UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

R^3-CONTINUOS Y CONTRACTIBILIDAD EN HIPERESPACIOS Y NIVELES DE WHITNEY

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

LUIS ANTONIO PAREDES RIVAS

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. PATRICIA PELLICER COVARRUBIAS
2013

Índice general

Agradecimientos **1**

Introducción **1**

1. Preliminares **7**
1.1. Teoría de Continuos 10
1.2. Teoría de Hiperespacios 17
1.2.1. Convergencia en hiperespacios 18
1.2.2. Arcos ordenados 24
1.2.3. Contractibilidad en hiperespacios 25
1.2.4. Funciones de Whitney 29

2. R^3-continuos en $C_m(X)$ **37**
2.1. Un ejemplo en $C(X)$ 37
2.2. Un ejemplo en $C_m(X)$ 52
2.3. Unicoherencia hereditaria 61

3. Contractibilidad en niveles de Whitney **69**
3.1. Un ejemplo en $C(X)$ 69
3.2. Un ejemplo en $C_m(X)$ 74

Agradecimientos

A mis padres, por brindarme en todo momento su apoyo incondicional, por sus cuidados, sus ánimos, sus desvelos y por enseñarme a nunca darme por vencido.

A mi hermana Rocío, por ser siempre un gran ejemplo para mí.

A la Dra. Patricia Pellicer Covarrubias, por sus enseñanzas, sus consejos, su tiempo, su paciencia y por ser más que mi tutora.

A mis sinodales, por tomarse el tiempo de leer este trabajo y ayudarme a mejorarlo.

A mi familia y amigos, en especial a Claudia y a Rubén por sus valiosos consejos, por todo su apoyo y por compartir tantos momentos especiales conmigo.

Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Una propiedad que se ha estudiado de manera importante en la topología general es la contractibilidad. Intuitivamente, decimos que un espacio es *contráctil* si puede deformarse continuamente a un punto (Definición 1.7). En este trabajo nos interesa estudiar un obstáculo particular que impide a algunos espacios ser contráctiles; este obstáculo es que el espacio en cuestión contenga ciertos subespacios llamados R^3-continuos.

Dados un continuo X y una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos no vacíos de X, definimos su *límite inferior*, denotado por $\operatorname{Li} A_n$, como

$$\begin{aligned}\operatorname{Li} A_n = \{x \in X :\ & \text{para cada subconjunto abierto } U \text{ de } X, \text{ con } x \in U,\\ & \text{existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para cada } n \geqslant N\}.\end{aligned}$$

Si X es un continuo y K un subcontinuo propio de X, decimos que K es un *R^3-continuo de X* si existe un subconjunto abierto U de X tal que $K \subset U$ y existe una sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de componentes de U que satisface que $\operatorname{Li} C_n = K$.

Dado un espacio topológico X, a las familias de subconjuntos de X con alguna característica en especial se les llama *hiperespacios* de X. Algunos de los hiperespacios más estudiados son:

- $2^X = \{A \subset X : A \text{ es compacto y no vacío}\}$,
- $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$ y
- $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Uno de los objetivos de este trabajo es estudiar algunas relaciones entre los R^3-continuos de un continuo X y los R^3-continuos de sus hiperespacios $C_n(X)$. En el Capítulo 1 introducimos las herramientas de la Teoría de Continuos e Hiperespacios que serán utilizadas en los siguientes capítulos. Consideremos las siguientes condiciones para un continuo X:

(I) X contiene R^3-continuos,

(II) 2^X contiene R^3-continuos y

(III) $C_n(X)$ contiene R^3-continuos para alguna $n \in \mathbb{N}$.

En [1, Teorema 3, p. 209] W. J. Charatonik probó que (I) implica (II). Además, en [5, Ejemplo 2.1, p. 535] A. Illanes demostró que (III) no implica (I) para $n = 1$. En el Capítulo 2 desarrollaremos este ejemplo (sección 2.1) y lo utilizaremos para construir un continuo que muestra que la condición (III) no implica la condición (I) para ninguna $n \in \mathbb{N}$ (sección 2.2). Por otro lado, en [5, Teorema 1.5, p. 532] A. Illanes probó que si X es hereditariamente unicoherente, entonces (II) y (III) implican (I) para $n = 1$. En la última sección de este capítulo demostraremos que esto se cumple para toda $n \in \mathbb{N}$. No se sabe si (I) implica (III), si (III) implica (II), ni si (II) implica alguna de las otras dos condiciones.

Por otra parte, si X es un continuo y $\mathcal{L}$ es un hiperespacio de X, una *función de Whitney para* $\mathcal{L}$ es una función continua $\mu : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$ y para cualesquiera $A, B \in \mathcal{L}$ tales que $A \subsetneq B$, se tiene que $\mu(A) < \mu(B)$. Si μ es una función de Whitney para $\mathcal{L}$ y $t \in [0, \mu(X))$, al conjunto $\mu^{-1}(t)$ se le llama *nivel de Whitney para* $\mathcal{L}$. Dada $n \in \mathbb{N}$, una propiedad topológica P es llamada *propiedad de Whitney para* $C_n(X)$ si siempre que un continuo X tenga la propiedad P, se sigue que el nivel de Whitney $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad P para toda función de Whitney $\mu : C_n(X) \to \mathbb{R}$ y para toda $t \in [0, \mu(X))$.

En el Capítulo 2 también se demuestra que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la propiedad de no contener R^3-continuos no es una propiedad de Whitney para $C_n(X)$. Finalmente, en el Capítulo 3 mostraremos que las propiedades de ser contráctil y tener hiperespacio contráctil no son propiedades de Whitney para $C_n(X)$. Esto fue probado para $n = 1$ por A. Illanes en [5, Ejemplo 2.2, p. 537]. Desarrollaremos este ejemplo (sección 3.1) y lo utilizaremos para construir un continuo que muestra lo anterior para toda $n \in \mathbb{N}$ (sección 3.2).

Los resultados originales de esta tesis han sido utilizados para elaborar un artículo de investigación titulado *On strong size levels*, el cual fue enviado a una revista con arbitraje internacional para su evaluación.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos las herramientas de la Teoría de Continuos e Hiperespacios que se usarán a lo largo de este trabajo. Comenzaremos presentando la notación que será utilizada. Si X es un espacio topológico y $A \subset B \subset X$, entonces $\text{int}_B(A)$, $\text{Cl}_B(A)$, $\text{Fr}_B(A)$ y $\text{ext}_B(A)$ denotarán al interior, la cerradura, la frontera y el exterior de A con respecto a B, respectivamente. En el caso en que $B = X$ omitiremos la B.
Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Denotaremos a la *bola abierta de radio ε alrededor de x* como

$$B^d(\varepsilon, x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

En caso de que no exista confusión acerca de cuál es la métrica del espacio, escribiremos solamente $B(\varepsilon, x)$.

Sean $\mathbb{R}^m$ el espacio euclidiano de dimensión m y $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$. Si $p_1, \ldots, p_n$ son puntos en $\mathbb{R}^m$, denotamos por $p_1 \cdots p_n$ la línea quebrada con vértices $p_1, \ldots, p_n$. En particular $p_1 p_2$ denota el segmento que une p_1 y p_2. Además, si $t \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{R}^m$ y $S \subset \mathbb{R}^m$, entonces:

i) tS denota el conjunto $\{tq \in \mathbb{R}^m : q \in S\}$,

ii) pS denota el conjunto $\bigcup\{pq \subset \mathbb{R}^m : q \in S\}$ y

iii) $p + S$ denota el conjunto $\{p + q \in \mathbb{R}^m : q \in S\}$.

Definición 1.1. Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Diremos que X es *localmente conexo en p* si para cada subconjunto abierto U de X, tal que $p \in U$, existe un subconjunto abierto y conexo V, de X, tal que $p \in V \subset U$. Decimos que X es *localmente conexo* si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Lema 1.2. *Sean X un espacio métrico y compacto, $p \in X$ y $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que para toda subsucesión convergente $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} p_{n_k} = p$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$.*

Demostración. Supongamos que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a p. Entonces existe $\varepsilon > 0$ y existe una subsucesión $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $B(\varepsilon, p) \cap \{p_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Como X es compacto podemos suponer que $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a un punto en X. Por hipótesis la sucesión $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a p, contradiciendo que $B(\varepsilon, p) \cap \{p_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$. □

Teorema 1.3. *[4, Corolario 3.1.5, p. 124] Sean X un espacio compacto y U un subconjunto abierto de X. Entonces para cada familia $\{F_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de subconjuntos cerrados de X tal que $\bigcap\{F_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} \subset U$, existe un conjunto finito $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathcal{A}$ tal que $\bigcap\{F_{\alpha_i} : 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset U$.*

Corolario 1.4. *Sean X un espacio compacto y U un subconjunto abierto de X. Si $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X tal que $F_{n+1} \subset F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcap\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subset U$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_m \subset U$.*

Demostración. Por el Teorema 1.3 existe un conjunto finito $\{n_1, \ldots, n_k\} \subset \mathbb{N}$ tal que $\bigcap\{F_{n_j} : 1 \leqslant j \leqslant k\} \subset U$. Sea $m = \max\{n_j : 1 \leqslant j \leqslant k\}$. Usando que $F_{n+1} \subset F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ obtenemos que $F_m \subset U$. □

Lema 1.5. *[8, Teorema 18.3, p. 123] Sean X y Y espacios topológicos, A y B dos subconjuntos cerrados de X tales que $X = A \cup B$ y $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ funciones continuas. Si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces la función $h : X \to Y$ definida como*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & si \ x \in A; \\ g(x), & si \ x \in B \end{cases}$$

está bien definida y es continua.

Definición 1.6. Sean X y Y espacios topológicos. Una *homotopía* es una función continua de la forma $\varphi : X \times [0, 1] \to Y$. Si $X \subset Y$ y $\varphi((x, 0)) = x$ para toda $x \in X$, entonces la homotopía φ es una *deformación* de X en Y. Más aún, si existe $y \in Y$ tal que para cada $x \in X$ se tiene que $\varphi(x, 1) = y$, entonces φ es una *contracción* de X en Y.

Definición 1.7. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que X es *contráctil en Y* si $X \subset Y$ y existe una contracción φ de X en Y. En el caso en que $X = Y$, diremos simplemente que X es *contráctil*.

Lema 1.8. *Sea X un espacio métrico. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sean $\alpha_n : [0,1] \to X$ una función continua y $p_n = \alpha_n(0)$. Si la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a α_0, entonces la función $F : \{p_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \times [0,1] \to X$ definida como $F(p_n, t) = \alpha_n(t)$ es continua.*

Demostración. Sea $((q_k, t_k))_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $\{p_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \times [0,1]$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} (q_k, t_k) = (q_0, t_0)$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_0$, entonces $q_0 = p_0$ o existen n_0 y $K \in \mathbb{N}$ tales que $q_k = p_{n_0}$ para toda $k > K$.

Si existen n_0 y $K \in \mathbb{N}$ tales que $q_k = p_{n_0}$ para toda $k > K$, entonces $q_0 = p_{n_0}$ y por la continuidad de α_{n_0} se sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} F(q_k, t_k) &= \lim_{k\to\infty} F(p_{n_0}, t_k) = \lim_{k\to\infty} \alpha_{n_0}(t_k) \\ &= \alpha_{n_0}(t_0) = F(p_{n_0}, t_0) = F(q_0, t_0).\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $q_0 = p_0$. Sea $\varepsilon > 0$; como α_0 es continua existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\alpha_0(t_k), \alpha_0(t_0)) < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ para toda } k > N_1. \tag{1.1}$$

Sea $N_2 > N_1$ tal que para toda $n > N_2$ se tiene que

$$d(\alpha_n(t), \alpha_0(t)) < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ para toda } t \in [0,1]. \tag{1.2}$$

Finalmente, sea $N > N_2$ tal que $\{q_i : i > N\} \subset \{p_n : n > N_2\} \cup \{p_0\}$. Para cada $i > N$ sea $n_i \in \{n \in \mathbb{N} : n > N_2\} \cup \{0\}$ tal que $q_i = p_{n_i}$. Luego, por (1.1) y (1.2), para cada $k > N$ tenemos que

$$\begin{aligned}d(F(q_k, t_k), F(q_0, t_0)) &= d(F(p_{n_k}, t_k), F(q_0, t_0)) = d(\alpha_{n_k}(t_k), \alpha_0(t_0)) \\ &\leqslant d(\alpha_{n_k}(t_k), \alpha_0(t_k)) + d(\alpha_0(t_k), \alpha_0(t_0)) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto, F es continua. $\square$

Lema 1.9. *Sea X un espacio topológico. Si L es un subconjunto cerrado de X y U es un subconjunto abierto de X tal que $U \subset L$, entonces $\mathrm{Fr}_L(U) = \mathrm{Fr}_X(U)$.*

Demostración. Como L es un subconjunto cerrado de X se sigue que $\mathrm{Fr}_X(U) \subset L$. Así, usando que U es un subconjunto abierto de X tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}_X(U) &= \mathrm{Fr}_X(U) \cap L = (\mathrm{Cl}_X(U) \cap \mathrm{Cl}_X(X \setminus U)) \cap L \\ &= (\mathrm{Cl}_X(U) \cap (X \setminus U)) \cap L = \mathrm{Cl}_L(U) \cap (L \setminus U) \\ &= \mathrm{Cl}_L(U) \cap \mathrm{Cl}_L(L \setminus U) = \mathrm{Fr}_L(U).\end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.10. *[11, Teorema 4.7, p. 22] Sea X un espacio métrico y compacto. Entonces X es totalmente disconexo si y sólo si para todo $x \in X$ y todo subconjunto abierto V de X tal que $x \in V$ existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U \subset V$ y $\mathrm{Fr}(U) = \emptyset$.*

Definición 1.11. Un *conjunto de Cantor* es un espacio métrico no vacío, compacto, denso en sí mismo y totalmente disconexo.

Teorema 1.12. *Sea X un espacio métrico y compacto y sea K un subconjunto cerrado de X. Supongamos que $\mathcal{C} \subset X$ es un conjunto de Cantor y que existe un subconjunto abierto V de X tal que $V \cap K = V \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Entonces K es disconexo.*

Demostración. Notemos que $V \cap K = \mathcal{C} \cap V \cap K = V \cap \mathcal{C}$. Dado que V es un conjunto abierto, $V \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ y $\mathcal{C}$ es un conjunto denso en sí mismo, se sigue que $V \cap \mathcal{C}$ tiene más de un punto. Sean x y y dos puntos distintos de $V \cap \mathcal{C}$, entonces $x, y \in \mathcal{C} \cap K$. Como $(V \cap \mathcal{C}) \setminus \{y\} = (V \setminus \{y\}) \cap (\mathcal{C} \cap K)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{C} \cap K$ y el conjunto $\mathcal{C} \cap K$ es compacto y totalmente disconexo, por el Lema 1.10 existe un subconjunto abierto W de $\mathcal{C} \cap K$ tal que

$$x \in W \subset (V \cap \mathcal{C}) \setminus \{y\} \tag{1.3}$$

y $\mathrm{Fr}_{\mathcal{C} \cap K}(W) = \emptyset$. Entonces existe un subconjunto abierto W_1 de X tal que $W = (\mathcal{C} \cap K) \cap W_1$. Luego,

$$W = V \cap W = V \cap \mathcal{C} \cap K \cap W_1 = K \cap (V \cap W_1).$$

Esto implica que W es un subconjunto abierto de K. Como $K \cap \mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado de K, por el Lema 1.9 tenemos que $\mathrm{Fr}_K(W) = \mathrm{Fr}_{\mathcal{C} \cap K}(W) = \emptyset$. Entonces W es un subconjunto abierto y cerrado de K y por (1.3) sabemos que $x \in W$ y $y \in K \setminus W$. Concluimos entonces que K es disconexo. □

1.1. Teoría de Continuos

Definición 1.13. Un *continuo* X es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Si $Y \subset X$ y Y es un continuo, diremos que Y es un *subcontinuo* de X.

El siguiente teorema es un resultado clásico en la teoría de continuos y es una versión de un resultado conocido como *Teorema de golpes en la frontera.*

Teorema 1.14. *[10, Teorema 5.7, p. 75] Sean X un continuo, E un subconjunto propio y no vacío de X y K una componente de E.*

- *Si E es abierto en X, entonces* $\mathrm{Cl}(K) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$*;*
- *Si E es cerrado en X, entonces* $K \cap \mathrm{Cl}(X \setminus E) \neq \emptyset$*.*

Definición 1.15. Sea X un continuo. Diremos que X es *unicoherente* si para cada par de subcontinuos A y B de X, tales que $X = A \cup B$, se cumple que el conjunto $A \cap B$ es conexo. Un continuo X es *hereditariamente unicoherente* si cada subcontinuo de X es unicoherente.

Un ejemplo de un continuo hereditariamente unicoherente es el intervalo $[0, 1]$, pues sus subcontinuos son intervalos o puntos y la intersección de cualesquiera dos de ellos es conexa. La curva cerrada simple $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ no es unicoherente, pues al considerar las semicircunferencias superior e inferior como subcontinuos, su intersección resulta ser $\{(-1, 0), (1, 0)\}$ que no es un conjunto conexo.

Definición 1.16. Una *dendrita* es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

El arco, el triodo simple $T = (-1, 0)(1, 0) \cup (0, 1)(0, 0)$ y en general cualquier árbol[1] son ejemplos de dendritas. En este trabajo usaremos de manera especial una dendrita particular, su nombre es *dendrita de Gehman* y la definimos a continuación.

Ejemplo 1.17. La dendrita de Gehman.

Como primer paso para construir esta dendrita consideramos los segmentos $J = (0, 0)(\frac{1}{2}, 1)$ y $K = (1, 0)(\frac{1}{2}, 1)$ que unen los extremos del intervalo $[0, 1] \times \{0\}$ con el punto $(\frac{1}{2}, 1)$ (vea Figura 1.1). Definimos $Y_1 = J \cup K$. Inductivamente, suponiendo definido Y_n, sea $P_{n+1} = \{(x, y) \in Y_n : y = \frac{1}{3^n}\}$.

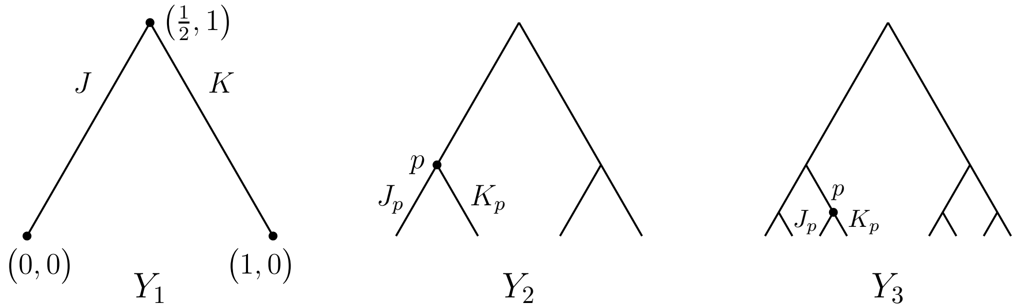

Figura 1.1: Primeros pasos de la construcción de la dendrita de Gehman.

[1]Un árbol es una gráfica conexa sin ciclos.

Para cada punto $p \in P_{n+1}$ consideramos los segmentos J_p y K_p, paralelos a J y a K, respectivamente, que tienen como puntos extremos a p y un punto en el intervalo $[0,1] \times \{0\}$. Definimos

$$Y_{n+1} = Y_n \cup \bigcup \{J_p : p \in P_{n+1}\} \cup \bigcup \{K_p : p \in P_{n+1}\}.$$

Por ejemplo, $Y_2 = Y_1 \cup \{(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})(\frac{1}{3}, 0), (\frac{5}{6}, \frac{1}{3})(\frac{2}{3}, 0)\}$ (vea Figura 1.1). Finalmente definimos $Y = \mathrm{Cl}(\bigcup\{Y_n : n \in \mathbb{N}\})$ (vea Figura 1.2). La intersección de Y con el intervalo $[0,1] \times \{0\}$ constituye un conjunto de Cantor; la demostración de esto se puede consultar en [13, p. 423].

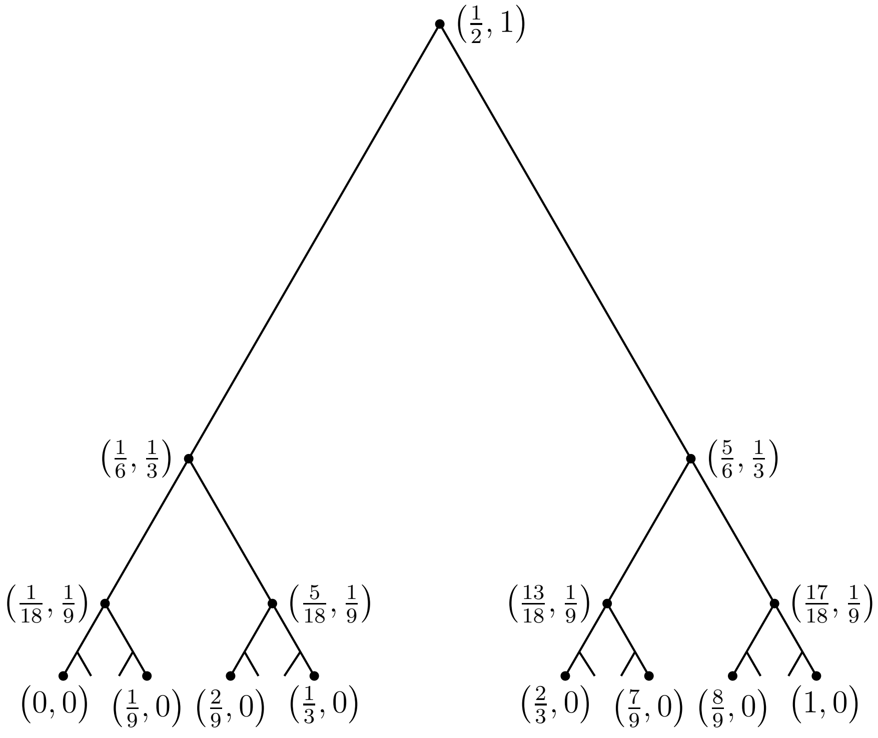

Figura 1.2: dendrita de Gehman.

Lema 1.18. *Sean Y la dendrita de Gehman definida en el Ejemplo 1.17 y $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor que resulta de $Y \cap \big([0,1] \times \{0\}\big)$. Sea d' la métrica del máximo en $\mathbb{R}^2$, es decir, $d' : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que*

$$d'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{máx}\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}.$$

Sean p y q dos puntos distintos de Y tales que $p \in \mathcal{C}$. Entonces existe un subcontinuo Z de Y tal que $p, q \in Z$ y $\text{diám}_{d'}(Z) \leqslant 3d'(p,q)$.

Demostración. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $M_i = \big([0,1] \times [0, \frac{1}{3^{i-1}}]\big) \cap Y$. Notemos que para cualquier par de componentes A_i y B_i de M_i se tiene que

$$\text{diám}_{d'}(A_i) = \text{diám}_{d'}(B_i) = \tfrac{1}{3^{i-1}} \text{ y} \tag{1.4}$$
$$d(A_i, B_i) \geqslant \tfrac{1}{3^{i-1}}. \tag{1.5}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea Z_i la componente de M_i tal que $p \in Z_i$. Notemos que $q \in Y = Z_1$. Por (1.4) tenemos que $\lim\limits_{i\to\infty} \text{diám}_{d'}(Z_i) = 0$. Así, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $q \notin Z_n$ para toda $n > K$. Sea

$$N_0 = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} : q \in Z_n\}. \tag{1.6}$$

Entonces Z_{N_0} es un subcontinuo de Y tal que $p, q \in Z_{N_0}$. Como $q \notin Z_{N_0+1}$, obtenemos de (1.4) y (1.5) que

$$\tfrac{1}{3}\text{diám}_{d'}(Z_{N_0}) = \tfrac{1}{3^{N_0}} \leqslant d'(p,q).$$

Por lo tanto, $\text{diám}_{d'}(Z_{N_0}) \leqslant 3d'(p,q)$. □

Corolario 1.19. *Sean Y la dendrita de Gehman definida en el Ejemplo 1.17 y $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor que resulta de $Y \cap \big([0,1] \times \{0\}\big)$. Sea d' la métrica del máximo en $\mathbb{R}^2$, es decir, $d' : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que*

$$d'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{máx}\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}.$$

Sean p y q dos puntos distintos de Y tales que $p \in \mathcal{C}$ y sea $\alpha : [0,1] \to Y$ un arco tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Entonces $\text{diám}_{d'}(\alpha([0,1])) \leqslant 3d'(p,q)$.

Demostración. Por el Lema 1.18 existe un subcontinuo Z de Y tal que $p, q \in Z$ y $\text{diám}_{d'}(Z) \leqslant 3d'(p,q)$. Notemos que $\alpha([0,1]) \subset Z$, por lo tanto $\text{diám}_{d'}(\alpha([0,1])) \leqslant \text{diám}_{d'}(Z) \leqslant 3d'(p,q)$. □

En la teoría de continuos frecuentemente se estudia la convergencia de ciertas sucesiones de subconjuntos de un continuo. Como en este trabajo el estudio de dicha convergencia es esencial, a continuación presentamos algunos de sus conceptos y resultados básicos.

Definición 1.20. Dados un continuo X y una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos no vacíos de X, definimos su *límite inferior* y *límite superior*, denotados por $\text{Li}\, A_n$ y $\text{Ls}\, A_n$, respectivamente, como:

- $\text{Li}\, A_n = \{x \in X :$ para cada subconjunto abierto U de X, con $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geqslant N\}$;

- $\operatorname{Ls} A_n = \{x \in X :$ para cada subconjunto abierto U de X, con $x \in U$, existe un conjunto infinito $J \subset \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in J\}$.

Algunas propiedades elementales de los límites inferior y superior se presentan en el siguiente lema.

Lema 1.21. *[12, Teorema 0.6, p. 4] Sea X un continuo y sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de subconjuntos no vacíos de X. Entonces:*

(a) $\operatorname{Li} A_n \subset \operatorname{Ls} A_n$*;*

(b) $\operatorname{Li} A_n$ *y* $\operatorname{Ls} A_n$ *son subconjuntos cerrados de X;*

(c) si $A_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\operatorname{Li} A_n \subset \operatorname{Li} B_n$ *y* $\operatorname{Ls} A_n \subset \operatorname{Ls} B_n$*, y*

(d) si $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $\operatorname{Li} A_n \subset \operatorname{Li} A_{n_k}$ *y* $\operatorname{Ls} A_{n_k} \subset \operatorname{Ls} A_n$*.*

Proposición 1.22. *Sea X un continuo y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X. Entonces* $\operatorname{Li} A_n = \operatorname{Li} \operatorname{Cl}(A_n)$*.*

Demostración. Del Lema 1.21-(c) se sigue que $\operatorname{Li} A_n \subset \operatorname{Li} \operatorname{Cl}(A_n)$. Consideremos ahora $x \in \operatorname{Li} \operatorname{Cl}(A_n)$ y un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap \operatorname{Cl}(A_n) \neq \emptyset$ para cada $n \geqslant N$. Como U es abierto, se tiene que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geqslant N$. Por lo tanto $x \in \operatorname{Li} A_n$. □

A continuación introducimos maneras equivalentes de tratar al límite inferior y al límite superior de una sucesión, las cuales nos convendrá usar frecuentemente.

Lema 1.23. *Sea X un continuo y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X. Entonces $x \in \operatorname{Li} A_n$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $x_n \in A_n$ para cada n y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*

Demostración. Sea $x \in \operatorname{Li} A_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos $x_n \in A_n$ tal que $d(x, x_n) \leqslant \inf\{d(x, y) : y \in A_n\} + \frac{1}{n}$. Probaremos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Sea $\varepsilon > 0$; como $x \in \operatorname{Li} A_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(\frac{\varepsilon}{2}, x) \cap A_n \neq \emptyset$ y $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $n \geqslant N$. En particular, para cada $n \geqslant N$ existe $a_n \in B(\frac{\varepsilon}{2}, x) \cap A_n$; así, por la elección de x_n se tiene que $d(x, x_n) \leqslant d(x, a_n) + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ para cada $n \geqslant N$. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Recíprocamente, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Sea U un subconjunto abierto de X con $x \in U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para cada $n \geqslant N$. Por lo tanto, $U \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geqslant N$ y, así, $x \in \operatorname{Li} A_n$. □

Lema 1.24. *Sea X un continuo y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X. Entonces $x \in \operatorname{Ls} A_n$ si y sólo si existe una sucesión de números naturales $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $n_1 < n_2 < \cdots$ y existen puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ tales que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.*

Demostración. Sea $x \in \operatorname{Ls} A_n$. Tenemos que existe un conjunto infinito $J_1 \subset \mathbb{N}$ tal que $B(1,x) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in J_1$. Sean $n_1 \in J_1$ y $x_{n_1} \in B(1,x) \cap A_{n_1}$. Inductivamente, supongamos que existen $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ y $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k} \in X$, tales que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ y $x_{n_i} \in B(\frac{1}{i}, x) \cap A_{n_i}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Sabemos que existe un conjunto infinito $J_{k+1} \subset \mathbb{N}$ tal que $B(\frac{1}{k+1}, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in J_{k+1}$. Sea $n_{k+1} \in J_{k+1}$ tal que $n_{k+1} > n_k$ y sea $x_{n_{k+1}} \in B(\frac{1}{k+1}, x) \cap A_{n_{k+1}}$. De esta manera, podemos encontrar una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturales con $n_1 < n_2 < \cdots$ y puntos $x_{n_k} \in B(\frac{1}{k}, x) \cap A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Falta probar que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$; de esta manera, si $k \geqslant N$ se tiene que $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon$. En consecuencia, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Por otro lado, sea $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números naturales tal que $n_1 < n_2 < \cdots$, y supongamos que existe $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Sea U un subconjunto abierto de X con $x \in U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in U$ para cada $k \geqslant N$. Tomemos $J = \{n_k \in \mathbb{N} : k \geqslant N\} \subset \mathbb{N}$; así, tenemos que J es infinito y además $U \cap A_m \neq \emptyset$ para cada $m \in J$. Por lo tanto, $x \in \operatorname{Ls} A_n$. $\square$

Otro concepto muy utilizado en la teoría de continuos es el de *nube*; lo definimos a continuación.

