> kpc<sup>-1</sup>. La  $|\Omega_P|$  máxima que utilizamos para los brazos espirales, 60 km s<sup>-1</sup> kpc<sup>-1</sup>, es equivalente a la velocidad de la barra Galáctica (Englmaier y Gerhard 1999; Fux 1999; Gerhard 2012).

En la Sección 3.2.5, se mencionó que la posición de las resonancias depende de  $\Omega_P$ , así como de la distribución de masa del potencial axisimétrico. Al cambiar  $\Omega_P$ , cambia la posición de las resonancias, por lo tanto, también el límite interno (determinada por la RIL) y externo (determinada por la RC) de los brazos espirales. En la Tabla 8.2 se muestra la posición de la resonancia interna de Lindblad (RIL), la resonancia 4/1 y la resonancia de corotación (RC) como función de  $\Omega_P$  para cada tipo de galaxia.

TABLA 8.2: Posición de las resonancias como función de  $\Omega_P$ .

$\Omega_P$ (km s <sup>-1</sup> kpc <sup>-1</sup> )	Sa			Sb			Sc		
	RIL <sup>(†)</sup>	4/1 <sup>(‡)</sup>	RC <sup>(§)</sup>	RIL	4/1	RC	RIL	4/1	RC
	(kpc)			(kpc)			(kpc)		
-10	9.93	20.25	30.23	8.62	17.74	26.13	4.0	11.32	16.78
-20	4.45	10.5	15.66	3.52	9.22	13.70	2.03	5.35	8.63
-30	3.0	7.04	10.6	2.0	6.04	9.38	1.5	3.34	5.7
-40	3.0	5.24	8.1	2.0	4.40	7.0	1.5	2.45	4.12
-50	3.0	4.07	6.51	2.0	3.42	5.64	1.5	1.92	3.19
-60	3.0	3.21	5.4	2.0	2.74	4.65	1.0	1.55	2.6

(†) Posición de la Resonancia Interna de Lindblad.

(‡) Posición de la Resonancia 4/1.

(§) Posición de la Resonancia de Corotación.

Al variar  $\Omega_P$ , tenemos diferentes  $E_J$ , ya que estamos cambiando la extensión de los brazos espirales. En la Tabla 8.3, se muestran las familias orbitales corridas ( $E_J$ ) para cada modelo, tratando de hacer un muestreo completo en  $x'$ .

TABLA 8.3: Familias orbitales para cada tipo morfológico.

$\Omega_P$ (km s <sup>-1</sup> kpc <sup>-1</sup> )	Sa	Sb $E_J$ (10 <sup>2</sup> km <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> )	Sc
-10	-3000	-2300	-1100
	-2750	-2200	-1000
	-2500	-2000	-950
	-2450	-1900	-900
	-2260	-1795	-820
-20	-3600	-2900	-1180
	-3350	-2650	-1120
	-3150	-2500	-1080
	-3000	-2330	-1040
	-2881	-2278	-1021
-30	-4000	-3300	-1290
	-3800	-2950	-1230
	-3600	-2800	-1200
	-3400	-2680	-1170
	-3280	-2584	-1144
-40	-4080	-3250	-1340
	-3850	-3150	-1300
	-3570	-3000	-1280
	-3650	-3370	-1250
	-3566	-2817	-1232
-50	-4150	-3300	-1370
	-4030	-3200	-1340
	-3950	-3100	-1320
	-3850	-3050	-1300
	-3805	-2995	-1291
-60	-4230	-3350	-1425
	-4150	-3300	-1405
	-4080	-3250	-1385
	-4040	3180	-1365
	-4010	3145	-1345

En la Figura 8.17, se muestra un mosaico de diagramas de Poincaré para un modelo

de masa de una galaxia tipo Sa (Tabla 6.1). Se mantiene el mismo fondo axisimétrico, sólo variamos la velocidad angular de los brazos espirales (por lo que cambia el límite interno y externo de los brazos -Tabla 8.2). La masa de los brazos es de 3 % la masa del disco y el ángulo de enrollamiento es de  $7^\circ$ . Hicimos un barrido en  $E_J$  para cada velocidad angular (Tabla 8.3). Para  $\Omega_P = -10 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (primera línea de los diagramas), el comportamiento orbital es muy ordenado, aunque aparecen algunas islas resonantes ( $E_J = -2500 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ,  $-2350 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ). Incrementando la velocidad angular a  $\Omega_P = -20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (segunda línea de los diagramas), las órbitas siguen siendo simples y ordenadas, pero cerca de corotación ( $E_J = -2881 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) ya se observa una pequeña región de caos. Para  $\Omega_P = -30 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (tercera línea de diagramas) en corotación incrementa la región de caos, pero se encuentra muy confinada por las órbitas ordenadas. En  $\Omega_P = -40 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (cuarta línea de los diagramas), sigue dominando el orden a  $E_J$  muy ligadas gravitacionalmente (extensiones pequeñas de  $x'$ ), aunque para corotación ( $E_J = -3566 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ), incrementan las regiones caóticas. Para  $\Omega_P = -50 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (penúltima línea de diagramas), ya se observan órbitas más complejas, algunas islas resonantes y en corotación ( $E_J = -3805 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) el espacio fase permitido para las órbitas prógradas se va llenando más densamente por órbitas caóticas, además de que desaparece la periódica principal. Finalmente, para un caso extremo (considerando la velocidad de una barra),  $\Omega_P = -60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (última línea de los diagramas), se observa una mayor riqueza en órbitas; corotación ( $E_J = -4010 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) está cerca del centro, por lo que la longitud del brazo es pequeña. En este diagrama la región de caos es muy densa aunque confinada, no se observa una órbita periódica principal.

Una vez analizado el espacio fase con diagramas de Poincaré, en la Figura 8.18, se muestran las órbitas periódicas, la posición de la respuesta máxima en densidad (cuadros rellenos) y el potencial espiral impuesto (cuadros vacíos) que corresponden a un modelo de masa para una galaxia tipo Sa variando  $\Omega_P$ . Para velocidades de  $-10$  a  $-40 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ , la respuesta máxima en densidad sigue muy bien al patrón de brazos espirales impuesto hasta casi corotación. Para  $\Omega_P = -50$  y  $-60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ , el brazo llega más rápido a corotación (Tabla 8.2) y no se encuentran suficientes órbitas periódicas que apoyen a la espiral por lo tanto no es posible calcular la respuesta máxima en densidad. Entonces, es posible tener un modelo de masa para una galaxia tipo Sa donde el ángulo

de enrollamiento sea  $\sim 7^\circ$  con una velocidad absoluta  $|\Omega_P| \lesssim 40 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  que esté apoyado por órbitas periódicas.

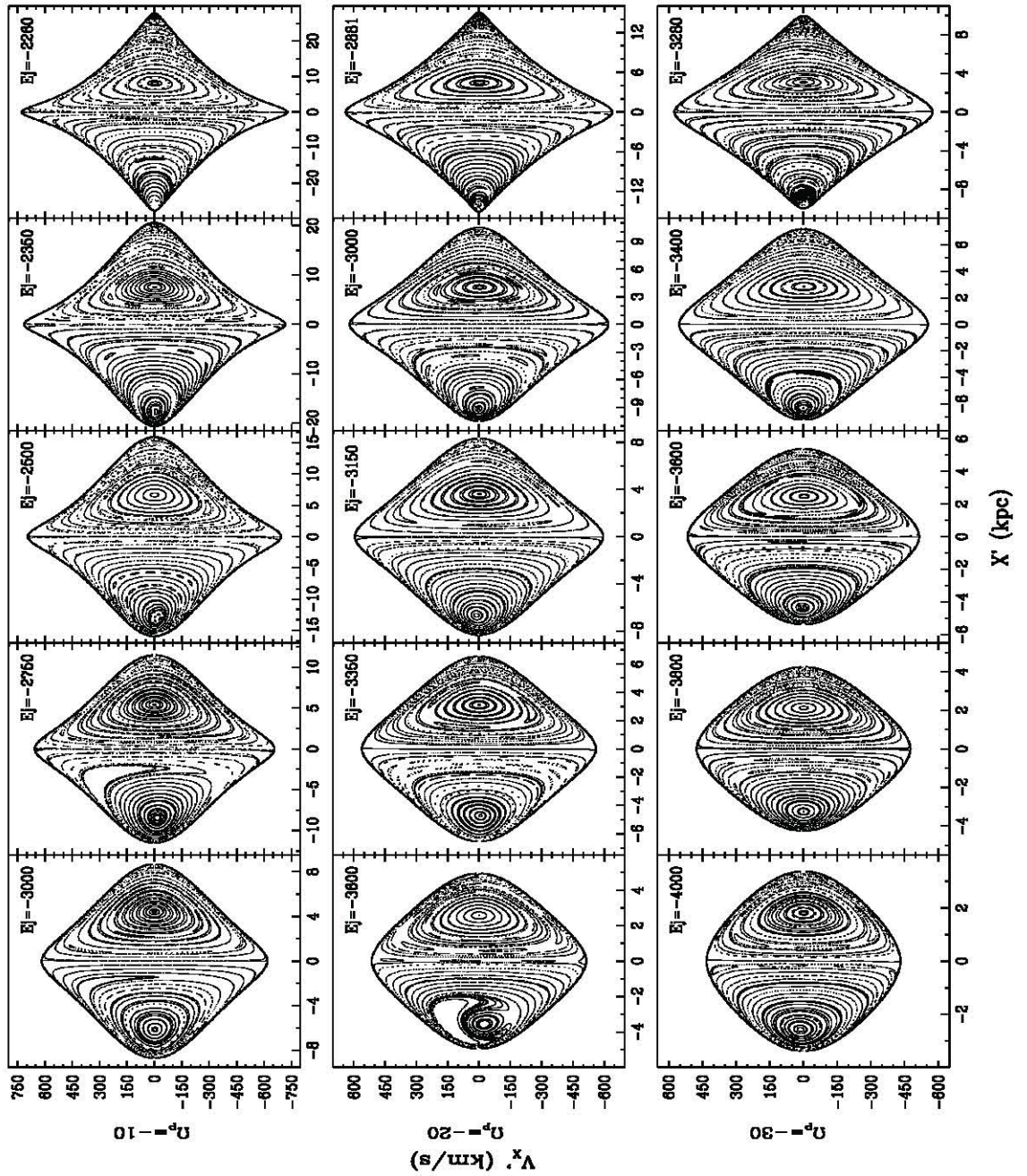


FIGURA 8.17: (Primera parte) Diagramas de Poincaré para un modelo de masa de una galaxia tipo Sa. La velocidad angular ( $\Omega_p$ ) varía de -10 a -60. La razón  $M_{Br}/M_D = 0.03$  y el ángulo de enrollamiento es de  $7^\circ$ .  $\Omega_p$  está dada en unidades de  $\text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$  y  $E_J$  está dada en unidades de  $10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ .

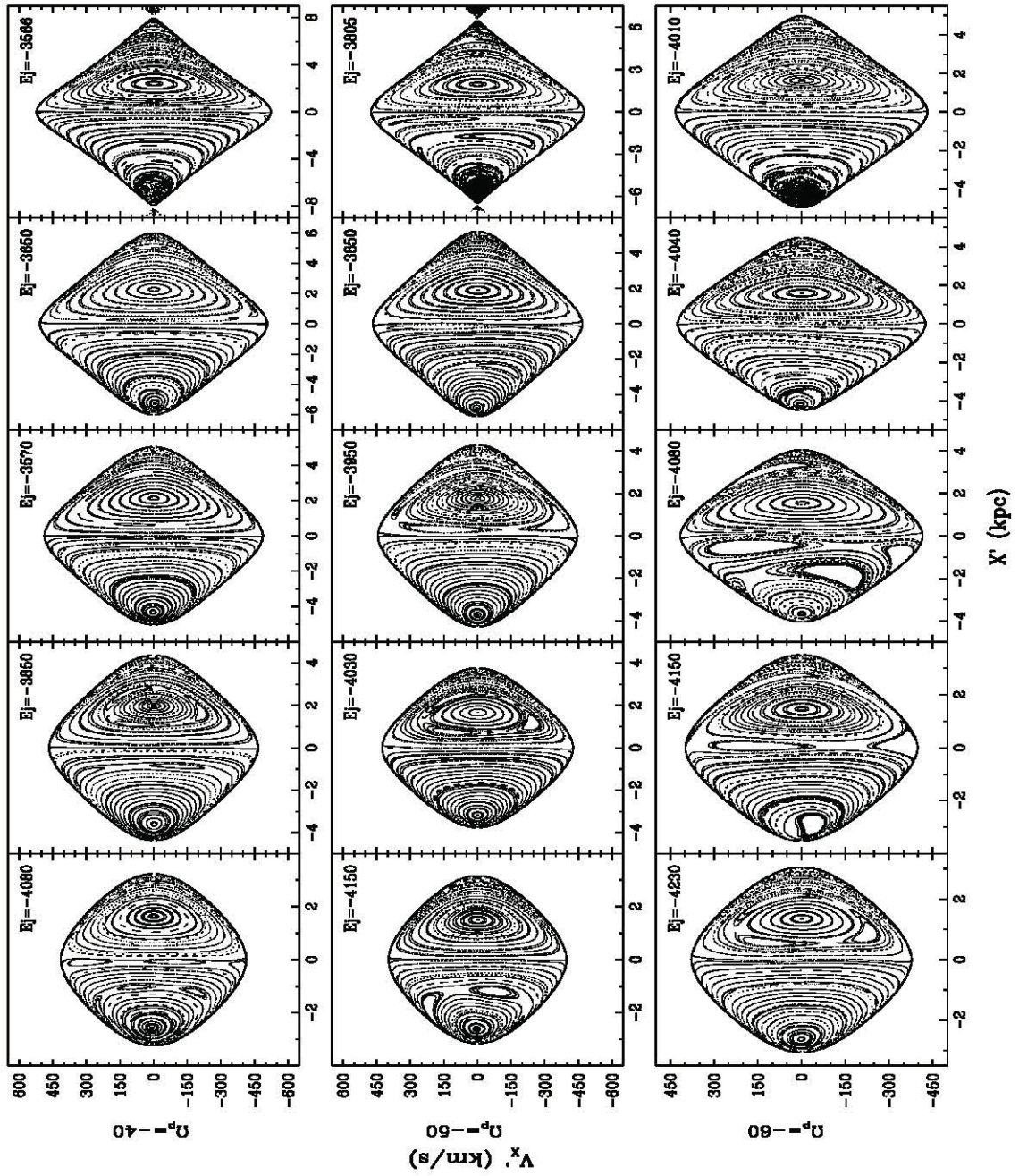


FIGURA 8.17: (Continuación)



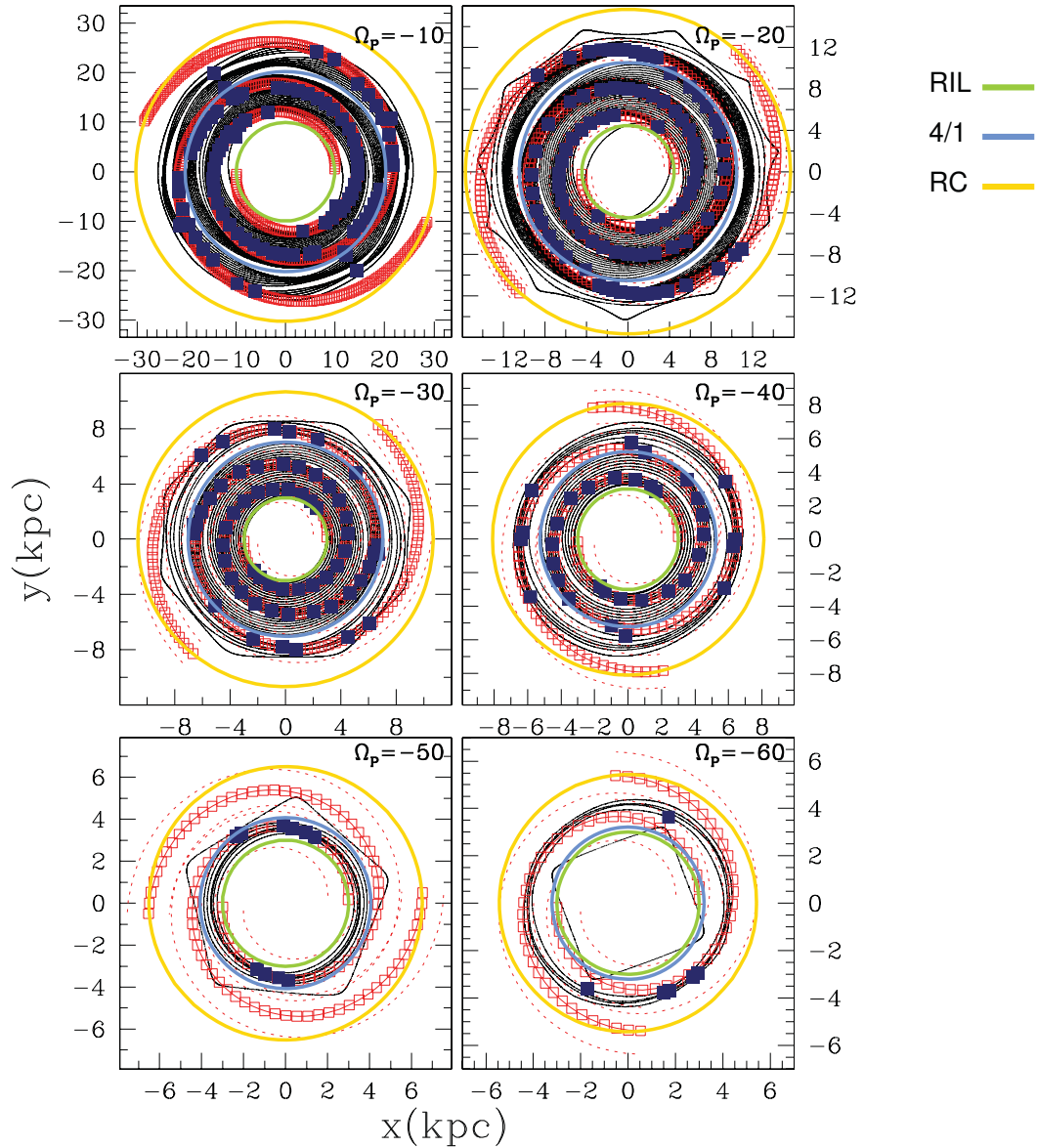


FIGURA 8.18: Órbitas periódicas, posición de los brazos impuestos (cuadros vacíos) y la respuesta máxima en densidad (cuadros rellenos), para el modelo de una galaxia tipo Sa con diferentes  $\Omega_P$ , de -10 a -60. La razón  $M_{Br}/M_D = 0.03$  y el ángulo de enrollamiento es de  $7^\circ$ .  $\Omega_P$  está dada en unidades de  $\text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$ . Las posiciones de las resonancias (RIL, 4/1 y RC) se muestran en la Tabla 8.2.

En la Figura 8.19, se muestra un mosaico de diagramas de Poincaré para un modelo de masa de una galaxia tipo Sb (Tabla 6.1), con ángulo de enrollamiento de  $18^\circ$ , la masa del brazo espiral es de 3 % la masa del disco galáctico. Variamos la velocidad angular  $\Omega_P$

de  $-10$  a  $-60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  y hacemos un barrido de  $E_J$  en el espacio fase (Tabla 8.3). En  $\Omega_P = -10 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (primera línea de los diagramas), se observa que la mayor parte del espacio fase está dominado por órbitas ordenadas con conjuntos de órbitas caóticas librando alrededor de éstas ( $E_J = -2300 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ,  $-2200 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ), conforme nos acercamos a corotación ( $E_J = -1795 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) las órbitas se vuelven más complejas e incrementa el caos, son más evidentes las islas resonantes pero se conservan las órbitas periódicas principales. Para  $\Omega_P = -20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (segunda línea de los diagramas), domina el comportamiento ordenado con algunas regiones de órbitas caóticas confinadas librando alrededor de la órbita periódica principal, al acercarse a corotación ( $E_J = -2276 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) tenemos una región de caos restringida por las órbitas ordenadas. Con una velocidad  $\Omega_P = -30 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (tercera línea de los diagramas), a una distancia menor  $x'$  ( $E_J = -3300 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ,  $-2950 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ), las órbitas son muy simples y completamente ordenadas. Al aumentar la extensión en  $x'$  ( $E_J = -2800 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ,  $-2680 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) sigue dominando el orden pero obtenemos familias orbitales más complicadas, y en corotación ( $E_J = -2584 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) se da una región caótica que no llena el espacio fase permitido para las órbitas prógradas. Para  $\Omega_P = -40 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (cuarta línea de los diagramas), en las energías más ligadas gravitacionalmente ( $E_J = [-3250 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ,  $-3370 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}]$ ) dominan las órbitas ordenadas y en corotación ( $E_J = -2817 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) crece la región de caos delimitada por órbitas ordenadas pero desaparece la órbita periódica principal. En  $\Omega_P = -50$  (penúltima línea de los diagramas), en corotación ( $E_J = -2995 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) la región de caos se llena densamente y desaparece la órbita periódica principal. Para  $\Omega_P = -60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (última línea de diagramas), en corotación ( $E_J = -3145 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) el caos llena gran parte del espacio fase permitido para las órbitas prógradas y no se observa la órbita periódica principal.

Al igual que para el modelo de masa de una galaxia tipo Sa, se calcularon las órbitas periódicas para un modelo de masa de una galaxia tipo Sb, éstas se muestran en la Figura 8.20. Asimismo, en esta Figura se presenta la posición de la respuesta máxima en densidad (cuadros rellenos) y el potencial espiral impuesto (cuadros vacíos). Como en los diagramas de Poincaré, para las órbitas periódicas incrementamos la velocidad angular de  $-10$  a  $-60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ . En esta Figura vemos que para  $\Omega_P = -10$ ,  $-20$  y  $-30 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  la respuesta máxima en densidad sigue al brazo impuesto más allá

de la resonancia 4/1. En  $\Omega_P = -40 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  la respuesta máxima en densidad apoya el brazo sólo hasta la resonancia 4/1. Para  $\Omega_P = -50$  y  $-60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ , no se encuentran suficientes órbitas periódicas y las que hay apoyan al brazo en una pequeña extensión. Entonces, es posible tener un modelo de masa para una galaxia tipo Sb donde el ángulo de enrollamiento sea  $\sim 18^\circ$  con una velocidad absoluta  $|\Omega_P| < 40 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  apoyado por órbitas periódicas.

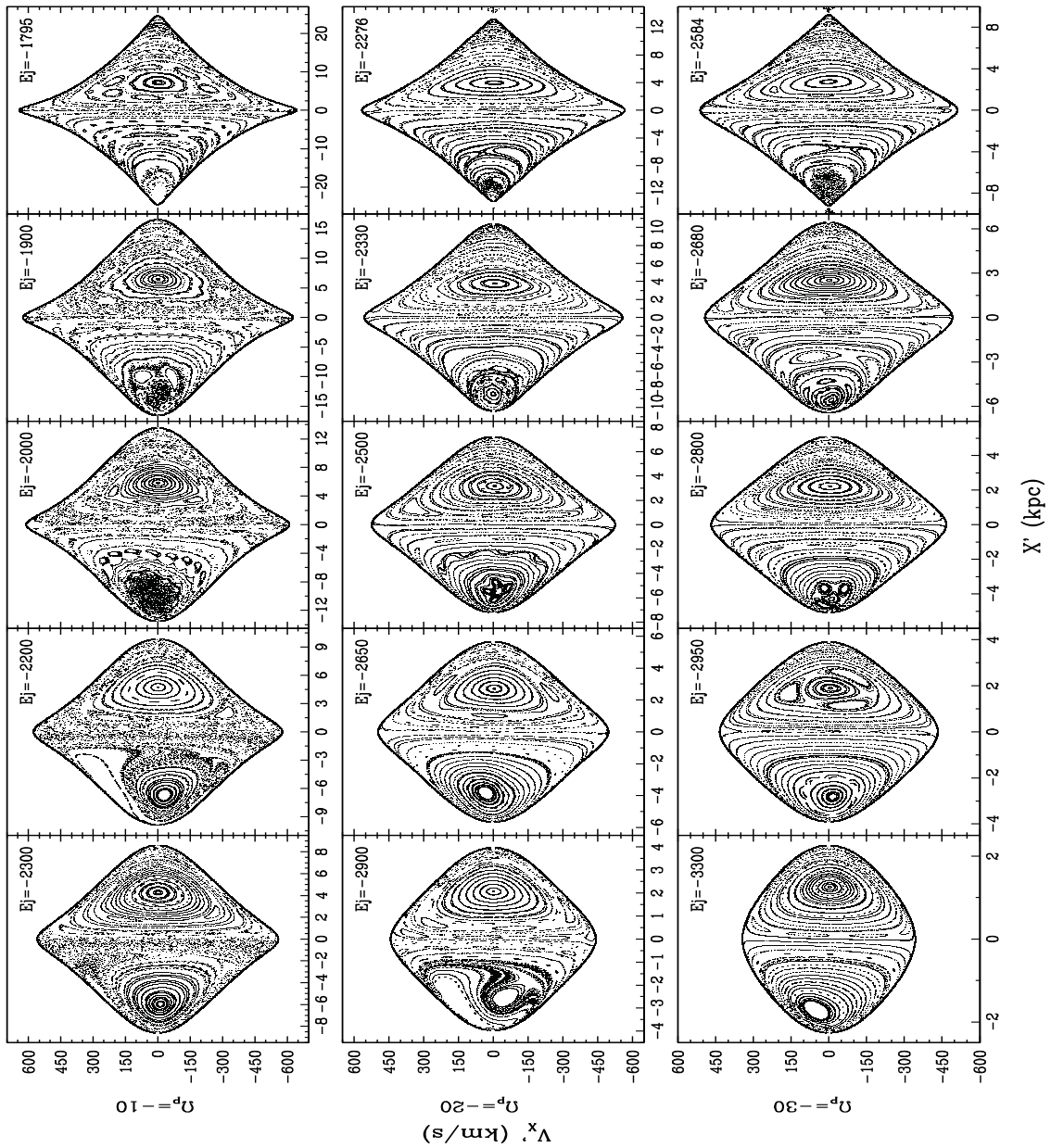


FIGURA 8.19: (Primera parte) Lo mismo que en la Figura 8.17 pero con un modelo de masa para una galaxia tipo Sb y ángulo de enrollamiento de  $18^\circ$ .

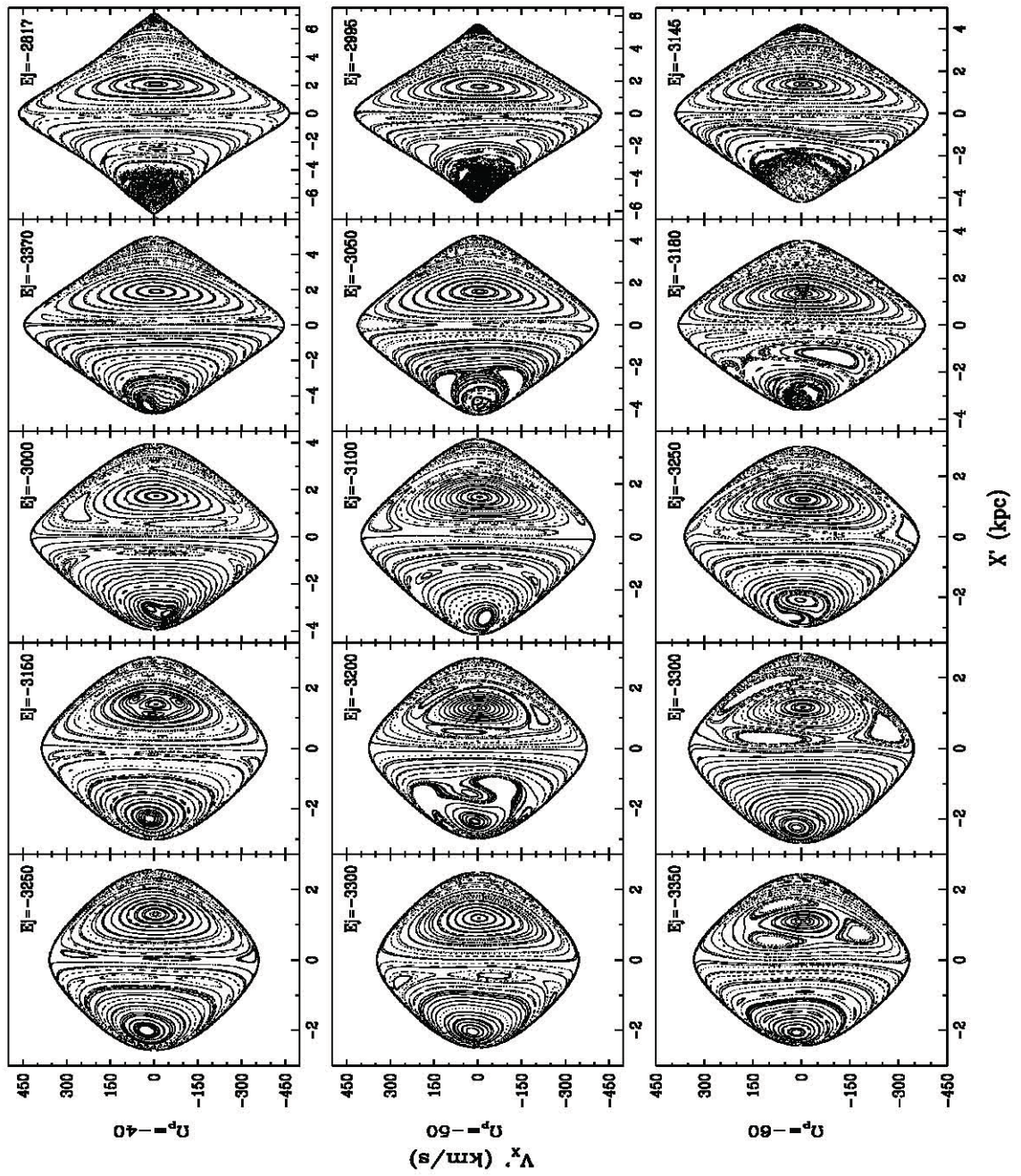


FIGURA 8.19: (Continuación)

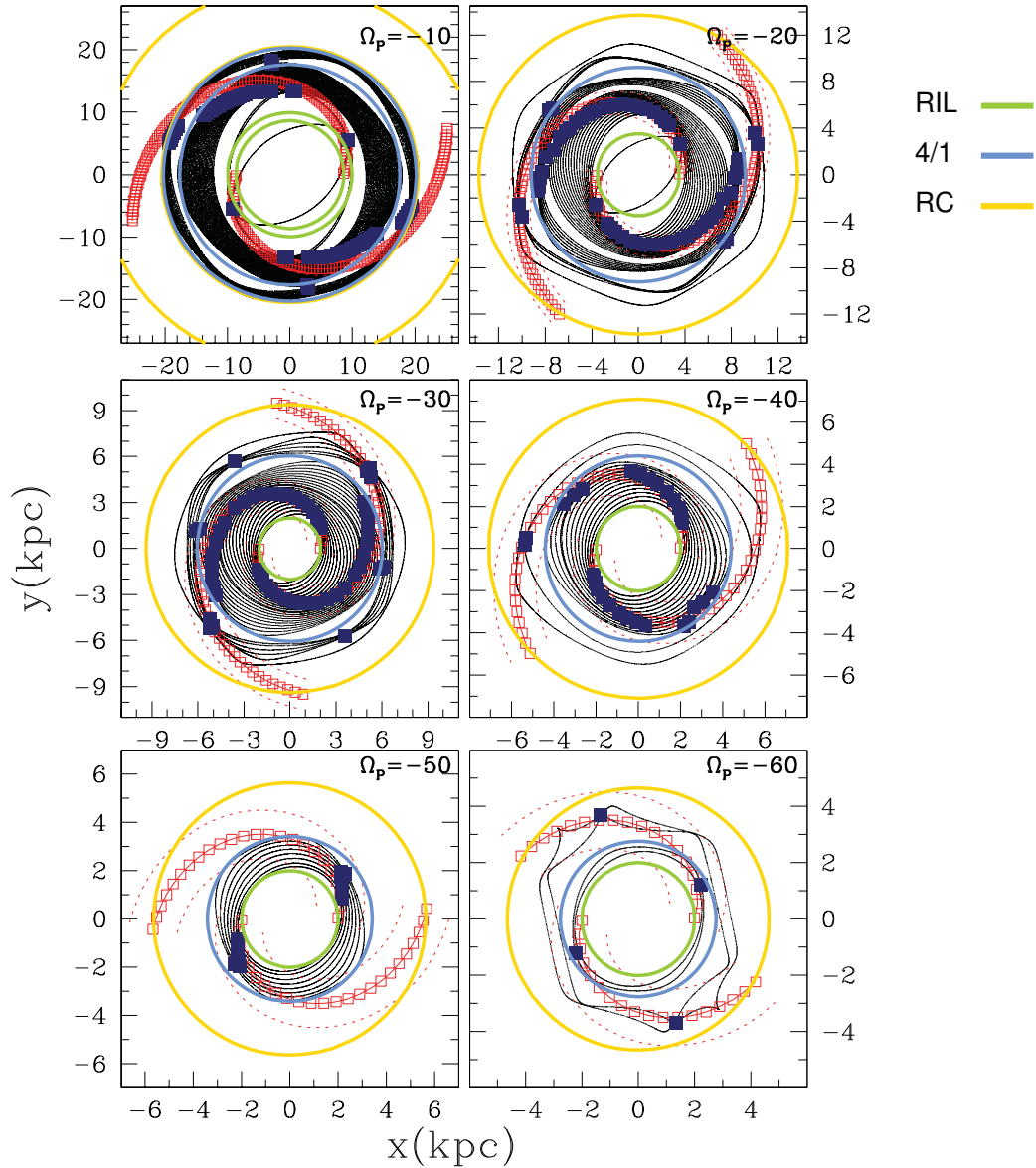


FIGURA 8.20: Lo mismo que en la Figura 8.18 pero con un modelo de masa para una galaxia tipo Sb y ángulo de enrollamiento de  $18^\circ$ . Las posiciones de las resonancias (RIL, 4/1 y RC) se muestran en la Tabla 8.2.

