



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA**

**INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL**

**ESTIMADOR DE POSICIÓN ANGULAR  
PARA UN MOTOR BLDC**

**T E S I S**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA**

**P R E S E N T A:**

**FERNANDO SOLIS FLORES**

**TUTOR:**

**DR. YU TANG XU**

**FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM**

**MÉXICO, D.F. ENERO DE 2013**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

### **Jurado asignado**

Presidente: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René

Secretario: Dr. Maya Ortiz Paul Rolando

Vocal: Dr. Tang Xu Yu

1<sup>er</sup> Suplente: Dr. Alvarez Icaza Longoría Luis A.

2<sup>do</sup> Suplente: Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio

Ciudad Universitaria, UNAM, México, Distrito Federal.

Asesor de tesis:

---

Dr. Tang Xu Yu

# Agradecimientos

Indiscutiblemente hay, hubo y siempre hubo un motón de personas involucradas para que un servidor llevase a cabo este trabajo; imposible nombrarlas a cada una de ellas por razones de espacio y tiempo, sin embargo, resulta imperdonable el no hacer mención de algunas de ellas.

Al Dr. Tang, por la confianza brindada, sus conocimientos regalados, su paciencia hacia mi persona, pero sobre todo por su camaradería.

A la universidad, a la facultad, pero sobretodo, a los Doctores del colegio de control del programa de posgrado en ingeniería de la UNAM, gracias a todos ellos por su aporte en mi formación, así como, a los miembros de mi jurado.

A mi familia, que sobre todas las cosas siempre me han apoyado.

A mi persona muy especial, mi Mariana, cuyo apoyo incondicional siempre estuvo presente.

A mis amigos, mis grandes amigos: Isaí, Ed, Hoover, Rafa, Kino, Tona, Chuchin, Ed, César, Genaro. Imposible pensar un mejor escenario, en mi estancia en la maestría, sin ellos

Al CONACyT por el apoyo económico otorgado durante mi posgrado.

## Resumen

El desarrollo de nuevas técnicas para poder reducir costos en la implementación, y diseño, de controladores en la industria, ha tomado relevancia desde que las necesidades que, como sociedad, hemos creado para sobrellevar nuestra vida diaria resultan insatisfechas, y lamentablemente, siguen creciendo.

He aquí la propuesta de un diseño más, enfocado sólo para el uso de motores BLDC (Brushless Direct Current Motor, por sus siglas en inglés), que trata de dar solución a uno de los problemas que aquejan a la industria; tal problema consiste en la estimación de variables de un sistema (Que no son medibles por el alto costo o inexistencia de sensores) a través de otras variables que son totalmente conocidas. Los efectos inmediatos que conlleva el desuso de sensores consisten en la reducción de costos (para diseño de controladores) y el ahorro de espacio (en la fabricación de dispositivos); estos son los puntos que resultan ser la mayor motivación de este trabajo.

A grandes rasgos, este trabajo retoma un modelo simplificado, pero representativo, de un motor BLDC; de tal forma que de dicho modelo es posible el planteamiento de una ecuación (Cuyas variables y parámetros mecánicos se encuentran separados de sus variables y parámetros eléctricos), donde la parte mecánica es una trayectoria desconocida que sólo es dependiente de la posición angular del rotor. En general, la contribución de este trabajo consiste en la proposición de una trayectoria aproximada para dicha ecuación, misma que se considera como un estimador de posición angular para un motor BLDC. Tal trayectoria aproximada se propone dependiente de dos parámetros desconocidos, que por conveniencia se consideran constantes, y de la posición angular. El problema se reduce a la sola estimación de dichos parámetros, mismos que se obtienen a través de una estimación adaptable fuera de línea, y que una vez conocidos, se sustituyen en la ecuación que se considera el estimador de posición angular.

**Palabras clave:** Identificación de parámetros fuera de línea, motor BLDC, estimador de posición angular

## Abstract

The development of new techniques in order to reduce implementation and design costs of controls in industry has gained relevance since de necessities that, we as a society, have created to endure our daily lives remain unsatisfied and, unfortunately, keep growing.

He it is a proposal of another design, focuses on BLDC (Brushless Direct Current) Motors, that tries to solve one of the problems that ails the industry; that problem consists in the estimation of variables of a system (Which are not measurable because of the higher costs of absence of sensors) through other variables that are totally known. The immediate effect that entail the desuetude of sensors consists in the cost reduction (for controllers design) and space saving (in the production of devices), these are de points which are the main causes of this work.

In general terms, this work resume a simplified, but representative, model of a BLDC Motor; in such a way that from said model is possible the approach of an equation (which mechanical variables and parameters are separated from its electrical variables and parameters), where the mechanical part is an undefined trajectory that only depends on the angular position of the rotor. The contribution of this work consists in the proposition of an approximate trajectory for said equation, which is considered as an angular position estimator for BLDC Motor. Such approximate trajectory depends of two unknown parameters, that for convenience are considered fixed values, and the angular position. The problem is reduced to an estimation of said parameters, same that are obtained through an adaptable offline estimation, wich once known, are substituted in the equation that is considered the angular position estimator.

**Keywords:** Offline Parameter Identification, BLDC Motor, Angular Position Estimator

# Índice general

<b>1. Introducción, Objetivo y Estado del Arte</b>	<b>1</b>
1.1. Constitución Básica del Motor BLDC . . . . .	2
1.1.1. El Rotor . . . . .	3
1.1.2. El Estator . . . . .	3
1.1.3. Fuerza Contra-Electromotriz . . . . .	4
1.2. Objetivo y delimitación del problema . . . . .	5
1.3. Trabajos Previos . . . . .	7
1.3.1. Observador de posición angular, no lineal, para motores síncronos de imanes permanentes . . . . .	7
1.3.2. Estimador de posición angular para velocidades cercanas a cero . . . . .	11
<b>2. Modelado del Motor BLDC</b>	<b>14</b>
2.1. Modelado del Motor BLDC con Inductancia Variable respecto a la Posición Angular del Rotor . . . . .	15
2.2. Modelo del Motor BLDC con Inductancia Constante . . . . .	16
<b>3. Diseño del Estimador de Posición Angular para Motores BLDC</b>	<b>18</b>
3.1. Planteamiento de un Mapeo sin dependencia de $\omega$ y $K_e$ . . . . .	18
3.2. Aproximación del Mapeo obtenido . . . . .	20
3.3. Mecanismos Adaptables . . . . .	22
3.3.1. Identificación paramétrica con leyes de adaptación tipo Proporcional-Integral	24

3.3.2. Identificación paramétrica con leyes de adaptación tipo Integral con un grado de libertad . . . . .	27
<b>4. Resultados</b>	<b>36</b>
4.1. Aproximación de la Derivada de la Corriente Eléctrica, por Fase, del Sistema . . .	36
4.2. Resultados del mecanismo de adaptación proporcional-integral . . . . .	38
4.2.1. Resultados de la estimación de los parámetros $K_1$ y $K_2$ para motores BLDC con dos pares de polos magnéticos . . . . .	40
4.3. Resultados del mecanismo de adaptación integral con un grado de libertad . . . .	42
4.3.1. Resultados de la estimación de los parámetros $K_1$ y $K_2$ para motores BLDC con dos pares de polos magnéticos . . . . .	43
4.3.2. Resultados de la estimación de los parámetros $K_1$ y $K_2$ para motores BLDC con tres pares de polos magnéticos . . . . .	45
4.3.3. Resultados de la estimación de los parámetros $K_1$ y $K_2$ para motores BLDC con cuatro pares de polos magnéticos . . . . .	46
<b>5. Conclusiones</b>	<b>48</b>
5.1. Sobre el estimador de posición angular . . . . .	48
5.2. Sobre los mecanismos de adaptación . . . . .	49

# Capítulo 1

## Introducción, Objetivo y Estado del Arte

Desde hace algunos años se ha comenzado el uso masivo de Motores BLDC (Brushless Direct Current Motor, por sus siglas en inglés), los cuales, respecto a los motores de corriente directa convencionales y en lo que se refiere al desuso de escobillas, presentan un cambio en el posicionamiento de los embobinados del sistema, mismos que se localizan en el estator. Recordemos que sus predecesores, que son los ya nombrados motores de corriente directa, tenían acoplado un embobinado en el rotor, lo que producía descargas electrostáticas con el solo girar del mismo. Por supuesto que se produce más de una ventaja con este cambio de posicionamiento de los embobinados; de acuerdo a lo reportado en [7], las ventajas de un motor BLDC, respecto a sus predecesores, se pueden resumir en el enlistado que se muestra a continuación:

- Mejor respuesta de velocidad contra par
- Alta eficiencia
- Mayor tiempo de vida
- Respuestas menos ruidosas
- Rangos de velocidad más altos

Además de lo establecido en el listado anterior, en [7] se menciona que un motor BLDC es bastante útil en aplicaciones en donde el volumen y el peso son factores críticos; esto se debe a que un motor BLDC es capaz de producir un par mayor al que puede producir otro motor eléctrico de dimensiones parecidas. Por otro lado, dado que los embobinados se ubican en la parte del motor que no tiene movimiento, estos pueden ser fijados en el diseño de la máquina donde se desempeñará el motor, lo que provoca el ahorro de espacio en el diseño de maquinaria; por lo que respecta al rotor, dado que no tiene ninguna conexión eléctrica con el estator, este puede ser diseñado como una pieza de fácil extracción y reemplazo, lo que hace su mantenimiento más simple respecto al de otros motores.

Previo a la presentación los objetivos, y alcances, de este trabajo, se expone un recuento básico y simple sobre el funcionamiento de los elementos más significativos que conforman al Motor BLDC.

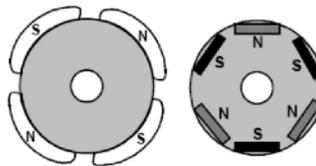
## 1.1. Constitución Básica del Motor BLDC

Uno de los aspectos más destacables de este tipo de motores es la forma tan particular que tiene su entrada de control, que consiste en tres señales de tensión eléctrica directa, suministradas a cada embobinado del motor, de tal forma que conmutan de acuerdo a una función que sólo es dependiente de la posición angular del rotor (Esta característica también la tienen otro tipo de motores, como el caso de motores a pasos y de reluctancia conmutada). En otras palabras, el control más común para este tipo de motores resulta ser un control discontinuo, cuya conmutación varía respecto a la posición angular del rotor. Por supuesto que es factible el diseño de esquemas de control continuo para este tipo de dispositivos, sin embargo, estos motores entregan un par mecánico alto, con más altas velocidades, respecto a la respuesta de otros motores eléctricos, debido a la forma tan particular de las entradas de control que se suelen aplicar a este tipo de máquinas.

De forma general, cualquier motor eléctrico tiene un rotor y un estator; las diferencias entre tipos de motores se suscitan con las particularidades que presentan dichos elementos y que se fijan en el momento de su construcción. A continuación se hace una breve reseña de las particularidades que constituyen a un motor BLDC.

### 1.1.1. El Rotor

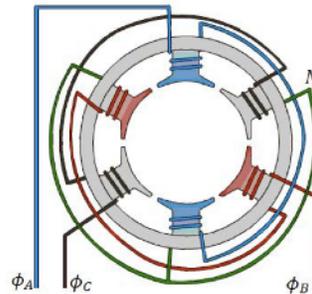
En cualquier motor, el rotor es el elemento que gira sobre su propio eje de simetría. En un motor BLDC el rotor está conformado por imanes permanentes, cuya cantidad, de forma convencional, varía de dos a ocho pares de polos. Tradicionalmente los ferromagnetos convencionales son buenos candidatos para poder desempeñar la tarea, sin embargo, ofrecen una densidad de flujo magnético muy baja para el volumen que ocupan; en su lugar, las combinaciones de tales ferromagnetos ofrecen una densidad de flujo más prominente. En la siguiente figura se ilustran dos tipos de rotores.



**Figura 1.1:** A la izquierda, rotor con dos pares de imanes circundantes. A la derecha, rotor con tres pares de imanes incrustados

### 1.1.2. El Estator

Como en todos los motores electromecánicos, el estator es la parte del motor que no presenta movimiento, para el caso de un motor BLDC, el estator consiste en láminas apiladas con embobinados ubicados en unos espacios que se encuentran distribuidos axialmente a lo largo de su periferia. Típicamente, el estator de un motor BLDC es parecido al de un motor de inducción, sin embargo, la forma en la cual los embobinados están dispuestos marca la diferencia entre estos dos tipos. La mayoría de los motores BLDC tienen tres embobinados, en configuración de estrella, que están interconectados en la periferia del estator para formar un número par de polos.



**Figura 1.2:** Estator de un motor BLDC en configuración de estrella

Remitiendonos a sólo los motores BLDC, existen dos tipos de variantes de embobinados de estator para este tipo de máquinas. Según lo descrito en [7], la diferencia radica en la interconexión de las espiras de los embobinados, lo que desemboca en la existencia de dos tipos de fuerza contra-electromotriz.

### 1.1.3. Fuerza Contra-Electromotriz

Es una tensión eléctrica que produce cada embobinado del motor cuando el rotor del mismo, gira. Se comporta como una tensión eléctrica que se opone al suministro de la tensión de alimentación aplicada a los embobinados; todo esto con base en la ley de Lenz. La fuerza contra-electromotriz depende de tres factores principalmente:

- La velocidad angular del rotor
- El campo magnético producido por los imanes del rotor
- El número de espiras que tienen los embobinados del estator

Siendo así, el modelado de la fuerza contra-electromotriz resulta ser directamente proporcional al número de espiras, la longitud del rotor, el radio interno del rotor, la densidad de campo magnético de los imanes que conforman el rotor y de otras variables mecánicas del sistema, es decir:

$$e \propto nlr\mathbf{B}f(\omega, \theta) \quad (1.1)$$

Donde:

$e$	Fuerza Contra-Electromotriz
$n$	Cantidad de espiras de los embobinados por fase
$l$	longitud del rotor
$r$	Radio interno del rotor
$\mathbf{B}$	Densidad de campo magnetico del rotor
$\theta$	Posición angular del rotor
$\omega$	Velocidad angular del rotor

La mayoría de elementos que se encuentran en (1.1) resultan ser constantes y fijados al momento de la construcción del motor, de tal forma que el único elemento que regula de forma directamente proporcional a la variable  $e$  resulta ser el mapeo  $f(\theta, \omega)$ , que según la disposición de los embobinados del estator cambia de forma.

De acuerdo con dicha disposición de los embobinados del estator, existen dos tipos de motores, que para fines simplistas serán el tipo senoidal y trapezoidal; el efecto más notable de que un motor sea senoidal es la obtención de un par más suave respecto al que se obtendría si fuese trapezoidal, sin embargo, el hecho que sea senoidal también implica un mayor costo, dado que esta configuración requiere de una mayor cantidad de interconexiones entre los embobinados del estator, lo que genera el uso de más cable para su elaboración.