Definición 1.25. Sean X un continuo, $\varepsilon > 0$ y $A \subset X$. Definimos la *nube de radio ε alrededor de A* como el conjunto

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(a,x) < \varepsilon\}.$$

Lema 1.26. *Sean X un continuo y A y B subconjuntos de X. Entonces $N(\varepsilon, A \cup B) = N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Entonces $x \in N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$ si y sólo si existe $y \in A$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$ o existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$. Esto ocurre si y sólo si existe $y \in A \cup B$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$, es decir, $x \in N(\varepsilon, A \cup B)$. $\square$

Proposición 1.27. *Sea X un continuo y sean $A, B, C \subset X$ tales que $A \subset N(\varepsilon_1, B)$ y $B \subset N(\varepsilon_2, C)$. Entonces $A \subset N(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, C)$.*

Demostración. Si $x \in A \subset N(\varepsilon_1, B)$, entonces existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \varepsilon_1$. Como $y \in N(\varepsilon_2, C)$, existe $z \in C$ con $d(y,z) < \varepsilon_2$. Por lo tanto $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ y, así, concluimos que $x \in N(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, C)$. $\square$

Lema 1.28. *Sea X un continuo. Si $\varepsilon > 0$ y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de subconjuntos no vacíos de X, entonces existe $M \geqslant 1$ tal que $\operatorname{Li} A_n \subset N(\varepsilon, A_m)$ para toda $m \geqslant M$.*

Demostración. Como $\operatorname{Li} A_n$ es compacto (vea Lema 1.21-(b)), existen $k \in \mathbb{N}$ y $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \operatorname{Li} A_n$ tales que $\operatorname{Li} A_n \subset \bigcup\{B(\frac{\varepsilon}{2}, x_j) : 1 \leqslant j \leqslant k\}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ existe $M_j \geqslant 1$ tal que $B(\frac{\varepsilon}{2}, x_j) \cap A_m \neq \emptyset$ para toda $m \geqslant M_j$. Definimos $M = \text{máx}\{M_j : 1 \leqslant j \leqslant k\}$. Sean $x \in \operatorname{Li} A_n$ y $m \geqslant M$, entonces existe $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $x \in B(\frac{\varepsilon}{2}, x_{j_0})$. Como $m \geqslant M_{j_0}$ se tiene que $B(\frac{\varepsilon}{2}, x_{j_0}) \cap A_m \neq \emptyset$, así que existe $a_m \in A_m$ con $d(x_{j_0}, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto $d(x, a_m) \leqslant d(x, x_{j_0}) + d(x_{j_0}, a_m) < \varepsilon$, y así $x \in N(\varepsilon, A_m)$. □

Concluimos esta sección introduciendo el concepto de R^3-*continuo*; este será el objeto de estudio en los capítulos subsecuentes.

Definición 1.29. Sean X un continuo y K un subcontinuo propio de X. Diremos que K es un R^3-*continuo de* X si existe un subconjunto abierto y propio U de X tal que $K \subset U$ y existe una sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de componentes de U que satisface que $\operatorname{Li} C_n = K$.

Ejemplo 1.30. Existe un continuo X, el cual es una compactación de un rayo cuyo residuo es un arco, tal que uno de sus conjuntos singulares es un R^3-continuo de X:

En el plano euclidiano, sea $p = (0, 0)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\tfrac{1}{6n}, 1\right), & b_n &= \left(\tfrac{1}{6n+1}, 0\right), \\ c_n &= \left(\tfrac{1}{6n+2}, 1\right), & d_n &= \left(\tfrac{1}{6n+3}, -1\right), \\ e_n &= \left(\tfrac{1}{6n+4}, 0\right), & f_n &= \left(\tfrac{1}{6n+5}, -1\right) \end{aligned}$$

y sea $I = \{0\} \times [-1, 1]$ (vea Figura 1.3). Definimos el espacio

$$X = I \cup \bigcup\{a_n b_n c_n d_n e_n f_n a_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Consideremos el subconjunto abierto $U = \left((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right) \cap X$, de X, y la sucesión de componentes de U, definida para cada $n \in \mathbb{N}$ como:

$$C_{2n-1} = a_n b_n c_n \cap U, \text{ y}$$
$$C_{2n} = d_n e_n f_n \cap U.$$

Demostraremos que

$$\operatorname{Li} C_n = \{p\}. \tag{1.7}$$

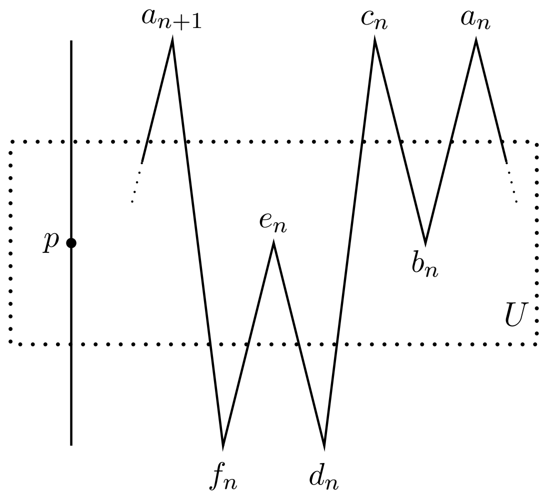

Figura 1.3: ejemplo de un R^3-continuo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $p_{2n-1} = b_n$ y $p_{2n} = e_n$. Entonces $p_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, así que $p \in \operatorname{Li} C_n$ (vea Lema 1.23).

Por otro lado, sea $q \in X \setminus \{p\}$. Observemos que si $q \in \bigcup\{a_n b_n c_n d_n e_n f_n a_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $q \notin \operatorname{Li} C_n$. Supongamos ahora que $q \in I \setminus \{p\}$ y sea $\varepsilon = d(q,p)$. Entonces $B(\varepsilon, q) \cap C_{2n-1} = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ o $B(\varepsilon, q) \cap C_{2n} = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $q \notin \operatorname{Li} C_n$ y prueba (1.7). Así concluimos que $\{p\}$ es un R^3-continuo de X. $\square$

Lema 1.31. *Si un continuo X contiene un R^3-continuo K, entonces X no es localmente conexo en ningún punto de K.*

Demostración. Supongamos que X contiene un R^3-continuo $K = \operatorname{Li} C_n$, donde $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de componentes de un subconjunto abierto y propio U, de X, tal que $K \subset U$. Sea $x_0 \in K$ y supongamos que X es localmente conexo en x_0. Como $x_0 \in U$, existe un subconjunto abierto y conexo V, de X, tal que $x_0 \in V \subset U$. Sea $N \geqslant 1$ tal que $V \cap C_n \neq \emptyset$ para toda $n \geqslant N$. Como V es conexo se tiene que $V \subset C_n$ para toda $n \geqslant N$. Luego, $C_N = C_n$ para toda $n \geqslant N$. Por lo tanto $K = \operatorname{Li} C_n = \operatorname{Cl}(C_N)$. Por el Teorema 1.14 se tiene que $K \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ contradiciendo que K esté contenido en U. Entonces concluimos que X no es localmente conexo en x_0. $\square$

1.2. Teoría de Hiperespacios

Definición 1.32. Sea X un espacio topológico. A las familias de subconjuntos de X con alguna característica en especial se les llama *hiperespacios* de

X. Algunos de los hiperespacios más estudiados son:

- $2^X = \{A \subset X : A$ es compacto y no vacío$\}$,
- $C(X) = \{A \in 2^X : A$ es conexo$\}$,
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : A$ tiene a lo más n puntos$\}$ y
- $C_n(X) = \{A \in 2^X : A$ tiene a lo más n componentes$\}$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

1.2.1. Convergencia en hiperespacios

Si X es un espacio métrico y compacto, a partir de la métrica de X podemos construir una métrica para el hiperespacio 2^X y también para los demás hiperespacios que están contenidos en 2^X.

Definición 1.33. Sea X un espacio métrico y compacto. Si $A, B \in 2^X$, definimos:

$$H(A,B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Entonces $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ es una métrica para 2^X (vea [12, Teorema 0.2, p. 2]). Ésta es llamada la *métrica de Hausdorff*.

Sea $\mathcal{L} \in \{C_m(X) : m \in \mathbb{N}\}$. Si $A \in \mathcal{L}$, denotaremos a la bola de radio ε alrededor de A en 2^X como $B^H(\varepsilon, A)$, mientras que para referirnos a la bola de radio ε alrededor de A en $\mathcal{L}$ escribiremos $B^H(\varepsilon, A) \cap \mathcal{L}$.

A continuación definiremos de manera alternativa una topología para el hiperespacio 2^X utilizando los subconjuntos abiertos de X (Teorema 1.35). Es posible definir esta topología aunque X no sea metrizable y coincide con la topología inducida por la métrica de Hausdorff cuando X es un espacio métrico y compacto (Teorema 1.37).

Definición 1.34. Sea X un espacio topológico. Para cualquier familia finita de subconjuntos $U_1, \ldots, U_n$ de X definimos $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ como

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1 \ldots, n\} \right\}.$$

Teorema 1.35. *[12, Teorema 0.11, p. 8] Sea X un espacio topológico. Entonces la colección de subconjuntos de 2^X de la forma $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ donde $U_1, \ldots, U_n$ son subconjuntos abiertos de X es una base para una topología para 2^X.*

Definición 1.36. La topología para 2^X obtenida en el Teorema 1.35 es llamada la *topología de Vietoris.*

Teorema 1.37. *[12, Teorema 0.13, p.8] La topología de Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff son la misma para un espacio métrico y compacto X.*

Lema 1.38. *Sea $\beta : C([0,1]) \to [0,1]$ dada por $\beta([a,b]) = a$. Entonces β es una función continua.*

Demostración. Sea $U = (s,t) \cap [0,1]$ un subconjunto abierto básico de $[0,1]$. Demostraremos que

$$\beta^{-1}(U) = \big\langle (s,\infty) \cap [0,1], (s,t) \cap [0,1] \big\rangle \cap C([0,1]). \tag{1.8}$$

Sea $[x,y] \in \beta^{-1}(U)$. Entonces $x \in U = (s,t) \cap [0,1]$. Luego, $[x,y] \subset (s,\infty) \cap [0,1]$ y $[x,y] \cap ((s,t) \cap [0,1]) \neq \emptyset$, así que $[x,y] \in \langle (s,\infty) \cap [0,1], (s,t) \cap [0,1] \rangle \cap C([0,1])$. Recíprocamente, si $[x,y] \in \langle (s,\infty) \cap [0,1], (s,t) \cap [0,1] \rangle \cap C([0,1])$, entonces $[x,y] \subset (s,\infty) \cap [0,1]$ y $[x,y] \cap (s,t) \cap [0,1] \neq \emptyset$; esto implica que $s < x$ y $x < t$. Además $x \in [0,1]$, por lo que $x \in U$ y así $[x,y] \in \beta^{-1}(U)$.

Finalmente, como $(s,\infty) \cap [0,1]$ y $(s,t) \cap [0,1]$ son subconjuntos abiertos de $[0,1]$ se sigue de (1.8) y el Teorema 1.37 que $\beta^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de $C([0,1])$. Así concluimos que β es una función continua. $\square$

Definición 1.39. Sea X un continuo. Para cada subconjunto K de X definimos los conjuntos:

(a) $2^K = \{A \in 2^X : A \subset K\}$,

(b) $\mathcal{D}(K) = \{A \in 2^X : A \cap K \neq \emptyset\}$ y

(c) $C_m(K) = \{A \in C_m(X) : A \subset K\}$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Corolario 1.40. *Sea X un continuo. Si U es un subconjunto abierto de X y K es un subconjunto cerrado de X, entonces:*

(a) 2^U es un subconjunto abierto de 2^X;

(b) $\mathcal{D}(U)$ es un subconjunto abierto de 2^X;

(c) $C_m(U)$ es un subconjunto abierto de $C_m(X)$ para cada $m \in \mathbb{N}$;

(d) 2^K es un subconjunto cerrado de 2^X y

(e) $\mathcal{D}(K)$ es un subconjunto cerrado de 2^X.

Demostración. Las afirmaciones (a) y (b) se siguen de que $2^U = \{A \in 2^X : A \subset U\} = \langle U \rangle$ y $\mathcal{D}(U) = \langle X, U \rangle$, los cuales son subconjuntos abiertos de 2^X (Teorema 1.37); además (c) se sigue de que $C_m(U) = \{A \in C_m(X) : A \subset U\} = 2^U \cap C_m(X)$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned} 2^K = \{A \in 2^X : A \subset K\} &= 2^X \setminus \{A \in 2^X : A \cap (X \setminus K) \neq \emptyset\} \\ &= 2^X \setminus \mathcal{D}(X \setminus K) \text{ y} \\ \mathcal{D}(K) = \{A \in 2^X : A \cap K \neq \emptyset\} &= 2^X \setminus \{A \in 2^X : A \subset X \setminus K\} \\ &= 2^X \setminus 2^{(X \setminus K)}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando (b) y (a) obtenemos que 2^K y $\mathcal{D}(K)$ son subconjuntos cerrados de 2^X. $\square$

Los siguientes cuatro resultados serán muy utilizados para trabajar con la métrica de Hausdorff.

Lema 1.41. *Sean X un continuo, $\varepsilon_0 > 0$ y $A, B \in 2^X$. Entonces $H(A, B) < \varepsilon_0$ si y sólo si $A \subset N(\varepsilon_0, B)$ y $B \subset N(\varepsilon_0, A)$.*

Demostración. Si $H(A, B) < \varepsilon_0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $H(A, B) \leqslant \delta < \varepsilon_0$ y se cumple que $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Luego, $A \subset N(\varepsilon_0, B)$ y $B \subset N(\varepsilon_0, A)$.

Supongamos ahora que $A \subset N(\varepsilon_0, B)$ y $B \subset N(\varepsilon_0, A)$. Como $N(\varepsilon_0, B) = \bigcup\{N(\delta, B) : 0 < \delta < \varepsilon_0\}$ y A es compacto, existe un conjunto finito $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\} \subset (0, \varepsilon_0)$ tal que $A \subset \bigcup\{N(\delta_i, B) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Sea $\delta_{n_1} = \max\{\delta_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Entonces $\delta_{n_1} \in (0, \varepsilon_0)$ y $A \subset N(\delta_{n_1}, B)$. Análogamente, existe $\delta_{n_2} \in (0, \varepsilon_0)$ tal que $B \subset N(\delta_2, A)$. Definimos $\delta = \max\{\delta_{n_1}, \delta_{n_2}\}$. Entonces $0 < \delta < \varepsilon_0$ y además $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Por lo tanto, $H(A, B) \leqslant \delta < \varepsilon_0$. $\square$

Corolario 1.42. *Sea X un continuo, sea $\varepsilon > 0$ y sean $A, B \in 2^X$ tales que $H(A, B) < \varepsilon$. Entonces para cada $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$.*

Corolario 1.43. *Sea X un continuo y sean A, B, C y K elementos de 2^X, con $A \subset B \subset C$. Si $H(A, K) < \varepsilon$ y $H(C, K) < \varepsilon$, entonces $H(B, K) < \varepsilon$.*

Demostración. Usando el Lema 1.41 y que $A \subset B$, como $H(A, K) < \varepsilon$ entonces $K \subset N(\varepsilon, A) \subset N(\varepsilon, B)$. Ahora, puesto que $H(C, K) < \varepsilon$ tenemos que $B \subset C \subset N(\varepsilon, K)$. Por lo tanto $H(B, K) < \varepsilon$. $\square$

Corolario 1.44. *Sea X un continuo, sean $A, B \in 2^X$ y sean $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$. Entonces $\lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \varepsilon$ y $H(B_n, B) < \varepsilon$ para cada $n \geqslant N$. Por los Lemas 1.26 y 1.41 tenemos que para cada $n \geqslant N$ se cumple que:

$$A_n \cup B_n \subset N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B) \text{ y}$$
$$A \cup B \subset N(\varepsilon, A_n) \cup N(\varepsilon, B_n) = N(\varepsilon, A_n \cup B_n).$$

En consecuencia $H(A_n \cup B_n, A \cup B) < \varepsilon$ para cada $n \geqslant N$. Por lo tanto $\lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$. □

Haciendo uso del límite inferior y límite superior obtenemos una forma equivalente de trabajar la convergencia en 2^X, la cual utilizaremos frecuentemente.

Teorema 1.45. *Sea X un continuo, sea $A \in 2^X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n \in 2^X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A con respecto a la métrica de Hausdorff y*

(b) $\operatorname{Ls} A_n \subset A \subset \operatorname{Li} A_n$.

Demostración. Supongamos que la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A con respecto a la métrica de Hausdorff. Demostraremos primero que

$$X \setminus A \subset X \setminus \operatorname{Ls} A_n. \tag{1.9}$$

Sea $x_0 \in X \setminus A$. Como $A \in 2^X$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, \{x_0\}) = \emptyset$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \varepsilon$ para toda $n \geqslant N$; en particular $A_n \subset N(\varepsilon, A)$ para cada $n \geqslant N$. Esto implica que $A_n \cap N(\varepsilon, \{x_0\}) = \emptyset$ para cada $n \geqslant N$. Por lo tanto $x_0 \notin \operatorname{Ls} A_n$, con lo que queda probado (1.9). Ahora se demostrará que

$$A \subset \operatorname{Li} A_n. \tag{1.10}$$

Sean $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. Como $\lim A_n = A$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \varepsilon$ para toda $n \geqslant N$. En particular $a \in A \subset N(\varepsilon, A_n)$ para cada $n \geqslant N$ (Lema 1.41). En otras palabras, para cada $n \geqslant N$ existe $a_n \in B(\varepsilon, a) \cap A_n$; así, $B(\varepsilon, a) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geqslant N$. Luego, $a \in \operatorname{Li} A_n$. De (1.9) y (1.10) concluimos que (a) implica (b).

Para demostrar que (b) implica (a) supongamos que la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a A. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $H(A_n, A) \geqslant \varepsilon$ para una cantidad infinita de n's. Del Lema 1.41 se sigue que existe un conjunto infinito $J \subset \mathbb{N}$ tal que $A_n \not\subset N(\varepsilon, A)$ para cada $n \in J$ o $A \not\subset N(\varepsilon, A_n)$ para cada $n \in J$.

Si $A_n \not\subseteq N(\varepsilon, A)$ para cada $n \in J$, elegimos un elemento $x_n \in A_n \setminus N(\varepsilon, A)$ para cada $n \in J$; como X es compacto podemos suponer que existe $x \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Notamos que $x \notin N(\varepsilon, A)$ y en particular $x \notin A$. Además, por el Lema 1.24 sabemos que $x \in \operatorname{Ls} A_n$. Concluimos en este caso que $\operatorname{Ls} A_n \not\subseteq A$.

Supongamos ahora que $A \not\subseteq N(\varepsilon, A_n)$ para cada $n \in J$. Por el Lema 1.28, sabemos que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{Li} A_n \subset N(\varepsilon, A_m)$ para toda $m \geqslant M$. Esto implica que $A \not\subseteq \operatorname{Li} A_n$. □

Corolario 1.46. *Sea X un continuo, sean $A, B \in 2^X$ y sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en 2^X tales que* $\lim A_n = A$ *y* $\lim B_n = B$. *Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos un punto $x_n \in A_n \cap B_n$. Como X es compacto existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $x \in X$. Por el Lema 1.24 y el Teorema 1.45 obtenemos que $x \in \operatorname{Ls} A_n \cap \operatorname{Ls} B_n \subset \lim A_n \cap \lim B_n$. □

Si tenemos una función continua entre dos continuos, podemos definir de manera natural una función continua entre sus hiperespacios del siguiente modo.

Definición 1.47. Sean X y Y continuos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Definimos la *función inducida* $2^f : 2^X \to 2^Y$ como $2^f(A) = f(A)$; además, para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos la *función inducida* $C_m(f) : C_m(X) \to C_m(Y)$ como $C_m(f)(A) = f(A)$.

Teorema 1.48. *Sean X y Y continuos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Entonces las funciones inducidas 2^f y $C_m(f)$ están bien definidas y son continuas.*

Demostración. Si $A \in 2^X$ tenemos que $2^f(A) \in 2^Y$ por ser imagen continua de un espacio compacto, así que 2^f está bien definida. Por otra parte, la función f es uniformemente continua por estar definida en un espacio compacto; por lo tanto, dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x_1, x_2) < \delta$, entonces $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Afirmamos que

$$\text{si } H_{2^X}(A, B) < \delta, \text{ entonces } H_{2^Y}(2^f(A), 2^f(B)) < \varepsilon. \tag{1.11}$$

Sea $f(a) \in 2^f(A)$ y sea $b \in B$ tal que $d_X(a, b) < \delta$ (Corolario 1.42). Entonces $d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Se sigue que $f(a) \in N(\varepsilon, 2^f(B))$ y por lo tanto $2^f(A) \subset N(\varepsilon, 2^f(B))$. Un argumento simétrico muestra que $2^f(B) \subset N(\varepsilon, 2^f(A))$ con lo que queda probado (1.11). Por lo tanto 2^f es continua.

Finalmente, sea $m \in \mathbb{N}$. Si $A \in C_m(X)$, entonces A tiene a lo más m componentes y la imagen de cada una bajo f es un subconjunto conexo de Y, por lo que $C_m(f)(A) = f(A) \in C_m(Y)$. La continuidad de $C_m(f)$ se sigue de que $C_m(f)$ es la restricción de la función 2^f al subconjunto $C_m(X)$. $\square$

Lema 1.49. *Sean X un continuo, $p \in X$ y $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(\operatorname{diám}(Y_n)) = 0$ y $p \in \operatorname{Li} Y_n$. Entonces $\lim Y_n = \{p\}$.*

Demostración. Como $p \in \operatorname{Li} Y_n$, por el Lema 1.23 existe una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $p_n \in Y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$. Supongamos que $\operatorname{Ls} Y_n \not\subseteq \{p\}$ y sea $q \in (\operatorname{Ls} Y_n) \setminus \{p\}$; entonces por el Lema 1.24 existe una sucesión $(q_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ en X tal que $q_{n_k} \in Y_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{k\to\infty} q_{n_k} = q$.

Sea $\varepsilon = \frac{d(p,q)}{3}$. Entonces existen $N, K \in \mathbb{N}$ tales que $d(p_n, p) < \varepsilon$ para cada $n \geqslant N$ y $d(q_{n_k}, q) < \varepsilon$ para cada $k \geqslant K$. Sea $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_0 \geqslant K$ y $N_{K_0} \geqslant N$. Entonces para cada $k \geqslant K_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(p,q) &\leqslant d(p, p_{n_k}) + d(p_{n_k}, q_{n_k}) + d(q_{n_k}, q) \\ &< \tfrac{d(p,q)}{3} + d(p_{n_k}, q_{n_k}) + \tfrac{d(p,q)}{3}. \end{aligned}$$

Esto implica que $\frac{d(p,q)}{3} < d(p_{n_k}, q_{n_k})$ para cada $k \geqslant K_0$, lo cual contradice que $\lim\limits_{n\to\infty}(\operatorname{diám} Y_n) = 0$. Por lo tanto $\operatorname{Ls} Y_n \subset \{p\} \subset \operatorname{Li} Y_n$ y por el Teorema 1.45 concluimos que $\lim Y_n = \{p\}$. $\square$

Corolario 1.50. *Sea X un continuo, sea $p \in X$ y sea $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(\operatorname{diám}(Y_n)) = 0$ y $p \in Y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\lim Y_n = \{p\}$.*

Lema 1.51. *[12, Lema 1.48, p. 78] Para cualquier continuo X, la función $\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$ dada por $\bigcup(\mathcal{A}) = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$ está bien definida y es continua y suprayectiva.*

Teorema 1.52. *Sea X un continuo. Si $\mathcal{A}$ es un subconjunto conexo de 2^X y $\mathcal{A} \cap C_m(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto de X con a lo más m componentes.*

Demostración. Supongamos que $\bigcup \mathcal{A}$ tiene más de m componentes. Entonces existen subconjuntos $K_1, \ldots, K_{m+1}$ de $\bigcup \mathcal{A}$ no vacíos y mutuamente separados tales que $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup\{K_i : 1 \leqslant i \leqslant m+1\}$. Sea $B \in \mathcal{A} \cap C_m(X)$. Entonces existe $i \in \{1, \ldots, m+1\}$ tal que $B \cap K_i = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $B \cap K_{m+1} = \emptyset$. Sea $K_0 = \bigcup\{K_i : 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Definimos

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_1 = \{L \in \mathcal{A} : L \subset K_0\} \text{ y} \\ &\mathcal{L}_2 = \{L \in \mathcal{A} : L \cap K_{m+1} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Notemos que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \mathcal{A}$. Como $B \in \mathcal{A}$ y $B \subset K_0$ entonces $\mathcal{L}_1 \neq \emptyset$. Además, como $K_{m+1} \neq \emptyset$ y $K_{m+1} \subset \bigcup \mathcal{A}$ se sigue que $\mathcal{L}_2 \neq \emptyset$.

Sea $L \in \mathrm{Cl}(\mathcal{L}_1)$. Como $\mathcal{L}_1 \subset \{L \in \mathcal{A} : L \subset \mathrm{Cl}(K_0)\} \subset 2^{\mathrm{Cl}(K_0)}$ y $2^{\mathrm{Cl}(K_0)} \in 2^{2^X}$ (Corolario 1.40-(d)), obtenemos que $\mathrm{Cl}(\mathcal{L}_1) \subset 2^{\mathrm{Cl}(K_0)}$. Entonces $L \subset \mathrm{Cl}(K_0)$, así que $L \cap K_{m+1} = \emptyset$; luego $L \notin \mathcal{L}_2$. Por lo tanto $\mathrm{Cl}(\mathcal{L}_1) \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$.

Sea $L \in \mathrm{Cl}(\mathcal{L}_2)$. Como $\mathcal{L}_2 \subset \{L \in \mathcal{A} : L \cap \mathrm{Cl}(K_{m+1}) \neq \emptyset\} \subset \mathcal{D}(\mathrm{Cl}(K_{m+1}))$ y por el Corolario 1.40-(e) sabemos que $\mathcal{D}(\mathrm{Cl}(K_{m+1})) \in 2^{2^X}$, se sigue que $L \in \mathrm{Cl}(\mathcal{L}_2) \subset \mathcal{D}(\mathrm{Cl}(K_{m+1}))$. Luego, $L \cap \mathrm{Cl}(K_{m+1}) \neq \emptyset$, por lo que $L \nsubseteq K_0$; así, $L \notin \mathcal{L}_1$ y obtenemos que $\mathcal{L}_1 \cap \mathrm{Cl}(\mathcal{L}_2) = \emptyset$. Concluimos entonces que $\mathcal{A}$ no es conexo. $\square$

Corolario 1.53. *Sea X un continuo. Si $\mathcal{A} \in C(2^X)$ y $\mathcal{A} \cap C_m(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in C_m(X)$.*

Demostración. Como $\mathcal{A} \in C(2^X) \subset 2^{2^X}$ se sigue del Lema 1.51 que $\bigcup \mathcal{A} \in 2^X$. Además, por el Teorema 1.52 el conjunto $\bigcup \mathcal{A}$ tiene a lo más m componentes, es decir, $\bigcup \mathcal{A} \in C_m(X)$. $\square$

1.2.2. Arcos ordenados

Definición 1.54. Sea X un continuo y sean $A, B \in 2^X$. Un *arco ordenado desde A hasta B* es una función continua $\alpha : [0,1] \to 2^X$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y para cada s, t con $0 \leqslant s < t \leqslant 1$ se tiene que $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

Teorema 1.55. *[12, Teorema 1.8, p. 46] Sea X un continuo y sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \neq B$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Existe un arco ordenado en 2^X desde A hasta B;

(b) $A \subset B$ y cada componente de B interseca a A.

Lema 1.56. *Sean X un continuo, A y $B \in 2^X$, $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha : [0,1] \to 2^X$ un arco ordenado desde A hasta B. Si $A \in C_n(X)$, entonces $\alpha([0,1]) \subset C_n(X)$.*

Demostración. Como $A \in C_n(X)$, existen $k \leqslant n$ y componentes $A_1, \ldots, A_k$ de A tales que $A = \bigcup\{A_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Sea $t \in (0,1]$. Entonces $\alpha|_{[0,t]}$ es un arco ordenado desde A hasta $\alpha(t)$. Supongamos que $\alpha(t) = \bigcup\{B_\gamma : \gamma \in I\}$, donde B_γ es una componente de $\alpha(t)$ para cada $\gamma \in I$ y $B_{\gamma_1} \neq B_{\gamma_2}$ si $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Definimos $f : I \to \{1, \ldots, k\}$ como

$$f(\gamma) = \min\{j \in \{1, \ldots, k\} : B_\gamma \cap A_j \neq \emptyset\}.$$

Por el Teorema 1.55 f está bien definida. Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in I$ tales que $f(\gamma_1) = f(\gamma_2)$. Entonces existe $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $B_{\gamma_1} \cap A_{j_0} \neq \emptyset$ y $B_{\gamma_2} \cap A_{j_0} \neq \emptyset$.

Como $B_{\gamma_1} \cup A_{j_0} \cup B_{\gamma_2} \in C(\alpha(t))$ y tanto B_{γ_1} como B_{γ_2} son componentes de $\alpha(t)$ se tiene que $B_{\gamma_1} = B_{\gamma_1} \cup A_{j_0} \cup B_{\gamma_2} = B_{\gamma_2}$ y así $\gamma_1 = \gamma_2$. Concluimos entonces que f es inyectiva, por lo que $|I| \leqslant k \leqslant n$. Por lo tanto, $\alpha(t) \in C_n(X)$ para toda $t \in [0,1]$. □

Los arcos ordenados son muy útiles para estudiar algunas propiedades de los hiperespacios de un continuo. El siguiente resultado es una aplicación en el estudio de la conexidad local.

Corolario 1.57. *Sea X un continuo y sea $\mathcal{L} \in \{2^X\} \cup \{C_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\mathcal{L}$ es localmente arcoconexo en X.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, probaremos que $B^H(\varepsilon, X) \cap \mathcal{L}$ es arcoconexo. Sea $A \in B^H(\varepsilon, X) \cap \mathcal{L}$. Como A está contenido en X y X es conexo, por el Teorema 1.55 existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to 2^X$ desde A hasta X. Como $\alpha(0) = A \in \mathcal{L}$ se tiene que $Im(\alpha) \subset \mathcal{L}$ (vea Lema 1.56). Sea $t \in [0,1]$. Tenemos que $X \subset N(\varepsilon, A) \subset N(\varepsilon, \alpha(t))$ y $\alpha(t) \subset N(\varepsilon, X)$, así que $\alpha(t) \in B^H(\varepsilon, X) \cap \mathcal{L}$ (vea Lema 1.41). Por lo tanto $\alpha : [0,1] \to \mathcal{L}$ es un arco ordenado en $B^H(\varepsilon, X) \cap \mathcal{L}$ y, así, $B^H(\varepsilon, X) \cap \mathcal{L}$ es arcoconexo. □

1.2.3. Contractibilidad en hiperespacios

En esta sección presentamos algunas relaciones que se conocen entre la contractibilidad en hiperespacios y los R^3-continuos.

Lema 1.58. *Sean X un continuo, $\mathcal{L}' \in \{2^X\} \cup \{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{C_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{L} \in \{2^X\} \cup \{C_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\mathcal{L}'$ es contráctil en $\mathcal{L}$ y

(b) existe una homotopía $H : \mathcal{L}' \times [0,1] \to \mathcal{L}$ tal que $H(A,0) = A$ y $H(A,1) = X$ para toda $A \in \mathcal{L}'$.

