UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO DE LA FACULTAD DE ECONOMÍA
ÁREA DE ECONOMÍA APLICADA

"EL CICLO ECONÓMICO EN KALECKI A TRAVÉS DE UN ANÁLISIS MATEMÁTICO CAÓTICO"

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN ECONOMIA

PRESENTA:
NANCY IVONNE MULLER DURÁN

TUTOR:

DR. RICARDO MANSILLA CORONA
CENTRO DE INVESTIGACIONES INTERDICIPLINARIAS EN CIENCIAS Y HUMANIDADES

México D.F. 2013

AGRADECIMIENTOS

Comienzo agradeciendo a mis padres, Carlos Müller y María Elena Durán, por su esfuerzo, ejemplo y apoyo en todos los procesos de mi vida.

Al Dr. Ricardo Mansilla, director de esta investigación por la orientación, paciencia, seguimiento y enseñanza a los largo de estos años.

Finalmente un agradecimiento muy especial merece la comprensión, paciencia y el ánimo recibidos de familiares y amigos.

CONTENIDO

GRÁFICAS

INTRODUCCIÓN

A partir de la gran depresión (1929) el economista polaco, Michael Kalecki, inició la elaboración de sus conceptos de lo que hoy se conoce como una gran aportación en la economía: la demanda efectiva. Sus ideas y modelos parten de dos problemas fundamentales que se encontraban en la economía mundial: el desempleo y la capacidad ociosa del capital instalado. El primero, se relacionaba con la capacidad ociosa debido a "algún" fenómeno desconocido. El grado de utilización del equipo de capital existente, como contrapartida del desempleo de la fuerza de trabajo; era muy bajo. En esos años, los empresarios mantenían sus equipos (capital) ociosos porque no eran rentables, por lo que seguir contratando trabajadores tampoco era viable debido a que los precios de mercado de sus productos no alcanzaban a cubrir sus costos (por debajo del valor marginal). Aunado a esta situación, las autoridades recomendaban la reducción de los salarios por parte de los empresarios y la reducción de los impuestos aplicados a los capitalistas por parte del gobierno. Estas ideas propuestas tanto por funcionarios como por economistas suponían que al disminuir los salarios y los impuestos, disminuirían los costos, de tal manera que los precios de venta cubrirían los mismos y se alcanzarían beneficios en el proceso de venta. Con esta suposición, los empresarios tendrían incentivos para aumentar el nivel de producción y emplear más factor trabajo, disminuyendo el desempleo que en aquel entonces superaba el 19%[1]

Para Kalecki, estas afirmaciones realmente no tenían sentido económico, debido a que existían bienes producidos con altos costos que se ofertaban y que no habían sido vendidos, reconociendo así, que si estos eran consumidos por agentes económicos que aportan trabajo, entonces también se vería afectado su nivel de salario, asimismo al existir una reducción de salarios, tal como las recomendaciones lo indicaban, el consumo también se vería reducido quedando solamente el empresario como agente para seguir fomentando el consumo, pero dado que el consumo del empresario es casi constante y de impacto mínimo

[1] U.S. Bureau of Labor Statistics

en la economía, era pues; la inversión la que tenía que aumentar a la par. Por tanto, las ideas ortodoxas indicaban que el beneficio de las reducciones salariales e impositivas, solo redundaran en una mayor acumulación de riqueza por parte de los empresarios, puesto que hay un rezago entre las decisiones de inversión y la inversión dada. Para Kalecki, esto no revolvería el problema de la depresión. Para él, el mecanismo que obligaría a la economía a salir de la etapa recesiva, es finalmente la inversión.

Kalecki tenía claro el problema, los empresarios, acumularían los beneficios obtenidos, tras la aplicación de una reducción salarial e impositiva, pero estos beneficios adicionales, serán acumulados en los bancos, no aplicados inmediatamente a la inversión, (partiendo del supuesto kaleckiano de que los ahorradores no ahorran), aumentando los saldos bancarios y la oferta de crédito a los mismos empresarios, pero manteniendo el consumo deprimido.
Por tanto, la solución para la salida de la crisis económica consistía en el aumento de la inversión, destinando los beneficios obtenidos al mismo proceso productivo antes de que se consuman todos los bienes producidos por la economía, de tal manera que se genere un aumento de bienes de capital para compensar el aumento del consumo, y así también la necesidad de mayor utilización de la capacidad instalada y ante un incremento en esta, se requiere de mayor mano de obra disminuyendo así el desempleo.

En palabras de Kalecki: "The approach.. applied in the theory of business cycles… consists of establishing two relations: one based on the impact of the effective demand generated by investment upon profits and the national income, and the other showing the determination of investment by, broadly speaking, the level and the rate of change of economic activity. The firs relation does not involve now particularly indicate questions. The second, to my mind, remains the piece de resistance of economics" (Kalecki, 1968).

Aunado a las concepciones establecidas por Kalecki sobre de la demanda efectiva, sus estudios publicados acerca del estudio del ciclo económico, tienen una gran aportación al ser de los primeros en incluir un análisis matemático complejo, inicialmente Kalecki propone que el ciclo es el resultado de las fluctuaciones que existan dentro del sistema económico, siendo este un conjunto único; además es capaz de identificar la incapacidad que posee el sistema capitalista para generar sus propias condiciones endógenas de crecimiento, por lo que las fluctuaciones del ciclo económico están intrínsecamente relacionadas con el modo de producción y de acumulación capitalista (mismo que se determina por la tasa de ganancia), por tato sus modelos del ciclo económico son ampliamente reconocidos particularmente por la aportación de un esquema analítico cuya base es la demanda efectiva, aunado a destacables e interesantes modelos matemáticos que inicialmente en 1933 fueron expresados a través de ecuaciones diferencio-diferenciales para después ser analizados mediante su representación geométrica, y finalmente en 1968 establecer un modelo matemático que llegará a analizar la tendencia del ciclo.

La presente investigación tiene como objetivo analizar el tercer modelo propuesto por Kalecki para el estudio del ciclo económico en 1968, a través bifurcaciones matemáticas que permitan de una manera más clara comprender la dinámica propiciada por la inversión, en el desarrollo de este fenómeno, de tal manera que mediante el empleo de una herramienta matemática más compleja se pueden obtener resultados analíticos más amplios y completos del comportamiento del mismo en sus términos.

El esquema de este estudio se divide en dos capítulos. En el primero se hace una revisión del marco teórico-analítico del modelo propuesto por Kalecki en 1968 a fin de obtener las bases necesarias para la comprensión de las variables y parámetros que son relevantes en el proceso del ciclo económico. En el segundo capítulo se realiza un modelo matemático dinámico que describe el comportamiento de la ecuación del ciclo económico con la incorporación a este análisis de un nuevo elemento matemático denominado teoría de las bifurcaciones para el análisis de la estabilidad del ciclo.

CA PITULO I

REVISIÓN TEÓRICA

El estudio del ciclo económico en el marco teórico-analítico de Michal Kalecki ha sido propuesto para esta investigación. Su primer estudio sobre el ciclo económico fue realizado en 1933, en él, el autor describe al ciclo económico como una sucesión de equilibrios temporales cada uno dado por niveles de inversión y de stock de capital los cuales son resultado de decisiones pasadas ejercidas por los empresarios. Para Kalecki lo paradójico consistía en el hecho de que la inversión generaba un efecto doble: incrementaba el volumen de los rendimientos agregados mientras adiciona volumen de capital. Bajo estas ideas, Kalecki crea un esquema macro-dinámico en el que se propone un modelo que si bien es explicado con variables macroeconómicas, también es capaz de expresarse matemáticamente, creando así un modelo cuyas soluciones son endógenas, deterministas y con ciclos de amplitud constante (López, 2011). Para Kalecki, las oscilaciones inestables aparecen cuando en una economía se pasa de un cuasi-equilibrio a otro de tal manera que nunca se alcanza un equilibrio estacionario.

Más tarde en 1939 y aún insatisfecho por los resultados obtenidos en su primer publicación, Kalecki propone un modelo cuya aportación consiste en la introducción del principio del riesgo creciente como un análisis general a las situaciones de inversión que proponía su contemporáneo John Maynard Keynes en aquel tiempo. Sus ideas sobre la inversión consistían básicamente en que las expectativas a largo plazo no eran exógenas y que el retorno del capital no era decreciente sino constante, de tal manera que el el comportamiento del ciclo era afectado por ondas de optimismo y/o pesimismo de los empresarios en determinado momentos del mismo. Más tarde y con base a este modelo, Kalecki y Kaldor (1940) crean un modelo matemáticamente más robusto incluyendo una explicación endógena e inestable para el comportamiento del mismo, en el cual el equilibrio no se alcanza.

Finalmente en 1968, M. Kalecki escribe su última versión de su teoría, introduciendo importantes modificaciones a lo que ya había investigado, una de estas nuevas aportaciones es en referente al progreso técnico como una variable generada por los rendimientos logrados por las empresas y por las decisiones de inversión generadas en el pasado. Aunado a esto, en este modelo, Kalecki realiza el estudio de la tendencia del ciclo económico, algo que no había realizado en sus investigaciones pasadas.

En este capítulo se describirá el primer modelo del ciclo económico propuesto por Kalecki a fin de reconocer las variables y las bases más importantes en el comportamiento del ciclo, para luego realizar una amplia explicación del tercer modelo del ciclo creado por el autor, con la finalidad de reconocer la parte dinámica del mismo y con ello establecer ideas para la comprobación de la hipótesis.

1.1 TEORÍA DEL CICLO ECONÓMICO

El primer estudio del ciclo económico propuesto por Kalecki en 1933 tenía como objetivo explicar y analizar este fenómeno a través del empleo de la teoría macroeconómica y de la generación de un modelo en el cual las variables explicativas pudieran expresar matemáticamente su comportamiento dinámico y complejo. El modelo señala que la teoría del ciclo se crea a través de los procesos de inversión y a su vez enfoca la atención en la construcción de bienes de capital; Kalecki expresa que las fluctuaciones en el grado de utilización de los bienes de capital se extienden en dirección opuesta a las fluctuaciones de la capacidad productiva debido a que, las primeras son mucho más fuertes que las segundas, por tanto la producción de bienes de consumo durante la depresión es mínima[2].

Otra idea que manifiesta Kalecki para conformar su teoría del ciclo es que durante la prosperidad no solo los precios sino también la capacidad de utilización del capital aumentan, ambos fenómenos contribuyen a mejorar la rentabilidad generando mayor

[2] Con esta premisa, Kalecki refuta la teoría de Aftalion, quien asume un nivel máximo en la producción de bienes de capital durante la depresión del ciclo económico

inversión y una expansión de la capacidad productiva; sin embargo, esta expansión contribuye a la caída simultánea del beneficio, de los precios y del empleo, reduciendo la capacidad productiva, y generando así un nuevo ciclo. Por lo tanto, este planteamiento asume una interdependencia entre la rentabilidad y la inversión, es decir, el incentivo de inversión está estimado sobre la rentabilidad existente en las plantas productivas.

El modelo considera una economía cerrada y sin tendencias, es decir, que regrese a su posición original después de cada ciclo, asume además, dos clases sociales en las que el ingreso y los beneficios son las variables primarias más importantes; el ingreso nacional es la suma de los salarios y beneficio, por tanto, el gasto de los capitalistas depende de los beneficios y el gasto de los trabajadores de su salario; con base a ello, el autor plantea los siguientes supuestos:

i. *Beneficios reales brutos*: Denominada por la letra P , esta variable indica el ingreso real agregado de los capitalistas, incluyendo la depreciación por unidad de tiempo, y se fundamenta en la suma del consumo y el ahorro

$$P = C_k + A \qquad (1)$$

En donde: C_k representa los bienes consumidos por los capitalistas y A es la acumulación bruta de los capitalistas (compuesta por los bienes destinados a la reproducción y expansión del capital fijo y al aumento de las existencias). En tanto que la función de C_k se define como:

$$C_k = B_0 + \lambda P \qquad (2)$$

Esto es, el consumo de los capitalistas se compone de una parte constante B_0 y de otra proporcional a los beneficios brutos (en donde λ es una pequeña constante), por tanto se puede considerar C_k relativamente inelástico.

Igualando las ecuaciones (1) y (2) y despejando, se obtiene:

$$P = B_0 + \lambda P + A$$

$$P = \frac{B_0 + A}{1 - \lambda} \qquad (3)$$

Es decir, los beneficios reales brutos P son proporcionales a la suma del consumo constante y la acumulación bruta ($B_0 + A$). Como A es igual a la suma de la producción de bienes de inversión y del aumento de existencias, esta variable permanecerá constante a lo largo del ciclo, esto es porque el volumen total de stock no presentará variaciones cíclicas.

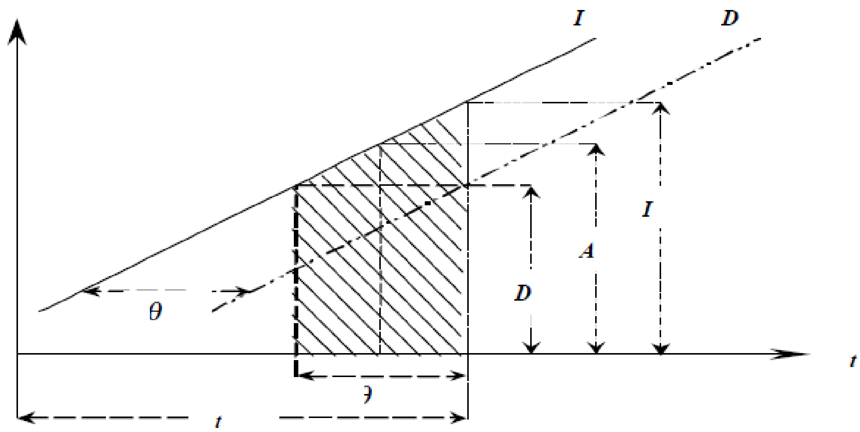
Los beneficios agregados brutos entran primero a la industria y a la agricultura, así como a las empresas de trasporte y a las compañías de comercio, donde una parte de los beneficios es retenida y otra parte se destina al pago de intereses, dividendos, etc. por tanto se asume también que los beneficios totales es redistribuida en una proporción constante entre las compañías de comercio y el resto de las empresas, de esta manera los beneficios brutos de las plantas productivas son proporcionales al total de los beneficios brutos.

ii. *Inversión*: Kalecki asume que el periodo de construcción θ es el mismo para todo proyecto de inversión, esto por supuesto no es algo que se cumpla en la realidad, sin embargo θ podría considerarse como un periodo medio de construcción con el fin de simplificar el modelo. Aunado a esto, el autor distingue tres etapas en la actividad de inversión:

   a) Demanda de inversión: en la que se realizan todos los pedidos de bienes de inversión destinados a la expansión del capital y cuyo volumen por unidad de tiempo se designa con la letra I.
   b) Producción de bienes de inversión: que es igual a la acumulación bruta (A)
   c) Entrega de los bienes de equipo acabados por unidad de tiempo y que se denomina con la letra D.