## 1.2. Objetivo y delimitación del problema

La estimación de las variables mecánicas, a través de la sola medición de las variables eléctricas del sistema, para cualquier máquina electromecánica, resulta ser un tema atractivo para algunos autores que han proporcionado soluciones al problema, bajo ciertas restricciones. De acuerdo con lo consultado, algunas de esas restricciones son evadibles en el caso de que se pueda medir

la velocidad angular del rotor del sistema, sin embargo, este paliativo resulta poco atractivo cuando se desea sólo el uso de sensores eléctricos, y así, disminuir costos de fabricación; tomando en cuenta lo anterior, el primer objetivo a alcanzar es:

- El desarrollo de un estimador que sea capaz de recrear la posición angular del rotor, para un motor BLDC, de tal forma que dicho estimador no requiera de ninguna medición de las variables mecánicas del sistema

Una vez sentado el objetivo principal, es necesario aludir los planteamientos bajo los cuales se construye el tan mencionado estimador. Se destaca que por mucho tiempo bastantes autores han tratado de resolver el problema de diversas formas, sin embargo, sus resultados muestran soluciones con vicisitudes que desembocan en el desdén de las mismas; la solución aquí presentada, al igual que todas sus homólogas, contiene en más de una forma debilidades remarcables, pero ineludibles. Al final, como en [1] y [3], resultó imprescindible el conocimiento de algunos parámetros del sistema; esta es la principal razón por la cual este tipo de métodos pierde robustez, y en cierta medida, credibilidad en su funcionamiento prolongado; es destacable que la dependencia paramétrica resulta poco robusta para fines de control y estimación de variables; específicamente en máquinas electromecánicas, los parámetros eléctricos, cuya presencia resultó inevitable en la construcción del estimador, son susceptibles a cambios por efecto de las elevadas temperaturas que alcanzan los embobinados de las fases, sin embargo, esto es ineludible para la metodología propuesta. Siendo así, la primera limitación que presenta el problema es:

- El estimador, propuesto aquí, es un mecanismo que depende del conocimiento de los parámetros eléctricos del sistema.

Con la finalidad de obtener un método de estimación simple, que no desemboque en un desarrollo que requiera de un conocimiento sumamente especializado en el tema (Como en [1] y [2]), además de ofrecer un trabajo que sea de fácil implementación, el estimador de posición angular se construyó alrededor de un modelo simplificado, pero funcional, de un motor BLDC; dicho modelo está descrito, y aceptado, ampliamente en varias publicaciones, siendo así:

- El estimador, propuesto aquí, está desarrollado alrededor de modelo simplificado de un motor BLDC

Cabe destacar que son pocos los trabajos que se adecúan con los objetivos y restricciones planteadas; algunos de los trabajos, que no se incluyeron como parte de este desarrollo, requieren de la medición de la velocidad angular del sistema, situación que tergiversa el objetivo principal, por otra parte, otros trabajos incluyen técnicas que están fuera del contexto deseado para este estimador. Los trabajos que se adecúan a los objetivos de esta tesis se desarrollarán a continuación; para su entendimiento, se describen de forma somera los esquemas descritos en ellos, mismos que resultan atractivos dado que carecen del uso de sensores mecánicos para la estimación de la posición angular del sistema, sin embargo, es de notar que su funcionamiento requiere del conocimiento de algunos parámetros.

### 1.3. Trabajos Previos

El primer trabajo a mostrar está detallado en [1] y [2]; dicho trabajo consiste en la estimación indirecta de la posición angular a través de la observación de una variable, misma que describe el comportamiento de los flujos por fase del sistema. A continuación se explicará brevemente el funcionamiento de dicho observador indirecto y las razones por las cuales resulta poco útil para los propósitos de este trabajo.

#### 1.3.1. Observador de posición angular, no lineal, para motores síncronos de imanes permanentes

Como el título lo sugiere, el observador indirecto, propuesto en [1] y [2], resulta ser útil para cualquier máquina síncrona de imanes permanentes (PMSM), como el caso particular del Motor BLDC que entra en esta categoría.

También para esta particular categoría, es posible reducir los modelos que describen su dinámica mediante una transformación, misma que es útil para diseñar esquemas de observación y/o control. En [1] y [2] directamente se muestra el modelo transformado y se diseña el observador alrededor de este.

Además de lo mencionado, también es importante enlistar las suposiciones bajo las cuales se diseñó el observador. Es importante decir que en ninguna de las referencias consultadas exige el uso de algunos parámetros del sistema.

- Se considera que las corrientes eléctricas que circulan por los embobinados del rotor son medibles
- Se considera la resistencia eléctrica de los embobinados es conocida
- Se considera la inductancia propia de los embobinados es conocida

Una vez sentadas la suposiciones, el modelo transformado se divide en dos partes. La primera parte está conformada por variables y parámetros que son conocidos, mientras que la segunda está conformada por la posición y la velocidad angular del rotor que resultan desconocidas. También es importante mencionar que del modelo transformado sólo se ocupa la parte eléctrica, lo cual representa una gran ventaja al prescindir de los parámetros mecánicos; dicha parte eléctrica del modelo del motor transformado es la siguiente:

$$L_s \begin{bmatrix} \dot{i}_\alpha \\ \dot{i}_\beta \end{bmatrix} = -R_s \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \omega_r \psi_m \begin{bmatrix} \sin(\theta_r) \\ -\cos(\theta_r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Donde:

$L_s$	Inductancia asociada a los embobinados del estator
$R_s$	Resistencia asociada a los embobinados del estator
$i_{\alpha,\beta}$	Corrientes transformadas que circulan por los embobinados del estator
$v_{\alpha,\beta}$	Entradas de control transformadas
$\omega_r$	Velocidad angular escalada del rotor del motor
$\theta_r$	Posición angular del rotor escalada
$\psi_m$	Constante de flujo asociada a los imanes acoplados al rotor

Siendo así, se define una variable que contiene información medible y conocida

$$y = -R_s \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

La siguiente variable definida contiene la información que se desea estimar

$$x = L_s \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \psi_m \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) \\ \sin(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Al derivar (1.4) se puede recrear (1.2) en términos de las variables  $y$  y  $x$

$$\dot{x} = L_s \begin{bmatrix} \dot{i}_\alpha \\ \dot{i}_\beta \end{bmatrix} + \omega_r \psi_m \begin{bmatrix} -\sin(\theta_r) \\ \cos(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$\dot{x} = L_s \begin{bmatrix} \dot{i}_\alpha \\ \dot{i}_\beta \end{bmatrix} + \omega_r \psi_m \begin{bmatrix} -\sin(\theta_r) \\ \cos(\theta_r) \end{bmatrix} = -R_s \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = y$$

$$\dot{x} = y \quad (1.6)$$

En (1.6) se tiene la dinámica eléctrica del sistema; la información deseada se encuentra contenida en la variable  $x$ , es por tal motivo que se construyó un observador para estimar dicha variable y de esa forma estimar indirectamente la posición angular escalada  $\theta_r$ .

Una vez estimada la variable  $x$ , el procedimiento para obtener el valor estimado de  $\theta_r$  consiste en copiar la dinámica descrita en (1.4)

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = L_s \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \psi_m \begin{bmatrix} \cos(\hat{\theta}_r) \\ \sin(\hat{\theta}_r) \end{bmatrix}$$

Como se mencionó, considerando que se conoce el valor estimado de  $x$ , así como el parámetro  $L_s$  y las variables  $i_{\alpha,\beta}$ , se puede obtener directamente el seno y coseno de la posición angular escalada.

$$\frac{1}{\psi_m} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 - L_s i_\alpha \\ \hat{x}_2 - L_s i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{\theta}_r) \\ \sin(\hat{\theta}_r) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Donde:

- $\hat{x}$  Valor estimado de  $x$   
 $\hat{\theta}_r$  Estimado de la posición angular del rotor escalada

Para eliminar la dependencia del parámetro  $\psi_m$ , se dividen entre si mismos los elementos que conforman a (1.7).

$$\frac{\sin(\hat{\theta}_r)}{\cos(\hat{\theta}_r)} = \frac{\hat{x}_2 - L_s i_\beta}{\hat{x}_1 - L_s i_\alpha} = \tan(\hat{\theta}_r) \quad (1.8)$$

El observador de la variable  $x$  resulta ser un reto de ingenio; como es visible, la dinámica descrita en (1.6) es muy simple, se requiere de más conocimiento del sistema para su desarrollo. Al final, el observador propuesto copia la dinámica del sistema reducido y agrega un término que lo hace global y asintóticamente estable, dicho observador es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = -R_s \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} + \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 - L_s i_\alpha \\ \hat{x}_2 - L_s i_\beta \end{bmatrix} (\psi_m^2 - |\hat{x} - L_s i_{\alpha,\beta}|) \quad (1.9)$$

La prueba de estabilidad del observador (1.9) está descrita en [2], donde se puede constatar su carácter global y tendencia asintótica hacia la variable  $x$ , donde se encuentra contenida la información de la posición angular escalada.

Sobre los problemas reportados para este esquema de observación, en [1] se menciona lo siguiente:

- En velocidades cercanas a cero, el esquema de observación no estima de forma adecuada
- Es función de la resistencia e inductancia de los embobinados del estator
- Requiere del conocimiento del parámetro  $\psi_m$

### 1.3.2. Estimador de posición angular para velocidades cercanas a cero

A diferencia del primer esquema expuesto, el diseño del nuevo estimador de posición angular (Expuesto en [3]) sólo está pensado para Motores BLDC. Se parte del precepto que se conoce el modelado del sistema físico y que se cumplen las siguientes consideraciones:

- La operación del motor se realiza evitando la saturación de la corriente eléctrica que circula por los embobinados del estator
- La inductancia, que se produce por efecto de la posición angular del rotor, es despreciable (Este punto se detalla en el siguiente capítulo)

A grandes rasgos, las bondades que representa el efecto de despreciar las inductancias, que son debidas a la posición angular del rotor, desembocan en la obtención de un modelo reducido tanto en la parte eléctrica, como en la mecánica del sistema. De forma análoga al observador planteado en [1] y [2], aunado que se tiene un modelo reducido para la parte eléctrica del sistema, resulta sumamente simple separar las variables eléctricas, de las mecánicas, es decir:

$$V_a = R_s i_a + L_s \dot{i}_a + K_e \dot{\theta} e_a(\theta) \quad (1.10)$$

$$V_b = R_s i_b + L_s \dot{i}_b + K_e \dot{\theta} e_b(\theta) \quad (1.11)$$

$$V_c = R_s i_c + L_s \dot{i}_c + K_e \dot{\theta} e_c(\theta) \quad (1.12)$$

Donde:

$L_s$	Inductancia asociada a los embobinados del estator
$R_s$	Resistencia asociada a los embobinados del estator
$i_{a,b,c}$	Corrientes que circulan por los embobinados del estator
$V_{a,b,c}$	Entradas de control
$\dot{\theta}$	Velocidad angular del rotor del motor
$\theta$	Posición angular del rotor
$K_e$	Constante asociada a un imán permanente y a los polos del sistema
$e_{a,b,c}$	Fuerzas contra-electromotrices de cada fase

Son (1.10), (1.11) y (1.12) las ecuaciones que conforman la dinámica reducida de la parte eléctrica del sistema. En [3] la proposición del estimador consiste en separar, de forma algebraica, la variables eléctricas de las mecánicas.

$$V_a - R_s i_a - L_s \dot{i}_a = K_e \dot{\theta} e_a \quad (1.13)$$

$$V_b - R_s i_b - L_s \dot{i}_b = K_e \dot{\theta} e_b \quad (1.14)$$

$$V_c - R_s i_c - L_s \dot{i}_c = K_e \dot{\theta} e_c \quad (1.15)$$

El siguiente paso consiste en plantear un conjunto de ecuaciones que son el resultado de la resta algebraica de dos elementos del conjunto (1.13),(1.14) y (1.15), es decir:

$$H_{cb} = K_e \dot{\theta} e_c - K_e \dot{\theta} e_b = (V_c - V_b) - R_s (i_c - i_b) - L_s (\dot{i}_c - \dot{i}_b) \quad (1.16)$$

$$H_{ac} = K_e \dot{\theta} e_a - K_e \dot{\theta} e_c = (V_a - V_c) - R_s (i_a - i_c) - L_s (\dot{i}_a - \dot{i}_c) \quad (1.17)$$

$$H_{ba} = K_e \dot{\theta} e_b - K_e \dot{\theta} e_a = (V_b - V_a) - R_s (i_b - i_a) - L_s (\dot{i}_b - \dot{i}_a) \quad (1.18)$$

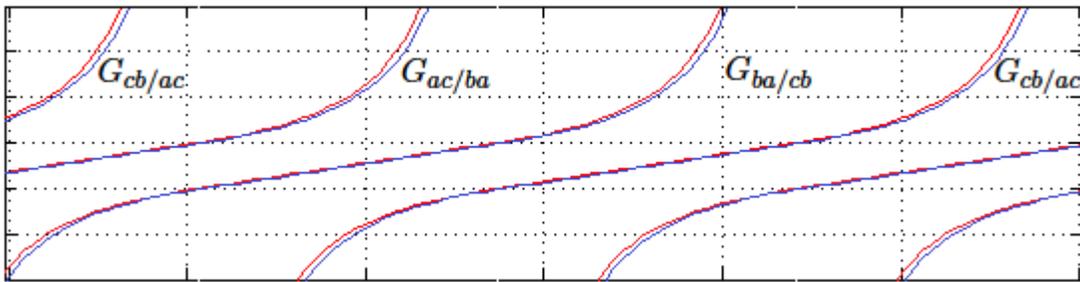
De forma análoga al planteamiento del observador de [1] y [3], para eliminar la dependencia de la variable  $\dot{\theta}$  y de la constante  $K_e$ , simplemente se dividen entre ellas las expresiones del conjunto (1.16), (1.17) y (1.18)

$$G_{cb/ac} = \frac{H_{cb}}{H_{ac}} = \frac{(V_c - V_b) - R_s (i_c - i_b) - L_s (\dot{i}_c - \dot{i}_b)}{(V_a - V_c) - R_s (i_a - i_c) - L_s (\dot{i}_a - \dot{i}_c)} \quad (1.19)$$

$$G_{ac/ba} = \frac{H_{ac}}{H_{ba}} = \frac{(V_a - V_c) - R_s (i_a - i_c) - L_s (\dot{i}_a - \dot{i}_c)}{(V_b - V_a) - R_s (i_b - i_a) - L_s (\dot{i}_b - \dot{i}_a)} \quad (1.20)$$

$$G_{ba/cb} = \frac{H_{ba}}{H_{cb}} = \frac{(V_b - V_a) - R_s (i_b - i_a) - L_s (\dot{i}_b - \dot{i}_a)}{(V_c - V_b) - R_s (i_c - i_b) - L_s (\dot{i}_c - \dot{i}_b)} \quad (1.21)$$

La forma de estimar la posición angular consiste en ubicarla a través de una tabla de búsqueda que se genera al graficar las funciones  $G_{cb/ac}$ ,  $G_{ac/ba}$  y  $G_{ba/cb}$  contra  $\theta$ ; dicha tabla de búsqueda se utilizará posteriormente como guía para el desarrollo del estimador que se propone en este trabajo, esto debido a que la tabla de busqueda genera curvas que se pueden caraterizar de forma simple.