Demostración. Claramente (b) implica (a).

Supongamos que $\mathcal{L}'$ es contráctil en $\mathcal{L}$. Entonces existen $B \in \mathcal{L}$ y una homotopía $\hat{H} : \mathcal{L}' \times [0,1] \to \mathcal{L}$ tales que $\hat{H}(A,0) = A$ y $\hat{H}(A,1) = B$ para toda $A \in \mathcal{L}'$. Como $B \subset X$ y X es conexo, por el Teorema 1.55 sabemos que existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to 2^X$ tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(1) = X$. Más aún, por el Lema 1.56 se tiene que

$$\alpha([0,1]) \subset \mathcal{L}. \tag{1.12}$$

Definimos $H : \mathcal{L}' \times [0,1] \to \mathcal{L}$ como

$$H(A,t) = \begin{cases} \hat{H}(A,2t), & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ \alpha(2t-1), & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Por (1.12) y el Lema 1.5 se tiene que H está bien definida y es continua. Finalmente, notemos que $H(A,0) = A$ y $H(A,1) = X$ para toda $A \in \mathcal{L}'$. $\square$

Teorema 1.59. *Para cualquier continuo X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $F_1(X)$ es contráctil en $C(X)$,

(b) 2^X es contráctil,

(c) $C_m(X)$ es contráctil para toda $m \in \mathbb{N}$ y

(d) $C_m(X)$ es contráctil para alguna $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que $F_1(X)$ es contráctil en $C(X)$. Entonces existe una homotopía $H : F_1(X) \times [0,1] \to C(X)$ tal que $H(\{a\},0) = \{a\}$ y $H(\{a\},1) = X$ para toda $a \in X$ (Lema 1.58). Definimos $\hat{H} : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ como

$$\hat{H}(A,t) = \bigcup \{H(\{a\},t) : a \in A\}.$$

Veamos que $\hat{H}$ está bien definida. Para esto, notemos que

$$\{H(\{a\},t) : a \in A\} = H(F_1(A) \times \{t\}) \text{ para cada } (A,t) \in 2^X \times [0,1].$$

Como $A \in 2^X$ entonces $F_1(A)$ es compacto, así que $F_1(A) \times \{t\}$ es compacto; luego, $H(F_1(A) \times \{t\}) \in 2^{C(X)} \subset 2^{2^X}$. Por el Lema 1.51 tenemos que $\hat{H}(A,t) = \bigcup H(F_1(A) \times \{t\}) \in 2^X$, así que $\hat{H}$ está bien definida.

Para ver que $\hat{H}$ es continua, sea $((A_n,t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $2^X \times [0,1]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n,t_n) = (A_0,t_0)$ para algún $(A_0,t_0) \in 2^X \times [0,1]$. Entonces por la continuidad de 2^H (Teorema 1.48) y de $\bigcup$ (Lema 1.51) tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \hat{H}(A_n,t_n) &= \lim_{n\to\infty} \bigcup H(F_1(A_n) \times \{t_n\}) = \bigcup \lim_{n\to\infty} 2^H(F_1(A_n) \times \{t_n\}) \\ &= \bigcup 2^H(\lim_{n\to\infty} (F_1(A_n) \times \{t_n\}) = \bigcup 2^H(F_1(A_0) \times \{t_0\}) \\ &= \bigcup H(F_1(A_0) \times \{t_0\}) = \hat{H}(A_0,t_0). \end{aligned}$$

Luego, $\hat{H}$ es una homotopía. Además

$$\hat{H}((A,0)) = \bigcup\{H(\{a\},0) : a \in A\} = \bigcup\{\{a\} : a \in A\} = A \text{ y}$$
$$\hat{H}((A,1)) = \bigcup\{H(\{a\},1) : a \in A\} = \bigcup\{X : a \in A\} = X$$

para toda $A \in 2^X$. Por lo tanto 2^X es contráctil.

Supongamos ahora que 2^X es contráctil. Entonces existe una homotopía $H : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ tal que $H(A,0) = A$ y $H(A,1) = X$ para toda $A \in 2^X$ (Lema 1.58). Sea $m \in \mathbb{N}$. Definimos $\hat{H} : C_m(X) \times [0,1] \to C_m(X)$ dada por

$$\hat{H}(A,t) = \bigcup\{H(A,s) : s \in [0,t]\}.$$

Para ver que $\hat{H}$ está bien definida, notemos que $\{H(A,s) : s \in [0,t]\} = H(\{A\} \times [0,t])$. Como $\{A\} \times [0,t]$ es compacto y conexo entonces $H(\{A\} \times [0,t]) \in C(2^X)$. Además, $H(A,0) = A \in C_m(X) \cap H(\{A\} \times [0,t])$, así que $C_m(X) \cap H(\{A\} \times [0,t]) \neq \emptyset$. Luego, por el Corolario 1.53 tenemos que $\hat{H}(A,t) = \bigcup H(\{A\} \times [0,t]) \in C_m(X)$, así que $\hat{H}$ está bien definida.

Sea $((A_n,t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $C_m(X) \times [0,1]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n,t_n) = (A_0,t_0)$ para algún $(A_0,t_0) \in C_m(X) \times [0,1]$. Usando el Lema 1.51 y la continuidad de 2^H (Teorema 1.48) obtenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \hat{H}(A_n,t_n) &= \lim_{n\to\infty} \bigcup H(\{A_n\} \times [0,t_n]) = \bigcup \lim_{n\to\infty} 2^H(\{A_n\} \times [0,t_n]) \\ &= \bigcup 2^H(\{A_0\} \times [0,t_0]) = \bigcup H(\{A_0\} \times [0,t_0]) = \hat{H}(A_0,t_0).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\hat{H}$ es una homotopía. Notemos también que

$$\hat{H}(A,0) = \bigcup\{H(A,s) : s \in \{0\}\} = H(A,0) = A \text{ y}$$
$$\hat{H}(A,1) = \bigcup\{H(A,s) : s \in [0,1]\} = X$$

para toda $A \in C_m(X)$. Por lo tanto, $C_m(X)$ es contráctil.

Claramente (c) implica (d).

Para concluir la prueba, supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $C_m(X)$ es contráctil. Entonces existe una homotopía $H : C_m(X) \times [0,1] \to C_m(X)$ tal que $H(A,0) = A$ y $H(A,1) = X$ para toda $A \in C_m(X)$ (Lema 1.58). Definimos $\hat{H} : F_1(X) \times [0,1] \to C(X)$ como

$$\hat{H}(\{a\},t) = \bigcup\{H(\{a\},s) : s \in [0,t]\}.$$

Notemos que $\{H(\{a\},s) : s \in [0,t]\} = H(\{a\} \times [0,t])$ y que $\{a\} \times [0,t]$ es compacto y conexo. Entonces $H(\{a\} \times [0,t]) \in C(C_m(X)) \subset C(2^X)$. Como $H(\{a\},0) = \{a\} \in C(X)$ entonces $H(\{a\} \times [0,t]) \cap C(X) \neq \emptyset$. Luego, por el Corolario 1.53 tenemos que $\hat{H}(\{a\},t) = \bigcup H(\{a\} \times [0,t]) \in C(X)$, así que $\hat{H}$ está bien definida.

Consideremos una sucesión convergente $((\{a_n\},t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en $F_1(X) \times [0,1]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} (\{a_n\},t_n) = (\{a_0\},t_0)$ para algún $(\{a_0\},t_0) \in F_1(X) \times [0,1]$. Entonces usando el Lema 1.51 y que 2^H es continua (Teorema 1.48) obtenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \hat{H}(\{a_n\},t_n) &= \lim_{n\to\infty} \bigcup H(\{a_n\} \times [0,t_n]) = \bigcup \lim_{n\to\infty} 2^H(\{a_n\} \times [0,t_n]) \\ &= \bigcup 2^H(\{a_0\} \times [0,t_0]) = \bigcup H(\{a_0\} \times [0,t_0]) = \hat{H}(\{a_0\},t_0).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\hat{H}$ es una homotopía. Finalmente, como

$$\begin{aligned}\hat{H}(\{a\},0) &= \bigcup \{H(\{a\},s) : s \in \{0\}\} = H(\{a\},0) = \{a\} \text{ y} \\ \hat{H}(\{a\},1) &= \bigcup \{H(\{a\},s) : s \in [0,1]\} = X\end{aligned}$$

para toda $a \in X$, concluimos que $F_1(X)$ es contráctil en $C(X)$. □

Corolario 1.60. *Si X es un continuo contráctil, entonces 2^X y $C_m(X)$ son contráctiles para toda $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ y sea $\varphi : X \times [0,1] \to X$ una homotopía tal que $\varphi(x,0) = x$ y $\varphi(x,1) = x_0$ para toda $x \in X$. Definimos $\hat{\varphi} : F_1(X) \times [0,1] \to C(X)$ como $\hat{\varphi}(\{x\},t) = \{\varphi(x,t)\}$. Observemos que para todo $\{x\} \in F_1(X)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\{x\},0) &= \{x\} \text{ y} \\ \hat{\varphi}(\{x\},1) &= \{x_0\}.\end{aligned}$$

Por otra parte, sea $((\{y_n\},t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $F_1(X) \times [0,1]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} (\{y_n\},t_n) = (\{y_0\},t_0)$ para algún $(\{y_0\},t_0) \in F_1(X) \times [0,1]$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}(\{y_n\},t_n) = \lim_{n\to\infty} \{\varphi(y_n,t_n)\} &= \{\lim_{n\to\infty} \varphi(y_n,t_n)\} \\ &= \{\varphi(y_0,t_0)\} = \hat{\varphi}(\{y_0\},t_0)\end{aligned}$$

así que $\hat{\varphi}$ es una homotopía; luego, $F_1(X)$ es contráctil en $C(X)$. Finalmente, por el Teorema 1.59 concluimos que 2^X y $C_m(X)$ son contráctiles para toda $m \in \mathbb{N}$. □

Los siguientes resultados nos proporcionan una condición suficiente para que un continuo X y sus hiperespacios 2^X y $C_m(X)$ no sean contráctiles.

Teorema 1.61. *[1, Teorema 2, p. 209] Si un continuo X contiene un R^3-continuo, entonces X no es contráctil.*

Teorema 1.62. *[1, Teorema 3, p. 209] Sea X un continuo. Si $K \subset X$ es un R^3-continuo, entonces 2^K es un R^3-continuo en 2^X.*

Corolario 1.63. *Si un continuo X contiene un R^3-continuo, entonces 2^X y $C_m(X)$ no son contráctiles para toda $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por el Teorema 1.62 sabemos que 2^X contiene un R^3-continuo y del Teorema 1.61 obtenemos que 2^X no es contráctil. Finalmente, por el Teorema 1.59 concluimos que $C_m(X)$ no es contráctil para toda $m \in \mathbb{N}$. $\square$

1.2.4. Funciones de Whitney

Las funciones de Whitney constituyen una manera de medir el tamaño de los elementos de 2^X y son una herramienta muy útil para estudiar la estructura de los hiperespacios.

Definición 1.64. Sean X un continuo y $\mathcal{L} \in \{2^X\} \cup \{C_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$. Una *función de Whitney* para $\mathcal{L}$ es una función continua $\mu : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ tal que:

(a) $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$ y

(b) para cada $A, B \in \mathcal{L}$ tales que $A \subsetneq B$, se tiene que $\mu(A) < \mu(B)$.

Definición 1.65. Sea X un continuo y sea $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney. Un *nivel de Whitney para* $C(X)$ es un conjunto de la forma $\mu^{-1}(t) = \{A \in C(X) : \mu(A) = t\}$ para alguna $t \in [0, \mu(X))$.

Lema 1.66. *[6, Lema 8.4, p. 112] Los niveles de Whitney son continuos no degenerados.*

Definición 1.67. Sea X un espacio métrico. Decimos que X es *totalmente acotado* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de X tal que $X = \bigcup\{B(\varepsilon, x_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Las funciones de Whitney no son sencillas de construir, sin embargo en el Ejemplo 1.69 presentamos la construcción de una de ellas. Dado que usaremos dicha función de Whitney más adelante (Ejemplo 3.1) consideramos conveniente presentarla con detalle. Antes de ello introducimos un lema auxiliar.

Lema 1.68. *Sea X un espacio métrico totalmente acotado. Para cada $n \geqslant 2$ definimos una función $d_n : F_n(X) \to \mathbb{R}$ como*

$$d_n(A) = \begin{cases} 0, & \textit{si } |A| < n; \\ \min\{d(a_i, a_j) : a_i, a_j \in A \textit{ y } a_i \neq a_j\}, & \textit{si } |A| = n. \end{cases}$$

Entonces para cada $n \geqslant 2$ la función $\mu_n : 2^X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu_n(S) = \sup\{d_n(A) : A \in F_n(S)\}$$

está bien definida. Además, si $S, S' \in 2^X$ se cumple que:

(i) $\mu_{n+1}(S) \leqslant \mu_n(S)$ *para cada* $n \geqslant 2$*;*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(S) = 0$*;*

(iii) $\mu_2(S) = \operatorname{diám}(S)$ *y*

(iv) si $S \subset S'$*, entonces* $\mu_n(S) \leqslant \mu_n(S')$ *para cada* $n \geqslant 2$*.*

Demostración. Sea $S \in 2^X$. Observamos que si $A \in F_n(S)$, entonces $d_n(A) \leqslant \operatorname{diám}(S)$ para cada $n \geqslant 2$. Se sigue que $\mu_n(S)$ está bien definida y $\mu_n(S) \leqslant \operatorname{diám}(S)$ para cada $n \geqslant 2$.

Sea $n \geqslant 2$ y sea $A \in F_{n+1}(S)$. Digamos que $A = \{a_1, \ldots a_{k+1}\}$, con $k \leqslant n$. Entonces $A' = A \setminus \{a_{k+1}\} \in F_n(S)$ y $d_{n+1}(A) \leqslant d_n(A') \leqslant \mu_n(S)$. Por lo tanto $\mu_{n+1}(S) \leqslant \mu_n(S)$, con lo que queda probado (i).

Para demostrar (ii), sea $\varepsilon > 0$. Como X es totalmente acotado, existe un subconjunto finito $F = \{x_1, \ldots, x_N\}$ de X tal que $X = \bigcup\{B\left(\frac{\varepsilon}{3}, x_i\right) : 1 \leqslant i \leqslant N\}$. Sea $n > N$ y sea $A \in F_n(S)$. Probaremos que

$$d_n(A) < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{1.13}$$

Si A tiene menos de n puntos, entonces $d_n(A) = 0$. Si A tiene n puntos, entonces, como $n > N$, existe $k \in \{1, \ldots, N\}$ tal que la bola $B\left(\frac{\varepsilon}{3}, x_k\right)$ contiene más de un punto de A. Sean a_i y a_j dos puntos distintos en $A \cap B\left(\frac{\varepsilon}{3}, x_k\right)$. Esto implica que $d_n(A) \leqslant d(a_i, a_j) < \frac{2\varepsilon}{3}$ y prueba (1.13). Con esto concluimos que $\mu_n(S) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$ para cada $n > N$. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(S) = 0$.

Para probar (iii), notemos que

$$\begin{aligned} \mu_2(S) &= \sup\{d_2(A) : A \in F_2(S)\} = \sup\{d(a_i, a_j) : \{a_i, a_j\} \subset S\} \\ &= \sup\{d(a_i, a_j) : a_j, a_j \in S\} = \operatorname{diám}(S). \end{aligned}$$

Finalmente, sea $S' \in 2^X$ tal que $S \subset S'$ y sea $n \geqslant 2$. Entonces

$$\{d_n(A) : A \in F_n(S)\} \subset \{d_n(A) : A \in F_n(S')\}.$$

Se sigue que $\mu_n(S) \leqslant \mu_n(S')$, con lo que queda probado (iv). $\square$

Ejemplo 1.69. Una función de Whitney.

Sea X un espacio métrico totalmente acotado. Para cada $n \geqslant 2$ sean $d_n : F_n(X) \to \mathbb{R}$ y $\mu_n : 2^X \to \mathbb{R}$ como en el Lema 1.68. Definimos la función $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ como

$$\mu(S) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu_n(S)}{2^{n-1}}.$$

Sea $S \in 2^X$. Por el Lema 1.68-(i),(iii) sabemos que $\mu_n(S) \leqslant \text{diám}(S)$ para cada $n \geqslant 2$, por lo que $\mu(S)$ está bien definido y además $\mu(S) \leqslant \text{diám}(S)$. Demostraremos ahora que μ es una función de Whitney.

Para demostrar que μ es continua primero se probará que dada $\delta > 0$ se tiene que

$$\text{si } S' \subset N(\delta, S), \text{ entonces } \mu(S') \leqslant \mu(S) + 2\delta. \tag{1.14}$$

Supongamos que $S' \subset N(\delta, S)$. Sea $n \geqslant 2$ y sea $P'_n = \{p'_1, \ldots, p'_k\} \in F_n(S')$. Para cada $i \in \{1 \ldots, k\}$ elegimos $p_i \in S$ tal que $d(p_i, p'_i) < \delta$. Entonces $P_n = \{p_1, \ldots, p_k\} \in F_n(S)$ y para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ tenemos que

$$d(p'_i, p'_j) \leqslant d(p'_i, p_i) + d(p_i, p_j) + d(p_j, p'_j) < d(p_i, p_j) + 2\delta.$$

Se sigue que $d_n(P'_n) \leqslant d(p'_i, p'_j) < d(p_i, p_j) + 2\delta$ para cada $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Entonces

$$d_n(P'_n) < d_n(P_n) + 2\delta$$

y así

$$\begin{aligned}
\mu_n(S') &= \sup\{d_n(A) : A \in F_n(S')\} \\
&\leqslant \sup\{d_n(A) : A \in F_n(S)\} + 2\delta \\
&= \mu_n(S) + 2\delta \text{ para cada } n \geqslant 2.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\mu(S') = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu_n(S')}{2^{n-1}} \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu_n(S) + 2\delta}{2^{n-1}} = \mu(S) + 2\delta,$$

con lo que queda probado (1.14).

Ahora bien, dada $\varepsilon > 0$, si $H(S,S') < \frac{\varepsilon}{3}$, entonces $S' \subset N(\frac{\varepsilon}{3}, S)$ y $S \subset N(\frac{\varepsilon}{3}, S')$. De (1.14) obtenemos que $\mu(S') - \mu(S) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon$ y $\mu(S) - \mu(S') \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon$. Por lo tanto $|\mu(S') - \mu(S)| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$ y así obtenemos que

$$\mu \text{ es continua.} \tag{1.15}$$

Por otro lado, si $x \in X$, entonces, como $d_n(\{x\}) = 0$, para toda $n \geqslant 2$ tenemos que

$$\mu(\{x\}) = 0 \text{ para cada } x \in X. \tag{1.16}$$

Supongamos ahora que $S \subsetneq S'$. Sea $p \in S' \setminus S$ y sea $\delta = d(p, S) > 0$. Por el Lema 1.68-(ii), existe $N \geqslant 2$ tal que $\mu_n(S) < \delta$ para toda $n \geqslant N$. Sea $i > N$ tal que $\mu_i(S) < \mu_{i-1}(S)$. Sea $P_{i-1} \in F_{i-1}(S)$ y sea $P'_i = \{p\} \cup P_{i-1}$. Entonces $P'_i \in F_i(S')$ y

$$d_{i-1}(P_{i-1}) \leqslant \mu_{i-1}(S) < \delta.$$

Puesto que $d_{i-1}(P_{i-1}) < \delta \leqslant d(p,q)$ para cada $q \in P_{i-1}$, tenemos que $d_i(P'_i) = d_{i-1}(P_{i-1})$. Luego, para cada $P_{i-1} \in F_{i-1}(S)$ existe $P'_i \in F_i(S')$ tal que $d_{i-1}(P_{i-1}) = d_i(P'_i)$. Se sigue que $\mu_i(S) < \mu_{i-1}(S) \leqslant \mu_i(S')$. Como $\mu_k(S) \leqslant \mu_k(S')$ para cada $k \geqslant 2$ (Lema 1.68-(iv)) obtenemos que $\mu(S) < \mu(S')$. Por lo tanto, de (1.15) y (1.16) concluimos que μ es una función de Whitney. □

Los siguientes resultados serán utilizados en los próximos capítulos como herramientas para estudiar si un continuo o sus hiperespacios contienen R^3-continuos. También son útiles en el estudio de los hiperespacios en general.

Lema 1.70. *Sean $m \in \mathbb{N}$, $\mu : C_m(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $A \in C_m(X)$. Sean $A_1, \ldots, A_k$ las componentes de A. Si a_i es un punto de A_i para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces para cada $t \in [\mu(\{a_1, \ldots, a_k\}), \mu(X)]$ existe $B \in C_m(X)$ tal que*

(i) $\mu(B) = t$,

(ii) $B \subset A$ *o* $A \subset B$ *y*

(iii) $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset B$.

Demostración. Por el Teorema 1.55 y el Lema 1.56 existe un arco ordenado $\alpha_1 : [0,1] \to C_m(X)$ desde $\{a_1, \ldots, a_k\}$ hasta A y existe un arco ordenado $\alpha_2 : [0,1] \to C_m(X)$ desde A hasta X. Definimos $\alpha : [0,1] \to C_m(X)$ como

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t), & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ \alpha_2(2t-1), & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Por el Lema 1.5 la función α es continua. Además, para cada s, t con $0 \leqslant s < t \leqslant 1$ se tiene que $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$; en otras palabras α es un arco ordenado desde $\{a_1, \ldots, a_k\}$ hasta X. Luego, $\alpha([0,1])$ es conexo y como μ es una función de Whitney entonces $\mu(\alpha([0,1])) = [\mu(\{a_1, \ldots, a_k\}), \mu(X)]$. Así, existe $B \in \alpha([0,1]) \subset C_m(X)$ tal que $\mu(B) = t$. Como α es un arco ordenado tenemos que $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset B$. Finalmente, sea $r \in [0,1]$ tal que $B = \alpha(r)$. Si $r \leqslant \frac{1}{2}$, entonces $B = \alpha(r) \subset \alpha(\frac{1}{2}) = A$ y si $r \geqslant \frac{1}{2}$, entonces $A = \alpha(\frac{1}{2}) \subset \alpha(r) = B$. □

Como caso particular del lema anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.71. *Sean X un continuo, $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $A \in C(X)$. Entonces para cada $t \in [0, \mu(X)]$ existe $B \in C(X)$ tal que $\mu(B) = t$ y además $B \subset A$ o $A \subset B$.*

Corolario 1.72. *Sean $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $t \in [0, \mu(X)]$. Si A y B son subcontinuos de X tales que $A \subset B$ y $\mu(A) \leqslant t \leqslant \mu(B)$, entonces existe $D \in \mu^{-1}(t)$ tal que $A \subset D \subset B$.*

Demostración. Sea $\hat{\mu}$ la restricción de μ a $C(B)$. Entonces $\hat{\mu}$ es una función de Whitney, $t \in [0, \hat{\mu}(B)]$ y $A \in C(B)$. Por el Corolario 1.71 existe $D \in C(B)$ tal que $\mu(D) = \hat{\mu}(D) = t$ y además $D \subset A$ o $A \subset D$. Como $\mu(A) \leqslant \mu(D)$ concluimos que $A \subset D \subset B$. □

Corolario 1.73. *Sean $m \in \mathbb{N}$, $\mu : C_m(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $A \in C_m(X) \setminus F_m(X)$. Sean $A^1, \ldots, A^k$ las componentes de A y $t = \mu(A)$. Si para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ existe una sucesión $(A^i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a A^i y $A_n = A^1_n \cup \ldots \cup A^k_n$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ que cumple que para cada $n \geqslant N$ existe $B_n \in \mu^{-1}(t)$ tal que $B_n \subset A_n$ o $A_n \subset B_n$ y además B_n interseca cada componente de A_n.*

Demostración. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ sea $p^i \in A^i$ y sea $(p^i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $p^i_n \in A^i_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} p^i_n = p^i$ (Lema 1.23 y Teorema 1.45). Dado que $A \in C_m(X) \setminus F_m(X)$ se tiene que

$$\operatorname{lím}\{p^1_n, \ldots, p^k_n\} = \{p^1, \ldots, p^k\} \subsetneq A.$$

Como μ es una función de Whitney obtenemos que

$$\operatorname{lím}(\mu(\{p^1_n, \ldots, p^k_n\})) = \mu(\{p^1, \ldots, p^k\}) < \mu(A) = t.$$

Por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\{p^1_n, \ldots, p^k_n\}) < t$ para toda $n \geqslant N$.

Sea $n \geqslant N$. Sea P_n un subconjunto de $\{p^1_n, \ldots, p^k_n\}$ tal que P_n tiene un punto en cada componente de A_n. Entonces $P_n \subset A_n$ y $\mu(P_n) < t$. Por el Lema 1.70 existe $B_n \in \mu^{-1}(t)$ tal que $B_n \subset A_n$ o $A_n \subset B_n$ y además $P_n \subset B_n$. Esto implica que B_n interseca a cada componente de A_n. □

Corolario 1.74. *Sean X un continuo, $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $t_0 \in [0, \mu(X)]$. Entonces la unión de los elementos del nivel $\mu^{-1}(t_0)$ es igual a X.*

Demostración. Sea $x \in X$. Por el Corolario 1.71 existe $B \in C(X)$ tal que $\mu(B) = t_0$ y además $\{x\} \subset B$ o $B \subset \{x\}$. Como $\mu(\{x\}) = 0 \leqslant t_0$ se sigue que $\{x\} \subset B$. Por lo tanto $B \in \mu^{-1}(t_0)$ y $x \in B$. □

Lema 1.75. *Sean $\mathcal{L} \in \{2^X\} \cup \{C_m(X) : m \in \mathbb{N}\}$, $\mu : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ una función de Whitney, $A \in \mathcal{L}$ y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{L}$ tales que $\lim A_n = A$. Sea $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{L}$ tal que $\mu(B_n) = \mu(A)$ y $A_n \subset B_n$ o $B_n \subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim B_n = A$.*

Demostración. Sea $(B_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente de $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $\lim B_{n_k} = B$ para algún $B \in \mathcal{L}$. Como $\{B_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \subset \mu^{-1}(\mu(A))$ y μ es continua se sigue que $\mu(B) = \mu(A)$. Si $B_{n_k} \subset A_{n_k}$ para una cantidad infinita de k's, entonces $B = \lim B_{n_k} \subset \lim A_{n_k} = A$ y como $\mu(A) = \mu(B)$ se tiene que $A = B$. Similarmente, si $A_{n_k} \subset B_{n_k}$ para una infinidad de índices k obtenemos que $A = B$. Por lo tanto $\lim B_{n_k} = A$ y por el Lema 1.2 concluimos que $\lim B_n = A$. □

Proposición 1.76. *Sea X una compactación métrica del rayo $[0, 1)$ con residuo R. Sea $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y sea $t_0 = \mu(R)$. Entonces para cada $t \in [t_0, \mu(X))$ se tiene que el nivel $\mu^{-1}(t)$ es un arco.*

Demostración. Sea $t_1 \in [t_0, \mu(X))$. Primero se demostrará que existe un único elemento en el nivel $\mu^{-1}(t_1)$, el cual denotaremos por J, tal que $J \cap R \neq \emptyset$. Para esto, fijemos un punto $x \in R$. Por el Corolario 1.74 existe $J \in \mu^{-1}(t_1)$ tal que $x \in J$ y, así, $J \cap R \neq \emptyset$. Ahora se probará la unicidad de J. Supongamos que $A \in \mu^{-1}(t_1)$ y $A \cap R \neq \emptyset$, entonces se tiene que $A \subset R$ o $R \subset A$. Como $\mu(R) = t_0 \leqslant t_1 = \mu(A)$ obtenemos que $R \subset A$. Similarmente se tiene que $R \subset J$; así, $R \subset A \cap J$. Se sigue que $A \subset J$ o $J \subset A$, sin embargo, puesto que $\mu(A) = t_1 = \mu(J)$ concluimos que $A = J$.

Ahora, sea $S = X \setminus R$ y sea $h : S \to (0, 1]$ un homeomorfismo. Definimos una función $p : X \to [0, 1]$ como:

$$p(x) = \begin{cases} h(x), & \text{si } x \in S; \\ 0, & \text{si } x \in R. \end{cases}$$

Entonces se tiene que p es continua. Consideremos la función inducida por p, esto es, $\hat{p} : C(X) \to C([0, 1])$ definida por $\hat{p}(A) = p(A)$ para cada $A \in C(X)$. Por el Lema 1.48 sabemos que $\hat{p}$ es continua.

Por otra parte consideremos la función $\beta : C([0,1]) \to [0,1]$ definida por $\beta([a,b]) = a$. Por el Lema 1.38 tenemos que β es continua; luego, la función $\beta \circ \hat{p} : C(X) \to [0,1]$ es una función continua. Denotemos por g la restricción de la función $\beta \circ \hat{p}$ al nivel de Whitney $\mu^{-1}(t_1)$, entonces $g : \mu^{-1}(t_1) \to [0,1]$ es una función continua.

Recordemos ahora que J es el único elemento en $\mu^{-1}(t_1)$ tal que $J \cap R \neq \emptyset$. Observemos que si $A \in \mu^{-1}(t_1)$ y $g(A) = 0$ esto equivale a la condición $0 \in p(A)$, lo cual ocurre si y sólo si $A \cap R \neq \emptyset$. De este modo, tenemos que

$$\text{si } A \in \mu^{-1}(t_1), \text{ entonces } g(A) = 0 \text{ si y sólo si } A = J. \tag{1.17}$$

Ahora bien, como $\mu^{-1}(t_1)$ es compacto y g es una función continua, podemos considerar el número $b_0 = \text{máx}(g(\mu^{-1}(t_1)))$. A continuación se probará que la función $g : \mu^{-1}(t_1) \to [0, b_0]$ es biyectiva; para esto, vamos a probar que:

(a) La función g es inyectiva.

Sean $A, B \in \mu^{-1}(t_1)$ tales que $g(A) = g(B)$, entonces se tienen dos posibilidades:

(i) Si $g(A) = g(B) = 0$, se sigue de (1.17) que $A = B = J$.

(ii) Si $g(A) = g(B) > 0$, entonces $\beta(\hat{p}(A)) = \beta(\hat{p}(B))$; luego, $p(A) \subset p(B)$ o $p(B) \subset p(A)$. Dado que $A, B \subset S$ y S es homeomorfo al rayo $(0,1]$, se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$. Finalmente, como $\mu(A) = \mu(B)$ se concluye que $A = B$.

En cualquier caso se tiene que $A = B$; por lo tanto g es inyectiva. Ahora veamos que:

(b) La función g es suprayectiva.

