



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

CAMPO CONTROL

**CONTROL DE PROCESOS BIOLÓGICOS CON BASE  
EN OBSERVADORES ROBUSTOS SUPER-TWISTING**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

EDWARD GUZMÁN DOROTEO

TUTOR:

DR. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D.F. ENERO 2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dra. Verde Rodarte María Cristina

Secretario: Dr. Tang Xu Yu

Vocal: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto

1er. Suplente: Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio

2o. Suplente: Dr. Vargas Casillas Alejandro

La tesis se realizó en el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

**TUTOR DE TESIS:**

---

Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

## AGRADECIMIENTOS

A los profesores del Colegio de Control Automático de la UNAM, especialmente a mi tutor de tesis el Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez por su gran apoyo durante la realización de la misma.

Al Dr. Leonid Fridman por dar seguimiento a esta tesis durante las sesiones del seminario y a los compañeros del grupo de Modos Deslizantes.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

A mis padres y hermanos.

A mis amigos de Maestría y a mis amigos de canto clásico.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	2
1.2. Objetivo . . . . .	2
1.3. Estado del arte . . . . .	3
1.4. Alcances . . . . .	4
1.5. Descripción de capítulos . . . . .	4
<b>2. Fundamentos teóricos sobre bioprocesos</b>	<b>6</b>
2.1. Biorreactores . . . . .	6
2.2. El proceso biotecnológico . . . . .	8
2.3. Objetivo de control en procesos biológicos . . . . .	10
<b>3. Diseño de un Observador Super-Twisting Generalizado para la estimación de estados y entradas desconocidas en un proceso de digestión anaerobia</b>	<b>13</b>
3.1. El Observador Super-Twisting Generalizado OSTG . . . . .	13
3.2. Planteamiento del problema y diseño del observador . . . . .	14
3.2.1. Estimación en tiempo finito de una entrada desconocida variante en el tiempo . . . . .	16
3.2.2. Estimación asintótica de la concentración de bacterias metanogénicas . . . . .	16
3.2.3. Estimación en tiempo finito de la concentración de bacterias acidogénicas y substrato . . . . .	17
3.3. Simulaciones . . . . .	18
3.3.1. Entradas invariantes en el tiempo . . . . .	18
3.3.2. Entradas variantes en el tiempo . . . . .	24
3.3.3. Resultados . . . . .	28
<b>4. Estimación de estados y tasas de reacción a través de OSTG en un proceso biológico de crecimiento microbiano</b>	<b>30</b>
4.1. Caso de estudio: Estimación de estados desconocidos y tasas de reacción en cultivos de <i>Escherichia coli</i> . . . . .	30
4.1.1. Formulación del problema . . . . .	30
4.1.2. Modelo del sistema . . . . .	31
4.1.3. Análisis de observabilidad . . . . .	33
4.1.4. Modelo reducido . . . . .	35
4.2. Diseño de OSTG para la estimación de tasas de reacción y estados no medibles . . . . .	36
4.2.1. Observador de alta ganancia (HGO) . . . . .	37
4.3. Simulaciones . . . . .	38
4.3.1. Resultados . . . . .	43

<b>5. Regulación del subproducto en un proceso biológico de crecimiento microbiano con base en estimación mediante OSTG</b>	<b>45</b>
5.1. Control por linealización exacta (entrada-salida)	45
5.1.1. Principio del control por linealización exacta	45
5.1.2. Regulación de la concentración del subproducto con base en OSTG	47
5.1.3. Simulaciones	49
5.2. Regulación de la concentración de acetato a través de un control adaptable por linealización exacta	56
5.2.1. El problema del control adaptable	56
5.2.2. Diseño de un observador asintótico	57
5.2.3. Estimador basado en observador para obtener las tasas de crecimiento específico	59
5.2.4. Regulación del subproducto con base en OA y estimador de tasas de crecimiento específico	61
5.2.5. Simulaciones	62
5.3. Regulación de acetato a través de un control cuasi-continuo por modos deslizantes con base en OSTG	67
5.3.1. Simulaciones	68
5.4. Resultados	73
<b>6. Conclusiones y perspectivas futuras</b>	<b>76</b>
6.1. Conclusiones	76
6.2. Contribuciones	77
6.3. Perspectivas futuras	77
<b>Apéndice I</b>	<b>78</b>
El Filtro de Kalman Extendido EKF	78
<b>Apéndice II</b>	<b>80</b>
Caso particular de estudio: regulación de la concentración de sustrato	80
Simulaciones	81
<b>Bibliografía</b>	<b>84</b>