**Figura 1.3:** Funciones  $G$  vs  $\theta$  para motores senoidales(En azul) y trapezoidales(En rojo)

Sobre los problemas reportados para este esquema de estimación, en [3] se menciona lo siguiente:

- Al utilizar un modelo reducido, la estimación de la posición se aleja por pequeños instantes de la trayectoria original
- Es función de la resistencia e inductancia de los embobinados del estator
- Requiere del conocimiento de las derivadas de la corriente eléctrica por fase

## Capítulo 2

# Modelado del Motor BLDC

El modelado del motor BLDC es similar al de un motor síncrono, la diferencia radica en que el flujo magnético en los motores BLDC está asociado a imanes permanentes.

De acuerdo con [7], los motores BLDC comerciales tienen tres fases eléctricas; la constitución básica de cada fase es un circuito RL que está en serie con un elemento que provoca una caída de tensión, cuyo origen es de tipo mecánico, dicha caída de tensión está ligada directamente con la posición angular del rotor y con el número de pares de polos adecuados al mismo.

La parte mecánica del modelado es obtenida a través de la segunda ley de Newton e igualada a un par de origen eléctrico, mismo que es función de las corrientes de todas las fases del estator, de la posición angular del rotor y del número de pares de polos. Para fines del desarrollo del estimador, la parte mecánica no es utilizada en su construcción.

Previo a la presentación del modelado utilizado, es notable que parte de la bibliografía consultada sugiere un modelo complejo, que para fines del desarrollo del estimador de esta tesis, resulta poco atractivo por las complicaciones que conlleva cualquier tratamiento algebraico en aras de separar las variables mecánicas de las eléctricas. Se trata de un modelo más generalizado, cuyas inductancias varían respecto a la posición angular del rotor, mismo fenómeno que provoca que la variable a estimar esté ubicada en toda ecuación del modelo, este es el problema que provoca que cualquier tratamiento algebraico de este modelo sea sumamente engorroso y a la larga inane para propósitos de este trabajo.

## 2.1. Modelado del Motor BLDC con Inductacia Variable respecto a la Posición Angular del Rotor

Se trata de un modelo, referido en [4] y [5], cuyas inductancias por fase varían senoidalmente respecto a la posición angular del rotor, de tal forma que hace presente en cada fase el efecto de las corrientes eléctricas de las demás fases. Es el modelo convencional y el más utilizado por la mayoría de los autores para diseño de observadores y/o controladores, esto se debe a que es el más acertado al describir la dinámica del sistema.

$$\mathcal{V} = \mathcal{R}\mathcal{I} + \frac{1}{N_p}\dot{\mathcal{L}}\mathcal{I} + \mathcal{L}\dot{\mathcal{I}} + \frac{K_e}{N_p}\dot{\Gamma} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{2N_p}\mathcal{I}^T \frac{\partial}{\partial \theta} \{\mathcal{L}\}\mathcal{I} + \frac{K_t}{N_p} \frac{\partial}{\partial \theta} \{\mathcal{L}^T\}\mathcal{I} = J\dot{\omega} + B\omega + T_L \quad (2.2)$$

Donde:

$\mathcal{V}^T = \begin{bmatrix} V_a & V_b & V_c \end{bmatrix}$	Vector de voltajes de entrada de fase
$\mathcal{R} = \text{diag} \begin{bmatrix} R_s & R_s & R_s \end{bmatrix}$	Matriz diagonal de resistencias de fase
$\mathcal{I}^T = \begin{bmatrix} i_a & i_b & i_c \end{bmatrix}$	Vector de corrientes de fase
$K_e$	Constante asociada al flujo de imanes permanentes
$N_p$	Número de pares de polos del rotor
$T_L$	Par de carga aplicado al rotor
$\theta$	Posición angular del rotor
$\omega$	Velocidad angular del rotor
$\Gamma^T = \begin{bmatrix} f_a & f_b & f_c \end{bmatrix}$	Vector de flujos

$$f_a = f(\theta + \pi/2) \quad f_b = f(\theta + \pi/2 + 2\pi/3) \quad f_c = f(\theta + \pi/2 - 2\pi/3)$$

$f(\cdot)$	Función senoidal o trapezoidal
$J$	Momento de Inercia del rotor

$B$	Constante de fricción viscosa
$\mathcal{L}(\theta)$	Matriz de inductancias variable respecto a $\theta$

$$\mathcal{L}(\theta) = \begin{bmatrix} L_s + L_A + L_B f(2N_p \theta) & -L_A/2 + L_B f(2N_p \theta + 2\pi/3) & -L_A/2 + L_B f(2N_p \theta - 2\pi/3) \\ -L_A/2 + L_B f(2N_p \theta + 2\pi/3) & L_s + L_A + L_B f(2N_p \theta - 2\pi/3) & -L_A/2 + L_B f(2N_p \theta) \\ -L_A/2 + L_B f(2N_p \theta - 2\pi/3) & -L_A/2 + L_B f(2N_p \theta) & L_s + L_A + L_B f(2N_p \theta + 2\pi/3) \end{bmatrix}$$

$L_A$	Inductancia mutua entre embobinados
$L_B$	Inductancia debida a las no uniformidades del entrehierro
$K_t$	Constante de campo

A simple vista, es notable la presencia de  $\theta$  en todas las ecuaciones que conforman el modelo del sistema; de forma específica, en las ecuaciones de la parte eléctrica, que son las que se utilizan para el desarrollo del estimador,  $\theta$  se encuentra contenida en una función no lineal, lo que dificulta aún más su despeje o cualquier otro tratamiento algebraico.

También es de destacar, que para cualquier motor BLDC, las inductancias  $L_A$  y  $L_B$  son muy pequeñas, de tal forma que según lo establecido en [3] pueden ser despreciadas; en general  $L_A > L_B$ , además, ambas inductancias son mucho menores que  $L_s$ . Esta propiedad es la que hace posible la prosición de un modelo reducido, eficaz para su trata algebraica y lo suficientemente aceptable para describir la dinámica del sistema.

## 2.2. Modelo del Motor BLDC con Inductancia Constante

Se trata de un caso particular de (2.1) y (2.2), donde abiertamente las inductancias  $L_A$  y  $L_B$  son despreciadas (Como se mencionó, en [3] se considera que sus amplitudes son pequeñas y despreciables). Previamente la parte eléctrica de este nuevo modelo fue presentado en las ecuaciones (1.10), (1.11) y (1.12)

$$V_a = R_s i_a + L_s \dot{i}_a + K_e \dot{\theta} e_a$$

$$V_b = R_s i_b + L_s \dot{i}_b + K_e \dot{\theta} e_b$$

$$V_c = R_s i_c + L_s \dot{i}_c + K_e \dot{\theta} e_c$$

La relación del vector de flujos  $\Gamma$  con las fuerzas contra-electromotrices  $e_a$ ,  $e_b$  y  $e_c$  consiste en la variación de cada uno de los elementos que conforman al vector respecto a la posición angular, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{\Gamma\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} f_a & \frac{\partial}{\partial \theta} f_b & \frac{\partial}{\partial \theta} f_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_a & e_b & e_c \end{bmatrix}$$

Por lo que respecta a la parte mecánica de este nuevo modelo, cuando igualamos a cero las inductancias  $L_A$  y  $L_B$  en (2.2) se obtiene la siguiente ecuación:

$$K_t \omega (e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c) = J \dot{\omega} + B \omega + T_L \quad (2.3)$$

A pesar de obtener una versión más simple, la parte mecánica del modelo resultante sigue sin tener inferencia en la construcción del estimador de posición angular (Esto mismo pasa en [1] y [2]).

Las ventajas más notables del nuevo modelo son apreciables a simple vista; la primera, y la más destacable, radica en la facilidad de separar las variables mecánicas de las variables eléctricas, esto se vislumbra de forma simple en (1.10), (1.11) y (1.12); por otra parte, en todas las fases del sistema no existe el efecto de las otras, es decir, cada fase del sistema es sólo función de sus propias variables eléctricas.

Al final, son (1.10), (1.11) y (1.12) las ecuaciones que modelan la parte eléctrica del sistema, por lo que respecta a la parte mecánica, es (2.3) la que describe la dinámica dicha parte. Este modelo reducido es utilizado ampliamente en varias publicaciones para fines de simple descripción del sistema, como el caso de [6], y para el desarrollo de estimadores, como el caso de [3], lo que sugiere su eficacia y buena descripción del mismo.

## Capítulo 3

# Diseño del Estimador de Posición Angular para Motores BLDC

Como cualquier anhelo sobre la estimación de variables mecánicas en motores eléctricos de cualquier índole, se desea estimar la posición angular del rotor, de un motor BLDC, con la sola medición de las variables eléctricas del sistema (Voltajes de entradas y corrientes eléctricas de fase). Por supuesto que resulta sumamente pretencioso el tratar de diseñar un esquema con semejante restricción; conforme se vaya presentado el desarrollo del estimador, se mostrarán las suposiciones por las que se optó, para finalmente obtener un resultado aceptable. De antemano es de mencionar que sólo se pudo restringir el trabajo de forma tal que el estimador opera sin medición alguna de las variables mecánicas, y que esto no lo exime del uso de parámetros del modelo del motor.

El desarrollo del estimador propuesto es fácilmente explicable en tres pasos, mismos que se desarrollarán de forma detallada a lo largo de este capítulo.

### 3.1. Planteamiento de un Mapeo sin dependencia de $\omega$ y $K_e$

Con previa mención, el modelo base para el desarrollo es el conjunto compuesto por (1.10), (1.11) y (1.12). Al igual que en [3], el siguiente movimiento consiste en despejar las variables eléctricas de las mecánicas; con anterioridad se había realizado tal separación dejando como

resultado el conjunto de ecuaciones (1.13), (1.14) y (1.15).

$$\begin{aligned} V_a - R_s i_a - L_s \frac{di_a}{dt} &= K_e \omega e_a \\ V_b - R_s i_b - L_s \frac{di_b}{dt} &= K_e \omega e_b \\ V_c - R_s i_c - L_s \frac{di_c}{dt} &= K_e \omega e_c \end{aligned}$$

El procedimiento continúa como en [1] y [3], donde la forma de suprimir la dependencia de la variable  $\omega$  y del parámetro  $K_e$  es a través de la división sistemática de las ecuaciones eléctricas del modelado. A diferencia de [3], donde se hace la proposición del conjunto de ecuaciones (1.16), (1.17) y (1.18), en este punto se prefiere el diseño de una sola ecuación, que es más simple y más acertada al describir la trayectoria de una tangente. Dicha función se obtiene al dividir (1.13) entre la diferencia entre (1.14) y (1.15).

$$G_{a/bc} = \frac{K_e \omega e_a}{K_e \omega e_b - K_e \omega e_c} = \frac{e_a}{e_b - e_c} = \frac{V_a - R_s i_a - L_s \dot{i}_a}{(V_b - V_c) - R_s (i_b - i_c) - L_s (\dot{i}_b - \dot{i}_c)} \quad (3.1)$$

A pesar de que a simple vista no represente dependencia de la posición angular, es de notar que  $G_{a/bc}$  es función de  $\theta$ , mientras que la parte derecha de (3.1), donde sí es muy notoria su dependencia, es sólo función de variables y parámetros eléctricos.

Hasta ahora, el diseño del estimador comienza a mostrar sus limitaciones, por lo que es importante señalar los primeros puntos que lo acotan.

- Es necesario el conocimiento de  $R_s$
- Es necesario el conocimiento de  $L_s$
- Requiere de la medición instantánea de las corrientes de fase  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$
- Requiere de la medición instantánea de las derivadas de las corrientes de fase

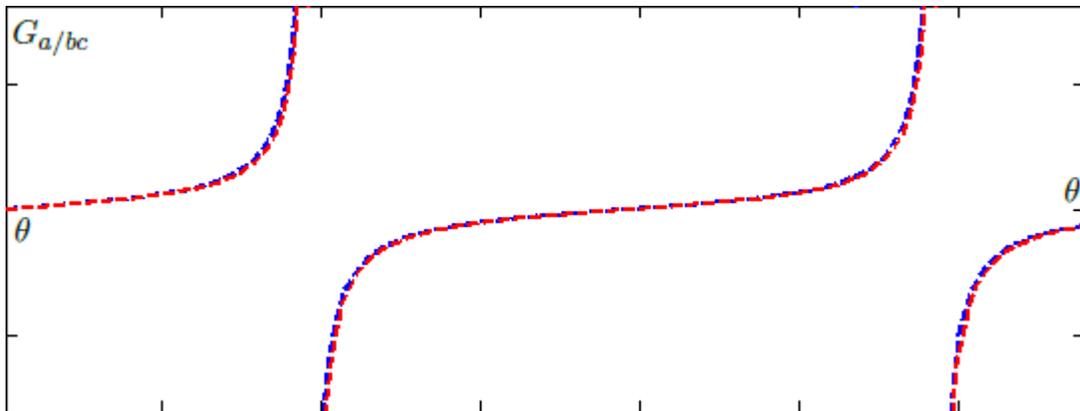
Por otra parte, en más de un modo resulta ambicioso el proponer que las derivadas de las corrientes sean medibles en cualquier instante; para empezar, es bien sabido que al proponer un algoritmo de derivación, este puede no funcionar al tratar de aplicarlo a una señal que contiene

vasto ruido de alta frecuencia, lo que puede ser factible en este tipo de sistemas. Además, es de considerar que los voltajes de excitación para motores BLDC, de forma convencional, son producto de la conmutación de fuentes de corriente continua, lo que provoca que las corrientes eléctricas de fase sean discontinuas; al tratar de usar un algoritmo de derivación habitual, este se indeterminaría en los instantes donde exista la discontinuidad de la señal que se trata de derivar. Más adelante se detallan la soluciones por las que se optaron para tratar este problema.

### 3.2. Aproximación del Mapeo obtenido

Hasta este momento se ha hecho una reproducción casi idéntica del trabajo plasmado en [3], sin embargo, en esta parte del desarrollo es donde se suscita la separación con tal trabajo y se persigue una mejora del planteamiento realizado en el mismo.

El primer paso del planteamiento, desarrollado como mejora de lo expuesto en [3], consiste en la examinación de la curva que se genera al graficar  $G_{a/bc}$  contra  $\theta$ .



**Figura 3.1:**  $G_{a/bc}$  vs  $\theta$  para motores senoidales(En azul) y trapezoidales(En rojo)

A simple vista, en la Figura 3.1 son despreciables las diferencias entre las curvas debidas a un motor trapezoidal y uno senoidal. Ambas curvas, sin objeción alguna, se pueden aproximar a una función tangente, en otras palabras se tiene que:

$$G_{a/bc}(\theta) = \mathbf{atanb}\theta \quad (3.2)$$

Donde:

- a**            Constante de amplitud  
**b**            Constante de frecuencia

Sustituyendo (3.1) en (3.2)

$$\mathbf{a} \tan \mathbf{b} \theta = \frac{V_a - R_s i_a - L_s \dot{i}_a}{(V_b - V_c) - R_s (i_b - i_c) - L_s (\dot{i}_b - \dot{i}_c)} \quad (3.3)$$

Es (3.3) un sistema estático, cuya constitución nos muestra un esquema de variables y parámetros eléctricos separados de la posición angular. Por lo que respecta a los elementos **a** y **b**, son considerados constantes dado que sus variaciones están directamente ligadas al cambio en los parámetros eléctricos del sistema. Anteriormente se enunció como factible la variación paramétrica, pero por ahora, al igual que lo mostrado en [1], es necesario suponer que estos no cambian a lo largo del tiempo, o respecto a otras variables.