En la Figura 8.21 se muestra un mosaico de diagramas de Poincaré para una distribución de masa de una galaxia tipo Sc (Tabla 6.1), en donde la masa de los brazos es  $M_{Br}/M_D = 0.03$  y el ángulo de enrollamiento es de  $25^\circ$ , los parámetros anteriores se mantienen fijos, sólo modificamos la velocidad angular de los brazos espirales en el inter-

valo  $[-10, -60] \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ . Para una velocidad  $\Omega_P = -10 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (primera línea de los diagramas), la mayor parte del espacio fase para las órbitas prógradas presenta caos ( $E_J = -1100 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}, -1000 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) que rodea a las órbitas ordenadas, sin penetrar hasta la órbita periódica principal y cerca de corotación (en  $E_J = -820 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) existe una región de caos contenida por órbitas ordenadas, que son las que dominan. Al incrementar la velocidad a  $\Omega_P = -20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (segunda línea de los diagramas), se observa una mayor riqueza en la morfología orbital e islas resonantes ( $E_J = -1120 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) y, cerca de corotación ( $E_J = -1021 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) se nota una región de caos muy confinada por las órbitas ordenadas. Para  $\Omega_P = -30 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (tercera línea de los diagramas), se ve caos que rodea a la órbita periódica principal ( $E_J = -1170 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) y que está contenido en un espacio fase pequeño y, para corotación ( $E_J = -1144 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ) las órbitas caóticas cubren un espacio fase mayor. Con  $\Omega_P = -40 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (cuarta línea de diagramas), en energías muy ligadas gravitacionalmente ( $-1340 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}, -1300 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ), no se observan regiones de caos aunque las órbitas son complejas. En  $E_J = -1250 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$  se ve una zona llena densamente de órbitas caóticas y, en corotación ( $E_J = -1232 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ), la mayor parte del espacio fase prógrado se encuentra lleno de órbitas caóticas y no se observa una órbita periódica principal. En  $\Omega_P = -50 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (penúltima línea de los diagramas), el espacio fase prógrado permitido está dominado por órbitas caóticas sin la presencia de una órbita periódica principal. Finalmente, para  $\Omega_P = -60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  (última línea de los diagramas), en corotación casi todo el espacio fase permitido para las órbitas prógradas es cubierto de órbitas caóticas.

Ahora veamos las órbitas periódicas para un modelo de masa de una galaxia tipo Sc que se muestra en la Figura 8.22; el ángulo de enrollamiento es de  $25^\circ$  y la masa de los brazos es de 3% de la masa del disco, sólo modificamos la velocidad angular de los brazos. En esta figura se observa la posición de la respuesta máxima en densidad (cuadros rellenos) y el potencial espiral impuesto (cuadros vacíos), para  $\Omega_P = -10$  a  $-30 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ , la respuesta máxima en densidad sigue al potencial impuesto, aunque la respuesta en densidad se encuentra ligeramente adelante del potencial impuesto formando un ángulo de enrollamiento menor. Como se mencionó en la Sección 8.1.1, si el ángulo de enrollamiento es  $> 20^\circ$ , los brazos se pueden explicar mejor como transientes. Para  $\Omega_P = -40$  a  $-60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ , las órbitas periódicas que se encuentran no son

suficientes para dar soporte a los brazos espirales y por lo tanto no es posible encontrar la respuesta máxima en densidad. Con lo anterior, es posible tener un modelo de masa para una galaxia tipo Sc, con ángulo de enrollamiento de  $\sim 25^\circ$  y con una velocidad absoluta  $\Omega_P \lesssim 30 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  que esté apoyado por órbitas periódicas.



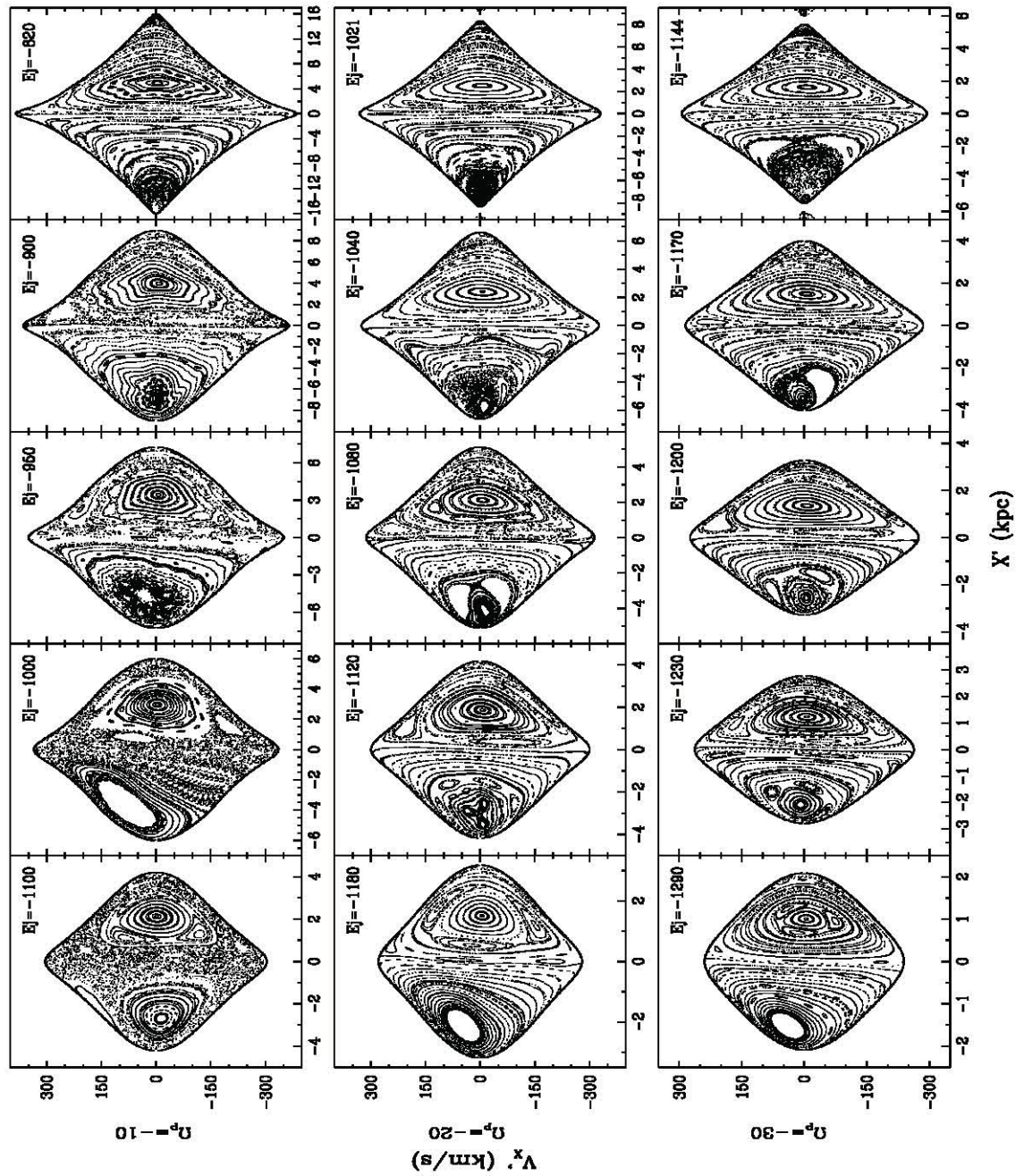


FIGURA 8.21: (Primera parte) Lo mismo que en la Figura 8.17 pero con un modelo de masa para una galaxia tipo Sc y ángulo de enrollamiento de  $25^\circ$ .

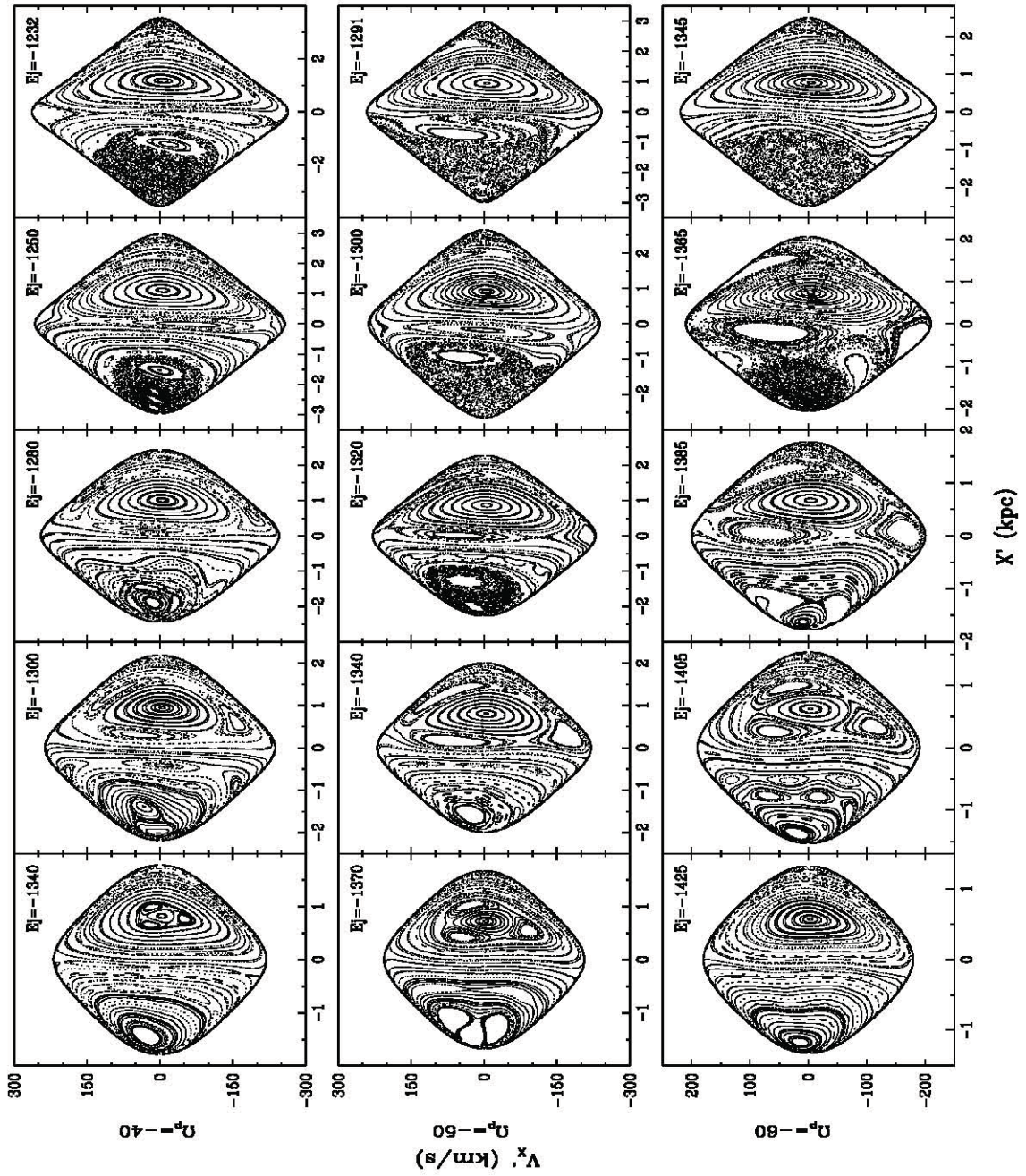


FIGURA 8.21: (Continuación)

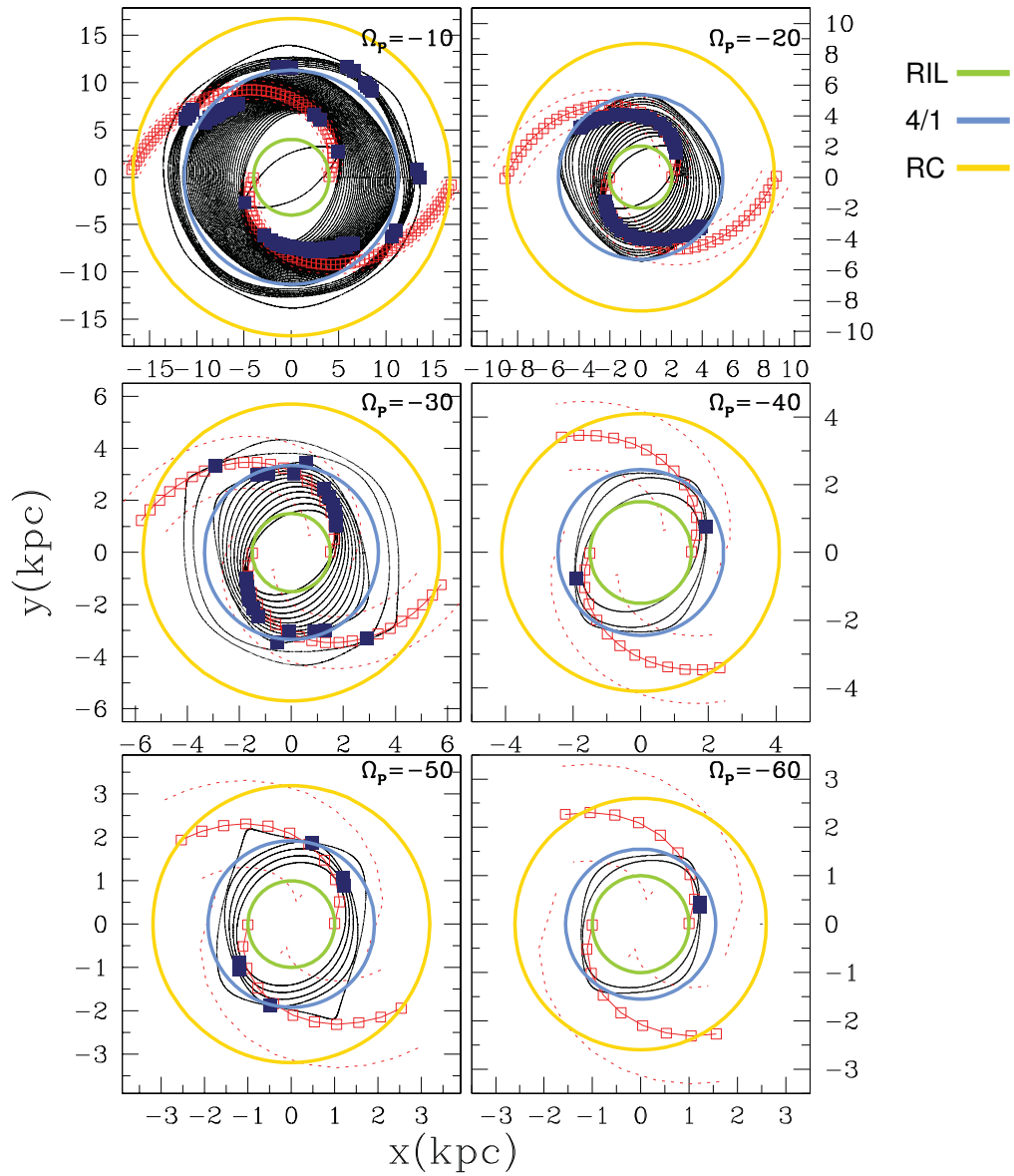


FIGURA 8.22: Lo mismo que en la Figura 8.18 pero con un modelo de masa para una galaxia tipo Sc y ángulo de enrollamiento de  $25^\circ$ . Las posiciones de las resonancias (RIL, 4/1 y RC) se muestran en la Tabla 8.2.

### 8.3. Masa de los Brazos

En las Secciones anteriores analizamos el efecto de los brazos espirales sobre la dinámica estelar del disco galáctico al modificar parámetros estructurales y dinámicos de los brazos espirales, tales como el ángulo de enrollamiento (Sección 8.1) y la velocidad angular ( $\Omega_P$  -Sección 8.2), dejando fija la distribución de masa para una galaxia tipo Sa, Sb y Sc.

En esta Sección presentamos un estudio del comportamiento de la dinámica orbital sobre el plano galáctico variando la masa de los brazos espirales para diferentes modelos galácticos (Sa, Sb y Sc). El análisis se hace en el espacio fase (diagramas de Poincaré), para estudiar hasta dónde el comportamiento caótico penetra hasta las órbitas periódicas principales destruyéndolas y con órbitas periódicas para encontrar hasta dónde el brazo es apoyado por las órbitas. La masa de los brazos va de  $M_{Br}/M_D = 0.01$  a  $0.15$ . En el caso donde la masa es de 15 % la masa del disco, estamos hablando de una masa proporcional o incluso mayor a la masa de la barra Galáctica, de  $\sim 10\%$  la masa del disco (Weiner y Sellwood 1999).

En la Figura 8.23 se muestra un mosaico de diagramas de Poincaré considerando una distribución de masa para una galaxia tipo Sa (Tabla 6.1), el ángulo de enrollamiento es de  $10^\circ$ ,  $\Omega_P = -30 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  y  $E_J = -3278 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$  que corresponde a corotación. Para una masa de  $M_{Br}/M_D = 0.01$ , se observa un comportamiento completamente ordenado y las órbitas son muy simples. Incrementamos la masa a  $M_{Br}/M_D = 0.03$ , donde el orden domina, aunque nace una pequeña región de caos alrededor de la órbita periódica principal pero esta región está contenida por órbitas ordenadas. En  $M_{Br}/M_D = 0.05$ , el caos se encuentra en un espacio fase mayor, aún no penetra hasta la órbita periódica principal. Para  $M_{Br}/M_D = 0.07$  hay varias órbitas ordenadas conteniendo al caos, pero crece suavemente el espacio fase que cubre. Para  $M_{Br}/M_D = 0.10$ , desaparece la órbita periódica principal. En  $M_{Br}/M_D = 0.15$ , el caos cubre la mayor parte del espacio fase.

Ahora veamos las órbitas periódicas que se muestran en la Figura 8.24, considerando los mismos parámetros tomados en la Figura 8.23. Además en la Figura 8.24 se muestra la respuesta máxima en densidad (cuadros rellenos) y el potencial espiral impuesto (cuadros vacíos). Para el caso donde  $M_{Br}/M_D = 0.01$ , la respuesta máxima en densidad

sigue muy bien al potencial impuesto casi hasta corotación, el ángulo de enrollamiento es pequeño al igual que la masa, por lo que el brazo es muy débil.

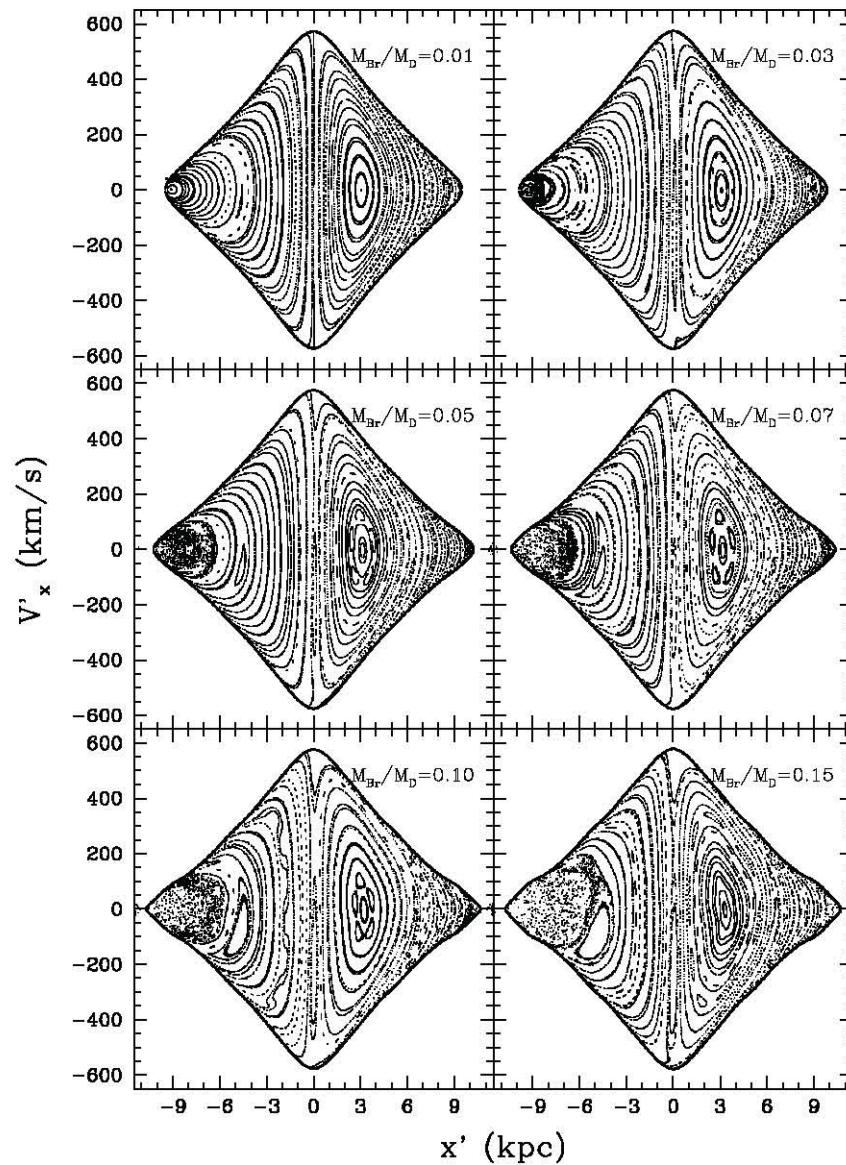


FIGURA 8.23: Diagramas de Poincaré para un modelo de masa de una galaxia tipo Sa, variando la masa de los brazos espirales,  $M_{Br}/M_D = 0.01$  a  $0.15$ . Se eligió una  $E_J = -3278 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$  y un ángulo de enrollamiento de  $10^\circ$ .

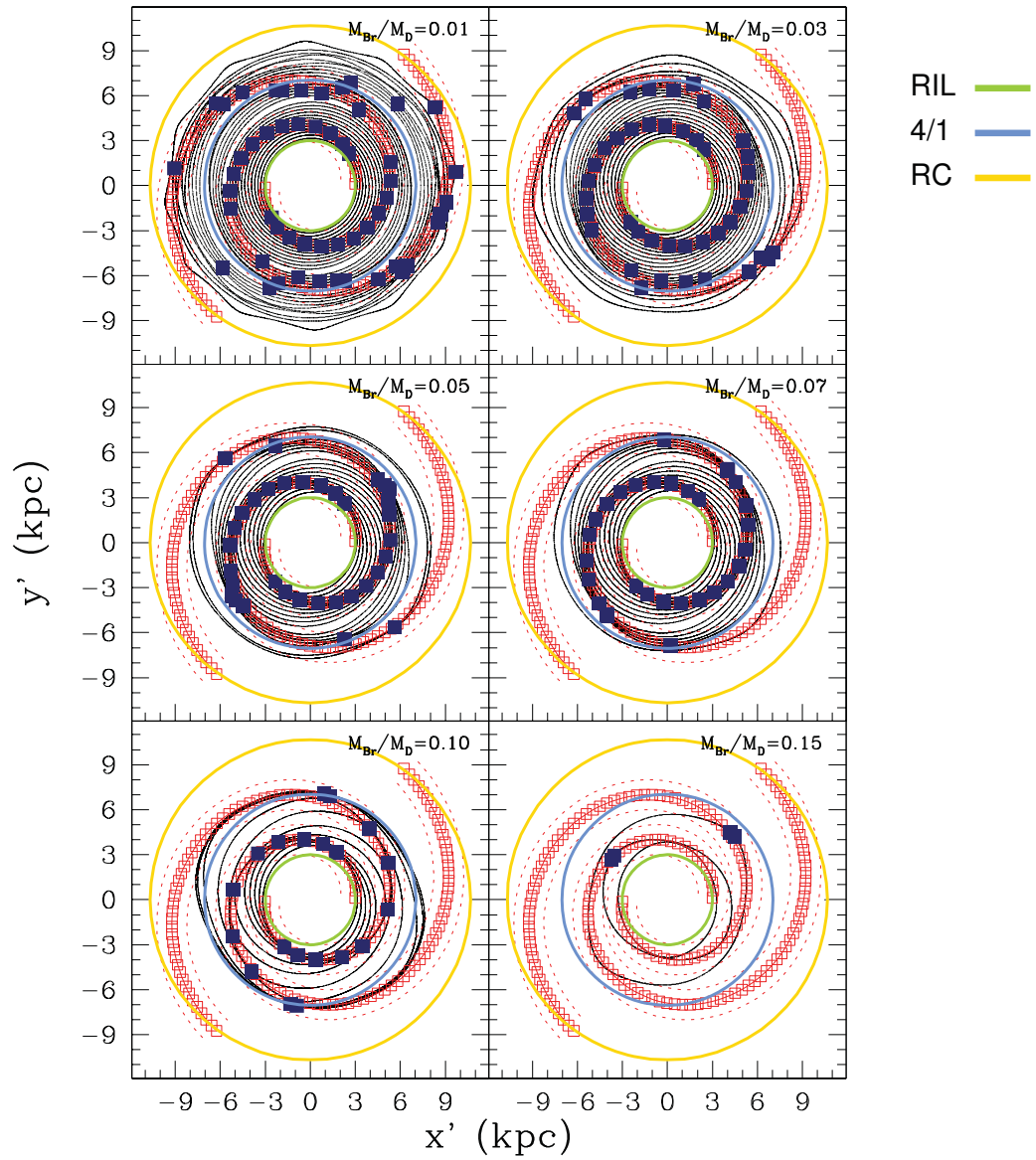


FIGURA 8.24: Órbitas periódicas, posición de los brazos impuestos (cuadros vacíos) y de la respuesta máxima en densidad (cuadros rellenos), para el modelo de una galaxia tipo Sa variando la masa de los brazos espirales,  $M_{Br}/M_D = 0.01$  a  $0.15$ . Se escogió un ángulo de enrollamiento de  $10^\circ$ . Las resonancias están en 3.0 kpc (RIL), 7.04 kpc (4/1) y 10.67 kpc (RC).

En  $M_{Br}/M_D = 0.03$  y  $0.05$  la respuesta máxima en densidad sigue al patrón impues-

to, ya no llega a corotación pero pasa la resonancia 4/1 ( $\sim 7$  kpc). Con  $M_{Br}/M_D = 0.07$  la respuesta máxima sigue a los brazos impuestos aproximadamente hasta la resonancia 4/1. Para  $M_{Br}/M_D = 0.10$ , la respuesta en densidad sólo apoya al brazo hasta antes de la resonancia 4/1. Para  $M_{Br}/M_D = 0.15$ , ya no se encuentra la órbita periódica principal.

Por lo tanto, es posible tener un modelo con una distribución de masa para una galaxia tipo Sa (Tabla 6.1), un ángulo de enrollamiento de  $10^\circ$ ,  $\Omega_P = -30 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  y una masa  $M_{Br}/M_D \lesssim 0.10$  que sea apoyado por las órbitas periódicas.

En la Figura 8.25, se muestra un mosaico de diagramas de Poincaré considerando una distribución de masa para una galaxia tipo Sb (Tabla 6.1) que se queda fija (sólo variamos la masa de los brazos), donde el ángulo de enrollamiento es de  $15^\circ$ ,  $\Omega_P = -25 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  y se considera la  $E_J$  correspondiente a corotación ( $E_J = -3278 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ ). En esta Figura se observa que para  $M_{Br}/M_D = 0.01$  las órbitas son muy simples y ordenadas. En  $M_{Br}/M_D = 0.03$  nace el caos pero en una región muy pequeña. Al seguir incrementando la masa del brazo, se observa cómo el espacio fase cubierto por las órbitas caóticas va creciendo también. A partir de  $M_{Br}/M_D = 0.07$  las órbitas periódicas principales se destruyen y en  $M_{Br}/M_D = 0.15$  el caos domina la mayor parte del espacio fase prógrada.

Las órbitas periódicas que corresponden a un modelo de masa de una galaxia tipo Sb se muestran en la Figura 8.26, con un ángulo de enrollamiento de  $15^\circ$ , los cuadros rellenos son la posición de la respuesta máxima en densidad y los vacíos corresponden al potencial espiral impuesto. Para  $M_{Br}/M_D = 0.01$ , la respuesta máxima en densidad sigue al patrón impuesto hasta casi llegar a corotación, en este caso el brazo es muy débil. Para  $M_{Br}/M_D = 0.03$  y  $0.05$ , la respuesta máxima en densidad coincide con el brazo impuesto más allá de la resonancia 4/1 ( $\sim 7.3$  kpc), aunque no llega hasta corotación. A partir de  $M_{Br}/M_D = 0.07$  en adelante, las órbitas periódicas que se encuentran no apoyan a los brazos espirales.

Con el análisis anterior, es posible tener un modelo de masa para una galaxia tipo Sb, con un ángulo de enrollamiento de  $15^\circ$ ,  $\Omega_P = -25 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  y con una masa  $M_{Br}/M_D \lesssim 0.05$  que sea apoyado por las órbitas periódicas.

Finalmente, analizaremos el efecto que tiene variar la masa de los brazos espirales en una distribución de masa para una galaxia tipo Sc (Tabla 6.1), el ángulo de

enrollamiento es de  $30^\circ$  y  $\Omega_P = -20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ .

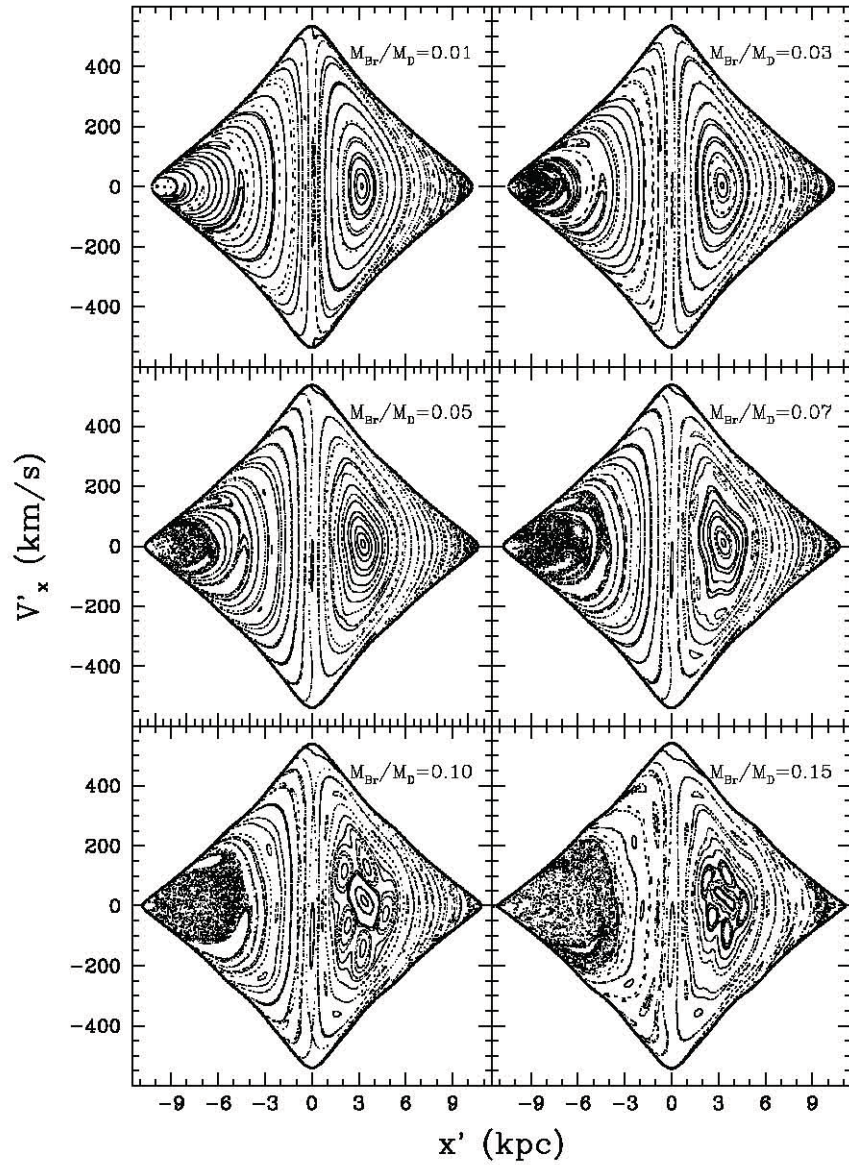


FIGURA 8.25: Lo mismo que en la Figura 8.23 pero para el modelo de masa de una galaxia tipo Sb, una  $E_J = -2445 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$  y un ángulo de enrollamiento de  $15^\circ$ .