Hay que destacar que la letra A y D son diferentes en el sentido de que A es la producción de bienes de inversión, mientras que D es la producción de bienes de inversión acabada, por tanto, A-D es igual al incremento del capital en curso de elaboración. Ahora bien, la relación entre I y D es simple: las entregas realizadas en el momento t son iguales a los pedidos de los bienes de inversión que se hicieron en el momento t-θ. En consecuencia la curva D será igual a la curva I desplazada por un rezago de tiempo igual a θ. Tal como lo muestra la siguiente gráfica:

Gráfico 1. Pedidos y entrega de inversión



Fuente: Teoría del ciclo económico. Kalecki (1933).

En la gráfica 1, la relación entre D e I es más sencilla que la correspondencia que se observa entre la producción de bienes de inversión A y los pedidos de bienes de inversión I, la cual es más complicada; esto es porque el área sombreada es igual al valor de los pedidos realizados durante un periodo θ y que finaliza en el momento t, por tanto también será igual a la cartera de pedidos en el momento t que Kalecki denomina con la letra W.

La satisfacción de cada periodo requiere de un tiempo θ , por lo tanto los pedidos incluidos en el área rayada (que forma un trapecio) no se han satisfecho. Si cada pedido debe satisfacerse en un periodo θ , la proporción de su volumen que debe satisfacerse por unidad de tiempo es $1/\theta$. Por lo tanto, a una cartera de pedidos (W) le corresponde una producción de bienes de inversión igual a W/θ . Entonces la producción de bienes de inversión (A) es igual al área sombreada dividida entre el periodo de construcción θ .

$$A = \frac{W}{\theta} \qquad (4)$$

Con la ecuación (4) se puede deducir que A es igual al área sombreada del trapecio dividida por θ. Si se llegará a considerar que el lado superior del trapecio es una curva, entonces, este comportamiento solo será cierto en términos aproximados, pero si se considera el lado superior como una recta, entonces A en el momento t sería igual a la mediana del trapecio, es decir:

$$A(t) = I(t - \frac{\theta}{2})$$

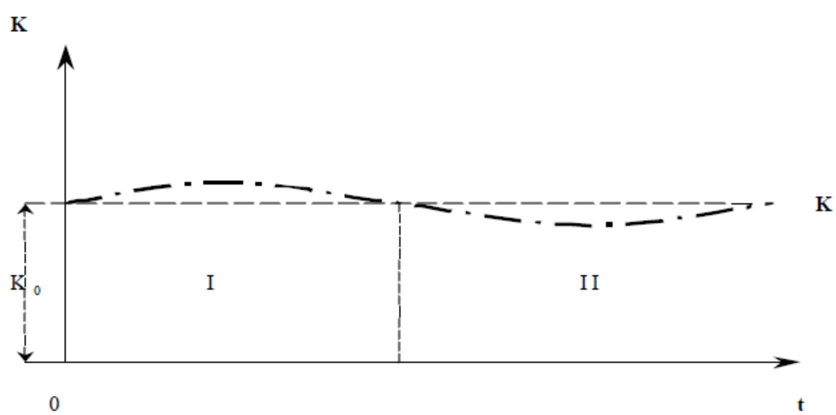
Con esta suposición, la diferencia entre I-D es igual al incremento de la cartera de pedidos, mientras que la diferencia entre A-D es igual al incremento del capital en curso de elaboración por unidad de tiempo.

iii. *Cambios en el volumen del capital*: Denominado por la letra K, el cambio durante un periodo del volumen del equipo de capital es igual a la diferencia entre las entregas de nuevo equipo y el volumen de activos producidos que dejan de utilizarse, esta relación se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = D - U \qquad (5)$$

En donde $\frac{\Delta K}{\Delta t}$ es el cambio del equipo de capital, D las entregas e nuevo equipo y U las necesidades de reposición, las cuales permanecen constantes a lo largo del ciclo económico. Gráficamente las fluctuaciones que representan estos cambios en K se pueden observar de la siguiente manera:

Gráfico 2. Cambios en el volumen del equipo de capital (K)



Fuente: Teoría del ciclo económico. Kalecki (1933).

En la gráfica 2, cuando K es más elevado que el promedio, las necesidades de reposición (U) también lo serán, en la parte I, el incremento del capital se debe a que la "vida" de los activos "jóvenes" es más larga que la duración del ciclo en sí, por tanto las necesidades de reposición puedes ser despreciables.

Al suponer que la economía no presentaba tendencias, que el volumen del capital regresaba a su posición original después de cada ciclo y que las necesidades de reposición eran igual al promedio de las entregas realizadas, se puede entonces asumir que los promedios de I, A y D durante el ciclo son todos iguales:

$$U = I_0 = A_0 = D_0 \qquad (6)$$

iv. *Los pedidos de bienes de inversión son función de la rentabilidad bruta y del tipo de interés*: El volumen de los pedidos de inversión D, depende de la rentabilidad anticipada, es decir, el empresario planea invertir un capital *k* a partir de un beneficio bruto esperado *p*. Kalecki asume que de esto se pueden deducir 3 aspectos importantes:

a) La depreciación βk
b) El interés *ik*
c) el interés sobre el capital circulante que requerirá en el futuro i γk

Con estos elementos, el empresario puede anticipar su rentabilidad al hacer una inversión en capital fijo con la siguiente ecuación:

$$\frac{p - \beta k - ik - i\gamma k}{k} = \frac{p}{k} - \beta - i(1 + \gamma)$$

Si se considera que β y γ permanecen constantes, que *i* es el tipo de interés en un momento dado, y que la rentabilidad bruta anticipada (*p/k)* puede estimarse a partir de la rentabilidad bruta real del capital existente (*P/K*) y del tipo de interés (*i*). Entonces se puede deducir que:

$$\frac{I}{K} f(\frac{P}{K}, i) \qquad (7)$$

En donde: $\frac{I}{K}$ son los pedidos de bienes de inversión, $\frac{P}{K}$ representa la rentabilidad bruta, i es la tasa de interés y f' ($\frac{P}{K}$)> 0; f' (i) < 0, pues el interés se eleva en los auges y desciende en la fase de depresión. Con base a esto, Kalecki crea un supuesto simplificador que indica que el tipo de interés es una función creciente de la rentabilidad bruta, al considerar este nuevo supuesto y la ecuación (7) se obtiene:

$$\frac{I}{K} f(\frac{P}{K}) \qquad (8)$$

También se asume que el tipo de interés aumenta lentamente en relación con la rentabilidad bruta como para permitir que F sea una función creciente. Si aunado a esto se retoma el supuesto del beneficio bruto, entonces la ecuación (8) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{I}{K} = \varphi(\frac{B_0+A}{K}) \qquad (9)$$

Si se asume además que φ es una función no lineal, entonces:

$$\frac{I}{K} = m\left(\frac{B_0+A}{K}\right) - n \qquad (10)$$

Es decir, φes una función creciente, m es una constante positiva, para demostrar que n es positiva también, entonces:

$$I = m(B_0 + A) - nK \quad (10.1)$$

$$n = \frac{m(B_0 + A) - I}{K}$$

En donde, I representa el volumen de los pedidos destinados a la reproducción y expansión del capital, sin embargo su valor se puede aproximar a cero. Por tanto el volumen de los pedidos de bienes de inversión es una función creciente de la acumulación bruta y una función decreciente del volumen del equipo de capital.

Con estos supuestos que se han establecido de manera desarrollada de acuerdo con el marco teórico de Kalecki, el autor fija algunas conclusiones que le ayudan a explicar la forma en cómo se desarrolla el ciclo económico:

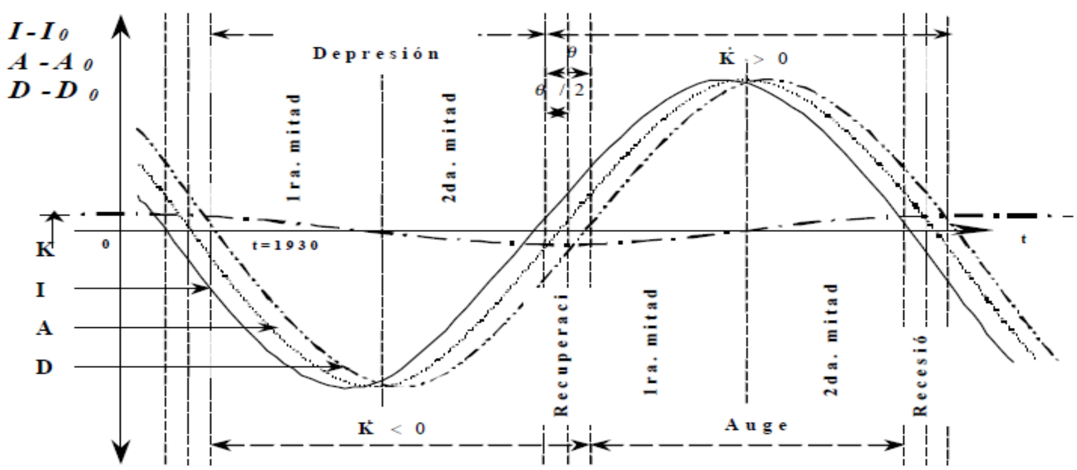
a) Existe un retraso temporal entre la formulación de los equipos y la entrega de los mismos θ
b) A es igual a la acumulación bruta

c) La entrega de nuevos activos fijos D, originan un incremento en el volumen del equipo de capital
d) Los pedidos de bienes de inversión I son una función decreciente del volumen del equipo de capital.

1.2 FUNCIONAMIENTO DEL CICLO ECONÓMICO

Kalecki expone el mecanismo del ciclo económico de la siguiente manera: Un incremento de los pedidos de bienes de inversión provoca un aumento en la producción de los mismos, y por tanto un aumento en la actividad inversora que indica la ecuación (10.1), sin embargo después de un tiempo el volumen de capital comienza a crecer, originando inicialmente una disminución de los pedidos. Es importante destacar que de acuerdo con los supuestos establecidos anteriormente, la economía estudiada no permite que la actividad de inversión se estabilice en un nivel superior a las necesidades de reposición (U). Por lo tanto al ocurrir un fenómeno como el descrito, la estabilidad de las decisiones de inversión se verá alterada. Gráficamente se puede expresar de la siguiente manera:

Gráfico 3. Mecanismo del ciclo económico



Fuente: Teoría del ciclo económico. Kalecki (1933).

En la gráfica tres se puede observar las fases por las que transita el ciclo económico: Depresión, Recuperación, Auge y recesión.

En la primera etapa o depresión, ocurre que los pedidos de bienes de inversión están por debajo de las necesidades de reposición, por lo cual el volumen de equipo de capital (*K*) se ve reducido en el transcurso de la misma En la primera mitad de esta fase, el descenso de *K* va suavizando la caída de los pedidos de inversión (*I*) a medida que transcurre el tiempo (*t*). Una vez que la caída de *I* se detiene, la economía se encuentra en el piso de la depresión a un nivel muy bajo de la actividad; como consecuencia de la contracción de *K*, se satisface la misma *I* con un menor K, por lo cual aumenta su grado de utilización. En la segunda mitad de esta fase, esto provoca que la rentabilidad de *K* aumente, con lo que *I* empieza a elevarse también Entonces, el descenso de *K* provocará el incremento de *I* y éste dará comienzo a la expansión. Transcurrido cierto intervalo de tiempo, las pedidos de bienes de inversión superarán el nivel de necesidades de reposición (U) y comenzará una nueva fase, la recuperación.

La etapa de recuperación es la fase en donde los pedidos de bienes de inversión, superan el nivel de las necesidades de reposición, debido a ello la producción de bienes de inversión continúa incrementándose y en consecuencia el volumen de capital deja lentamente de caer. Sin embargo, esto no es una condición para la expansión (al menos no en esta etapa), puesto que las entregas de nuevo equipo en toda esta fase, son menores al nivel de las necesidades de reposición. Transcurrido el intervalo de tiempo θ , las entregas de nuevo equipo superarán el nivel de las necesidades de reposición y comenzará una nueva fase, el auge.

El auge es una fase del ciclo de duración variable durante la cual las entregas de nuevo equipo superan las necesidades de reposición, por lo tanto, el volumen de capital finalmente termina por expandirse. En la primera mitad de esta fase, esta elevación de *K* va suavizando la escalada de los pedidos de inversión a medida que transcurre el tiempo (t*)*. Una vez que el alza de *I* se detiene, la economía se encuentra en el techo del auge a un nivel muy alto de actividad, como consecuencia de la expansión de *K*, se satisface la misma *I* con un mayor *K*, por lo cual disminuye su grado de utilización.

En la segunda mitad de esta fase, lo anterior provoca que la rentabilidad de K disminuya, con lo que I empieza a descender también. Entonces, el aumento de K provocará el descenso de I y éste dará comienzo a la contracción. Transcurrido cierto intervalo de tiempo, los pedidos de bienes de inversión serán menores al nivel de necesidades de reposición y comenzará una nueva fase, la recesión.

La última etapa del ciclo, es la recesión, esta se caracteriza por que los pedidos de bienes de inversión están por debajo de las necesidades de reposición, esto ocasiona que la producción estos bienes continúe disminuyendo y en consecuencia el volumen de capital deja lentamente de crecer. Sin embargo en esta etapa no se contrae del todo puesto que las entregas de nuevo equipo en toda esta fase, son mayores al nivel de las necesidades de reposición. Transcurrido cierto intervalo de tiempo, las entregas de nuevo equipo serán menores al nivel de necesidades de reposición y comenzará nuevamente la fase depresiva.

Es de esta manera que Kalecki expone el mecanismo del ciclo económico, en este marco teórico las fluctuaciones de la acumulación bruta se verán reflejada en la función de producción agregada, ya que cuando la producción de bines de inversión aumenta, la producción agregada lo hará en la misma proporción, aunado a esto, habrá un incremento en la demande de bienes de consumo por parte de los trabajadores incorporados a los nuevos bienes de inversión, así los niveles de producción agregada y de beneficio por unidad se elevarán hasta el punto en donde el incremento de los beneficios reales se iguale con el incremento de la producción de bienes de inversión.

Sin embargo inicialmente para Kalecki, este análisis no queda completo debido a que falta considerar los cambios que se realizan en el consumo de los capitalistas, y es esta idea la que le hace desarrollar algunas otras sobre lo que pasaría si se considera este consumo, para el autor, tanto la producción agregada como el beneficio por unidad de producto crecerán hasta asegurar la igualdad entre el aumento de los beneficio reales y el incremento de la producción de bienes de inversión y el consumo de los capitalistas, contradiciendo así, la manera de pensar ortodoxa de que cuanto mayor sea el consumo, menor será el ahorro.

1.3 MODIFICACIONES AL MODELO DEL CICLO ECONÓMICO (1943)

El modelo considera una economía en la que tanto el comercio exterior como el presupuesto público está en equilibrio, asume además, dos clases sociales en las que el ingreso y los beneficios son las variables primarias más importantes; el ingreso nacional es la suma de los salarios y beneficio, por tanto, el gasto de los capitalistas depende de los beneficios y el gasto de los trabajadores de su salario (estos agentes no ahorran); con base a ello, el autor plantea los siguientes supuestos:

i. La inversión determina el nivel de actividad económica
ii. El nivel de actividad económica y la tasa de variación de ésta determinan, después de cierto tiempo la inversión.
iii. El índice de precios empleado para deflacionar la inversión, es igual al usado para deflacionar el producto bruto del sector privado.