De forma análoga a lo presentado en [1], para estimar la posición angular se requiere invertir el mapeo tangente en (3.3). En general, la inversión no es exacta debido a que la tangente no es una función inyectiva, sin embargo, basta con restringir el alcance de  $\theta$  para tener una inversión exacta de manera local.

Por simplicidad:

$$u = \frac{V_a - R_s i_a - L_s \dot{i}_a}{(V_b - V_c) - R_s (i_b - i_c) - L_s (\dot{i}_b - \dot{i}_c)} \quad (3.4)$$

Donde:

- $u$             Entrada del sistema estático

Además:

$$\theta = \underbrace{\frac{1}{\mathbf{b}}}_{K_1} \tan^{-1} \left( \underbrace{\frac{1}{\mathbf{a}}}_{K_2} u \right) \quad (3.5)$$

Finalmente se obtiene una expresión simple para la estimación de la posición angular del sistema; tal expresión la podemos considerar como un sistema estático, cuya entrada es  $u$  y salida  $\theta$ . Por lo que respecta de  $K_1$  y  $K_2$ , se trata de dos componentes constantes, cuyos valores son desconocidos.

Sobre las bondades de (3.5), podemos comenzar con la construcción de su entrada  $u$ , como es de recordar,  $u$  está compuesta de las variables eléctricas, y de sus derivadas, lo que hace prescindible el conocimiento de las condiciones iniciales de las mismas. Por otro lado, una de las mayores ventajas es la simplicidad de (3.5), misma que sólo obliga al planteamiento de un esquema capaz de estimar a  $K_1$  y  $K_2$ .

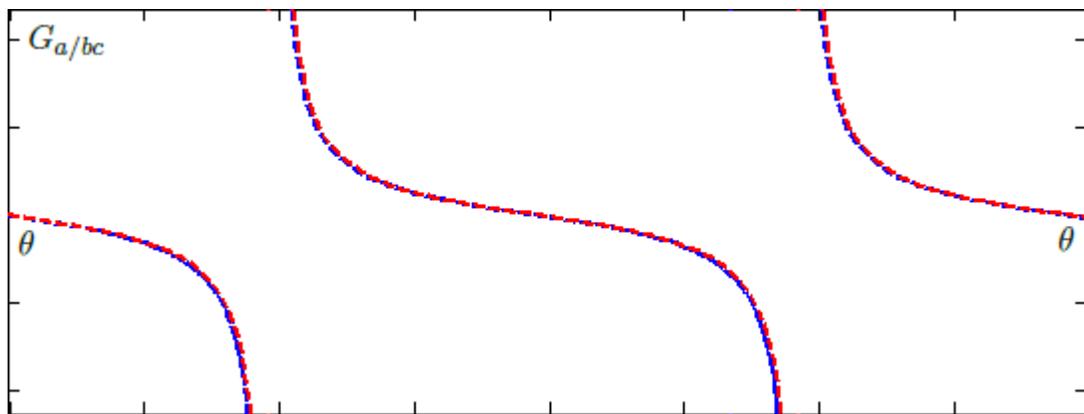
En cuanto a la preferencia en uso de (3.1) sobre (1.19), (1.20) o (1.21), es sólo por un parecido más cercano a una función tangente. A simple apreciación (1.19), (1.20) y/o (1.21) también describen una trayectoria similar al mapeo planteado, sin embargo, estas carecen de simetría respecto al origen de los ejes  $\theta$  y  $G_{a/bc}$ . La falta de simetría provoca un fallo terrible en el planteamiento del último paso, por lo que es totalmente necesario el uso de (3.1).

### 3.3. Mecanismos Adaptables

En cuanto a la estimación de los parámetros  $K_1$  y  $K_2$ , lo deseado consiste en el planteamiento de un mecanismo que pueda prescindir del conocimiento de la posición angular, es decir, se desea construir un mecanismo que estime la posición angular y dichas constantes al mismo tiempo, sin embargo, debido a la simpleza de (3.5), una construcción sin  $\theta$  puede desembocar en una tarea sin salida, por lo que finalmente se optó por una adaptación fuera de línea.

En primer plano, todo lo planteado en este trabajo es para fines prácticos, por lo que se persigue un resultado sumamente simple y de fácil implementación. El método, aquí propuesto, se espera aplicar a lotes enteros de motores de exacta fabricación, por lo que se puede inferir que los parámetros  $K_1$  y  $K_2$ , de forma práctica, son muy similares para todos los motores de la misma serie de fabricación. Para la aplicación del método, se tendrá un motor de prueba cuya posición angular será totalmente medible, se le aplicará el método propuesto aquí para estimar sus constantes ( $K_1$  y  $K_2$ ) y finalmente se esperará que estas sean muy similares, por lo menos, para motores de la misma fabricación.

Por lo que respecta al signo de las constantes  $K_1$  y  $K_2$ , se presentan varias curiosidades debido a la naturaleza no lineal de (3.5). Recordemos que (3.5) tiene su génesis de la apreciación de las señales mostradas en Figura 3.1, misma que aproximamos a una tangencial con dos parámetros de amplitudes desconocidas. Tales parámetros pueden generar dos casos con las cuatro posibles combinaciones de sus signos. El primer caso, que se ilustra en la siguiente figura, se suscita cuando  $K_1$  tiene signo contrario al de  $K_2$ .



**Figura 3.2:**  $G_{a/bc}$  vs  $\theta$  para  $K_1 > 0$  y  $K_2 < 0$ , ó  $K_1 < 0$  y  $K_2 > 0$ . En azul para motores senoidales, en rojo para trapezoidales

Para fines prácticos, nunca se persigue la obtención de lo mostrado en Figura 3.2, dado que el caso que ilustra sólo complica la estimación paramétrica. Con facilidad se puede rehuir a este caso tipificando previamente el motor a utilizar.

Una vez descartada la posibilidad de que  $K_1$  y  $K_2$  tengan signos contrarios, podemos resumir el problema a la existencia de otras dos posibles combinaciones de signos. El caso que se genera cuando  $K_1$  y  $K_2$  tienen el mismo signo, desemboca en la generación de señal mostrada en la Figura 3.1, donde estrictamente, nunca será posible saber si el signo de ambos parámetros es positivo, o es negativo. Tal problemática se soluciona considerando que los signos son positivos, que para los fines planteados del estimador, no representa problema alguno.

En otras palabras, si al idear un mecanismo adaptable se obtiene una estimación cuyos valores son negativos, por simplicidad se considera que los valores obtenidos son siempre positivos.

### 3.3.1. Identificación paramétrica con leyes de adaptación tipo Proporcional-Integral

Planteado en [8], se trata de un mecanismo adaptable de estimación paramétrica, que es aplicado para hallar las constantes de un modelo dedicado a la trata del mal de Parkinson. De forma homóloga, lo propuesto en [8] se reduce a un modelo parecido a (3.5), siendo un caso particular el que se trata aquí.

Al igual que lo enunciado en este trabajo, en [8] también se considera medible  $\theta$  y se espera que  $K_1$  y  $K_2$  sean parecidos en sistemas de la misma producción; esta es la razón principal por la cual se puede utilizar de forma exacta el estimador descrito en [8], que para fines ilustrativos, se muestra su desarrollo de forma somera.

En [8], el desarrollo del estimador adaptable comienza con la imitación del sistema reducido

$$\hat{\theta} = \hat{K}_1 \tan^{-1}(\hat{K}_2 u) \quad (3.6)$$

Donde:

$\hat{\theta}$	Valor estimado de la posición angular
$\hat{K}_1$	Valor estimado de $K_1$
$\hat{K}_2$	Valor estimado de $K_2$

Posteriormente se plantea un error de seguimiento, que es medible en cualquier instante.

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$$

Mismo error que se replantea como a continuación:

$$\dot{\tilde{\theta}} + (\lambda + 1)\tilde{\theta} = 0 \quad \forall \quad \lambda > 0 \quad (3.7)$$

Donde:

$\tilde{\theta}$	Error de estimación de $\theta$
$\lambda$	Primera constante de sintonización

La razón por la cual se replantea el error de seguimiento  $\tilde{\theta}$ , denotado a través de (3.7), como un sistema de primer orden, es porque (3.5) y (3.6) carecen de dinámica alguna; llegado el momento de la proposición de una función de Lyapunov, y de la obtención de la derivada de la misma, será evidente la necesidad de existencia de dinámica. Por lo pronto, a continuación se muestran las implicaciones de (3.7).

$$\begin{aligned}\hat{\theta} - \theta &\rightarrow 0 & \therefore \\ \dot{\tilde{\theta}} + \lambda\tilde{\theta} &\rightarrow 0 & \therefore \\ \tilde{\theta} &\rightarrow \tilde{\theta}(t=0)e^{-\lambda t} & \therefore \\ \tilde{\theta} &\rightarrow 0\end{aligned}$$

Por lo que respecta a los errores de estimación de los parámetros  $K_1$  y  $K_2$ , se proponen lineales y estáticos para ambos casos.

$$\tilde{K}_1 = \hat{K}_1 - K_1 \quad (3.8)$$

$$\tilde{K}_2 = \hat{K}_2 - K_2 \quad (3.9)$$

Es evidente que si  $\tilde{K}_n \rightarrow 0$ , eso conlleva que  $\hat{K}_n \rightarrow K_n$ .

Finalmente, el desarrollo propone leyes adaptables con un patrón proporcional-integral para la estimación de los parámetros, dichas leyes son las siguientes:

$$\hat{K}_1 = -\gamma \tan^{-1}(\hat{K}_2 u) \tilde{\theta} - \lambda \gamma \int_{t_0}^t \tan^{-1}(\hat{K}_2 u) \tilde{\theta} dt \quad \forall \quad \gamma > 0 \quad (3.10)$$

$$\hat{K}_2 = -\gamma \tilde{\theta} u - \lambda \gamma \int_{t_0}^t u \tilde{\theta} dt \quad \forall \quad \gamma > 0 \quad (3.11)$$

Donde:

$\gamma$  Segunda constante de sintonización

En lo concerniente a la prueba de estabilidad, en [8] se propone una función de Lyapunov que persigue la tendencia asintótica a cero de los errores (3.7), (3.8) y (3.9).

$$V = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{K}_1^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{K}_2^2 \quad (3.12)$$

Según lo reportado en [8], al derivar (3.12) se obtiene lo siguiente:

$$\dot{V} \leq -\left[\frac{\lambda}{\gamma} - \epsilon_1 - \epsilon_2\right]\tilde{\theta}^2 - \left[1 - \epsilon_3 - \frac{1}{4\epsilon_1\gamma^2}\right](u\tilde{K}_1)^2 - \left[\alpha\delta - \frac{(\alpha L_f)^2}{4\epsilon_2\gamma^2} - \frac{1}{4\epsilon_3}\right](u\tilde{K}_2)^2 \quad (3.13)$$

Donde  $L_f$  es la constante de Lipschitz que se genera del acotamiento del producto entre  $\tilde{\theta}$  y  $[\tan^{-1}(\hat{K}_2u) - \tan^{-1}(K_2u)]$ .

$$|\tilde{\theta}[\tan^{-1}(\hat{K}_2u) - \tan^{-1}(K_2u)]| = |\tilde{\theta}||\tan^{-1}(\hat{K}_2u) - \tan^{-1}(K_2u)| \leq L_f|\tilde{\theta}\tilde{K}_2u|$$

Con los que respecta a  $\delta$ , se trata de una constante positiva, tal que para  $|\tilde{K}_2u| < \epsilon_\delta$  se cumple que  $\epsilon_\delta > 0$ .

$$u\tilde{K}_2[\tan^{-1}(\hat{K}_2u) - \tan^{-1}(K_2u)] \geq \delta(u\tilde{K}_2)^2$$

Además, se tiene que  $\alpha$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  son reales positivos, que cumplen las siguientes condiciones.

$$\lambda/\gamma > \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$1 - 1/(4\epsilon_1\gamma^2) > \epsilon_3$$

$$\alpha\delta > -(\alpha L_f)^2/(4\epsilon_2\gamma^2) - 1/(4\epsilon_3)$$

Como resultado final de [8], se obtiene que  $\dot{V} \leq 0$ , siempre y cuando se cumpla que  $|\tilde{K}_2u| < \epsilon_\delta$ . A pesar de ser un resultado restringido, si se sintonizan adecuadamente los valores de  $\gamma$  y  $\lambda$ , se puede asegurar que  $|\tilde{K}_2u|$  se mantendrá en una vecindad de radio  $\epsilon_\delta$ .

Para finalizar con la mención de este trabajo, en este nunca se hace alusión de los problemas que conllevan los cruces de  $u$  por cero. Para fines ilustrativos, se muestra a continuación las implicaciones de tales cruces.

Considere todo los instantes en los cuales  $\tilde{\theta} \rightarrow 0 \quad \therefore$

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &\rightarrow \theta && \therefore \\ \tilde{K}_1 \tan^{-1}(\tilde{K}_2 u) &\rightarrow K_1 \tan^{-1}(K_2 u) && \therefore \end{aligned}$$

Como es visible, si  $u \rightarrow 0$  implica que  $\tilde{\theta} \rightarrow 0$ , pero no se asegura que  $\hat{K}_1 \rightarrow K_1$  y  $\hat{K}_2 \rightarrow K_2$ . Esta misma idea se corrobora en (3.13), donde  $\dot{V}$  deja de ser negativa definida en el momento en que  $u$  cruza por cero. Para evitar la dependencia de  $u$ , a lo largo de cualquier desarrollo, sería necesario replantear (3.7), situación que implicaría un cambio total de todo lo expuesto.

Tomando como referencia el trabajo en [8], considerando todas sus limitaciones y los pasos omitidos en el mismo, a continuación se presenta una versión con leyes de adaptación más simples, cuyo entendimiento es más detallado y que tiene un mejor resultado en algunos casos.

### 3.3.2. Identificación paramétrica con leyes de adaptación tipo Integral con un grado de libertad

Se construyó bajo la limitación que considera a  $\theta$  medible, por lo que también se trata de un mecanismo de adaptación que sólo se remite a la estimación de los parámetros  $K_1$  y  $K_2$ . Por lo que respecta al problema omitido en [8], se considera posible la construcción de una  $u$  acotada, y por simplicidad, siempre positiva, lo que evita los cruces por cero.

Una de las diferencias más grandes con lo propuesto en [8] consiste en la posibilidad de contar con un grado de libertad en una de las leyes de adaptación. El grado de libertad, que denotaremos como la función  $g$ , puede ser una función cualquiera, siempre y cuando se encuentre acotada en cualquier momento, es decir:

$$-g_0 < g < g_0 \quad \forall \quad g_0 > 0 \quad (3.14)$$

En cuanto a los errores de seguimiento y estimación paramétrica, son exactamente los mismos a los denotados en (3.7), (3.8) y (3.9). Previamente se había explicado la razón por la cual (3.7) se propone como un error dinámico lineal.