Notemos que tanto 0 como b_0 pertenecen a $g(\mu^{-1}(t_1))$. Ahora bien, como g es continua y $\mu^{-1}(t_1)$ es conexo (Lema 1.66), entonces $g(\mu^{-1}(t_1))$ es un subespacio conexo de $[0, b_0]$ que tiene a 0 y a b_0. Por lo tanto, $g(\mu^{-1}(t_1)) = [0, b_0]$ y, en consecuencia, g es suprayectiva.

Finalmente, como $\mu^{-1}(t_1)$ y $[0, b_0]$ son continuos (Lema 1.66) y g es continua y biyectiva, entonces g es un homeomorfismo. Por lo tanto, $\mu^{-1}(t_1)$ es un arco. $\square$

Definición 1.77. Una propiedad topológica P es llamada *propiedad de Whitney* (respectivamente *propiedad de Whitney para $C_m(X)$*) si siempre que un continuo X tenga la propiedad P, se sigue que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad P para toda función de Whitney $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ (respectivamente $\mu : C_m(X) \to \mathbb{R}$) y para toda $t \in [0, \mu(X))$.

Definición 1.78. Una propiedad topológica P es llamada *propiedad reversible de Whitney* si cada vez que $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ es una función de Whitney y para cada $t \in (0, \mu(X))$ se tiene que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad P, se sigue que X también tiene la propiedad P.

Teorema 1.79. *La propiedad de ser un arco es una propiedad de Whitney.*

Demostración. Sea X un arco y sea $f : [0, 1] \to X$ un homeomorfismo. Entonces X es una compactación métrica del rayo $[0, 1)$ cuyo residuo es $\{f(1)\}$. Sea $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney; como $\mu(\{f(1)\}) = 0$, se sigue de la Proposición 1.76 que el nivel $\mu^{-1}(t)$ es un arco para cada $t \in [0, \mu(X))$. □

Teorema 1.80. *La propiedades de contener R^3-continuos y la de no ser contráctil no son propiedades de Whitney.*

Demostración. Sean X e I como en el Ejemplo 1.30. Entonces X contiene un R^3-continuo y además X es una compactación métrica del rayo $(0, 1]$ con residuo I.

Sea μ una función de Whitney cualquiera y sea $t_0 = \mu(I)$. Por la Proposición 1.76 se tiene que el nivel $\mu^{-1}(t_0)$ es un arco. Luego, $\mu^{-1}(t_0)$ es localmente conexo y se sigue del Lema 1.31 que $\mu^{-1}(t_0)$ no contiene R^3-continuos. Por lo tanto, contener R^3-continuos no es una propiedad de Whitney. Más aún, $\mu^{-1}(t_0)$ es contráctil y por Teorema 1.61 sabemos que X no es contráctil. Concluimos entonces que no ser contráctil no es una propiedad de Whitney. □

Concluimos esta sección comentando que la conexidad local es una propiedad de Whitney ([12, Teorema 14.9, p. 408]) y también es una propiedad reversible de Whitney ([12, Teorema 14.47, p. 456]). Por otra parte, la arcoconexidad es una propiedad de Whitney ((([12, Teorema 14.8, p. 405]) pero no es una propiedad reversible de Whitney ([9, Ejemplo 3]) y no ser unicoherente es una propiedad reversible de Whitney ([12, Teorema 14.16, p. 350]) que no es una propiedad de Whitney ([12, Ejemplo 14.29, p. 330]). Finalmente, ser un cubo de Hilbert y tener la propiedad del punto fijo[2] tampoco son propiedades de Whitney ([12, Teorema 14.42.1, p. 436] y ([12, Teorema 14.30, p. 427])).

En los capítulos siguientes se demostrará que no contener R^3-continuos, ser contráctil y tener hiperespacios contráctiles no son propiedades de Whitney.

[2]Un espacio topológico X tiene la *propiedad del punto fijo* si para toda función continua $f : X \to X$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Capítulo 2

R^3-continuos en $C_m(X)$

En este capítulo estudiaremos algunas relaciones entre los R^3-continuos de un continuo X y aquellos de sus hiperespacios $C_m(X)$. Consideremos las siguientes condiciones para un continuo X:

(I) X contiene R^3-continuos,

(II) 2^X contiene R^3-continuos y

(III) $C_m(X)$ contiene R^3-continuos.

En [1, Teorema 3, p. 209] W. J. Charatonik probó que (I) implica (II). En [5, Ejemplo 2.1, p. 535] A. Illanes demostró que (III) no implica (I) para $m = 1$. Este ejemplo se desarrolla en la sección 2.1 y será utilizado para construir un continuo que muestra que la condición (III) no implica la condición (I) para ninguna $m \in \mathbb{N}$; la prueba de esto se dará en la sección 2.2. Por otra parte, en [5, Teorema 1.5, p. 532] A. Illanes probó que si X es hereditariamente unicoherente, entonces (II) y (III) implican (I) para $m = 1$. En la última sección de este capítulo demostraremos que esto se cumple para toda $m \in \mathbb{N}$. No se sabe si (I) implica (III), si (III) implica (II), ni si (II) implica alguna de las otras dos condiciones.

2.1. Un ejemplo en $C(X)$

En esta sección daremos un ejemplo de un subcontinuo X de $\mathbb{R}^3$ que cumple lo siguiente:

(a) X no contiene R^3-continuos,

(b) $C(X)$ contiene un R^3-continuo, y

(c) para cada función de Whitney $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ existe $t \in (0, \mu(X))$ tal que $\mu^{-1}(t)$ contiene un R^3-continuo.

Esto muestra que la condición (III) no implica la condición (I) para $m = 1$. También muestra que la propiedad de no contener R^3-continuos no es una propiedad de Whitney. Las condiciones (a), (b) y (c) se demostrarán en los Teoremas 2.5, 2.6 y 2.7, respectivamente.

A lo largo de esta sección trabajaremos con la métrica d' del máximo en $\mathbb{R}^3$, es decir, $d' : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es tal que

$$d'((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \text{máx}\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|\}.$$

Ejemplo 2.1. Para construir X consideremos la dendrita de Gehman Y (vea Ejemplo 1.17). La dendrita Y es plana, está representada en la Figura 1.2 y supondremos que está encajada en el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ de manera que interseca al eje X exactamente en el conjunto de Cantor C_0 que está localizado sobre el intervalo $[0,1] \times \{0\}$.

Denotamos por Y^* al conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,-y) \in Y\}$. Además, para cada $n \geqslant 1$, sea

$$\begin{aligned} A_n = {} & \big(-3,0,0\big)\big(-\tfrac{3}{2},0,\tfrac{1}{n}\big)\big(-\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{n}\big) \\ & \cup \big(-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{n}\big)\big(-\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{n}\big)\big(-\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{n}\big)\big(\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{n}\big)\big(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n}\big)\big(-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n}\big) \\ & \cup \Big[\big(\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{n}\big)+\big(Y\times\{0\}\big)\Big] \cup \Big[\big(-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{n}\big)+\big(Y^*\times\{0\}\big)\Big] \end{aligned}$$

(vea Figura 2.1). También, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $B_n = -A_n = \{p \in \mathbb{R}^3 : -p \in A_n\}$. Definimos

$$\begin{aligned} X = {} & \Big(\bigcup\{A_n : n \geqslant 1\}\Big) \cup \Big(\bigcup\{B_n : n \geqslant 1\}\Big) \\ & \cup \big(-3,0,0\big)\big(3,0,0\big) \cup \big([-\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}]\times[-\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}]\times\{0\}\big). \end{aligned}$$

Observamos que X es un continuo.
Finalmente definimos

$$\begin{aligned} X^0 &= \{(x,y,z) \in X : z = 0\}, \\ X^+ &= \{(x,y,z) \in X : z \geqslant 0\} \text{ y} \\ X^- &= \{(x,y,z) \in X : z \leqslant 0\}. \end{aligned}$$

En los siguientes tres lemas demostraremos algunas propiedades del continuo X y de algunos de sus subconjuntos. Estos resultados serán utilizados en el Teorema 2.5.

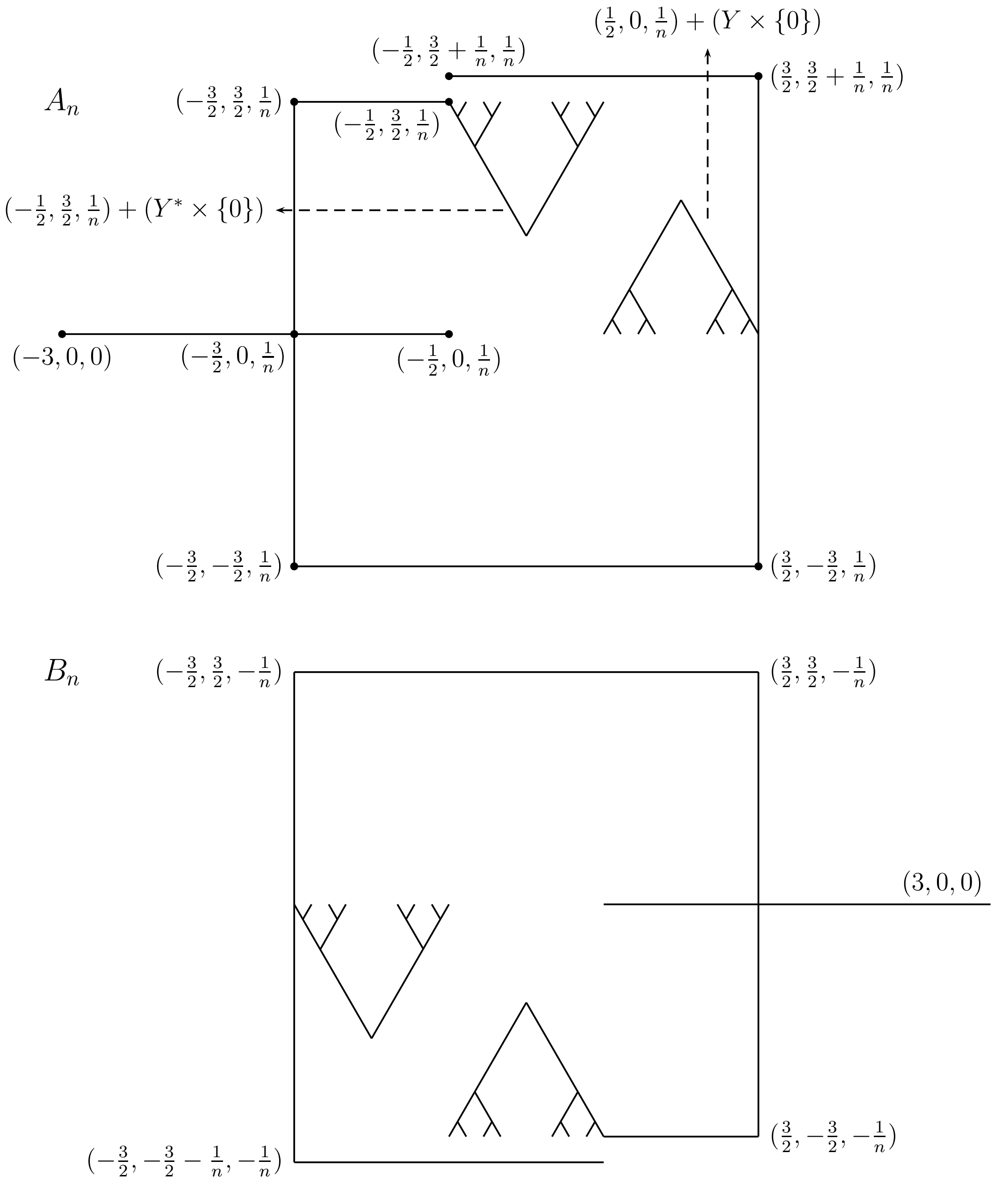

Figura 2.1: los conjuntos A_n y B_n.

Lema 2.2. *Sean X, Y, C_0, X^0 y A_n para cada $n \in \mathbb{N}$ como en el Ejemplo 2.1. Sea $p \in (C_0 \times \{0\}) + (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ y sean*

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,y,z) \in X : y > \tfrac{3}{2}\} \text{ y} \\ E_2 &= \{(x,y,z) \in X : y \leqslant \tfrac{3}{2}\}. \end{aligned}$$

Entonces para cada subconjunto abierto W de X tal que $p \in W$ existe un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V \subset W$ y además:

(i) para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $V \cap A_n$ es vacío o tiene exactamente dos componentes H_n y G_n tales que

$$\begin{aligned} H_n &= V \cap A_n \cap E_1 \text{ y} \\ G_n &= V \cap A_n \cap E_2; \end{aligned}$$

(ii) $V \cap X^0$ es conexo y

(iii) para toda componente D de V y cualesquiera $q, w \in V \cap \big((-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\})\big)$ se tiene que $d'(q,D) = d'(w,D)$.

Demostración. Sea W un subconjunto abierto de X tal que $p \in W$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea

$$M_i = \Big([-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \times [\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{3^i}, \tfrac{3}{2}] \times \{0\}\Big) \cap \Big(Y^* + (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 0)\Big)$$

y sea Z_i la componente de M_i tal que $p \in Z_i$. Como $\text{diám}_{d'}(Z_i) = \frac{1}{3^i} \text{diám}_{d'}(Y^* + (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0))$ tenemos que $\lim\limits_{i\to\infty}(\text{diám}_{d'}(Z_i)) = 0$. Así, del Corolario 1.50 obtenemos que

$$\lim Z_i = \{p\}. \tag{2.1}$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B^{d'}(\varepsilon, p) \subset W$. Por (2.1) existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $Z_k \subset B^{d'}(\varepsilon, p)$. Definimos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \inf\{x \in \mathbb{R} : (x, \tfrac{3}{2}, 0) \in Z_k\} \text{ y} \\ x_2 &= \sup\{x \in \mathbb{R} : (x, \tfrac{3}{2}, 0) \in Z_k\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Notemos que $[x_1, x_2] \times \{\frac{3}{2}\} \times \{0\} \subset B^{d'}(\varepsilon, p)$. Sea $\delta \in (0,1)$ tal que

(1) $N^{d'}(\delta, [x_1, x_2] \times \{\frac{3}{2}\} \times \{0\}) \subset B^{d'}(\varepsilon, p)$,

(2) $N^{d'}(\delta, Z_k) \subset B^{d'}(\varepsilon, p)$ y

(3) $N^{d'}(\delta, Z_k)$ no interseca a las demás componentes de M_k.

Sea
$$V = N^{d'}\big(\delta, Z_k\big) \cup N^{d'}\big(\delta, [x_1, x_2] \times \{\tfrac{3}{2}\} \times \{0\}\big).$$
Entonces V es un subconjunto abierto de X y $p \in V \subset W$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\frac{1}{n} \geqslant \delta$, entonces $V \cap A_n$ es vacío. Si $\frac{1}{n} < \delta$, entonces H_n y G_n definidos como en (i) son no vacíos y además
$$H_n = [(x_1 - \delta, x_2 + \delta) \times \{\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{n}\} \times \{\tfrac{1}{n}\}] \cap A_n$$
es una componente de $V \cap A_n$. De (3) obtenemos que G_n también es una componente de $V \cap A_n$; esto muestra (i).

Sea $Z = Z_k \cup \big([x_1, x_2] \times \big\{\frac{3}{2}\big\} \times \{0\}\big)$. Para mostrar (ii), notemos que Z es un subconjunto conexo de X^0 y que $V = \bigcup\{B^{d'}(\delta, x) : x \in Z\}$. Como $B^{d'}(\delta, x) \cap X^0$ es un conjunto conexo para cada $x \in Z$ concluimos que $V \cap X^0 = \bigcup\{B^{d'}(\delta, x) \cap X^0 : x \in Z\}$ es conexo.

Consideremos ahora una componente D de V y sean $q, w \in V \cap \big((-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\})\big)$. Por (2.2) y (3) sabemos que $\{q, w\} \subset [x_1, x_2] \times \{\frac{3}{2}\} \times \{0\}$. Como $\delta < 1$, notemos que si $\frac{1}{n} < \delta$, entonces
$$V \cap B_n = (x_1 - \delta, x_2 + \delta) \times \{\tfrac{3}{2}\} \times \{-\tfrac{1}{n}\}$$
es una componente de V. Así, por (i) y (ii) tenemos que
$$D \in \big\{V \cap X^0\big\} \cup \{H_n, G_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{B_n \cap V : n \in \mathbb{N}\}.$$
Si $D = V \cap X^0$, entonces $d'(q, D) = 0 = d'(w, D)$. Si $D = H_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $d'(q, D) = \max\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\} = \frac{1}{n} = d'(w, D)$ y si $D = G_n$ o $D = B_n \cap V$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $d'(q, D) = \max\{0, 0, \frac{1}{n}\} = \frac{1}{n} = d'(w, D)$, con lo que queda probado (iii). □

Lema 2.3. *Sean X y C_0 como en el Ejemplo 2.1 y sea $p \in (C_0 \times \{0\}) + (-\frac{3}{2}, 0, 0)$. Entonces para cada subconjunto abierto W de X tal que $p \in W$ existe un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V \subset W$ y además:*

(*) para toda componente D de V y cualesquiera $q, w \in V \cap \big((-\frac{3}{2}, 0, 0) + (C_0 \times \{0\})\big)$ se tiene que $d'(q, D) = d'(w, D)$.

Demostración. Similar a la del Lema 2.2. □

Lema 2.4. *Sea X un continuo y sea K un R^3-continuo de X. Digamos que $K = \operatorname{Li} C_n \subset U$, donde $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de componentes de un subconjunto abierto y propio U de X. Sea $p_0 \in K$ y sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $p_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_0$. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea $\alpha_n : [0, 1] \to X$ una trayectoria tal que $\alpha_n(0) = p_n$ y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a α_0. Entonces $\alpha_0(1) \in K$.*

Demostración. Supongamos que $\alpha_0(1) \notin K$. Por el Lema 1.8, la función $F : \{p_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \times [0,1] \to X$ definida como $F(p_n, t) = \alpha_n(t)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para cada $t \in [0,1]$ es continua. Notemos que $F(p_n, 0) = p_n$ para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $F(p_0, 1) \notin K$. Sea

$$t = \text{máx}\{s \in [0,1] : F(\{p_0\} \times [0,s]) \subset K\}. \tag{2.3}$$

Entonces $t < 1$. Como $F(p_0, t) \in K \subset U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $[t, t+\varepsilon) \subset [0,1]$ y $F(\{p_0\} \times [t, t+\varepsilon)) \subset U$. Sea $r \in (t, t+\varepsilon)$. Entonces $r \in (t,1)$ y $F(\{p_0\} \times [0,r]) \subset U$. Como $F(\{p_0\} \times [0,r]) \in 2^X$, existe $\delta > 0$ tal que

$$N(\delta, F(\{p_0\} \times [0,r])) \subset U. \tag{2.4}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} F(\{p_n\} \times [0,r]) = F(\{p_0\} \times [0,r])$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(F(\{p_n\} \times [0,r]), F(\{p_0\} \times [0,r])) < \delta$ para toda $n \geqslant N$. Esto y (2.4) implican que $p_n \in F(\{p_n\} \times [0,r]) \subset U$ para cada $n \geqslant N$. Luego, como $F(\{p_n\} \times [0,r])$ es conexo obtenemos que $F(\{p_n\} \times [0,r]) \subset C_n$ para cada $n \geqslant N$. Se sigue que $F(\{p_0\} \times [0,r]) \subset \operatorname{Li} C_n = K$ contradiciendo (2.3). Por lo tanto, $\alpha_0(1) \in K$. □

Teorema 2.5. *Sea X como en el Ejemplo 2.1. Entonces X no contiene R^3-continuos.*

Demostración. Supongamos que X contiene un R^3-continuo K; digamos que $K = \operatorname{Li} C_n \subset U$, donde $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de componentes de un subconjunto abierto y propio U de X. Por el Lema 1.31 se tiene que

$$K \subset X^0 \setminus \{(-3,0,0), (3,0,0)\}. \tag{2.5}$$

Sea $p \in K$. Consideremos una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $p_n \in C_n$ para cada $n \geqslant 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ (vea Lema 1.23). Probaremos primero que

$$\text{existe un subconjunto infinito } J \subset \mathbb{N} \text{ tal que } p_n \notin X^0 \text{ para ninguna } n \in J. \tag{2.6}$$

Supongamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in X^0$ para toda $n \geqslant N$. Como $U \cap X^0$ es un subconjunto abierto de X^0, $p \in U \cap X^0$ y X^0 es localmente conexo entonces existe un subconjunto abierto y conexo V, de X^0, tal que $p \in V \subset U \cap X^0 \subset U$. Sea $M \geqslant N$ tal que $p_n \in V$ para toda $n \geqslant M$. Entonces $V \subset C_M \cap C_{M+k}$ para cada $k \geqslant 1$, de donde se sigue que $C_M = C_{M+k}$ para cada $k \geqslant 1$. Por lo tanto $K = \operatorname{Li} C_n = \operatorname{Cl}(C_M)$; luego por el Teorema 1.14 obtenemos que $K \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$, contradiciendo que $K \subset U$. Esto prueba (2.6). Consideremos ahora cinco casos para p:

Caso 1. $p \in \mathrm{Li}(C_n \cap X^+)$ y $p \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{\frac{3}{2}\} \times \{0\}$.

En este caso existe una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $p_n \in C_n \cap X^+$ para cada $n \geqslant 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ (vea Lema 1.23).

Se sigue de (2.6) que $p \in \lim A_n \setminus \big[[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{\frac{3}{2}\} \times \{0\}\big]$. Sea

$$A_0 = \lim A_n \setminus \big[(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \times \{\tfrac{3}{2}\} \times \{0\}\big]$$

y sea $\alpha : [0,1] \to A_0$ un arco tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = (-3,0,0)$. Definimos $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como $\pi(x,y,z) = (x,y,0)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \notin X^0$ sea $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in A_{m_n}$. Definimos $m_n = 0$ para cada n tal que $p_n \in X^0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $r_n = d'(p,p_n) + \frac{1}{n}$.

A continuación, para cada $n \in \mathbb{N}$ definiremos una trayectoria $\alpha_n : [0,1] \to X$ tal que $\alpha_n(0) = p_n$ y para toda $t \in [0,1]$ se cumple que $d'(\alpha_n(t), \alpha(t)) \leqslant 4r_n$.

Subcaso 1a. $p \notin (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \times \{\frac{3}{2}\} \times \{0\}$.

Si $p_n \in X^0 \setminus \alpha([0,1])$, sea $s_n \in (0,1)$ tal que $\alpha([0,s_n]) \subset B^{d'}(r_n, p)$ y sea $\beta_n : [0,s_n] \to p_n p \cup \alpha([0,s_n])$ una trayectoria tal que $\beta_n(0) = p_n$ y $\beta_n(s_n) = \alpha(s_n)$. Definimos $\alpha_n : [0,1] \to X$ como

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \beta_n(t), & \text{si } \ t \in [0,s_n]; \\ \alpha(t), & \text{si } \ t \in [s_n,1]. \end{cases}$$

Por el Lema 1.5 sabemos que α_n es continua. Como $\beta_n([0,s_n]) \cup \alpha([0,s_n]) \subset p_n p \cup \alpha([0,s_n]) \subset B^{d'}(2r_n, p)$, tenemos que $d'(\alpha_n(t), \alpha(t)) \leqslant \mathrm{diám}_{d'}(B^{d'}(2r_n,p)) = 4r_n$ si $t \in [0,s_n]$ y además $d'(\alpha_n(t), \alpha(t)) = d'(\alpha(t), \alpha(t)) = 0$ si $t \in [s_n, 1]$. Luego, $d'(\alpha_n(t), \alpha(t)) \leqslant 4r_n$ para todo $t \in [0,1]$.

Sea $\mathcal{A} = \alpha([0,1]) \cup \big(\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}\big)$. Si $p_n \in \mathcal{A}$, sea $\sigma_n : [0,1] \to \mathcal{A}$ un arco tal que $\sigma_n(0) = p_n$ y $\sigma_n(1) = (-3,0,0)$. Sea

$$\hat{s}_n = \min\{s \in [0,1] : \alpha([s,1]) \subset (\pi \circ \sigma_n)([0,1])\}.$$

Como $p \neq (-3,0,0)$ entonces $\hat{s}_n < 1$. Sea $s_n \in (\hat{s}_n, 1]$ tal que $d'(\alpha(s_n), \alpha(\hat{s}_n)) < r_n$. Sea $\beta_n : [0,s_n] \to X$ un arco tal que $\beta_n(0) = p_n$ y $\pi(\beta_n(s_n)) = \alpha(s_n)$. Sea $\gamma_n : [s_n, 1] \to \mathcal{A}$ un arco tal que $(\pi \circ \gamma_n)(t) = \alpha(t)$ para cada $t \in [s_n, 1]$. Definimos $\alpha_n : [0,1] \to X$ como

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \beta_n(t), & \text{si } \ t \in [0,s_n]; \\ \gamma_n(t), & \text{si } \ t \in [s_n,1]. \end{cases}$$

Por el Lema 1.5 sabemos que α_n es continua. Notemos que

$$\text{si } t \in [s_n, 1], \text{ entonces } d'(\alpha(t), \alpha_n(t)) \leqslant d'(\pi(\gamma_n(t)), \gamma_n(t)) \leqslant d'(p, p_n) < r_n. \tag{2.7}$$

Si $p \notin \big[(C_0 \times \{0\}) + (\frac{1}{2}, 0, 0)\big]$, entonces existe una vecindad L de p en A_0 tal que L es un arco, un triodo simple o un 4-odo simple con vértice p. Luego, podemos suponer que $\pi(\beta_n([0, s_n])) \cup \alpha([0, s_n]) \subset B^{d'}(r_n, p)$. Esto implica que para cada $t \in [0, s_n]$ se tiene que

$$\begin{aligned} d'(\alpha(t), \alpha_n(t)) &= d'(\alpha(t), \beta_n(t)) \\ &\leqslant d'(\alpha(t), \alpha(s_n)) + d'(\pi(\beta_n(s_n)), \pi(\beta_n(t))) + d'(\pi(\beta_n(t)), \beta_n(t)) \\ &\leqslant r_n + r_n + r_n = 3r_n. \end{aligned}$$

Si $p \in \big[(C_0 \times \{0\}) + (\frac{1}{2}, 0, 0)\big]$, entonces podemos suponer que $\pi(p_n) \in (Y \times \{0\}) + (\frac{1}{2}, 0, 0)$ o que $\pi(\beta([0, s_n])) \cup \alpha([0, s_n]) \subset B^{d'}(r_n, p)$. Si $\pi(p_n) \in (Y \times \{0\}) + (\frac{1}{2}, 0, 0)$, por el Corolario 1.19 tenemos que

$$\text{diám}_{d'}\big(\alpha([0, s_n]) \cup \beta_n([0, s_n])\big) \leqslant 3d'(p, \pi(p_n)) \leqslant 3d'(p, p_n).$$

Como consecuencia de esto tenemos que $d'(\alpha(t), \alpha_n(t)) \leqslant 3r_n$ para cada $t \in [0, s_n]$. Por esto y (2.7) concluimos que $d'(\alpha(t), \alpha_n(t)) \leqslant 3r_n$ para toda $t \in [0, 1]$.

Subcaso 1b. $p \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \times \left\{\frac{3}{2}\right\} \times \{0\}$.

Si $p_n \in X^0 \setminus \alpha([0, 1])$ o $\pi(p_n) \in \alpha([0, 1])$ definimos α_n como en el Subcaso 1a.
Si $p_n \notin X^0$ y $\pi(p_n) \notin \alpha([0, 1])$, podemos suponer que $p_n \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \times \{\frac{3}{2} + \frac{1}{m_n}\} \times \{\frac{1}{m_n}\}$. Supongamos que $p_n = (a_n, \frac{3}{2} + \frac{1}{m_n}, \frac{1}{m_n})$ y $p = (a, \frac{3}{2}, 0)$. Sea $\{x_n, y_n\} \subset (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ tal que $\text{máx}\{a, a_n\} < x_n < y_n$,

$$\text{máx}\{x_n - a_n, x_n - a\} < r_n \quad \text{y} \tag{2.8}$$
$$\tfrac{3}{2} - y_n < r_n. \tag{2.9}$$

Sean $s_n, \hat{s}_n, t_n \in [0, 1]$ tales que $\alpha(s_n) = (x_n, \frac{3}{2}, 0)$, $\alpha(\hat{s}_n) = (y_n, \frac{3}{2}, 0)$ y $\alpha(t_n) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$. Consideremos un arco $\beta_n : [0, s_n] \to X$ tal que $\beta_n(0) = p_n$ y $\beta_n(s_n) = (x_n, \frac{3}{2} + \frac{1}{m_n}, \frac{1}{m_n})$ y un arco $\sigma_n : [\hat{s}_n, t_n] \to X$ tal que $\sigma_n(\hat{s}_n) = (y_n, \frac{3}{2} + \frac{1}{m_n}, \frac{1}{m_n})$ y $\sigma_n(t_n) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{m_n})$. Sea $\gamma_n : [t_n, 1] \to A_{m_n}$ un arco tal que $(\pi \circ \gamma_n)(t) = \alpha(t)$ para cada $t \in [t_n, 1]$. Definimos $\alpha_n : [0, 1] \to X$ como

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \beta_n(t), & \text{si } t \in [0, s_n]; \\ \alpha(t) + (0, \frac{1}{m_n}, \frac{1}{m_n}), & \text{si } t \in [s_n, \hat{s}_n]; \\ \sigma_n(t), & \text{si } t \in [\hat{s}_n, t_n]; \\ \gamma_n(t), & \text{si } t \in [t_n, 1]. \end{cases}$$

Por el Lema 1.5 sabemos que α_n es continua. Por otro lado, por (2.8) y (2.9) tenemos que

$$\alpha([0,s_n]) \cup \alpha_n([0,s_n]) \subset B^{d'}(r_n,p) \text{ y}$$
$$\alpha([\hat{s}_n,t_n]) \cup \alpha_n([\hat{s}_n,t_n]) \subset B^{d'}(r_n,(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},0)).$$

Se sigue que $d'(\alpha(t),\alpha_n(t)) \leqslant 2r_n$ para cada $t \in [0,s_n] \cup [\hat{s}_n,t_n]$. Además $d'(\alpha(t),\alpha_n(t)) \leqslant r_n$ para cada $t \in [s_n,\hat{s}_n] \cup [t_n,1]$. Por lo tanto, $d'(\alpha(t),\alpha_n(t)) \leqslant 2r_n$ para cada $t \in [0,1]$.

En ambos subcasos, como $d'(\alpha(t),\alpha_n(t)) \leqslant 4r_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $t \in [0,1]$ y además $\lim\limits_{n\to\infty} 4r_n = 0$, tenemos que la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a α. Como $\alpha_n(0) = p_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha(0) = p$, obtenemos del Lema 2.4 que $\alpha(1) = (-3,0,0) \in K$, lo cual contradice (2.5). Por lo tanto este caso no es posible.