Considerando estos supuestos, Kalecki estableció las principales ecuaciones que describen el proceso dinámico del ciclo económico. Inicialmente se asume un comercio exterior y un presupuesto gubernamental equilibrado, a partir de esta condición, se puede deducir también que la inversión es igual al ahorro, es decir:

$$S = I$$

El autor, bajo el mismo supuesto, establece la primera ecuación para su modelo, la cual relaciona los beneficios (denominados con la letra P) después del pago de impuestos, con la inversión de manera dinámica obteniendo una ecuación que explica de manera explícita los determinantes de las ganancias, ésta se muestra a continuación:

$$P_t = \frac{I_{t-\omega} + A}{1-q} \qquad (1)$$

En donde P son los beneficios, I la inversión, A la parte estable del consumo capitalista y q es el coeficiente del consumo realizado debido al incremento de los beneficios. Esta ecuación considera la relación de dependencia entre el consumo de los capitalistas con los beneficios de un periodo anterior, de esta manera, las ganancias están determinadas por la inversión y esta a su vez, depende de las decisiones de inversión tomadas en el pasado, por tanto se puede deducir que los beneficios se establecen por anteriores decisiones de inversión.

Kalecki plantea también la segunda ecuación, la cual explica la relación entre el producto bruto real, O, y los beneficios después de impuestos y además, refleja: los factores que determina la distribución del ingreso nacional, como actúan los impuestos sobre los beneficios y el nivel de impuesto indirectos, ésta ecuación se puede representar de la siguiente manera:

$$O_t = \frac{P_t + B\prime}{1 - \alpha\prime} + E \qquad (2)$$

En la ecuación (2), el coeficiente α' y la constante B' muestran el sistema de impuestos sobre los beneficios y los factores de distribución del ingreso respectivamente; E es una constante que indica el total de impuestos indirectos.

Finalmente se establece la tercera ecuación, ésta representa la determinación de la inversión:

$$I_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} S_t + b'^{\frac{\Delta P_t}{\Delta t}} + e \frac{\Delta O_t}{\Delta t} + d' \qquad (3)$$

En esta ecuación se puede reconocer la relación entre la inversión de capital fijo, el ahorro, la tasa de variación de los beneficios, la tasa de variación del acervo de capital fijo y la relación entre la inversión en existencias y la variación de los beneficios. Ahora bien si se retoma la deducción inicial de que $S = I$, entonces esta ecuación (3) se puede representar de la siguiente manera:

$$I_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} I_t + b'^{\frac{\Delta P_t}{\Delta t}} + e \frac{\Delta O_t}{\Delta t} + d' \qquad (4)$$

Después de reconocer las ecuaciones que intervienen en el proceso dinámico, Kalecki procede a explicar el ciclo económico; inicialmente supone un sistema estático, es decir que no está sujeto a crecimiento a largo plazo, por tanto asume constantes los parámetros A, B' y E. De esta manera, la tasa de variación de los beneficios y de la producción se expresarán en términos de la tasa de variación de la inversión; con estas modificaciones la ecuación (4) se puede representar de la siguiente manera:

$$I_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} I_t + \frac{1}{1-q}\left(b' + \frac{e}{1-\alpha'}\right)\frac{\Delta I_{t-\omega}}{\Delta t} + d' \quad (5)$$

Esta ecuación indica entonces que la inversión en la época $t+\theta$ es función de la inversión en el tiempo t y la tasa de variación de la inversión en $t-\omega$. El primer término del lado derecho indica la influencia del ahorro presente (a) sobre las decisiones de inversión, así como el efecto negativo del aumento del acervo de capital, el segundo representa la influencia de la tasas de variación de los beneficios y de la producción. Para que este modelo pueda mostrar la abstracción de los cambios a largo plazo, es necesario suponer que d' también es constante, de esta manera, la inversión sería igual a la depreciación δ, esto ocurre si la variación de la inversión con respecto al tiempo es igual a cero, lo cual modifica la ecuación (5) de la siguiente manera:

$$\delta = \frac{a}{1+c}\delta + d' \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) en (5) se obtiene:

$$I_{t+\theta} - \delta = \frac{a}{1+c}(I_t - \delta) + \frac{1}{1-q}\left(b' + \frac{e}{1-\alpha'}\right)\frac{\Delta I_{t-\omega}}{\Delta t}$$

Si δ se considera constante, entonces:

$$i_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} i_t + \frac{1}{1-q}\left(b' + \frac{e}{1-\alpha'}\right)\frac{\Delta i_{t-\omega}}{\Delta t} \quad (7)$$

Si se simplifica el término $\frac{1}{1-q}\left(b' + \frac{e}{1-\alpha'}\right)$ con la letra μ, entonces la ecuación (7) se puede representar como:

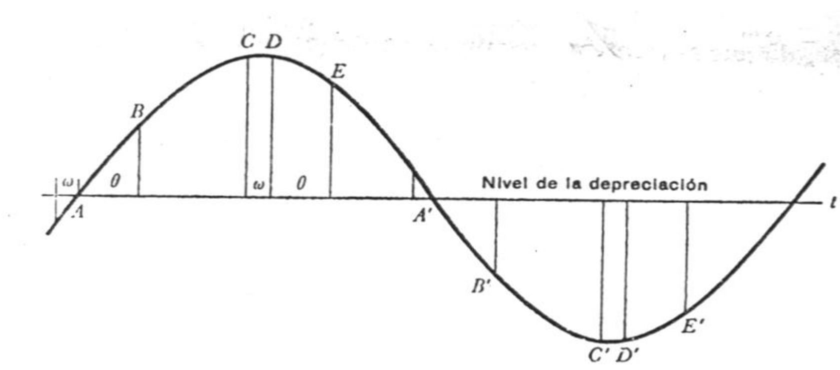
$$i_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} i_t + \mu\frac{\Delta i_{t-\omega}}{\Delta t} \qquad (7')$$

Siendo esta última ecuación el fundamento para el análisis del ciclo económico.

1.4 EL COMPORTAMIENTO DEL CICLO ECONÓMICO

Kalecki reconoció que conforme a la ecuación (7') se podía estudiar la tendencia cíclica inherente al mismo sistema, de esta manera, sostiene que para realizar el análisis del comportamiento del ciclo económico se debe mantener el coeficiente $\frac{a}{1+c}$ inferior a 1. Gráficamente se puede observar la siguiente conducta:

Gráfico 4. Comportamiento de la inversión



Fuente: Mecanismo del ciclo económico. Kalecki (1943).

En la gráfica 4 se muestra una situación en la que i_t=0, es decir el punto A donde la inversión es igual a la depreciación. Además se supone que $\frac{\Delta i_{t-\omega}}{\Delta t} > 0$ lo que representa que antes de alcanzar el punto A, la inversión era inferior a la depreciación pero se iba elevando hacia si nivel, por tanto i se incrementa hasta alcanzar un punto B por arriba del nivel de depreciación; una vez que i se vuelve positiva, su incremento sólo dependerá de los coeficientes $\frac{a}{1+c}$ y μ.

Ante este comportamiento se pueden presentar dos alternativas: la de que los coeficientes $\frac{a}{1+c}$ y μ sean tales que el alza de la inversión llega a su fin en el punto C; o la de que el aumento continúe hasta que la actividad económica alcance un nivel en que no es posible subir más a causa de la falta de capacidad actual de producción o de mano de obra disponible.

La primera opción explica que cuando la inversión ha dejado crecer en el punto C, no puede sostenerse en este nivel, por tanto tiene que descender del punto D a E. Para explicarlo de una mejor manera, Kalecki designa i_{sup} al nivel superior de i, dentro del comportamiento cíclico, de esta manera, en el punto D se puede plantear que:

$$i_t = i_{sup;} \frac{\Delta i_{t-\omega}}{\Delta t} = 0 \qquad (8)$$

Luego para $i_{t+\theta}$ en el punto E, el componente $\mu \frac{\Delta i_{t-\omega}}{\Delta t}$ =0 y el componente $\frac{a}{1+c} i_{sup}$ es inferior a i_{sup} ya que inicialmente se había supuesto que el término$\frac{a}{1+c} < 1$. En consecuencia la inversión desciende de su punto más elevado al punto E. Cuando esto sucede, entonces $i_{t+\theta}$ es más bajo que i_t debido a que la expresión $\frac{a}{1+c} i_t$ también será inferior a i_t y $\frac{a}{1+c}$ obtendrá valores negativos, de esta manera la inversión disminuirá a tal punto que se iguale con el nivel de depreciación.

Cuando el modelo llegué a la fase anteriormente descrita, entonces el comportamiento del ciclo será ahora ascendente; como se muestra en la gráfica 4, el nivel de depreciación se encuentra en el punto A', la inversión seguirá disminuyendo hasta ubicarse en el punto C', para después desplazarse a los niveles D' y luego a E', alcanzando de nueva cuenta el nivel de depreciación. Además hay que reconocer que en este proceso las fluctuaciones de la inversión irán acompañadas de cambios en las variables de ingreso, producción y empleo.

Hay que destacar que para el autor el mecanismo del ciclo económico se basa en dos elementos:

i. Cuando la inversión alcanza la depreciación en la fase descendente, no se detiene, sino que continua con una conducta ascendente, es decir, el aumento de la inversión y de los beneficios se realizan antes de alcanzar el nivel de depreciación. Por tanto, sólo puede haber un equilibrio estático si la inversión está al nivel de la depreciación y si no ha cambiado de nivel en el pasado reciente.
ii. Cuando el movimiento ascendente de la inversión se detiene, entonces continúa la fase de descenso, Esto ocurre debido a que el término $\frac{a}{1+c} < 1$ lo que refleja la influencia negativa que ejerce el incremento del capital sobre la inversión; si la

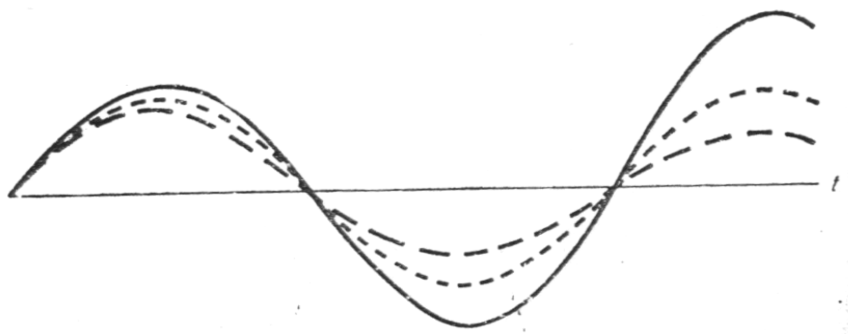
acumulación de equipo de capital no se considerará entonces el sistema podría sostenerse en un nivel superior.

Para Kalecki la situación en el fondo de la depresión es análoga a la de la cima del auge, ya que en la primera la tasa de beneficio se eleva debido a que no se remplaza la depreciación del capital, mientras que en la segunda ésta se reduce ante el incremento de la acumulación del equipo de capital. Sin embargo, el hecho de que estas fases sean análogas no implica que sean simétricas, pues se podría considerar que en la etapa de depresión la destrucción de capital sobre la decisión de inversión es mucho más débil que el de la acumulación de capital durante el auge, por tanto, las depresiones pueden llegar a ser muy largas.

Es así, como el autor supone que los términos $\frac{a}{1+c}$ y μ provocan naturalmente un alto automático del aumento de la inversión durante el auge y de su disminución durante la depresión. Un caso alternativo sería cuando el alza de la inversión durante el auge no se detiene hasta que es obstaculizado por la escasez de equipo o de mano de obra, cuando se alcanza esta situación, se acumulan rápidamente los pedidos no cumplidos y las entregas se retrasan, ocasionando que las inversiones puedan dejar de aumenta o descender. Después de que la tasa de inversión se detiene y de que el nivel de actividad económica ha permanecido durante cierto tiempo en su “tope” superior empieza a funcionar el mecanismo del ciclo económico “automático”, es decir, cuando la inversión comienza a descender. Sin embargo Kalecki pone en duda si hay un “tope” inferior ya que no hay límite para la desinversión en existencias.

Por otra parte, Kalecki también considera dentro del mecanismo del ciclo automático, los diferentes comportamientos inherentes al sistema, estos pueden ser estables, explosivos o atenuados; cada tipo de conducta será determinada por el valor que adopten los coeficientes $\frac{a}{1+c}$ y μ y los rezagos $\theta\ y\ \omega$, mientras que la amplitud de las fluctuaciones se considera constante. Si aumenta el coeficiente μ sin que $\frac{a}{1+c}$, $\theta\ y\ \omega$ varíen, entonces las fluctuaciones se vuelven explosivas, si por el contrario μ decrece, entonces se atenúan. La representación gráfica se muestra a continuación:

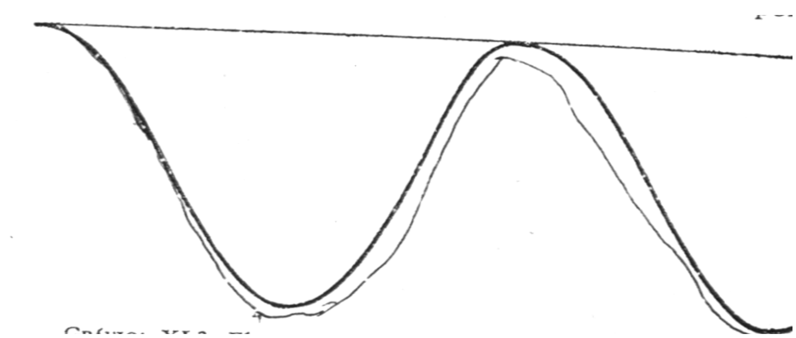
Gráfico 5. Formas que pueden adoptar las fluctuaciones



Fuente: Mecanismo del ciclo económico. Kalecki (1943)

En el caso de las fluctuaciones explosivas, la amplitud de éstas crece durante la fase de expansión, tocando el límite superior, seguido por una fase descendente, y después una recuperación que vuelve a llevar la inversión al tope. Tal como lo muestra la gráfica 5.

Gráfico 6. Comportamiento de las fluctuaciones explosivas



Fuente: Mecanismo del ciclo económico. Kalecki (1943)

En la gráfica 6 se puede observar que el punto inferior de la etapa de recesión no cambia de nivel porque su curso está determinado por la ecuación (7’) y por los coeficientes y rezagos ya mencionados. En el caso de las fluctuaciones atenuadas, la amplitud disminuye porque las relaciones entre la inversión, los beneficios y la producción que se muestran en la ecuación (7’) son estocásticas, es decir están sujetas a perturbaciones al azar, cuando esto sucede esta ecuación se modifica de la siguiente manera:

$$i_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} i_t + \mu \frac{\Delta i_{t-\omega}}{\Delta t} + \varepsilon \qquad (7'')$$

En donde ε es la perturbación al azar, este efecto contrarresta la atenuación inherente al sistema, generando una especie de ciclo semi-regular y cuya amplitud está determinada por la magnitud de ε y por los parámetros de la ecuación (7').