Por lo que respecta a las leyes de adaptación, las mostradas en este método resultan ser parecidas a (3.10) y (3.11), con la diferencia que carecen de parte proporcional y de la primera constante de proporcionalidad  $\lambda$ , además, en una de ellas  $u$  es reemplazada por el grado de libertad  $g$ .

$$\hat{K}_1 = -\gamma \int_{t_0}^t \tan^{-1}(\hat{K}_2 u) \tilde{\theta} dt \quad \forall \quad \gamma > 0 \quad (3.15)$$

$$\hat{K}_2 = -\gamma \int_{t_0}^t g \tilde{\theta} dt \quad \forall \quad \gamma > 0 \quad (3.16)$$

Donde:

$\gamma$  Segunda constante de sintonización

Considerando que esta es la parte medular del trabajo, a continuación se ofrece una prueba detallada de estabilidad y de las restricciones que surgieron a lo largo de su construcción. Como en [8], se propone una función de Lyapunov positiva definida, donde se persigue involucrar a los errores (3.7), (3.8) y (3.9).

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2\gamma} \tilde{K}_1^2 + \frac{2}{\gamma\pi} \left[ \tilde{K}_2 \tan^{-1}(\tilde{K}_2) - \frac{1}{2} \ln(\tilde{K}_2^2 + 1) \right] \quad (3.17)$$

Por supuesto que resulta poco ortodoxo el uso del mapeo planteado para  $\tilde{K}_2$ , sin embargo, se trata de una función suave, cuya derivada existe para cualquier valor de  $\tilde{K}_2$ , y lo más importante, no impide que  $V$  deje de ser positiva definida.

Al derivar (3.16), se obtiene que:

$$\dot{V} = \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} + \frac{1}{\gamma} \tilde{K}_1 \dot{\tilde{K}}_1 + \frac{2}{\gamma\pi} \tilde{K}_2 \dot{\tilde{K}}_2 \tan^{-1}(\tilde{K}_2) \quad (3.18)$$

Considerando su estructura simple, el resultado de derivar los errores (3.8) y (3.9), respecto al tiempo, nos facilita la obtención de  $\dot{\tilde{K}}_1$  y  $\dot{\tilde{K}}_2$ .

$$\dot{\tilde{K}}_1 = \dot{\hat{K}}_1 \quad (3.19)$$

$$\dot{\tilde{K}}_2 = \dot{\hat{K}}_2 \quad (3.20)$$

Como se mencionó, la razón principal de proponer un error dinámico en (3.7) corresponde al hecho que la función  $\dot{V}$  requiere de su existencia. Despejando  $\dot{\tilde{\theta}}$  de (3.7)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}} &= -\lambda\tilde{\theta} + \hat{K}_1 \tan^{-1}(\hat{K}_2 u) - K_1 \tan^{-1}(K_2 u) \\ \dot{\tilde{\theta}} &= -\lambda\tilde{\theta} + \tilde{K}_1 \tan^{-1}(\hat{K}_2 u) + K_1 [\tan^{-1}(\hat{K}_2 u) - \tan^{-1}(K_2 u)] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sustituyendo (3.18), (3.19) y (3.20) en (3.21)

$$\dot{V} = -\lambda\tilde{\theta}^2 + K_1 \tilde{\theta} [\tan^{-1}(\hat{K}_2 u) - \tan^{-1}(K_2 u)] - \frac{2}{\pi} g \tilde{\theta} \tan^{-1}(\tilde{K}_2) \quad (3.22)$$

De lo más remarcable sobre (3.22) es el hecho que se pierde dependencia de  $\tilde{K}_1$ , lo que evita la posibilidad de demostrar directamente que dicho error tiende a cero asintóticamente; posteriormente se puede demostrar su tendencia a cero utilizando un criterio de derivación. Prosiguiendo con el tratamiento algebraico de  $\dot{V}$ , podemos acotar a (3.22) mediante normas, mismas que nos ofrecen el valor máximo que alcanza.

$$\dot{V} = -\lambda\tilde{\theta}^2 + K_1 \tilde{\theta} [\tan^{-1}(\hat{K}_2 u) - \tan^{-1}(K_2 u)] - \frac{2}{\pi} g \tilde{\theta} \tan^{-1}(\tilde{K}_2)$$

Considerando que  $a_1 + a_2 - a_3 \leq a_1 + |a_2| + |a_3|$

$$\dot{V} \leq -\lambda\tilde{\theta}^2 + |K_1 \tilde{\theta} [\tan^{-1}(\hat{K}_2 u) - \tan^{-1}(K_2 u)]| + \left| \frac{2}{\pi} g \tilde{\theta} \tan^{-1}(\tilde{K}_2) \right|$$

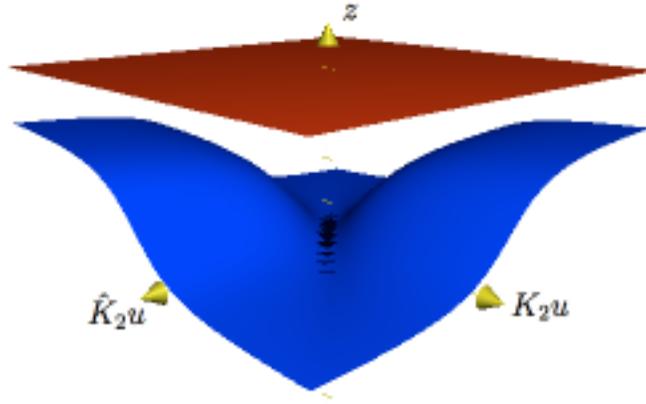
Considerando que  $|a_1 a_2 a_3 \dots a_n| = |a_1| |a_2| |a_3| \dots |a_n|$

$$\dot{V} \leq -\lambda\tilde{\theta}^2 + |K_1| |\tilde{\theta}| |\tan^{-1}(\hat{K}_2 u) - \tan^{-1}(K_2 u)| + \frac{2}{\pi} |g| |\tilde{\theta}| |\tan^{-1}(\tilde{K}_2)| \quad (3.23)$$

Dado que  $f = \tan^{-1}(\cdot)$  es Lipschitz global, se cumple que  $|\tan^{-1}(\hat{K}_2 u) - \tan^{-1}(K_2 u)| \leq L_f |\tilde{K}_2 u|$ , sin embargo, este acotamiento no beneficia en nada a la prueba de estabilidad debido a que no hay término en  $\dot{V}$  capaz de contrarrestar a  $|K_2 u|$ . En su lugar, se prefirió el uso del siguiente acotamiento:

$$|\tan^{-1}(\hat{K}_2 u) - \tan^{-1}(K_2 u)| \leq \pi \quad (3.24)$$

La certeza de la desigualdad (3.24) es más visible en la siguiente gráfica.

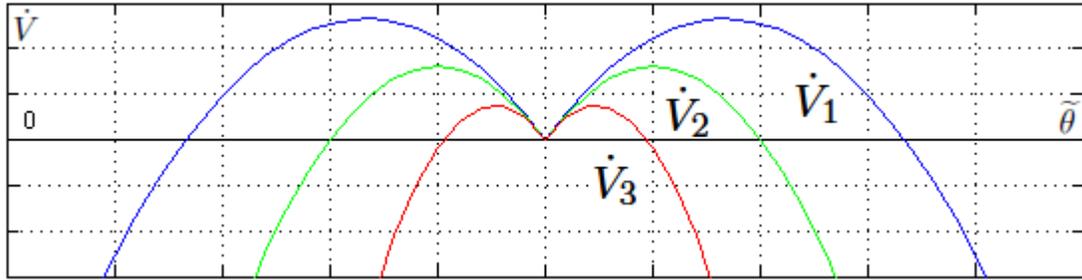


**Figura 3.3:**  $z_1 = \pi$  (En Rojo),  $z_2 = |\tan^{-1}(\hat{K}_2 u) - \tan^{-1}(K_2 u)|$  (En Azul)

Acotando a (3.23) con (3.24) y (3.14), considerando además que  $|\tan^{-1}(\tilde{K}_2)| \leq \frac{\pi}{2}$ , se obtiene una nueva capa superior que acota a  $\dot{V}$

$$\dot{V} \leq -\lambda \tilde{\theta}^2 + |K_1| |\tilde{\theta}| \pi + g_o |\tilde{\theta}| = -\lambda \tilde{\theta}^2 + (|K_1| \pi + g_o) |\tilde{\theta}| \quad (3.25)$$

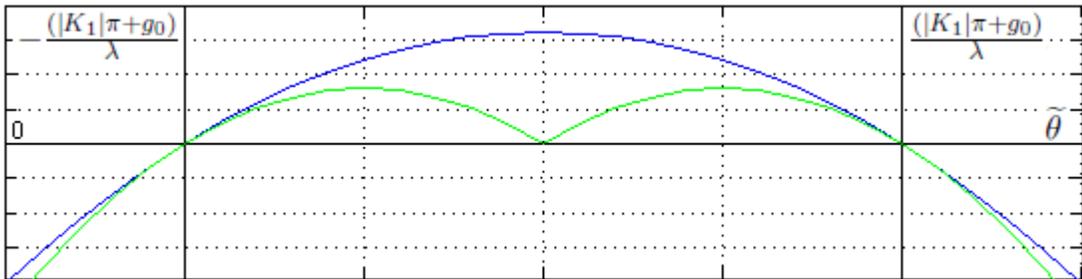
Hasta el momento se ha obtenido un acotamiento que sólo es dependiente de  $\tilde{\theta}$ , por lo que ya no se puede asegurar que los errores  $\tilde{K}_1$  y  $\tilde{K}_2$  tienden a cero asintóticamente. La siguiente gráfica nos muestra el efecto que tiene  $\lambda$  al incrementarse.



**Figura 3.4:**  $\dot{V}(\lambda_i)$  vs  $\tilde{\theta}$  para diferentes valores de  $\lambda_i \quad \forall \quad \lambda_{i-1} < \lambda_i$

Como se aprecia en la Figura 3.4, no existe valor alguno de  $\lambda$  que sea capaz de mantener a  $\dot{V}$  por debajo de cero, sin embargo, asignando un valor grande de  $\lambda$  provocamos que la parte positiva de la capa (3.25) sea parecida a cero.

A modo de encontrar una vecindad donde el error  $\tilde{\theta}$  tiene su trayectoria, se propone otro acotamiento que se advierte en la siguiente gráfica.



**Figura 3.5:**  $\dot{V}_x = -\lambda\tilde{\theta}^2 + (|K_1|\pi + g_0)|\tilde{\theta}|$  (En Verde),  $\dot{V}_s = -\frac{\lambda}{2}\tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2\lambda}(|K_1|\pi + g_0)^2$  (En Azul)

El fenómeno que más resalta en la Figura 3.5 se suscita en el umbral donde las copas de  $V_x$  y  $V_s$  cambian de signo. De forma empírica pareciese que la trayectoria del error  $\tilde{\theta}$  se encuentra contenido entre  $-\frac{(|K_1|\pi+g_0)}{\lambda}$  y  $\frac{(|K_1|\pi+g_0)}{\lambda}$ . Considerando que  $\dot{V} \leq \dot{V}_x$  y que  $\dot{V}_x \leq \dot{V}_s$ , se tiene lo siguiente:

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda}{2}\tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2\lambda}(|K_1|\pi + g_0)^2 \quad (3.26)$$

Considérese el peor de los casos para  $\dot{V}$ , mismo que tiene lugar cuando  $\dot{V} = \dot{V}_s$ ; entonces, para fines de obtener un resultado simplificado considérese también el peor caso de  $V$ , que consiste en que siga una trayectoria positiva semidefinida, que es sólo dependiente de  $\tilde{\theta}$ , es decir:

$$0 \leq V_l = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 \leq \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{K}_1^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{K}_2^2 = V \quad (3.27)$$

Siendo (3.26) y (3.27) el peor caso para  $\dot{V}$  y  $V$ , se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales que representan, y así obtener el valor al que tiende  $\tilde{\theta}$

$$\tilde{\theta}_s^2 = \frac{(|K_1|\pi + g_0)^2}{\lambda^2} - \frac{(|K_1|\pi + g_0)^2}{\lambda^2}e^{-\lambda t} + [\tilde{\theta}_s(t=0)]^2 e^{-\lambda t} \quad (3.28)$$

Donde:

$\tilde{\theta}_s$	$\tilde{\theta}$ en el peor caso de $\dot{V}$ y $V$
$t$	Tiempo en el que transcurre el experimento

Al aplicar  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_s$  se obtiene un resultado doble.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_s = \tilde{\theta}_{sss} = \pm \frac{(|K_1|\pi + g_0)}{\lambda} \quad (3.29)$$

Donde:

$\tilde{\theta}_{sss}$	Valor en estado estacionario de $\tilde{\theta}_s$
------------------------	--

En (3.29) se corrobora lo que se supuso empíricamente al observar a la Figura 3.5; en efecto, la norma del error  $\tilde{\theta}$  se encuentra acotada por  $\frac{(|K_1|\pi + g_0)}{\lambda}$ . Considerando que  $\lambda$  es una constante cuyo valor se puede proponer a conveniencia, podemos asegurar, de forma práctica, que la trayectoria de  $\tilde{\theta}$  tenderá a un valor cercano a cero.

Reconociendo el hecho que  $\tilde{\theta}$  tiende a un valor cercano a cero, se procede a analizar las implicaciones que se generan. En primer lugar, cuando  $t \rightarrow \infty$  implica de forma práctica que  $\tilde{\theta} \rightarrow 0$ , lo que implica que la expresión (3.5) se iguale a (3.6).

$$K_1 \tan^{-1}(K_2 u) = \hat{K}_1 \tan^{-1}(\hat{K}_2 u) \quad (3.30)$$

Debido a la naturaleza no lineal de (3.30), a través de la misma es imposible deducir que los valores estimados  $\hat{K}_1$  y  $\hat{K}_2$  se acercan a  $K_1$  y  $K_2$  correspondientemente. La forma por la cual se deduce la proximidad de los estimados a los valores deseados es a través de la derivación reiterada de (3.30); lo que se desea obtener es, al menos, otra ecuación y de esa forma generar un sistema de ecuaciones con (3.30).