Caso 2. $p \in \mathrm{Li}(C_n \cap X^+)$ y $p \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \times \{\frac{3}{2}\} \times \{0\}$.
Sean

$$E_1 = \{(x,y,z) \in X : y > \tfrac{3}{2}\} \text{ y}$$
$$E_2 = \{(x,y,z) \in X : y \leqslant \tfrac{3}{2}\}.$$

Si $p \in \mathrm{Li}(C_n \cap (E_1 \cup X^0))$ o $p \in \mathrm{Li}(C_n \cap (E_2 \cap X^+))$, entonces podemos definir una sucesión de trayectorias como en el Caso 1 para obtener una contradicción. Por lo anterior, podemos suponer que p no pertenece a esos conjuntos. Así, existe un subconjunto abierto V de X y existen sucesiones de números naturales $n_1 < n_2 < \cdots$ y $m_1 < m_2 < \cdots$ tales que $p \in V \subset U$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$V \cap (C_{n_k} \cap (E_1 \cup X^0)) = \emptyset \text{ y} \tag{2.10}$$
$$V \cap (C_{m_k} \cap E_2 \cap X^+) = \emptyset. \tag{2.11}$$

Por el Lema 2.2, podemos suponer que V también tiene las siguientes propiedades:

(i) para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $V \cap A_n$ es vacío o tiene dos componentes H_n y G_n, donde

$$H_n = V \cap A_n \cap E_1 \text{ y}$$
$$G_n = V \cap A_n \cap E_2;$$

(ii) $V \cap X^0$ es conexo y

(iii) para toda componente D de V y cualesquiera $q, w \in V \cap \big((-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\})\big)$ se tiene que $d'(q, D) = d'(w, D)$.

Notemos que si $(-3, 0, 0) \in C_{n_k}$ para una infinidad de índices k, entonces C_{n_k} es igual a la componente C de U que tiene a $(-3, 0, 0)$ para una infinidad de índices k. Como $p \in \operatorname{Li} C_n \subset \operatorname{Li} C = \operatorname{Cl}(C)$ (Lema 1.21) y $p \in U$ se tiene que $p \in \operatorname{Cl}(C) \cap U = \operatorname{Cl}_U(C) = C$. Luego, $p \in C$ y así $p \in V \cap C_{n_k} \cap X^0$ para una infinidad de índices k, lo cual contradice (2.10). Entonces podemos suponer que

$$(-3, 0, 0) \notin C_{n_k} \text{ para toda } k \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Similarmente, como $p \in E_2 \cap X^+$ podemos suponer que

$$(-3, 0, 0) \notin C_{m_k} \text{ para toda } k \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Demostraremos a continuación en dos pasos que

$$V \cap K = V \cap \big((-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\})\big). \tag{2.14}$$

<u>Paso 1</u>. $V \cap K \subset V \cap \big((-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\})\big)$.
Sea $q \in V \cap K$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(\varepsilon, p) \cup B(\varepsilon, q) \subset V. \tag{2.15}$$

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $(C_{n_k} \cap X^+) \cap B(\varepsilon, p) \neq \emptyset$ y $C_{n_k} \cap B(\varepsilon, q) \neq \emptyset$. Elegimos un punto $w \in (C_{n_k} \cap X^+) \cap B(\varepsilon, p)$. Por (2.10) y (2.15) se tiene que $B(\varepsilon, p) \cap (C_{n_k} \cap (E_1 \cup X^0)) = \emptyset$. Entonces $w \notin E_1$ y $w \notin X^0$, así que existe $m \geqslant 1$ tal que $w \in A_m$. Como C_{n_k} es conexo, de (2.12) se sigue que $C_{n_k} \subset A_m$. Entonces usando (i) obtenemos que

$$\emptyset \neq B(\varepsilon, q) \cap C_{n_k} \subset V \cap A_m \cap C_{n_k} \subset V \cap A_m \cap E_2 = G_m.$$

Esto prueba que

$$q \in \operatorname{Cl}\Big(\bigcup \{G_n : n \geqslant 1\}\Big). \tag{2.16}$$

Ahora, sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $(C_{m_j} \cap X^+) \cap B(\varepsilon, p) \neq \emptyset$ y $C_{m_j} \cap B(\varepsilon, q) \neq \emptyset$. Elegimos un punto $x \in (C_{m_j} \cap X^+) \cap B(\varepsilon, p)$. De (2.11) y (2.15) tenemos que $x \notin E_2$ y, como consecuencia de esto, $x \notin X^0$. Entonces existe $m \geqslant 1$ tal que $x \in A_m$; por lo tanto usando (2.13) y la conexidad de C_{m_j} obtenemos que $C_{m_j} \subset A_m$. Usando (i) obtenemos ahora que

$$\emptyset \neq B(\varepsilon, q) \cap C_{m_j} \subset V \cap A_m \cap C_{m_j} \subset V \cap A_m \cap E_1 = H_m.$$

Por lo anterior $q \in \mathrm{Cl}(\bigcup\{H_n : n \geqslant 1\})$. De esto y de (2.16) concluimos que $q \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\})$. Así,

$$V \cap K \subset V \cap \big((-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\})\big). \tag{2.17}$$

Paso 2. $V \cap \big((-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\})\big) \subset V \cap K$.
Sea $q \in V \cap ((-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\}))$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, p) \cup B(\varepsilon, q) \subset V$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $C_n \cap B(\varepsilon, p) \neq \emptyset$ para toda $n \geqslant N$. Para cada $n \geqslant N$, sea $z_n \in C_n \cap B(\varepsilon, p)$ y sea D_n la componente de V tal que $z_n \in D_n$. Entonces $D_n \subset C_n$. Como $p \in V \cap K$, por (2.17) se tiene que $p \in V \cap ((-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\}))$, y usando (iii) obtenemos que $d'(q, D_n) = d'(p, D_n) \leqslant d'(p, z_n) < \varepsilon$. Así, existe $x_n \in D_n \subset C_n$ tal que $d'(q, x_n) < \varepsilon$ y entonces $x_n \in B(\varepsilon, q) \cap C_n$. Por lo tanto $B(\varepsilon, q) \cap C_n \neq \emptyset$ para toda $n \geqslant N$ y así, $q \in V \cap K$. Esto y (2.17) completan la prueba de (2.14).

Ahora bien, como $p \in V \cap ((-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\}))$ y $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\})$ es un conjunto de Cantor, obtenemos de (2.14) y del Teorema 1.12 que K es disconexo. Esta contradicción prueba que este caso no es posible.

Los Casos 1 y 2 muestran que $p \notin \mathrm{Li}(C_n \cap X^+)$. De manera similar se puede probar que

$$p \notin \mathrm{Li}(C_n \cap X^-). \tag{2.18}$$

Consideremos ahora el conjunto

$$F = (-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0)(-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0)(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0)(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0)(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0). \tag{2.19}$$

Como consecuencia de los Casos 1 y 2 y de (2.18) concluimos que

$$K \subset \lim A_n \cap \lim B_n = F \cup \big[(-\tfrac{3}{2}, 0, 0) + (C_0 \times \{0\})\big] \cup \big[(\tfrac{1}{2}, 0, 0) + (C_0 \times \{0\})\big].$$

Caso 3. Supongamos que $p \in K \cap \big[(-\frac{3}{2}, 0, 0) + (C_0 \times \{0\})\big]$. Por el Lema 2.3 existe un subconjunto abierto W de X tal que $p \in W \subset U$ y

(*) para toda componente D de W y cualesquiera $q, w \in W \cap \big((-\frac{3}{2}, 0, 0) + (C_0 \times \{0\})\big)$ se tiene que $d'(q, D) = d'(w, D)$.

Demostraremos que

$$W \cap \big[(-\tfrac{3}{2}, 0, 0) + (C_0 \times \{0\})\big] \subset W \cap K. \tag{2.20}$$

Sea $q \in W \cap [(-\frac{3}{2}, 0, 0) + (C_0 \times \{0\})]$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, p) \cup B(\varepsilon, q) \subset W$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $C_n \cap B(\varepsilon, p) \neq \emptyset$ para toda $n \geqslant N$. Para cada $n \geqslant N$, sea $z_n \in C_n \cap B(\varepsilon, p)$ y sea D_n la componente de W tal que $z_n \in D_n$. Entonces $D_n \subset C_n$. Como $p \in W \cap ((-\frac{3}{2}, 0, 0) + (C_0 \times \{0\}))$, usando (*) obtenemos que $d(q, D_n) = d(p, D_n) \leqslant d(p, z_n) < \varepsilon$. Así, existe $x_n \in D_n \subset C_n$ tal que $d(q, x_n) < \varepsilon$ y entonces $x_n \in B(\varepsilon, q) \cap C_n$. Por lo tanto $B(\varepsilon, q) \cap C_n \neq \emptyset$ para toda $n \geqslant N$ y así, $q \in W \cap K$. Esto prueba (2.20).

Sean $\mathcal{C}_1 = (-\frac{3}{2}, 0, 0) + (C_0 \times \{0\})$ y $\mathcal{C}_2 = (\frac{1}{2}, 0, 0) + (C_0 \times \{0\})$. Como $p \in W \cap \mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_1$ es un conjunto denso en sí mismo, se sigue que $W \cap \mathcal{C}_1$ tiene más de un punto; luego $(W \cap \mathcal{C}_1) \setminus (F \cup \mathcal{C}_2) \neq \emptyset$. Sea $W_1 = W \setminus (F \cup \mathcal{C}_2)$. Entonces W_1 es un subconjunto abierto de X tal que $W_1 \cap \mathcal{C}_1 \neq \emptyset$ y usando (2.20) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
W_1 \cap \mathcal{C}_1 \subset W_1 \cap K = (W \setminus (F \cup \mathcal{C}_2)) \cap K = (W \setminus (F \cup \mathcal{C}_2)) \cap (K \setminus (F \cup \mathcal{C}_2)) \\
\subset W_1 \cap \mathcal{C}_1.
\end{aligned}
$$

Entonces $W_1 \cap \mathcal{C}_1 = W_1 \cap K \neq \emptyset$ y se sigue del Teorema 1.12 que K es disconexo, por lo que este caso tampoco es posible. Similarmente se puede probar que $p \notin K \cap \left[(\frac{1}{2}, 0, 0) + (C_0 \times \{0\})\right]$. Luego,

$$
K \subset F \setminus \{(-\tfrac{3}{2}, 0, 0), (\tfrac{3}{2}, 0, 0)\}. \tag{2.21}
$$

Caso 4. Supongamos que $p = (x, y, z)$ y $x \in [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.
Si $x > \frac{1}{2}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$
\begin{aligned}
J_n^1 &= \left[(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{1}{n})\right] \setminus \{(\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{1}{n})\}, \\
J_n^2 &= \left[(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{1}{n})\right] \setminus \{(\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{1}{n})\}, \\
K_n^1 &= \left[(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{1}{n})\right] \setminus \{(\tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{1}{n})\} \text{ y} \\
K_n^2 &= \left[(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{1}{n})\right] \setminus \{(\tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{1}{n})\}
\end{aligned}
$$

Como $p \neq (\frac{3}{2}, 0, 0)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in X^0 \cup (\bigcup\{J_i^1, K_i^1 : i \in \mathbb{N}\})$ para toda $n > N$ o $p_n \in X^0 \cup (\bigcup\{J_i^2, K_i^2 : i \in \mathbb{N}\})$ para toda $n > N$. Supongamos que $p_n = (x_n, y_n, z_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces procediendo como en el Caso 1, podemos definir un arco $\alpha : [0, 1] \to X$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = (\frac{3}{2}, 0, 0)$ y para cada $n > N$ un arco $\alpha_n : [0, 1] \to X$ tal que $\alpha_n(0) = p_n$ y $\alpha_n(1) = (\frac{3}{2}, 0, z_n)$ tales que $d'(\alpha(t), \alpha_n(t)) \leqslant 4d'(p, p_n)$ para toda $n > N$ y para toda $t \in [0, 1]$. Luego, la sucesión $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a α y por el Lema 2.4 tenemos que $\alpha(1) = (\frac{3}{2}, 0, 0) \in K$, lo cual contradice (2.21).

Similarmente, no es posible que $x < -\frac{1}{2}$. Por lo tanto

$$
K \subset [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \times \{-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\} \times \{0\}.
$$

Como K es conexo, se tiene que $K \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{-\frac{3}{2}\} \times \{0\}$ o $K \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{\frac{3}{2}\} \times \{0\}$.

Caso 5.

$$K \subset [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \times \{-\tfrac{3}{2}\} \times \{0\} \text{ o}$$
$$K \subset [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \times \{\tfrac{3}{2}\} \times \{0\}.$$

Supongamos que $K \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{\frac{3}{2}\} \times \{0\}$ y sea $p \in K$. Si $p \notin (C_0 \times \{0\}) + (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > N$ se tiene que

$$p_n \in X^0 \cup \Big(\bigcup\big\{\big(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{i}, \tfrac{1}{i}\big)\big(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{i}, \tfrac{1}{i}\big) : i \in \mathbb{N}\big\}\Big)$$
$$\cup \Big(\bigcup\big\{\big(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{i}\big)\big(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{i}\big) : i \in \mathbb{N}\big\}\Big).$$

Entonces podemos definir un arco α y una sucesión de arcos α_n como en el Caso 4 para llegar a una contradicción. Por lo tanto $p \in (C_0 \times \{0\}) + (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ y

$$K \subset (C_0 \times \{0\}) + (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 0). \tag{2.22}$$

Por el Lema 2.2 existe un subconjunto abierto W de X tal que $p \in W \subset U$ y tal que para toda componente D de V y cualesquiera $q, w \in V \cap \big((-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\})\big)$ se tiene que $d'(q, D) = d'(w, D)$. Usando esto, se puede probar como en el Caso 3 que

$$W \cap \big[(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\})\big] \subset W \cap K.$$

Se sigue de esto y de (2.22) que

$$W \cap \big[(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 0) + (C_0 \times \{0\})\big] = W \cap K.$$

Así, por el Teorema 1.12 concluimos que K es disconexo. Similarmente podemos obtener una contradicción si $K \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{-\frac{3}{2}\} \times \{0\}$.

El análisis de estos cinco casos prueba que X no contiene R^3-continuos.

□

Teorema 2.6. *Sean X como en el Ejemplo 2.1, F como en (2.19) del Teorema 2.5 y $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney cualquiera. Entonces $\{F\}$ es un R^3-continuo en $C(X)$.*

Demostración. Para cada $n \geqslant 1$, definimos

$$G_{2n} = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})$$
$$(-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n}) \subset A_n \tag{2.23}$$

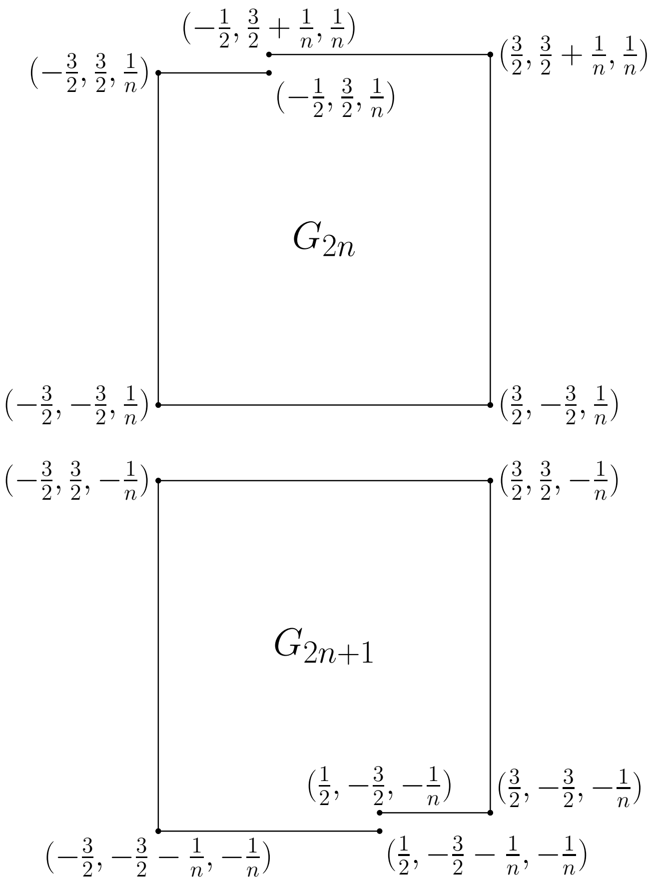

Figura 2.2: los conjuntos G_{2n} y G_{2n+1}.

y $G_{2n+1} = -G_{2n} \subset B_n$ (vea Figura 2.2). Sea $t = \mu(F)$. Por el Corolario 1.71, para cada $n \geqslant 1$ podemos elegir $F_n \in C(X)$ tal que $\mu(F_n) = t$ y

$$G_n \subset F_n \text{ o } F_n \subset G_n. \tag{2.24}$$

Del Lema 1.75 se sigue que

$$\lim F_n = F. \tag{2.25}$$

Sea

$$\mathcal{U} = B^H(\tfrac{1}{2}, F) \cap C(X)$$

y sea $N \geqslant 1$ tal que $F_n \in \mathcal{U}$ para toda $n \geqslant N$. Para cada $n \geqslant N$, sea $\mathcal{C}_n$ la componente de $\mathcal{U}$ tal que $F_n \in \mathcal{C}_n$.

Dada $n \geqslant N$, probaremos a continuación que

$$\mathcal{C}_{2n} \subset \big\{B \in \mathcal{U} : B \subset A_n \setminus \{(-3,0,0)\}\big\}. \tag{2.26}$$

Sea $B \in \mathcal{C}_{2n}$. Como $\mathcal{C}_{2n} \subset \mathcal{U}$, se tiene que $H(B,F) < \frac{1}{2}$ y así $B \subset N(\frac{1}{2}, F)$. Entonces $(-3,0,0),(3,0,0) \notin B$. Luego, $B \subset [A_n \setminus \{(-3,0,0)\}] \cup [X \setminus A_n]$ y como $B \in C(X)$ se sigue que $B \subset A_n \setminus \{(-3,0,0)\}$ o $B \subset X \setminus A_n$. Definimos

$$\mathcal{U}_{2n} = \{B \in \mathcal{U} : B \subset A_n \setminus \{(-3,0,0)\}\} = \mathcal{U} \cap C(A_n \setminus \{(-3,0,0)\}) \text{ y}$$
$$\mathcal{V}_{2n} = \{B \in \mathcal{U} : B \subset X \setminus A_n\} = \mathcal{U} \cap C(X \setminus A_n).$$

Entonces $\mathcal{U}_{2n}$ y $\mathcal{V}_{2n}$ son subconjuntos abiertos (Corolario 1.40) y ajenos de $C(X)$ tales que $\mathcal{C}_{2n} \subset \mathcal{U}_{2n} \cup \mathcal{V}_{2n}$. Como $F_{2n} \in \mathcal{C}_{2n}$ se tiene que $F_{2n} \in \mathcal{U}_{2n}$ o $F_{2n} \in \mathcal{V}_{2n}$. De (2.24) obtenemos que $F_{2n} \cap [A_n \setminus \{(-3,0,0)\}] \neq \emptyset$, así que $F_{2n} \subset A_n \setminus \{(-3,0,0)\}$; en otras palabras $F_{2n} \in \mathcal{U}_{2n}$. Por la conexidad de $\mathcal{C}_{2n}$ concluimos que $\mathcal{C}_{2n} \subset \mathcal{U}_{2n}$. Esto completa la prueba de (2.26). Similarmente se puede probar que

$$\mathcal{C}_{2n+1} \subset \{B \in \mathcal{U} : B \subset B_n \setminus \{(3,0,0)\}\}. \tag{2.27}$$

Probaremos ahora que

$$\operatorname{Li} \mathcal{C}_n = \{F\}. \tag{2.28}$$

Por (2.25) y el Lema 1.23 se tiene que $F \in \operatorname{Li} \mathcal{C}_n$. Sea $D \in \operatorname{Li} \mathcal{C}_n$. Tomemos una sucesión $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $\lim D_n = D$ y $D_n \in \mathcal{C}_n$ para cada $n \geqslant N$ (vea Lema 1.23). Entonces de (2.26) y (2.27) se sigue que $D_{2n} \subset A_n$ y $D_{2n+1} \subset B_n$ para cada $n \geqslant N$. Por lo tanto

$$D \subset \lim A_n \cap \lim B_n = F \cup ((-\tfrac{3}{2},0,0) + (C_0 \times \{0\})) \cup ((\tfrac{1}{2},0,0) + (C_0 \times \{0\})). \tag{2.29}$$

Como $D_{2n} \in \mathcal{C}_{2n} \subset \mathcal{U}$ se sigue que $H(F, D_{2n}) < \frac{1}{2}$ para cada $n \geqslant N$. Luego $H(F,D) \leqslant \frac{1}{2}$, así que D contiene más de un punto. De acuerdo a esto y a (2.29) se tiene que

$$D \subset F. \tag{2.30}$$

Por otra parte, si $n \geqslant N$ se tiene que $H(F, D_{2n}) < \frac{1}{2}$ así que existen puntos $p_n, q_n \in D_{2n}$ tales que $d(p_n, (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)) < \frac{1}{2}$ y $d(q_n, (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)) < \frac{1}{2}$. Así, como $D_{2n} \subset A_n$ y D_{2n} es conexo, entonces el arco

$$(-\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{1}{n})(-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{1}{n})$$

está contenido en D_{2n}. Esto implica que D contiene al arco

$$(-\tfrac{3}{2}, 0, 0)(-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0)(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0)(\tfrac{3}{2}, 0, 0).$$

Similarmente D contiene al arco

$$(-\tfrac{3}{2}, 0, 0)(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0)(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0)(\tfrac{3}{2}, 0, 0).$$

Luego, $F \subset D$. De aquí y de (2.30) obtenemos que $F = D$. Esto muestra (2.28) y así concluimos que $\{F\}$ es un R^3-continuo en $C(X)$. □

Teorema 2.7. *Sea X como en el Ejemplo 2.1, entonces para cada función de Whitney $\mu : X \to \mathbb{R}$ existe $t \in (0, \mu(X))$ tal que $\mu^{-1}(t)$ contiene un R^3-continuo.*

Demostración. Sea $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney. Consideremos $\mathcal{U}$, F_n, $\mathcal{C}_n$, t y N como en la prueba del Teorema 2.6 y sea $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \cap \mu^{-1}(t)$. Para cada $n \geqslant N$, sea $\mathcal{C}_n^*$ la componente de $\mathcal{U}^*$ que tiene a F_n. Entonces $\mathcal{C}_n^* \subset \mathcal{C}_n$; de aquí y de (2.28) del Teorema 2.6 obtenemos que $\operatorname{Li} \mathcal{C}_n^* \subset \operatorname{Li} \mathcal{C}_n = \{F\}$. Como $\lim F_n = F$, por el Lema 1.23 se tiene que $F \in \operatorname{Li} \mathcal{C}_n^*$. Por lo anterior $\operatorname{Li} \mathcal{C}_n^* = \{F\}$, y así concluimos que $\{F\}$ es un R^3-continuo en $\mu^{-1}(t)$. $\square$

2.2. Un ejemplo en $C_m(X)$

Para mostrar que la condición (III) no implica la condición (I) para ninguna $m \in \mathbb{N}$, en esta sección daremos un ejemplo de un continuo Z que tiene las siguientes propiedades:

(a) Z no contiene R^3-continuos,

(b) $C_m(\mathsf{Z})$ contiene un R^3-continuo para cada $m \in \mathbb{N}$ y

(c) para cada $m \in \mathbb{N}$ y para cada función de Whitney $\mu : C_m(\mathsf{Z}) \to \mathbb{R}$ existe $t \in (0, \mu(\mathsf{Z}))$ tal que $\mu^{-1}(t)$ contiene un R^3-continuo.

Ejemplo 2.8. Sea X como en el Ejemplo 2.1. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos

$$a_n = (1 - \tfrac{1}{2^n}, 0, 0)$$

y para $n \geqslant 1$ definimos

$$X^{(n)} = \frac{1}{6 \cdot 2^n}\big(X + (-3, 0, 0)\big) + a_n.$$

Geométricamente $X^{(n)}$ representa una contracción de X trasladada entre los puntos a_{n-1} y a_n. Finalmente definimos

$$\mathsf{Z} = \operatorname{Cl}\Big(\bigcup \{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}\Big) = \bigcup \{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 0, 0)\}$$

(vea Figura 2.3). Notamos que Z es un continuo y que

$$X \text{ es homeomorfo a } X^{(n)} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{2.31}$$

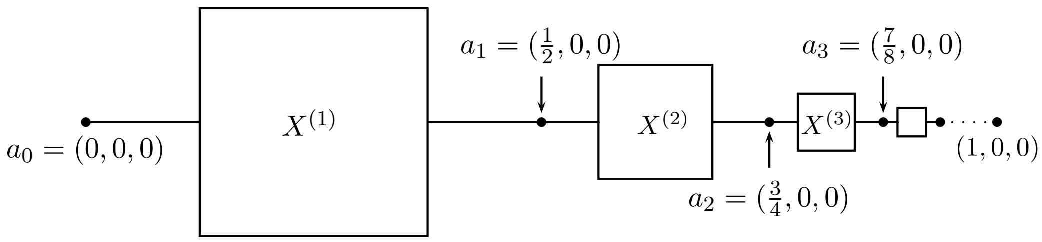

Figura 2.3: el continuo Z.

Si $p \in X$ y $A \subset X$, definimos para cada $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p^{(j)} &= \frac{1}{6 \cdot 2^j}\big(p + (-3,0,0)\big) + a_j, \\ A^{(j)} &= \frac{1}{6 \cdot 2^j}\big(A + (-3,0,0)\big) + a_j \text{ y} \\ \mathsf{A}^{(j)} &= \bigcup\{A^{(k)} : 1 \leqslant k \leqslant j\}. \end{aligned}$$

Geométricamente $p^{(j)}$ y $A^{(j)}$ representan el punto y el subconjunto correspondientes a p y a A, respectivamente, contenidos en el subcontinuo $X^{(j)}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Notemos que si $A \in C(X)$, entonces $\mathsf{A}^{(m)} \in C_m(\mathsf{Z})$.

En el siguiente lema probaremos una propiedad relevante de los subconjuntos conexos del continuo Z. Usaremos dicha propiedad en el Lema 2.10.

Lema 2.9. *Sean Z como en el Ejemplo 2.8 y C un subconjunto conexo de Z. Entonces para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $C \cap \big(X^{(j)} \setminus \{(-\frac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\}\big)$ es conexo.*

Demostración. Sea C un subconjunto conexo de Z y sea $D = C \cap \big(X^{(j)} \setminus \{(-\frac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\}\big)$. Supongamos que D no es conexo, entonces existen dos subconjuntos no vacíos K y L de D tales que

$$K \cup L = D \text{ y} \tag{2.32}$$
$$K \cap \mathrm{Cl}(L) = \emptyset = \mathrm{Cl}(K) \cap L. \tag{2.33}$$

Sean $x_1 = (-3, 0, 0)^{(j)}$, $x_2 = (3, 0, 0)^{(j)}$ y $p = (-\frac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}$ y sean

$$\begin{aligned} C_1 &= C \cap \bigcup\{X^{(i)} : i < j\} \text{ y} \\ C_2 &= C \cap \bigcup\{X^{(i)} : i > j\}. \end{aligned}$$

Demostraremos a continuación que

$$\text{si } p \in C, \text{ entonces } p \in (\mathrm{Cl}(K) \cup \mathrm{Cl}(L)) \setminus (\mathrm{Cl}(K) \cap \mathrm{Cl}(L)). \tag{2.34}$$

Si $p \notin \mathrm{Cl}(K) \cup \mathrm{Cl}(L) = \mathrm{Cl}(K \cup L)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, p) \subset X^{(j)}$ y $B(\varepsilon, p) \cap (K \cup L) = \emptyset$; luego, $B(\varepsilon, p) \cap (C \setminus \{p\}) = \emptyset$. Se sigue que $\{p\}$ es un subconjunto propio, abierto y cerrado de C contradiciendo la conexidad de C. Así

$$p \in \mathrm{Cl}(K) \cup \mathrm{Cl}(L). \tag{2.35}$$

Supongamos ahora que $p \in \mathrm{Cl}(K) \cap \mathrm{Cl}(L)$. Entonces existen puntos distintos $(x, 0, 1)^{(j)} \in K$ y $(y, 0, 1)^{(j)} \in L$ tales que $\{x, y\} \subset (-1, -\frac{1}{2})$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x < y$ y sea

$$x_0 = \sup\big\{t \in [x, y] : \big[[x, t] \times \{0\} \times \{1\}\big]^{(j)} \subset K\big\}.$$

Observemos que $x_0 < -\frac{1}{2}$. Si $(x_0, 0, 1) \notin C$, entonces $x_0 < y < -\frac{1}{2}$; así, el conjunto $\big[(x_0, -\frac{1}{2}] \times \{0\} \times \{1\}\big]^{(j)} \cap C$ es propio, no vacío, abierto y cerrado en C contradiciendo la conexidad de C. Si $(x_0, 0, 1) \in C$, entonces $(x_0, 0, 1) \in \mathrm{Cl}_D(K) = K$ y usando (2.33) obtenemos que $(x_0, 0, 1) \notin \mathrm{Cl}(L)$. Así, existe $\delta > 0$ tal que $\big[[x_0, x_0+\delta) \times \{0\} \times \{1\}\big]^{(j)} \cap L = \emptyset$. Sea $r \in (x_0, x_0+\delta)$ tal que $(r, 0, 1)^{(j)} \notin K$. Entonces $(r, 0, 1)^{(j)} \notin K \cup L$. Esto implica que $(r, 0, 1) \notin C$ así que el conjunto $\big[(r, -\frac{1}{2}] \times \{0\} \times \{1\}\big]^{(j)} \cap C$ es propio, no vacío, abierto y cerrado en C, lo cual contradice nuevamente que C es conexo. Por lo tanto $p \notin \mathrm{Cl}(K) \cap \mathrm{Cl}(L)$. Esto y (2.35) prueban (2.34).