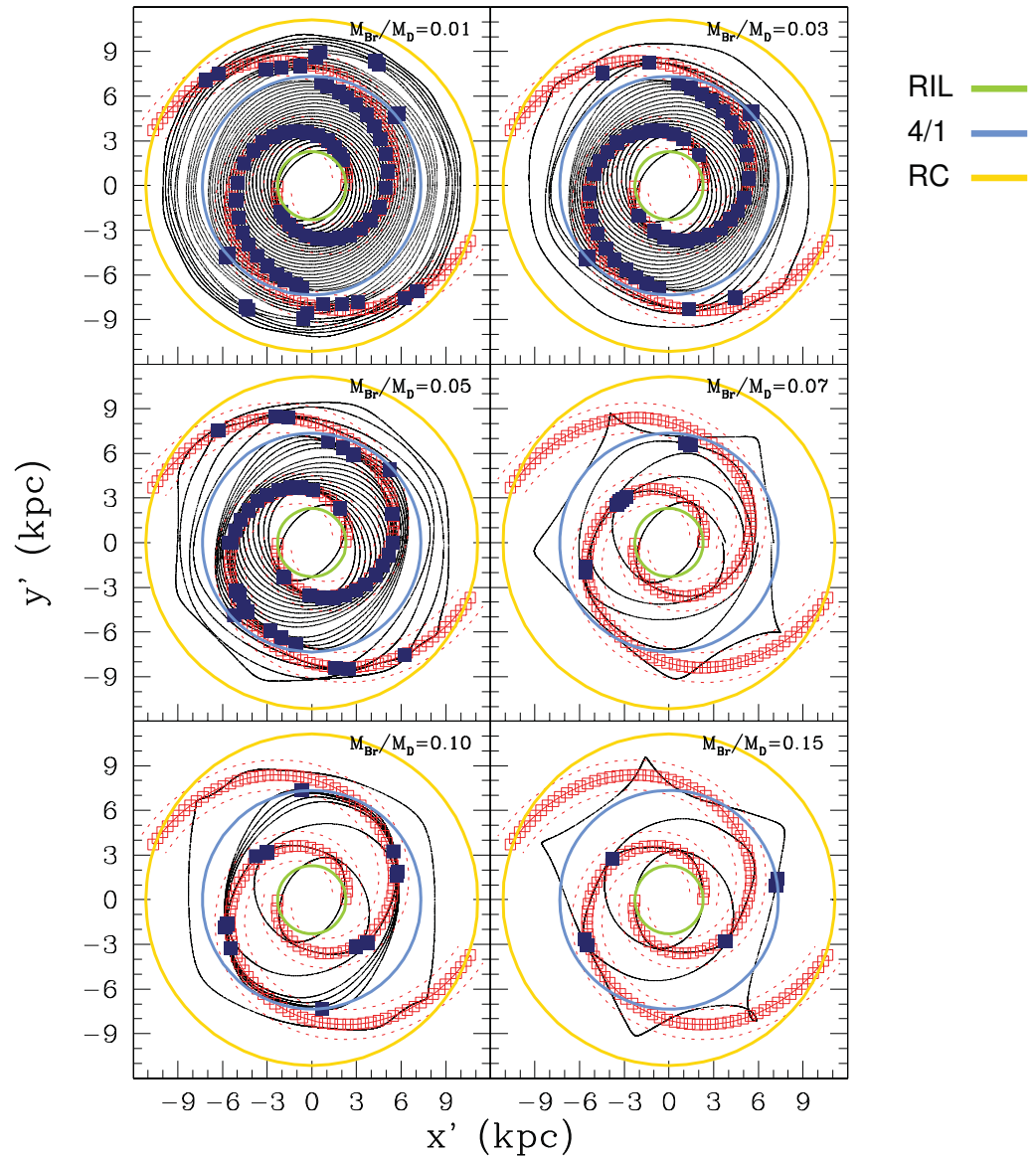


FIGURA 8.26: Lo mismo que en la Figura 8.24 pero el modelo de una galaxia tipo Sb y un ángulo de enrollamiento de  $15^\circ$ . Las resonancias están en 2.29 kpc (RIL), 7.34 kpc (4/1) y 11.14 kpc (RC).

En la Figura 8.27, se muestra un mosaico de diagramas de Poincaré para un modelo de masa de una galaxia tipo Sc,  $E_J = -1021 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$  que corresponde a energías cercanas a corotación. En  $M_{Br}/M_D = 0.01$ , dominan las órbitas ordenadas, aunque la

masa es muy baja, se presenta una región de caos. Para  $M_{Br}/M_D = 0.03$ , el espacio fase dominado por órbitas caóticas crece pero aún no se destruye la órbita periódica principal. En  $M_{Br}/M_D = 0.05$ , el caos ya no sólo domina la zona prógrada sino también la retrógrada. A partir de  $M_{Br}/M_D = 0.07$  en adelante, ya casi desaparecieron las órbitas ordenadas en el espacio fase, tanto en la región prógrada como en la retrógrada.

Las órbitas periódicas que se muestran en la Figura 8.28, pertenecen a un modelo de masa de una galaxia tipo Sc, con un ángulo de enrollamiento de  $30^\circ$ , los cuadros rellenos son la posición de la respuesta máxima en densidad y los cuadros vacíos corresponden al potencial espiral impuesto. Para  $M_{Br}/M_D = 0.01$ , la respuesta máxima en densidad sigue el potencial impuesto hasta casi corotación. Se observa cómo la respuesta en densidad se cierra poco y después regresa a donde está el brazo impuesto. En  $M_{Br}/M_D = 0.03$ , las órbitas periódicas sólo llegan hasta la resonancia 4/1 ( $\sim 5.3$  kpc), aquí ya es evidente que la respuesta en densidad forma un ángulo de enrollamiento distinto al impuesto (menor). Esto se debe a que estamos en el régimen donde las espirales son transientes, ya que el ángulo de enrollamiento del patrón espiral es  $> 20^\circ$ . Para  $M_{Br}/M_D = 0.05$ , las órbitas periódicas llegan sólo hasta la resonancia 4/1, pero la respuesta en densidad no llega hasta ahí. A partir de  $M_{Br}/M_D = 0.05$ , las órbitas periódicas que se encuentran no apoyan los brazos espirales y no es posible calcular la respuesta máxima en densidad.

Por lo tanto, las órbitas periódicas apoyan un modelo de masa de una galaxia tipo Sc con un ángulo de enrollamiento de  $30^\circ$ ,  $\Omega_P = -20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  y una masa de los brazos  $M_{Br}/M_D \lesssim 0.03$ .

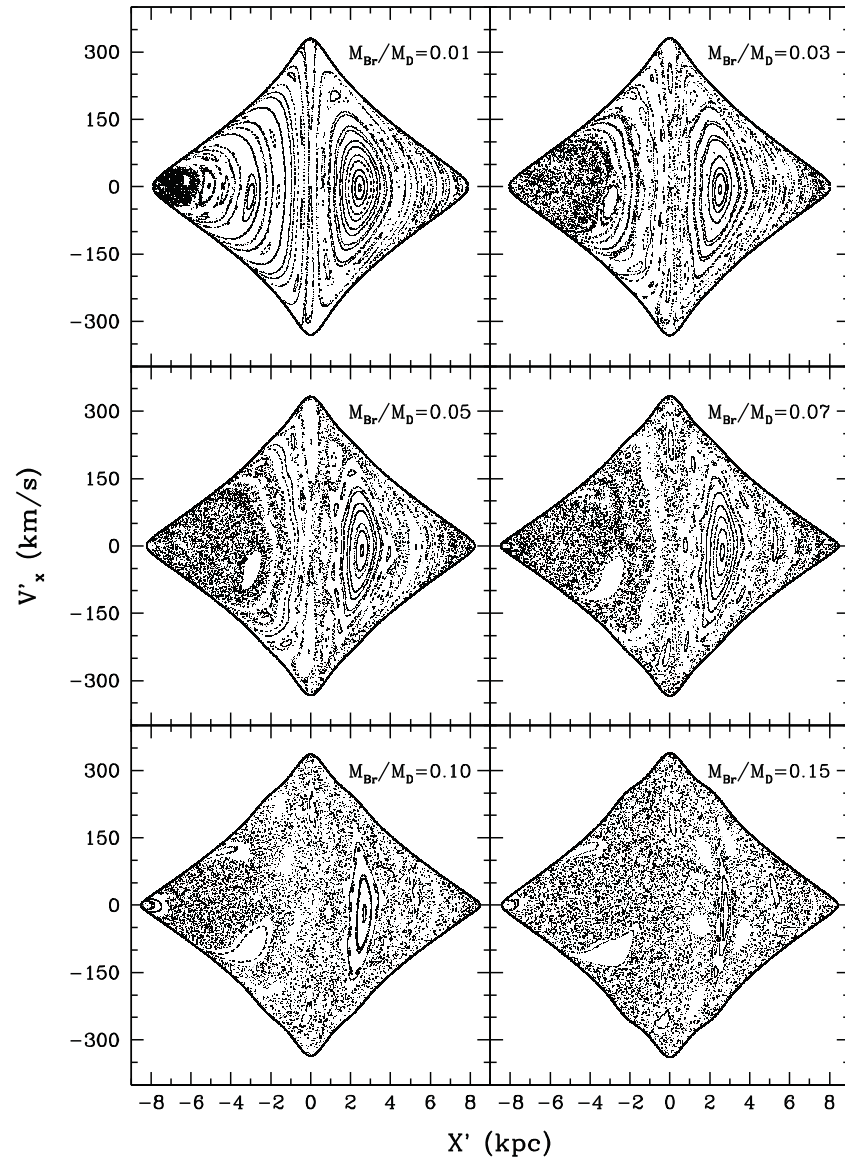


FIGURA 8.27: Lo mismo que en la Figura 8.23 pero para el modelo de masa de una galaxia tipo Sc, una  $E_J = -1021 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$  y un ángulo de enrollamiento de  $30^\circ$ .

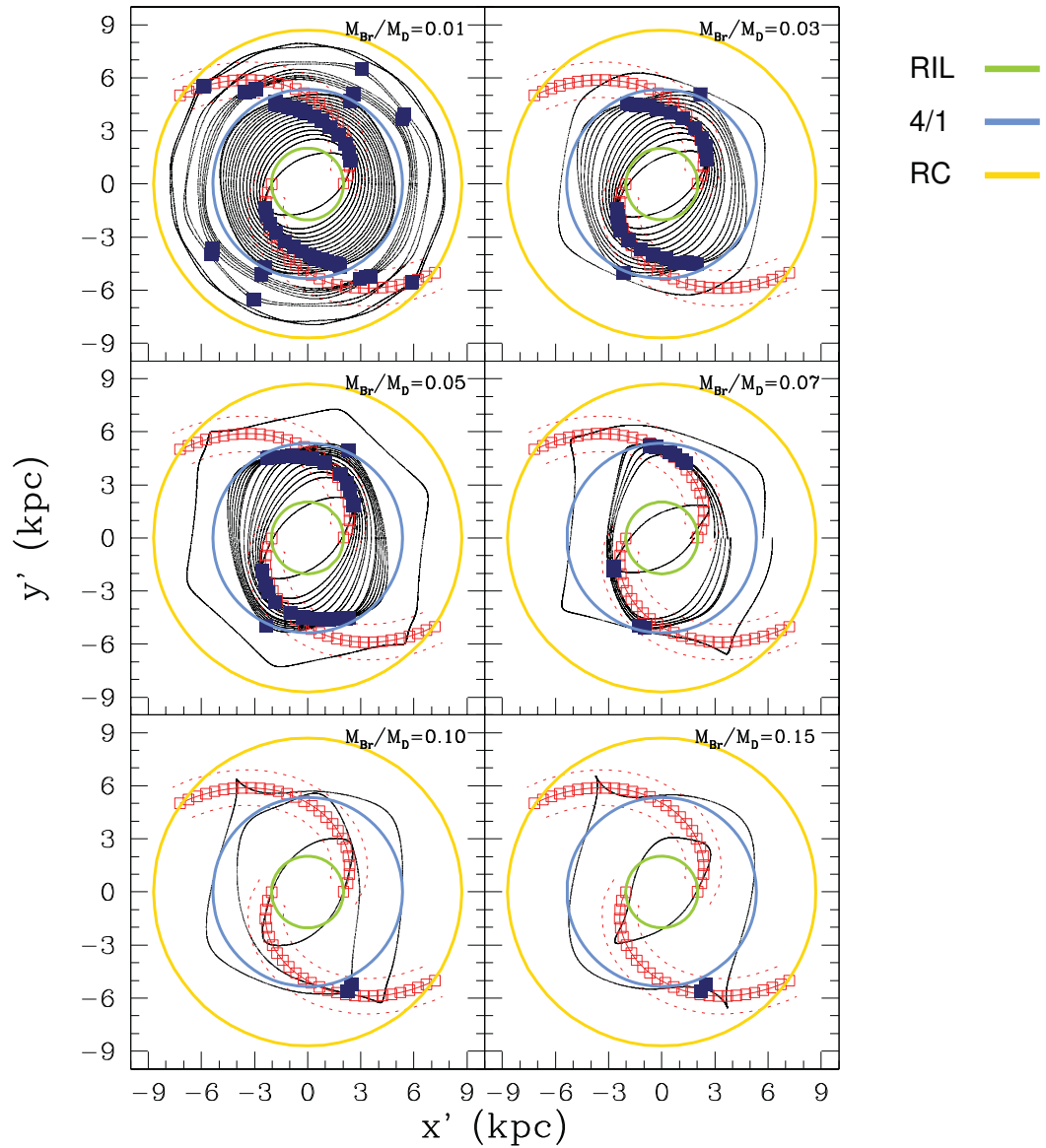


FIGURA 8.28: Lo mismo que en la Figura 8.24 pero el modelo de una galaxia tipo Sc y un ángulo de enrollamiento de  $30^\circ$ . Las resonancias están en 2.03 kpc (RIL), 5.35 kpc (4/1) y 8.70 kpc (RC).

Por último, en la Figura 8.29 calculamos el parámetro  $(Q_T)_{max}$  como función de la masa del brazo espiral (el porcentaje de la masa del disco que corresponde a los brazos espirales) para cada tipo morfológico: Sa (línea discontinua), Sb (línea punteada)

y Sc (línea continua). Para los de modelos Sa y Sb, se observa cómo crece lentamente  $(Q_T)_{\max}$  y a pesar de que a 10 % de la masa del disco es equivalente a la de una barra, la fuerza del brazo no excede el límite máximo que es de 0.4 (Buta et al. 2005) para galaxias espirales. Para el caso del modelo Sc, el parámetro  $(Q_T)_{\max}$  crece muy rápido y en 9% de la masa del disco  $(Q_T)_{\max} \sim 0.4$ , por lo que el brazo ya es muy fuerte. Aquí se nota que el efecto que la masa del brazo produce a la dinámica del disco está muy ligada al ángulo de enrollamiento del brazo.

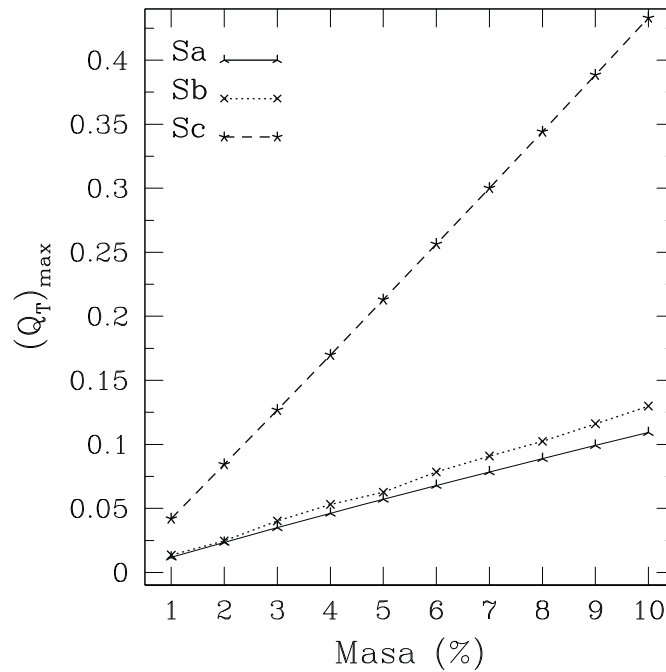


FIGURA 8.29:  $(Q_T)_{\max}$  representa el valor máximo del parámetro  $Q_T(R)$  como función del porcentaje de la masa del disco en los brazos espirales. La línea continua representa  $(Q_T)_{\max}$  para una galaxia tipo Sa, la línea punteada es  $(Q_T)_{\max}$  para una galaxia Sb y la línea discontinua es  $(Q_T)_{\max}$  para una galaxia tipo Sc.



# Capítulo 9

## Conclusiones

En este trabajo presentamos una familia de modelos para galaxias espirales normales (Sa, Sb y Sc) basados en datos observacionales, para lo cual realizamos un estudio exhaustivo inicial en la literatura de cada uno de los parámetros que definen a una galaxia, asimismo analizamos la secuencia de Hubble, buscando valores típicos para parámetros tales como: la razón de masas  $M_B/M_D$  y  $M_D/M_H$ , masa del disco, ángulo de enrollamiento, longitud de escala, curva de rotación, velocidad angular de los brazos espirales, límite interno y externo de los brazos espirales. Desafortunadamente cada uno de estos parámetros presentan una gran dispersión dentro de cada tipo morfológico lo que dificulta por supuesto la construcción de modelos generales. Por lo que, para la distribución de masa para el fondo axisimétrico seguimos el esquema “ideal” de clasificación de Hubble (1926, 1936) por ser la clasificación de galaxias más simple, la cual va de galaxias tempranas a tardías; las tempranas poseen bulbos masivos y brazos con ángulos de enrollamiento cerrados (Sa) y las galaxias tardías poseen bulbos poco masivos y brazos conspicuos con ángulos de enrollamiento abiertos (Sc). De la misma forma, la velocidad angular de los brazos espirales disminuye hacia galaxias tardías (Sc). De modo que los valores que adoptamos para el fondo axisimétrico son:  $M_B/M_D = 0.9, 0.4$  y  $0.2$ ,  $M_D/M_H = 0.07, 0.09$  y  $0.1$  (a un radio de 100 kpc) y  $V_{max} = 320, 250$  y  $170$  km/s para Sa, Sb, y Sc, respectivamente. Los potenciales utilizados para modelar el fondo axisimétrico son tridimensionales y completamente analíticos.

Uno de nuestros objetivos era modelar galaxias espirales normales, por lo tanto al fondo axisimétrico le superponemos un potencial de brazos espirales, ésto con la

finalidad de estudiar el efecto de los brazos espirales sobre la dinámica del disco (la componente más afectada por el patrón espiral). Mediante un análisis orbital logramos restringir algunos parámetros estructurales y dinámicos de los brazos espirales en este tipo de galaxias. Para la estructura espiral utilizamos el modelo PERLAS (Pichardo et al. 2003), que es un modelo tridimensional y está basado en una distribución de densidad a diferencia del potencial más usado para modelar una perturbación espiral en la literatura basado en la aproximación local TWA (*Tight Winding Approximation*), esto es, el potencial bidimensional que llamamos potencial coseno.

Al ser el potencial coseno, el potencial más empleado para modelar brazos espirales, realizamos una comparación entre el modelo PERLAS y coseno, utilizando un modelo tipo Vía Láctea sin barra. El objetivo de esta comparación es hacer notar las diferencias entre ambos modelos. Obtuvimos los siguientes resultados:

- Los potenciales no se pueden ajustar: PERLAS es un potencial definido negativo basado en una distribución de masa. Por otro lado, el potencial coseno es un potencial que oscila alrededor de cero, siendo éste una solución matemática extremadamente simplificada.
- Para el caso de las fuerzas, es posible ajustar la amplitud de la fuerza del potencial coseno a la fuerza de PERLAS, considerando la masa de los brazos espirales en el modelo PERLAS. Sin embargo, aunque se consigue un buen ajuste en la amplitud, la forma de la fuerza en PERLAS no se obtiene con el potencial coseno. La diferencia en la fuerza entre ambos potenciales es que PERLAS, al ser un potencial autogravitante, cada punto del brazo siente el efecto del resto, a diferencia del potencial coseno, que trabaja como una aproximación local que no considera la influencia de todo el brazo.
- Para análisis orbitales muy detallados (como estudios de caos o para el gas), el potencial coseno podría no ser una representación suficientemente realista. No existe una forma directa de ajustar una función analítica tan simplificada como un coseno a un potencial tan complejo como PERLAS.
- Al modificar algún parámetro en el modelo, para el caso del potencial coseno es necesario hacer un reajuste de la amplitud de las fuerzas, lo que hace poco



práctico al potencial coseno, en un estudio estadístico como el que realizamos en esta tesis.

Realizamos un estudio orbital estelar detallado del comportamiento ordenado y caótico en diferentes tipos de galaxias espirales, producido por el efecto de los brazos espirales sobre el disco galáctico. Este tipo de estudios necesitan una buena resolución para evitar que errores numéricos arrojen resultados erróneos que en general no se obtiene con códigos de N-cuerpos, por lo que la mejor opción para este trabajo fue el uso de modelos estacionarios compuestos.

Con la familia de modelos que construimos para cada tipo morfológico, hicimos un estudio orbital exhaustivo con órbitas periódicas y diagramas de Poincaré para analizar el orden y caos orbital estelar. Con este estudio, restringimos parámetros estructurales y dinámicos de los brazos espirales, tales como: 1) el ángulo de enrollamiento, este parámetro presenta una gran dispersión en las observaciones (Kennicutt 1981; Ma et al 2000); 2) la velocidad angular, que es un parámetro dinámico difícil de medir observacionalmente, por lo tanto tiene una gran incertidumbre; finalmente 3) la masa de los brazos.

Para el ángulo de enrollamiento, estudiamos la evolución del comportamiento orbital, fijando el fondo axisimétrico que escogimos para cada tipo morfológico (Sa, Sb y Sc). Suponiendo que la velocidad de rotación de una galaxia decrece con el tipo, los valores que adoptamos para la velocidad angular del patrón son  $\Omega_P = -30, -25$  y  $-20$   $\text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$ , para una galaxia tipo Sa, Sb y Sc, respectivamente. Para la razón de masa de los brazos usamos un valor conservador,  $M_{Br}/M_D = 0.03$ , para los tres tipos de galaxias. Los parámetros anteriores se mantienen fijos, sólo variamos el ángulo de enrollamiento en el intervalo de  $4^\circ$  a  $40^\circ$  para una galaxia tipo Sa, de  $8^\circ$  a  $45^\circ$  para una galaxia Sb y de  $10^\circ$  a  $60^\circ$  para una galaxia Sc.

Las restricciones que encontramos para el ángulo de enrollamiento en galaxias espirales normales son las siguientes:

- Con base en el comportamiento ordenado, con órbitas periódicas obtenemos que el límite donde la respuesta en densidad apoya al patrón impuesto a todos los radios es de  $\sim 15^\circ$  para galaxias tipo Sa,  $\sim 18^\circ$  para galaxias tipo Sb y  $\sim 20^\circ$  para galaxias tipo Sc.

- Para brazos espirales con ángulos de enrollamiento menores o iguales a los límites anteriores, se pueden considerar como estructuras de larga duración.
- Más allá de estos límites, parece como si la respuesta en densidad tratara de “evitar” al patrón espiral impuesto, formando ángulos de enrollamiento menores a los definidos. No es que no puedan existir brazos con ángulos de enrollamiento grandes, sino que, en este caso, los brazos pueden ser mejor explicados como estructuras transientes.
- Considerando el comportamiento caótico, empleando diagramas de Poincaré encontramos también un límite para cada tipo morfológico:  $\sim 30^\circ$  para galaxias tipo Sa,  $\sim 40^\circ$  para galaxias tipo Sb y  $\sim 50^\circ$  para galaxias tipo Sc. En estos límites la región de caos domina en el espacio fase disponible para las órbitas prógradas ( $x' < 0$ , en los diagramas presentados en este trabajo). Sin embargo, aún existen las órbitas periódicas principales las cuales apoyan a los brazos espirales. Más allá de estos límites, el caos llega a ser tan grande que penetra hasta la órbita periódica principal destruyéndola, por lo que ya no hay órbitas que mantengan a la estructura espiral.
- Las restricciones encontradas para el ángulo de enrollamiento tienen una relación directa con dos parámetros: las masas del halo y de los brazos. La masa del halo tiende a suavizar las estructuras no axisimétricas induciendo que las órbitas periódicas se circularicen, provocando que las regiones caóticas disminuyan, por lo que el límite donde el caos destruye a las órbitas periódicas principales se da a mayores ángulos de enrollamiento. Sin embargo, son pocos grados de diferencia para valores razonables de la masa de los halos.

Para la velocidad angular, variamos en el intervalo de  $|\Omega_P| = [10, 60] \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  para estudiar el efecto sobre la dinámica del disco. Utilizamos el fondo axisimétrico construido para cada tipo morfológico (sin cambiarlo) y tomamos la masa de los brazos espirales de  $M_{Br}/M_D = 0.03$ , para los tres tipos de galaxias. Usamos un ángulo de enrollamiento típico para cada galaxia, siguiendo el esquema de Hubble, donde aumenta el ángulo de enrollamiento hacia galaxias tardías. Entonces, encontramos que las órbitas periódicas apoyan los siguientes modelos:

- Una distribución de masa para una galaxia tipo Sa con ángulo de enrollamiento de  $7^\circ$  y  $\Omega_P \lesssim 40 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ .
- Una distribución de masa para una galaxia tipo Sb con ángulo de enrollamiento de  $18^\circ$  y  $\Omega_P < 40 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ .
- Una distribución de masa para una galaxia tipo Sc con ángulo de enrollamiento de  $25^\circ$  y  $\Omega_P \lesssim 30 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ .

Para la masa de los brazos espirales, variamos la masa en el intervalo de  $M_{Br}/M_D = [0.01, 0.15]$ . Los modelos que son apoyados por órbitas periódicas son los siguientes:

- Una distribución de masa de para una galaxia tipo Sa, con un ángulo de enrollamiento de  $10^\circ$ ,  $\Omega_P = -30 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  y una masa  $M_{Br}/M_D \lesssim 0.10$ .
- Una distribución masa para una galaxia tipo Sb, con un ángulo de enrollamiento de  $15^\circ$ ,  $\Omega_P = -25 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  y con una masa  $M_{Br}/M_D \lesssim 0.05$ .
- Una distribución de masa para una galaxia tipo Sc con un ángulo de enrollamiento de  $30^\circ$ ,  $\Omega_P = -20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  y una masa de los brazos  $M_{Br}/M_D \lesssim 0.03$ .

Con estos resultados, concluimos que el límite para la razón de masa  $M_{Br}/M_D$  en una galaxia temprana puede ser considerablemente mayor que en una galaxia tardía, o visto de otra forma, en una galaxia dada, entre más pequeño sea el ángulo de enrollamiento, el límite para su masa será mayor.

Uno de los propósitos más importantes de este trabajo es dar un entendimiento mejor a una de las estructuras no axisimétricas de las galaxias que les dieron el nombre (espirales) y cambiar la visión simplista y tradicional que se tiene de los brazos espirales, lo cuales han sido despreciados al suponer que no son importantes por su baja masa, por la gran dificultad que representa modelar esta estructura complicada e incluso por razones históricas, esto es, la “tradicón” de llamar a los brazos espirales estructuras de masa despreciable. Pero, aún cuando su masa es efectivamente mínima, los efectos que producen, son de considerarse, como hemos mostrado en este trabajo. Los brazos espirales son una estructura muy complicada y no existe un potencial monolítico capaz de reproducirlos. Sin embargo, con potenciales monolíticos relativamente simples podemos

modelar cualquier cosa. En particular, con el advenimiento del tsunami de datos que vendrán con sondas como GAIA, se obtendrá la información necesaria para modelar galaxias como la Vía Láctea con gran detalle.

## 9.1. Trabajo en Proceso y a Futuro

Entre los trabajos que se encuentran en proceso actualmente y en proyectos a futuro listamos los siguientes:

- ★ Analizamos el efecto sobre la dinámica orbital del disco para diferentes razones de masas ( $M_{Br}/M_D$ ), y velocidades angulares de los brazos ( $\Omega_P$ ), pero es necesario hacer un análisis más exhaustivo como el realizado con el ángulo de enrollamiento.
- ★ Hicimos diagramas de Poincaré para ubicar regiones caóticas, pero éstos sólo son útiles para estudios en dos dimensiones. Los potenciales que construimos son tridimensionales. Realizaremos estudios en 3D para caracterizar las regiones caóticas para lo cual se requiere calcular el Exponente Característico de Lyapunov.
- ★ En este trabajo, sobre la base del modelo de ondas de densidad que produce brazos más estables (de larga duración), incluiremos la floculencia característica de algunos brazos espirales. Para este propósito, construiremos un espectro de potencias basado en observaciones para representar las agrupaciones típicas de las nubes moleculares usando datos de la literatura, donde se han hecho estudios para definir espectros de potencia de la distribución de nubes moleculares a lo largo de los brazos espirales. Aunque la masa del gas es relativamente pequeña comparada con la estelar, estas grandes nubes de gas podrían afectar notablemente a las órbitas estelares
- ★ Agregar una barra a los modelos de forma que extenderíamos el análisis a galaxias espirales barradas y basados en el comportamiento ordenado y caótico de las órbitas estelares podríamos restringir parámetros de la barra, tales como masa, velocidad angular, concentración, leyes de densidad.

- ★ Basados en análisis de órbitas periódicas y caos orbital, encontrar cotas máximas para la masa de las componentes de una galaxia (bulbo, disco y halo), considerando la morfología.
- ★ Con los modelos creados en este trabajo seremos capaces de ajustar galaxias específicas y realizar estudios de dinámica orbital estelar (y de gas).
- ★ Considerando que un potencial completamente analítico pero realista para brazos espirales resultaría de gran utilidad en la literatura, realizaremos modelos analíticos para galaxias Sa, Sb, Sc y la Vía Láctea ajustando con series de Fourier el campo de fuerza de PERLAS; estas series representarán brazos espirales más realistas que resultarán mucho más fáciles de implementar que PERLAS, pero proporcionarán resultados similares.



Parte IV

APÉNDICES





# Apéndice A

## Artículos

En este apéndice se presentan dos artículos que fueron hasta ahora el resultado de esta tesis.

### A.1. Artículo: Pitch Angle Restrictions in Late Type Spiral Galaxies Based on Chaotic and Ordered Orbital Behavior

En este artículo se presentan dos restricciones al ángulo de enrollamiento en espirales normales tardías.

#### Resumen

Construimos modelos para galaxias espirales con bulbos de baja masa (galaxias de tipo tardío como fueron definidas por la clasificación de Hubble), usando un modelo 3D autogravitante para brazos espirales y analizamos la dinámica orbital como función del ángulo de enrollamiento, yendo de  $10^\circ$  a  $60^\circ$ . Buscamos las órbitas periódicas y la respuesta en densidad probando la autoconsistencia. Para ángulos hasta aproximadamente  $\sim 20^\circ$ , la respuesta apoya a el potencial permitiendo la presencia de estructuras espirales de larga duración. La respuesta en densidad tiende a “evitar” los ángulos de enrollamiento más grandes en el potencial por mantener ángulos de enrollamiento más pequeños en la respuesta correspondiente. Brazos espirales con ángulos de enrollamiento

más grandes que  $\sim 20^\circ$  no serían estructuras de larga duración sino más bien transientes. Por otro lado, de un estudio orbital exhaustivo en el espacio fase, hemos encontrado que para galaxias de tipo tardío con ángulos de enrollamiento más grandes que  $\sim 50^\circ$ , el caos llega a ser penetrante, destruyendo el espacio fase ordenado alrededor de las principales órbitas periódicas estables, incluso llega a destruir las órbitas periódicas principales. El resultado es consistente con las observaciones de galaxias de tipo tardío, donde el ángulo de enrollamiento máximo observado es de  $\sim 50^\circ$ .

# Pitch Angle Restrictions in Late Type Spiral Galaxies Based on Chaotic and Ordered Orbital Behavior

Angeles Pérez-Villegas, Bárbara Pichardo, Edmundo Moreno, Antonio Peimbert, & Hector Velázquez

Publicado en:

*The Astrophysical Journal Letters: ApJL*, 2012, **745**, L14-L18

## Abstract

We built models for low bulge mass spiral galaxies (late type as defined by the Hubble classification) using a three-dimensional self-gravitating model for spiral arms, and analyzed the orbital dynamics as a function of pitch angle, ranging from  $10^\circ$  to  $60^\circ$ . Indirectly testing orbital self-consistency, we search for the main periodic orbits and studied the density response. For pitch angles up to approximately  $\sim 20^\circ$ , the response closely supports the potential readily permitting the presence of long-lasting spiral structures. The density response tends to “avoid” larger pitch angles in the potential by keeping smaller pitch angles in the corresponding response. Spiral arms with pitch angles larger than  $\sim 20^\circ$  would not be long-lasting structures but would rather be transient. On the other hand, from an extensive orbital study in phase space, we also find that for late-type galaxies with pitch angles larger than  $\sim 50^\circ$ , chaos becomes pervasive, destroying the ordered phase space surrounding the main stable periodic orbits and even destroying them. This result is in good agreement with observations of late-type galaxies, where the maximum observed pitch angle is  $\sim 50^\circ$ .

### A.1.1. Introduction

It is assumed that the Hubble sequence reveals a strong correlation between the morphology of galaxies and their formation process. The study of this relation is a very active field where the merger hypothesis plays a fundamental role; however, it is very unlikely that all trends observed in this sequence can be explained solely by this hypothesis. In particular, the long-term galactic dynamics of non-interacting galaxies is also determined by their inner structure. These highly non-linear stellar systems are prone to exhibit the coexistence of an astonishing dichotomy, an exquisite order

right together with counterintuitive complex regions of chaos, where non-axisymmetric features such as spiral arms, bars, etc, play a key part.

Regarding to ordered motion, smooth and weak long-lasting large scale structures such as spiral arms (in general, low mass and/or low pitch angle), when modeled, present a relatively simple orbital structure made of families of quasi-periodic orbits surrounding the main periodic orbits that sculpt spiral arms. The density response is also smooth and coincides nicely with the imposed potential in the case of low pitch angle spiral arms, for example. There are indications that even chaotic orbits could reinforce observed morphological features in this case (Kaufmann & Contopoulos 1996; Patsis, Athanassoula & Quillen 1997; Harsoula, Kalapotharakos & Contopoulos 2011). However, orbital analysis on dynamical models suggests that chaotic motion plays a significant role (Contopoulos 1983,1995; Contopoulos, Varvoglis & Barbanis 1987; Grosbøl 2003) in spirals.

Indeed, large scale structures are not expected to emerge on systems built out of pure chaos, this is, as long as chaos does not become pervasive, large scale structures of discs are practically unaffected. Recently, there has been an interesting discussion about the possible chaotic nature of the spiral structure (Patsis 2006; Voglis, Stavropoulos & Kalapotharakos 2006; Romero-Gómez et al. 2007; Voglis, Tsoutsis & Efthymiopoulos 2006; Contopoulos & Patsis 2008; Patsis et al. 2009).