## Introducción

---

La biotecnología ha sido definida como “un conjunto de técnicas que usan sistemas biológicos, organismos vivos, o derivados de los mismos para hacer o modificar productos o procesos para un uso específico”. La biotecnología promete hacer una gran contribución para el desarrollo de, los cuidados a la salud, la mejora de la seguridad en alimentos a través de prácticas agrícolas sustentables, el incremento de la calidad de los suministros de agua potable, desarrollo eficiente de procesos industriales para transformar materias primas, el apoyo a métodos sostenibles de forestación y reforestación y la desintoxicación de los desechos peligrosos (Juma y Konde, 2001).

También la biotecnología ha sido considerada por la Unión Europea para proveer en un futuro, una mayor contribución para lograr el objetivo de convertirse en el líder de la base de la economía. En marzo del 2001 en Estocolmo, el Consulado Europeo confirmó esto, e invitó a “examinar las medidas requeridas para utilizar todo el potencial de la biotecnología y la fuerza del sector biotecnológico europeo a fin de coincidir con los principales competidores garantizando al mismo tiempo que esos desarrollos se lleven a cabo mientras resulte sano y seguro para los consumidores y el medio ambiente”.

En efecto, las ciencias de la vida y la biotecnología están siendo reconocidas en conjunto como la siguiente ola de la economía basada en el conocimiento, creando nuevas oportunidades para las sociedades y economías y generando nuevas aplicaciones en varios campos.

Algunos de estos campos cubiertos por la biotecnología incluyen el área agro-alimentaria, donde la biotecnología tiene el potencial de llevar mejoras a la calidad de los alimentos y beneficios ambientales a través de cultivos agrónomicamente mejorados. La biotecnología también tiene el potencial de mejorar los usos no alimentarios de los cultivos como fuentes de materias primas industriales o nuevos materiales como plásticos biodegradables.

Nuevas formas de proteger y mejorar el ambiente son ofrecidas por la biotecnología incluyendo la biorremediación de la contaminación del aire, suelo, agua, desechos así como también el desarrollo de productos y procesos industriales más limpios basados en el uso de enzimas (biocatálisis).

Una de las aplicaciones más prometedoras de la biotecnología está relacionada a los cuidados en la salud, en donde existe una enorme necesidad de técnicas novedosas para tratar de encontrar curas para las enfermedades, de las cuales sólo se conoce la cura para la mitad de ellas y aunque existen curas como los antibióticos, estos se están haciendo menos efectivos debido al incremento en la resistencia de los virus (Rocha, 2003).

Sin embargo debido a la gran importancia que tienen los sistemas biológicos por su aplicación y considerando que no han sido estudiados lo suficiente y que no existen muchas técnicas que brinden una mejora de acuerdo a los diferentes objetivos de control de cada proceso, es indispensable estudiarlos desde el punto de vista científico, primeramente analizando sus modelos matemáticos, posteriormente aplicando técnicas de estimación (para estados y parámetros) y finalmente generando esquemas completos de control para dichos sistemas.

## 1.1. Motivación

Algunos aspectos importantes que han limitado el desarrollo y optimización de los procesos biotecnológicos son:

- La nula existencia de sensores en línea, durante el monitoreo de los procesos.
- La escasa aplicación de esquemas de control para la seguimiento/regulación de concentraciones.
- El alto grado de complejidad en los procesos biológicos y el alto comportamiento no lineal en la mayoría de los mismos.

## 1.2. Objetivo

En este trabajo se establece como objetivo fundamental controlar un proceso biológico (regulación) de crecimiento microbiano con base en una estimación robusta, mediante el uso observadores por modos deslizantes, principalmente en la estimación de tasas de reacción y estados no medibles del sistema.

El propósito de la utilización de los observadores tipo super-twisting, es garantizar que la ley de control aplicada al sistema resulte más eficiente comparada con otras estrategias (o a las mismas) que utilizan una base de estimación distinta tales como filtros de Kalman, observadores asintóticos, observadores de alta ganancia, etc. La figura 1.1. muestra una representación esquemática del objetivo del trabajo.