Ahora que se reconoce que  $\tilde{\theta}$  es cercano a cero, se infiere que (3.19) y (3.20) también tienden de forma asintótica a un valor cercano a cero. Siendo así, se deriva una vez (3.30), y así, cuando aparezcan las derivadas de  $\hat{K}_1$  y  $\hat{K}_2$  se igualarán a cero.

$$\frac{K_1 K_2 \dot{u}}{1 + (K_2 u)^2} = \frac{\hat{K}_1 [\dot{\hat{K}}_2 u + \hat{K}_2 \dot{u}]}{1 + (\hat{K}_2 u)^2}$$

Considerando que (3.19) y (3.20) tienden a un valor cercano a cero

$$\frac{K_1 K_2}{1 + (K_2 u)^2} = \frac{\hat{K}_1 \hat{K}_2}{1 + (\hat{K}_2 u)^2}$$

$$K_1 K_2 + K_1 K_2 (\hat{K}_2 u)^2 = \hat{K}_1 \hat{K}_2 + \hat{K}_1 \hat{K}_2 (K_2 u)^2 \quad (3.31)$$

Derivando a (3.31)

$$2K_1 K_2 (\hat{K}_2 u) [\dot{\hat{K}}_2 u + \hat{K}_2 \dot{u}] = [\dot{\hat{K}}_1 \hat{K}_2 + \hat{K}_1 \dot{\hat{K}}_2] + 2\hat{K}_1 \hat{K}_2 (K_2 u) [K_2 \dot{u}] + [\dot{\hat{K}}_1 \hat{K}_2 + \hat{K}_1 \dot{\hat{K}}_2] (K_2 u)^2$$

Considerando que (3.19) y (3.20) tienden a un valor cercano a cero

$$K_1 K_2 (\hat{K}_2)^2 = \hat{K}_1 \hat{K}_2 (K_2)^2$$

Simplificando

$$K_1 \hat{K}_2 = K_2 \hat{K}_1 \quad (3.32)$$

Ahora que se tienen dos ecuaciones, se sustituye (3.32) en (3.30), de esa forma se obtienen una ecuación que sólo involucra a la constante  $K_2$  y a su propio valor estimado  $\hat{K}_2$ .

$$K_2 \tan^{-1}(K_2 u) = \hat{K}_2 \tan^{-1}(\hat{K}_2 u) \quad (3.33)$$

Análogo al proceso de obtención de (3.31), se deriva a (3.33).

$$\frac{(K_2^2 \dot{u})}{1 + (K_2 u)^2} = \dot{\hat{K}}_2 \tan^{-1}(\hat{K}_2 u) + \frac{\hat{K}_2 (\dot{\hat{K}}_2 u + \dot{u} \hat{K}_2)}{1 + (\hat{K}_2 u)^2}$$

Considerando que (3.19) y (3.20) tienden a un valor cercano a cero

$$\frac{K_2^2}{1 + (K_2 u)^2} = \frac{\hat{K}_2^2}{1 + (\hat{K}_2 u)^2}$$

Simplificando

$$K_2^2 = \hat{K}_2^2 \quad (3.34)$$

La primera situación que salta a la vista de (3.34), es el hecho que  $\hat{K}_2$  se aproximará de forma asintótica a  $-K_2$  o  $K_2$ . No se puede asegurar con certeza el signo correcto del parámetro, sin embargo, como previamente habíamos descrito, en general conocerlo resulta imposible, por lo que se optó por siempre considerarlo como un valor positivo. Sustituyendo (3.34) en (3.30) se obtiene que:

Primer caso:  $-K_2 = \hat{K}_2$

$$K_1 \tan^{-1}(K_2 u) = \hat{K}_1 \tan^{-1}(-K_2 u)$$

$$K_1 \tan^{-1}(K_2 u) = -\hat{K}_1 \tan^{-1}(K_2 u)$$

$$-K_1 = \hat{K}_1 \quad (3.35)$$

Segundo caso:  $K_2 = \hat{K}_2$

$$\begin{aligned}
 K_1 \tan^{-1}(K_2 u) &= \hat{K}_1 \tan^{-1}(K_2 u) \\
 K_1 &= \hat{K}_1
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Por lo que se infiere que el estimado  $\hat{K}_1$  siempre tiene el mismo signo que  $\hat{K}_2$ , y por simplicidad, siempre se considera que estos valores son positivos, a pesar de que el mecanismo de adaptación los obtenga con signo negativo.

En resumen, se desarrollo un método con las siguientes restricciones y características:

- Dado que  $\tilde{\theta}$  es cero cuando  $u = 0$ , y eso no implica que  $\tilde{K}_2$  y  $\tilde{K}_1$  también sean cero, siempre se propone una  $u$  que no cruce por cero
- No se puede asegurar que  $\tilde{\theta}$  tiende a cero de forma estricta, sin embargo, se sugiere la proposición de  $\lambda$  como un valor muy grande, y de esa forma contener a  $\tilde{\theta}$  en una banda cercana a cero. Incrementese el valor de  $\lambda$  hasta que el resultado sea satisfactorio
- El método puede obtener un estimado positivo o negativo de los valores reales de  $K_1$  y  $K_2$ , sin embargo, como se explicó, es secundario el conocimiento del signo de los mismo. Por simplicidad, siempre son positivos

## Capítulo 4

# Resultados

En esta parte terminal del trabajo se reportan las simulaciones finales que se hicieron con los dos mecanismos de adaptación mencionados, siendo el primero de ellos un trabajo reportado y probado, mientras que el segundo resulta ser la parte medular de toda la tesis.

Como se mencionó, considerando que el control habitual para este tipo de motores es una señal de corriente directa conmutada para cada embobinado del estator, resulta fútil el hecho de considerar que es medible la derivada de la corriente eléctrica del sistema. Desafortunadamente, como es visible en (3.4), es necesario implementar un método capaz de estimar la derivada de la corriente eléctrica de cada fase.

Previo a la entrega de los resultados obtenidos, se desarrolla el método propuesto para la estimación de la corriente eléctrica de cada una de las fases del sistema. Mismo método que sólo se utilizó en el caso del segundo mecanismo de adaptación, debido a la pobre funcionalidad que presenta al usarlo en el primer mecanismo de adaptación (Los resultados evidencian dicho comportamiento).

### **4.1. Aproximación de la Derivada de la Corriente Eléctrica, por Fase, del Sistema**

Considere que este trabajo está diseñado para aplicaciones donde se espera que el motor alcance velocidades cercanas a cero, siendo así, también considere, de forma general, que el

parámetro asociado al flujo magnético  $K_e$ , debido a los imanes permanentes alojados en el rotor, es una constante muy pequeña.

Sentadas ambas consideraciones, el efecto aunado de tales consideraciones produce un cambio provechoso en las ecuaciones (1.10), (1.11) y (1.12), mismo cambio que sólo sera útil para fines de esta aproximación.

$$V_a \approx R_s i_a + L_s \dot{i}_a \quad (4.1)$$

$$V_b \approx R_s i_b + L_s \dot{i}_b \quad (4.2)$$

$$V_c \approx R_s i_c + L_s \dot{i}_c \quad (4.3)$$

Evidentemente en (4.1), (4.2) y (4.3) se obtiene un aproximado directo de  $\dot{i}_a$ ,  $\dot{i}_b$  e  $\dot{i}_c$ , sin embargo, regularmente se opta por el uso de filtros, mismos que ofrecen señales suaves ante las posibles discontinuidades de sus entradas. Al transformar (4.1), (4.2) y (4.3), mediante la transformada de Laplace, podemos obtener la corriente eléctrica de cada fase como un aproximado del filtrado del voltaje de entrada para cada fase, es decir:

$$i_a \approx \left[ \frac{1}{R_s + L_s s} \right] V_a \quad (4.4)$$

$$i_b \approx \left[ \frac{1}{R_s + L_s s} \right] V_b \quad (4.5)$$

$$i_c \approx \left[ \frac{1}{R_s + L_s s} \right] V_c \quad (4.6)$$

En aras de encontrar un aproximado de las derivadas, se incorpora la variable de Laplace al numerador del filtro.

$$\dot{i}_a \approx \left[ \frac{s}{R_s + L_s s} \right] V_a \quad (4.7)$$

$$\dot{i}_b \approx \left[ \frac{s}{R_s + L_s s} \right] V_b \quad (4.8)$$

$$\dot{i}_c \approx \left[ \frac{s}{R_s + L_s s} \right] V_c \quad (4.9)$$

Finalmente, se sustituyen (4.7), (4.8) y (4.9) en (3.4) para obtener un aproximado de  $u$

$$u \approx \frac{\left[ \frac{1}{R_s + L_s s} \right] V_a - i_a}{\left[ \frac{1}{R_s + L_s s} \right] (V_b - V_c) - (i_b - i_c)} \quad (4.10)$$

## 4.2. Resultados del mecanismo de adaptación proporcional-integral

A modo de mostrar los resultados de forma sistemática y simple, se enuncian los valores de los parámetros del sistema.

$R_s = 5 \ \Omega$	Resistencia Eléctrica asociada a cada fase del motor
$L_s = 5x10^{-3} \ H$	Inductancia propia asociada a cada fase del motor
$K_e = 6,2x10^{-3} \ \frac{Vs}{rad}$	Constante asociada al flujo magnético de imanes permanentes
$K_t = 1,9x10^{-4} \ \frac{Nm}{A}$	Constante mecánica asociada al par del rotor
$B = 1,5x10^{-4} \ \frac{VAs^2}{rad}$	Constante de fricción viscosa
$J = 2,5x10^{-5} \ \frac{VAs^3}{rad}$	Posición angular del rotor
$T_L = 0 \ Nm$	Par de carga
$N_p = 2, 3, 4$	Pares de polos magnéticos

En cuanto a las entradas de control, se proponen de tal forma que la velocidad angular del rotor alcanza un valor constante en estado estacionario, dichas entradas de control se encuentran detalladas en [7], donde es necesario el uso de sensores de efecto Hall. A continuación se muestran las trayectorias de las entradas de control, donde se hacen evidentes las discontinuidades de las mismas.

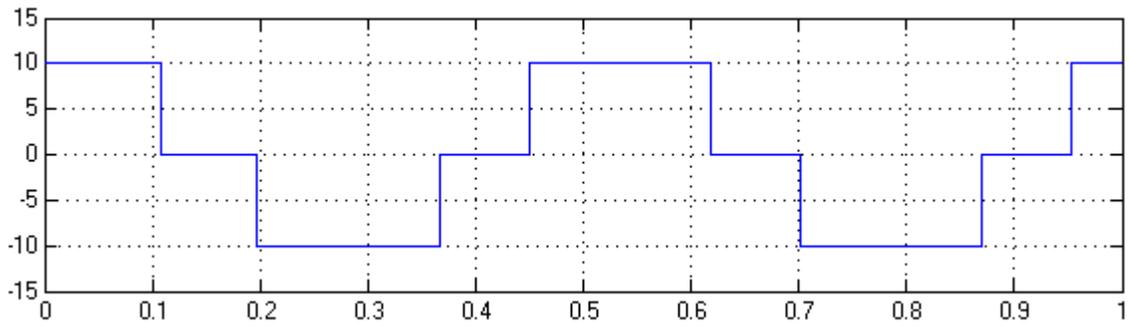


Figura 4.1:  $V_a$  [V] vs  $t$  [s] para el primer mecanismo de adaptación

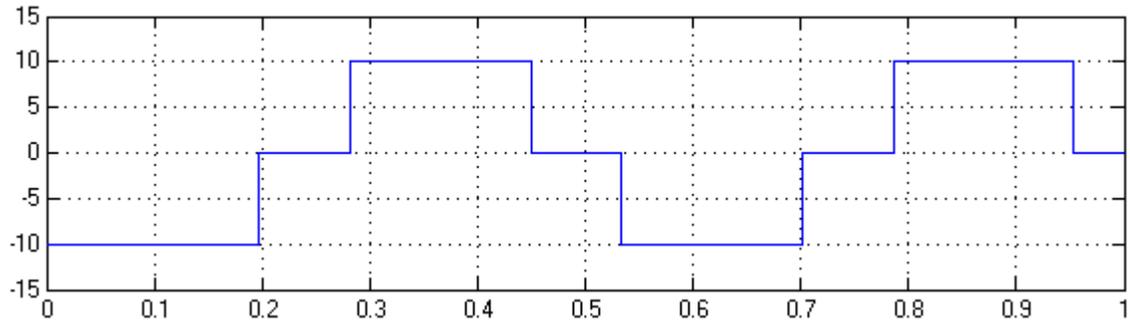


Figura 4.2:  $V_b$  [V] vs  $t$  [s] para el primer mecanismo de adaptación

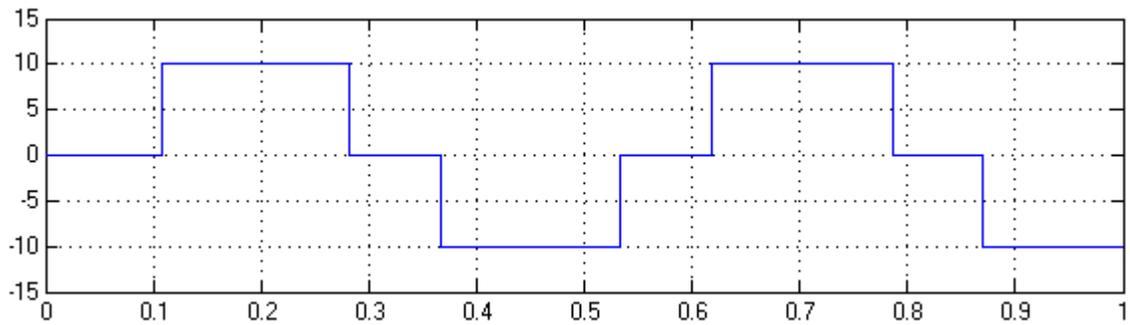


Figura 4.3:  $V_c$  [V] vs  $t$  [s] para el primer mecanismo de adaptación

Por lo que respecta a la trayectoria que describe  $u$ , se prefiere el uso (3.4) sobre el uso de (4.10), debido a que este último produce un ligero retraso, que es producto del uso de un filtro para aproximar las derivadas de las corrientes eléctricas de cada fase. Siendo un caso más restrictivo, la primera ventaja del segundo método sale a relucir, dado que el primer método nos obliga a

tener conocimiento de las derivadas de las corrientes eléctricas de cada fase. A continuación se muestra la forma de  $u$  empleada para el primer mecanismo de adaptación.

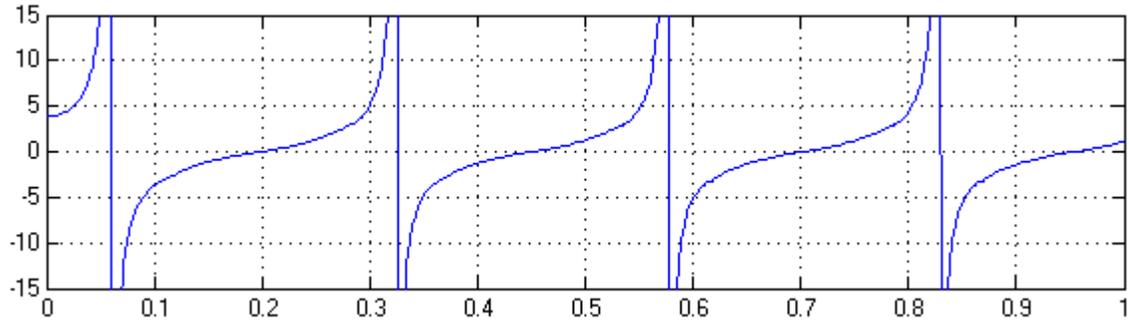


Figura 4.4:  $u$  vs  $t$  [s] considerando  $\dot{i}_a$ ,  $\dot{i}_b$  e  $\dot{i}_c$  medibles

Debido a que el método resultó funcional sólo para motores BLDC con dos pares de polos magnéticos, sólo se presentarán los resultados de dicho caso. En general, para todos los demás resultados, el mecanismo adaptable no funciona cuando el número de pares de polos es mayor a dos.