Although the best known part of the Hubble classification regarding pitch angles, categorizes galaxies assuming that late types possess the most opened spiral arms (largest pitch angles), this is just the envelope of the classification. Late type spirals actually present a large scatter in this parameter (Kennicutt 1981; Ma et al. 2000), going from about  $10^\circ$  to  $50^\circ$ . In particular, late type spirals (Sb to Scd), are better fitted with strong spirals (Contopoulos & Grosbøl 1986; Patsis et al. 1991; Patsis, Grosbøl & Hiotelis 1997, and references therein), meaning they are far from being a slight perturbation that can be reproduced by the Lin & Shu (1967) spiral arm potential with a cosine function, solution of the Tight Winding Approximation (TWA).

We present a first result of a detailed orbital study on models of late type spiral galaxies as defined by Hubble (1926). In particular, this work is devoted to one of the structural parameters of spiral arms: the pitch angle. In this study some restrictions are imposed theoretically on their steady or transient nature, and on their maximum

pitch angle.

This letter is organized as follows. In Section A.1.2, the 3-D galactic potential used to compute orbits is briefly described. In Section A.1.3 we present our results with periodic orbit analysis, density response and phase space studies. Finally, in Section A.1.4 we present our conclusions.

### A.1.2. Methodology and Numerical Implementation

A common method to study the effect of spiral arms on stellar dynamics recurs to the use of elegant but simple 2-D bisymmetric local approximations such as cosine functions (TWA based), in this scheme, spiral arms are assumed to be smooth self-consistent perturbations to the axisymmetric potential. Cosine potentials to represent spiral arms, are in several cases taken beyond its self-consistent validity regime by imposing large pitch angles and/or large amplitudes for the spiral arms. However, in this regime, other methods to test undirectly self-consistency of steady potentials, like the construction of periodic orbits, are applicable. Details of a non-axisymmetric potential are not negligible when we are talking about a global model, about sensitive material as it is the gas, or about sensitive orbital behavior as chaos. Fine details of a complicate three dimensional distribution as spiral arms in galaxies are far beyond of an approximation as simple as a cosine function. Thus, we use a better approximation based on a 3-D model density distribution, that allows more complicate shapes and a more detailed representation of a potential for spiral arms.

We employ the spiral arms potential formed by oblate spheroids called PERLAS (Spiral arms potential formed by oblate spheroids) from Pichardo et al. (2003), to represent their 3-D density based nature. This 3-D steady two-armed self-gravitating potential results to be more realistic in the sense that it considers the force exerted by the whole spiral arms structure, sculpting much more complicated shapes for the gravitational potential and gravitational force than a simple 2-D cosine function. This intrinsic difference gives rise to significant deviations on orbital dynamics when compared to a cosine potential. Comparisons of the model with observations and with other models have been already published (Pichardo et al. 2003; Martos et al. 2004; Antoja et al. 2009; Antoja et al. 2011).

The corresponding parameters used to produce models for late type spiral galaxies are presented in Table A.1. Spiral arms self-consistency has been tested through the reinforcement of the spiral potential by stellar orbits (Patsis et al. 1991; Pichardo et al. 2003). The total mass of the spiral arms in our model is of 3 % of the disc mass, which represents conservative (low mass) spiral arms for late type disc galaxies. We have employed the known parameter  $Q_T(R)$  (Combes & Sanders 1981) applied to bars and spiral arms (Buta & Block 2001; Laurikainen & Salo 2002; Vorobyov 2006; Kalapotharakos et al. 2010, etc.), to measure the strength of the spiral arms (PERLAS) in order to compare with observations and other models. We present in Figure A.1 the maximum value, for models with different pitch angles, of the parameter  $Q_T(R) = F_T^{\max}(R) / |\langle F_R(R) \rangle|$ , where  $F_T^{\max} = |(\frac{1}{R} \partial\Phi(R, \theta) / \partial\theta)|_{\max}$ , represents the maximum amplitude of the tangential force at radius  $R$ , and  $\langle F_R(R) \rangle$ , is the mean axisymmetric radial force at the same radius, derived from the  $m=0$  component of the gravitational potential. Each point in this curve represents a different pitch angle, going from  $0^\circ$  to almost  $90^\circ$ . Maximum values up to 0.4 for this parameter are reasonable for late spirals (Buta et al. 2005).

The axisymmetric potential includes a Miyamoto-Nagai disk and bulge, and a massive halo (based on the potential described by Allen & Santillán 1991 for the Milky Way) to fit known observational parameters on late spirals: mainly rotation curves, mass ratios (between the components: bulge, disk and halo) and scale lengths. In Table A.1, we present the employed axisymmetric and non-axisymmetric (spiral arms) parameters.

### A.1.3. Results

In the case of long lasting steady potentials, self-consistency can be tested indirectly through the construction of periodic orbits. The existence of periodic orbits supporting a large scale structure such as spiral arms increases the probability of maintaining long lasting large scale structures. We present a periodic orbit study in Figure A.2. In order to quantify the support of periodic orbits to the spiral arm potential, we follow the method of Contopoulos & Grosbøl (1986) to obtain the density response to the given spiral perturbation. This method assumes that the stars with orbits trapped around an unperturbed circular orbit, and with the sense of rotation of the spiral perturbation,

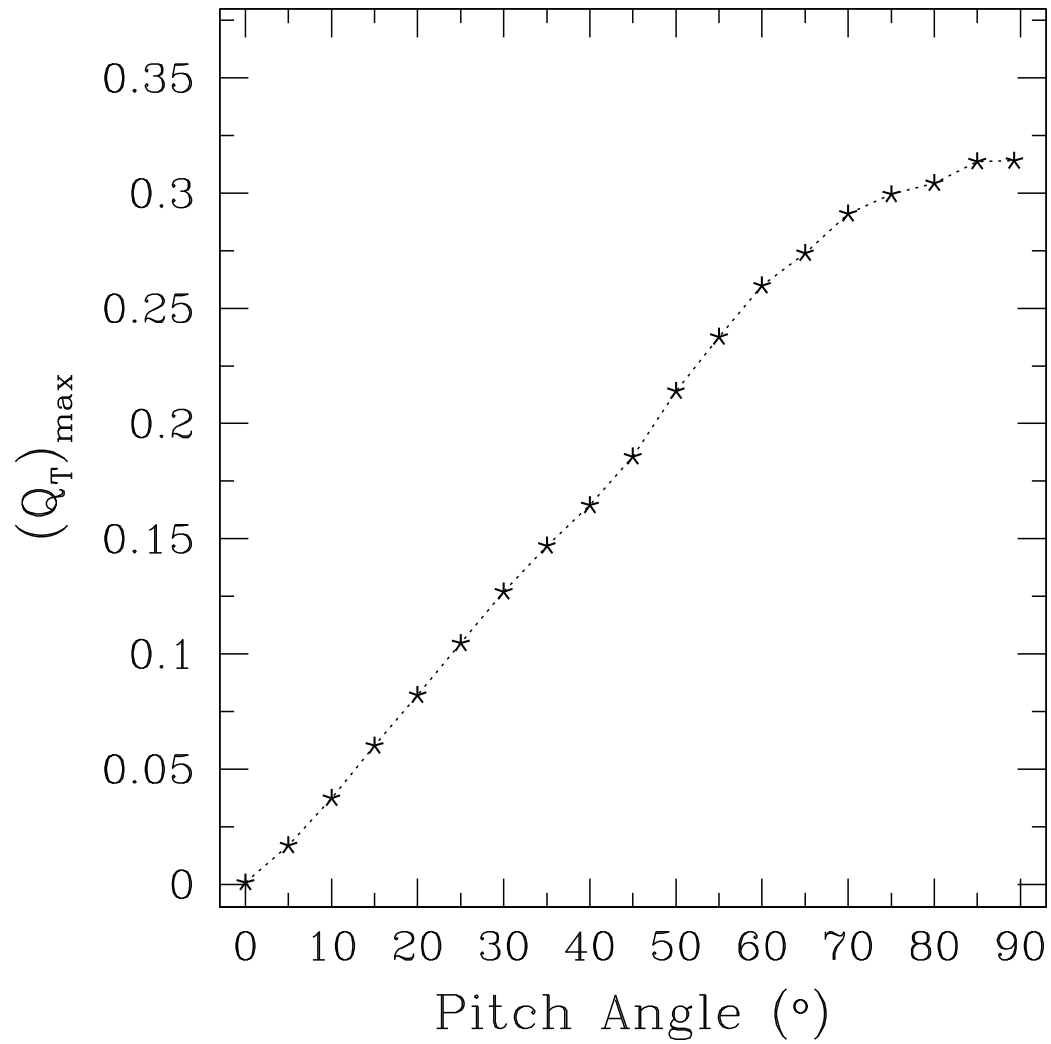


FIGURA A.1:  $(Q_T)_{\max}$  represents the maximum value of the parameter  $Q_T(R)$  (maximum relative torques) vs. pitch angle of the spiral arms model.

TABLA A.1: Parameters of the Spiral Arms Models

Parameter	Value	Reference
<i>Spiral Arms</i>		
locus	Logarithmic	1,10
arms number	2	2
pitch angle	10-60°	3,8
$M_{Spiral}/M_{disk}$	3%	
scale-length	disk based: 3 kpc	4,5
Radial force contrast	5-10%	6
pattern speed ( $\Omega_{sp}$ )	-20 (clockwise) $\text{km s}^{-1}\text{kpc}^{-1}$	1,7
ILR position	2.03 kpc	
Corotation position	8.63 kpc	
inner limit	2.03 kpc	~ILR position based
external limit	8.63 kpc	~corotation position based
<i>Axisymmetric Components</i>		
Disk Mass / Halo Mass	0.1 (up to 100 kpc halo radius)	4,9
Bulge Mass / Disc Mass	0.2	5,9
Rot. Curve ( $V_{max}$ )	170 $\text{km s}^{-1}$	8
Disk Mass	$5.10 \times 10^{10} M_{\odot}$	4
Bulge Mass	$1.02 \times 10^{10} M_{\odot}$	$M_B/M_D$ based
Halo Mass	$4.85 \times 10^{11} M_{\odot}$	$M_D/M_H$ based
Disk scale-length	3 kpc	4,5

References —1) Grosbol & Patsis 1998. 2) Drimmel et al. 2000. 3) Kennicutt 1981. 4) Pizagno et al. 2005 5) Weinzirl et al. 2009. 6) Contopoulos 2007. 7) Patsis et al. 1991; Fathi et al. 2009. 8) Ma et al. 2000; Brosche 1971; Sofue & Rubin 2001. 9) Block et al. 2002. 10) Pichardo et al. 2003.

are also trapped around the corresponding central periodic orbit in the presence of the perturbation. In this manner, we computed a series of central periodic orbits and found the density response along their extension, using the conservation of mass flux between



any two successive orbits. We found the position of the density response maxima (filled squares in Figure A.2) along each periodic orbit, thus the positions of the response maxima on the galactic plane are known. These positions are compared with the center of the imposed spiral arms potential, i.e. the spiral locus (open squares in Figure A.2).

For smaller pitch angles ( $i \lesssim 20^\circ$ ), the density response maxima support closely the spiral arms potential, making the existence of long lasting spiral arms more probable. On the other hand, for spiral arms with pitch angles larger than  $\sim 20^\circ$ , the response maxima precede systematically the spiral arms potential, i.e. the response produces spiral arms with much smaller pitch angles than the spiral arms potential. The response (or support) “avoids” open long lasting spiral arms. Beyond  $20^\circ$  of pitch angle for the spiral potential, the density response keeps almost the same pitch angle (approximately  $18^\circ$  to  $22^\circ$ ) independently of the potential. Long lasting spirals are not supported anymore, spiral arms in this case may be rather transient.

In Figure A.3 we present a  $3 \times 3$  phase space diagrams mosaic to show the main results. These 9 panels show Poincaré diagrams with different Jacobi energy families running from  $E_j = -1080$  to  $-1010 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ , covering the total extension of the spiral arms, as we go from  $30^\circ$  (upper line of diagrams) to  $50^\circ$  (bottom line of diagrams). The left part of each diagram represents prograde orbits in the reference system of the spiral arms.

Observations of spiral galaxies show pitch angles up to  $\sim 50^\circ$  (Ma et al. 2000). Despite that periodic orbits are not supporting spiral arms, the existence of very open spirals, could indicate a probable transient nature. However, even then, some ordered orbits are expected to support for short periods these large scale structures.

We have studied the effect of increasing the pitch angle in a typical late type spiral galaxy model. With this study we search for a limit for the pitch angle, for which chaos becomes pervasive and destroys all ordered orbits in the relevant spiral arms region. At a pitch angle of  $20^\circ$  or less, the majority of orbits are ordered and simple, periodic orbits support spiral arms up to close to corotation. As we increase the pitch angle, at  $30^\circ$  (first line of diagrams from the top of Figure A.3), the orbital behavior is much more complex, presenting resonant islands and the onset of chaos is clear, surrounding the stable periodic orbits, yet supporting them in a contained region. For  $40^\circ$  (second line of diagrams), chaos becomes pervasive compromising the available phase space around

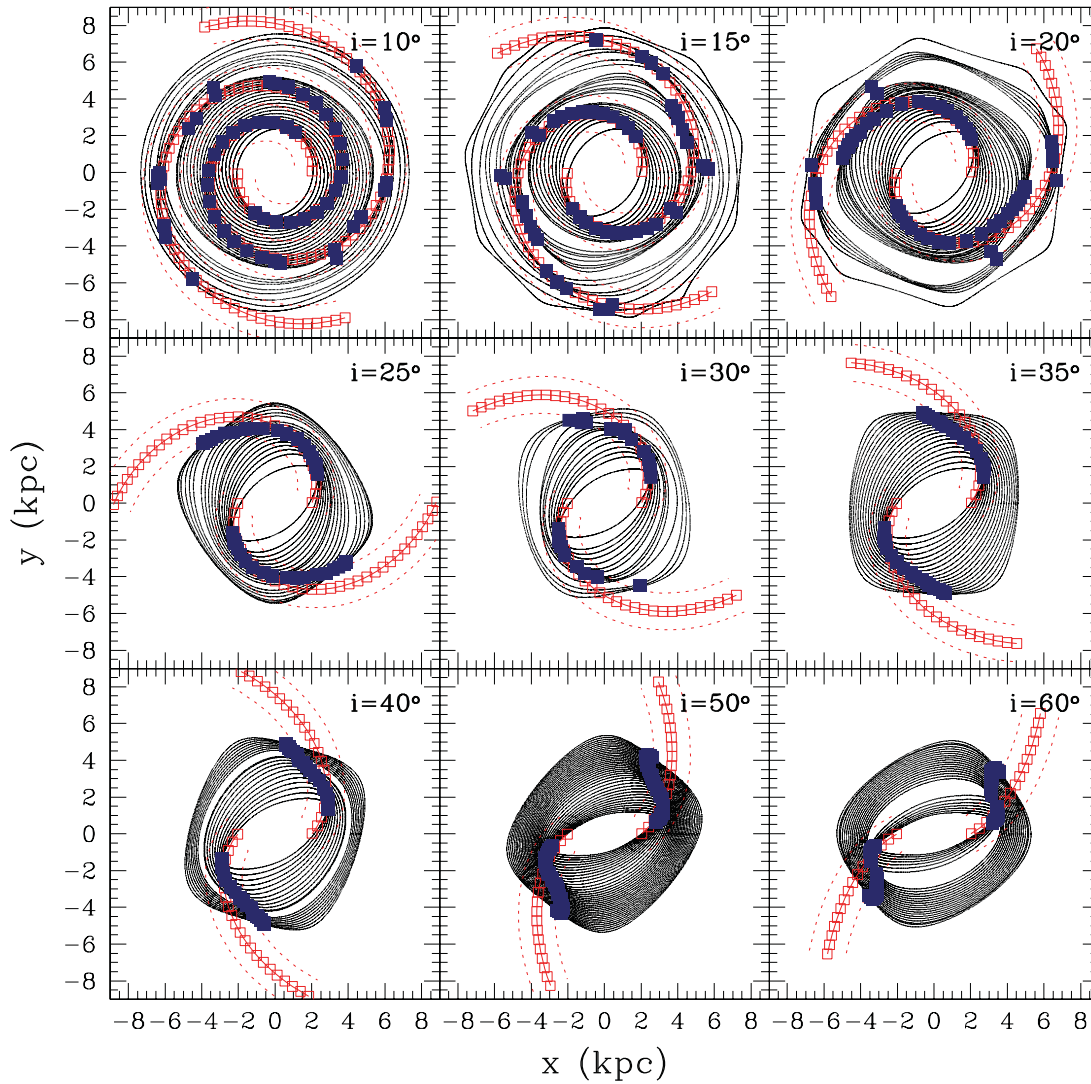


FIGURA A.2: Periodic orbits and response maxima (filled squares) in models with the spiral loci (open squares) for the 3D spiral model (Table A.1), with pitch angles ranging from 10 to 60 °.

the stable periodic orbits. For  $50^\circ$  (bottom line of diagrams), the chaotic region covers almost all regular prograde orbits, approaching closely to the main periodic orbits. For pitch angles beyond  $\sim 50^\circ$  chaos destroys periodic orbits.

In all cases reported in this work, the radial position of corotation was kept fixed (see Table A.1). However, taking into account earlier work by Contopoulos & Grosbøl (1986); Patsis, Contopoulos & Grosbøl (1991), among others, we produced several experiments taking the position of corotation (to 16.5 kpc by reducing the spiral arms angular speed from 20 to 10 km s<sup>-1</sup> kpc<sup>-1</sup>) considerably far from the end of the spiral arms to check whether it is relevant in the observed chaotic behavior. Although a large fraction of chaos is indeed produced close to the corotation resonance, we found that even with corotation far from the end of spiral arms, a fraction of chaos is generated toward larger pitch angles, although not enough to compromise ordered regions around the periodic orbits. We then produced experiments where we fixed the end of the spiral arms close to the corotation position, and changed only one parameter: the pitch angle. We found then that the chaos produced in corotation becomes much stronger as we increase the pitch angle. Chaos seems a combination between the effect of the corotation resonance and the pitch angle.

#### A.1.4. Conclusions

With the use of an axisymmetric fixed model to simulate a typical late type galaxy as a background, we superposed a bisymmetric steady spiral arm potential (PERLAS) and studied the evolution of orbital behavior in the plane of the disk, as we change the pitch angle going from  $10^\circ$  to  $60^\circ$ , in order to set some structural restrictions to the spiral arms, based on orbital dynamics. Observed galaxies classified as late type spirals present a wide scatter in pitch angles, going from  $\sim 10^\circ$  to  $50^\circ$ . With these family of models, we have carried out an exhaustive orbital study (order and chaos) with periodic orbits and with phase space diagrams.

In this paper we present the first restriction relative to the pitch angle. In the case of ordered motion, with periodic orbits, a limit in the pitch angle of the density response is found at approximately  $20^\circ$ , up to which, the density response reinforces the spiral arms potential at all radii, i.e. with a more long-lasting nature. Beyond this limit, the

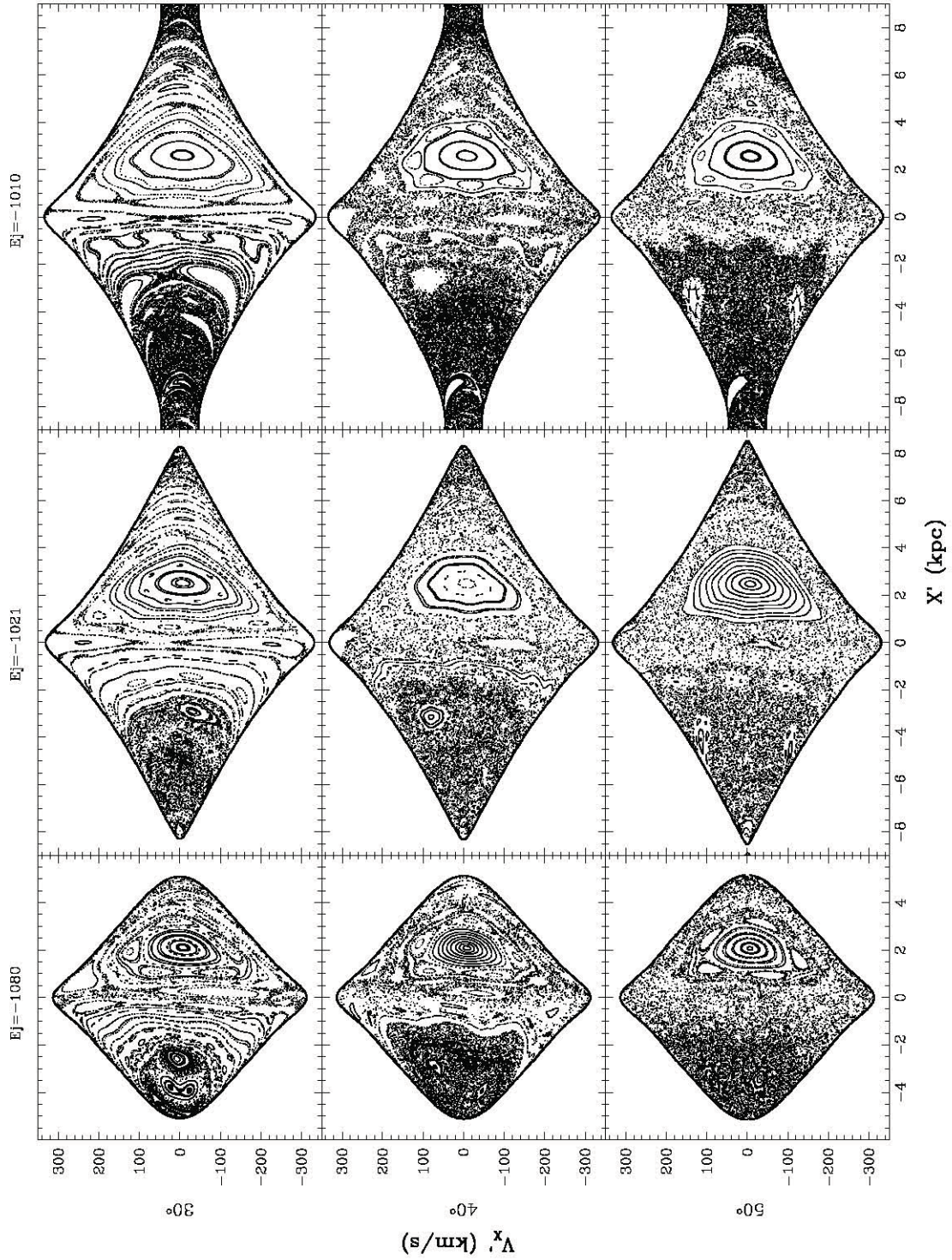


FIGURA A.3: Phase space diagrams with  $E_J = [-1080, -1010]$ , in units of  $10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ . From upper to bottom lines of diagrams, pitch angles go from  $30^\circ$  to  $50^\circ$ .

density response “avoids” to follow the spiral arm potential, producing pitch angles much smaller than the background spiral potential. Spiral arms beyond this limit might be better explained as transient structures.

A second restriction is obtained out of chaos behavior. With the phase space orbital study, going from pitch angles of  $10^\circ$ , where order reigns, to more than  $50^\circ$ , where chaos becomes pervasive. With this orbital study we are able to set a limit value for the maximum pitch angle before the system becomes completely chaotic. This limit closely coincides with the observational maximum pitch angle of spirals ( $\sim 50^\circ$ ), suggesting a possible relation between the structural characteristics of the galaxy and chaos.

It is a pleasure to acknowledge Panos Patsis and the anonymous referee for enlightening comments that considerably improved this work. We thank PAPIIT through grants IN110711-2, IN119306 and IN-109509.

## REFERENCES

- Allen, C. & Santillán, A. 1991, *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, 22, 256
- Antoja, T., Valenzuela, O., Pichardo, B., Moreno, E., Figueras, F. & Fernández D. 2009, *The Astrophysical Journal*, 700, L78
- Antoja, T., Romero-Gómez, M., Figueras, F., Valenzuela, O., Pichardo, B. & Moreno, E. 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, accepted
- Block, D. L., Bournaud, F., Combes, F., Puerari, I. & Buta, R. 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 394, L35
- Brosche, P. 1971, *Astronomy & Astrophysics*, 13, 293
- Buta, R. & Block, D. L., 2001, *The Astrophysical Journal*, 550, 243
- Buta, R., Vasylyev, S., Salo, H. & Laurikainen, E., 2005, *AJ*, 130, 523
- Combes, F. & Sanders, R. H. 1981, *A&A*, 96, 164
- Contopoulos, G. 1983, *Astronomy & Astrophysics*, 117, 89
- Contopoulos, G. 1995, *NYASA*, 751, 112
- Contopoulos, G. 2007, *Chaos in Astronomy, Conference 2007*, Springer, 3
- Contopoulos, G. & Grosbøl, P. 1986, *Astronomy & Astrophysics*, 155, 11
- Contopoulos, G. & Patsis, P. A., eds., 2008, *Chaos in Astronomy*, Springer, Berlin

- Contopoulos, G., Varvoglis, H. & Barbanis, B. 1987, *Astronomy & Astrophysics*, 172, 55
- Drimmel, R. 2000, *Astronomy & Astrophysics*, 358, L13
- Fathi, K., Beckman, J. E., Piñol-Ferrer, N., Hernández, O., Martínez-Valpuesta, I. & Carignan, C. 2009, *The Astrophysical Journal*, 704, 1657
- Grosbøl, P. 2003, *LNP*, 626, 201
- Grosbol, P. J. & Patsis, P. A. 1998, *Astronomy & Astrophysics*, 336, 840
- Harsoula, M., Kalapotharakos, C. & Contopoulos, G. 2011 *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 411,1111
- Hubble, E. P. 1926, *The Astrophysical Journal*, 64,321
- Kalapotharakos, C., Patsis, P. A. & Grosbøl, P. 2010, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 403, 83
- Kaufmann, D.E. & Contopoulos, G. 1996, *Astronomy & Astrophysics*, 309, 381
- Kennicutt, R. 1981, *Astronomical Journal*, 86, 1847
- Laurikainen, Eija & Salo, Heikki, 2002, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 337, 1118
- Lin, C. C. & Shu, F. H. 1967, *IAUS*, 31, 313
- Ma, Jhun, Zhao, Jun-liang, Zhang, Fei-peng, & Peng, Qiu-he 2000, *Chinese Astronomy and Astrophysics*, 24, 435
- Martos, M., Hernandez, X., Yáñez, M., Moreno, E. & Pichardo, B., 2004, *MNRAS*, 350, 47
- Patsis, P. A., Contopoulos, G. & Grosbøl, P. 1991, *Astronomy & Astrophysics*, 243, 373
- Patsis, P. A., Athanassoula, E. & Quillen, A. C. 1997, *The Astrophysical Journal*, 483, 731
- Patsis, P. A. 2006, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 369, L56
- Patsis, P. A., Grosbøl, P. & Hotelis, N. 1997, *Astronomy & Astrophysics*, 323, 762
- Patsis, P. A., Kaufmann, D. E., Gottesman, S. T. & Boonyasait, V. 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 394, 142
- Pichardo, B., Martos, M., Moreno, E. & Espresate, J. 2003, *The Astrophysical Journal*, 582, 230
- Pizagno, J., Prada, F., Weinberg, D. H., Rix, H. W., Harbeck, D., Grebel, E. K.,

Bell, E. F., Brinkmann, J., Holtzman, J. & West, A. 2005, *The Astrophysical Journal*, 633, 844

Romero-Gómez, M., Masdemont, J. J., Athanassoula, E. & García-Gómez, C. 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 472, 63

Sofue, Y. & Rubin, V. 2001, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 39, 137

Voglis, N., Stavropoulos, I. & Kalapotharakos, C. 2006, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 372, 901.

Voglis, N., Tsoutsis, P. & Efthymiopoulos, C. 2006, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 373, 280

Vorobyov, E. I. 2006, *MNRAS*, 370, 1046

Weinzirl, T., Jogee, S., Khochfar, S., Burket, A. & Kormendy, J. 2009, *The Astrophysical Journal*, 696, 411

## A.2. Artículo: Structural Parameters Restrictions in Normal Spiral Galaxies Based on Chaotic and Ordered Orbital Behavior I: The Pitch Angle

En este artículo se presentan dos restricciones al ángulo de enrollamiento en galaxias espirales normales.

### Resumen

Hemos construido una familia de modelos de potencial no axisimétricos para galaxias espirales normales como se definieron en la clasificación más simple de galaxias: la secuencia de Hubble. Para este propósito, superpusimos un modelo tridimensional autogravitante para los brazos espirales (PERLAS) al potencial galáctico axisimétrico. Analizamos la dinámica orbital como función del ángulo de enrollamiento, variando de  $4^\circ$  a  $40^\circ$  para una galaxia Sa, de  $8^\circ$  a  $45^\circ$  para una galaxia Sb y de  $10^\circ$  a  $60^\circ$  para una galaxia Sc. La autoconsistencia de los modelos, se probó indirectamente a través del análisis de órbitas periódicas y mediante estudios de la respuesta en densidad para cada tipo morfológico. Basados en comportamiento ordenado, con estudios de órbitas periódicas se muestra que para ángulos de enrollamiento hasta aproximadamente  $15^\circ$ ,  $18^\circ$  y  $20^\circ$ , para galaxias Sa, Sb y Sc, respectivamente, la respuesta en densidad apoya al potencial impuesto permitiendo probablemente la existencia de una estructura espiral de larga duración. Más allá de esos límites, la respuesta en densidad tiende a “evitar” el potencial impuesto manteniendo un ángulo de enrollamiento más pequeño en la respuesta en densidad, en estos casos los brazos espirales no pueden ser explicados como estructuras de larga duración, pero podrían ser explicados como estructuras transientes. Por otro lado, de un estudio orbital exhaustivo en el espacio fase basado en comportamiento caótico, hemos encontrado que para galaxias Sa con ángulos de enrollamiento mayores a  $\sim 30^\circ$ , para galaxias Sb con con ángulos de enrollamiento mayores a  $\sim 40^\circ$  y para galaxias Sc con ángulos de enrollamiento mayores a  $\sim 50^\circ$ , el caos llega a ser penetrante, destruyendo el espacio fase ordenado de la región prógrada alrededor de las órbitas periódicas principales e incluso destruyéndolas. Este resultado es consistente con las observaciones de ángulos de enrollamiento en galaxias espirales normales aisladas típicas.



# Stellar Orbital Studies in Normal Spiral Galaxies I: Restrictions to the Pitch Angle

Angeles Pérez-Villegas, Bárbara Pichardo, Edmundo Moreno

Enviado a:

*The Astrophysical Journal*

## Abstract

We built a family of non-axisymmetric potential models for normal non-barred or weakly-barred spiral galaxies as defined in the simplest classification of galaxies: the Hubble sequence. For this purpose a three-dimensional self-gravitating model for spiral arms PERLAS is superimposed to galactic axisymmetric potentials. We analyze the stellar dynamics varying only the pitch angle, from  $4^\circ$  to  $40^\circ$ , for an Sa galaxy, from  $8^\circ$  to  $45^\circ$ , for an Sb galaxy, and from  $10^\circ$  to  $60^\circ$ , for an Sc galaxy. Self-consistency is indirectly tested through periodic orbital analysis, and through density response studies for each morphological type. Based on ordered behavior, periodic orbits studies show that for pitch angles up to approximately  $15^\circ$ ,  $18^\circ$ , and  $20^\circ$  for Sa, Sb and Sc galaxies, respectively, the density response supports the spiral arms potential, a requisite for the existence of a long-lasting large-scale spiral structure. Beyond those limits, the density response tends to “avoid” the potential imposed by maintaining lower pitch angles in the density response, in these cases the spiral arms may be explained as transient features rather than long-lasting large-scale structures. Additionally, from a phase space orbital study, based on chaotic behavior, we found that for pitch angles larger than  $\sim 30^\circ$ ,  $\sim 40^\circ$  and  $\sim 50^\circ$  for Sa, Sb, and Sc galaxies, respectively, chaotic orbits dominate all phase space prograde region that surrounds the periodic orbits that sculpt the spiral arms and even destroying them. This result seems to be in good agreement with observations of pitch angles in typical isolated normal spiral galaxies.

### A.2.1. Introduction

When Hubble (1926, 1936) introduced his classification scheme of galaxies, he emphasized that the turning-fork diagram he obtained, depicted the systematic variation of the morphological characteristics, and the terms “early type” and “late type” referred

only to the relative position of a galaxy in this empirical sequence. The sequence did not imply temporal evolution connections. Some modifications have been introduced to this scheme over the years (de Vaucouleurs 1959; Sandage 1961). In the case of isolated galaxies, researchers keep searching in this well-ordered sequence of galaxy types for a clue to possible formation and evolutionary processes to explain galactic morphology. It is not surprisingly then, that morphology is so frequently an underlying theme in the study of galaxies. A few percent of all galaxies are unclassifiable, many of these due to their unusual morphology produced by their interacting nature.

Spiral galaxies are classified in the Hubble sequence based mainly in two criteria: the pitch angle and the bulge to disk luminosity ratio. On Sandage's classification (Sandage 1975), on the other hand, he used three parameters to classify spiral galaxies: the bulge to disk size ratio, the pitch angle, and the arms fragmentation into stars. These two classifications are very similar. Then, early type spirals show small pitch angles with smooth structure and conspicuous central bulges. For late spirals, the arms are open and flocculent, and the central bulges are smaller. Finally, Sb galaxies are between the above two types.