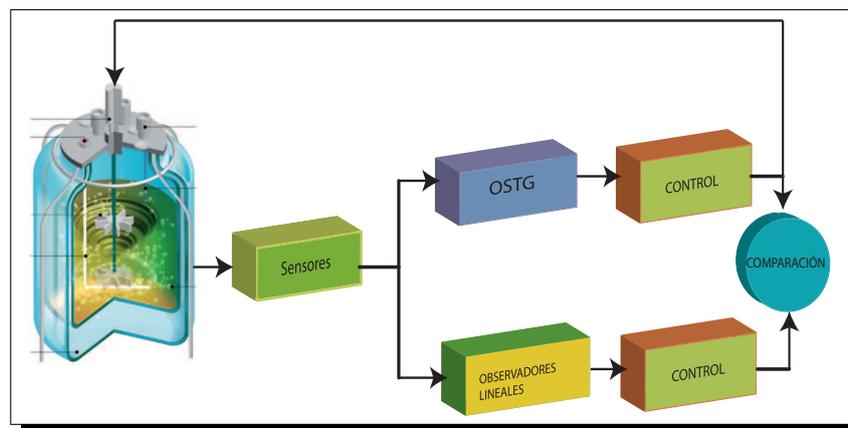


Figura 1.1: Objetivo

### 1.3. Estado del arte

En los bioprocesos existe la necesidad de esquemas completos de observación y control, y la opción que se ha decidido es hacerlo acoplando una etapa de observación robusta y un controlador no lineal que utiliza los estados y parámetros estimados.

En las últimas décadas, los procesos biológicos han sido fuertemente utilizados en la industria y por ello se ha comenzado a estudiar su comportamiento dinámico. Para la parte de estimación de estados y parámetros en los 90's se comienzan a analizar los principios de ingeniería básicos de bioprocesos y una vez encontrados varios modelos matemáticos de diferentes procesos biológicos, en (Bastin y Dochain, 1990) se aplican estrategias de observación referidas a técnicas puramente lineales como el filtro de Kalman, el observador Luenberger, observadores asintóticos, etc.

En (Doran, 1995), se describen los modelos matemáticos lineales y no lineales de diferentes procesos biológicos tales como: crecimiento microbiano o celular, procesos de fermentación, transferencia de materia, etc.

Posteriormente se describen los modelos matemáticos de bioprocesos a través de datos estadísticos experimentales (Nielsen *et al.*, 2003). Sin embargo todos estos datos proveen la descripción de un modelo sin profundizar en estrategias de observación.

En los trabajos más recientes como en (Dewasme, 2011), con base en una estimación a través del filtro de Kalman extendido se obtiene la medición del subproducto para posteriormente regularlo a un nivel bajo y hacer que este objetivo sea alcanzado.

En (Mendoza, 2011) se aplican los primeros observadores de tipo super-twisting a diferentes sistemas biológicos con muy buenos resultados y además se brinda un algoritmo general para diseño de un observador OSTG para cualquier bioproceso.

En cuanto a la parte de control, el objetivo en procesos biológicos suele variar dependiendo del sistema, en (Bastin y Dochain, 1990) se aplica un control no lineal a diversos procesos biológicos, específicamente se utiliza un control no lineal con un lazo cerrado lineal llamado "control por linealización exacta entrada-salida" a fin de regular concentraciones en los diferentes sistemas, además de tratar el análisis de estabilidad de diversos sistemas biológicos a través de la teoría de Lyapunov. Por ejemplo para sistemas biológicos de crecimiento microbiano y cuya dinámica está establecida en (Rocha, 2003), el objetivo es maximizar el crecimiento de la biomasa a partir de la regulación del subproducto.

En (Dewasme *et al.*, 2009) se plantea un control lineal por retroalimentación de estados para el cultivo en lote alimentado del *s. cerevisiae* asumiendo que los estados son conocidos, pero debido a que el control es lineal sólo tiene una pequeña región de operación donde se garantiza su correcto funcionamiento y el asumir que los estados son conocidos no se asemeja nada a la realidad.

La idea de plantear un sistema control no lineal para bioprocesos con base en una estimación robusta a través de un observador tipo super-twisting, es estimulante debido a que no existen suficientes esquemas de este tipo y aquí se brinda esta nueva opción para el control de estos procesos.