Finalmente definimos

$$\hat{K} = K \cup \bigcup\{C_i : x_i \in K\} \cup (\{p\} \cap \mathrm{Cl}(K)) \text{ y}$$
$$\hat{L} = L \cup \bigcup\{C_j : x_j \in L\} \cup (\{p\} \cap \mathrm{Cl}(L)).$$

Notemos que si existe un punto $q \in \mathrm{Cl}(K) \cap \bigcup\{\mathrm{Cl}(C_j) : x_j \in L\}$, entonces $q \in \{x_1, x_2\}$. Esto implica que $q \in \mathrm{Cl}(K) \cap L$ contradiciendo (2.33). Por lo tanto

$$\mathrm{Cl}(K) \cap \bigcup\{\mathrm{Cl}(C_j) : x_j \in L\} = \emptyset \tag{2.36}$$

y similarmente

$$\mathrm{Cl}(L) \cap \bigcup\{\mathrm{Cl}(C_i) : x_i \in K\} = \emptyset. \tag{2.37}$$

Por otro lado, usando (2.32) y (2.34) obtenemos que

$$\hat{K} \cup \hat{L} = C. \tag{2.38}$$

Además, por (2.33), (2.34), (2.36) y (2.37) se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{K} \cap \mathrm{Cl}(\hat{L}) = & \Big[K \cup \bigcup\{C_i : x_i \in K\} \cup (\{p\} \cap \mathrm{Cl}(K))\Big] \\
& \cap \Big[\mathrm{Cl}(L) \cup \bigcup\{\mathrm{Cl}(C_j) : x_j \in L\} \cup (\{p\} \cap \mathrm{Cl}(L))\Big] \\
& = \Big[K \cap \mathrm{Cl}(L)\Big] \cup \Big[\bigcup\{K \cap \mathrm{Cl}(C_j) : x_j \in L\}\Big] \cup \Big[\{p\} \cap K \cap \mathrm{Cl}(L)\Big] \\
& \cup \Big[\bigcup\{C_i \cap \mathrm{Cl}(L) : x_i \in K\}\Big] \cup \Big[\bigcup\{C_i \cap \mathrm{Cl}(C_j) : x_i \in K, x_j \in L\}\Big] \\
& \cup \Big[\{p\} \cap \mathrm{Cl}(K) \cap \mathrm{Cl}(L)\Big] \\
& = \emptyset.
\end{aligned}$$

Similarmente se puede probar que $\mathrm{Cl}(\hat{K}) \cap \hat{L} = \emptyset$. Esto y (2.38) contradicen la conexidad de C. Por lo tanto, $C \cap \big(X^{(j)} \setminus \{(-\frac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\}\big)$ es conexo. □

Lema 2.10. *Sea* Z *como en el Ejemplo 2.8. Entonces* Z *no contiene R^3-continuos.*

Demostración. Supongamos que Z contiene un R^3-continuo K; digamos que $K = \mathrm{Li}\, C_n \subset U$, donde $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de componentes de un subconjunto abierto y propio U de Z. Sea X^0 como en el Ejemplo 2.1; por el Lema 1.31 se tiene que $K \subset \bigcup\{(X^0)^{(i)} \setminus \{a_{i-1}, a_i\} : i \in \mathbb{N}\}$. Así, de la conexidad de K deducimos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset (X^0)^{(j)} \setminus \{a_{j-1}, a_j\} \subset X^{(j)} \setminus \{a_{j-1}, a_j, (-\tfrac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\}. \tag{2.39}$$

Como $X^{(j)} \setminus \{a_{j-1}, a_j, (-\frac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\}$ es un subconjunto abierto de Z que contiene a K tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $C_n \cap (X^{(j)} \setminus \{a_{j-1}, a_j, (-\frac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\}) \neq \emptyset$ para toda $n \geqslant N$.
Sea $V = U \cap \big(X^{(j)} \setminus \{(-\frac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\}\big)$. Entonces

$$V \text{ es un subconjunto abierto y propio de } X^{(j)} \text{ tal que } K \subset V. \tag{2.40}$$

Sea C una componente de U tal que $C \cap V \neq \emptyset$. Entonces

$$C \cap V = C \cap \Big(U \cap \big(X^{(j)} \setminus \{(-\tfrac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\}\big)\Big) = C \cap \big(X^{(j)} \setminus \{(-\tfrac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\}\big)$$

el cual es un subconjunto conexo de V (Lema 2.9). Tomemos ahora un subconjunto conexo Y de V tal que $C \cap V \subset Y$. Como $Y \cap C \neq \emptyset$ y C es una componente de U entonces $Y \subset C$, así que $Y \subset C \cap V$. Por lo tanto

$$C \cap V \text{ es una componente de } V. \tag{2.41}$$

Para cada $n \geqslant N$ sea $D_n = C_n \cap V$. Del Lema 1.21-(c) obtenemos que

$$\operatorname*{Li}_{n\geqslant N} D_n = \operatorname*{Li}_{n\geqslant N}(C_n \cap V) \subset \operatorname*{Li}_{n\geqslant N} C_n = K. \tag{2.42}$$

Demostraremos ahora que

$$K \subset \operatorname*{Li}_{n\geqslant N} D_n \tag{2.43}$$

(aquí tomamos límite inferior en $X^{(j)}$, no en Z). Sean $x \in K$ y W un subconjunto abierto de $X^{(j)}$ tal que $x \in W$. Sea W_1 un subconjunto abierto de Z tal que $W = W_1 \cap X^{(j)}$. Por (2.39) tenemos que $x \in X^{(j)} \setminus \{a_{j-1}, a_j, (-\frac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\}$; así, como $X^{(j)} \setminus \{a_{j-1}, a_j, (-\frac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\}$ es un subconjunto abierto de Z obtenemos que $W_1 \cap [X^{(j)} \setminus \{a_{j-1}, a_j, (-\frac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\}] = W \cap [X^{(j)} \setminus \{a_{j-1}, a_j, (-\frac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\}]$ es un subconjunto abierto de Z que tiene a x. Luego, existe $M \geqslant N$ tal que $W \cap [X^{(j)} \setminus \{a_{j-1}, a_j, (-\frac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\}] \cap C_n \neq \emptyset$ para cada $n \geqslant M$. Así,

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq W \cap [C_n \cap (X^{(j)} \setminus \{(-\tfrac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\})] \\ &= W \cap [C_n \cap U \cap (X^{(j)} \setminus \{(-\tfrac{1}{2}, 0, 1)^{(j)}\})] \\ &= W \cap (C_n \cap V) = W \cap D_n \end{aligned}$$

para cada $n \geqslant M$. Entonces $x \in \operatorname*{Li}_{n\geqslant N} D_n$ y esto prueba (2.43). De (2.42) y (2.43) concluimos que $K = \operatorname*{Li}_{n\geqslant N} D_n$. Luego, de (2.40) y (2.41) se sigue que K es un R^3-continuo de $X^{(j)}$, contradiciendo (2.31) del Ejemplo 2.8 y el inciso (a) del Ejemplo 2.1. Concluimos entonces que Z no contiene R^3-continuos. $\square$

En las siguientes dos observaciones introduciremos algunos subconjuntos importantes del continuo Z definido en el Ejemplo 2.8 y mostraremos algunas de sus propiedades. En toda esta sección usaremos la notación introducida en el Ejemplo 2.8 y en las siguientes dos observaciones.

Observación 2.11. Consideremos el conjunto

$$F = (-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0)(-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0)(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0)(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0)(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0).$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$ sean

$$\begin{aligned} G_{2n} = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n}) \\ (-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n}) \end{aligned}$$

y $G_{2n+1} = -G_{2n}$ (vea Figura 2.2).

Sea $m \in \mathbb{N}$. Puesto que $G_n \in C(X)$ entonces $\mathsf{G_n}^{(m)} \in C_m(\mathsf{Z})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, como $\lim G_n = F$ tenemos que $\lim G_n^{(j)} = F^{(j)}$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$; así, $\lim \mathsf{G_n}^{(m)} = \mathsf{F}^{(m)} \in C_m(\mathsf{Z})$ (vea Corolario 1.44).

Sea $\mu : C_m(\mathsf{Z}) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney cualquiera y sea $t = \mu(\mathsf{F}^{(m)})$. Por el Corolario 1.73 existe $N_1 \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que para cada $n \geqslant N_1$ podemos elegir $F_n \in \mu^{-1}(t)$ tal que

$$\mathsf{G_n}^{(m)} \subset F_n \text{ o } F_n \subset \mathsf{G_n}^{(m)} \tag{2.44}$$

y además

$$F_n \cap G_n^{(j)} \neq \emptyset \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{2.45}$$

Del Lema 1.75 se sigue que

$$\lim_{n \geqslant N_1} F_n = \mathsf{F}^{(m)}. \tag{2.46}$$

Observación 2.12. Sean $\mathsf{F}^{(m)}$ y N_1 como en la Observación 2.11. Definimos

$$\mathcal{U} = B^H(\tfrac{1}{2^{m+5}}, \mathsf{F}^{(m)}) \cap C_m(\mathsf{Z})$$

y sean A_n y B_n como en el Ejemplo 2.1 (vea Figura 2.1). Además, para cada $n \geqslant N_1$ definimos

$$\begin{aligned} W &= X \cap [(-2,2) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}] \\ U_n &= A_n \cap [(-2,2) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}] \text{ y} \\ V_n &= B_n \cap [(-2,2) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}]. \end{aligned}$$

Entonces $W^{(j)}$, $U_n^{(j)}$ y $V_n^{(j)}$ son subconjuntos abiertos de Z para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Sea $B \in \mathcal{U}$, notemos que como $B \subset N(\frac{1}{2^{m+5}}, \mathsf{F}^{(m)})$ y $d(\mathsf{F}^{(m)}, a_m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6 \cdot 2^m} = \frac{1}{2^{m+2}} > \frac{1}{2^{m+5}}$ entonces $B \subset \mathsf{X}^{(m)}$. Más aún, puesto que

$$d(\mathsf{F}^{(m)}, \mathrm{Fr}(\mathsf{W}^{(m)})) = d\big(\mathsf{F}^{(m)}, (2,0,0)^{(m)}\big) = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{6 \cdot 2^m}\big) > \tfrac{1}{2^{m+4}} \tag{2.47}$$

se tiene que

$$B \subset \mathsf{W}^{(m)}. \tag{2.48}$$

Además, dado que $\mathsf{F}^{(m)} \subset N(\frac{1}{2^{m+5}}, B)$ tenemos que

$$B \cap W^{(j)} \neq \emptyset \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{2.49}$$

Así, como $B \in C_m(\mathsf{Z})$ concluimos que

$$\begin{aligned} &B \text{ tiene exactamente } m \text{ componentes } B_1, \ldots, B_m \text{ y podemos suponer} \\ &\qquad\qquad \text{que } B_j \subset W^{(j)} \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, m\}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Lema 2.13. *Sean $\mathcal{U}$ como en la Observación 2.12 y N_1 y F_n como en la Observación 2.11 para cada $n \geqslant N_1$. Sea $N \geqslant N_1$ tal que $F_n \in \mathcal{U}$ para toda $n \geqslant N$. Para cada $n \geqslant N$, sea $\mathcal{C}_n$ la componente de $\mathcal{U}$ tal que $F_n \in \mathcal{C}_n$. Además, para cada $n \geqslant N$ sean U_n y V_n como en la Observación 2.12. Entonces para cada $n \geqslant N$ se tiene que:*

$$\mathcal{C}_{2n} \subset \langle U_n^{(1)}, \ldots, U_n^{(m)} \rangle \text{ y} \tag{2.51}$$

$$\mathcal{C}_{2n+1} \subset \langle V_n^{(1)}, \ldots, V_n^{(m)} \rangle. \tag{2.52}$$

Demostración. Sea $B \in \mathcal{C}_{2n}$. Usando (2.48) obtenemos que

$$B \subset U_n^{(1)} \cup \ldots \cup U_n^{(m)} \cup (\mathsf{W}^{(m)} \setminus \mathsf{A_n}^{(m)}). \tag{2.53}$$

Definimos ahora

$$\mathcal{U}_{2n} = \mathcal{U} \cap C_m(\mathsf{U_n}^{(m)}) \text{ y}$$
$$\mathcal{V}_{2n} = \mathcal{U} \cap \langle \mathsf{W}^{(m)}, \mathsf{W}^{(m)} \setminus \mathsf{A_n}^{(m)} \rangle.$$

Entonces $\mathcal{U}_{2n}$ y $\mathcal{V}_{2n}$ son dos subconjuntos abiertos (Corolario 1.40-(c)) y ajenos de $C_m(\mathsf{Z})$ tales que $\mathcal{C}_{2n} \subset \mathcal{U}_{2n} \cup \mathcal{V}_{2n}$. Sabemos que $F_{2n} \in \mathcal{C}_{2n}$ y por (2.45) se tiene que

$$F_{2n} \cap U_n^{(j)} \neq \emptyset \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{2.54}$$

Como $F_{2n} \in C_m(\mathsf{Z})$ y los conjuntos $U_n^{(1)}, \ldots, U_n^{(m)}$ y $\mathsf{W}^{(m)} \setminus \mathsf{A_n}^{(m)}$ son abiertos en Z y ajenos dos a dos, de (2.53) y (2.54) obtenemos que $F_{2n} \subset \mathsf{U_n}^{(m)}$; en otras palabras $F_{2n} \in \mathcal{U}_{2n}$. Por la conexidad de $\mathcal{C}_{2n}$ concluimos que $\mathcal{C}_{2n} \subset \mathcal{U}_{2n}$; en particular $B \subset \bigcup\{U_n^{(j)} : 1 \leqslant j \leqslant m\}$. Más aún, por (2.49) tenemos que $B \cap U_n^{(j)} \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$; esto completa la prueba de (2.51). Similarmente se puede probar (2.52). □

Lema 2.14. *Sean $\mathcal{U}$, A_n y B_n como en la Observación 2.12. Sean $Q \in 2^{\mathsf{Z}}$ y $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{U}$ tal que $\lim Q_n = Q$. Supongamos que Q tiene m componentes $Q^1, \ldots, Q^m$ y que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geqslant N$ el conjunto Q_n tiene m componentes $Q_n^1, \ldots, Q_n^m$ tales que $Q_{2n}^j \subset A_n^{(j)}$, $Q_{2n+1}^j \subset B_n^{(j)}$ y $\lim Q_n^j = Q^j$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces $\mathsf{F}^{(m)} \subset Q$.*

Demostración. Sea $n \geqslant N$. Notemos que $H(\mathsf{F}^{(m)}, Q_{2n}) < \frac{1}{2^{m+5}}$ así que $\mathsf{F}^{(m)} \subset N(\frac{1}{2^{m+5}}, Q_{2n})$; luego, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ existen puntos $p_n^j, q_n^j \in Q_{2n}^j$ tales que $d(p_n^j, (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)^{(j)}) < \frac{1}{2^{m+5}}$ y $d(q_n^j, (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)^{(j)}) < \frac{1}{2^{m+5}}$. Observemos que para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene que

$$d\big((-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})^{(j)}, (-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0)^{(j)}\big) > \tfrac{1}{6\cdot 2^j} > \tfrac{1}{2^{j+3}} > \tfrac{1}{2^{m+5}} \text{ y}$$
$$d\big((\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})^{(j)}, (\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0)^{(j)}\big) > \tfrac{1}{2^{m+5}}.$$

Como $Q^j_{2n} \subset A^{(j)}_n$ esto implica que

$$p^j_n \in \big[\big([-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}) \times [0, \tfrac{3}{2}] \times \{\tfrac{1}{n}\}\big) \cap A_n\big]^{(j)} \text{ y}$$
$$q^j_n \in \big[\big((\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}] \times [0, \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{n}] \times \{\tfrac{1}{n}\}\big) \cap A_n\big]^{(j)}.$$

Así, puesto que Q^j_{2n} es conexo entonces el arco

$$[(-\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{1}{n})(-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})(\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{1}{n})]^{(j)}$$

está contenido en Q^j_{2n} para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Esto implica que Q^j contiene al arco

$$\big[(-\tfrac{3}{2}, 0, 0)(-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0)(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0)(\tfrac{3}{2}, 0, 0)\big]^{(j)}$$

para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Similarmente y usando que $Q^j_{2n+1} \subset B^{(j)}_n$ se puede probar que Q^j contiene al arco

$$\big[(-\tfrac{3}{2}, 0, 0)(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0)(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0)(\tfrac{3}{2}, 0, 0)\big]^{(j)}$$

para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Luego, $F^{(j)} \subset Q^j$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$; así $\mathsf{F}^{(m)} \subset Q$. $\square$

Lema 2.15. *Sean* $\mathsf{F}^{(m)}$ *como en la Observación 2.11 y* N *y* $\mathcal{C}_n$ *para cada* $n \geqslant N$ *como en el Lema 2.13. Entonces* $\operatorname{Li} \mathcal{C}_n = \{\mathsf{F}^{(m)}\}$.

Demostración. Por (2.46) de la Observación 2.11 y el Lema 1.23 se tiene que $\mathsf{F}^{(m)} \in \operatorname{Li} \mathcal{C}_n$.
Tomemos ahora $D \in \operatorname{Li} \mathcal{C}_n$. Sea $(D_n)_{n \geqslant N}$ una sucesión en $C_m(\mathsf{Z})$ tal que $\lim D_n = D$ y $D_n \in \mathcal{C}_n$ para cada $n \geqslant N$ (Lema 1.23). Por (2.50) de la Observación 2.12 tenemos que para cada $n \geqslant N$ el conjunto D_n tiene exactamente m componentes $D^1_n, \ldots D^m_n$ y podemos suponer que

$$D^j_n \subset W^{(j)} \subset X^{(j)} \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{2.55}$$

Luego, del Lema 2.13 obtenemos que

$$\begin{gathered} D^j_{2n} \subset U^{(j)}_n \subset A^{(j)}_n \text{ y} \\ D^j_{2n+1} \subset V^{(j)}_n \subset B^{(j)}_n \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, m\}. \end{gathered} \tag{2.56}$$

Esto implica que $D_{2n} \subset \mathsf{U_n}^{(m)}$ y $D_{2n+1} \subset \mathsf{V_n}^{(m)}$ para cada $n \geqslant N$. Así

$$D \subset \lim \mathsf{U_n}^{(m)} \cap \lim \mathsf{V_n}^{(m)} \subset \bigcup \big\{X^{(i)} \setminus \{a_{i-1}, a_i\} : 1 \leqslant i \leqslant m\big\}. \tag{2.57}$$

Sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Demostraremos a continuación que

$$\operatorname{Ls} D^j_n \subset D \cap X^{(j)} \subset \operatorname{Li} D^j_n. \tag{2.58}$$

Sea $x \in \operatorname{Ls} D_n^j$. Por el Lema 1.21-(c) y el Teorema 1.45 tenemos que $x \in \operatorname{Ls} D_n = \operatorname{lím} D_n = D$ y además $x \in \operatorname{Ls} D_n^j \subset \operatorname{Ls} X^{(j)} = X^{(j)}$, así que $x \in D \cap X^{(j)}$. Ahora, si $x \in D \cap X^{(j)}$, entonces $x \in \operatorname{Li} D_n$ y usando (2.57) tenemos que $x \in X^{(j)} \setminus \{a_{j-1}, a_j\}$. Sea $W_1 = X^{(j)} \setminus \{a_{j-1}, a_j\}$ y sea W_2 un subconjunto abierto de Z tal que $x \in W_2$. Entonces $W_2 \cap W_1$ es un subconjunto abierto de Z y $x \in W_2 \cap W_1$. Por lo tanto existe $M \geqslant N$ tal que $\emptyset \neq (W_2 \cap W_1) \cap D_n = W_2 \cap D_n^j$ para toda $n \geqslant M$; en otras palabras $x \in \operatorname{Li} D_n^j$. Esto prueba (2.58) y por el Teorema 1.45 concluimos que

$$\operatorname{lím} D_n^j = D \cap X^{(j)} \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{2.59}$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ definimos

$$D^j = \operatorname{lím} D_n^j. \tag{2.60}$$

De (2.56) se sigue que

$$\begin{aligned} D^j &\subset \operatorname{lím} A_n^{(j)} \cap \operatorname{lím} B_n^{(j)} \\ &= \left[F \cup \left((-\tfrac{3}{2}, 0, 0) + (C_0 \times \{0\})\right) \cup \left((\tfrac{1}{2}, 0, 0) + (C_0 \times \{0\})\right)\right]^{(j)} \end{aligned} \tag{2.61}$$

para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Por el Corolario 1.44 tenemos que

$$D = \operatorname{lím} D_n = \operatorname{lím}(D_n^1 \cup \ldots \cup D_n^m) = D^1 \cup \ldots \cup D^m. \tag{2.62}$$

Como $D_{2n} \in \mathcal{C}_{2n} \subset \mathcal{U}$ se sigue que $H(\mathsf{F}^{(m)}, D_{2n}) < \frac{1}{2^{m+5}}$ para cada $n \geqslant N$. Luego $H(\mathsf{F}^{(m)}, D) \leqslant \frac{1}{2^{m+5}} < \frac{1}{2^{m+4}}$ y usando el Lema 1.26 para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ tenemos que

$$F^{(j)} \subset \mathsf{F}^{(m)} \subset N(\tfrac{1}{2^{m+4}}, D) = \bigcup\{N(\tfrac{1}{2^{m+4}}, D^i) : 1 \leqslant i \leqslant m\}.$$

De (2.61) y (2.47) de la Observación 2.12 se sigue que

$$N(\tfrac{1}{2^{m+4}}, D^i) \subset X^{(i)} \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Esto implica que $F^{(j)} \cap N(\frac{1}{2^{m+4}}, D^i) = \emptyset$ para $i \neq j$ y así

$$F^{(j)} \subset N(\tfrac{1}{2^{m+4}}, D^j) \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Así, como $\operatorname{diám}(F^{(j)}) \geqslant \frac{1}{2^{m+1}}$ deducimos que D^j contiene más de un punto para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. De acuerdo a esto y a (2.61), por la conexidad de D^j se tiene que $D^j \subset F^{(j)}$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Por lo tanto

$$D \subset \mathsf{F}^{(m)}. \tag{2.63}$$

Finalmente, por (2.56), (2.60), (2.62) y el Lema 2.14 tenemos que $\mathsf{F}^{(m)} \subset D$. De aquí y de (2.63) concluimos que $\mathsf{F}^{(m)} = D$. Por lo tanto $\operatorname{Li} \mathcal{C}_n = \{\mathsf{F}^{(m)}\}$. $\square$

Teorema 2.16. *Sea* Z *el continuo definido en el Ejemplo 2.8. Entonces:*

(a) Z *no contiene* R^3*-continuos,*

(b) $C_m(\mathsf{Z})$ *contiene un* R^3*-continuo para cada* $m \in \mathbb{N}$ *y*

(c) para cada $m \in \mathbb{N}$ *y para cada función de Whitney* $\mu : C_m(\mathsf{Z}) \to \mathbb{R}$ *existe* $t \in (0, \mu(\mathsf{Z}))$ *tal que* $\mu^{-1}(t)$ *contiene un* R^3*-continuo.*

Demostración. Del Lema 2.10 obtenemos que Z no contiene R^3-continuos. Sean $m \in \mathbb{N}$, $\mathsf{F}^{(m)}$, N_1 y F_n para cada $n \geqslant N_1$ como en la Observación 2.11, sea $\mathcal{U}$ como en la Observación 2.12 y sean N y $\mathcal{C}_n$ para cada $n \geqslant N$ como en el Lema 2.13. Entonces $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto y propio de $C_m(\mathsf{Z})$ y $(\mathcal{C}_n)_{n \geqslant N}$ es una sucesión de componentes de $\mathcal{U}$ tal que $\operatorname{Li} \mathcal{C}_n = \{\mathsf{F}^{(m)}\}$ (Lema 2.15); en otras palabras $\{\mathsf{F}^{(m)}\}$ es un R^3-continuo en $C_m(\mathsf{Z})$.

Para demostrar (c), sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $\mu : C_m(\mathsf{Z}) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney. Consideremos $\mathsf{F}^{(m)}$, $\mathcal{U}$, N y $\mathcal{C}_n$ como en la prueba de (b) y sea t como en la Observación 2.11. Sea $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \cap \mu^{-1}(t)$. Para cada $n \geqslant N$, sea $\mathcal{C}_n^*$ la componente de $\mathcal{U}^*$ que tiene a F_n. Entonces $\mathcal{C}_n^* \subset \mathcal{C}_n$; de aquí y del Lema 1.21-(c) obtenemos que $\operatorname{Li} \mathcal{C}_n^* \subset \operatorname{Li} \mathcal{C}_n = \{\mathsf{F}^{(m)}\}$. Por otra parte, de (2.46) de la Observación 2.11 y del Lema 1.23 se tiene que $\mathsf{F}^{(m)} \in \operatorname{Li} \mathcal{C}_n^*$. Por lo tanto, $\operatorname{Li} \mathcal{C}_n^* = \{\mathsf{F}^{(m)}\}$ y así concluimos que $\{\mathsf{F}^{(m)}\}$ es un R^3-continuo en $\mu^{-1}(t)$. □

2.3. Unicoherencia hereditaria

En esta sección mostraremos que las condiciones (II) y (III) implican la condición (I) si suponemos que el continuo X es hereditariamente unicoherente. Probaremos este resultado en el Teorema 2.20.

Lema 2.17. *Si* X *es un continuo hereditariamente unicoherente y* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es una sucesión de subcontinuos de* X*, entonces* $\operatorname{Li} A_n$ *es conexo.*

Demostración. Sea $\{C_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de subcontinuos de X. Empezaremos probando que $\bigcap\{C_\alpha : \alpha \in I\}$ es conexo. Para esto, sea

$$F = \{J \subset I : \bigcap_{\alpha \in J} C_\alpha \text{ es conexo}\}.$$

Entonces $(F, \subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Sea $\{J_\beta\}_{\beta \in B}$ una cadena en F. Definimos $J_0 = \bigcup_{\beta \in B} J_\beta$. Tenemos que $\bigcap_{\alpha \in J_0} C_\alpha = \bigcap_{\beta \in B} \bigcap_{\alpha \in J_\beta} C_\alpha$ es conexo por ser una intersección anidada de subcontinuos de X. Como

$J_0 \subset I$ se tiene que J_0 es una cota superior de la cadena $\{J_\beta\}_{\beta\in B}$. Por el Lema de Zorn existe un elemento maximal I_0 de F. Sea $\gamma \in I$. Como X es hereditariamente unicoherente entonces $\bigcap_{\alpha\in I_0\cup\{\gamma\}} C_\alpha = \left(\bigcap_{\alpha\in I_0} C_\alpha\right) \cap C_\gamma$ es conexo y, por lo tanto, $I_0 \cup \{\gamma\} \in F$. Como I_0 es maximal se sigue que $I_0 = I_0 \cup \{\gamma\}$ por lo que $\gamma \in I_0$. Por lo tanto $I = I_0$ y así

$$\bigcap\{C_\alpha : \alpha \in I\} \text{ es conexo.} \tag{2.64}$$

Ahora, sea

$$\mathcal{B} = \{A \in C(X)\text{: existe una subsucesión } (A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ de } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} A_{n_k} = A\};$$

se demostrará que

$$\operatorname{Li} A_n = \bigcap \mathcal{B}. \tag{2.65}$$

Para cada $A \in \mathcal{B}$, si $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión tal que $\lim_{k\to\infty} A_{n_k} = A$, entonces $\operatorname{Li} A_n \subset \operatorname{Li} A_{n_k} = A$ (vea Lema 1.21-(d)). Por lo tanto $\operatorname{Li} A_n \subset \bigcap \mathcal{B}$.

Recíprocamente, si $x \notin \operatorname{Li} A_n$, entonces existe un subconjunto abierto U de X, con $x \in U$ y una subsucesión $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $U \cap A_{n_k} = \emptyset$ para cada $k \geqslant 1$. Como $C(X)$ es compacto, podemos suponer que la sucesión $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento A de $C(X)$. Entonces $A \in \mathcal{B}$ y $U \cap A = \emptyset$, así que $x \notin A$; por lo tanto $x \notin \bigcap \mathcal{B}$. De (2.64) y (2.65) concluimos que $\operatorname{Li} A_n$ es conexo. □

Teorema 2.18. *Si X es un continuo hereditariamente unicoherente, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X no contiene R^3-continuos;

(b) Si p es un punto en X, U es un subconjunto abierto y propio de X, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en U tal que $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ y $p \in U$, entonces existe una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ y existe $A \in C(X)$ tales que $p_n \in A_n \subset \operatorname{Cl}(U)$ para cada n, $p \in A$, $\lim A_n = A$ y $A \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$.

Demostración. Para probar que (b) implica (a) no es necesario suponer que X es hereditariamente unicoherente. Supongamos que (b) se cumple y que X contiene un R^3-continuo $K = \operatorname{Li} C_n$, donde $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de componentes de un subconjunto abierto y propio V, de X, tal que $K \subset V$. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $K \subset U \subset \operatorname{Cl}(U) \subset V$. Elegimos un punto $p \in K$ y una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ tal que $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ y $p_n \in C_n$ para cada n (vea Lema 1.23). Sea $N \geqslant 1$ tal que $p_n \in U$ para cada $n \geqslant N$.

Sean $(A_n)_{n\geqslant N}$ una sucesión en $C(X)$ y $A\in C(X)$ como en (b). Entonces $A_n\subset C_n$ para cada $n\geqslant N$; así, por el Lema 1.21-(c) se tiene que

$$\emptyset\neq A\cap(X\setminus U)=\operatorname{Li}A_n\cap(X\setminus U)\subset\operatorname{Li}C_n\setminus K$$

contradiciendo que $K=\operatorname{Li}C_n$. Por lo tanto, X no contiene R^3-continuos.