Since the Hubble classification was introduced, the astronomers study the morphological types of galaxies; they have sought correlations or dependences between the parameters and the morphological type. Holmberg (1958) and Sersic (1987), compiled and analyzed photometric data (integrated magnitudes, colors and diameters) for hundreds of galaxies, and found a correlation between the Hubble type and the galaxy colors. The ratio  $M_{H_2}/M_{Tot}$  decreases with type from Sa to Sd (Sage 1993; Roberts & Haynes 1994). The total mass decreased as the Hubble type varied from Sa to Sc (Pişmiş & Maupomé 1978; Maupomé, Pişmiş & Aguilar 1981; Roberts & Haynes 1994). Another interesting correlation is found in the maximum value of rotation velocity: values for Sa galaxies are higher than Sc galaxies (Rubin et al. 1985; Sandage 2000; Sofue & Rubin 2001); although, the maximum rotation velocity presents a large scatter. Along the Hubble sequence, spiral galaxies disks tend to be thinner (Ma 2002). Some correlations are found also with the pitch angle, like the one related with the supermassive black hole in spiral galaxies that seems to decrease with the pitch angle (Seigar et al. 2008; Shields et al. 2010); the rotation velocity decreases also with the pitch angle (Kennicutt 1981; Savchenko & Reshetnikov 2011); in the same manner, it seems that for disks with

lower surface densities and lower total mass-luminosity ratios, pitch angles tend to be larger (Ma 2002).

Regarding specifically to spiral arms morphology, studies of this type in galaxies, were started earlier than the Hubble classification. von der Pahlen (1911), Groot (1925), Danver (1942), and Kennicutt (1981) studied the spiral arms of several galaxies and thought that the arms may be fitted rather well with logarithmic helices. Kennicutt (1981) came to the conclusion that the pitch angle increases from the early type to the late along the Hubble sequence, but the range of variation of the pitch angle within each type is quite large, concluding the Hubble classification is not an ideal classification system as was generally believed it to be.

In the spiral density wave theory (Lin & Shu 1964), the spiral structure of galaxies was modeled as a periodic perturbation term to the axisymmetric potential in the disk plane. This is known as the tight-winding approximation (TWA) for small pitch angles, or WKB approximation<sup>1</sup> (see, e.g., Binney & Tremaine 1994). In the case of a two-armed spiral pattern the TWA provides a solution to the potential in the galactic plane of the form,

$$\Phi(R, \phi) = f(R)\cos[2\phi + g(R)]. \quad (\text{A.1})$$

where the function  $f(R)$  is the amplitude of the perturbation, and  $g(R)$  represents the geometry of the spiral pattern. The amplitude function  $f(R)$  given by Contopoulos & Grosbøl (1986) and  $g(R)$  of the form given by Roberts, Huntley & van Albada (1979) are commonly used. Most orbital studies in spiral galaxies theory, have employed a spiral potential of the form in equation A.1. However, the majority of disk galaxies possesses strong spiral structures, suggesting that this structure should be considered an important galactic component that deserves an effort to model it beyond a simple perturbing term. In this work we have chosen a more physically and observationally motivated model of the spiral arms for disk galaxies, the one called PERLAS from Pichardo et al. (2003), based on a three-dimensional model density distribution, which allows more complicated shapes and a more detailed representation of the spiral arms potential.

---

<sup>1</sup>Wentzel-Kramers-Brillouin approximation of quantum mechanics.

Concerning to the orbital structure, the appearance of morphological structures in galaxies is in general associated with the dominance of order in their phase space (Patsis 2008). In grand design disk galaxies, the bars and the spiral arms are considered to consist of material trapped around stable periodic orbits of the central family  $X_1$  (Contopoulos 2002). In the case of spirals, the stable elliptical  $X_1$  orbits precess as their Jacobi constant varies, so the flow of material through the arms can be described as a “precessing ellipses” flow. Several observational and theoretical studies indicate that this is the case for many normal spiral galaxies (Patsis, Contopoulos & Grosbøl 1991). Spiral galaxies, with their thin disks and smooth spiral arms may seem to be dominated by ordered motion, but deeper orbital analysis on dynamical models suggests that chaotic motion plays a significant role in spiral galaxies (Contopoulos 1983,1995; Contopoulos et al. 1987; Grosbøl 2003; Voglis, Stauroopoulos & Kalaptharakos 2006; Contopoulos & Patsis 2008; Patsis et al. 2009), the chaotic orbits surrounding stable periodic orbits could also support the spiral arms. Although, large-scale structures are not expected to emerge on systems built out of pure chaos. Patsis & Kalapotharakos (2011) call *ordered* spirals those that have as building block a set of stable periodic orbits; on the other hand, they call *chaotic* spirals those that they believe are constituted mainly from stars in chaotic motion.

Currently, discussion about the nature of spiral arms as a long-lasting or transient structure is ongoing in the field. Theoretical studies have demonstrated that spiral arms might be rather transient structures (Goldreich & Lynden-Bell 1965; Julian & Toomre 1966; Sellwood & Carlberg 1984; Foyle et al. 2011; Sellwood 2011; Pérez-Villegas et al. 2012; Fujii & Baba 2012; Kawata et al. 2012). However, if spiral arms are smooth, weak and/or with small pitch angles, the spiral structure could be long-lasting (Pérez-Villegas et al. 2012, this study is only referred to late type spirals).

Our aim in this work is to produce an extensive study of the stellar orbits in the galactic plane for unbarred spiral galaxies using an axisymmetric potential plus the PERLAS model for the spiral arms potential. We present a detailed orbital study on models of normal spiral galaxies, as ideally classified by Hubble (1926). In particular, this work is devoted to one of the structural parameters of spiral arms: the pitch angle. Although the best known part of Hubble’s classification regarding to the pitch angles, categorizes galaxies assuming that early types possess the most tightly wound spiral

arms (i.e. smallest pitch angles) and late types possess the least wounded spiral arms (largest pitch angles), this represents just the “envelope” of the classification. Spirals galaxies actually present a large observational scatter in this parameter (Kennicutt 1981; Ma et al. 2000; Davis et al. 2012).

This paper is organized as follows. In Section A.1.2, the three-dimensional galactic potential, and the employed methods used to compute orbits are briefly described. In Section A.1.3, we present our results: two pitch angle restrictions in galaxies, the first based on ordered orbital behavior, and the second based on chaotic behavior. Finally, in Section A.1.4, we present our conclusions.

### A.2.2. Methodology and Numerical Implementation

We have constructed a family of models for the potential of normal spiral galaxies (Sa, Sb and Sc), as classified by Hubble (1926), and also based on recent observational parameters from literature. For this purpose we solve numerically the equations of motion for stars in an axisymmetric potential plus a spiral arm potential. The main methods to study stellar dynamics that we use in this work are periodic orbital analysis and Poincaré diagrams.

#### Models for Normal Spiral Galaxies

The most common method to model spiral arms is a two-dimensional bisymmetric local potential approximated by a cosine function (based on the solution for the TWA). It assumes that spiral arms are smooth, self-consistent perturbations to the axisymmetric potential. In this regime, self-consistency can not be assured if a little larger pitch angles and/or slightly larger amplitudes to the spiral arms than the ones assumed for the TWA, are imposed.

To model realistic spiral arms in galaxies (those with pitch angles a little larger than about  $6^\circ$ , or amplitudes of the spiral arms a little larger than 1% of the disk mass), one walks readily far away from the TWA self-consistency limits. Spiral arms in real galaxies, are complicated three-dimensional mass gigantic features, these are clearly to the eye, far beyond an approximation as simple as a cosine function. In this case, other methods to test approximately self-consistency of steady potentials should

be applied. In this work we employ to this purpose order and chaos orbital studies and the construction of periodic orbits. Between a cosine potential and a potential based on mass distribution, the differences are not negligible at all, specially, for example, it comes about sensitive orbital behavior, such as chaos. Therefore, we decided to use a more realistic density distribution based on a three-dimensional potential model, which allows more complicated shapes and a more detailed representation of a potential for spiral arms.

We employ the spiral arms potential called PERLAS from Pichardo et al. (2003), this potential is formed by a superposition of oblate, inhomogeneous spheroids settled down along the logarithmic spiral locus given by Roberts, Huntley, & van Albada (1979),

$$g(R) = -\left(\frac{2}{N \tan i_p}\right) \ln[1 + (R/R_s)^N], \quad (\text{A.2})$$

with  $i_p$  the pitch angle.  $R_s$  marks the galactocentric position where the spiral arms begin, and  $N$  is a constant that gives the shape to the starting region of the spiral arms (we set it to 100; for details see Pichardo et al. 2003).

This three-dimensional bysymmetric self-gravitating potential is more realistic since it considers the force exerted by the whole spiral arms structure, providing a much more complicate shape for the gravitational potential, unlike a two-dimensional local arm like the cosine potential. Comparison of PERLAS with observations and with other models have been already published (Pichardo et al. 2003; Martos et al. 2004; Antoja et al. 2009, 2011). Spiral arms self-consistency has been tested through the reinforcement of the spiral potential by the stellar orbits (Patsis et al. 1991; Pichardo et al. 2003).

The corresponding parameters used to produce models for normal spiral galaxies (Sa,Sb and Sc) are presented in Table A.1. The spiral arms potential is superimposed on an axisymmetric potential, that includes a Miyamoto-Nagai (1975) disk and bulge, and a massive halo (like that from the potential described by Allen & Santillán 1991, for the Milky Way). Based on observational data from literature we obtained the mass of the disks, and assuming the mass ratio between bulge and disk (depending on the morphological type), we fitted the rotation curve. We derive the halo mass using the rotation curve. In Figure A.4, we show our resulting rotation curves for each morphological type.

Theoretical studies of orbital self-consistency in normal spiral galaxies show that

weak spiral arms end at corotation and strong spiral arms end at the 4/1 resonance (Contopoulos & Grosbøl 1986, 1988; Patsis, Contopoulos & Grosbøl 1991). Then, the spiral arms limits depend on the position of the Inner Lindblad Resonance (ILR), for the inner part, and corotation for the outer part of the spirals (in our models we place the spiral arms between these two resonances). Consequently, the angular velocity of spiral arms,  $\Omega_p$ , sets the corresponding value of the beginning and end of the spiral arms. Measuring spiral arms angular velocities observationally is not an easy task. We know however that on average, earlier type galaxies tend to be more massive, i.e., on average, Sa galaxies rotate faster than Sc galaxies. For our models we take a clockwise rotation of the disk and assume an angular velocity of  $\Omega_p = -30, -25$ , and  $-20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ , for the spiral arms in Sa, Sb, and Sc galaxies, respectively (see Table A.1 for references). In Figure A.5 we show resonance diagrams for our galactic models. The total mass of spiral arms in our models is 3% of the disk mass independently of the Hubble type, which represents a conservative (low-mass) spiral mass for disc galaxies in general. Additionally, to assure the spiral mass we fixed to our models is within observational limits, we have employed a known parameter  $Q_T$  (Combes & Sanders 1981). This parameter has been applied to bars and spiral arms (Buta & Block 2001; Laurikainen & Salo 2002; Vorobyov 2006; Kalapotharakos et al. 2010) to measure the strength of large scale structures in galaxies. The parameter  $Q_T$  is defined as

$$Q_T(R) = F_T^{\max}(R)/|\langle F_R(R) \rangle|, \quad (\text{A.3})$$

where  $F_T^{\max}(R) = |(\frac{1}{R} \partial\Phi(R, \theta)/\partial\theta)|_{\max}$ , represents the maximum amplitude of the tangential force at radius  $R$ , and  $\langle F_R(R) \rangle$ , is the mean axisymmetric radial force at the same radius, derived from the  $m = 0$  Fourier component of the gravitational potential. In Figure A.1 we present the maximum value of the parameter  $Q_T$  for each type of galaxy as the pitch angle increases from  $0^\circ$  to  $90^\circ$ . Maximum values up to 0.4 for this parameter are reasonable for observed spirals (Buta et al. 2005).

## Orbital Analysis

For the orbital analysis we employed periodic orbits and Poincaré diagrams. With this extensive orbital study we are able to set two restrictions to one structural parame-

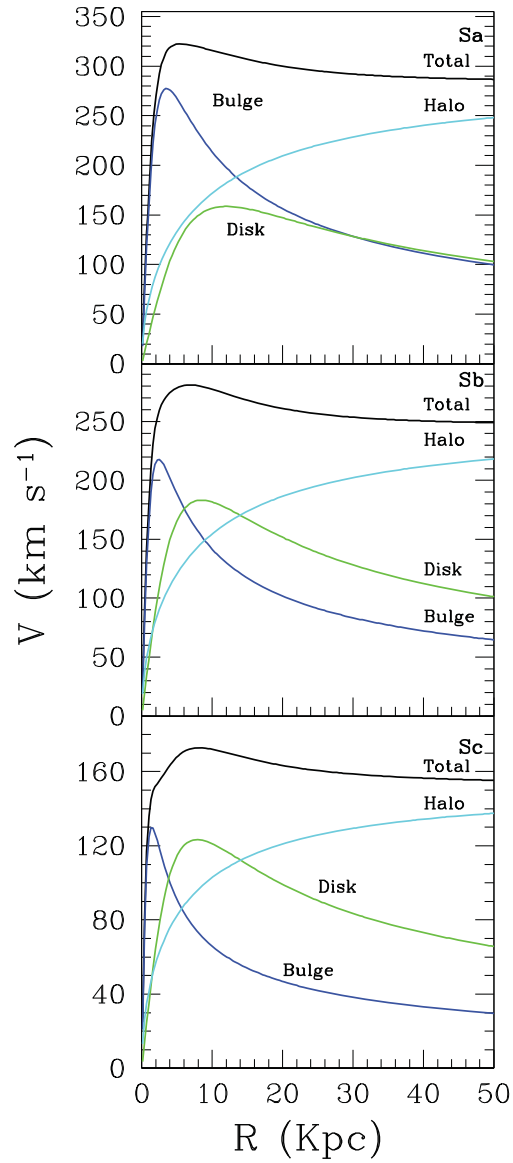


FIGURA A.4: Rotation curves for Sa (top panel), Sb (middle panel) and Sc (bottom panel) galaxies.

ter of spiral arms: the pitch angles. The motion equations are solved in the non-inertial reference frame, attached to the spiral pattern, and in Cartesian coordinates  $(x', y', z')$ .

### *Periodic Orbits*



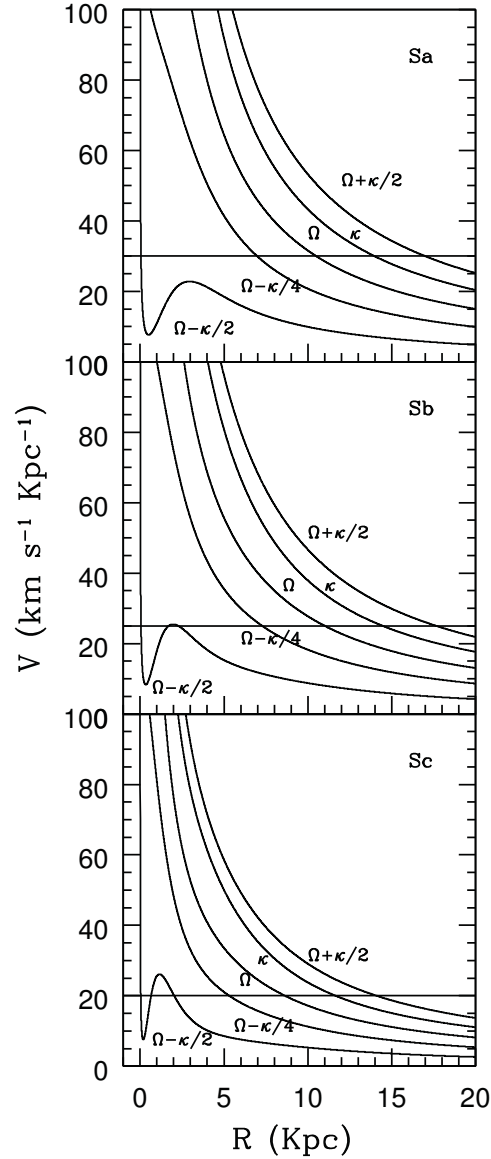


FIGURA A.5: Resonance diagrams for Sa (top panel), Sb (middle panel) and Sc (bottom panel) galaxies. Horizontal line denotes the spiral pattern angular speed:  $|\Omega_p| = 30, 25$  and  $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  for an Sa, an Sb and an Sc, from top to bottom.

Periodic orbits represent the simplest orbits of potentials in general. They are also the most important orbits, because these are followed for sets of non-periodic orbits, and even for chaotic orbits, librating around the periodic ones, i.e. forming tubes surrounding the periodic orbits. In self-consistent systems, periodic orbits support large-scale

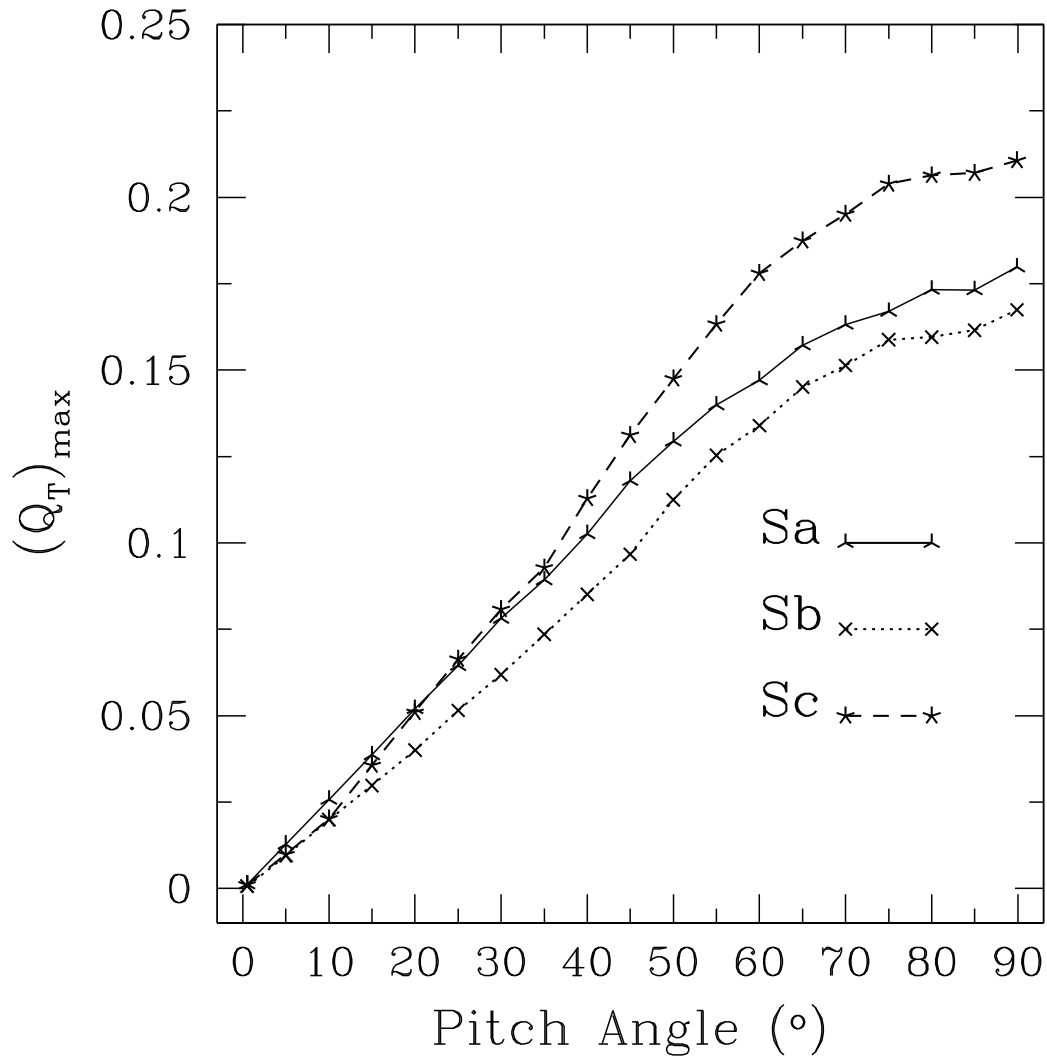


FIGURA A.6:  $(Q_T)_{\max}$  represents the maximum value of the parameter  $Q_T(R)$  (maximum relative torques) vs. pitch angle of the spiral arms model. Solid line represents the  $(Q_T)_{\max}$  for an Sa galaxy, dotted line represents the  $(Q_T)_{\max}$  for an Sb galaxy and dashed line represents the  $(Q_T)_{\max}$  for an Sc galaxy.

structures, such as bars and spiral arms, they are known consequently as the “dynamic backbone” of potentials.

TABLA A.2: Parameters of the Spiral Arms Models

Parameter	Value			Reference
<i>Spiral Arms</i>				
	Sa	Sb	Sc	
locus	Logarithmic			1,10
arms number	2			2
pitch angle(°)	4-40	8-45	10-60	3,8
$M_{Spiral}/M_{disk}$	3%			
scale-length (kpc)	7	5	3	4,5
pattern speed ( $\Omega_{sp}$ ) $\text{km s}^{-1}\text{kpc}^{-1}$ (clockwise)	-30	-25	-20	1,7
ILR position (kpc)	3	2.29	2.03	
corotation position (kpc)	10.6	11.14	8.63	
inner limit (kpc)	3	2.29	2.03	~ILR position based
outer limit (kpc)	10.6	11.14	8.63	~corotation position based
<i>Axisymmetric Components</i>				
Disk Mass / Halo Mass ( <sup>a</sup> )	0.07	0.09	0.1	4,9
Bulge Mass / Disc Mass	0.9	0.4	0.2	5,9
Rot. Curve ( $V_{max}$ ) ( $\text{km s}^{-1}$ )	320	250	170	8
Disk Mass ( $M_{\odot}$ )	$12.8 \times 10^9$	$12.14 \times 10^9$	$5.10 \times 10^9$	4
Bulge Mass ( $M_{\odot}$ )	$11.6 \times 10^9$	$4.45 \times 10^9$	$1.02 \times 10^9$	$M_B/M_D$ based
Halo Mass ( $M_{\odot}$ )	$1.64 \times 10^{12}$	$1.25 \times 10^{12}$	$4.85 \times 10^{11}$	$M_D/M_H$ based
Disk scale-length (kpc)	7	5	3	4,5

<sup>a</sup> Up to 100 kpc halo radius References —1) Grosbol & Patsis 1998. 2) Drimmel et al. 2000; Grobøl et al. 2002. 3) Kennicutt 1981. 4) Pizagno et al. 2005 5) Weinzirl et al. 2009. 6) Contopoulos 2007. 7) Patsis et al. 1991; Fathi et al. 2009. 8) Brosche 1971; Ma et al. 2000; Sofue & Rubin 2001. 9) Block et al. 2002. 10) Pichardo et al. 2003.

We computed periodic orbits using the Newton-Raphson method. As a first guess for the initial conditions for the calculation of the periodic orbit the code provides the

periodic orbit at a given radius in the background axisymmetric potential. The orbits are launched from  $y' = 0$ , on the  $x'$ -axis  $> 0$  with any  $v'_x = 0$  and  $v'_y = v_c$ , where  $v_c$  is the corresponding circular velocity given by,

$$v_c = \left( x' \left| \frac{d\Phi_0}{dx'} \right| \right)^{1/2}. \quad (\text{A.4})$$

Periodic orbits close themselves in one or more periods; we use this property to find them. In this manner, the Newton-Raphson method searches the roots of the next error equations,

$$x'_f - x'_i = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$v'_{xf} - v'_{xi} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$v'_{yf} - v'_{yi} = 0 \quad (\text{A.7})$$

where  $x'_i$  is the initial position from where orbits are launched in the  $x'$ -axis, and  $v'_{xi}$ ,  $v'_{yi}$  are the initial velocity in that point;  $x'_f$  is the position after a full cycle. When the method finds a root, a periodic orbit is found.

### *Density Response*

In order to quantify the support of periodic orbits to the spiral arm potential, we follow the method of Contopoulos & Grosbøl (1986) to obtain the density response to a given spiral perturbation. This method assumes that the stars with orbits trapped around an unperturbed circular orbit (orbits in the axisymmetric potential), and with the sense of rotation of the spiral perturbation, are also trapped around the corresponding periodic orbit in the presence of the perturbation. In this manner, we computed a series of periodic orbits and found the density response along their extension using the conservation of mass flux between any two successive orbits. We found the position of

the density response maxima along each periodic orbit, and thus the positions of the response maxima on the galactic plane are known. These positions are compared with the center of the imposed spiral arm potential PERLAS, i.e., the spiral locus.

Once we found the position of the response maxima, with the density response along each periodic orbit we computed the average density response around each one of these positions, taking a circular vicinity with a radius of 500 pc. We then compared the density response with the imposed density. The density imposed is the sum of the axisymmetric disk density on the galactic plane and the central density of the spiral arms.

### *Poincaré Diagrams*

In Poincaré diagrams ordered orbits appear as invariant one-dimensional curves; periodic orbits on the other hand, draw a finite set of dots (and in the orbits that close themselves in one period, draw only one dot). In these phase space diagrams, chaotic orbits are seen as scattered sets of dots.

The effective potential in the non-inertial frame on the galactic plane is given by:

$$\Phi_{\text{eff}}(x', y') = \Phi_0 + \Phi_{sp}(x', y') - \frac{1}{2}\Omega_p^2(x'^2 + y'^2), \quad (\text{A.8})$$

where  $\Phi_0$  is the axisymmetric potential,  $\Phi_p$  is the potential exerted by the spiral arms, and  $\Omega_p$  is its angular velocity. The only analytical integral of stellar motion known in the non-inertial system of reference, is the Jacobi constant, given by

$$E_J = \frac{1}{2}v'^2 + \Phi_{\text{eff}}, \quad (\text{A.9})$$

where  $v'$  is the star velocity. Poincaré diagrams were constructed following the usual procedure. We found the crossing points with the  $x'$ -axis of orbits with a given value of  $E_J$  and made Poincaré diagrams  $x'$  vs.  $v'_x$  for the crossing points having  $v'_y > 0$ . All the crossing points with  $v'_y < 0$  were incorporate in the  $v'_y > 0$  diagrams, taking  $x' \rightarrow -x'$  and  $v'_x \rightarrow -v'_x$ .

Poincaré diagrams present two regions, each one containing orbits with a sense of rotation, prograde or retrograde, defined in the galactic non-inertial frame. In our

models, the spiral patterns move in the clockwise sense. Therefore, the right side of the Poincaré diagram ( $x' > 0$ ) is the retrograde region, while the left side ( $x' < 0$ ), is the prograde region.

### A.2.3. Results

We carried out an extensive orbital study with periodic orbital analysis, density response and studies in the phase space to determine whether limit values to different structural parameters of normal spiral galaxies (assuming the definition of the Hubble sequence), can be established. In a previous paper (Pérez-Villegas et al. 2012) we presented an orbital study of the effect of the pitch angle for late spiral galaxies. In this second work, we extend this study to all normal spiral galaxies (from Sa to Sc). We produced axisymmetric potential models to simulate typical Sa, Sb and Sc spiral galaxies, and superposed a bisymmetric steady spiral arms potential, PERLAS, and studied the evolution of orbital behavior in the plane of the disk, as we changed the pitch angle for each galaxy type. Normal spiral galaxies present a wide scatter in the pitch angle, ranging from  $\sim 4^\circ$  to  $50^\circ$ . We have found two restrictions for the pitch angle in normal spiral galaxies, the first based on ordered behavior and the second based on chaotic behavior.

#### Pitch Angle Restriction Based on Ordered Motion

In the case of long-lasting steady potentials, self-consistency can be approximately tested through the construction of periodic orbits. The existence of periodic orbits supporting spiral arms increases the probability of supporting long-lasting spiral arms. We present a periodic orbital study for each morphological type (see Figures A.7 – A.9). In addition, we found the position of the density response maxima along each periodic orbit. We compared these positions with the center of the imposed spiral arms. Figures A.7 – A.9 show the response maxima as filled squares, where the orbits crowd producing a density enhancement, and the imposed spiral pattern are represented by open squares. In these figures we present periodic orbits for Sa, Sb and Sc galaxies (Figure A.7, Figure A.8, Figure A.9, respectively). We have used the same axisymmetric background potential for each morphological type, based on the parameters presented

in Table A.1. The pitch angle in these figures ranging from  $4^\circ$  to  $40^\circ$  for an Sa galaxy, from  $8^\circ$  to  $45^\circ$  for an Sb galaxy and from  $10^\circ$  to  $60^\circ$  for an Sc galaxy.

In Figure A.7, we see how for smaller pitch angles ( $i \lesssim 15^\circ$ ), the density response maxima supports closely the spiral arms potential, this means that the filled squares in the figure, that represent the places in the arm where stars would crowd for long times, settle down along the locus of the imposed spiral, making the existence of stable (long-lasting) spiral arms more probable. On the other hand, for spiral arms with pitch angles larger than  $\sim 15^\circ$ , the response maxima precedes systematically the imposed spiral arm potential, i. e., the response produces spiral arms with smaller pitch angles than the imposed spiral arms potential.

Figure A.8 shows a similar behavior than the one for Sa galaxies, but in this case, the pitch angle range is slightly wider. For pitch angles ( $i \lesssim 18^\circ$ ) the density response supports closely the imposed spiral arms. Beyond ( $i \gtrsim 18^\circ$ ), the density response produces spiral arms with smaller pitch angles than the imposed locus, avoiding to support the spiral structure beyond pitch angles of  $18^\circ$ .

Once more, Figure A.9 shows a similar behavior than the one for Sa and Sb galaxies, but in this case, the pitch angle range is slightly wider. For pitch angles ( $i \lesssim 20^\circ$ ) the density response supports closely the imposed spiral arms. Beyond ( $i \gtrsim 20^\circ$ ), the density response produces spiral arms with smaller pitch angles than the imposed locus, avoiding to support the spiral structure beyond pitch angles of  $20^\circ$ .

In the three types of galaxies, pitch angles beyond  $15^\circ$ ,  $18^\circ$  and  $20^\circ$  for Sa, Sb, and Sc galaxies, respectively, the density response seem to “avoid” open long-lasting spiral arms. Long-lasting spiral arms are not supported anymore after these limits, spiral arms in these cases may be rather transient structures.

An additional method to complement and to reinforce the results given by periodic orbits, is the comparison of the spiral arms density response (filled squares in Figures A.10 – A.12) with the imposed density (open squares in Figures A.10 – A.12). In Figure A.10, we present the densities (the spiral arms density response, and the spiral arm imposed density, i.e. PERLAS), for an Sa galaxy. This Figure shows as well as the density response maxima in the previous diagrams, that for pitch angles up to  $\sim 15^\circ$ , the density response fits well with the imposed density. In Figure A.11, we present the densities for an Sb galaxy. In this figure we see almost the same behavior than in Figure

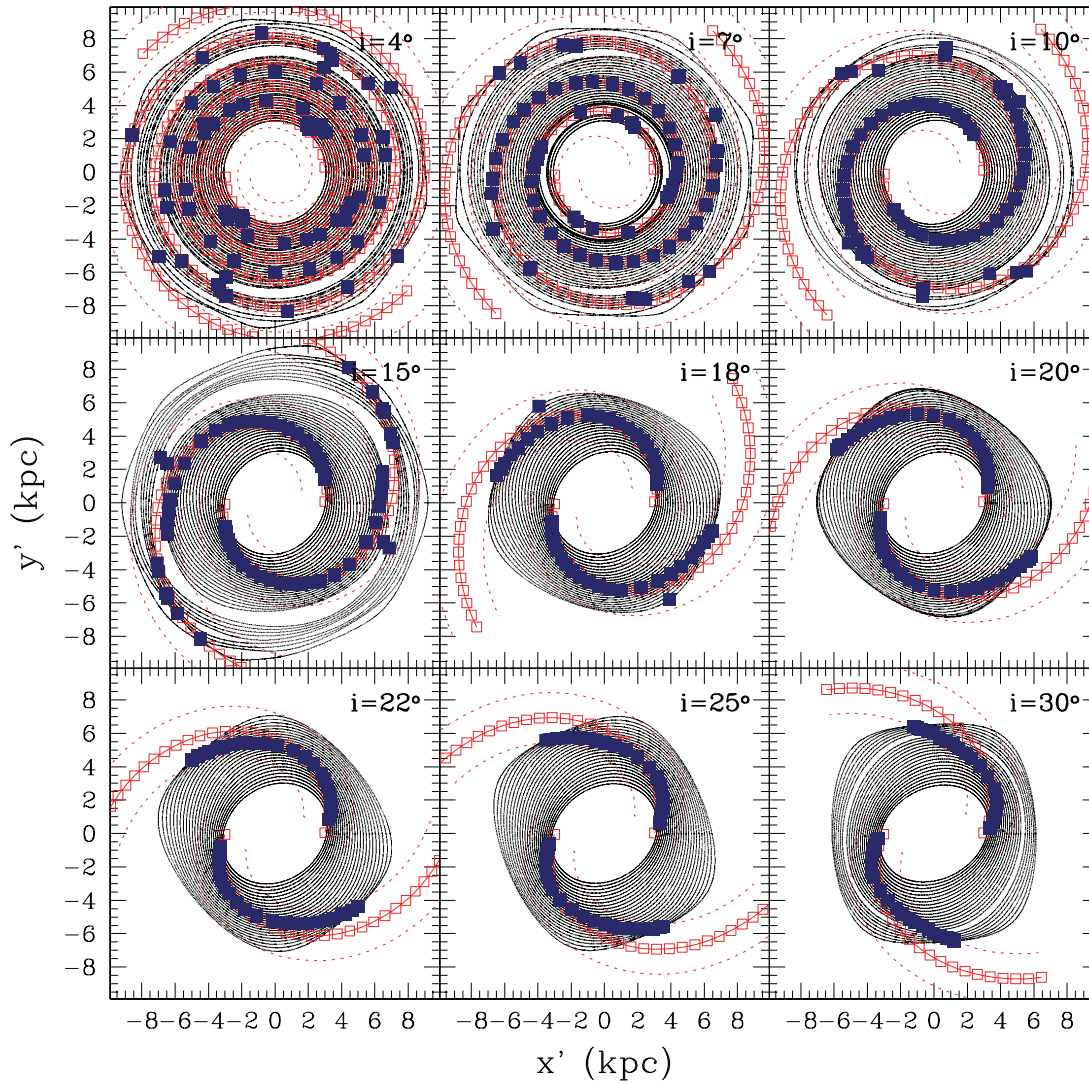


FIGURA A.7: We present 9 panels showing the periodic orbits, response maxima (filled squares), and the spiral locus (open squares), for the three-dimensional spiral model for an Sa galaxy (Table A.1), with pitch angles ranging from  $4^\circ$  to  $30^\circ$ .