#### 4.2.1. Resultados de la estimación de los parámetros $K_1$ y $K_2$ para motores BLDC con dos pares de polos magnéticos

Las gráficas a mostrar comprenden los tres resultados más destacables. El primero de ellos es la gráfica del comportamiento de  $\tilde{\theta}$  a lo largo del paso del tiempo.

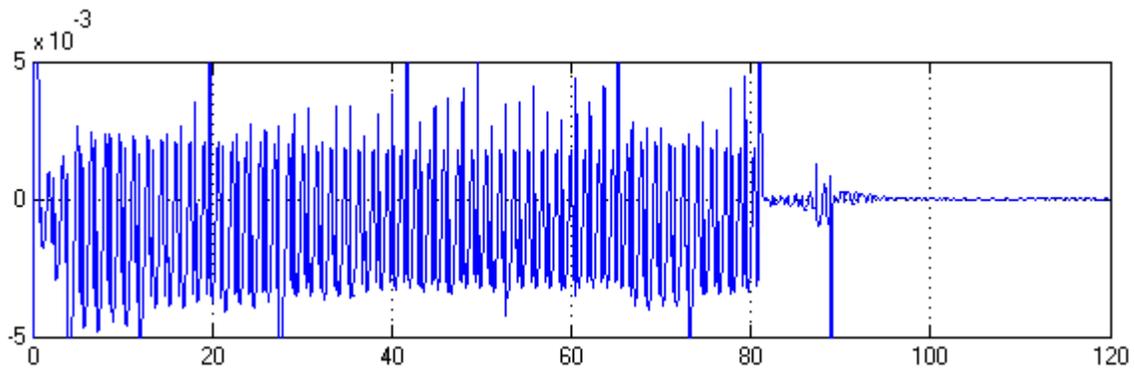


Figura 4.5:  $\tilde{\theta}$  [rad] vs  $t$  [s]

Como es visible, el error  $\tilde{\theta}$  tiende a cero de forma asintótica. A continuación se muestra la trayectoria que describe  $\hat{K}_1$  a lo largo del tiempo.

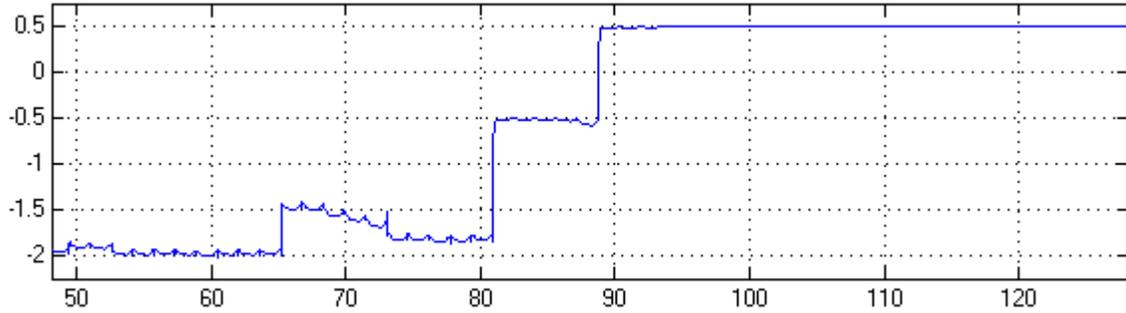


Figura 4.6:  $\hat{K}_1$  vs  $t$  [s]

En estado estacionario, el valor estimado  $\hat{K}_1 = 0,5$ . Prosiguiendo, a continuación se muestra la trayectoria que describe  $\hat{K}_2$  a lo largo del tiempo.

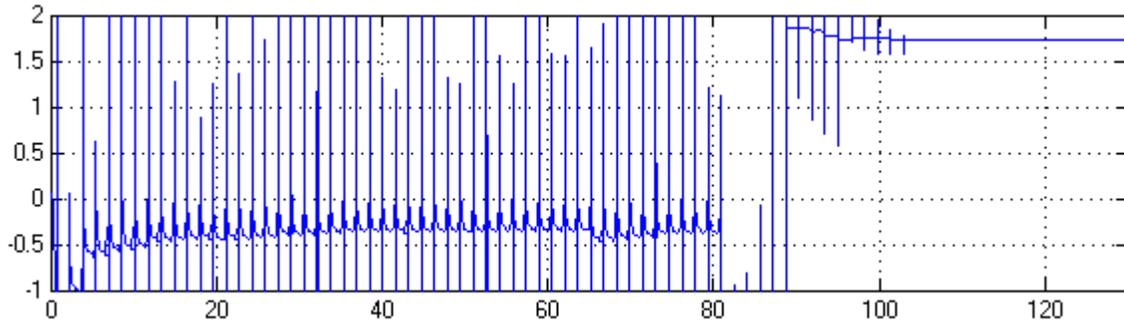


Figura 4.7:  $\hat{K}_2$  vs  $t$  [s]

En estado estacionario, el valor estimado  $\hat{K}_2 \approx 1,7$ . A pesar de la evidente eficacia de este primer mecanismo, es preferible el uso del siguiente a presentar, dado que es funcional para cualquier cantidad de pares de polos que pueda tener el motor.

### 4.3. Resultados del mecanismo de adaptación integral con un grado de libertad

Para esta serie de simulaciones, se emplearon exactamente los mismos parámetros que en el mecanismo anterior. En cuanto a las entradas de control, se proponen de tal forma que  $u$  este acotada por arriba y por abajo (Es de recordar que esta es una de las premisas bajo las cuales se garantiza la operación de este mecanismo de adaptación). Dado que no se tiene una inferencia directa sobre el comportamiento de  $u$ , el mejor escenario encontrado para las trayectorias que describen  $V_a$ ,  $V_b$  y  $V_c$  se muestra en las Figuras 4.8 a 4.10:

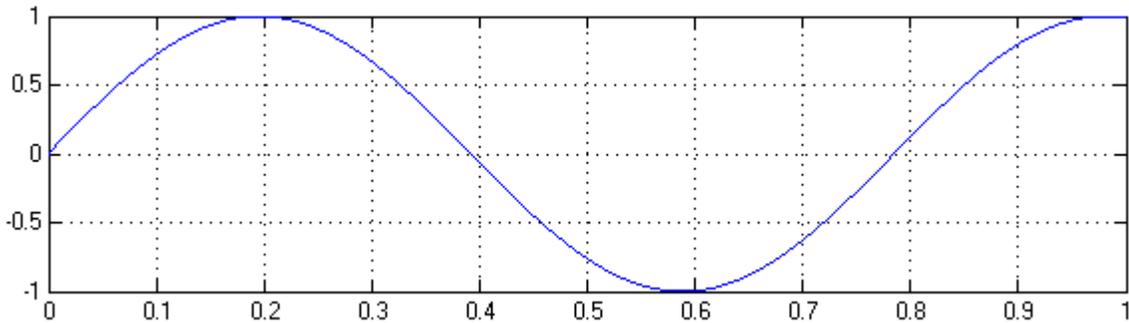


Figura 4.8:  $V_a$  [V] vs  $t$  [s]

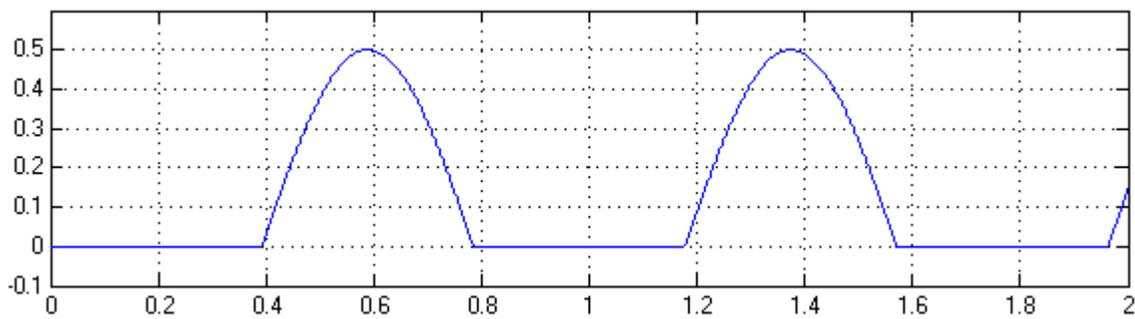


Figura 4.9:  $V_b$  [V] vs  $t$  [s]

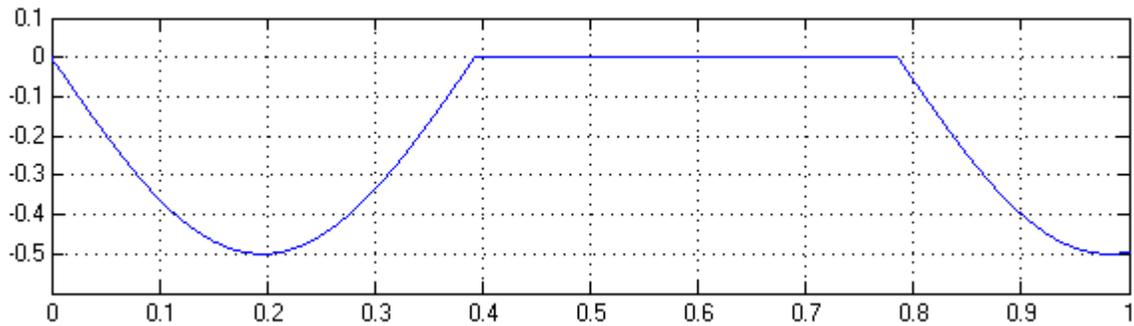


Figura 4.10:  $V_c$  [V] vs  $t$  [s]

El ligero retraso que se produce al aproximar las derivadas de las corrientes eléctricas es tan insignificante que se utiliza a (4.10) para representar la trayectoria de  $u$ . En la Figura 4.11 se muestra la forma de  $u$  empleada para el segundo mecanismo de adaptación.

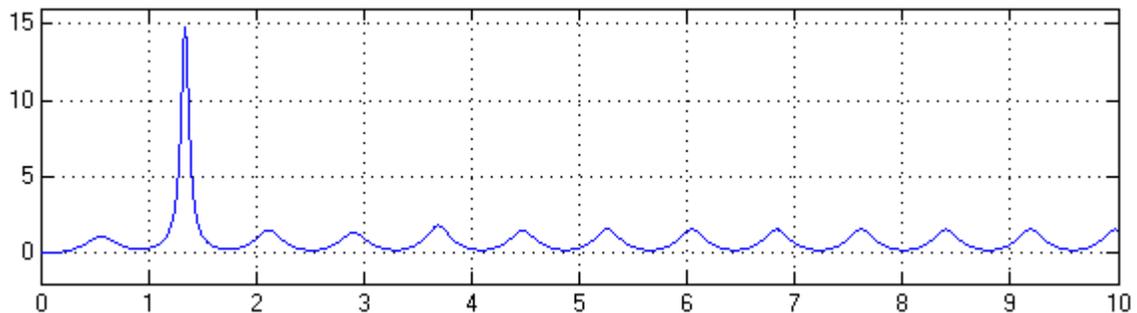


Figura 4.11:  $u$  vs  $t$  [s]

A diferencia del primer mecanismo, este método resultó funcional para motores BLDC con cualquier cantidad de pares de polos magnéticos, por lo que a continuación se presentan los resultados para cada uno de los valores comerciales de pares de polos existentes en motores BLDC.

#### 4.3.1. Resultados de la estimación de los parámetros $K_1$ y $K_2$ para motores BLDC con dos pares de polos magnéticos

Las gráficas a mostrar comprenden los tres resultados más destacables. El primero de ellos es la gráfica del comportamiento de  $\tilde{\theta}$  a lo largo del paso del tiempo.

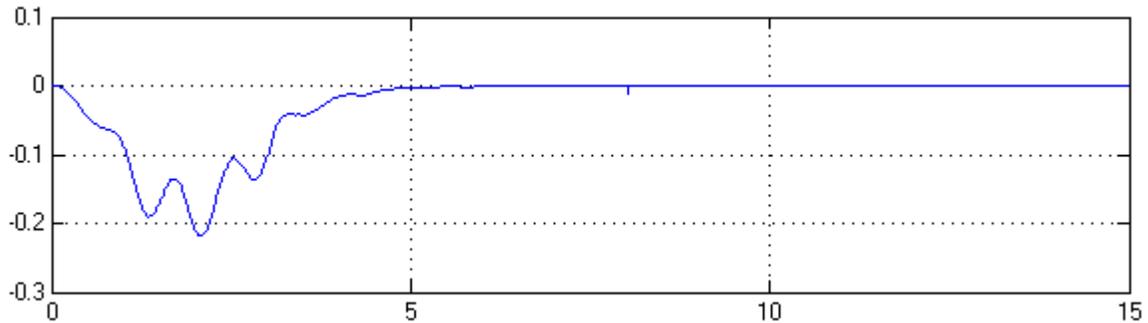


Figura 4.12:  $\tilde{\theta}$  [rad] vs  $t$  [s]

Como es visible, el error  $\tilde{\theta}$  tiende a cero de forma asintótica. A continuación se muestra la trayectoria que describe  $\hat{K}_1$  a lo largo del tiempo.

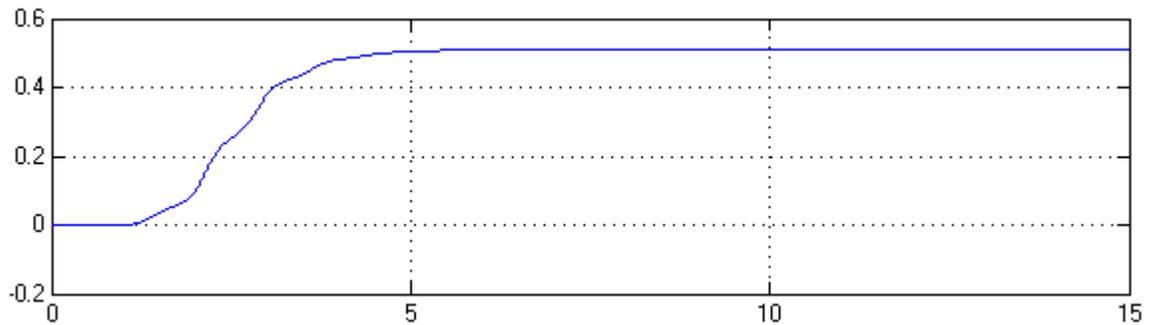


Figura 4.13:  $\hat{K}_1$  vs  $t$  [s]

En estado estacionario, el valor estimado  $\hat{K}_1 \approx 0,51$ . El resultado obtenido es muy parecido al reportado con el método anterior; la razón por la cual no se obtiene el mismo resultado es porque este método no es capaz de garantizar que el error  $\tilde{\theta}$  tiende a cero, sino que tiene su trayectoria final comprendida en una banda muy cercana alrededor de cero. Prosiguiendo, a continuación se muestra la trayectoria que describe  $\hat{K}_2$  a lo largo del tiempo.