Para demostrar que (a) implica (b) supongamos que X no contiene R^3-continuos. Sea $p\in X$, sea U un subconjunto abierto y propio de X tal que $p\in U$, y sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en U tal que $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p$. Sean $N_1=1$ y $U_1=U$. Para cada $n\geqslant 1$ sea $C_n^{(1)}$ la componente de U_1 tal que $p_n\in C_n^{(1)}$. Definimos $B_1=\operatorname{Li}C_n^{(1)}=\operatorname{Li}\operatorname{Cl}(C_n^{(1)})$ (vea Proposición 1.22). Observamos que $p\in B_1$. Más aún, el Lema 2.17 implica que $B_1\in C(X)$ y (a) implica que

$$B_1\not\subset U_1. \tag{2.66}$$

Definiremos inductivamente, para cada $m\geqslant 2$, un subconjunto abierto U_m de X, un número natural N_m, una sucesión $(C_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos conexos de X y un subcontinuo B_m de X de la siguiente manera:

Sea $U_m=N(\frac{1}{m},B_{m-1})\cap U_{m-1}$ y sea $N_m>N_{m-1}$ tal que $p_n\in U_m$ para cada $n\geqslant N_m$. Para cada $n<N_m$ sea $C_n^{(m)}=\{p_n\}$, y para cada $n\geqslant N_m$ sea $C_n^{(m)}$ la componente de U_m tal que $p_n\in C_n^{(m)}$. Finalmente, sea $B_m=\operatorname{Li}C_n^{(m)}=\operatorname{Li}\operatorname{Cl}(C_n^{(m)})$. Del Lema 1.23 se sigue que $p\in B_m$. Además, como $C_n^{(m)}\subset C_n^{(m-1)}$ para cada n, por el Lema 1.21-(c) obtenemos que $B_m\subset B_{m-1}$. Más aún, el Lema 2.17 implica que $B_m\in C(X)$ y (a) implica que

$$B_m\not\subset U_m. \tag{2.67}$$

Ahora definimos

$$A=\bigcap\{B_m : m\geqslant 1\}=\lim B_m.$$

Observemos que $A\in C(X)$ y que $p\in A$. Para probar que $A\cap(X\setminus U_1)\neq\emptyset$ supongamos, al contrario, que $A\subset U_1$. Por el Corolario 1.4 existe $m\geqslant 1$ tal que $B_m\subset U_1$. Sea

$$m_0=\min\{k\geqslant 1 : B_k\subset U_1\}.$$

Por (2.66) tenemos que $m_0\geqslant 2$. Además, por (2.67) podemos elegir un punto $y_0\in B_{m_0}\setminus U_{m_0}\subset U_1$. Sea

$$r=\min\{k\geqslant 1 : y_0\notin U_k\}.$$

Entonces $r\geqslant 2$,

$$y_0\notin U_r=N(\tfrac{1}{r},B_{r-1})\cap U_{r-1} \tag{2.68}$$

y $y_0 \in U_{r-1}$. Como $y_0 \notin U_{m_0}$, se tiene que $r \leqslant m_0$ y $y_0 \in B_{m_0} \subset B_{r-1} \subset N(\frac{1}{r}, B_{r-1})$. Luego, $y_0 \in N(\frac{1}{r}, B_{r-1}) \cap U_{r-1} = U_r$, lo cual contradice (2.68). Esto prueba que

$$A \cap (X \setminus U_1) \neq \emptyset. \tag{2.69}$$

Ahora, para cada $n \geqslant 1$ sea $\delta_n = \text{ínf}\{H(A, \mathrm{Cl}(C_n^{(m)})) : m \geqslant 1\}$. Elegimos $m_n \geqslant 1$ tal que

$$H(A, \mathrm{Cl}(C_n^{(m_n)})) < \delta_n + \tfrac{1}{n}. \tag{2.70}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \mathrm{Cl}(C_n^{(m_n)})$. Entonces $p_n \in A_n \in C(X)$ y $A_n \subset \mathrm{Cl}(U)$. Para concluir la prueba, demostraremos que $\text{lím}\, A_n = A$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $A = \text{lím}\, B_m$, existe $M \geqslant 2$ tal que

$$H(A, B_k) < \varepsilon \text{ para toda } k \geqslant M - 1 \tag{2.71}$$

y $\frac{1}{M} < \varepsilon$. Por el Lema 1.28 existe $N \geqslant N_M$ tal que $B_M = \mathrm{Li}\,\mathrm{Cl}(C_n^{(M)}) \subset N(\varepsilon, \mathrm{Cl}(C_n^{(M)}))$ para cada $n \geqslant N$. Luego, si $n \geqslant N$ se tiene que

$$\begin{aligned} A \subset N(\varepsilon, B_M) \subset N(2\varepsilon, \mathrm{Cl}\,(C_n^{(M)})) \text{ y} \\ \mathrm{Cl}(C_n^{(M)}) \subset \mathrm{Cl}(U_M) \subset \mathrm{Cl}\left(N(\tfrac{1}{M}, B_{M-1})\right). \end{aligned} \tag{2.72}$$

Ahora probaremos que

$$\mathrm{Cl}\left(N(\tfrac{1}{M}, B_{M-1})\right) \subset N(2\varepsilon, A). \tag{2.73}$$

Sea $x \in \mathrm{Cl}\left(N(\frac{1}{M}, B_{M-1})\right)$. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en $N(\frac{1}{M}, B_{M-1})$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Así, para cada $n \geqslant 1$ existe $y_n \in B_{M-1}$ tal que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{M}$. Más aún, por (2.71) para cada y_n existe $a_n \in A$ tal que $d(y_n, a_n) < \varepsilon$. Entonces $d(x_n, a_n) \leqslant d(x_n, y_n) + d(y_n, a_n) < \frac{1}{M} + \varepsilon$ para toda $n \geqslant 1$. Como A es compacto podemos suponer que existe $a \in A$ tal que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a. Por lo tanto, tomando el límite cuando n tiende a infinito se tiene que $d(x, a) \leqslant \frac{1}{M} + \varepsilon < 2\varepsilon$; en otras palabras $x \in N(2\varepsilon, A)$. Esto muestra (2.73).

De (2.72) y (2.73) se deduce que $H(A, \mathrm{Cl}(C_n^{(M)})) < 2\varepsilon$ cada vez que $n \geqslant N$. Por lo anterior y por (2.70), para toda $n \geqslant N$ se tiene que

$$H(A, A_n) < \delta_n + \tfrac{1}{n} \leqslant H(A, \mathrm{Cl}(C_n^{(M)})) + \tfrac{1}{n} < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Por lo tanto, $\text{lím}\, A_n = A$. $\square$

A continuación daremos un ejemplo para mostrar que la condición de que X sea hereditariamente unicoherente es esencial para la equivalencia de las afirmaciones del teorema anterior.

Ejemplo 2.19. Existe un continuo X tal que X no contiene R^3-continuos y la condición (b) del teorema anterior no se cumple.

Sean X, Y y C_0 como en el Ejemplo 2.1. Por el Teorema 2.5 sabemos que X no contiene R^3-continuos. Consideremos $p = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ y $U = \big((-1,0) \times (1,3) \times \mathbb{R}\big) \cap X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\begin{aligned} p_{2n-1} &= (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) \text{ y} \\ p_{2n} &= (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n}). \end{aligned}$$

Notemos que U es un subconjunto abierto y propio de X, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en U tal que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) = p$ y $p \in U$. Supongamos que existe una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ y existe $A \in C(X)$ tales que $p_n \in A_n \subset \mathrm{Cl}(U)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $p \in A$ y $\lim A_n = A$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $A_{2n-1} \subset [-\frac{1}{2}, 0] \times \{\frac{3}{2} + \frac{1}{n}\} \times \{\frac{1}{n}\}$. Se sigue del Lema 1.21-(c) que

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}\, A_{2n-1} &\subset \mathrm{Li}\big([-\tfrac{1}{2}, 0] \times \{\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{n}\} \times \{\tfrac{1}{n}\}\big) \\ &= [-\tfrac{1}{2}, 0] \times \{\tfrac{3}{2}\} \times \{0\}. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$A_{2n} \subset \big[[-1, -\tfrac{1}{2}] \times \{\tfrac{3}{2}\} \times \{\tfrac{1}{n}\}\big] \cup \big[Y^* + (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})\big].$$

Del Lema 1.21-(c) obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}\, A_{2n} &\subset \mathrm{Li}\big(\big[[-1, -\tfrac{1}{2}] \times \{\tfrac{3}{2}\} \times \{\tfrac{1}{n}\}\big] \cup \big[Y^* + (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{n})\big]\big) \\ &= \big[[-1, -\tfrac{1}{2}] \times \{\tfrac{3}{2}\} \times \{0\}\big] \cup \big[Y^* + (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 0)\big]. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Por el Teorema 1.45 y el Lema 1.21-(d) sabemos que $A = \lim A_n \subset \mathrm{Li}\, A_n \subset \mathrm{Li}\, A_{2n-1} \cap \mathrm{Li}\, A_{2n}$. Así, usando (2.74) y (2.75) obtenemos que

$$\begin{aligned} A \subset &\Big([-\tfrac{1}{2}, 0] \times \{\tfrac{3}{2}\} \times \{0\}\Big) \cap \\ &\Big(\big[[-1, -\tfrac{1}{2}] \times \{\tfrac{3}{2}\} \times \{0\}\big] \cup \big[Y^* + (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 0)\big]\Big) \\ \subset &\big[\{-\tfrac{1}{2}\} \times \{\tfrac{3}{2}\} \times \{0\}\big] \cup \big[(C_0 \times \{0\}) + (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 0)\big] \\ = &(C_0 \times \{0\}) + (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 0). \end{aligned} \tag{2.76}$$

Como $p \in A \in C(X)$ y $(C_0 \times \{0\}) + (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ es totalmente disconexo, se sigue de (2.76) que $A = \{p\}$. Por lo tanto $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$. $\square$

Teorema 2.20. *Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Si X no contiene R^3-continuos, entonces:*

(a) 2^X *no contiene* R^3*-continuos y*

(b) $C_m(X)$ *no contiene* R^3*-continuos para ninguna* $m \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. Supongamos que X no contiene R^3-continuos. Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $\mathcal{L} \in \{2^X, C_m(X)\}$. Supongamos que $\mathcal{L}$ contiene un R^3-continuo $\mathcal{K}$. Sea $\mathcal{K} = \operatorname{Li} \mathcal{C}_n \subset \mathcal{V}$, donde $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de componentes de un subconjunto abierto y propio $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}$. Por el Lema 1.31 y el Corolario 1.57 tenemos que $X \notin \mathcal{K}$.

Sea $\mu : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ una función de Whitney fija. Como $\mathcal{K}$ es compacto y μ es continua, existe $K_0 \in \mathcal{K}$ tal que

$$\mu(K_0) \geqslant \mu(K) \text{ para cada } K \in \mathcal{K}. \tag{2.77}$$

En particular $K_0 \in \mathcal{V}$, K_0 es cerrado en X y $K_0 \subsetneq X$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$B^H(2\varepsilon, K_0) \cap \mathcal{L} \subset \mathcal{V} \quad \text{y} \quad N(2\varepsilon, K_0) \neq X. \tag{2.78}$$

Definimos

$$U = N(\varepsilon, K_0).$$

Elegimos un punto $p \in K_0$ y una sucesión $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{L}$ tal que $K_n \in \mathcal{C}_n$ para cada n y $\lim K_n = K_0$ (vea Lema 1.23). Sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sucesión en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ y $p_n \in K_n$ para cada n (vea Lema 1.23). Como $p \in K_0 \subset U$ y $\lim K_n = K_0$, existe $N \geqslant 1$ tal que

$$p_n \in U \text{ y } H(K_0, K_n) < \varepsilon \text{ para cada } n \geqslant N. \tag{2.79}$$

Por el Teorema 2.18 existe una sucesión $(A_n)_{n\geqslant N}$ en $C(X)$ y existe $A \in C(X)$ tales que $p_n \in A_n \subset \operatorname{Cl}(U)$ para cada $n \geqslant N$, $p \in A$, $\lim A_n = A$ y $A \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$.

Para cada $n \geqslant N$ sea $B_n = K_n \cup A_n$ y sea $B = \lim B_n = K_0 \cup A$. Veamos ahora que

$$H(K_0, B_n) < 2\varepsilon. \tag{2.80}$$

Sea $n \geqslant N$, de (2.79) se sigue que

$$K_0 \subset N(\varepsilon, K_n) \subset N(2\varepsilon, B_n). \tag{2.81}$$

Ahora, sea $x \in B_n = K_n \cup A_n$. Si $x \in K_n$, como $K_n \subset N(\varepsilon, K_0)$ se tiene que $x \in N(2\varepsilon, K_0)$. Si $x \in A_n \subset \operatorname{Cl}(U) = \operatorname{Cl}(N(\varepsilon, K_0))$, existe una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $N(\varepsilon, K_0)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Para cada k sea $y_k \in K_0$ tal que $d(x_k, y_k) < \varepsilon$. Como K_0 es compacto, podemos suponer que existe $y \in K_0$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y$, por lo que $d(x, y) \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon$, i.e., $x \in N(2\varepsilon, K_0)$. Por lo tanto $B_n \subset N(2\varepsilon, K_0)$; con esto y con (2.81) hemos probado (2.80).

Por otra parte, para cada $n \geqslant N$ recordemos que $K_n \subset K_n \cup A_n = B_n$, el conjunto A_n es conexo y $p_n \in K_n \cap A_n$. Entonces cada componente de B_n interseca a K_n, por lo que existe un arco ordenado $\alpha_n : [0,1] \to \mathcal{L}$ tal que $\alpha_n(0) = K_n$ y $\alpha_n(1) = B_n$ (vea Teorema 1.55 y Lema 1.56). Por (2.79) y (2.80) se tiene que $H(K_0, \alpha_n(t)) < 2\varepsilon$ para toda $t \in [0,1]$ (vea Corolario 1.43); en otras palabras $Im(\alpha_n) \subset B^H(2\varepsilon, K_0) \cap \mathcal{L} \subset \mathcal{V}$ (vea (2.78)). Como $Im(\alpha_n)$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{V}$ y $K_n \in Im(\alpha_n) \cap \mathcal{C}_n$ se sigue que $Im(\alpha_n) \subset \mathcal{C}_n$. En particular $B_n \in \mathcal{C}_n$ para cada $n \geqslant N$. Esto implica que $\lim B_n = B \in \mathcal{K}$ (vea Lema 1.23). Finalmente, sea $x \in A \cap (X \setminus U)$, entonces $x \in B \setminus K_0$ y así $K_0 \subsetneq B$ por lo que $\mu(K_0) < \mu(B)$ contradiciendo (2.77). Por lo tanto, $\mathcal{L}$ no contiene R^3-continuos. $\square$

Capítulo 3

Contractibilidad en niveles de Whitney

En este capítulo mostraremos que las propiedades de ser contráctil y tener hiperespacio contráctil no son propiedades de Whitney para $C_m(X)$. Esto fue probado para $m = 1$ por A. Illanes en [5, Ejemplo 2.2, p. 537]. Desarrollamos este ejemplo en la sección 3.1, el cual será utilizado para construir en la sección 3.2 un continuo que muestra lo anterior para toda $m \in \mathbb{N}$.

3.1. Un ejemplo en $C(X)$

Ejemplo 3.1. Existe un continuo contráctil X y existe una función de Whitney $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que existe un nivel de Whitney $\mu^{-1}(t)$ en $C(X)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ contiene un R^3-continuo.

Sea $S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4\}$. Para cada $n \geqslant 1$, sean:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 + \tfrac{1}{2n} \text{ y } x \leqslant 2\} \text{ y} \\ S_{2n-1} &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 + \tfrac{1}{2n-1} \text{ y } -2 \leqslant x\} \end{aligned}$$

(vea Figura 3.1). Definimos $Z = S \cup (\bigcup\{S_n : n \geqslant 1\})$ y $Y = (0, 0, 1)Z \cup (0, 0, -1)Z$. Finalmente, definimos

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y, z) \in Y : z \geqslant -\tfrac{1}{2}\} \text{ y} \\ X^- &= \{(x, y, z) \in X : z < 0\}. \end{aligned}$$

(vea Figura 3.2). Notemos que X es un continuo homeomorfo al cono sobre Z, así que X es contráctil.

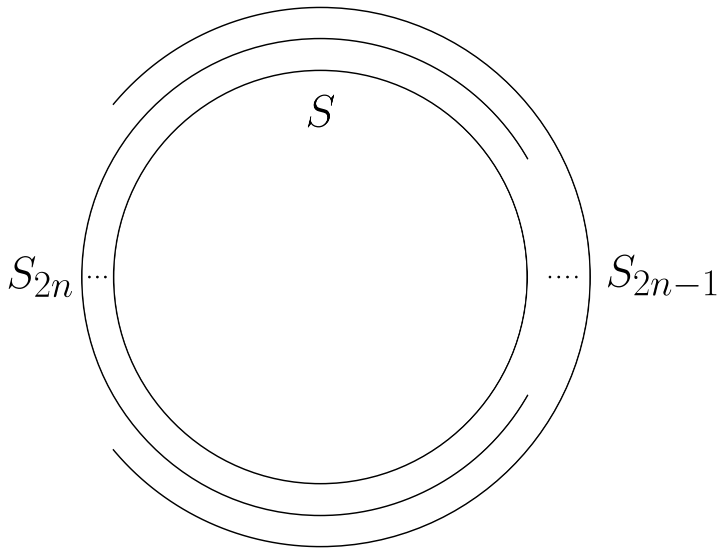

Figura 3.1: el conjunto Z.

Por otra parte, recordemos que si $n \in \mathbb{N}$ definimos el hiperespacio

$$F_n(X) = \{B \in 2^X : B \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Para cada $n \geqslant 2$ sea $d_n : F_n(X) \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_n(D) = \begin{cases} 0, & \text{si } |D| < n; \\ \text{mín}\{d(a_i, a_j) : a_i, a_j \in D \text{ y } a_i \neq a_j\}, & \text{si } |D| = n. \end{cases}$$

Sea $D \in 2^X$. Observamos que si $B \in F_n(D)$, entonces $d_n(B) \leqslant \text{diám}(D)$ para cada $n \geqslant 2$. Definimos ahora $\mu_n : 2^X \to \mathbb{R}$ para cada $n \geqslant 2$ como

$$\mu_n(D) = \sup\{d_n(B) : B \in F_n(D)\}.$$

Finalmente, definimos $\hat{\mu} : 2^X \to \mathbb{R}$ como

$$\hat{\mu}(D) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu_n(D)}{2^{n-1}}.$$

Por el Lema 1.68-(iii) y el Ejemplo 1.69 sabemos que $\hat{\mu}$ es una función de Whitney y además

$$\mu_2(F) = \text{diám}(F) \text{ para cada } F \in 2^X. \tag{3.1}$$

Sea μ la restricción de $\hat{\mu}$ al hiperespacio $C(X)$; entonces μ es una función de Whitney para $C(X)$. Sea

$$A = \{\tfrac{1}{2}(0, 0, -1) + \tfrac{1}{2}p : p \in S\}.$$

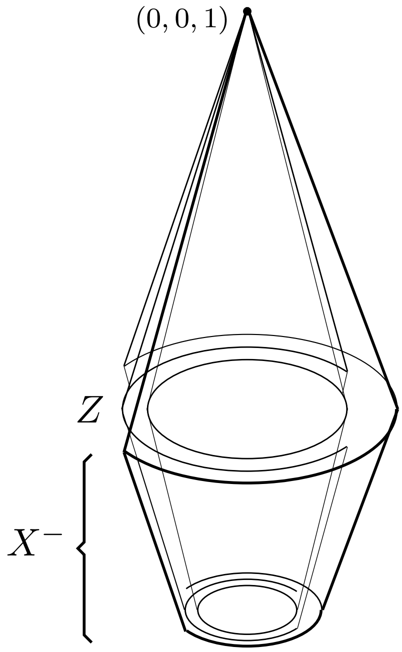

Figura 3.2: el continuo X.

Sea $t = \mu(A)$. Demostraremos que $\{A\}$ es un R^3-continuo en $\mu^{-1}(t)$.

Para cada $n \geqslant 1$ definimos

$$A_n = \{\tfrac{1}{2}(0,0,-1) + \tfrac{1}{2}p : p \in S_n\} \text{ y}$$
$$U_n = (0,0,-1)S_n \cap X^- \text{ (vea Figura 3.3).}$$

Así,

$$A_n \subset U_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

También, para cada $p \in Z$ definimos

$$R_p = \left\{t(0,0,-1) + (1-t)p : t \in [0, \tfrac{1}{2}]\right\}.$$

A continuación probaremos que

$$\text{Si } B \in C(X),\ B \subset (0,0,-1)S,\ B \neq A \text{ y } B \text{ interseca cada segmento } R_p \text{ con } p \in S, \text{ entonces } \mu(B) > \mu(A). \tag{3.3}$$

Sea $n \geqslant 2$. Comenzaremos demostrando que

$$\text{para cada } A' \in F_n(A) \text{ existe } B' \in F_n(B) \text{ tal que } d_n(A') \leqslant d_n(B'). \tag{3.4}$$

Sea $A' \in F_n(A)$. Si $A' \in F_{n-1}(A)$, entonces $d_n(A') = 0 \leqslant d_n(B')$ para cualquier $B' \in F_n(B)$. Supongamos ahora que $A' = \{a_1, \ldots, a_n\} \in F_n(A) \setminus$

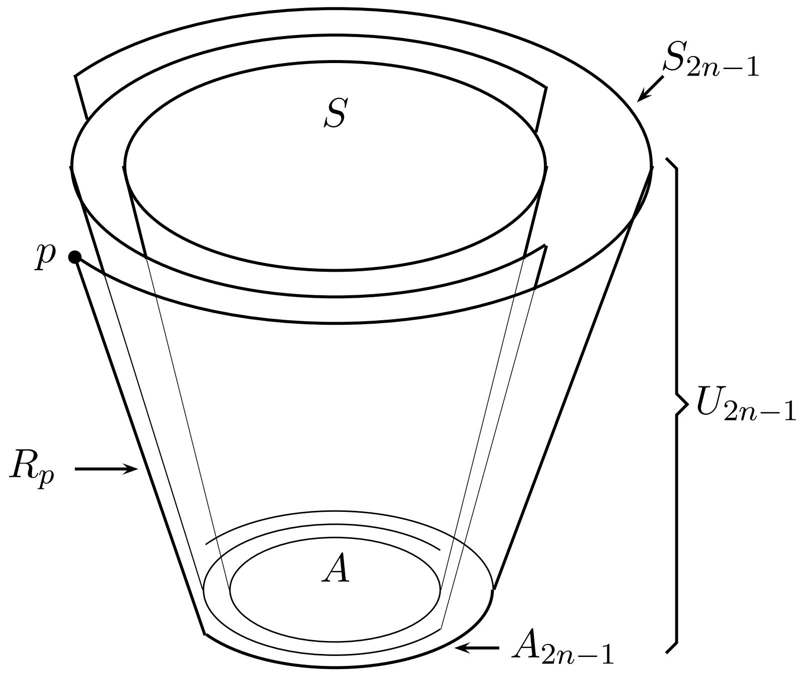

Figura 3.3: el conjunto X^-.

$F_{n-1}(A)$. Para cada $a_i \in A'$ sea $p_i \in S$ tal que $a_i \in R_{p_i}$; como B interseca a cada segmento R_p con $p \in S$, elegimos $b_i \in B$ tal que $b_i \in R_{p_i}$. Sea $B' = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Entonces $B' \in F_n(B)$ y $d(a_i, a_j) \leqslant d(b_i, b_j)$ para $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Por lo tanto $d_n(A') \leqslant d_n(B')$ con lo que queda demostrado (3.4). Además se sigue de esto que

$$\mu_n(A) \leqslant \mu_n(B) \text{ para cada } n \geqslant 2. \tag{3.5}$$

Veamos ahora que

$$\text{diám}(A) < \text{diám}(B).$$

Sea $b_1 \in B \setminus A$ y sea $p \in S$ tal que $b_1 \in R_p$. Llamemos q a la antípoda de p en S y sea $b_2 \in B$ tal que $b_2 \in R_q$. Entonces $d(b_1, b_2) > 2 = \text{diám}(A)$ y, así, $\text{diám}(A) < \text{diám}(B)$. Usando (3.1) obtenemos que $\mu_2(A) < \mu_2(B)$. Esto y (3.5) completan la prueba de (3.3).

Ahora bien, por el Corolario 1.71 para cada $n \geqslant 1$ podemos elegir $B_n \in C(X)$ tal que $\mu(B_n) = t$ y

$$A_n \subset B_n \text{ o } B_n \subset A_n. \tag{3.6}$$

Del Lema 1.75 obtenemos que

$$\text{lím}\, B_n = A. \tag{3.7}$$

Sea
$$\mathcal{U} = \{B \in \mu^{-1}(t) : H(A,B) < \tfrac{1}{4}\}.$$
Usaremos este subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $\mu^{-1}(t)$ para probar que $\{A\}$ es un R^3-continuo en $\mu^{-1}(t)$.

Sea $N \geqslant 1$ tal que $B_n \in \mathcal{U}$ para toda $n \geqslant N$. Para cada $n \geqslant N$, sea $\mathcal{C}_n$ la componente de $\mathcal{U}$ tal que $B_n \in \mathcal{C}_n$. Sea $n \geqslant N$, probaremos a continuación que
$$\mathcal{C}_n \subset \{B \in \mu^{-1}(t) : B \subset (0,0,-1)S_n\}. \tag{3.8}$$
Sea $B \in \mathcal{C}_n$. Como $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{U}$, se tiene que $H(A,B) < \frac{1}{4}$ y así $B \subset N(\frac{1}{4}, A)$ (Lema 1.41) Se sigue que $B \subset X^- = U_n \cup (X^- \setminus U_n)$ y como $B \in C(X)$ obtenemos que $B \subset U_n$ o $B \subset X^- \setminus U_n$. Definimos
$$\mathcal{V} = \{D \in \mathcal{U} : D \subset U_n\} \text{ y}$$
$$\mathcal{W} = \{D \in \mathcal{U} : D \subset X^- \setminus U_n\}.$$

Entonces $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ y $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \emptyset$. Además, como $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \langle U_n \rangle$ y $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \langle X^- \setminus U_n \rangle$, obtenemos del Teorema 1.37 que $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son subconjuntos abiertos de $\mu^{-1}(t)$. Luego, como $B_n \in \mathcal{C}_n$ se tiene que $B_n \in \mathcal{V}$ o $B_n \in \mathcal{W}$. De (3.6) y (3.2) se sigue que $B_n \cap U_n \neq \emptyset$, así que $B_n \subset U_n$; en otras palabras $B_n \in \mathcal{V}$. Por la conexidad de $\mathcal{C}_n$ concluimos que $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{V}$. Esto completa la prueba de (3.8).

Finalmente, demostraremos que $\operatorname{Li}\mathcal{C}_n = \{A\}$. Del Lema 1.23 y de (3.7) obtenemos que $A \in \operatorname{Li}\mathcal{C}_n$.

Sea $D \in \operatorname{Li}\mathcal{C}_n$. Sea $(D_n)_{n\geqslant N}$ una sucesión en $\mu^{-1}(t)$ tal que $\operatorname{lím} D_n = D$ y $D_n \in \mathcal{C}_n$ para cada $n \geqslant N$ (Lema 1.23).

Por (3.8), para cada $n \geqslant N$ tenemos que $D_{2n} \subset (0,0,-1)S_{2n}$ y $H(A, D_{2n}) < \frac{1}{4}$. Así, como $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$ y $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$ pertencen a A, por el Corolario 1.42 existen puntos $p_{2n}, q_{2n} \in D_{2n}$ tales que
$$d\big(p_{2n}, (\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{1}{2})\big) < \tfrac{1}{4} \text{ y}$$
$$d\big(q_{2n}, (\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{1}{2})\big) < \tfrac{1}{4}.$$

En consecuencia, D_{2n} tiene puntos en cada uno de los siguientes conjuntos:
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0 \text{ y } z < 0\} \text{ y}$$
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y < 0 \text{ y } z < 0\}.$$

Dado que D_{2n} es conexo, esto implica que D_{2n} interseca a cada segmento de la forma R_p con $p \in \{(x, y, z) \in S_{2n} : x \leqslant 0\}$ para cada $n \geqslant N$. Se sigue que D interseca a cada segmento de la forma R_p con $p \in \{(x, y, z) \in S : x \leqslant 0\}$ (Corolario 1.46). Similarmente, D interseca a cada segmento de la forma R_p con $p \in \{(x, y, z) \in S : x \geqslant 0\}$. Finalmente, recordemos que por (3.8) se tiene que $D_n \subset (0, 0, -1)S_n$ para cada $n \geqslant N$. Entonces $D \subset (0, 0, -1)S$ y, como $\mu(D) = t = \mu(A)$, la condición (3.3) implica que $D = A$. Por lo tanto $\operatorname{Li}\mathcal{C}_n = \{A\}$ y concluimos que $\{A\}$ es un R^3-continuo en $\mu^{-1}(t)$. □

Teorema 3.2. *Las propiedades de ser contráctil y de tener hiperespacio contráctil no son propiedades de Whitney.*

Demostración. Sean X y $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ como en el Ejemplo 3.1. Entonces X es contráctil y existe $t \in (0, \mu(X))$ tal que $\mu^{-1}(t)$ contiene un R^3-continuo. Por el Teorema 1.61 tenemos que $\mu^{-1}(t)$ no es contráctil; luego, ser contráctil no es una propiedad de Whitney.

Por otro lado, del Corolario 1.60 obtenemos que 2^X y $C_m(X)$ son hiperespacios contráctiles para toda $m \in \mathbb{N}$ y por el Corolario 1.63 sabemos que $\mu^{-1}(t)$ tiene hiperespacios $2^{\mu^{-1}(t)}$ y $C_m(\mu^{-1}(t))$ que no son contráctiles para toda $m \in \mathbb{N}$. Concluimos entonces que tener hiperespacio contráctil no es una propiedad de Whitney. □

3.2. Un ejemplo en $C_m(X)$

En esta sección mostraremos que las propiedades de ser contráctil y tener hiperespacio contráctil no son propiedades de Whitney para $C_m(X)$ para ninguna $m \in \mathbb{N}$. Para esto daremos un ejemplo de un continuo contráctil X y una función de Whitney $\hat{\mu} : 2^X \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que, para cada $m \in \mathbb{N}$, si μ es la restricción de $\hat{\mu}$ a $C_m(X)$, entonces existe un nivel de Whitney $\mu^{-1}(t)$ en $C_m(X)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ contiene un R^3-continuo.

Ejemplo 3.3. Sean Z, S y S_n para cada $n \in \mathbb{N}$ como en el Ejemplo 3.1 (vea Figura 3.1). Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\begin{aligned} Z^{(n)} &= \frac{1}{2 \cdot 5^n}\big(Z + (2, 0, 0)\big) + \big(1 - \tfrac{1}{5^{n-1}}, 0, 0\big), \\ q_n &= \big(1 - \tfrac{1}{5^{n-1}}, 0, -1\big) \text{ y} \\ Y^n &= (1, 0, 1)Z^{(n)} \cup q_n Z^{(n)}. \end{aligned}$$

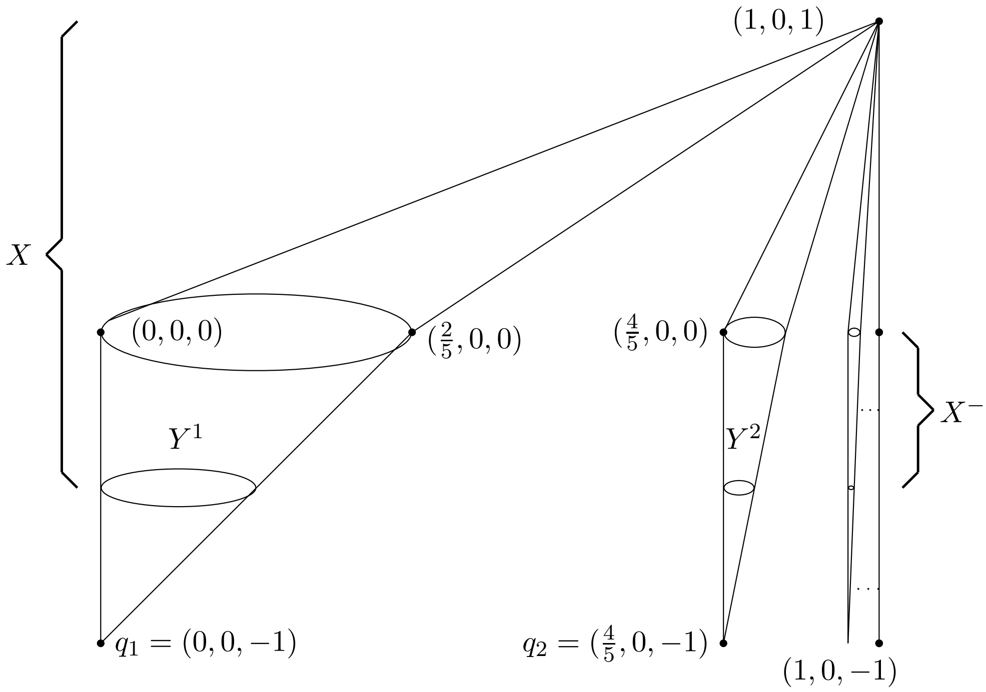

Figura 3.4: El continuo X.