De esta manera Kalecki concluye con su explicación del tercer modelo de la teoría del ciclo económico, no obstante, el autor admite que la aplicación de esta teoría puede tener algunas dificultades, ya que en la práctica la atenuación de la fluctuación no es débil, en consecuencia el ciclo resulta irregular y su amplitud es del orden de magnitud de las perturbaciones. Ante esta situación Kalecki abandona este camino y se enfoca de nueva cuenta al modelo lineal que desarrolló en 1933, en el cual, son fundamentales los choches aleatorios para la explicación del ciclo económico.

1.5 MODIFICACIONES AL TERCER MODELO DEL CICLO ECONÓMICO

En 1968, Kalecki retoma el estudio del ciclo económico creando un nuevo análisis en el que considera un sistema menos automático como el propuesto en 1943, además en este modelo considera la tendencia (ó el comportamiento a largo plazo) como un componente importante en el mismo ciclo y las repercusiones del progreso técnico en el proceso dinámico, sin dejar a un lado el impacto de la demanda efectiva sobre los beneficios y el ingreso nacional, ni la determinación de las decisiones de inversión. Con estas ideas, el autor trata de obtener una explicación satisfactoria del ciclo económico.

En sus palabras:

*"I myself approached this problem in my Theory of Economic Dynamics and my 'Observations on the theory of Growth' in a manner which now I do not consider entirely satisfactory: I started by developing a theory of the pure business cycle in a stationary economy, and I later modified the respective equations to get the trend into the picture. By this separation of short and long-run influences I missed certain repercussion of technical progress which affect the dynamic process as a hole." (*Kalecki, 1968)

De esta manera, Kalecki propone un sistema menos automático como el propuesto en 1943, además en este modelo considera la tendencia (ó el comportamiento a largo plazo) como un componente importante en el mismo ciclo y las repercusiones del progreso técnico en el proceso dinámico, sin dejar a un lado el impacto de la demanda efectiva sobre los beneficios y el ingreso nacional, ni la determinación de las decisiones de inversión. Con estas ideas, el autor trata de obtener una explicación satisfactoria del ciclo económico.

Dentro de esta teoría de tendencia y ciclo económico, Kalecki se centra en explicar la diferencia entre la tasa de beneficio actual y estándar de una nueva inversión (López 2001), dando como resultado para su investigación la consideración de un ciclo semi-regular el cual puede existir sin importar la ecuación del ciclo de negocio.

Los supuestos para este modelo, implica una la separación de las actividades gubernamentales, además abstrae el retraso temporal en el gasto del consumidor, supone que todos los gastos de mano de obra son costos directos de producción y mantiene los supuestos de su primer modelo. A partir de ellos, Kalecki obtiene las siguientes ecuaciones:

Para los beneficios brutos: $P = I + C_k$ (8)

En donde P son los beneficios brutos en precios constantes, I es la inversión bruta de capital fijo y C_k es el consumo de los capitalistas. Dejando a un lado el retraso temporal del consumo y las ganancias de los capitalistas se obtiene que el consumo de estos agentes se exprese como:

$$C_k = \lambda P + A \quad (9)$$

Siendo λ una pequeña constate y A una cierta magnitud que cambia lentamente dependiendo de los pasados desarrollos económicos y sociales y que por tanto se considera una función del tiempo $A(t)$. De las ecuaciones (8) y (9) se obtiene:

$$P = \frac{I_t + A(t)}{I - \lambda} \quad (10)$$

Si se designa para el término $I/\ (I - \lambda)$ la letra m, entonces la ecuación (10) se puede reducir a:

$$P_t = m(I_t + A(t)) \qquad (10´)$$

Para explicar la relación entre los beneficios P y el ingreso nacional bruto Y, Kalecki considera la proporción P/Y (q) como un parámetro que a largo plazo puede sufrir cambios importantes, pero que inicialmente será tratado como una constante, de esta manera se limita el análisis al caso en el que el proceso de fijación de precios y los cambios en la proporción de los costos de salario por unidad para los precios de las materias primas básicas no producen cambio alguno en q[3]. De esta manera:

$$Y = \frac{P}{q} \qquad (11)$$

Después de obtener las ecuaciones que representan sus principales supuestos, el autor aborda el tema de la determinación de las decisiones de inversión de una forma innovadora, introduciendo el concepto de “proporción estándar de ganancia” ó “periodo compensatorio”, éste no es más que el nivel de inversión en un periodo determinado, el cual el nuevo equipo producirá una cierta proporción de beneficio bruto; y es denominado por la letra π. De esta manera, I (π) es el nivel de nueva inversión que produciría bajo las condiciones dominantes de ese periodo, siendo la proporción de la ganancia π. Ante esta situación se puede reconocer que cuanto mayor sea el nivel de inversión, menor será π.

Si se omite el aumento de la productividad debido al progreso técnico, entonces se puede suponer que I (π) es proporcional al incremento de los beneficios reales desde al comienzo al final del periodo (ΔP), por tanto y dado el supuesto de capacidad ociosa, la nueva inversión captará solamente una parte de las ganancias $n\Delta P$, donde n es una pequeña constante, al unir estos dos conceptos se obtiene que:

$$I(\pi) = n\frac{\Delta P}{\pi} \qquad (12)$$

[3] Considerando este supuesto como irreal, ya que el parámetro q puede ser un instrumento que asegure la flexibilidad del precio en relación con la demanda.

Ahora bien, con la introducción de la influencia del progreso técnico, el modelo cambia de la siguiente manera; con los beneficios brutos reales y el ingreso nacional bruto real en el periodo considerado se obtiene Y- P, este será también el nivel aproximado de los costos del trabajo asociados con el equipo viejo porque las nuevas capacidades se consideran pequeñas en relación con el capital ya existente. Ahora bien, durante el año considerado los costos reales de mano de obra se elevarán como resultado del aumento de la productividad provocado por el progreso técnico, como consecuencia de este fenómeno los beneficios producidos por el viejo equipo disminuirán, esto aunado a que los precios de mercado no son uniformes; de ello se desprende que $\alpha(Y-P)$, donde α será más elevada cuanto mayor sea la proporción del aumento de la productividad.

Por su parte, las pérdidas producidas por el equipo viejo es el beneficio en las ganancias captadas por la nueva planta, por ende, las ganancias obtenidas realmente mediante el nivel de inversión será:

$$I(\pi) = \frac{n\Delta P + \alpha(Y-P)}{\pi} \qquad (13)$$

La ecuación (13) supone el hecho de que el nivel de inversión capta la proporción de ganancia π dependiendo de dos determinantes básicas: el incremento de las ganancias totales y el traslado de las ganancias del viejo al nuevo equipo. Complementando con la ecuación (11) se obtiene:

$$I(\pi) = \frac{n\Delta P + \delta P}{\pi} \qquad (14)$$

Para poder explicar la dificultad que conlleva las decisiones de inversión, Kalecki estudia este proceso en dos etapas y supone que estas decisiones dependen de los ahorros brutos empresariales y de los requisitos previos para su reinversión. La primera está ligada al problema del capital empresarial que es la base de la inversión, mientras que la segunda se relaciona con la idea de π en la nueva inversión. Por tanto, si esa inversión capta π, será igual a lo que fue la inversión real en ese periodo, es decir, simplemente están reinvirtiendo los ahorros empresariales. Si se designa D a las decisiones de inversión y E a los ahorros empresariales, entonces:

$$D = E + r(I(\pi) - I) \qquad (15)$$

En donde r un coeficiente que mide la intensidad de la reacción de los empresarios a la diferencia $(I(\pi) - I)$, y si además se supone que los ahorros brutos empresariales guardan una relación constante con los ahorros del rentista, tal que E=eS, siendo e un coeficiente; entonces al unir las ecuaciones (14) y (15) se obtiene:

$$D = eI + r \left(\frac{n\Delta P + \delta P}{\pi} - I\right) \qquad (16)$$

La ecuación 16 indica a través del término δP el estímulo para la inversión debido a la mayor productividad y que les permite obtener ganancia del equipo viejo. Sin embargo, esta ecuación explica el fenómeno cuando los empresarios averiguan su comportamiento actual en términos de lucro, por tanto existe otro efecto a considerar de las innovaciones.

En el periodo considerado, nuevos inventos se ponen al alcance de los empresarios, de esta manera ellos esperan lograr mejores resultados que en el periodo anterior. En la realidad, eso no resultará cierto debido a que si no se acelera el aumento de la productividad, la inversión materializada en el año siguiente no será más lucrativa, solamente será real para los primeros empresarios que adopten estas novedades técnicas. Para explicar esta conducta se añade a la ecuación (16) una magnitud de cambio dependiente de los desarrollos o progresos económicos, sociales o tecnológicos pasados B (t), quedando de la siguiente manera:

$$D_t = eI_t + r \left(\frac{n\Delta P_t + \delta P_t}{\pi} - I_t\right) + B(t) \qquad (17)$$

Ya establecidas las ecuaciones fundamentales que explican el comportamiento de las decisiones de inversión, la dinámica de ésta variable es desarrollada a continuación. Sea τ el retaso temporal entre las decisiones de inversión y la inversión realizada, se tiene que:

$$D_t = I_t + \tau \qquad (18)$$

Por tanto, la ecuación (17) se puede reescribir como:

$$I_{t+\tau} = (e-r)I_t + \frac{r}{\pi}\ (n\Delta P_t + \delta P_t) + B(t)$$

Si dentro de esta nueva ecuación se sustituye las ganancias en términos de inversión, es decir $P_t = m(I_t + A(t))$, se obtiene:

$$I_{t+\tau} = (e - r + \frac{r}{\pi} m\delta) I_t + \frac{r}{\pi}\ mn\Delta I_t + \frac{r}{\pi} m\delta A(t) + \frac{r}{\pi} mn\Delta \mathrm{A(t)} + B(t) \qquad (19)$$

Introduciendo ahora las anotaciones:

$$a = e - r + \frac{r}{\pi}\ m\delta = e - r\left(I - m\frac{\delta}{\pi}\right) \qquad (20)$$

$$b = \frac{r}{\pi}\ mn \qquad (21)$$

$$F(t) = \frac{r}{\pi} m\delta\Delta(t) + \frac{r}{\pi} m\delta\Delta A(t) +\ B(t)$$

$$F(t) = \frac{r}{\pi} m\delta \mathrm{A}(t)\left(I + \frac{n}{\delta}\frac{\Delta A(t)}{\mathrm{A}(t)}\right) +\ B(t) \qquad (22)$$

De acuerdo con estas ecuaciones se supondrá que $a < 1$ lo cual es aceptable en vista de los valores probables para los parámetros implicados; la función $F(t)$ es una función que es determinada por los desarrollos económicos, sociales y tecnológicos pasados. Por tanto, la ecuación de la dinámica de la inversión se puede escribir:

$$I_{t+\tau} = aI_t + b\ \Delta I_t + F(t) \qquad (19')$$

Esta ecuación tiene como solución particular una función estable de tiempo y_t, Si se sustrae de la ecuación (19’) la ecuación

$$y_{t+\tau} = ay_t + b\ \Delta y_t +\ F(t) \quad (23)$$

Se obtiene:

$$I_{t+\tau} - y_{t+\tau} = a(I_t - y_t) + b\ \Delta(I_t - y_t) \quad (24)$$

El problema para determinar y_t es complicado, de tal manera, Kalecki supone que $F(t)$ es una función de tal tipo que la ecuación (23) queda satisfecha por un cambio estable en y_t , estas funciones realmente existen por una función exponencial $F(t) = ce^{\beta t}$, donde βes una constante pequeña, así, la función queda satisfecha por:

$$y_t = \frac{ce^{\beta t}}{I - a + e^{\beta t} - I - b^{\beta}}$$

Donde el denominador es positivo para una β suficientemente pequeña. Sin embargo, las funciones del tipo anterior constituyen una clase más amplia que cubre lo que son las funciones casi exponenciales, es decir, funciones que difieren muy poco de las funciones exponenciales, en periodos breves, si bien puede no ocurrir este mismo en prolongaciones de tiempo suficientemente largas. Reescribiendo la ecuación (23) y simplificando:

$$y_t = \frac{F(t)}{I - a + \frac{y_{t+\tau} - y_t + b\,\Delta y_t}{y_t}}$$

De acuerdo a los supuestos ya establecido, y_t es una función positiva de tiempo que cambia lentamente, y el retraso temporal τ entre la inversión y las decisiones de inversión, entonces se puede escribir que

$$\left|\frac{y_{t+\tau} - y_t + b\,\Delta y_t}{y_t}\right| \leq \gamma$$

Donde γ es también una constante pequeña. Para encontrar la solución particular de la ecuación (19´) se obtiene que

$$y_t = \frac{d_t}{I-a} F(t) \qquad (25)$$

Siendo

$$\frac{I}{I+\frac{\gamma}{I-a}} \leq d_t \leq \frac{I}{I-\frac{\gamma}{I-a}} \qquad (26)$$

De esta condición se desprende que la proporción promedio de cambio de y_t por un periodo de varios años, no puede diferir demasiado de la de $F(t)$, y por lo tanto, no es posible que exceda en mucho, en valor absoluto a la proporción máxima del cambio $|\Delta F(t)/F(t)|$. Para un caso particular, si $F(t)$ muestra una tendencia creciente a lo largo de un periodo de varios años, la proporción promedio de crecimiento o desarrollo de y_t por ese periodo será aproximadamente igual a la de $F(t)$ y de esta manera no puede exceder mucho de $|\Delta F(t)/F(t)|$. Así se puede escribir:

$$I_t = y_t + (I_t - y_t) \qquad (27)$$

Siendo y_t el componente de tendencia, mientras que $I_t - y_t$ es el componente cíclico correspondiente a la ecuación (24). Ahora bien, con la fórmula (10´) y (11) y conociendo lo anterior se puede obtener para el ingreso nacional, la siguiente representación:

$$Y_t = \frac{P_t}{q} = \frac{m}{q}\left(y_t + A(t)\right) + \frac{m}{q}(I_t - y_t) \qquad (28)$$

De los componentes de la tendencia de la inversión, los beneficios y el ingreso nacional, solo se puede reconocer que son funciones positivas de tiempo que en los periodos más largos manifiestan aproximadamente la misma proporción promedio de cambio que $F(t)$. Sin embargo no se puede decir si aumentan o disminuyen. De esta manera Kalecki se ocupa del problema de la tendencia de la inversión bruta, las ganancias y el ingreso nacional. En este nuevo modelo, Kalecki vuelve a retomar las ecuaciones diferencio- diferenciales como parte fundamental en la explicación de la teoría del ciclo económico, mostrando además que los choques aleatorios si explican dicho proceso.