## 1.4. Alcances

Los alcances de esta tesis son:

- Mostrar en simulación el buen desempeño de un sistema de control no lineal (dependiendo del objetivo de cada sistema) con base en estimación a través de un observador tipo super-twisting.
- Utilizar modelos ya establecidos de sistemas biológicos para la aplicación de las estrategias de observación y control.
- Comparar el desempeño de diversos observadores lineales con el observador tipo super-twisting utilizado.
- Considerar valores reales de parámetros que se utilizan en bioprocesos.
- No se consideran experimentos durante el trabajo.

## 1.5. Descripción de capítulos

Este trabajo está formado esencialmente por dos partes, en una primera parte se trata el problema de observación y posteriormente se aplican estrategias de control.

En el Capítulo 2 se describe un panorama muy general de los procesos biológicos, los elementos involucrados y el principal objetivo de control. En el Capítulo 3 se brinda una breve explicación de los observadores por modos deslizantes, principalmente del Observador Super-Twisting Generalizado (OSTG), en el cuál esta basada toda la parte de observación de este escrito y además se aplica este observador en un ejemplo, en donde se estiman los estados y entradas desconocidas en un sistema de digestión anaerobia.

En el Capítulo 4 utilizando el OSTG se estiman las tasas de reacción y estados no medidos de un proceso biológico de crecimiento microbiano (*E. coli*) y posteriormente en el Capítulo 5 se aplican varias estrategias de control para la regulación de concentraciones no deseadas (subproducto) en el sistema y se hacen comparaciones con respecto a otra base de estimación lineal, como observadores asintóticos y filtro de Kalman. Finalmente en el Capítulo 6 se muestran las conclusiones, las contribuciones y las perspectivas futuras.



---

Fundamentos teóricos sobre bioprocesos

---

2.1. Biorreactores

Básicamente, un biorreactor es un tanque en el cuál ocurren simultáneamente diversas reacciones biológicas en un líquido. El biorreactor se supone perfectamente mezclado lo que implica que la concentración del medio es homogénea en el reactor. Siendo  $X$  la concentración de microorganismos (biomasa) en el reactor,  $S$  es la concentración de sustrato en el reactor,  $S_{in}$  es la concentración de sustrato a la entrada,  $F_{in}$  es la tasa de flujo a la entrada y  $F_{out}$  la tasa de flujo a la salida. Un diagrama esquemático estándar de un biorreactor “tipo tanque agitado” se muestra en la siguiente figura:

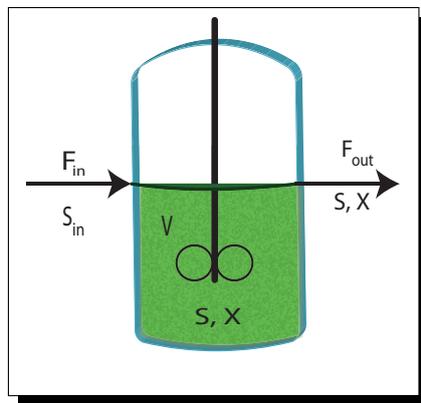


Figura 2.1: Biorreactor tipo tanque agitado

Las reacciones biológicas involucradas durante el proceso pueden ser clasificadas en dos categorías: reacciones de crecimiento microbiano y reacciones de catalización de enzimas. El crecimiento de microorganismos (bacterias, cepas, etc.) se genera mediante el consumo de nutrientes apropiados o *substratos* (que involucran elementos como el carbón, nitrógeno, oxígeno, etc.) brindándoles las condiciones ambientales (temperatura, PH, etc.) favorables. La materia de microorganismos vivos o células vivas es llamada *biomasa*.

Asociadas con el crecimiento celular, pero llevadas a cabo a una diferente tasa, están las reacciones catalizadoras de enzimas en las cuales algunos reactantes son transformados en productos (algunas veces llamados metabolitos) a través de una acción catalítica de enzimas intracelulares o extracelulares (Bastin y Dochain, 1990).