A.11, but in this case, the pitch angle limit, where the density response does not fit the imposed arm, is  $18^\circ$ . Finally, in Figure A.12, we present the same diagrams for an Sc galaxy. Here, the behavior is very similar than in the Sa and Sb cases, but the limit for the pitch angle, where the density response is fitted to the imposed density, is  $\sim 20^\circ$ .



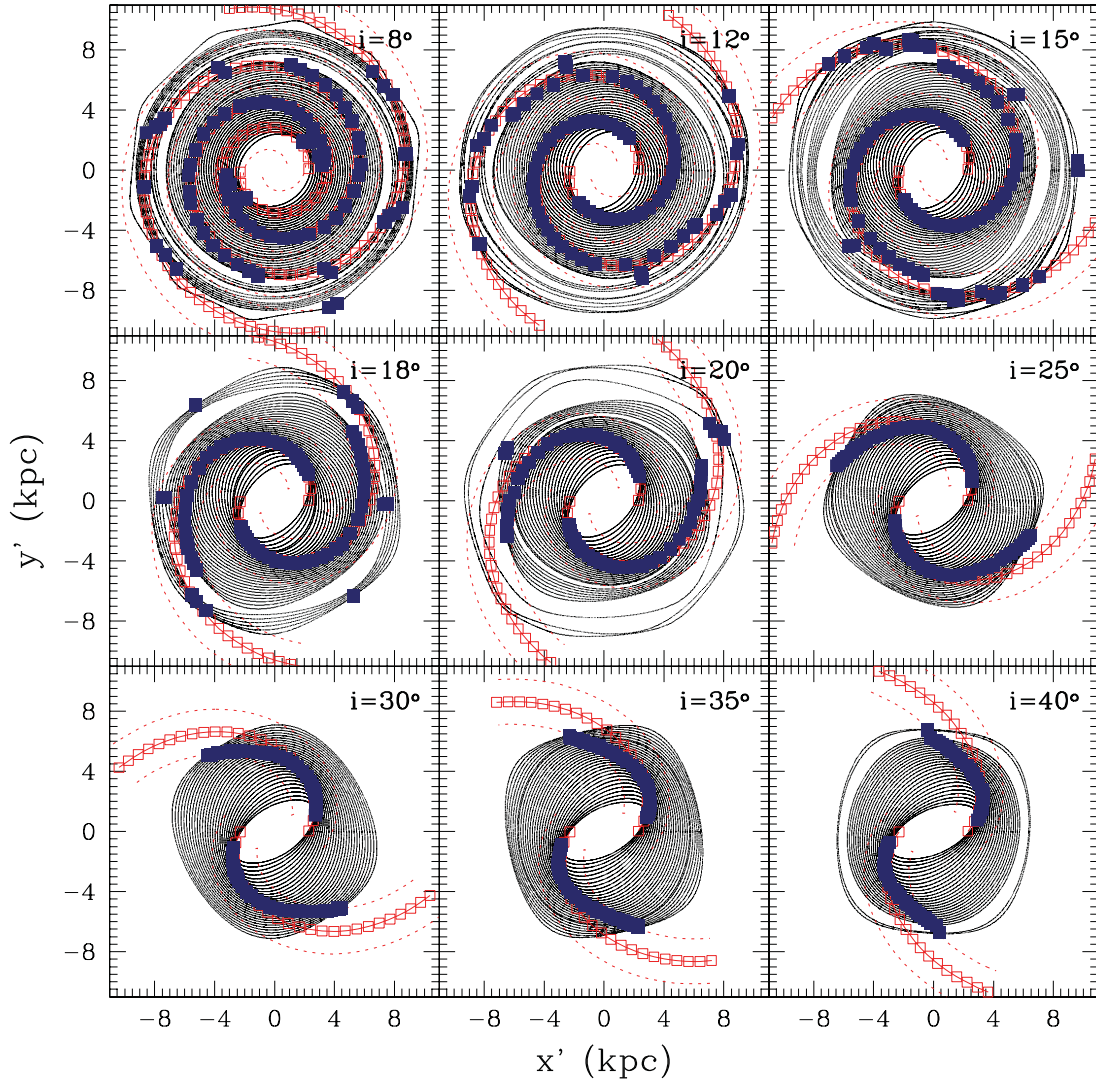


FIGURA A.8: We present 9 panels showing the periodic orbits, response maxima (filled squares), and the spiral locus (open squares), for the three-dimensional spiral model for an Sb galaxy (Table A.1), with pitch angles ranging from  $8^\circ$  to  $40^\circ$ .

With periodic orbits, maxima density response, and comparing the density response and imposed density, we noticed that to have long-lasting spiral arms the pitch angle should be smaller than  $15^\circ$ ,  $18^\circ$  or  $20^\circ$ , depending on morphological type. However, the spiral arms could exist but probably in a transient form.

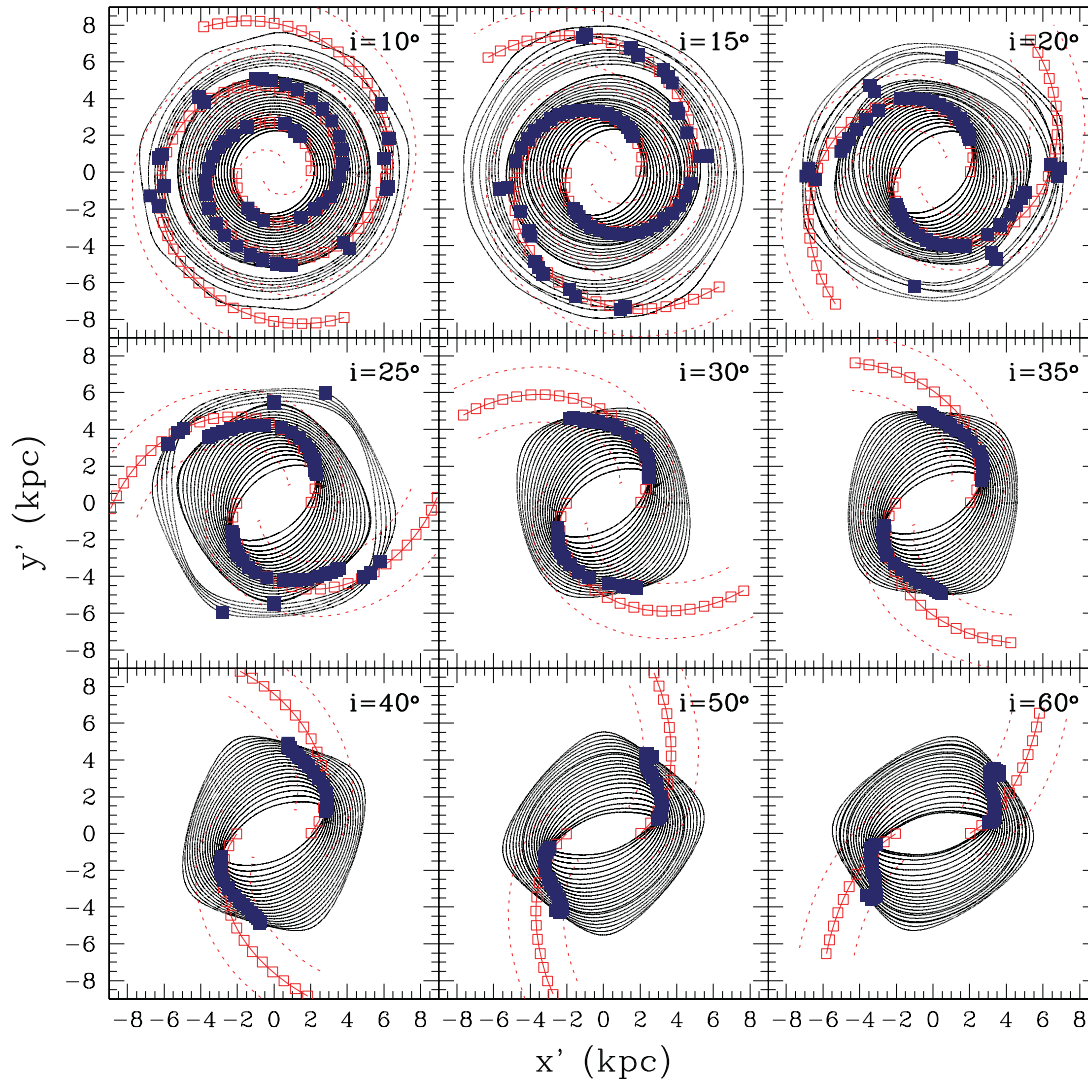


FIGURA A.9: We present 9 panels showing the periodic orbits, response maxima (filled squares), and the spiral locus (open squares), for the three-dimensional spiral model for an Sc galaxy (Table A.1), with pitch angles ranging from  $10^\circ$  to  $60^\circ$ .

### Pitch Angle Restriction Based on Chaotic Motion

Confined chaotic orbits are able to support large-scale structures, such as spiral arms or bars (Patsis & Kalapotharakos 2011; Contopoulos & Grosbøl 1986). However,

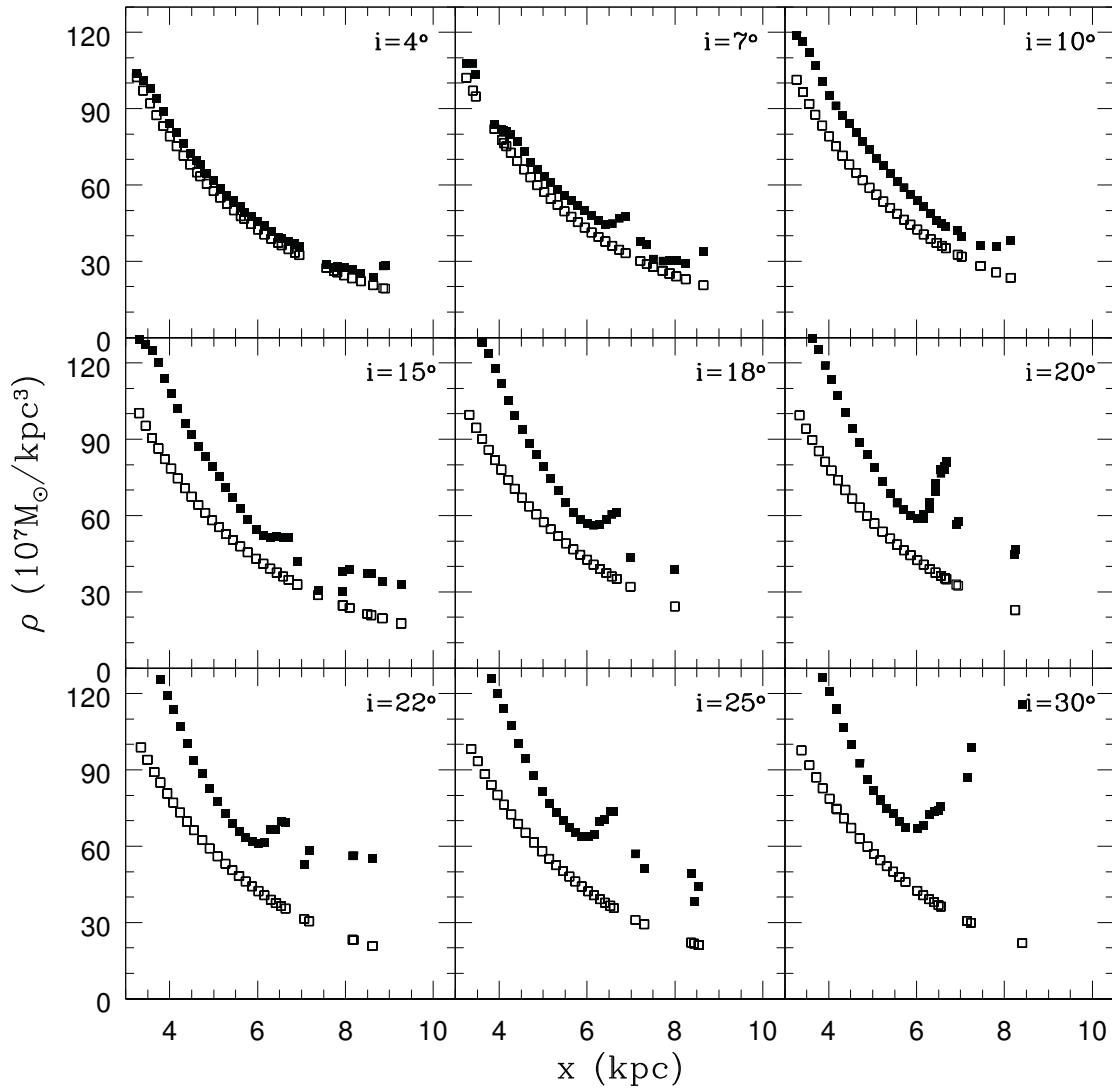


FIGURA A.10: In this figure, filled squares represent the density response of the spiral arms for an Sa galaxy, open squares represent the imposed density, with pitch angles ranging from  $4^\circ$  to  $30^\circ$ .

large-scale structures are not expected to emerge on systems built out of pure chaos. In this study we found a restriction based on chaotic behavior. To do this, we have produced an extense study of the Jacobi energy families in the phase space, studying the effect of increasing the pitch angle in normal spiral galaxies. With this study we

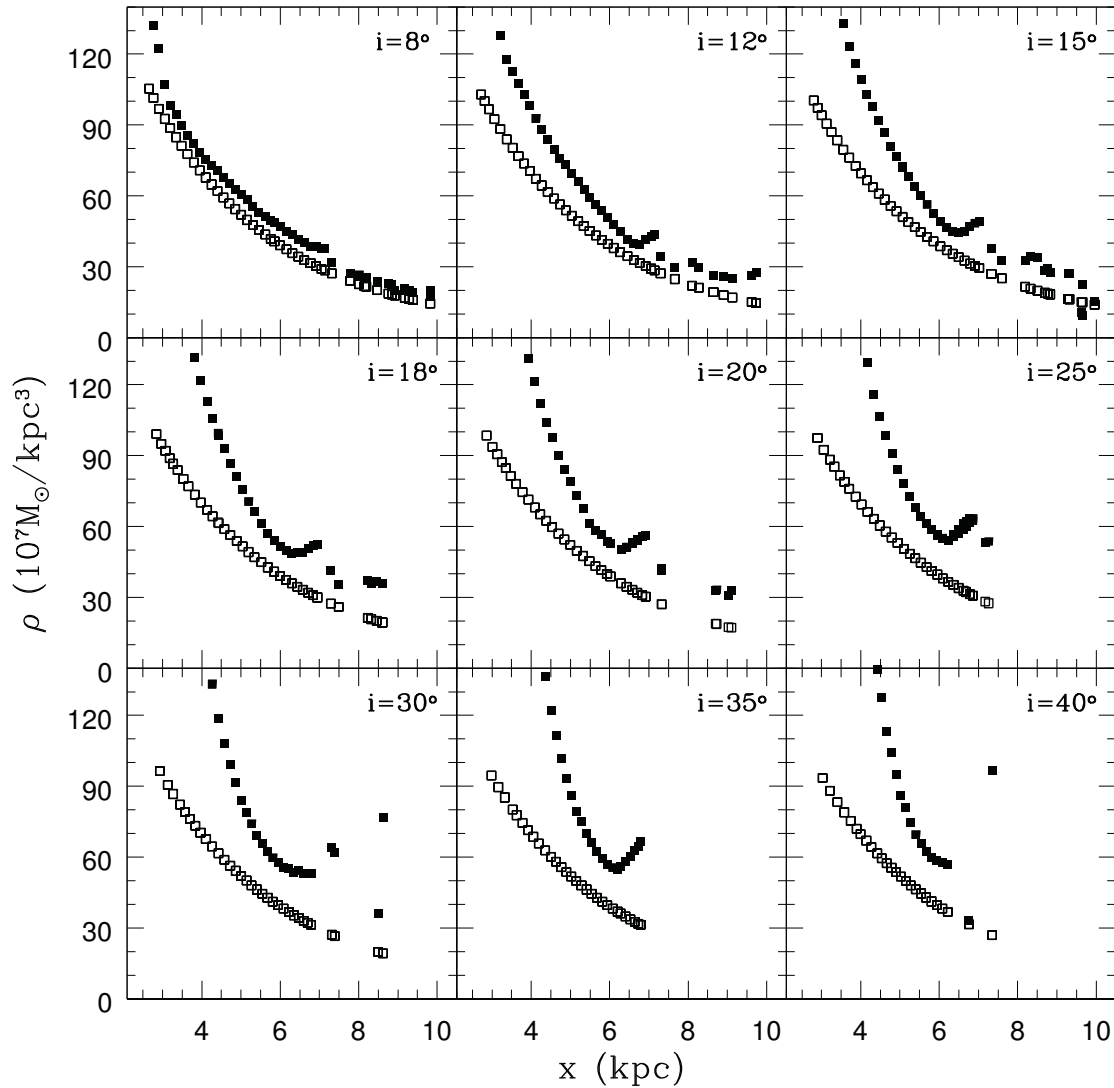


FIGURA A.11: In this figure, filled squares represent the density response of the spiral arms for an Sb galaxy, open squares represent the imposed density, with pitch angles ranging from  $8^\circ$  to  $40^\circ$ .

search for a limit of the pitch angle, for which chaos becomes pervasive and destroys all ordered orbits in the relevant spiral arm region.

We present here a set of phase space diagrams for each morphological type (Figures A.13 – A.15). As in the study of periodic orbits (Section A.2.3), we employed an axisym-

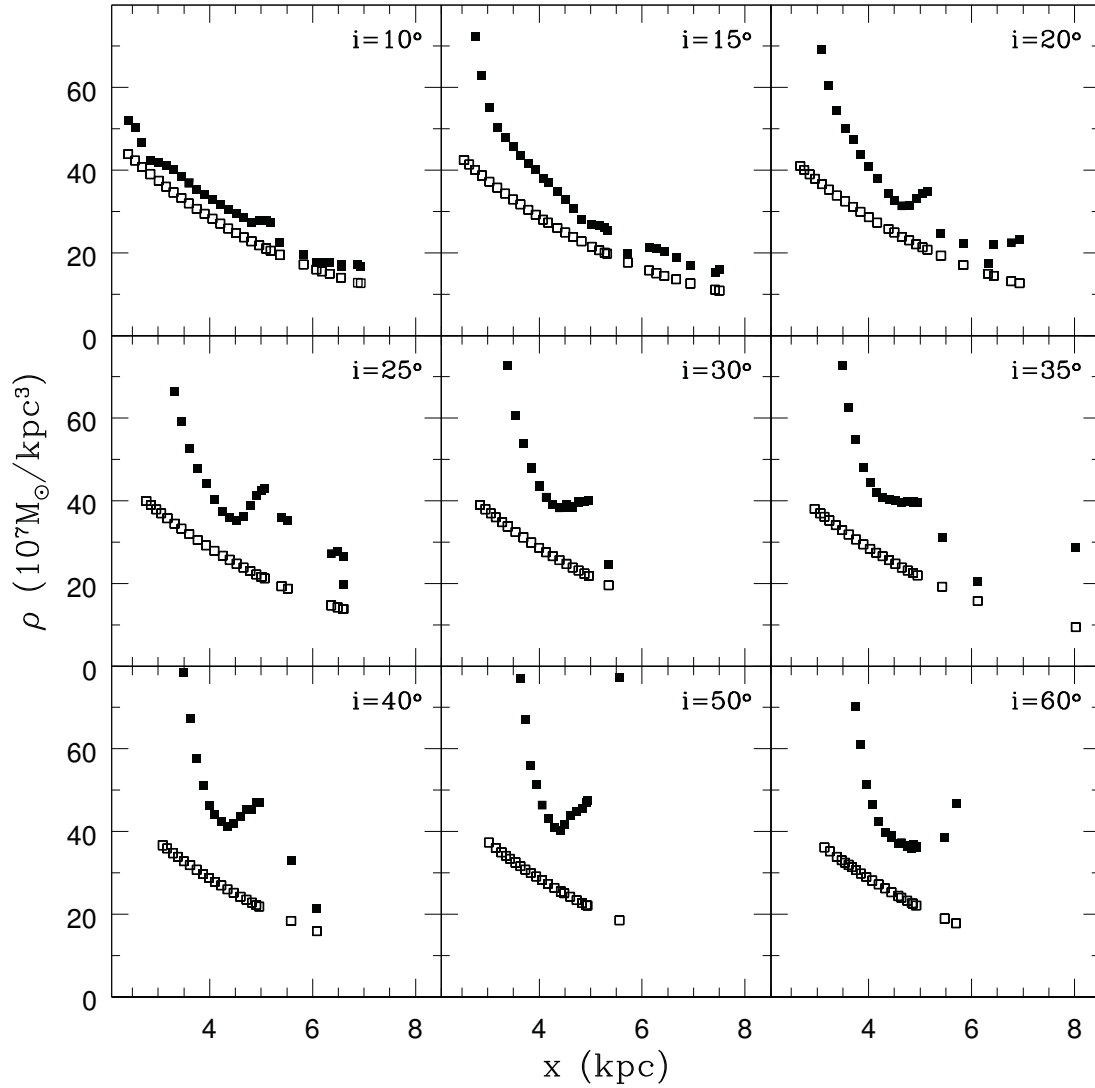


FIGURA A.12: In this figure, filled squares represent the density response of the spiral arms for an Sc galaxy, open squares represent the imposed density, with pitch angles ranging from  $10^\circ$  to  $60^\circ$ .

metric background potential for an Sa, Sb and Sc galaxy, based on the parameters given in Table A.1. In these experiments we have only varied the pitch angles. Each mosaic has 20 panels, that show Poincaré diagrams with different Jacobi energy families running from  $E_J = -4050$  to  $-3278 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$  for an Sa galaxy, from  $E_J = -3150$  to

$-2445 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$  for an Sb galaxy, and from  $E_J = -1080$  to  $-1021 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$  for an Sc galaxy, covering the total extension of spiral arms. The left part of each diagram represents prograde orbits in the reference system of the spiral arms.

Figure A.13 shows Poincaré diagrams for an Sa galaxy, going from  $4^\circ$  (top line of diagrams) to  $30^\circ$  (bottom line of diagrams). For pitch angles between  $4^\circ$  and  $10^\circ$  (first two lines of diagrams), the majority of orbits are ordered and simple, periodic orbits support spiral arms up to corotation approximately. The onset of chaos is clear at about  $10^\circ$ . As we increase the pitch angle, for  $19^\circ$  (third line of diagrams), the orbital behavior is more complex, and it presents resonant islands. For  $30^\circ$  (bottom line of diagrams), the chaotic region covers most of the regular prograde orbits. For pitch angles beyond  $\sim 30^\circ$ , chaos destroys periodic orbits.

Figure A.14 shows Poincaré diagrams for an Sb galaxy, going from  $12^\circ$  (top line of diagrams) to  $40^\circ$  (bottom line of diagrams). For pitch angles of  $10^\circ$  or less, the ordered orbits dominate. As we increase the pitch angles, at  $12^\circ$  (first line of diagrams), the orbital behavior is mainly ordered, but close to corotation there is already a small chaotic region. For  $21^\circ$  (second line of diagrams), the onset of chaos starts, and there is a variety of complicate orbits. For  $30^\circ$  (third line of diagrams), the chaos region increases, and the orbital structure becomes much more complex. For  $40^\circ$  (bottom line of diagrams), the chaotic region covers almost all the regular prograde orbits. For pitch angles beyond  $\sim 40^\circ$  chaos destroys periodic orbits.

In Figure A.15, we present Poincaré diagrams for an Sc galaxy, going from  $20^\circ$  (top line of diagrams) to  $50^\circ$  (bottom line of diagrams). For a pitch angle of  $20^\circ$  (first line of diagrams) or less, the majority of orbits are ordered and simple, the spiral arms are supported up to corotation. As we increase the pitch angle, at  $30^\circ$  (second line of diagrams), the orbital behavior is more complex, presenting resonant islands and the chaos region becomes already important, but this is still contained by stable periodic orbits. For  $40^\circ$  (third line of diagrams), chaos becomes pervasive, compromising the available phase space around the stable periodic orbits. For  $50^\circ$  (bottom line of diagrams), the chaotic region covers practically all regular prograde orbits, approaching closely to the main periodic orbits. For pitch angles beyond  $\sim 50^\circ$  chaos destroys periodic orbits.

In general, chaotic motion begins in the prograde region. The main cause for chao-

tic motion in these seems to be the onset of bifurcations and resonance interactions (Contopoulos 1967; Martinet 1974; Athanassoula et al. 1983; Pichardo et al. 2003). Resonances for retrograde orbits are more widely separated than the resonances for prograde orbits. In these experiments, we have maintained the same pattern angular speeds, that places resonances, at the same radii, increasing only pitch angles, which in turn, increases dramatically chaotic regions. This means that at a given position of the resonances (posed by the angular speeds), increasing pitch angles, will widen the resonance regions and the consequent overlap of resonances.

#### A.2.4. Conclusions

We have produced a set of models for observationally motivated potentials to simulate typical Sa, Sb and Sc spiral galaxies with three dimensional bisymmetric spiral arms. Observed galaxies classified as Sa, Sb or Sc present a wide scatter in pitch angles going from  $\sim 4^\circ$  to  $25^\circ$  for Sa galaxies, from  $\sim 8^\circ$  to  $35^\circ$  for Sb galaxies and from  $\sim 10^\circ$  to  $50^\circ$ . With our models, we studied extensively the stellar dynamical effects in the plane of the disk, of the spiral arms pitch angle, ranging from  $4^\circ$  to  $40^\circ$ , for an Sa galaxy, from  $8^\circ$  to  $45^\circ$ , for an Sb galaxy and from  $10^\circ$  to  $60^\circ$ , for an Sc galaxy.

In this paper, we present two restrictions relative to one important structural parameter of spiral galaxies, the pitch angle. The first restriction is based on the orbital ordered behavior. With the study of periodic orbits and density response, we found that there is an abrupt limit for the density response at approximately  $15^\circ$  for Sa galaxies,  $18^\circ$  for Sb galaxies and  $20^\circ$  for Sc galaxies. This limit is up to which density response supports closely the imposed spiral arm potential at all radii. In cases, where the spiral arms potential is followed by their density response produced by periodic orbital crowding, the spiral arms are more stable and could be of a long-lasting nature. Beyond these limits, the density response produces systematically smaller pitch angles than the imposed spiral arms. Galaxies with spiral arms beyond these limits would rather be explained as transient features.

We found a second restriction, this time based on chaotic orbital behavior. In this case, we find a limit for each morphological type: for an Sa, the limit is  $\sim 30^\circ$ , for an Sb, the limit is  $\sim 40^\circ$ , and for an Sc the limit is  $\sim 50^\circ$ , for which chaotic region

dominates large regions of phase space, but there exist periodic orbits supporting spiral arms. Beyond these limits for each type of galaxy, chaos becomes pervasive destroying all orbital support. With this orbital study, we are able to pose a limit for maximum pitch angles in normal spiral galaxies before the system becomes completely chaotic.

We thank PAPIIT through grant IN110711.

## REFERENCES

- Allen, C. & Santillán, A. 1991, *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, 22, 256
- Antoja, T., Valenzuela, O., Pichardo, B., Moreno, E., Figueras, F. & Fernández D. 2009, *The Astrophysical Journal*, 700, L78
- Antoja, T., Figueras, F., Romero-Gómez, M., et al. 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 418, 1423
- Athanassoula, E., Bienaymé, O., Martinet, L., & Pfenniger, D. 1983, *A&A*, 127, 349
- Block, D. L., Bournaud, F., Combes, F., Puerari, I. & Buta, R. 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 394, L35
- Binney, J. & Tremaine, S. 1994, *Galactic Dynamics*(Pinceton University Press)
- Brosche, P. 1971, *Astronomy & Astrophysics*, 13, 293
- Buta, R. & Block, D. L. 2001, *The Astrophysical Journal*, 550, 243
- Buta, R., Vasylov, S., Salo, H. & Laurikainen, E. 2005, *AJ*, 130, 523
- Combes, F. & Sanders, R. H. 1981, *A&A*, 96, 164
- Contopoulos, G. 1967, *Bull. Astron. (Ser. 3)*, 2, 223
- Contopoulos, G. 1983, *Astronomy & Astrophysics*, 117, 89
- Contopoulos, G. 1995, *NYASA*, 751, 112
- Contopoulos, G. 2002, *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*, Springer, NY
- Contopoulos, G. 2007, *Chaos in Astronomy, Conference 2007*, Springer, 3
- Contopoulos, G. & Grosbøl, P. 1986, *A&A*, 155, 11
- Contopoulos, G., & Grosbol, P. 1988, *Astronomy & Astrophysics*, 197, 83
- Contopoulos, G. & Patsis, P. A., eds., 2008, *Chaos in Astronomy*, Springer, Berlin
- Contopoulos, G., Varvoglis, H. & Barbanis, B. 1987, *Astronomy & Astrophysics*, 172, 55
- Danver, C. G. 1942, *Ann. Lund. Obs.*, 10, 162



- Davis, B. L., Berrier, J. C., Shields, D. W., et al. 2012, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 199, 33
- de Vaucouleurs G. 1959, *Hanbuch der Physik*, 53, 275
- Drimmel, R. 2000, *Astronomy & Astrophysics*, 358, L13
- Fathi, K., Beckman, J. E., Piñol-Ferrer, N., Hernández, O., Martínez-Valpuesta, I. & Carignan, C. 2009, *The Astrophysical Journal*, 704, 1657
- Foyle, K., Rix, H.-W., Dobbs, C. L., Leroy, A. K., & Walter, F. 2011, *The Astrophysical Journal*, 735, 101
- Fujii, M. S., & Baba, J. 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427, L16
- Goldreich, P., & Lynden-Bell, D. 1965, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 130, 125
- Groot, H. 1925, *MNRAS*, 85, 535
- Grosbøl, P. 2003, *LNP*, 626, 201
- Grosbol, P. J. & Patsis, P. A. 1998, *Astronomy & Astrophysics*, 336, 840
- Grosbøl, P., Pompei, E., & Patsis, P. A. 2002, *Disks of Galaxies: Kinematics, Dynamics and Perturbations*, 275, 305
- Holmberg, E. 1958, *Medd. Lund. Ast. Obs. Ser. II*, No. 136
- Hubble, E. P. 1926, *ApJ*, 64,321
- Hubble, E. P. 1936, *The Realm of the Nebulae*. New Haven: Yale Univ. Press
- Julian, W. H., & Toomre, A. 1966, *The Astrophysical Journal*, 146, 810
- Kalapotharakos, C., Patsis, P. A. & Grosbøl, P. 2010, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 403, 83
- Kawata, D., Grand, R. J. J., & Cropper, M. 2012, *European Physical Journal Web of Conferences*, 19, 7006
- Kennicutt, R. 1981, *AJ*, 86, 1847
- Laurikainen, Eija & Salo, Heikki 2002, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 337, 1118
- Lin, C. C. & Shu, F. H. 1964, *Apj*, 140, 646
- Ma, Jhun, Zhao, Jun-liang, Zhang, Fei-peng, & Peng, Qiu-he 2000, *Chinese Astronomy and Astrophysics*, 24, 435
- Ma, J. 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 388, 389

- Martinet, L. 1974, *A&A*, 32, 329
- Martos, M., Hernandez, X., Yáñez, M., Moreno, E. & Pichardo, B. 2004, *MNRAS*, 350, 47
- Maupomé, L., Pişmiş, P. & Aguilar, L. 1981, *Rev. Mexicana Astron. Astrof.*, 6, 45
- Miyamoyo, M., & Nagai, R. 1975, *Pub. Astr. Soc. Japan*, 27, 533
- Patsis, P. A. 2008, *AN*, 329, 930
- Patsis, P. A., Contopoulos, G. & Grosbøl P. 1991, *A&A*, 243, 373
- Patsis, P. A., & Kalapotharakos, C. 2011, *Memorie della Societa Astronomica Italiana Supplementi*, 18, 83
- Patsis, P. A., Kaufmann, D. E., Gottesman, S. T. & Boonyasait, V. 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 394, 142
- Pérez-Villegas, A., Pichardo, B., Moreno, E., Peimbert, A., & Velázquez, H. M. 2012, *ApJL*, 745, L14
- Pichardo, B., Martos, M., Moreno, E. & Espresate, J. 2003, *ApJ*, 582, 230
- Pişmiş, P. & Maupomé, L. 1978, *Rev. Mexicana Astron. Astrof.*, 2, 319
- Pizagno, J., Prada, F., Weinberg, D. H., Rix, H. W., Harbeck, D., Grebel, E. K., Bell, E. F., Brinkmann, J., Holtzman, J. & West, A. 2005, *The Astrophysical Journal*, 633, 844
- Roberts, M. S. & Haynes, M. P. 1994, *ARA&A*, 32, 115
- Roberts, W.W., Jr., Huntley, J. M., & van Albada, G. D. 1979, *The Astrophysical Journal*, 233, 67
- Rubin, V. C., Burstein, D., Ford, W. K., Jr., & Thonnard, N. 1985, *The Astrophysical Journal*, 289, 81
- Sage, L. J. 1993, *A&A*, 272, 123
- Sandage A. 1961, *The Hubble Atlas of Galaxies*. Carnegie Institution of Washington, Washington D.C.
- Sandage A. 1975, *Galaxies and Universe-Stars and Stellar Systems* Chicago: University of Chicago Press
- Sandage, A. 2000, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 112, 504
- Savchenko, S. S., & Reshetnikov, V. P. 2011, *Astronomy Letters*, 37, 817
- Seigar, M. S., Kenefick, D., Kenefick, J., & Lacy, C. H. S. 2008, *The Astrophysical Journal Letters*, 678, L93