A través del desarrollo de la evolución teórica se puede reconocer que: en la versión de 1943, la tasa de beneficio era la única determinante de las decisiones de inversión, ésta a su vez, se dividía en los recursos financieros disponibles por un lado y en las perspectivas de ganancia por el otro, esta versión además, no distingue entre los bienes de producción y de inversión así como la entrega de los bienes de capital, por tanto el autor deja a un lado el argumento de los rezagos en la explicación de este fenómeno.

Mientras que en la versión de 1968, Kalecki ofrece nuevos aspectos en el estudio del ciclo económico como lo son las innovaciones, el progreso técnico; el incremento temprano de la demanda y de los beneficios se dividirá entre el equipo de capital viejo y las nuevas inversiones, dando una novedosa forma de explicar las decisiones de inversión, en este modelo retoma la importancia de los rezagos en el estudio del ciclo. Para el autor el problema de la tendencia es que no puede ser separada del ciclo, por tanto sus ecuaciones describen el proceso dinámico de la inversión que se desarrolla de un periodo a otro (contrariamente al pensamiento dominante de su época), de esto se desprende que la tendencia es la solución particular del sistema y por lo tanto el ciclo económico se da por las desviaciones de esta tendencia, la cual es puramente en términos de demanda.

CAPITULO 2

DESARROLLO DEL MODELO

Hasta ahora se ha dado a conocer las ideas teóricas propuestas por Kalecki para explicar el comportamiento del ciclo económico, en la cuales, el autor plantea una ecuación diferencial que explica dicha conducta. Ahora bien, es importante para este estudio mostrar un método matemático que ayude en el análisis de la ecuación del ciclo y a su vez auxilie en la comprensión del fenómeno que se está estudiando.

A lo largo del estudio de los ciclos económicos han existido diversas teorías y con ellas diferentes métodos que han intentado explicar este fenómeno económico. Básicamente estas formas de análisis se dividen en dos: las que sustentan la existencia de ciclos en presencia de choques continuos y aquellas que aseveran que los ciclos están intrínsecamente perturbados, de tal forma que oscilaran dentro de su propia naturaleza. Todos estos modelos se han quedado cortos en su intento por explicar las irregularidades que caracterizan el comportamiento de la economía y por ende del ciclo económico tal como lo describe Kalecki ya que ambas vertientes poseen una forma estructural tal que no les permite generar fluctuaciones irregulares, y por ende solo pueden producir perturbaciones aleatorias.

Alternativamente, existe un método matemático dinámico que trabaja con modelos no lineales, los cuales arriban a dinámicas caóticas, complejas o no-lineales en los sistemas económicos; es por eso que se cree pertinente para la realización de esta investigación adoptar la llamada dinámica económica con la finalidad de obtener una mejor explicación no solo del modelo propuesto por Kalecki sino además del fenómeno como tal. De esta manera el desarrollo del capítulo partirá de una breve explicación de los sistemas dinámicos, para después, en un segundo apartado desarrollar el modelo propuesto por Kalecki, pero con la técnica estudiada.

2.1 SISTEMAS DINÁMICOS

Un sistema dinámico parte de un sistema complejo que presenta un cambio o evolución de su estado en el tiempo, en el comportamiento de dicho estado se pueden analizar los límites del sistema, sus elementos y relaciones; de tal manera que se elaboren modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema.

Un sistema complejo no es sinónimo de complicado, ya que a veces este tipo de sistemas son simples pero generalmente dan lugar a soluciones complejas. Sus características fundamentales son:

- Su comportamiento global no es reducible a la suma de las partes.
- No dependen de la escala (tamaño).
- Son procesos cuya dinámica es no lineal.

Para comprender los sistemas complejos es necesario entender qué es un sistema lineal y cómo se diferencia de un sistema no lineal. Un sistema lineal es bien comportado, es decir, a pequeños estímulos le corresponden respuestas pequeñas, y viceversa, mientras que en los sistemas no lineales un pequeño estímulo puede tener efectos sorprendentes e inesperados. Trabajar con la no-linealidad implica estar atentos a la sensibilidad de las condiciones iniciales, lo que deriva en problemas de exactitud de la medición. Además, es importante señalar que la causalidad en este tipo de sistemas no lineales siempre es compleja y las causas generalmente pueden interactuar de forma no aditiva.

Ecuación logística

Muchas de las aplicaciones de los sistemas dinámicos parten de ciertas adaptaciones de la siguiente ecuación diferencial no-lineal de primer orden:

$$X_{t+1} = F(X_t) \qquad (1)$$

Cabe destacar que la explicación que se dará sobre el comportamiento de este tipo de ecuaciones ha sido tomada de un documento de trabajo que realiza una amplia investigación y esclarecimiento de este tema.[4]

Retomando la ecuación (1), ésta indica que el comportamiento futuro t+1 de la variable X está determinado por la conducta pasada de la misma variable (X_t). Esta ecuación posee las siguientes características:

- $F(0) = 0$
- $F(X)$ crece monótonamente si X se incremente a través del rango $0 < X < A$ y en donde el máximo valor que puede tomar la variable es *X=A.*
- $F(X)$ decrece monótonamente cuando se incrementa por encima de *X=A*

Además, *F(X)* contendrá uno o más parámetros que suelen ajustarse al comportamiento no lineal de esta ecuación, estos tendrán una explicación cualitativa que dependerá del fenómeno que se estés estudiando.

El ejemplo más común para explicar el comportamiento de un sistema dinámico es por su sencillez y especificidad la ecuación cuadrática:

$$X_{t+1} = X_t(a - bX_t) \qquad (2)$$

La ecuación conocida comúnmente como logística (2) muestra que cuando $b=0$ existirá un crecimiento exponencial de la variable X (para todo a >1), mientras que si $b \neq 0$, entonces, la no linealidad cuadrática producirá un crecimiento en la curva formándose una cima, mientras que su pendiente estará ajustada el parámetro a.

A su vez, esta ecuación puede llevarse a su expresión canónica:

$$X_{t+1} = aX_t(1 - X_t) \qquad (3)$$

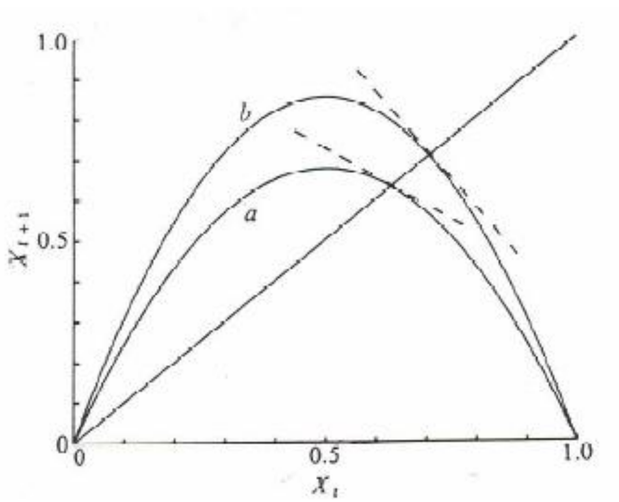
[4] Véase Robert May, Simple mathematical models with very complicated dynamics.

La cual en términos de los matemáticos que analizan esta ecuación, posee una desventaja y es que requiere que la variable X permanezca en el intervalo $0 > X > 1$; si la variable llegará a exceder la unidad, entonces las iteraciones del sistema divergen hacia $-\infty$ lo que traería como consecuencia que el sistema fallara en su explicación.

También se puede reconocer que la función de la ecuación (3) sólo logra alcanzar valores máximos $a/4$ (cuando $X=1/2$), por tanto la ecuación posee un comportamiento dinámico únicamente si $a<4$. De otra manera todas las trayectorias son atraídas hacia $X=0$ si $a<1$. Así para un comportamiento dinámico no trivial se requiere que el valor de a oscile entre $1<a<4$.

Gráficamente, lo anterior se puede expresar de la siguiente manera:

Gráfico 7. Comportamiento expresión canónica.



Fuente: Robert May, Simple mathematical models with very complicated dynamics

La gráfica anterior (7) muestra las curvas que se generan de la ecuación (3) , cuando los valores para $a=2.707$ (curva *a*) y $a=3.414$ (curva *b*). A su vez, las líneas punteadas en la imagen, representan los puntos fijos que intersectan con la línea de 45°, de esta manera para el caso de la curva ***a*** e cuya inclinación es menor a 45° el punto fijo es estable mientras que para ***b*** es inestable.

2.2 PROPIEDADES DINÁMIICAS

Retomando la ecuación (1), los valores de equilibrio o puntos fijos de *X* pueden ser encontrados algebraicamente si inicialmente se iguala $X_{t+1} = X_t = X^*$ para después resolver con respecto a *X*, para lo cual resulta:

$$X^* = F(X^*) \qquad (4)$$

Existe además, un método gráfico que facilita encontrar los puntos donde la curva *F(X)* intersecta con la línea de 45°. Para este caso si $X_t = X_{t+1}$ entonces se habrá encontrado un punto único de equilibrio.; pero en el caso de ecuación (3), existen dos puntos de equilibrio: la solución donde *X=0* y una solución no trivial *X*=1-[1/a]*.

Esta última solución puede ser vista como dependencia de la pendiente de la curva *F(X)* en *X**, cuya pendiente puede esta designada como:

$$\lambda(X) = \left[\frac{dF}{dX}\right] X = X^* \qquad (5)$$

Hay que reconocer que este comportamiento sucederá sólo cuando la pendiente esté situada entre 45° y -45°, es decir que $-1 < \lambda < 1$, de esta manera, el punto de equilibrio para *X** será localmente estable, es decir, atraerá todas la trayectorias a su vecindad. En el caso de la ecuación (3) la pendiente es $\lambda = 2 - a$, por tanto el punto de equilibrio es estable y atrayendo a todas la trayectorias originadas en el intervalo $-1 < X < 1$, si y solo si $1 < a < 3$.

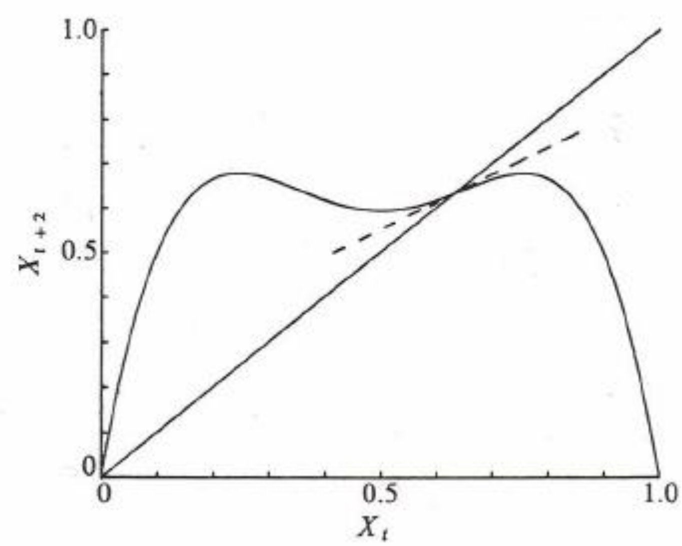
Como los parámetros correspondientes son ajustados a la curva *F(X)* se convierte abruptamente en una cima ó cresta, esta pendiente determinadamente estable en el punto fijo *X** puede tener eventualmente una inclinación más allá de-45° en cuyo caso este equilibrio perdería su condición de estable.

Para el caso de que *a*>3 en la ecuación (3), se deben observar intervalos sucesivos de 2 tiempos diferentes, esto se puede observar en una función que describa X_{t+2} a X_t , la cual modificaría la ecuación (1), de tal manera que exista segunda iteración, la forma matemática de representarla, se muestra continuación:

$$X_{t+2} = F^2(X_t) \qquad (6)$$

El mapeo derivado de la ecuación (3) es ilustrado de la siguiente manera:

Gráfico 8. Comportamiento de la ecuación canónica con dos interacciones



Fuente: Robert May, Simple mathematical models with very complicated dynamics

La gráfica (8) muéstrala relación de X_{t+2} y X_t la cual se obtiene a través de dos iteraciones de la ecuación (3); se puede observar también que existe un punto de equilibrio estable, determinado en el punto donde $F^2(X_t)$ intersecta con la línea de 45°. De esta manera, la ecuación (6) puede escribirse como:

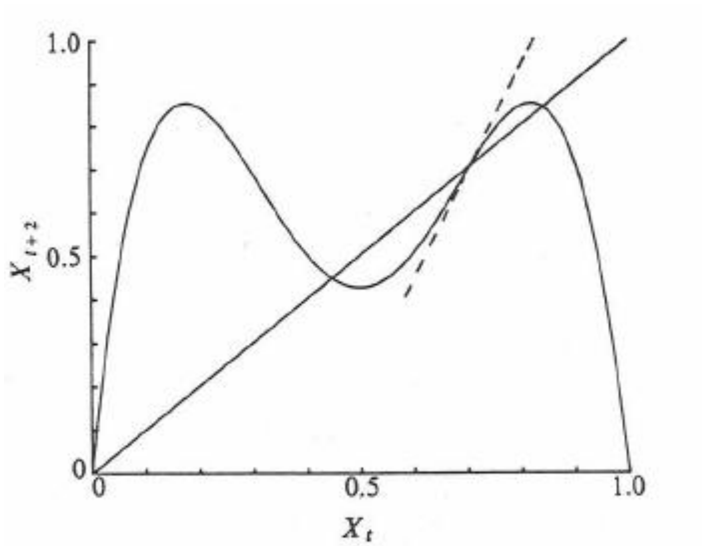
$$X_{t+2} = F^2(X_2^*) \qquad (7)$$

Por tanto, en la gráfica (8) se puede observar que la intersección entre el mapa $F^2(X)$ y la línea de 45° muestra un punto de equilibrio X*, la cual es solución de la ecuación (7), el punto fijo básico de periodo 1 es un caso degenerado de una solución de periodo 2. Hay que observar que la pendiente de la curva $F^2(X)$ en el punto X* se define como $\lambda^2(X^*)$, de ahí que se puede deducir entonces que:

$$\lambda^2(X^*) = [\,\lambda(X^*)]^2 \qquad (8)$$

Este hecho puede ser usado ahora para hacer evidente que sucede cuando el punto fijo X^* llega a ser inestable. Si la pendiente de *F(X)* es menor a 45°, entonces el punto fijo es estable; pero cuando este punto sobrepasa de 45° implicaría que $\lambda^2 > 1$ convirtiéndose en un punto inestable. Esta explicación se muestra a continuación:

Gráfico 9. Comportamiento con dos puntos fijos



Fuente: Robert May, Simple mathematical models with very complicated dynamics

Se puede apreciar en la gráfica (9) que la curva que describe la ecuación (8) desarrolla un bucle y dos nuevos puntos fijos de periodo dos que aparecen en la misma curva, ambos puntos son ahora inestables seguidos de la aparición de dos nuevas soluciones de periodo 2^5.