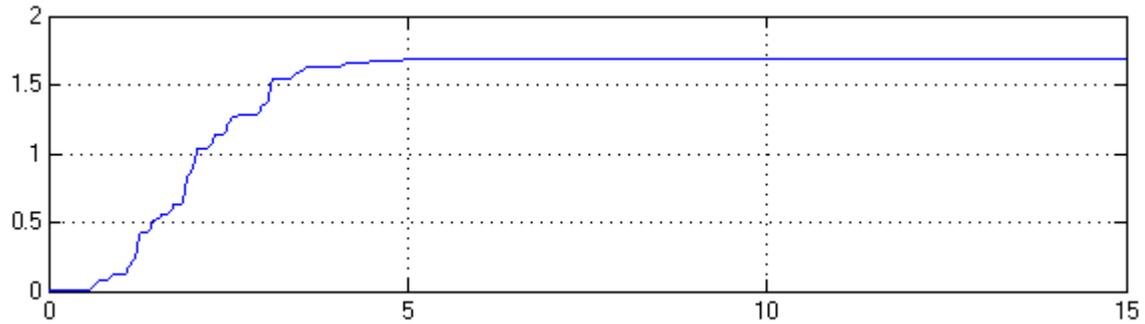


Figura 4.14:  $\hat{K}_2$  vs  $t$  [s]

En estado estacionario, el valor estimado  $\hat{K}_2 \approx 1,693$ . El resultado obtenido es muy parecido al reportado con el método anterior; la razón por la cual no se obtiene el mismo resultado es la misma razón previamente mencionada.

#### 4.3.2. Resultados de la estimación de los parámetros $K_1$ y $K_2$ para motores BLDC con tres pares de polos magnéticos

Como en los casos previos, el primer resultado a mostrar es la gráfica del comportamiento de  $\tilde{\theta}$  a lo largo del paso del tiempo.

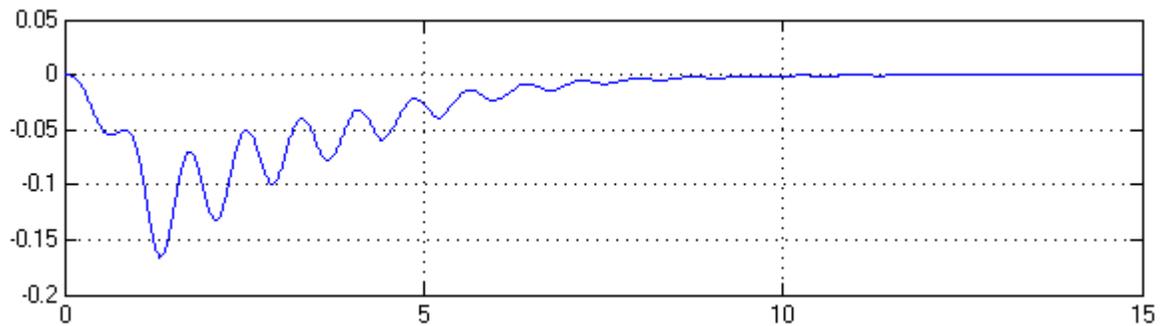


Figura 4.15:  $\tilde{\theta}$  [rad] vs  $t$  [s]

Una vez más, el error  $\tilde{\theta}$  tiende a cero de forma asintótica. A continuación se muestra la trayectoria que describe  $\hat{K}_1$  a lo largo del tiempo.

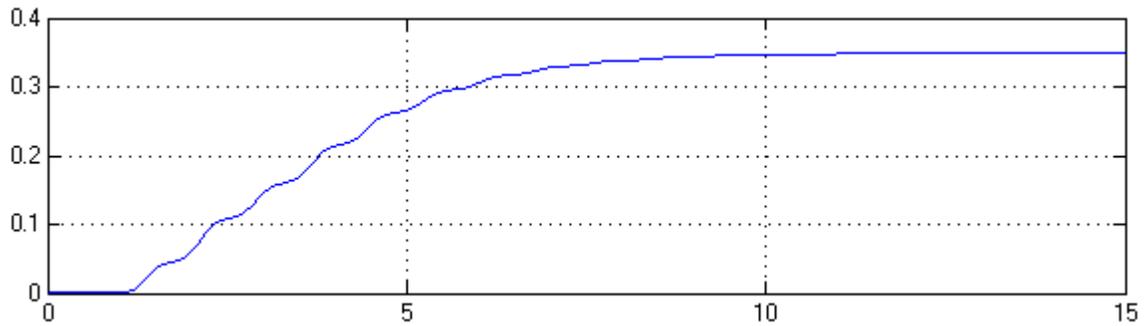


Figura 4.16:  $\hat{K}_1$  vs  $t$  [s]

En estado estacionario, el valor estimado  $\hat{K}_1 \approx 0,3489$

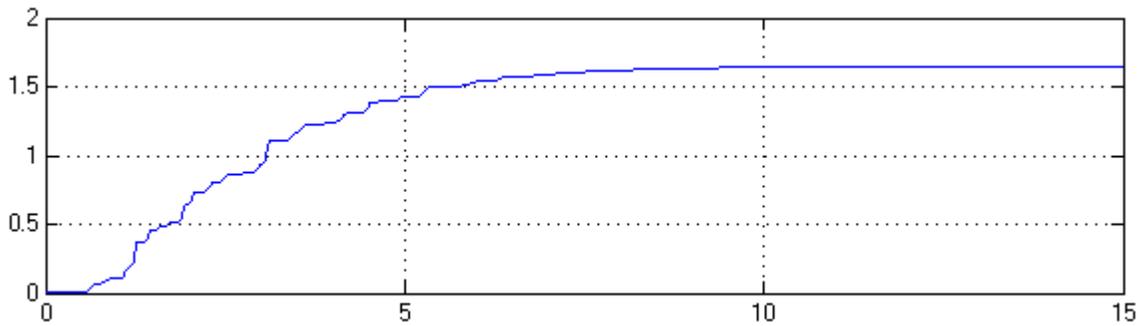


Figura 4.17:  $\hat{K}_2$  vs  $t$  [s]

En estado estacionario, el valor estimado  $\hat{K}_2 \approx 1,6468$

### 4.3.3. Resultados de la estimación de los parámetros $K_1$ y $K_2$ para motores BLDC con cuatro pares de polos magnéticos

A continuación se muestra el comportamiento de  $\tilde{\theta}$  a lo largo del paso del tiempo.

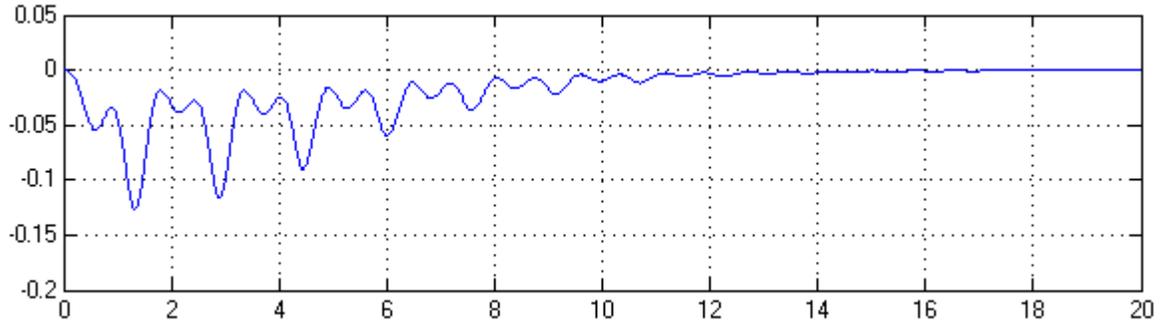


Figura 4.18:  $\tilde{\theta}$  [rad] vs  $t$  [s]

En seguida se muestra la trayectoria que describe  $\hat{K}_1$  a lo largo del tiempo.

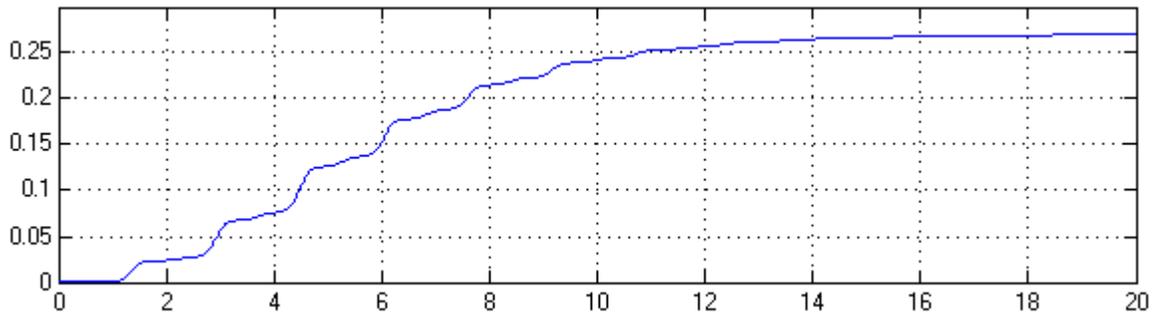


Figura 4.19:  $\hat{K}_1$  vs  $t$  [s]

En estado estacionario, el valor estimado  $\hat{K}_1 \approx 0,2698$ . Finalmente se muestra la trayectoria de  $\hat{K}_2$  con el paso del tiempo.

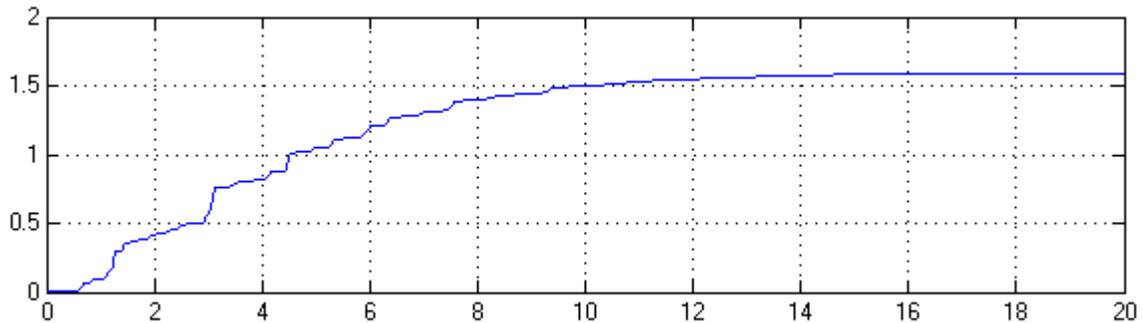


Figura 4.20:  $\hat{K}_2$  vs  $t$  [s]

En estado estacionario, el valor estimado  $\hat{K}_2 \approx 1,5918$

# Capítulo 5

## Conclusiones

Con la finalidad de resaltar los aspectos más importantes de todo el trabajo desarrollado, y de las restricciones que fueron surgiendo a lo largo del mismo, a continuación se presenta un breve análisis, en algunas ocasiones comparativo, sobre el estimador de posición, el mecanismo de adaptación y los resultados de las simulaciones.

### 5.1. Sobre el estimador de posición angular

De forma estricta, se desarrolló un estimador de posición angular estático, denotado a través de (3.5). Mismo que está construido sobre una serie de restricciones que se fueron suscitando a través de su desarrollo.

La primera restricción, y más notable, que deja en duda el funcionamiento del trabajo realizado, es la necesidad del conocimiento de los parámetros  $R_s$  y  $L_s$ . Considerar para cualquier máquina eléctrica que sus parámetros son inmutables a través del tiempo, resulta sumamente restrictivo, y en general, no hay forma de evadir este grave problema, por lo que es totalmente necesario aceptar el desempeño que puede presentar el estimador. Este mismo problema está reportado en [1], donde también es necesario considerar que los parámetros eléctricos del sistema son conocidos y constantes.

En segundo plano, en un principio se considero necesario el conocimiento de las derivadas de las corrientes eléctricas de cada fase del sistema, sin embargo, se mostró que estas pueden

ser aproximadas a través de un filtro, cuya dinámica está mostrada en (4.7), (4.8) y (4.9). Las simulaciones donde se utiliza el filtro, que corresponden a las simulaciones del segundo mecanismo de adaptación, no muestran problema alguno por efecto de la aproximación.

## 5.2. Sobre los mecanismos de adaptación

El funcionamiento del primer mecanismo de adaptación, reportado en [8], no fue satisfactorio. Conforme se incrementa el par de polos magnéticos en las simulaciones se obtiene un peor resultado en las estimaciones de los parámetros  $K_1$  y  $K_2$ . Posiblemente, el problema radica en la forma de  $u$  que se empleó para estas simulaciones; es de recordar que  $u$ , en este caso, es producto de un control que mantiene la velocidad del rotor constante, mismo que provoca los cruces de  $u$  por cero; conforme se incrementa el número de polos magnéticos en las simulaciones,  $u$  cruza más veces por cero, lo que desemboca en que el error de seguimiento  $\tilde{\theta}$  nunca converga a cero.

Por lo que respecta al segundo mecanismo de adaptación, es constatable en los resultados lo que se predijo en su prueba de estabilidad. Haciendo remembranza, la prueba de estabilidad desemboca en que el error  $\tilde{\theta}$  se encuentra, en estado estacionario, contenido en una banda cercana a cero, misma banda que es arbitrariamente pequeña a través del grado de libertad constante  $\lambda$ . Considerando más acertados, y ciertos, los resultados obtenidos del primer mecanismo de adaptación (dado que en [8] se comprueba convergencia de los errores  $\tilde{\theta}$ ,  $\tilde{K}_1$  y  $\tilde{K}_2$  a cero) se puede observar que los obtenidos en el segundo mecanismo de adaptación son casi los mismos; se considera que las diferencias se deben a que el error  $\tilde{\theta}$  nunca tiende a cero, pero si a un valor muy cercano.

# Bibliografía

- [1] R. Ortega, L. Praly and A. Astolfi, *Sensorless Control of Surface-Mount Permanent-Magnet Synchronous Motors Based on a Nonlinear Observer*, IEEE TRANSACTIONS ON POWER ELECTRONICS, VOL. 25, NO. 2, FEBRUARY 2010.
- [2] R. Ortega, L. Praly and A. Astolfi, *Estimacion of Rotor Position and Speed of Permanent Magnet Synchronous Motors With Guaranteed Stability*, IEEE TRANSACTIONS ON POWER ELECTRONICS, SEPTEMBER 2009.
- [3] T. Kim and M. Ehsani, *Sensorless Control of the BLDC Motors From Near-Zero to High Speeds*, IEEE TRANSACTIONS ON POWER ELECTRONICS, VOL. 19, NO. 6, NOVEMBER 2004
- [4] J. Hu and D.M. Dawson, *Position control of a brushless DC motor without velocity measurements*, IEE PROC.-ELECTR. POWER APPL., VOL.142, NO. 2, MARCH 1995
- [5] P.C. Krause, *Analysis of electrical Machinery*, McGRAW HILL, 1982
- [6] T. Balogh and F. Viliam, *Modeling and Simulation of the BLDC Motor in MATLAB*, IEEE TRANSACTIONS ON POWER ELECTRONICS, 2011
- [7] P. Yedamale, *Brushless DC (BLDC) Motor Fundamentals*, MICROCHIP TECHNOLOGY INC., 2003
- [8] Y. Tang , *Identification of a simple neural mass model for the treatment of Parkinson's Disease*, NATIONAL UNIVERSITY OF MEXICO, MEXICO CITY, 2011