- Sellwood, J. A. 2011, MNRAS, 410, 1637
- Sellwood, J. A., & Carlberg, R. G. 1984, The Astrophysical Journal, 282, 61
- Sersic, J. L. 1987, Extragalactic Astronomy, trans. Li Zong-yun, rev. Huang Ke-liang. Beijing: Science Press
- Shields, D. W., Hughes, J. A., Barrows, S. R., et al. 2010, American Institute of Physics Conference Series, 1294, 283
- Sofue, Y. & Rubin, V. 2001, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 39, 137
- Voglis, N., Stavropoulos, I. & Kalapotharakos, C. 2006, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 372, 901
- Von der Pahlen 1911, AN, 188, 249
- Vorobyov, E. I. 2006, MNRAS, 370, 1046
- Weinzirl, T., Jogee, S., Khochfar, S., Burket, A. & Kormendy, J. 2009, The Astrophysical Journal, 696, 411

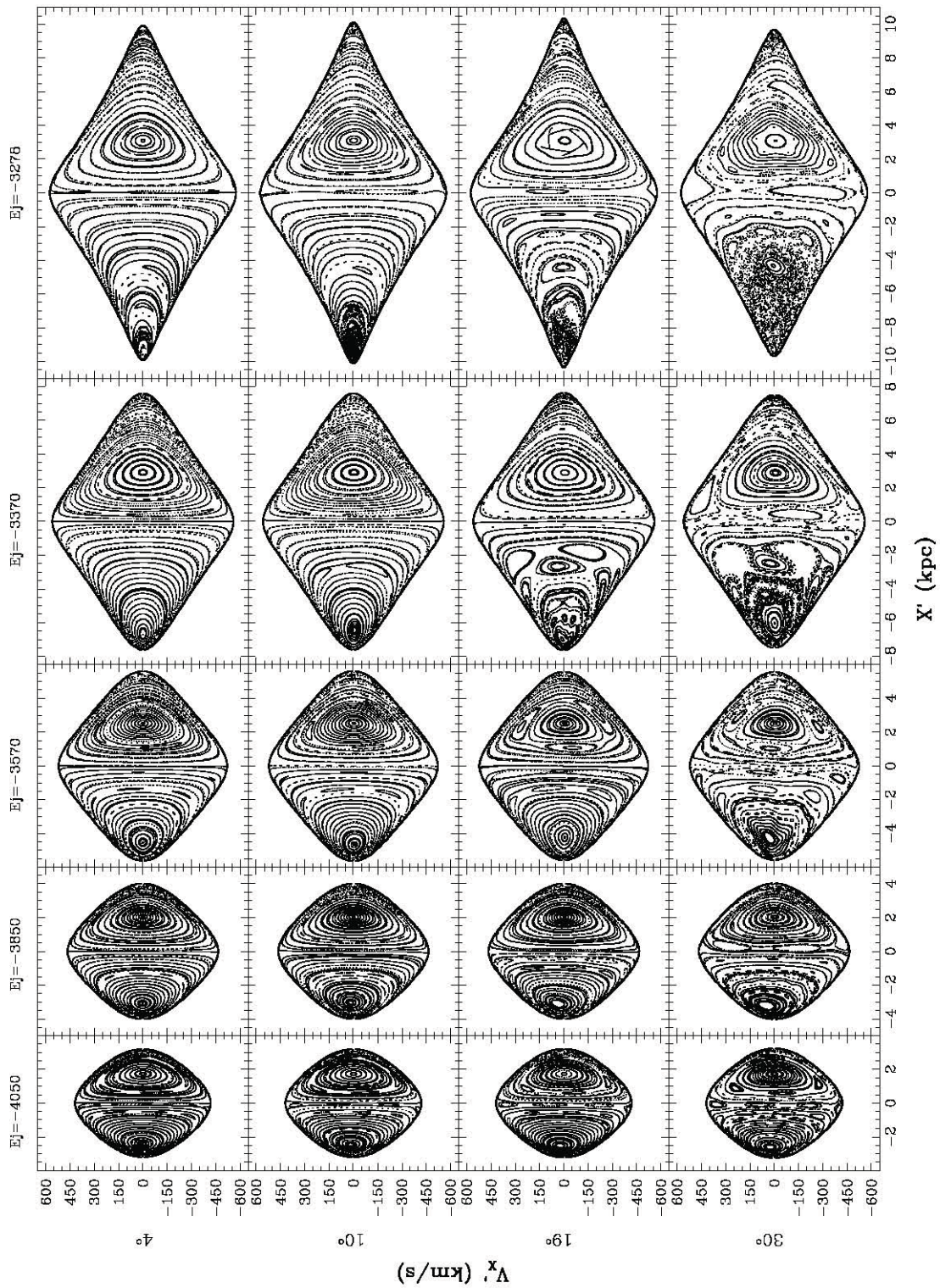


FIGURA A.13: Phase space diagrams for an Sa galaxy, with  $E_J = [-4050, -3278]$ , in units of  $10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ . From top to bottom panels of the diagram, pitch angles go from  $4^\circ$  to  $30^\circ$ .

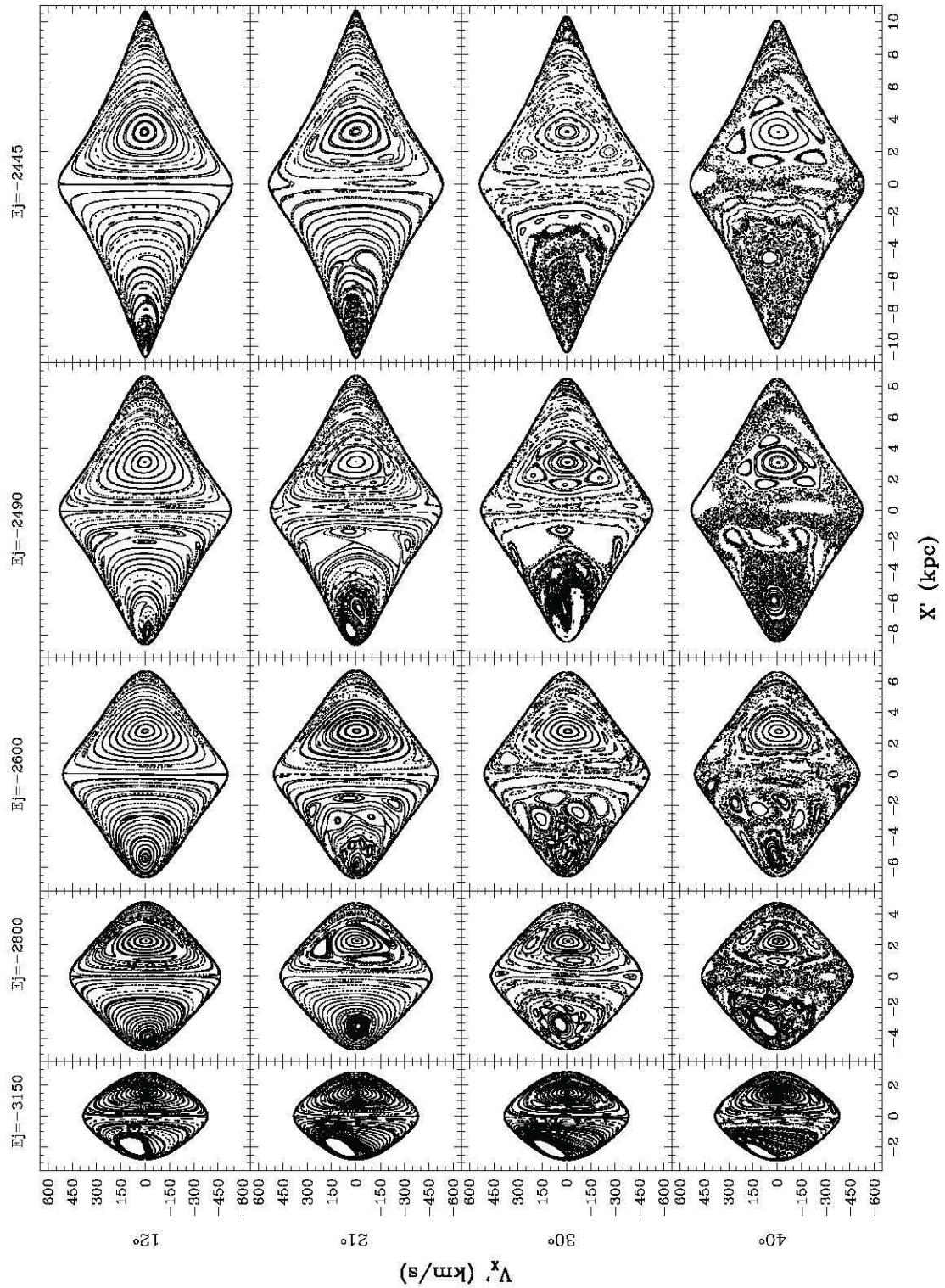


FIGURA A.14: Phase space diagrams for an Sb galaxy, with  $E_J = [-3150, -2445]$ , in units of  $10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ . From top to bottom panels of the diagram, pitch angles go from  $12^\circ$  to  $40^\circ$ .

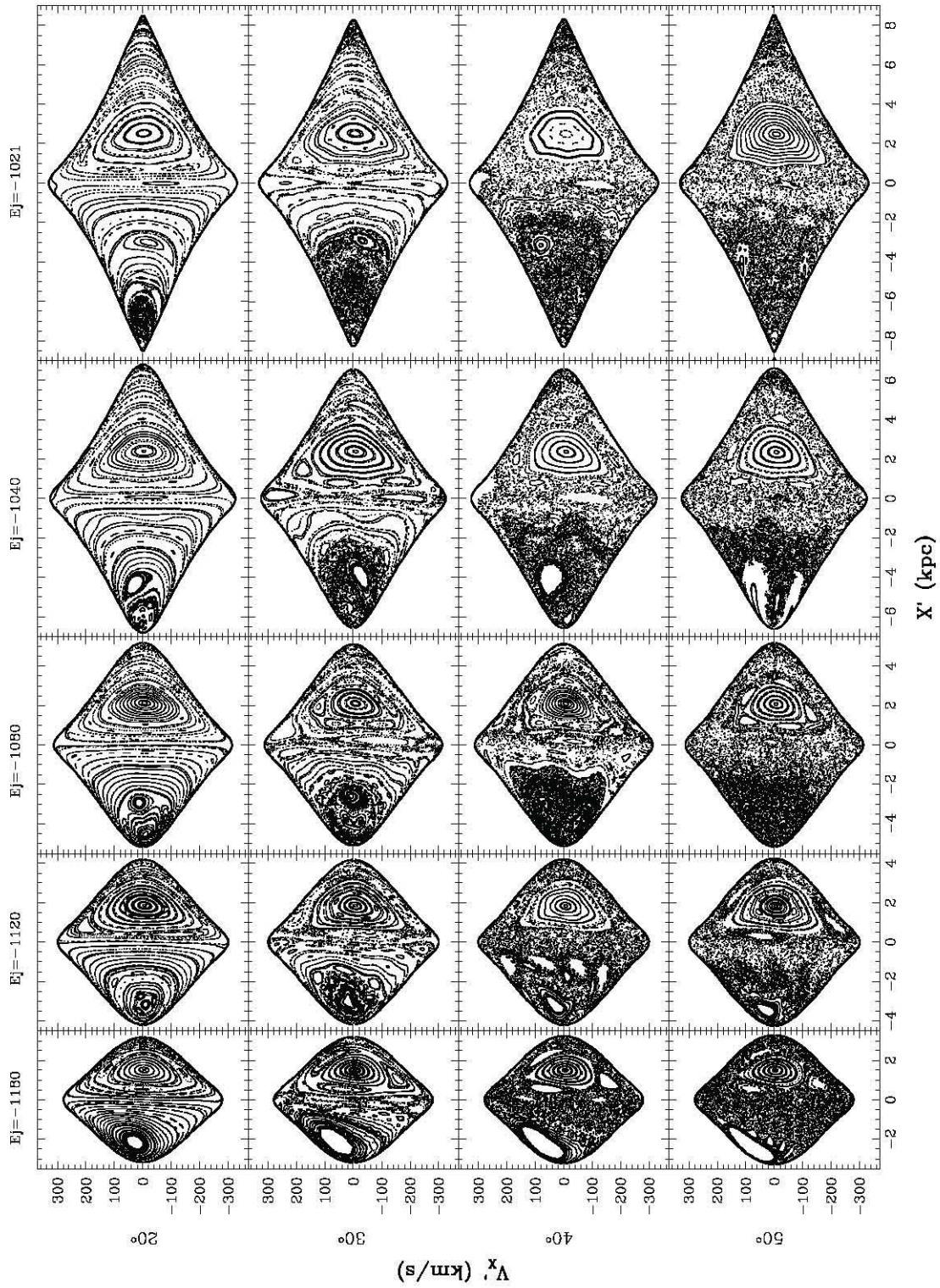


FIGURA A.15: Phase space diagrams for an Sc galaxy, with  $E_J = [-1180, -1021]$ , in units of  $10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ . From top to bottom panels, pitch angles go from  $20^\circ$  to  $50^\circ$ .

# Apéndice B

## Esferoides Oblatos Homogéneos e Inhomogéneos

El modelo PERLAS está construido como una superposición de esferoides oblatos, por lo tanto, el potencial y fuerza de los brazos en cualquier punto del espacio es la suma de los correspondientes campos de cada esferoide. En este Apéndice presentamos las ecuaciones para el potencial y fuerza de un esferoide oblato.

La densidad del brazo cae a lo largo de éste y en la dirección perpendicular los brazos tampoco son homogéneos a éste. Por lo que el modelo PERLAS, ésta basado en una superposición de esferoides oblatos inhomogéneos. En particular, se emplea la teoría de potencial para esferoides oblatos inhomogéneos con **estratificación similar** en la densidad (Schmidt 1956). Para estos esferoides, las superficies de igual densidad son oblatas, concéntricas, con ejes paralelos y con una misma razón axial igual a la razón de ejes de la superficie frontera del esferoide oblato inhomogéneo.

El semieje mayor  $a$ , de la superficie de igual densidad que pasa por un punto  $(x,y,z)$ , satisface la relación,

$$a^2 = x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1 - e^2}, \quad (\text{B.1})$$

con  $e \equiv (1 - \frac{c^2}{a^2})^{1/2}$  la excentricidad de la superficie,  $c$  el semieje menor y  $\frac{c}{a}$  la razón axial común a todas las superficies. Entonces la densidad en estratificación similar se puede expresar de la forma  $\rho = \rho(a)$ .

Se ha considerado tomado como perfil de densidad  $\rho(a)$ , en los esferoides oblatos inhomogéneos que componen los brazos espirales, la forma de caída lineal, esto es,

$$\rho(a) = \begin{cases} p_0 + p_1 a, & a < a_r \\ 0, & a \geq a_r \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

con  $p_0 (> 0)$ ,  $p_1 (< 0)$  constantes en un esferoide dado.  $p_0$  es la densidad central del esferoide. De esta forma para  $\rho = 0$ ,  $p_0 = -p_1 a_r$ .

El potencial y campo de fuerza de un esferoide oblato inhomogéneo con la densidad lineal dada por la ecuación (B.2), han sido obtenidos por Schmidt (1956). Se da una breve descripción del procedimiento.

Como punto de partida, se requieren las expresiones del potencial y fuerza de un esferoide oblato homogéneo. En coordenadas cilíndricas  $(R, z)$ , estas expresiones son (Schmidt 1956),

$$\Phi = -2\pi e^{-1} \sqrt{1 - e^2} \rho a^2 \beta - \frac{1}{2} (R F_R + z F_z), \quad (\text{B.3})$$

$$F_R = -2\pi e^{-3} \sqrt{1 - e^2} \rho R (\beta - \text{sen} \beta \cos \beta), \quad (\text{B.4})$$

$$F_z = -4\pi e^{-3} \sqrt{1 - e^2} \rho z (\tan \beta - \beta), \quad (\text{B.5})$$

que representan el potencial  $\Phi$  (tal que  $\Phi = 0$  para  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ ) y las fuerzas por unidad de masa en el punto  $(x, y, z)$ , y se toman las unidades de tal manera que  $G = 1$ .  $\rho$  es la densidad constante del esferoide,  $e = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$  es la excentricidad, con  $a, c$  los semiejes mayor y menor respectivamente. Si el punto  $(x, y, z)$ , se encuentra dentro del esferoide,  $\beta$  está dada por,

$$\text{sen} \beta = e, \quad (\text{B.6})$$

mientras que para  $(x, y, z)$  fuera del esferoide,  $\beta$  es la solución de la ecuación,

$$R^2 \text{sen}^2 \beta + z^2 \tan^2 \beta = a^2 e^2. \quad (\text{B.7})$$

La idea de Schmidt (1956) para representar un esferoide oblato inhomogéneo, consiste en la superposición de esferoides oblatos homogéneos (más propiamente dicho,



es una superposición de cascarones esferoidales homogéneos, también conocidos como *homeoides* -Binney y Tremaine 1994-) en forma similar, con densidad infinitesimal.

Primero se calcula el potencial y fuerza en un punto  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , dentro del esferoide inhomogéneo; esto es, en la región de superposición. La densidad en el punto  $\mathbf{r}$ ,  $\rho(\mathbf{r})$ , es la suma de las densidades de todos los esferoides homogéneos que contienen al punto. Para esos esferoides homogéneos  $\beta$  está dada por la ecuación (B.6), mientras que para todos los demás esferoides  $\beta$  está dada por la ecuación (B.7).

Entonces, de la ecuación (B.4), la componente  $R$  de la fuerza es,

$$F_R = -2\pi e^{-3}\sqrt{1-e^2}R \left\{ \left( \text{sen}^{-1} e - e\sqrt{1-e^2} \right) \rho(\mathbf{r}) + \int_{\rho(\mathbf{r})}^{\rho_c} (\beta - \text{sen}\beta \cos\beta) d\rho \right\}, \quad (\text{B.8})$$

con  $\rho_c$  la densidad central y en la integral se aplica la relación (B.7).

Resolviendo la integral por partes, tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{\rho(\mathbf{r})}^{\rho_c} (\beta - \text{sen}\beta \cos\beta) d\rho &= (\beta - \text{sen}\beta \cos\beta) \rho \Big|_{\rho(\mathbf{r})}^{\rho_c} \\ &\quad - \int_{\text{sen}^{-1} e}^0 \rho \frac{d}{d\beta} (\beta - \text{sen}\beta \cos\beta) d\beta \\ &= - \left( \text{sen}^{-1} e - e\sqrt{1-e^2} \right) \rho(\mathbf{r}) \\ &\quad + 2 \int_0^{\text{sen}^{-1} e} \rho \text{sen}^2 \beta d\beta, \end{aligned}$$

finalmente,

$$F_R = -4\pi e^{-3}\sqrt{1-e^2}R \int_0^{\text{sen}^{-1} e} \rho \text{sen}^2 \beta d\beta. \quad (\text{B.9})$$

Análogamente,

$$F_z = -4\pi e^{-3}\sqrt{1-e^2}z \int_0^{\text{sen}^{-1} e} \rho \tan^2 \beta d\beta. \quad (\text{B.10})$$

De la misma forma obtenemos el potencial,

$$\Phi = -2\pi e^{-1}\sqrt{1-e^2} \left\{ \text{sen}^{-1} e \int_0^{\rho(\mathbf{r})} a^2 d\rho + \int_{\rho(\mathbf{r})}^{\rho_c} a^2 \beta d\rho \right\} - \frac{1}{2}(RF_R + zF_z),$$

siendo  $\beta$  determinada por la relación (B.7). Resolviendo las integrales por partes y notando de las ecuaciones (B.9) y (B.10) que,

$$\frac{1}{2}(RF_R + zF_z) = -2\pi e^{-1}\sqrt{1-e^2} \int_0^{\text{sen}^{-1} e} \rho a^2 d\beta,$$

tenemos,

$$\Phi = -4\pi e^{-1}\sqrt{1-e^2} \left[ \int_0^{a(\mathbf{r})} \rho a \beta da + \text{sen}^{-1} e \int_{a(\mathbf{r})}^{a_r} \rho a da \right], \quad (\text{B.11})$$

donde  $a_r$  es el valor de  $a$  correspondiente a  $\rho = 0$ , es decir, a la frontera del esferoide inhomogéneo y  $a(\mathbf{r}) = a(R, z)$  el semieje mayor del esferoide que pasa por el punto dado  $(\mathbf{r})$ ,

$$a(R, z) = \left( R^2 + \frac{z^2}{\xi^2} \right)^{1/2},$$

con  $\xi = c/a$  la razón axial.

Si ahora consideramos un punto  $\mathbf{r}$  fuera del esferoide inhomogéneo, tendremos entonces que  $\rho(\mathbf{r}) = 0$ , de modo que el primer término de la ecuación (B.8) desaparece. La integral tiene que ser evaluada sobre el intervalo  $\rho = 0$  a  $\rho = \rho_c$ , que es equivalente al intervalo de  $a = a_r$  a  $a = 0$ , o  $\beta = \gamma$  a  $\beta = 0$ , donde  $\gamma$  está dado por,

$$R^2 \text{sen}^2 \gamma + z^2 \tan^2 \gamma = a_r^2 e^2, \quad (\text{B.12})$$

de donde,

$$F_R = -4\pi e^{-3}\sqrt{1-e^2} R \int_0^\gamma \rho \text{sen}^2 \beta d\beta, \quad (\text{B.13})$$

y

$$F_z = -4\pi e^{-3}\sqrt{1-e^2} z \int_0^\gamma \rho \tan^2 \beta d\beta. \quad (\text{B.14})$$

Análogamente el potencial es,

$$\Phi = -4\pi e^{-1}\sqrt{1-e^2} \int_0^{a_r} \rho a \beta da. \quad (\text{B.15})$$

De esta forma se ha obtenido el potencial y las fuerzas de un esferoide no homogéneo para puntos internos empleando las ecuaciones (B.6), (B.9), (B.10) y (B.11), y para puntos externos las ecuaciones (B.7), (B.13), (B.14), (B.15).

Ahora se introduce a esta formulación la ley de densidad específica propuesta en la ecuación (B.2).

Sustituyendo  $\rho = p_0 + p_1 a$  en la ecuación (B.9) o (B.13), tenemos,

$$\begin{aligned} F_R(R, z, \beta_0) &= -\frac{\partial\Phi}{\partial R} = -4\pi e^{-3}\sqrt{1-e^2} R \int_0^{\beta_0} (p_0 + p_1 a) \text{sen}^2 \beta d\beta \\ &= -4\pi e^{-3}\sqrt{1-e^2} R \left[ p_0 \int_0^{\beta_0} \text{sen}^2 \beta d\beta + p_1 \int_0^{\beta_0} a \text{sen}^2 \beta d\beta \right], \end{aligned}$$

con  $\beta_0$  la solución de la ecuación (B.6) si  $\mathbf{r}$  es interior al esferoide, de lo contrario  $\beta_0$  es la solución  $\gamma$  de la ecuación (B.12).

Resolviendo ambas integrales utilizando la relación (B.7) tenemos,

$$\begin{aligned} F_R(R, z, \beta_0) &= -4\pi e^{-4}\sqrt{1-e^2} R \left\{ \frac{1}{2} p_0 e (\beta_0 - \text{sen}\beta_0 \cos\beta_0) \right. \\ &\quad + p_1 \left[ \sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2} \right] \\ &\quad + \frac{p_1}{3R^2} \left[ (R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2)^{3/2} - (R^2 + z^2)^{3/2} \right] \\ &\quad \left. + p_1 z \ln \frac{\left( \sqrt{R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2} + z \right) \left( \sqrt{R^2 + z^2} - z \right)}{R^2 \cos \beta_0} \right\}. \quad (\text{B.16}) \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} F_z(R, z, \beta_0) &= -2\pi e^{-4}\sqrt{1-e^2} \left\{ 2p_0 e z (\tan\beta_0 - \beta_0) \right. \\ &\quad + zp_1 \left[ \frac{2 \cos^2 \beta_0 + 1}{\cos^2 \beta_0} \sqrt{R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2} - 3\sqrt{R^2 + z^2} \right] + p_1 (R^2 - 2z^2) \\ &\quad \left. \cdot \ln \frac{\left( \sqrt{R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2} + z \right) \left( \sqrt{R^2 + z^2} - z \right)}{R^2 \cos \beta_0} \right\}, \quad (\text{B.17}) \end{aligned}$$

$$\Phi(R, z, \beta_0) = -4\pi e^{-4}\sqrt{1-e^2} \left\{ e^3 a_r^2 \beta_0 \left( \frac{1}{2} p_0 + \frac{1}{3} p_1 a_r \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}p_0e \left[ \frac{1}{2}R^2(\beta_0 - \text{sen}\beta_0 \cos \beta_0) + z^2(\tan \beta_0 - \beta_0) \right] \\
& + \frac{1}{9}p_1 \left[ (R^2 + z^2)^{3/2} - (R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2)^{3/2} \right] \\
& + \frac{1}{3}p_1 \left[ \frac{3}{2}z^2 - R^2 \right] \sqrt{R^2 + z^2} + \frac{1}{3}p_1 \left[ R^2 - z^2 \left( \frac{2 \cos^2 \beta_0 + 1}{2 \cos^2 \beta_0} \right) \right] \sqrt{R^2 \cos^2 \beta_0 + 1} \\
& - p_1 \left( \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{3}z^2 \right) z \ln \frac{\left( \sqrt{R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2} + z \right) \left( \sqrt{R^2 + z^2} - z \right)}{R^2 \cos \beta_0} \left. \right\}. \quad (\text{B.18})
\end{aligned}$$

La masa del esferoide oblato inhomogéneo es,

$$M_O = 4\pi\sqrt{1-e^2} \int_0^{a_r} (p_0 + p_1 a) a^2 da = 4\pi a_r^3 \sqrt{1-e^2} \left( \frac{1}{3}p_0 + \frac{1}{4}p_1 a_r \right).$$

Como  $\rho = 0$  en la frontera, de la relación (B.2),

$$p_0 = -p_1 a_r, \quad (\text{B.19})$$

sustituyendo  $p_0$  en  $M_O$  tenemos,

$$M_O = -\frac{1}{3}\pi a_r^4 \sqrt{1-e^2} p_1, \quad (\text{B.20})$$

$$p_1 = \frac{-3M_O}{\pi a_r^4 \sqrt{1-e^2}}.$$

# Apéndice C

## Los Métodos de Integración

En el presente apéndice se describen brevemente los integradores utilizados en la solución de las ecuaciones de movimiento de las partículas sometidas a un potencial compuesto por la distribución axisimétrica y el patrón espiral. Estos son, Bulirsch-Stoer (Press et al. 1992) y Runge-Kutta de orden 7mo-8vo (Fehlberg 1968; Press et al. 1992).

### C.1. El Método de Bulirsch-Stoer

Este es uno de los mejores métodos de obtención de soluciones de alta precisión para ecuaciones diferenciales ordinarias con esfuerzos computacionales mínimos (Press et al. 1992).

El método consiste de tres ideas principales. La primera de éstas es el *acercamiento diferido al límite* de Richardson, que consiste en considerar la respuesta final de un cálculo numérico como una función analítica de un parámetro ajustable, como el tamaño de paso,  $h$ . Esta función analítica puede ser probada ejecutando los cálculos con varios valores de  $h$ , ninguno de ellos siendo necesariamente suficientemente pequeño para proporcionar la precisión deseada. Cuando se conoce suficiente acerca de la función, se le ajusta alguna forma analítica, y de esta forma se puede evaluar la función en el punto “imposible”  $h=0$  (Figura C.1).

La segunda idea tiene que ver con el tipo de ajuste de la función utilizado. Debido al poder de la extrapolación de funciones racionales, Bulirsch y Stoer las eligieron en las aplicaciones tipo Richardson (Press et al. 1992). El poder radica en el aumento del

limitado intervalo de convergencia de las series de potencias. Las funciones racionales pueden ajustarse bastante bien a funciones analíticas aún después de varios términos, en las potencias de  $h$ , de magnitud comparable.

La tercera idea es el uso de un método cuya función de error sea estrictamente par, permitiendo que la función racional o aproximación polinomial esté en términos de la variable  $h^2$  en lugar de sólo  $h$ .

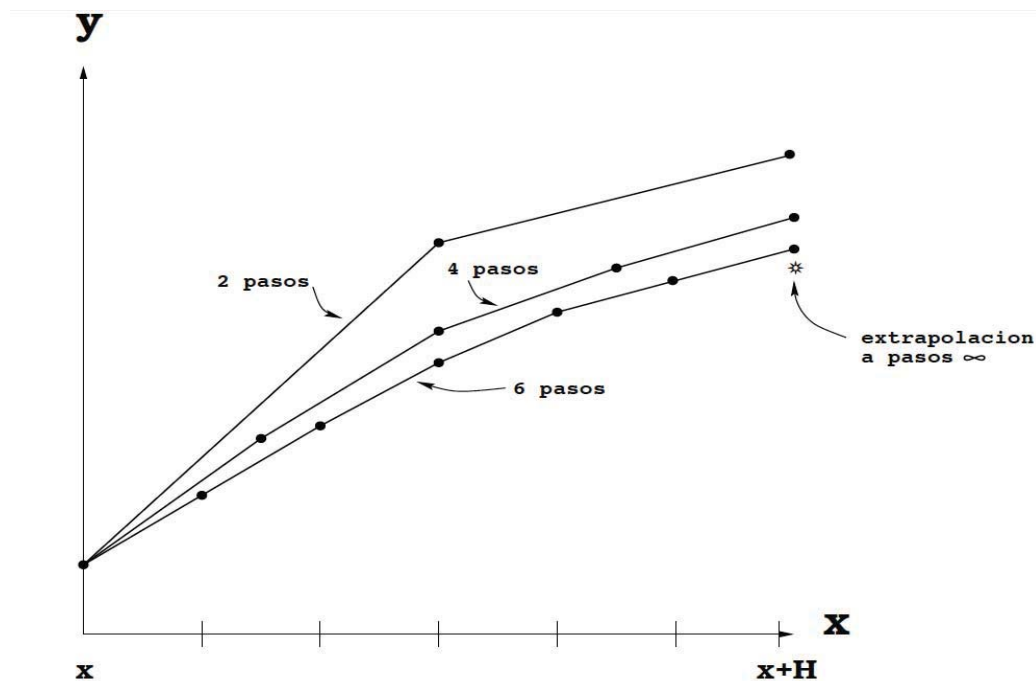


FIGURA C.1: Extrapolación de Richardson usada en el método de Bulirsch-Stoer. Un intervalo grande  $H$  es subdividido por diferentes secuencias de subintervalos cada vez más finos. Los resultados son extrapolados a una respuesta que se supone corresponderá a un número infinito de subintervalos. En el método de Bulirsch-Stoer, las integraciones son hechas con el método modificado del punto medio y la técnica de extrapolación es una función racional o una extrapolación polinomial.

Con estas ideas juntas describiremos con cierto detalle el programa que consiste de tres rutinas principales, BSSTEP (*stepper*), MMID (método de punto medio modificado) y ODEINT (*driver*).

El método funciona de la siguiente forma: BSSTEP incrementa el valor en el tiempo una cantidad  $H$  y evalúa las variables iniciales  $y_i$  al tiempo  $t+H$ , subdivide este intervalo  $H$  en dos subintervalos de longitud  $h=H/2$ , evalúa las  $y_i$  en los extremos de esos dos

subintervalos, uno de éstos le da un nuevo valor a la función al tiempo  $t+h$ . Entonces el intervalo  $H$  se subdivide otra vez en más intervalos y se evalúa otra vez (cada evaluación es hecha usando MMID). La secuencia del número de subdivisiones es predeterminada y en este caso particular es  $n = 2, 4, 6, 8, 10, \dots, n_j = 2j$ . Cada vez que una  $n$  sucesiva es intentada, se realiza una extrapolación polinomial (a  $H/n=0$  o  $n=\infty$ ) que devuelve, además de los valores extrapolados de la función, las estimaciones del error. En caso de que los errores no sean satisfactorios, se toma un valor más alto en  $n$ . Si son satisfactorios se irá a un siguiente paso más grande de  $H$  y se comenzará nuevamente con el  $n$  más pequeño. Si el intervalo  $H$  ha sido subdividido en 12 subintervalos y la extrapolación todavía no resulta satisfactoria, BSSTEP reducirá el tamaño de  $H$  en lugar de continuar incrementando el número de subintervalos. Esto significa que el paso de tiempo es variable. En regiones donde la función no varía mucho, los pasos de tiempo,  $H$ , son grandes y se requiere un número pequeño de subdivisiones para obtener la convergencia deseada. Por otra parte, en lugares donde la función es altamente variable, el tamaño de paso,  $H$ , se hace pequeño y la secuencia de subdivisiones usualmente crece. Para ejecutar la extrapolación polinomial después de cada  $n$  intentada, BSSTEP llama a la rutina PZEXTR (Press et al. 1992).

Finalmente, para la ejecución de BSSTEP se requiere un “manejador” (*driver*) el cual funciona como interfase con el usuario, para este efecto usamos la subrutina ODEINT. Esta subrutina comienza y termina la integración y guarda los resultados intermedios, es decir devuelve la lista de valores entre  $t=0$  y  $t_f$  para las variables involucradas en el problema. Ya que el paso temporal no es fijo, ODEINT requiere un paso temporal mínimo tal que sólo si éste es más largo que el mínimo en BSSTEP, los valores de las variables serán guardados. Esto evita tener muchos valores salvados en lugares donde la función cambia rápidamente y el paso temporal es pequeño.