Además definimos

$$\begin{aligned} Y &= \mathrm{Cl}\big(\bigcup\{Y^n : n \in \mathbb{N}\}\big) \\ &= \bigcup\{Y^n : n \in \mathbb{N}\} \cup (1,0,-1)(1,0,1), \\ X &= \{(x,y,z) \in Y : z \geqslant -\tfrac{1}{2}\} \text{ y} \\ X^- &= \{(x,y,z) \in X : z < 0\}. \end{aligned}$$

Notemos que X es un continuo homeomorfo al cono sobre $\bigcup\{Z^{(n)} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1,0,0)\}$, así que

$$X \text{ es contráctil.} \tag{3.9}$$

Si $W \subset Z$ y $p \in Z$ definimos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} W^{(n)} &= \frac{1}{2\cdot 5^n}\big(W + (2,0,0)\big) + \big(1 - \tfrac{1}{5^{n-1}}, 0, 0\big), \\ W^{[n]} &= \frac{1}{4\cdot 5^n}\big(W + (2,0,0)\big) + \big(1 - \tfrac{1}{5^{n-1}}, 0, -\tfrac{1}{2}\big) \text{ y} \\ p^{[n]} &= \frac{1}{4\cdot 5^n}\big(p + (2,0,0)\big) + \big(1 - \tfrac{1}{5^{n-1}}, 0, -\tfrac{1}{2}\big). \end{aligned}$$

Geométricamente los conjuntos $W^{(n)}$ y $W^{[n]}$ representan una contracción de W trasladada al conjunto Y^n a altura $z = 0$ y $z = -\frac{1}{2}$, respectivamente.

En toda esta sección consideraremos $m \in \mathbb{N}$ fija. Definimos ahora para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^n &= S^{[n]}, \\ A &= \bigcup\{A^n : 1 \leqslant n \leqslant m\} \text{ y} \\ U^n &= q_n S^{(n)} \cap X^- \end{aligned}$$

Geométricamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto U^n representa la parte del cono con vértice q_n y base $S^{(n)}$ que se encuentra entre $z = -\frac{1}{2}$ y $z = 0$ (vea Figura 3.5). Observemos que $A \in C_m(X)$.

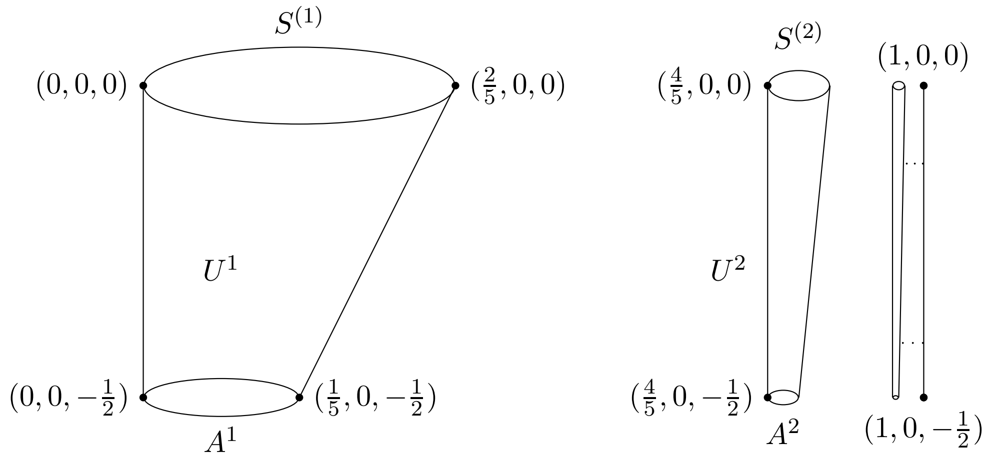

Figura 3.5: los conjuntos A^k y U^k.

Finalmente, notemos que para cada $p \in \bigcup\{Z^{(j)} : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ existe un único $k(p) \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $p \in Z^{(k(p))}$; definimos

$$R_p = \left\{tq_{k(p)} + (1-t)p : t \in [0, \tfrac{1}{2}]\right\}.$$

Observación 3.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\text{si } p \in S \text{ y } W \subset S, \text{ entonces } p^{[n]} \in A^n \text{ y } W^{[n]} \subset A^n.$$

Lema 3.5. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:*

(a) $\text{diám}(S^{(n)}) = d(S^{(n)}, S^{(n+1)}) = d(U^n, U^{n+1}) = \frac{2}{5^n}$,

(b) $\operatorname{diám}(A^n) = \operatorname{diám}\big(\bigcup\{A^j : j > n\}\big) = \frac{1}{5^n}$ *y*

(c) $d(A^n, A^{n+1}) = \frac{3}{5^n}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene que

$$\operatorname{diám}(S^{(n)}) = \frac{1}{2\cdot 5^n}\operatorname{diám} S = \frac{4}{2\cdot 5^n} = \frac{2}{5^n}. \tag{3.10}$$

Definimos $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como $\pi_1((x,y,z)) = x$. Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{mín}(\pi_1(U^n)) &= \tfrac{1}{2\cdot 5^n}(-2+2) + 1 - \tfrac{1}{5^{n-1}} = 1 - \tfrac{1}{5^{n-1}} \text{ y} \\ \operatorname{máx}(\pi_1(U^n)) &= \tfrac{1}{2\cdot 5^n}(2+2) + 1 - \tfrac{1}{5^{n-1}} = \tfrac{2}{5^n} + 1 - \tfrac{5}{5^n} = 1 - \tfrac{3}{5^n}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} d(S^{(n)}, S^{(n+1)}) \geqslant d(U^n, U^{n+1}) &\geqslant \operatorname{mín}(\pi_1(U^{n+1})) - \operatorname{máx}(\pi_1(U^n)) \\ &= 1 - \tfrac{1}{5^n} - \big(1 - \tfrac{3}{5^n}\big) = \tfrac{2}{5^n}. \end{aligned}$$

Como $(1 - \frac{3}{5^n}, 0, 0) \in S^{(n)}$ y $(1 - \frac{1}{5^n}, 0, 0) \in S^{(n+1)}$ y la distancia entre estos puntos es igual a $\frac{2}{5^n}$ tenemos que $\frac{2}{5^n} \geqslant d(S^{(n)}, S^{(n+1)})$. Por lo tanto $d(S^{(n)}, S^{(n+1)}) = d(U^n, U^{n+1}) = \frac{2}{5^n}$. Con esto y (3.10) queda probado (a).

Definimos ahora para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x^k &= (-2,0,0)^{[k]} = \big(1 - \tfrac{1}{5^{k-1}}, 0, -\tfrac{1}{2}\big) \text{ y} \\ y^k &= (2,0,0)^{[k]} = \big(1 - \tfrac{1}{5^{k-1}} + \tfrac{1}{5^k}, 0, -\tfrac{1}{2}\big). \end{aligned}$$

Para demostrar (b), notemos primero que $\operatorname{diám}(A^n) = \frac{1}{2}\operatorname{diám}(S^{(n)}) = \frac{1}{5^n}$ y

$$\operatorname{diám}\Big(\bigcup\{A^j : j > n\}\Big) \geqslant \sup\{d(x^{n+1}, y^j) : j \geqslant n+1\} = 1 - (1 - \tfrac{1}{5^n}) = \tfrac{1}{5^n}. \tag{3.11}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ sea c_j el centro de la circunferencia A^j. Sean $a, b \in \bigcup\{A^j : j > n\}$ y sean $j_1, j_2 > n$ tales que $a \in A^{j_1}$ y $b \in A^{j_2}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $j_1 < j_2$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leqslant d(a, c_{j_1}) + d(c_{j_1}, c_{j_2}) + d(c_{j_2}, b) \\ &= d(x^{j_1}, c_{j_1}) + d(c_{j_1}, c_{j_2}) + d(c_{j_2}, y^{j_2}) = d(x^{j_1}, y^{j_2}) < \tfrac{1}{5^n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\operatorname{diám}\big(\bigcup\{A^j : j > n\}\big) \leqslant \frac{1}{5^n}$. Esto y (3.11) muestran (b).

Finalmente,

$$d(A^n, A^{n+1}) = d(y^n, x^{n+1}) = 1 - \tfrac{1}{5^n} - \big(1 - \tfrac{1}{5^{n-1}} + \tfrac{1}{5^n}\big) = \tfrac{1}{5^{n-1}} - \tfrac{2}{5^n} = \tfrac{3}{5^n},$$

con lo que queda probado (c). □

Observación 3.6. Para cada $n \geqslant 2$ sea $d_n : F_n(X) \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_n(D) = \begin{cases} 0, & \text{si } |D| < n; \\ \text{mín}\{d(a_i, a_j) : a_i, a_j \in D \text{ y } a_i \neq a_j\}, & \text{si } |D| = n. \end{cases}$$

Sea $D \in 2^X$. Observamos que si $B \in F_n(D)$, entonces $d_n(B) \leqslant \text{diám}(D)$ para cada $n \geqslant 2$. Definimos ahora $\mu_n : 2^X \to \mathbb{R}$ para cada $n \geqslant 2$ como

$$\mu_n(D) = \sup\{d_n(B) : B \in F_n(D)\}.$$

Finalmente, definimos $\hat{\mu} : 2^X \to \mathbb{R}$ como

$$\hat{\mu}(D) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu_n(D)}{2^{n-1}}.$$

Por el Ejemplo 1.69 sabemos que $\hat{\mu}$ es una función de Whitney. Sea μ la restricción de $\hat{\mu}$ al hiperespacio $C_m(X)$. Entonces μ es una función de Whitney para $C_m(X)$.

Lema 3.7. *Sean $m \in \mathbb{N}$, X y A como en el Ejemplo 3.3 y $B \in C_m(X)$ tal que $B \subset \bigcup\{q_k S^{(k)} : 1 \leqslant k \leqslant m\}$, $B \neq A$ y B interseca cada segmento R_p, con $p \in \bigcup\{S^{(k)} : 1 \leqslant k \leqslant m\}$. Sea $n \geqslant 2$. Entonces para cada $A' \in F_n(A)$ existe $B' \in F_n(B)$ tal que $d_n(A') \leqslant d_n(B')$. En consecuencia, $\mu_n(A) \leqslant \mu_n(B)$ para cada $n \geqslant 2$.*

Demostración. Para cada $a \in A$ sea $p_{(a)}$ el único punto de $\bigcup\{S^{(k)} : 1 \leqslant k \leqslant m\}$ tal que $a \in R_{p_{(a)}}$. Así, para cada $a \in A$ elegimos un punto $b(a) \in R_{p_{(a)}} \cap B$.

Sea $A' \in F_n(A)$. Si $A' \in F_{n-1}(A)$, entonces $d_n(A') = 0 \leqslant d_n(B')$ para cualquier $B' \in F_n(B)$. Sea $A' = \{a_1, \ldots, a_n\} \in F_n(A) \setminus F_{n-1}(A)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que

$$d_n(A') = \text{mín}\{d(a_i, a_j) : 1 \leqslant i < j \leqslant n\} = d(a_1, a_2).$$

Construiremos un conjunto $B' \in F_n(B)$ tal que $d(a_1, a_2) \leqslant d_n(B')$. Consideremos dos casos para a_1 y a_2.

Caso 1. $d(a_1, a_2) \leqslant d(U^{m-1}, U^m)$.
En este caso sea $B' = \{b(a_1), \ldots, b(a_n)\}$. Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$. Si a_i y a_j pertenecen a circunferencias distintas A^{k_i} y A^{k_j}, respectivamente, entonces

$$d(a_1, a_2) \leqslant d(U^{m-1}, U^m) \leqslant d(U^{k_i}, U^{k_j}) \leqslant d(b(a_i), b(a_j)).$$

Si $a_i, a_j \in A^k$ para alguna $k \in \{1, \ldots, m\}$, entonces

$$d(a_1, a_2) \leqslant d(a_i, a_j) \leqslant d(b(a_i), b(a_j)).$$

Por lo tanto $d(a_1, a_2) \leqslant d_n(B')$.

Caso 2. $d(a_1, a_2) > d(U^{m-1}, U^m)$.
Sea k_0 el mínimo elemento de $\{2, \ldots, m\}$ tal que $d(a_1, a_2) > d(U^{k_0-1}, U^{k_0})$. Por el Lema 3.5-(a),(b) sabemos que

$$\begin{aligned} d(U^{k_0-1}, U^{k_0}) = \frac{2}{5^{k_0-1}} > \frac{1}{5^{k_0-1}} = \text{diám}\, A^{k_0-1} = \text{diám}\Big(\bigcup\{A^k : k_0 \leqslant k\}\Big) \\ > \text{diám}\Big(\bigcup\{A^k : k_0 \leqslant k \leqslant m\}\Big); \end{aligned}$$

se sigue que $A^{k_0-1} \cap A'$ y $\big(\bigcup\{A^k : k_0 \leqslant k \leqslant m\}\big) \cap A'$ tienen a lo más un punto. Entonces tenemos dos subcasos:

Subcaso 2a. $A^{k_0-1} \cap A' = \emptyset$ o $\big(\bigcup\{A^k : k_0 \leqslant k \leqslant m\}\big) \cap A' = \emptyset$.
Sea $B' = \{b(a_1), \ldots, b(a_n)\}$. Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$. Si a_i y a_j pertenecen a circunferencias distintas A^{k_i} y A^{k_j}, respectivamente, entonces $k_i \leqslant k_0 - 2$ o $k_j \leqslant k_0 - 2$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $k_i \leqslant k_0 - 2$ y $k_i < k_j$. Como $k_i + 1 < k_0$, por la elección de k_0 tenemos que

$$d(a_1, a_2) \leqslant d(U^{k_i}, U^{k_1+1}) \leqslant d(U^{k_i}, U^{k_j}) \leqslant d(b(a_i), b(a_j)).$$

Si $a_i, a_j \in A^k$ para alguna $k \in \{1, \ldots, m\}$, entonces

$$d(a_1, a_2) \leqslant d(a_i, a_j) \leqslant d(b(a_i), b(a_j)).$$

Subcaso 2b. Existe $a_{j_1} \in A^{k_0-1} \cap A'$ y existe $a_{j_2} \in \big(\bigcup\{A^k : k_0 \leqslant k \leqslant m\}\big) \cap A'$.
Sean $p \in S^{(k_0-1)}$ y $q \in S^{(m)}$ tales que

$$d(p, q) = \text{máx}\{d(x, y) : x \in S^{(k_0-1)}, y \in S^{(m)}\}.$$

Elegimos puntos $\hat{b}_{j_1} \in B \cap R_p$ y $\hat{b}_{j_2} \in B \cap R_q$. Para cada $t \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2\}$ sea $\hat{b}_t = b(a_t)$. Sea $B' = \{\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_n\}$. Entonces $d(a_1, a_2) \leqslant d(a_{j_1}, a_{j_2}) \leqslant d(\hat{b}_{j_1}, \hat{b}_{j_2})$. Si $\{i, j\} \neq \{j_1, j_2\}$ se puede probar que $d(a_1, a_2) \leqslant d(\hat{b}_i, \hat{b}_j)$ como en el Subcaso 2a. Por lo tanto $d_n(A') \leqslant d_n(B')$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \mu_n(A) &= \sup\{d_n(A') : A' \in F_n(A)\} \\ &\leqslant \sup\{d_n(B') : B' \in F_n(B)\} = \mu_n(B) \text{ para cada } n \geqslant 2. \end{aligned}$$

□

Lema 3.8. *Sean A y X como en el Ejemplo 3.3. Si $B \in C_m(X)$, $B \subset \bigcup\{q_k S^{(k)} : 1 \leqslant k \leqslant m\}$, $B \neq A$ y B interseca cada segmento R_p, con $p \in \bigcup\{S^{(k)} : 1 \leqslant k \leqslant m\}$, entonces $\mu(B) > \mu(A)$.*

Demostración. Para cada $a \in A$ sea $p_{(a)}$ el único punto de $\bigcup\{S^{(k)} : 1 \leqslant k \leqslant m\}$ tal que $a \in R_{p_{(a)}}$. Entonces para cada $a \in A$ elegimos un punto $b(a) \in R_{p_{(a)}} \cap B$.

Sea $b_1 \in B \backslash A$ y sea $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $b_1 \in q_k S^{(k)}$. Sea $\varepsilon = \text{diám}(A^k)$. Entonces para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ mínimo con la propiedad de que para cualquier subconjunto D de A^i con al menos $N_i + 1$ puntos se tiene que

$$\text{mín}\{d(x, y) : x, y \in D, x \neq y\} \leqslant \varepsilon. \tag{3.12}$$

Notemos que $N_k = 1$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ elegimos un conjunto de N_i puntos distintos $\{q_1^i, q_2^i, \ldots, q_{N_i}^i\} \subset A^i$ tal que

$$d(q_{j_1}^i, q_{j_2}^i) > \varepsilon \text{ si } 1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant N_i \tag{3.13}$$

y sea $B^i = \{b(q_1^i), \ldots, b(q_{N_i}^i)\}$. Sea $p \in S^{(k)}$ tal que $b_1 \in R_p$. Llamemos q a la antípoda de p en $S^{(k)}$ y sea $b_2 \in B$ tal que $b_2 \in R_q$. Como $b_1 \in B \setminus A$ se sigue que

$$d(b_1, b_2) > \varepsilon. \tag{3.14}$$

Consideremos ahora dos casos para k.

Caso 1. $k < m$.
Sea $N = \sum_{i=1}^{k} N_i + 2$. Demostraremos que

$$\mu_N(A) \leqslant \varepsilon < \mu_N(B). \tag{3.15}$$

Sea $A' \in F_N(A)$. Si $A' \in F_{N-1}(A)$, entonces $d_N(A') = 0$. Consideremos ahora $A' \in F_N(A) \setminus F_{N-1}(A)$. Si A' tiene al menos dos puntos distintos $a_{i_0}, a_{j_0} \in \bigcup\{A^j, j > k\}$, entonces por el Lema 3.5-(b) tenemos que

$$d_N(A') \leqslant d(a_{i_0}, a_{j_0}) \leqslant \text{diám}(\bigcup\{A^j : j > k\}) = \text{diám}(A^k) = \varepsilon.$$

Si A' tiene a lo más un punto en $\bigcup\{A^j : j > k\}$, entonces existe $t \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $A' \cap A^t$ tiene al menos $N_t + 1$ puntos. Por (3.12) existen puntos distintos $p_1, p_2 \in A' \cap A^t$ tales que $d(p_1, p_2) \leqslant \varepsilon$, así que $d_N(A') \leqslant \varepsilon$. Por lo tanto $d_N(A') \leqslant \varepsilon$ para todo $A' \in F_N(A)$ y así

$$\mu_N(A) \leqslant \varepsilon. \tag{3.16}$$

Elegimos $p_3 \in S^{(m)}$ y sea $b_3 \in B \cap R_{p_3}$. Sea $B' = \{b_1, b_2, b_3\} \cup (\bigcup\{B^i : 1 \leqslant i \leqslant k-1\})$. Entonces B' tiene N puntos. Por (3.13) y (3.14) sabemos que la distancia entre puntos distintos de B' que pertenecen a un mismo conjunto U^j es mayor que ε. Además, usando que

$$d(U^i, U^j) \geqslant d(U^k, U^{k+1}) > \text{diám}(A^k) = \varepsilon \text{ si } 1 \leqslant i < j \leqslant k+1 \tag{3.17}$$

(vea Lema 3.5-(a),(b)) tenemos que la distancia entre puntos de B' que pertenecen a distintos conjuntos U^i y U^j también es mayor que ε. Deducimos entonces que $\mu_N(B) \geqslant d_N(B') > \varepsilon$. Esto y (3.16) prueban (3.15); así, usando el Lema 3.7 en este caso concluimos que $\mu(A) < \mu(B)$.

Caso 2. $k = m$.
En este caso definimos $N = \sum_{i=1}^{k} N_i + 1$. Sea $A' \in F_N(A)$. Si $A' \in F_{N-1}(A)$, entonces $d_N(A') = 0$. Consideremos ahora $A' \in F_N(A) \setminus F_{N-1}(A)$. Entonces existe $s \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $A' \cap A^s$ tiene al menos $N_s + 1$ puntos. Por (3.12) existen puntos distintos $p_1, p_2 \in A' \cap A^s$ tales que $d(p_1, p_2) \leqslant \varepsilon$, así que $d_N(A') \leqslant \varepsilon$. Por lo tanto $d_N(A') \leqslant \varepsilon$ para todo $A' \in F_N(A)$ y así

$$\mu_N(A) \leqslant \varepsilon. \tag{3.18}$$

Definimos $B'' = \{b_1, b_2\} \cup (\bigcup\{B^i : 1 \leqslant i \leqslant k-1\})$. Entonces B'' tiene N puntos y usando nuevamente (3.13), (3.14) y (3.17) como en el Caso 1 obtenemos que $d(x, y) > \varepsilon$ para cualesquiera dos puntos $x, y \in B''$ y así $\mu_N(B) \geqslant d_N(B'') > \varepsilon$. Por lo tanto $\mu_N(A) < \mu_N(B)$. Con esto y el Lema 3.7 concluimos que $\mu(A) < \mu(B)$. □

Observación 3.9. Para cada $k, n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\begin{aligned} A_n^k &= \{\tfrac{1}{2}q_k + \tfrac{1}{2}p : p \in S_n^{(k)}\}, \\ A_n &= \bigcup\{A_n^k : 1 \leqslant k \leqslant m\}, \\ U_n^k &= q_k S_n^{(k)} \cap X^- \text{ y} \\ U_n &= \bigcup\{U_n^k : 1 \leqslant k \leqslant m\}. \end{aligned}$$

Notemos que $A_n \in C_m(X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $A_n^k \subset U_n^k$ para cada $n, k \in \mathbb{N}$. Sea A como en el Ejemplo 3.3 y sea $t = \mu(A)$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^k = A^k$ para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, por el Corolario 1.73 existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geqslant N_1$ podemos elegir $B_n \in C_m(X)$ tal que $\mu(B_n) = t$,

$$A_n \subset B_n \text{ o } B_n \subset A_n \tag{3.19}$$

y además
$$B_n \cap (A_n^k) \neq \emptyset \text{ para toda } k \in \{1, \ldots, m\}. \tag{3.20}$$
Del Lema 1.75 obtenemos que
$$\lim B_n = A. \tag{3.21}$$

Lema 3.10. *Sean t, N_1, y U_n para cada $n \in \mathbb{N}$ como en la Observación 3.9. Sea*
$$\mathcal{U} = B^H\left(\frac{1}{8 \cdot 5^m}, A\right) \cap \mu^{-1}(t).$$
Sea $N \geqslant N_1$ tal que $B_n \in \mathcal{U}$ para toda $n \geqslant N$. Para cada $n \geqslant N$, sea $\mathcal{C}_n$ la componente de $\mathcal{U}$ tal que $B_n \in \mathcal{C}_n$. Entonces para cada $n \geqslant N$ se tiene que
$$\mathcal{C}_n \subset \{B \in \mu^{-1}(t) : B \subset U_n\}.$$

Demostración. Sea $B \in \mathcal{C}_n$. Como $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{U}$, se tiene que $H(A, B) < \frac{1}{8 \cdot 5^m}$ y así $B \subset X^-$. Luego,
$$B \subset U_n^1 \cup \ldots \cup U_n^m \cup (X^- \setminus U_n). \tag{3.22}$$
Definimos ahora:
$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathcal{U} \cap C_m(U_n) \text{ y} \\ \mathcal{W} &= \mathcal{U} \cap \langle X, X^- \setminus U_n \rangle. \end{aligned}$$
Entonces $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son dos subconjuntos abiertos (Corolario 1.40) y ajenos de $C_m(X)$ tales que $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{V} \cup \mathcal{W}$. Sabemos que $B_n \in \mathcal{C}_n$ y por (3.20) se tiene que
$$B_n \cap U_n^j \neq \emptyset \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{3.23}$$
Como $B_n \in C_m(X)$ y los conjuntos $U_n^1, \ldots, U_n^m$ y $X^- \setminus U_n$ son abiertos y ajenos dos a dos, de (3.22) y (3.23) obtenemos que $B_n \subset U_n^1 \cup \ldots U_n^m = U_n$; en otras palabras $B_n \in \mathcal{V}$. Por la conexidad de $\mathcal{C}_n$ concluimos que $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{V}$; en particular $B \subset U_n$. $\square$

Sea $t = \mu(A)$; demostraremos que $\{A\}$ es un R^3-continuo en $\mu^{-1}(t)$.

Teorema 3.11. *Existe un continuo contráctil X y existe una función de Whitney $\hat{\mu} : 2^X \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que para cada $m \in \mathbb{N}$, si μ es la restricción de $\hat{\mu}$ a $C_m(X)$, entonces existe un nivel de Whitney $\mu^{-1}(t)$ en $C_m(X)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ contiene un R^3-continuo.*

Demostración. Sean X y A como en el Ejemplo 3.3, sea μ como en la Observación 3.6, sean t y $\mathcal{U}$ como en la Observación 3.9 y sean N y $\mathcal{C}_n$ para cada $n \geqslant N$ como en el Lema 3.10. Se probará que $\operatorname{Li}\mathcal{C}_n = \{A\}$. Del Lema 1.23 y de (3.21) de la Observación 3.9 obtenemos que $A \in \operatorname{Li}\mathcal{C}_n$.

Ahora tomemos $D \in \operatorname{Li}\mathcal{C}_n$. Sea $(D_n)_{n\geqslant N}$ una sucesión en $\mu^{-1}(t)$ tal que $\lim D_n = D$ y $D_n \in \mathcal{C}_n$ para cada $n \geqslant N$ (Lema 1.23).

Por el Lema 3.10, para cada $n \geqslant N$ tenemos que $D_{2n} \subset U_{2n}$ y $H(A, D_{2n}) < \frac{1}{8\cdot 5^m}$. Así, como $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)^{[i]} \in A$ y $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)^{[i]} \in A$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, por el Corolario 1.42 para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ existen puntos $p^i_{2n}, q^i_{2n} \in D_{2n}$ tales que

$$d\big(p^i_{2n}, (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)^{[i]}\big) < \tfrac{1}{8\cdot 5^m} \text{ y}$$
$$d\big(q^i_{2n}, (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)^{[i]}\big) < \tfrac{1}{8\cdot 5^m}.$$

En consecuencia, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ el conjunto D_{2n} tiene puntos en cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\{(x, y, z) \in S_{2n} : x > 0, y > 0\}^{(i)} \text{ y}$$
$$\{(x, y, z) \in S_{2n} : x > 0, y < 0\}^{(i)}.$$

Dado que $D_{2n} \in C_m(X)$, esto implica que para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ y para cada $n \geqslant N$ el conjunto D_{2n} interseca cada segmento de la forma R_p con $p \in \{(x, y, z) \in S_{2n} : x \leqslant 0\}^{(i)}$. Se sigue que D interseca cada segmento de la forma R_p con $p \in \{(x, y, z) \in S : x \leqslant 0\}^{(i)}$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ (Corolario 1.46). Similarmente, D interseca cada segmento de la forma R_p con $p \in \{(x, y, z) \in S : x \geqslant 0\}^{(i)}$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Además, por el Lema 3.10 se tiene que $D_n \subset \bigcup\{q_k S^{(k)}_n : 1 \leqslant k \leqslant m\}$ para cada $n \geqslant N$. Entonces $D \subset \bigcup\{q_k S^{(k)} : 1 \leqslant k \leqslant m\}$ y como $\mu(D) = t = \mu(A)$, el Lema 3.8 implica que $D = A$. Por lo tanto $\operatorname{Li}\mathcal{C}_n = \{A\}$ y concluimos que $\{A\}$ es un R^3-continuo en $\mu^{-1}(t)$. □

Teorema 3.12. *Las propiedades de ser contráctil y de tener hiperespacio contráctil no son propiedades de Whitney para $C_m(X)$.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$, sea X como en el Ejemplo 3.3 y sea $\mu : C_m(X) \to \mathbb{R}$ como en la Observación 3.6. Entonces X es contráctil y por el Teorema 3.11 existe $t \in (0, \mu(X))$ tal que $\mu^{-1}(t)$ contiene un R^3-continuo. Se sigue del Teorema 1.61 que $\mu^{-1}(t)$ no es contráctil; luego, ser contráctil no es una propiedad de Whitney para $C_m(X)$.

Por otro lado, del Corolario 1.60 obtenemos que 2^X y $C_n(X)$ son hiperespacios contráctiles para toda $n \in \mathbb{N}$ y por el Corolario 1.63 sabemos que $\mu^{-1}(t)$ tiene hiperespacios $2^{\mu^{-1}(t)}$ y $C_n(\mu^{-1}(t))$ que no son contráctiles para ninguna $n \in \mathbb{N}$. Concluimos entonces que tener hiperespacio contráctil no es una propiedad de Whitney para $C_m(X)$. $\square$

Bibliografía

[1] Charatonik, W.J., *R^i-continua and hyperspaces*, Topology Appl. 23 (1986), 207-216.

[2] Czuba, S.T., *R^i-continua and contractibility of dendroids*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. 27 (1979), 299-302.

[3] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[4] Engelking, R., *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] Illanes A., *R^3-continua in hyperspaces*, Houston J. Math. 20 (1994), 529-538.

[6] Illanes A., *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, 28, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[7] Illanes, A. y Nadler, S. B., Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Texbooks in pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[8] Munkres, J., *Topology : A first course*, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1975.

[9] Nadler, S. B., Jr., *Some basic connectivity properties of Whitney map inverses in $C(X)$*, Proc. Charlotte Topology Conference (University of North Carolina at Charlotte, 1974), Studies in Topology, Academic Press, New York, 1975, Nick M. Stavrakas and Keith R. Allen, Editors, 393-410.

[10] Nadler, S. B., Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Texbooks in pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, 1992.

[11] Nadler, S. B., Jr., *Dimension Theory: An introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, 18, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.

[12] Nadler, S. B., Jr., *Hyperspaces of sets. A text with research questions*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, 33, Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

[13] Nikiel, J., *A Characterization of dendroids with uncountably many endpoints in the classical sense*, Houston J. Math. 9 (1983), 421-432.