Como la función no lineal *F(X)* en la ecuación (7) llega a tener una cima más inclinada, el punto fijo X^* puede llegar a ser inestable, cuando esto ocurre hay nacimiento de dos nuevos puntos inicialmente estables de periodo dos. La estabilidad de este periodo depende de la curva $F^2(X)$ en los dos puntos. La pendiente determinada como estable tiene el valor de λ=+1 en el nacimiento del ciclo 2 y luego decrece a través de cero hacia λ=-1 como la cresta en F(X) continua inclinándose.

[5] Entendiéndose como periodo el tiempo que tarda el fenómeno en recorrer todas sus fases.

Más allá de este punto, los puntos de periodo 2 volverán a ser inestables y la bifurcación dará inicialmente un ciclo de periodo 4, esto a su vez nos da el camino para un ciclo de periodo 6 y desde allí una jerarquía de bifurcaciones de ciclos estables de periodo 16,32, 64… 2^n. En cada caso la forma en la cual el ciclo estable simultáneamente bifurcándose para producir un nuevo e inicialmente estable de periodo 2k, lo cual es similar para el proceso cuando se propone solamente k=1.

Aunque este proceso produce una secuencia infinita de ciclos con periodo 2^n (n-∞), los valores paramétricos indican que ningún ciclo es estable en una dimensión progresiva, esto con el fin de que el proceso entero sea un proceso convergente comenzando a delimitar sobre algunos valores paramétricos críticos.

Este valor paramétrico crítico es un punto de acumulación de ciclos de periodo 2^n. Para la ecuación (3) se expresa a_c: $a_c=3.5700$. Más allá de este punto de acumulación hay un número infinito de ciclos periodicidad diferente, también existe un incontable número de puntos iniciales X_0 las cuales dan trayectorias totalmente aperiódicas, no importando que tan grande sea el tiempo para generar las series por *F(X)* de tal manera que el patrón nunca se repite.

Es importante reconocer que el parámetro que considera el autor para mostrar el comportamiento de bifurcación, se incrementa más allá del valor crítico aún cuando todos estos ciclos tienen periodos con X_t alternando entre los valores de arriba y los valores de abajo del punto fijo X^*. Conforme al valor del parámetro continúa incrementándose, llega a un estado en el cual el primer periodo extraño aparece. En el primero de estos ciclos extraños tiene periodos muy largos, pero conforme el valor del parámetro continúa creciendo los ciclos son cada vez más pequeños, hasta que al final los puntos del ciclo dan trayectorias asintóticas.

Robert May define este momento como aquel en el que aparece por primera vez el término “caos”, ya que para funciones *F(X)* “sensibles”, cualquier valor paramétrico específico tendrá un único ciclo que es estable el cual atrae todos los puntos iniciales. Es decir, que existe un ciclo que casi posee todos los puntos iniciales: el número inicial infinito de otros ciclos junto con las trayectorias asintóticas y aperiódicas que pertenecen a un conjunto de puntos, los cuales tienen media cero.

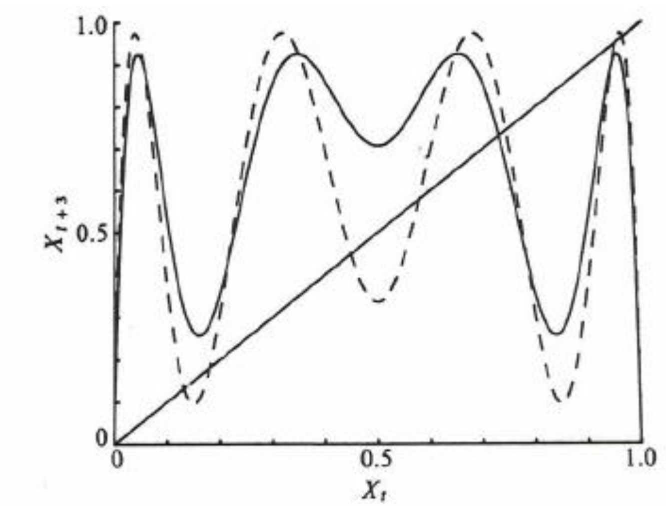
De tal manera que ningún ciclo estable particular podría ocupar una ventana estrecha de valores paramétricos. Este hecho junto con un tiempo grande es probable que se tome para asociaciones transitivas con las condiciones iniciales mermando su amplitud.

También es importante considerar cómo surgen los nuevos ciclos de periodo k, el cual se puede ser representado a través de una ecuación de tercer orden:

$$X_{t+3} = F^3(X_1) \qquad (9)$$

Si la cresta de *F(X)* es suficientemente inclinada, la tercera iteración producirá una función $F^3(X)$ con cuatro crestas como se muestra en la siguiente figura:

Gráfico 10. Comportamiento nuevos ciclos.



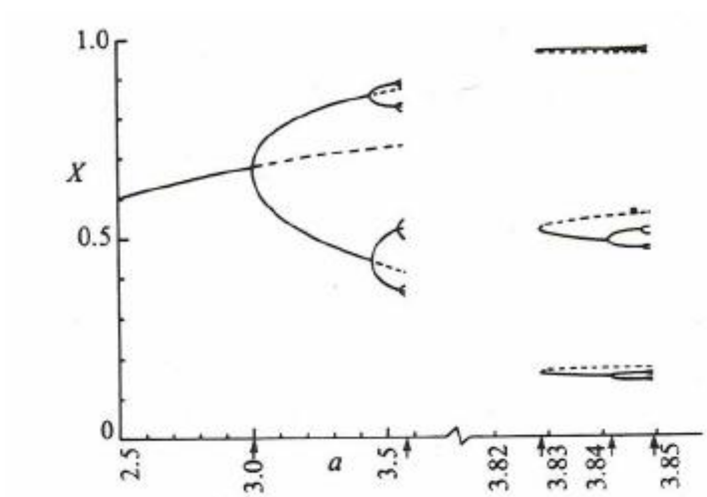
Fuente: Robert May, Simple mathematical models with very complicated dynamics

La gráfica (10) se obtiene mediante tres iteraciones de la ecuación (3), la curva no punteada representa un valor en el parámetro *a=3.7*, en ella se puede apreciar que solo intercepta la línea de 45° una vez; cuando *a* se incremente, las depresiones y los picos se volverán más pronunciados. Asimismo la curva punteada representa un valor *a=3.9*, en ella aparecen seis nuevos puntos de periodo 3.

En la misma gráfica, la línea de 45° intercepta la curva no punteada solo en un punto $X*$ y en *X=0*, como en la pendiente de la curva *F(X)*, los valles $F^3(X)$ consiguen ser más pronunciables hasta que simultáneamente los dos primeros valles se hunden y el ultimo pico toca la línea de 45° y después la interceptan en 6 nuevos puntos En esta figura también se pude apreciar la estabilidad deterministica de la pendiente $F^3(X)$, de tres de estos puntos tienen un valor común, el cual es $\lambda^3(X=+1)$ en su nacimiento y posteriormente su pendiente llega más allá de -1: este periodo de ciclo 3 nunca es estable, la pendiente $F^3(X)$ y los otros tres puntos comienzan en $\lambda^3=+1$ y luego decrece hacia cero, resultando en un ciclo estable de periodo tres. Estos tres puntos inicialmente estables decrecen más allá de -1 por lo que el ciclo se torna inestable y da lugar al proceso de bifurcación ya analizado.

La inestabilidad de estos puntos se puede mostrar gráficamente:

Gráfico 11. Estabilidad e inestabilidad de los puntos fijos.



Fuente: Robert May, Simple mathematical models with very complicated dynamics

La figura 11 muestra algunos de los puntos fijos estables e inestables de puntos fijos de varios periodos que surgieron en el proceso de bifurcación de la ecuación original (1) y de la ecuación (3) en particular. Del lado izquierdo el punto fijo estable se vuelve inestable, mientras que a la derecha uno de los puntos es inestable volviéndose estable, pero de nuevo llegará a ser inestable.

Se puede observar además que nuevos ciclos de periodo k surgen en pares, como los picos y los valles de las iteraciones de *F(X)* movidas respectivamente arriba y debajo de la línea de 45°. Los ciclos nacen en el momento que los picos y los valles llegan a la tangente de la línea 45°y la pendiente inicial de la curva *F** a los puntos donde λ=+1: este tipo de bifurcación puede es conocida como bifurcación tangencial o una bifurcación λ=+1.

Contrariamente un ciclo originalmente estable de periodo k podría conseguir su inestabilidad como la inclinación de *F(X)*; esto ocurre cuando los puntos de la pendiente *F** de ese periodo, llegan más allá de $\lambda^k = -1$, en cuyo caso un nuevo ciclo inicialmente estable de periodo *2k* nace de la forma ejemplificada en las figuras anteriores (8) y (9) .

Poniendo todo esto junto el autor concluye que como los parámetros de *F(X)* están variando fundamentalmente, las unidades dinámicas estables son ciclos de periodos básicos de *k*, las cuales surgen por la bifurcación tangencial a lo largo de los periodos $k2^n$. Con estas bases la solución constante de equilibrio *X** y la iteración subsecuente del ciclo estable de periodo 3 simplemente es un caso importante llamado ***k=1***. El rango completo de los valores paramétricos $1<a<4$ en la ecuación (3) y $0<r$ en la ecuación (4) podría ser considerado como un componente de infinitos valores paramétricos.

Por tanto, para los valores paramétricos suficientemente grandes todas las crestas y valles interceptan en la línea de 45°produciendo 2^k , los puntos de este periodo son organizados dentro de varios ciclos de periodos *k* o submúltiplos de este, los cuales aparecen en sucesión por cada bifurcación tangencial como los parámetros *F(X)* que son variados .

Encontrar estos valores paramétricos se debe incurrir en un trabajo arduo, sin embargo existe un método grafico para localizar los valores paramétricos en la región caótica en donde el primer ciclo de periodo extraño aparece. Y el cual será aplicado en el desarrollo del modelo.

2.3 EXPOSICIÓN DEL MODELO

Hasta ahora, se ha mostrado la forma matemática en la cual dan lugar las bifurcaciones y el comportamiento caótico dentro de las ecuaciones diferenciales discretas; esto ha ayudado a comprender de una forma más extensa el comportamiento que se puede esperar para este tipo de ecuaciones. Es por eso que este método ha sido elegido para la búsqueda de una nueva explicación de la ecuación propuesta por Kalecki para los ciclos económicos, de tal manera que con esta investigación, se pretende mostrar cómo es dicho comportamiento y reconocer el tipo de bifurcaciones que pueden generarse.

Retomando la ecuación propuesta por Kalecki para el ciclo económico:

$$\boldsymbol{I_{t+\tau} = aI_t + b\,\Delta I_t + F(t)} \qquad (10)$$

Donde:

$\boldsymbol{I}$= inversión

$\boldsymbol{\tau}$ = retraso temporal

$\boldsymbol{F(t)}$ = es una función determinada que puede suponerse como una función del tiempo que cambia lentamente y que está determinada por los desarrollos económicos, sociales y tecnológicos pasados.

a* , *b= son parámetros asociados al comportamiento de la inversión[6]

Al ser $F(t)$ un cambio generado por aspectos económicos, sociales ó tecnológicos es posible suponer que estos cambios pueden estar dados a su vez por las mismas situaciones (ó decisiones) de inversión pasadas, las cuales logran reflejar escenarios en los que exista una disminución o un incremento de las decisiones de inversión dados por una baja/ alza en la tasa de ganancia ocasionando una disminución/incremento en la actividad económica

Por, tanto, si se considera F(t) = $-I_t^3$ y se sustituye en la ecuación (10) , se obtiene :

[6] Véase Michael Kalecki . Tendencia y ciclo económico, 1968.

$I_{t+1} = aI_t + b\ (\mathrm{I_{t+1}} - I_t) - I_t^3$

$I_{t+1} = aI_t + b\ \ \mathrm{I_{t+1}} - \mathrm{b}I_t - I_t^3$

$I_{t+1} - b\ \ \mathrm{I_{t+1}} = aI_t - \mathrm{b}I_t - I_t^3$

$I_{t+1}(1 - b) = (a - \mathrm{b})I_t - I_t^3$

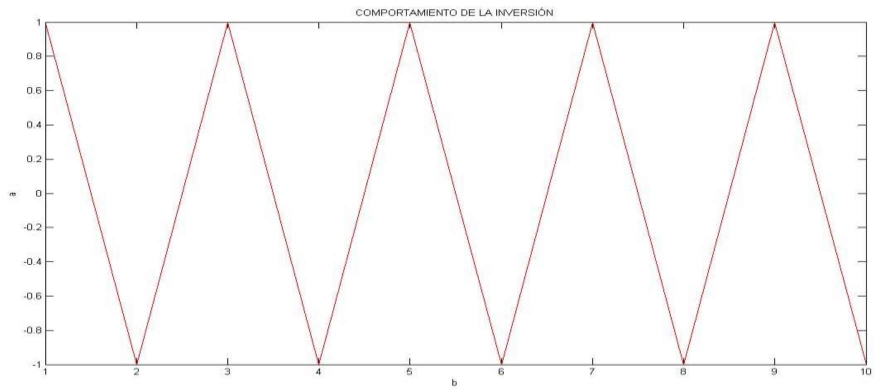
$$\boldsymbol{I_{t+1}} = \frac{\boldsymbol{a-b}}{\boldsymbol{1-b}}\boldsymbol{I_t} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1-b}}\boldsymbol{I_t^3} \qquad (11)$$

2.3.1 ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LA INVERSIÓN

Es importante señalar que la ecuación (11) no altera la esencia en las propiedades planteadas por Kalecki dentro de la ecuación del ciclo económico (10). Los parámetros ***a*** y ***b*** siguen siendo de suma importancia pues son estos quienes guardan las relaciones fundamentales de la inversión y con ello la determinación del ciclo, tales como la participación de los ahorros empresariales, la depreciación, la proporción estándar de ganancia, etc. ; por lo tanto son estos parámetros los que condicionan el comportamiento del ciclo. En el desarrollo de su modelo, Kalecki afirma que ***a < 1***, esto debido a los valores que obtiene los parámetros implicados en ella, la participación de los ahorros (***e) <1*** al igual que la relación ***m(δ/π)***, mientras que el parámetro ***b*** es definido como positivo pero no mucho mayor a 1. Por lo tanto es importante reconocer gráficamente la influencia de estos dos parámetros en el comportamiento del ciclo.