## C.2. El Método de Runge-Kutta de Orden 7mo-8vo

Esta rutina fue desarrollada en el departamento de Ingeniería Aeroespacial de la Universidad de Texas, Austin. Los coeficientes del algoritmo fueron calculados por Fehlberg (1968). El error de truncación es estimado como la diferencia de la integración a séptimo y octavo orden. El algoritmo genera la magnitud del paso de integración automática-

mente a partir de uno dado inicialmente, de tal forma que el error de truncación no exceda una tolerancia dada para cada solución.

La conservación de la constante de Jacobi a lo largo de cada órbita fue utilizada para checar la exactitud de la integración con la siguiente expresión,

$$\left| \frac{E_J - E_{J_{inicial}}}{E_{J_{inicial}}} \right| \leq tol \quad (C.1)$$

con  $tol$  la tolerancia. La constante de Jacobi a un tiempo  $t$  dado de la órbita es comparada con el valor respectivo al tiempo inicial  $t_{inicial}$ .

### C.3. El Método de Newton-Raphson

En el cálculo de las órbitas periódicas y lo diagramas de Poincaré empleamos el método de Newton-Raphson (Press et al. 1992) que a continuación describimos brevemente.

En general el método de Newton-Raphson (N-R), además de ser el método más simple de su género, proporciona una forma muy eficiente de convergencia a una raíz suponiendo que se tiene una buena predicción inicial de la solución del problema. Cuando este no es el caso, se puede utilizar un método globalmente convergente para la solución basado en el método de N-R.

Consideremos el caso de dos dimensiones, en el que deseamos resolver en forma simultánea las siguientes ecuaciones,

$$f(x, y) = 0 \quad (C.2)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (C.3)$$

Donde  $f$  y  $g$  son dos funciones arbitrarias, cada una de las cuales tiene líneas de contorno cero que dividen el plano  $(x,y)$  en regiones donde su función respectiva es positiva o negativa. Estas fronteras de contorno cero son importantes. Las soluciones que estamos buscando son aquellos puntos que son comunes a los contornos cero de  $f$  y  $g$  (Figura C.2). Desafortunadamente, las funciones  $f$  y  $g$  no tienen en general relación la una con la otra. Para encontrar todos los puntos comunes, los cuales son las soluciones



de nuestras ecuaciones no lineales, tendremos simplemente que mapear los contornos cero completos de ambas funciones. Nótese que los contornos cero, en general consisten de un número desconocido de curvas cerradas disconexas. ¿Cómo podemos entonces esperar saber cuándo hemos encontrado todas las piezas disconexas?

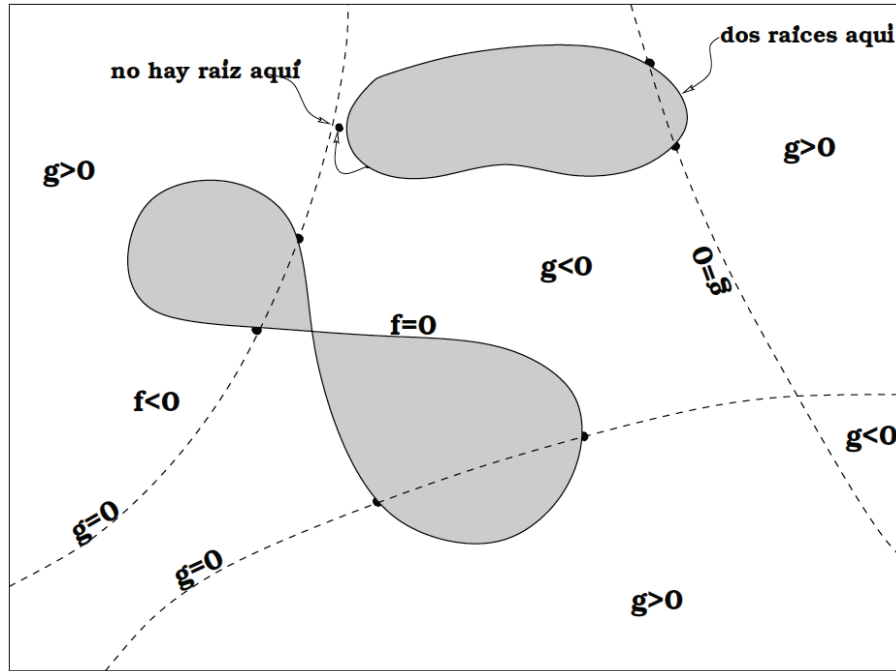


FIGURA C.2: Solución de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas. Las curvas sólidas se refieren a  $f(x, y)$  y las punteadas a  $g(x, y)$ . Cada ecuación divide el plano  $(x, y)$  en una región positiva y una negativa limitada por curvas “cero”. Las soluciones deseadas son las intersecciones de estas curvas cero no relacionadas. El número de soluciones es *a priori* desconocido.

Para problemas de más de dos dimensiones, necesitamos encontrar puntos mutuamente comunes a las  $N$  hipersuperficies de contorno cero no relacionadas, cada una de dimensión  $N$ .

Un problema típico tiene  $N$  funciones de las cuales obtendremos las raíces, estas funciones dependen de las variables  $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ :

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{C.4})$$

Denotamos como  $\mathbf{x}$  el vector completo de valores  $x_i$  y  $\mathbf{F}$  el vector de funciones  $F_i$ . En la vecindad de  $\mathbf{x}$ , cada una de las funciones  $F_i$  puede ser expandida en series de

Taylor,

$$F_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \delta x_j + O(\delta\mathbf{x}^2). \quad (\text{C.5})$$

La matriz de derivadas parciales que aparece en la ecuación (C.5) es la matriz *Jacobiana*  $\mathbf{J}$ ,

$$J_{ij} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial x_j}. \quad (\text{C.6})$$

En notación matricial la ecuación (C.5) es,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{x} + O(\delta\mathbf{x}^2). \quad (\text{C.7})$$

Despreciando los términos de orden  $\delta\mathbf{x}^2$  y más altos y haciendo  $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = 0$ , obtenemos un conjunto de ecuaciones lineales para las correcciones  $\delta\mathbf{x}$  que mueven cada función más cerca de cero simultáneamente; de esta forma,

$$\mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}. \quad (\text{C.8})$$

Las correcciones son entonces sumadas al vector solución,

$$\mathbf{x}_{post} = \mathbf{x}_{ant} + \delta\mathbf{x}, \quad (\text{C.9})$$

y el proceso es iterado para la convergencia.

En el caso de que nuestra predicción inicial no sea lo suficientemente buena (por ejemplo para el caso en el que los brazos espirales o barra sean muy masivos), un método *global* es uno que converge a una solución desde casi cualquier punto. Se ha desarrollado un algoritmo que combina la convergencia global rápida del método de N-R con una estrategia convergente globalmente que garantiza progresos hacia la solución a cada iteración.

Entonces el paso de N-R para el conjunto de ecuaciones,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{C.10})$$

es (C.9), y de (C.8) tenemos,

$$\delta \mathbf{x} = -\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{F}, \quad (\text{C.11})$$

donde  $\mathbf{J}$  es la matriz Jacobiana. ¿Cómo se decide aceptar el paso de N-R  $\delta \mathbf{x}$ ? Una estrategia razonable es imponer que el paso decrezca  $|\mathbf{F}|^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}$ , que es el mismo requerimiento que impondríamos si se estuviera tratando de minimizar,

$$f = \frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}, \quad (\text{C.12})$$

el  $\frac{1}{2}$  es por conveniencia. Cada solución de (C.10) minimiza (C.12), pero debe haber mínimos locales de (C.12) que no son soluciones de (C.10).

Para desarrollar una mejor estrategia nótese que el paso de N-R en (C.11) va en una dirección descendiente para  $f$ ,

$$\nabla f \cdot \delta \mathbf{x} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{J}) \cdot (-\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{F}) = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} < 0. \quad (\text{C.13})$$

Así que la estrategia es muy simple: siempre se intenta primero el paso de N-R completo, porque una vez que se está lo suficientemente cerca de la solución, se obtendrá convergencia cuadrática. Sin embargo, checamos a cada iteración que el paso propuesto reduzca  $f$ . Si no, se retrocede a lo largo de la dirección de N-R hasta obtener un paso aceptable. Ya que el paso de Newton es en la dirección descendiente de  $f$ , está garantizado encontrar un paso aceptable regresando a pasos más cortos.

Nótese que este método esencialmente minimiza  $f$  tomando los pasos de N-R diseñados para llevar  $\mathbf{F}$  a cero. Esto no es equivalente a minimizar  $f$  directamente tomando los pasos de N-R diseñados para llevar  $\nabla f$  a cero.



# Apéndice D

## Parámetros para los Códigos Computacionales

En esta Sección se describen los parámetros que requieren los códigos empleados para los cálculos a lo largo de esta tesis.

Los códigos están escritos en Fortran 77. Para la integración de órbitas, se emplearon dos algoritmos: Bulirsch-Stoer (Apéndice C.1), el cual fue más utilizado por su eficiencia y Runge-Kutta (Apéndice C.2), para potenciales simples como el potencial coseno.

Los códigos calculan las órbitas en el sistema de referencia no inercial (anclado en los brazos espirales) y hacen una transformación al sistema de referencia inercial. La entrada y salida de los datos son en unidades Galácticas, donde  $G = 1$ , la distancia se mide en kpc, la velocidad en 10 km/s y la masa en  $2.32 \times 10^7 M_{\odot}$ .

### D.1. Código de Diagramas de Poincaré

El programa que construye diagramas de Poincaré en un potencial axisimétrico con los brazos espirales del modelo PERLAS o coseno y al mismo tiempo integra órbitas individuales. Este código requiere varios parámetros de entrada. En la Tabla D.1 se presentan los parámetros que se requieren para el fondo axisimétrico, dependiendo del tipo morfológico. En la Tabla D.2 se muestran los parámetros que requiere el modelo del coseno para los brazos espirales para el caso de un modelo tipo Vía Láctea. En la Tabla D.3, se dan los parámetros para el modelo PERLAS, dependiendo el tipo morfológico.

TABLA D.1: Parámetros para el fondo axisimétrico

Parámetro	Sa	Sb	Sc	VL
$M_1$	5000	2094.82	440	606
$b_1$	2.5	1.7	1.0	0.3873
$M_2$	5556.03	5232.76	2200	3690
$a_2$	7.0	5.0	5.3178	5.3178
$b_2$	1.5	1.0	0.25	0.25
$M_3$	15000	10000	2800	4615.0
$a_3$	18.0	16.0	12.0	12.0
$R_h$ <sup>(†)</sup>	100			

<sup>(†)</sup> Distancia de corte del halo galáctico, dada en kpc. El mismo radio para los tres tipos de galaxias.

$M_i$  son factores de masa, están dadas en unidades de  $2.32 \times 10^7 M_\odot$ .

$a_i, b_i$  son longitudes de escala, están dadas en unidades de kpc.

TABLA D.2: Parámetros para los brazos espirales (modelo del coseno)

Parámetro	Vía Láctea
Inicio de los brazos	2.6 kpc
Ángulo de enrollamiento	15.5°
Amplitud	Variable ( $100 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \text{ kpc}^{-1}$ )
Velocidad angular	$-2 \times 10 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$
Longitud de escala	2.5 kpc
Constante de Jacobi	Variable ( $10 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ )
Número de órbitas <sup>(§)</sup>	50
Número de cruces <sup>(†)</sup>	300

<sup>(§)</sup>Número de órbitas al integrar en cada diagrama de Poincaré.

<sup>(†)</sup>Número de cruces en el eje  $x'$  (número de puntos por órbita en los diagramas de Poincaré).

TABLA D.3: Parámetros para los brazos espirales (modelo PERLAS)

Parámetro	Sa	Sb	Sc	VL <sup>(*)</sup>
Inicio de los brazos (kpc)	Variable			2.6
Ángulo de enrollamiento (°)	Variable			15.5
Semiejes de sección transversal al brazo (kpc)	$a_0 = 1.0$ y $c_0 = 0.5$			
Separación de centros de esferoides (kpc)	$c_s = 0.5$			
Razón $M_{Br}/M_D$	Variable			
Corte de los brazos (kpc)	Variable			12.0
Velocidad angular <sup>(◇)</sup> ( $10 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ )	Variable			2
Caída en la densidad	Exponencial			
Longitud de escala (kpc)	7.0	5.0	3.0	2.5
Constante de Jacobi ( $10 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ )	Variable			
Número de órbitas <sup>(§)</sup>	50			
Número de cruces <sup>(†)</sup>	300			

(\*) Parámetros para un modelo de galaxia tipo Vía Láctea sin barra.

(◇) La velocidad angular del patrón es negativa, el signo está en las ecuaciones.

(§) Número de órbitas al integrar en cada diagrama de Poincaré.

(†) Número de cruces en el eje  $x'$  (número de puntos por órbita en los diagramas de Poincaré).

## D.2. Código para las órbitas periódicas

El programa que calcula las órbitas periódicas utiliza como buscador de raíces el algoritmo de Newton-Raphson en dos dimensiones (Press et al. 1992). Utiliza adicionalmente como subrutinas, los códigos que integran órbitas en un potencial axisimétrico con brazos para generar las órbitas individuales de prueba.

El programa requiere los parámetros del fondo axisimétrico (Tabla D.1) como las razones de masa  $M_B/M_D$  y  $M_D/M_H$  (a un radio de 100 kpc), los parámetros de los brazos espirales (Tabla D.3) y adicionalmente necesita como condiciones iniciales una primera predicción  $x'_0$  (se sugiere cerca de la RIL -inicio del brazo-), separación para la siguiente órbita (se sugiere  $\leq 0.25$  kpc) y la precisión para obtener la órbita periódica (se sugiere  $\geq 10^{-4}$ ). Una vez que se obtiene órbita periódica, incrementa  $x'_0$  con la separación dada para buscar la siguiente órbita periódica y así sucesivamente hasta llegar al corte del brazo.

El código que calcula las órbitas periódicas tiene un código complemento que calcula la respuesta en densidad y la respuesta máxima en densidad, este código requiere de un archivo de entrada con las posiciones, velocidades, la constante de Jacobi y  $x'_0$  de las órbitas periódicas obtenidas, los datos deben estar ordenados de forma creciente. Además requiere del número de líneas en acimut donde calculará la respuesta en densidad (se sugiere  $\leq 200$ ).



# Bibliografía

- [1] Allen, C. & Santillán, A., 1991, *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, 22, 255
- [2] Amaral, L. H. & Lpíne, J. R. D., 1997, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 286, 885
- [3] Andredakis, Y. C., Peletier, R. F., & Balcells, M. 1995, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 275, 874
- [4] Andredakis, Y. C. & Sanders, R. H., 1994, *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, 267, 283
- [5] Baade. W., 1944, *The Astrophysical Journal*, 100, 137
- [6] Babcock, H. W., 1939, *Lick Obs. Bull.*, 19, 41
- [7] Beck, R., 1993, *IAUS*, 157, 283
- [8] Berentzen, I., Heller, C.H., Shlosman, I., & Fricke, K.J., 1998, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 300, 49
- [9] Bertola, F., Cappellari, M., Funes, G. C., Corsini, E. M., Pizzella, A. & Vega Beltran, J. C., 1998, *The Astrophysical Journal Letters*, 401, L79
- [10] Binney, J, 1982, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 201, 1
- [11] Binney, J., 2001, *J. Phys.*, IV, 1
- [12] Binney, J., Gerhard, O. E., & Hut, P., 1985, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 215, 59
- [13] Binney, J., & Merrifield, M., 1998, *Galactic Astronomy* (Princeton University Press)
- [14] Binney, J. & Tremaine, S., 1994, *Galactic Dynamics* (Princeton University Press)
- [15] Block, D. L., Bournaud, F., Combes, F., Puerari, I., & Buta, R., 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 394, L35
- [16] Broche, P., 1971, *Astronomy & Astrophysics*, 13, 293
- [17] Buta, R. & Block, D. L., 2001, *The Astrophysical Journal*, 550, 243
- [18] Buta, R., Vasylev, S., Salo, H. & Laurikainen, E., 2005, *Astronomical Journal*, 130, 523
- [19] Byun, Y. -I., 1992, PhD. Thesis, The Australian National University
- [20] Capaccioli, M., Held, E. V., Nieto, J. -L., 1987, *Astronomical Journal*, 94, 1519
- [21] Carpintero, D.D., Aguilar, L.A., 1998, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 298, 1
- [22] Chávez, R., Terlevich, E., Terlevich, R., Plionis, M., Bresolin, F., Basilakos, S., & Melnick, J., 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 425L, 56
- [23] Combes, F. & Sanders, R. H. 1981, *Astronomy & Astrophysics*, 96, 164
- [24] Considere, S. & Athanassoula, E., 1982, *Astronomy & Astrophysics*, 111, 28
- [25] Contopoulos, G., 1979, *Astronomy & Astrophysics*, 127, 349
- [26] Contopoulos, G., 1980, *Astronomy & Astrophysics*, 81, 198
- [27] Contopoulos, G., 1983, *Astronomy & Astrophysics*, 117, 89
- [28] Contopoulos, G., 1995, *Ann. NY Acad. Sci.*, 751, 112
- [29] Contopoulos, G., 2007, *“Chaos in Astronomy, Conference 2007”*, Springer

- [30] Contopoulos, G. & Grosbøl, 1986, *Astronomy & Astrophysics*, 155, 11
- [31] Contopoulos, G. & Grosbøl, 1988, *Astronomy & Astrophysics*, 197, 83
- [32] Contopoulos, G., & Patsis, P. A. (ed.) 2008, *Chaos in Astronomy* (Berlin:Springer)
- [33] Contopoulos, G., Varvoglis, V. & Barbanis, B. 1987, *Astronomy & Astrophysics*, 172, 55
- [34] Contopoulos, G., Voglis, N., 1996, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, 91, 321
- [35] Cox, D. P. & Gómez, D. C., 2002, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 142, 261
- [36] Danver, C. C., 1942, *Ann. Obs. Lund.*, 10
- [37] de Jong, R. S., 1996, *Astronomy & Astrophysics*, 313, 45
- [38] de Jong, R.S., 1996a, *Astronomy & Astrophysics Supplement Series*, 118, 557
- [39] de Lapparent, V., Baillard, A., & Bertin, E. 2011, *Astronomy & Astrophysics*, 532, A75
- [40] de Vaucouleurs G., 1959, *Handbuch der Physik*, 53, 275
- [41] de Zeeuw, T., Schwarzschild, M., 1989, *The Astrophysical Journal*, 345, 84
- [42] Deguchi, S., Fujii, T., Izumiura, H., Kameya, O., Nakada., Y., et al., 2000, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 128, 571
- [43] Drimmel, R., 2000, *Astronomy & Astrophysics*, 358L, 13
- [44] Dutton, A., 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 396, 141
- [45] Englmaier, P., & Gerhard, O., 1999, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 304, 512.
- [46] Elmegreen, D. M., & Elmegreen, B. G., 1982, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 201, 1021
- [47] Elmegreen, B. G., & Elmegreen, D. M., 1985, *The Astrophysical Journal*, 288, 438
- [48] Elmegreen, D. M., & Elmegreen, B. G., 1987, *The Astrophysical Journal*, 314, 3
- [49] Elmegreen, B. G., & Thomasson, M., 1993, *Astronomy & Astrophysics*, 272, 37
- [50] Fathi, K., Allen, M., Boch, T., Hatziminaoglou, E., & Peletier, R. F., 2010, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 406, 1595
- [51] Fehlberg, E., 1968, *N. A. S. A. T. R. R-287*
- [52] Ford, H. C., Harms, R. J., Tsvetanov, Z. I., Harting, G. F., & Drissel, L. L., et al., 1994, *The Astrophysical Journal Letters*, 435, L27
- [53] Foyle, K., Rix, H. -W., Walter, F., & Leroy, K., 2010, *The Astrophysical Journal*, 725, 534
- [54] Fux, R., 1999, *Astronomy & Astrophysics*, 345, 787
- [55] Freeman K. C., 1970, *The Astrophysical Journal*, 160, 811
- [56] Gerhard, O., 2011, *Memorie della Societa Astronomica Italiana Supplement*, v.18, p.185
- [57] Gerola, H. & Seiden, P.E., 1978, *The Astrophysical Journal*, 223, 129
- [58] Gilmore, G., King, I. R., & van der Kruit, P. C., 1990, *The Milky Way as a Galaxy*, Mill Valley, C. A.: Univ. Sci. Books
- [59] Gingold, R. A., Monaghan, J. J., 1997, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181, 375
- [60] Graham, A. W., de Blok, W. J. G., 2001, *The Astrophysical Journal*, 556, 177
- [61] Grosbøl, P., 2003, *Galaxies and Chaos*, ed. G. Contopoulos & N. Voglis (Lecture Notes in Physics, Vol. 626; Berlin: Springer-Verlag), 201
- [62] Grosbøl, P., Pompei, E., & Patsis, P. A., 2002, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, 275, 305

- [63] Grosbøl, P. & Patsis, P. A., 1998, *Astronomy & Astrophysics*, 336, 840
- [64] Grosbøl, P., Patsis, P. A., & Pompei, E., 2004, *Astronomy & Astrophysics*, 423, 849
- [65] Harsoula, M., Kalapotharakos, C., & Contopoulos, G. 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 411, 1111
- [66] Heiles, C., 1995, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, 80, 507
- [67] Hubble, E. P., 1926, *The Astrophysical Journal*, 64, 321
- [68] Hubble, E. P., 1936, *Realm of the Nebulae*, by E.P. Hubble. New Haven: Yale University Press, 1936
- [69] Heisler, J., Schwarzshid, M., 1982, *The Astrophysical Journal*, 258, 490
- [70] Izumiura, H., Deguchi, S., Fujii, T., Kameya, O., Matsumoto, S., et al., 1999, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 125, 257
- [71] Izumiura, H., Deguchi, S., Hashimoto, O., Nakada, Y., Onaka, T., et al., 1995, *The Astrophysical Journal*, 453, 837
- [72] Kalapotharakos, C., Patsis, P. A. & Grosbøl, P. 2010, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 403, 83
- [73] Kaufmann, D. E., & Contopoulos, G. 1996, *Astronomy & Astrophysics*, 309, 381
- [74] Kikuchi, N., Korchagin, V. & Miyama, S. M., 1997, *The Astrophysical Journal*, 478, 446
- [75] Keel, W. & Wu, W., 1995, *The Astrophysical Journal*, 110, 129
- [76] Kennicutt, R. C., Jr., 1981, *Astronomical Journal*, 86, 1847
- [77] Kennicutt, R., Jr., & Hodge, P., 1982, *The Astrophysical Journal*, 253, 101
- [78] Kent, S. M., 1985, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 59, 115
- [79] Kormendy, J., 1977, *The Astrophysical Journal*, 217, 406
- [80] Kormendy, J., 1979, *The Astrophysical Journal*, 227, 714
- [81] Kormendy, J. 1993, in *Galactic Bulges*, ed. H. Dejonghe, & H. J. Habing (Dordrecht: Kluwer), IAU Symp., 153, 209
- [82] Kormendy, J., 2001, *Galaxy Disks and Disk Galaxies*, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, 230, 247
- [83] Kormendy, J., 2007, *IAU Symp.*, 245, 107
- [84] Kormendy, J., & Kennicutt, Jr., R. C. 2004, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 42, 603
- [85] Kormendy, J., & Richstone, D., 1995, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 33, 581
- [86] Lallemand, A., Duchesne, M., Walker, M. F., 1960, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 72, 76
- [87] Laurikainen, Eija & Salo, Heikki, 2002, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 337, 1118
- [88] Lépine, J. R. D., Mishurov, Y. N. & Dedikov, S. Y., 2001, *The Astrophysical Journal*, 546, 236
- [89] Lin, C.C. & Shu, F.H., 1964, *The Astrophysical Journal*, 140, 646
- [90] Lin, D. N. C., Pringle, J. E., 1987, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 225, 607
- [91] Lindblad, B., 1940, *The Astrophysical Journal*, 92, 1
- [92] Lindblad, B., 1955, *Stockholm Ann*, 22, 5
- [93] Lindblad, P. O., 1960, *Stockholm Obs Ann*, 21, 4
- [94] Lindblad, P.A., Lindblad, P.O., & Athanassoula, E., 1996, *Astronomy & Astrophysics*, 313, 65
- [95] Lindqvist, M., Winnber, A., Habing, H. J., Matthews, H. E., 1992, *Astronomy & Astrophysics Supplement Series*, 92, 43

- [Lynden-Bell & Kalnajs(1972)] Lynden-Bell, D., & Kalnajs, A. J. 1972, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 157, 1
- [96] Ma, J., 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 388, 389
- [97] Ma, J., Zhao, J., Zhang, F., & Peng, Q., 2000, *Chinese Astronomy and Astrophysics*, 24, 435
- [98] Martos, M.A. & Cox, D.P., 1998, *The Astrophysical Journal*, 509, 703
- [99] Milgrom, M. 1983a, *The Astrophysical Journal*, 270, 365
- [100] Milgrom, M. 1983b, *The Astrophysical Journal*, 270, 371
- [101] Milgrom, M. 1983c, *The Astrophysical Journal*, 270, 384
- [102] Miralda-Escudé, J., Schwarzschild, M., 1989, *The Astrophysical Journal*, 339, 752
- [103] Miyamoto, M., & Nagai, R., 1975, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 27, 533
- [104] Monaghan, J. J., 2012, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 44, 323
- [105] Morgan, W. W., 1958-1970, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 70, 364
- [106] Morgan, W. W., 1959, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 71, 92
- [107] Navarro, J. F., Frenk, C. S., & White, S., 1997, *The Astrophysical Journal*, 490, 493
- [108] Patsis, P. A. 2006, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 369, L56
- [109] Patsis, P. A., Hiotelis, N., Contopoulos, G., & Grosbøl, P., 1994, *Astronomy & Astrophysics*, 286, 46
- [110] Patsis, P. A., Athanassoula, E. & Quillen, A. C. 1997a, *The Astrophysical Journal*, 483, 731
- [111] Patsis, P. A., Contopoulos, G., & Grosbøl, P., 1991, *Astronomy & Astrophysics*, 243, 373
- [112] Patsis, P.A., Efthymiopoulos, C., Contopoulos, G. & Voglis, N., 1997, *Astronomy & Astrophysics* 326, 493
- [113] Patsis, P. A., Grosbøl, P., & Hiotelis, N., 1997, *Astronomy & Astrophysics*, 323, 762
- [114] Patsis, P.A. & Grosbøl, P., 1996, *Astronomy & Astrophysics*, 315, 371
- [115] Patsis, P. A., Kaufmann, D. E., Gottesman, S. T., & Boonyasait, V. 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 394, 142
- [116] Pérez-Villegas, A., Pichardo, B., Moreno, E., Peimbert, A., & Velázquez, H. M., 2012, *The Astrophysical Journal Letters*, 745, L14
- [117] Pichardo, Barbara, 2003, PhD Thesis
- [118] Pichardo, B., Martos, M., Moreno, E. & Espresate, J., 2003, *The Astrophysical Journal*, 582, 230
- [119] Pizagno, J., Prada, F., Weinberg, D. H., Rix, H., Herbeck, D., Grebel, E. K., Bell, E. F., Brinkmann, J., Holtzman, J., & West, A., 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 633, 844
- [120] Press, W. H., Teukolsky, S. S., Vetterling, W. T. & Flannery, B. P., 1992, *Numerical Recipes in Fortran 77; The Art of Scientific Computing*, 2nd. ed. (Cambridge University Press: Cambridge)
- [121] Puerari, I., Block, D. L., Elmegreen, B. G., Frogel, A. J. & Eskridge, P. B., 2000, *Astronomy & Astrophysics*, 359, 932
- [122] Reynolds, R.H., 1913, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 74, 132
- [123] Roberts, M. S., & Haynes, M. P., 1994, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 32, 115
- [124] Roberts, W. W., Jr, Huntley, J. M., & van Albada, G. D., 1979, *The Astrophysical Journal*, 233, 67
- [125] Romero-Gómez, M., Masdemont, J. J., Athanassoula, E., & García-Gómez, C., 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 472, 63
- [126] Rubin, V.C., Burstein, D., Ford, W. K. Jr., Thonnard, N., 1985, *The Astrophysical Journal*, 289, 81
- [127] Rubin, V. C., Ford, W. K. Jr., 1970, *The Astrophysical Journal*, 159, 370

- [128] Rubin, V. C., Ford, W. K. Jr., & Thonnard, N., 1978, *The Astrophysical Journal*, 225, L107
- [129] Rubin, V. C., Ford, W. K. Jr., 1983, *The Astrophysical Journal*, 271, 556
- [130] Rubin, V. C. & Graham, J. A., 1987, *The Astrophysical Journal Letters*, 316, L67
- [131] Rubin, V. C., Kenny, J. D. P. & Young, J. S., 1997, *Astronomical Journal*, 113, 1250
- [132] Salucci, P., Yegorova, I. A., & Drory N., 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 388, 159
- [133] Sandage, A., 1961, *The Hubble Atlas of Galaxies*, (Washington: Carnegie Institution).
- [134] Sandage A., Tammann, G.A., 1981, *A Revised Shapley-Ames Catalog of Bright Galaxies*, Carnegie Inst., Washington
- [135] Sanders, R.H., & Tubbs, A.D., 1980, *The Astrophysical Journal*, 235, 803
- [136] Savchenko, S. S., & Reshetnikov, V. P., 2011, *Astron. Lett.*, Vol. 37, No. 12, 817
- [137] Sellwood, J., 1987, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 25, 151
- [138] Sellwood, J.A. & Wilkinson, A., 1993, *Rep. Prog. Phys.*, 57, 173
- [139] Sellwood, J., 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 410, 1637
- [140] Schwarzschild, M., 1954, *Astronomical Journal*, 59, 273
- [141] Schwarzschild, M., 1982, *The Astrophysical Journal*, 263, 599
- [142] Schmidt, M., 1956, *B.A.N.*, 13, 15
- [143] Simien, F. & de Vaucouleurs, G., 1986, *The Astrophysical Journal*, 302, 564
- [144] Schombert, J. M. & Bothun, G. D., 1987, *Astronomical Journal*, 93, 60
- [145] Scorza, C. & Bender, R., 1990, *Astronomy & Astrophysics*, 235, 49
- [146] Slipher, V. M., 1914, *Lowell Obs. Bull.* 62, Vol. 11, 12
- [147] Sofue, Y., 1996, *The Astrophysical Journal*, 458, 120
- [148] Sofue, Y., 1997, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 49, 17
- [149] Sofue, Y., 1998, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 50, 227
- [150] Sofue, Y. & Rubin, V., 2001, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 39, 137
- [151] Sofue, Y., Tomita, A., Honma, M., Tutui, Y., 1999, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 51, 737
- [152] Sofue, Y., Tomita, A., Tuti, Y. & Takeda, Y., 1998, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 50, 427
- [153] Sofue, Y., Tutui, Y., Honma, M. & Tomita, A., 1997, *Astronomical Journal*, 114, 2428
- [154] Spark, L. S., & Gallagher, J. S., 2000, *Galaxies in the Universe* (Cambridge University Press)
- [155] Valenzuela, O., Rhee, G., Klypin, A., Governato, F., Stinson, G., Quinn, T., & Wadsley, J., 2007, *The Astrophysical Journal*, 657, 773
- [156] Van de Hulst, H. C., Raimond, E., van Woerden, H. 1957, *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 14, 1
- [157] van den Bergh, S., 1960, *The Astrophysical Journal*, 131, 215
- [158] van den Bergh, S., 1960, *The Astrophysical Journal*, 131, 558
- [159] van den Bergh, S., 1976, *The Astrophysical Journal*, 206, 883
- [160] Van Den Bergh, S., 1998, *Galaxy Morphology and Classification*, Ed. Cambridge Univ. Press.

- 
- [161] van den Bergh, S., 2002a, Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 114, 797
- [162] van den Bergh, S., 2002b, The Astrophysical Journal, 124, 782
- [163] van den Bergh, S., 2002c, The Astrophysical Journal, 124, 746
- [164] Vandervoort, P.O., 1979, The Astrophysical Journal, 232, 91
- [165] Vauterin, P., & Dejonghe, H., 1996, Astronomy & Astrophysics, 313, 465
- [166] Voglis, N., Stavropoulos, I., & Kalapotharakos, C., 2006, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 372, 901
- [167] Voglis, N., Tsoutsis, P., & Eftymiopoulos, C. 2006b, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 373, 280
- [168] Volders, L., 1959, Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands, 1, 323
- [169] Vorobyov, E. I. 2006, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 370, 1046
- [170] Walkers, M. F., 1989, Astronomical Society of the Pacific Conference Series, 101, 333
- [171] Weiner, B. J., & Sellwood, J. A., 1999, The Astrophysical Journal, 524, 112
- [172] Weinzirl, T., Jogee, S., Khochfar, S., Burket, A., & Kormendy, J., 2009, The Astrophysical Journal, 696, 411.
- [Wilczynski(1896)] Wilczynski, E. J. 1896, The Astrophysical Journal, 4, 97
- [173] Wolf, A., 1986, in Chaos, Ed. A.V. Holden, (Manchester,; Manchester Univ. Press.)
- [174] Wolf, M., 1914, *Vierteljahresschr Astron. Ges.* 49, 162
- [175] Woods, D., Madore, B. F. & Fahlman, G. G., 1990, The Astrophysical Journal, 353, 90
- [176] Wyse, R. F. G., Gilmore, G., & Franx, M. 1997, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 35, 637
- [177] Zaritsky, D., Elston, R., Hill, J. M., 1989, Astronomical Journal, 97, 97
- [178] Zaritsky, D., Elston, R., Hill, J. M., 1990, Astronomical Journal, 99, 1108
- [179] Zaritsky, D., White S. D. M., 1994, The Astrophysical Journal, 435, 599
- [180] Zwicky, F., 1933, *Helvetica Physica Acta*, 6, 110