-*Comportamiento de la inversión con* ***a = b***

Gráfico 12. Comportamiento de la inversión *a = b*

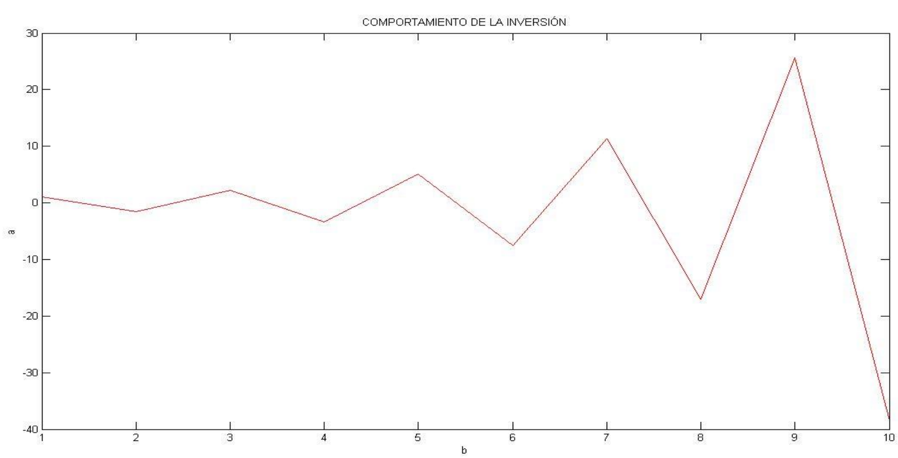


Fuente: Elaboración propia en Matlab

En la gráfica 12 se observa que cuando ***a = b,*** el comportamiento de la inversión mantiene una amplitud constante entre cada uno de los cambios debido a que entre ellos existe un mismo valor. Con respecto al ciclo, este caso muestra que las oscilaciones son constantes mostrando máximos y mínimos iguales en cada periodo, lo que hace esperar que no exista una tendencia al estado estacionario.

-*Comportamiento de la inversión con* ***a > b***

Gráfico 13. Comportamiento de la inversión *a > b*

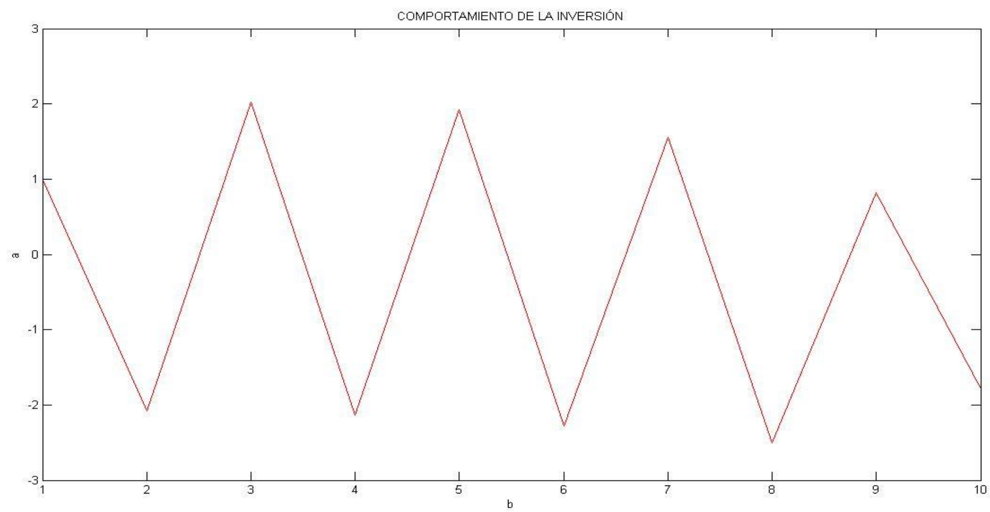


Fuente: Elaboración propia en Matlab

Mientras que en la gráfica 13, la modificación del valor en ***a*** siendo este la mitad de lo que representa ***b*** ocasiona que el comportamiento de la inversión cambie significativamente a la gráfica anterior, se puede observar que inicialmente la inversión tendrá variaciones crecientes durante ciertos periodos, para después pasar a un comportamiento brusco e inestable, alejándose así de un valor medio; en el caso del ciclo económico, los picos y valles serán más amplios a lo largo de cada periodo.

-*Comportamiento de la inversión con* ***a*** *>>* ***b***

Gráfico 14. Comportamiento de la inversión *a* >> *b*



Fuente: Elaboración propia en Matlab

Cuando se modifica el valor ***a*** y este adquiere uno relativamente mucho mayor que ***b*** (gráfica 14), el comportamiento de la inversión comienza a desacelerar en relación con el comportamiento anterior, en esta imagen se puede reconocer también que las ondas comienzan a reducir su amplitud después de cada periodo, marcando una tendencia a un comportamiento homogéneo, estable y que probablemente pueda llegar a un equilibrio.

A partir del empleo de este análisis gráfico, se puede distinguir la importancia que tienen los parámetros ***a*** y ***b*** en el comportamiento general de la inversión, ambos darán amplitud, y estabilidad al ciclo económico. En los tres casos propuestos, la inversión llega a adquirir valores negativos, que aunque es algo poco común en los estudios sobre el ciclo, no es del todo absurdo, pues esta conducta se debe principalmente a la desinversión dada por la baja tasa de ganancia en tiempos de desaceleración y crisis.

2.3.2 DESARROLLO DEL MODELO

A partir de la ecuación (11) para el ciclo económico se puede considerar una ecuación del siguiente tipo:

$$I_{t+1} = q_0 + p_0 I_t - I_t^3 \tag{12}$$

En la ecuación (12) se observa que existe un término independiente q_0 el cual será considerado como la inversión fija y un término cúbico I_t^3 , que es indispensable para establecer y analizar la ecuación del ciclo económico. Desarrollando la ecuación se obtiene:

$$I_{t+1} = \frac{a-b}{1-b} I_t + \frac{1}{1-b} I_t^3 = \frac{\sqrt[3]{1-b}}{1-b}(a-b)\left(\frac{I_t}{\sqrt[3]{1-b}}\right) - \left(\frac{I_t}{\sqrt[3]{1-b}}\right)^3$$

De la cual se puede establecer que:

$$I_t = \frac{I_t}{\sqrt[3]{1-b}}$$

$$p_0 = \frac{\sqrt[3]{1-b}}{1-b}(a-b).$$

Manteniéndose así los términos ***a*** y ***b*** de la ecuación original, los cuales son un aspecto importante en términos del desarrollo y el comportamiento del ciclo.

Finalmente se tiene una ecuación del tipo:

$$x_{t+1} = q_0 + p_0 x_t - x_t^3 \tag{13}$$

Como se puede observar en la ecuación (13), la ecuación kaleckiana se ha podido transformar de una forma tal que puede ser explicable en términos más simples. Sin embargo se puede apreciar que el término negativo $-x_t^3$, el cual se refiere a la variable de inversión, no es común en el estudio teórico, debido a que en la literatura económica no existen inversiones negativas como tal, además, una característica de este tipo, impide el análisis kaleckiano del crecimiento económico; a partir de esta justificación, es necesario realizar un cambio de variable que permita el análisis de las inversiones posibles en el intervalo $[0,1]$.

CAMBIO DE VARIABLE

Un cambio de variable es una técnica matemática para la resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones de grado superior a uno, que de otra forma sería más complejo resolver, sin que pierda su carácter cualitativo. Al realizar un cambio de variable se tiene la ventaja de trabajar con aquellas que son de relevancia en el sentido kaleckiano para la explicación del ciclo económico además de que permite estudiar las propiedades dinámicas que presenta la ecuación.

A partir de la ecuación (13), se puede reconocer que se está expresando como la forma reducida de una ecuación cúbica general, la cual carece de un término cuadrático (x^2). La solución a esta ecuación se puede realizar a través de la denominada "fórmula de Cardan, para una ecuación cúbica" (Turnbull, 1947).

Si se admite que q_0 y p_0 son distintos de cero (si p_0=0, las soluciones de (13) son las raíces cúbicas de -q_0; si q_0=0, las soluciones son cero y las raíces cuadradas de - p_0), y si además se supone que α es una solución de (13), y si además se supone que τ es solución de (13), entonces el cambio de variable en cuestión es:

$$\tau = z_t + \alpha$$

En términos de teoría económica, la constante α representa el capital fijo que los empresarios mantienen para la producción en cualquier etapa del ciclo.

La solución a partir del cambio de variable es:

$$z_t + \alpha = q_0 + p_0(z_t + \alpha) - (z_t + \alpha)^3$$

Del último término de la ecuación se obtiene:

$$-z^3 - 3z^2 \propto -3z \propto^2 - \propto^3$$

$$= -z^3 - \propto^3 - 3z \propto (z + \propto)$$

$$= q_0 + p_0(z_t + \alpha) - z^3 - \propto^3 - 3z \propto (z + \propto)$$

Dando como resultado:

$$-z^3 - \propto^3 + (-3z \propto + p_0)(z + \propto) + q_0 = 0 \qquad (14)$$

Si se toma $z, \propto$ de tal manera que $-3z \propto + p_0 = 0$, entonces $z, \propto$ serían las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - \tau x + \frac{p}{3} = 0$, por tanto:

$$-z^3 - \propto^3 = -q_0$$

$$z^3 \propto^3 = \frac{p^3}{27}$$

Por tanto, se tiene que z^3, $\propto^3$ son las soluciones de la ecuación cuadrática:,

$$x^2 - qx + \frac{p^3}{27} = 0 \qquad (14)$$

De esta forma, se puede encontrar la solución de (13) considerando una solución de (14), tomando z , una raíz cubica de la ecuación (14) y considerando $\alpha = -\frac{p}{3u}$. Aunado a esto z y α son enteros, por lo tanto, ambas trabajan de manera simétrica, en tal caso uno de ellas tomará el signo negativo y la otra el positivo. Entonces, $\propto^3$será la otra solución de (14) y $\tau = z_t + \alpha$ es la solución de la ecuación (13). Simbólicamente una solución para esta ecuación se representaría como:

$$\tau = \sqrt[3]{-\frac{q_0}{2} + \sqrt{-\frac{q_0^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q_0}{2} - \sqrt{\frac{q_0^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Con todo lo anterior, se llega a una ecuación del tipo:

$$z_{t+1} = q + pz_t + rz_t^2 + -z_t^3$$

La cual se denota por:

$$f(z) = q + pz + rz^2 - z^3$$

La ecuación anterior debe cumplir con las siguientes condiciones:

Condición 1: Niveles de inversión muy altos en un período producen niveles de inversión futuros pequeños. Esta es una condición de saturación.

$$f(1) = 0$$

Esto nos lleva a la condición:

$$q + p + r = 1$$

Condición 2: Los extremos locales de la función $f(z)$ deben estar en el intervalo $[0,1]$. Esto es consecuencia de haber normalizado la inversión para que tenga sus valores en ese intervalo. Lo anterior lleva a la condición:

$$p < 0 \quad ; \quad |r| > \sqrt{3|p|}$$

Condición 3: Los puntos de posible de bifurcación tangencial deben estar en el intervalo $[0,1]$.

$$\frac{df}{dz}\left(z^*\right) = 1$$

Esto nos lleva a la condición:

$$|r| > \sqrt{3(1 + |p|)} \quad ; \quad 2r + p < 6$$

La Condición 3 es redundante con la Condición 2, es decir, si la Condición 2 se cumple la Condición 3 se cumple de inmediato.

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

Para la realización de un análisis más extensivo al modelo propuesto, es necesario conocer el comportamiento que guarda la ecuación a la que se hace referencia. Existe dos formas de visualizar el comportamiento de las variables que componen un sistema dinámico; la primera se refiere a la gráfica en forma de serie de tiempo, la segunda a través de un espacio fase, este último se refiere la representación de todos los posibles estados del un sistema, cada parámetro se representa como un eje y cada punto representa cada posible estado de las variables. Se dice que el espacio fase es *estable* ó *atractor* si toda trayectoria que comienza cerca se aproxima a ella conforme el tiempo transcurre, mientras que una trayectoria es *inestable* o *repulsora* cuando esta inicia cercana a ella y diverge a través del tiempo. En sistemas lineales, la estabilidad puede ser representaba por puntos fijos, en cambio para un sistema no lineal por puntos fijos, ciclos límite y atractores extraños.

Como en la práctica es imposible saber con exactitud el valor inicial x_0 del que parte la órbita γ (x_0), es importante analizar si la trayectoria se aleja o se acerca a γ (x_0) si se parte de un dato inicial $\tilde{x}_0$ próximo a x_0, es decir, si esta órbita es "alcanzable". La formalidad para establecer el concepto de estabilidad es el siguiente:

Definición (Estabilidad local en sentido de Lyapunov)

- γ (x_0) es estable si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $\tilde{x}_0$ con $d(\tilde{x}_0, x_0) = |\tilde{x}_0 - x_0| \leq \delta$ se tiene que $d(f^t(\tilde{x}_0), f^t(x_0)) = |f^t(\tilde{x}_0) - f^t(x_0)| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq 0$.
- γ (x_0) es asintóticamente estable si es estable y si además existe un $\tilde{\delta} > 0$ tal que para todo $|\tilde{x}_0 - x_0| \leq \tilde{\delta}$ se tiene que $|\lim_{n\to\infty} f^t(\tilde{x}_0) - f^t(x_0) = 0|$.
- γ (x_0) es inestable si no es estable.

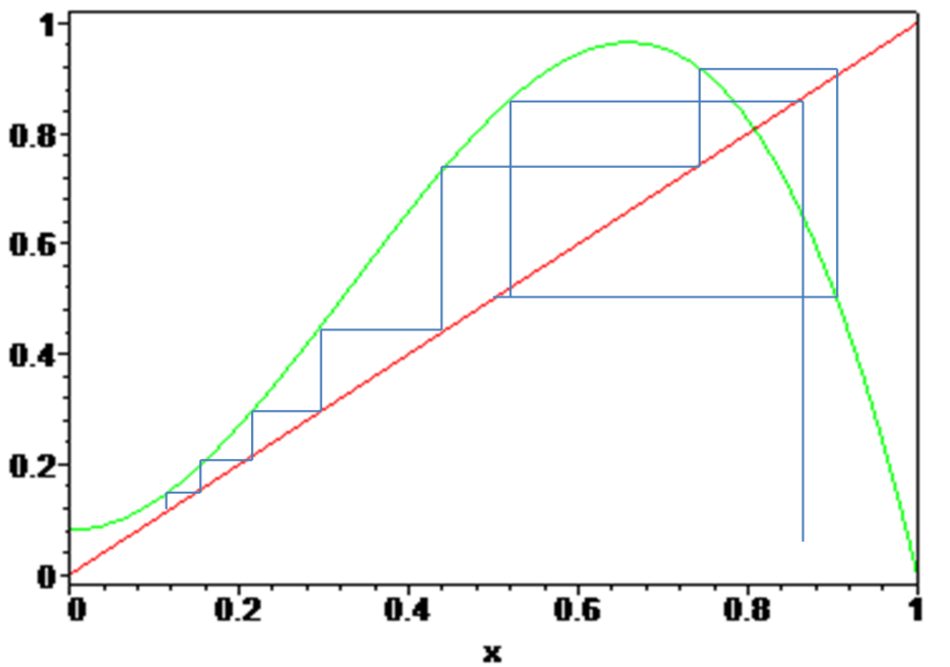
Para el caso de esta investigación y tomando la ecuación del ciclo económico, se pudo encontrar que con el empleo de la ecuación:

$$f(z) = 0.013 - 0.01z + 0.997z^2 - z^3$$

Se puede encontrar el punto fijo del sistema, el cual es $x^* = 0.8108$, para este caso, el punto es inestable pues $\frac{df}{dz}(x^*) = -2.3284$.

Estas conclusiones, se pueden observar también mediante el gráfico de la función $f(z)$ el cual se representa de la siguiente manera:

Gráfico 15. Estabilidad y punto fijo.



Fuente: Elaboración propia en Matlab

Por otro lado, el análisis cualitativo del sistema, se puede realizar a través de las bifurcaciones, estas se emplean para describir los cambios significativos en el comportamiento del sistema ante pequeñas variaciones de sus parámetros. En economía, los parámetros se introducen para reflejar la influencia de diversas fuerzas exógenas. Al contrario de lo que ocurre en otras ciencias, con frecuencia es difícil asignar un valor determinado a los parámetros económicos. En consecuencia, determinar si el comportamiento cualitativo de un sistema dinámico persiste ante variaciones de los parámetros es una cuestión especialmente importante en esta área.

Existen diversos tipos de bifurcaciones, algunas de ellas incluso llevan a determinar un comportamiento caótico, como ya se ha revisado con anterioridad, sin embargo para esta investigación es importante reconocer las condiciones que deben cumplir al menos una de ellas, *la bifurcación tangente*, pues es está, la que se también se puede apreciar en la gráfica (15).

Teorema de la bifurcación tangente: Sea la función $f(x, r)$. Si en el punto fijo (x_0^*, r_0), cumple las siguientes condiciones:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0^*, r_0) = \lambda_0 = 1$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0^*, r_0) \neq 0$
- $\frac{\partial f}{\partial r}(x_0^*, r_0) \neq 0$

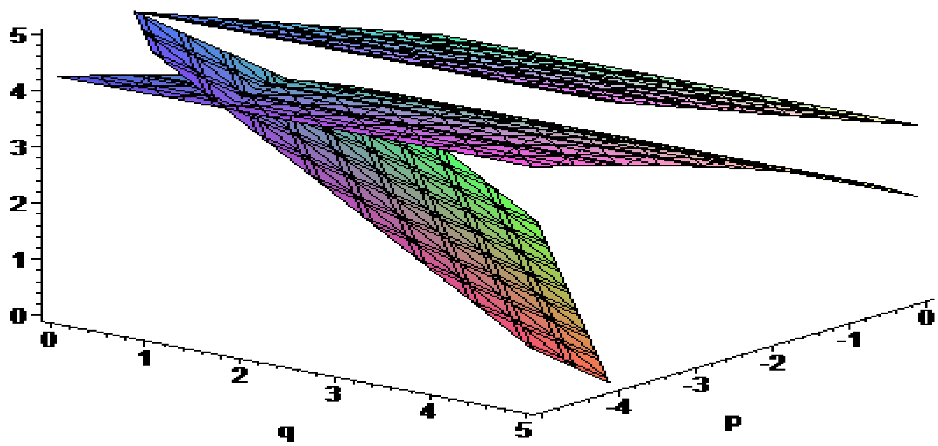
Entonces dependiendo del signo de la segunda y tercera expresión:

i. no existen equilibrios en un entorno de (x^*, r_0) para $r < r_0$ $(r > r_0)$,
ii. existen dos equilibrios en un entorno de (x^*, r_0) para $r > r_0$ $(r < r_0)$

Aplicando este teorema a la presente investigación, y dado que para la ecuación kaleckiana del ciclo económico, se encontró que el punto fijo del sistema, es $x^* = 0.8108$ y $\frac{df}{dz}(x^*) = -2.3284$, entonces se puede concluir que se cumple con la condición (ii) .

Gráficamente y dentro del espacio de parámetros la región factible se muestra de la siguiente manera; para una región de tres superficies:

Gráfico 16. Bifurcación tangencial



Fuente: Elaboración propia en Matlab

El análisis empleado en esta investigación refuerza las ideas propuestas por M. Kalecki, acerca del comportamiento del ciclo económico. A partir de los resultados obtenidos se puede reconocer que la inversión es parte fundamental de la demanda agregada, y por tanto también del crecimiento económico; con respecto al comportamiento de esta variable, se observa que los parámetros *a* y *b* son determinantes, pues en ellos recae aspectos cuantitativos y cualitativos (como las decisiones de inversión,) que permiten cambiar las condiciones iniciales y con ello la trayectoria que llevará el ciclo, la cual y con base a los resultados obtenidos no tendrá un comportamiento uniforme ni tampoco se mantendrá amplitud constante entre cada etapa. La inestabilidad que presenta la trayectoria, así como la bifurcación tangencial encontrada, muestran que bajo ningún caso se llegará a los puntos de equilibrio que se vayan encontrando a lo largo del ciclo; aunado a esto el aspecto endógeno que presentan los parámetros muestran que puede existir un cambio estructural y por ende se pueda modificar el curso que tome el comportamiento del ciclo.

CONCLUSIONES

Los modelos propuestos por M. Kalecki sobre el ciclo económico son ampliamente reconocidos particularmente por la aportación de un esquema analítico cuya base es la demanda efectiva, aunado a destacables e interesantes modelos matemáticos que inicialmente (1933) fueron expresados a través de ecuaciones diferencio-diferenciales para después ser analizados mediante su representación geométrica, y finalmente (1968) establecer un modelo matemático que llegará a analizar la tendencia del ciclo.

Kalecki fue el primer economista que provee un riguroso esquema analítico para este tema alternativa al estudio clásico de la teoría del equilibrio general. Asimismo, Kalecki asume la expansión de la demanda como una condición necesaria para el crecimiento a largo plazo, por ende esta variable será el pilar para las decisiones de inversión que a su vez será la variable que determine el comportamiento del ciclo económico (López, 2011). Aunado a estas ideas, Kalecki supone implícitamente que el nivel económico efectivo está siempre por debajo del nivel potencial de la misma actividad económica por lo tanto siempre habrá capacidad ociosa.

La interpretación que propone Kalecki, tiene como base reconocer que el ciclo económico es el resultado de las fluctuaciones que existan dentro del sistema económico, siendo este un conjunto único; además es capaz de identificar la incapacidad que posee el sistema capitalista para generar sus propias condiciones endógenas de crecimiento, por lo que las fluctuaciones del ciclo económico están intrínsecamente relacionadas con el modo de producción y de acumulación capitalista (mismo que se determina por la tasa de ganancia). Estas ideas hacen que su análisis sea una importante paradoja al compararse con los esquemas e interpretaciones descritas por el mainstream.

A través de la presente investigación se ha podido analizar con más detalle el marco teórico y analítico de la versión propuesta en 1968; es importante destacar que el autor había realizado con anterioridad dos escritos en los cuales dio a conocer los principios básicos para su análisis. El primer modelo propuesto por Kalecki en 1933 tiene como base la construcción de un modelo dinámico que explique el comportamiento del ciclo económico, cuya solución es endógena. Un aspecto importante en este modelo es que el autor propone un sistema de ecuaciones diferencio-diferenciales que daban como resultado **c**iclos determinísticos, sin embargo este comportamiento alcanza su estado estacionario a través de choque externos, es decir es intrínsecamente estable. Después de su primer intento por explicar este fenómeno, e insatisfecho por los resultados, Kalecki establece un nuevo modelo**.**

En el segundo modelo (1939) publicado en sus *Studies in Economic Dynamics,* Kalecki introduce dos importantes cambios, uno de ellos es el abandono a la idea de que el estado estacionario se da por medio de choques externos, el otro, es la aceptación del equilibrio inestable. Finalmente es en 1968 cuando Kalecki propone bases más sólidas para la explicación del ciclo económico; en dicho modelo, el autor introduce importantes modificaciones como el progreso técnico, la correlación de inversiones pasadas con la ganancia de los empresarios y la tendencia del ciclo económico.

Con base a sus dos escritos anteriores, Kalecki propone la siguiente ecuación para la explicación del ciclo económico:

$$\boldsymbol{I_{t+\tau} = aI_t + b\,\Delta I_t + F(t)}$$

Esta ecuación (que se toma de base para el desarrollo del modelo de esta investigación) es diferente a las propuestas en sus dos versiones anteriores debido a que sus bases teóricas cambiaron considerablemente, debido principalmente a la introducción de nuevos supuestos, los cuales permiten un análisis más detallado del comportamiento de la inversión como variable principal. En este último la inclusión del progreso técnico afectará las decisiones de inversión, mismas que son un elemento clave en el comportamiento del ciclo.

Dado los antecedentes teóricos y económicos para esta investigación, en la segunda parte se analiza de manera visual mediante el empleo de gráficas, el comportamiento de la ecuación propuesta por Kalecki; además se propuso un modelo matemático que muestra el comportamiento del ciclo económico pero de una manera diferente al introducir las bifurcaciones y el análisis del la estabilidad de la misma ecuación.

Inicialmente se hizo referencia a la función logística como parte fundamental del análisis matemático que se lleva a cabo y se da una breve explicación de su solución, misma que se aplica a la ecuación propuesta por Kalecki; con base es el desarrollo de la misma se encontraron los siguientes resultados:

- El punto de equilibrio es inestables, esto es, la trayectoria de la inversión que se traza a través del tiempo nunca van a regresar a los puntos de equilibrio encontrados, llevando al segundo resultado que es
- La existencia de una bifurcación tangencial

A partir de los resultados obtenidos, se puede concluir lo siguiente:

El ciclo económico presenta una trayectoria repulsora, por tanto, al observar un alejamiento del punto de equilibrio se rompe con la idea tradicional que mantiene la teoría económica, sobre la existencia de ciclos estables, definidos y de amplitud constante. Aunado a esto se destaca la importancia de los parámetros, los cuales guardan aspectos cuantitativos, pero sobretodo cualitativos, estos últimos ocasionan movimientos endógenos en el sistema, provocando que existan incluso los cambios estructurales en el comportamiento del ciclo económico, rompiendo de nuevo con los análisis tradicionales.

Finalmente, el análisis empleado en esta tesis ayuda al estudiante a comprender la importancia que tienen las aportaciones realizadas por M. Kalecki; desde la proposición de la demanda efectiva como eje de la economía, hasta el desarrollo de un modelo matemático inusual y adelantado a si tiempo para la explicación del ciclo económico, de ahí que se haya considerado para la realización de este estudio. Aunado a esto, se reconoce que el análisis matemático que conlleva esta investigación tiene implicaciones relevantes que pueden ser utilizados para investigaciones posteriores.

BIBLIOGRAFÍA

- Avella, Mauricio, "*El ciclo económico. Enfoque e ilustraciones. Los ciclos económicos de Estados Unidos y Colombia*", Perú, working paper, 2003.

- Assous, Michael, "*Kalecki contribution to the emerge of endogenous cycles theories: An interpretation of his 1939 Essays*", History of Eonomic Ideas. University of Cergy Pontoise, no. 9, pp.109-122, 2003.

- Bedolla Pérez, Juan, "*El protocolo de investigación*", http://www.prodigyweb.net.mx. Página que proporción información sobre la metodología de protocolos de investigación.

- Bortz, Pablo, "*Michal Kalecki, ciclo y tendencia*", Buenos Aires, working paper, 2006.

- Bortz, Pablo, "*Teoría del ciclo de Kalecki y demanda de dinero de Keynes: ¿un vínvulo perdido?*", I Jornadas de Economía Política, Buenos Aires, working paper, pp.1-16, 2007.

- Escot, Lorenzo, "*Dinámica económica caótica: Una aplicación del estudio y ciclo económico*", España, Tesis Doctoral, 2000.

- Frisch, R. and Holme, H., "*The characteristic solutions of a mixed difference and differential equation occurring in economic dynamics*", Econometrica vol.3 no. 2 pp.228-239, 1935.

- Frois Gilbert, "*Non- Linear Dynamics and Endogenous Cycles*", Alemania, Springer, 1998.

- Gomulka, Stanislaw, "*The innovative rate and Kalecki's theory of trend, unemployment and the business cycle*", London School of Economics, working paper, 1988.

- Kaddar, H., "*Hopf Bifurcation Analysis in a delayed Kaldor-Kalecki model of Business Cycle*", Nonlinear Analysis: Modelling and Control, vol. 13 no.4 pp.439-449, 2008.

- Kaddar, H., "*Local Hopf Bifurcation and stability of Limit cycle in a delayed Kaldor-Kalecki model*", Nonlinear Analysis: Modelling and Control, vol. 14 no.3 pp.333-343, 2009.

- Kalecki, Michal, "*A new approach to the Problem of Business Cycles*", The Review of Economic Studies, vol. 16 no.2 pp.57-64, 1949-1950.

- Kalecki, Michal, "*Trend and the Business Cycle*", 1968. London, Economic Journal.

- Kalecki, Michal, "*El mecanismo del Ciclo Económico*" en Ensayos escogidos sobre dinámica de la economía capitalista *1933-1970*, Londres, Fondo de Cultura Económica, 1982.

- Kalecki, Michal, "*Tendencia y ciclo económico*" en Ensayos escogidos sobre dinámica de la economía capitalista 1933-1970, Londres, Fondo de Cultura Económica, 1982.

- Kalecki, Michal, "*Capitalism, Business Cycles and Full "Employment*", Londres, Clarendon Press,1990

- Kalecki, Michal, edit. Osiatynski Jerzy "*Collected works of Michal Kalecki*", vol. 2, 1991.

- Kalecki, Michal, "*El proceso de Desarrollo Económico*" en Teoría de la dinámica económica, Londres, Fondo de Cultura Económica, 1995

- López, Julio, "*La economía de Michal Kalecki* y el capitalismo actual", México, Fondeo de Cultura Económica, 2008.

- López, Julio, "*Michal Kalecki (The economic theory of the capitalist economy*)", working paper, sin publicar.

- May, Robert, “*Simple mathematical models with very complicated*”, Nature, vol. 261 pp.459-471, 1976.
- Mejía, Pablo, “*Ciclos Económicos en México*”, Estado de México, working paper, 2002.
- Moriello, Sergio, “*Sistemas Complejos, caos y vida artificial*”, RED Científica, http://www.redcientifica.com. Página que proporciona información sobre teoría del caos.
- Murga, Gustavo, “*Michal Kalecki. El ciclo económico*”, Argentina, working paper, 2006.
- Oxley, Les, “*Economics on the edge of chaos: how does economics deal with complexity and the implications for systems management”*, Environmental Modelling and Software Journal, vol.22 no.5, 2007.
- R.W.James, and M.H. Belz, “*The influence of Distributes Lags on Kalecki's theory of the trade cycle*”, Econometrica vol.6 no.2 pp. 159-162, 1938.
- R.W.James, “*The significance of the characteristic solutions of mixed difference and differential equations*”, Econometrica vol.6 no.4 pp. 326-343, 1938.
- Restrepo, Medardo, “*Introducción a las dinámicas caóticas en la teoría de los ciclos económicos*”, Lecturas de Economía no.54, pp.57-98. 2001.
- Schaffer, Bill., “*The logistic Map: A model dynamical system”*, University of Arizona, working paper.
- Steindl, Josef., “*some comments on the three versions of Kalecki's theory of the trade cycle ”*, en annex 3 de
- Turnbull, H.W., *“Theory of equations”*, Londres, Oliver and Boyd, 1947.