## Condiciones de operación de biorreactores

Considerando un reactor tipo tanque agitado (Figura 2.1) se describen las condiciones de operación más frecuentes del mismo:

- *Tipo Lote*

Un reactor tipo lote es aquel en el que no existe flujo de entrada ni flujo de salida:

$$F_{in} = F_{out} = 0$$

El tanque se llena inicialmente con una gran cantidad de sustrato y con una pequeña cantidad de biomasa. Durante el proceso no se introduce sustrato y éste se detiene cuando se han consumido suficientes nutrientes. Finalmente se recolecta la cantidad total de biomasa producida. Otra finalidad de este tipo de operación es la degradación de un contaminante.

- *Tipo Lote-Alimentado*

Un reactor en lote-alimentado no tiene un flujo de salida:

$$F_{out} = 0$$

El tanque inicialmente contiene una pequeña cantidad tanto de sustrato como de biomasa y se llena progresivamente con un sustrato a la entrada.

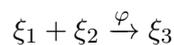
- *Tipo Tanque Agitado Continuo*

En el cultivo continuo de microorganismos, el reactor está permanentemente alimentado con un sustrato a la entrada. La tasa de flujo de salida es igual a la tasa de flujo de entrada y el volumen del cultivo permanece constante:

$$\begin{aligned} F_{in} &= F_{out} = F \\ \frac{dV}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

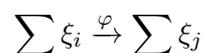
## Noción de un esquema de reacción en un proceso biotecnológico

Una simple reacción irreversible que involucra dos reactantes generando un producto de reacción está comúnmente representada por un esquema de la siguiente forma:



donde  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son los dos reactantes, los cuales están irreversiblemente combinados para generar un producto de reacción  $\xi_3$ ,  $\varphi$  es la tasa de reacción, es decir la tasa de consumo de los reactantes, la cual es igual a la tasa de formación del producto.

Generalmente el número de componentes de reacción (reactantes y/o productos) se puede escribir:



## 2.2. El proceso biotecnológico

Un proceso biotecnológico es un conjunto de  $M$  reacciones que involucran  $N$  componentes (es decir, reactantes y productos de reacción). Para entender bien la definición y evitar confusiones se considera lo siguiente (Bastin y Dochain, 1990):

- El esquema de reacción representa sólo una relación *cualitativa*, lo que permite analizar procesos, biológicos, bioquímicos y químicos en una aproximación unificada.
- Los componentes  $\xi_i$  del esquema de reacción son generalmente:
  - Población de microorganismos
  - Enzimas
  - Substratos externos
  - Productos/substratos internos (es decir componentes que son generados por una reacción y que posiblemente puedan ser el sustrato de alguna otra)
- El esquema de reacción de un proceso biotecnológico es una herramienta para derivar un modelo dinámico operacional, que permite resolver problemas de ingeniería a pesar de no dar una descripción exhaustiva del proceso, debido a que hay componentes que no son de interés y pueden ser omitidos.

### Modelo dinámico general de un bioproceso

La dinámica de un proceso biológico puede ser representada de forma general por el siguiente modelo no lineal en espacio de estados:

$$\frac{d\xi}{dt} = K\varphi(\xi, t) - D\xi - Q(\xi) + F \quad (2.1)$$

donde:

- $\xi$  es el estado.
- $K$  es una matriz constante de coeficientes de producción del sistema.
- $D$  es la tasa de dilución y se define como:

$$D = \frac{F_{in}}{V} \quad (2.2)$$

- $Q$  es la tasa de flujo de salida de materia del componente  $\xi$  del reactor en forma gaseosa.
- $F$  es la tasa de alimento de materia en el reactor del componente  $\xi$ , si éste es un sustrato externo.

El modelo general en espacio de estados (2.1) es la base para la estimación y algoritmos de control propuestos a lo largo de los capítulos. Teniendo en cuenta que el modelo (2.1) no es una representación matemática pero tiene un significado físico bien definido:

- el primer término  $K\varphi(\xi, t)$  describe la cinética de las reacciones bioquímicas y microbiológicas involucradas en el proceso;
- los términos restantes  $-D\xi - Q(\xi) + F$  describen la dinámica de transporte de los componentes a través del biorreactor.

El modelo (2.1) es por tanto muy importante en la forma de expresar, en una *sóla forma matemática compacta*, los dos fenómenos físicos (cinética y dinámica transportada) las cuales están en interacción íntima en un biorreactor.

### Modelado de la tasa de alimentación

En la ecuación (2.1),  $F$  representa la tasa de alimentación (por unidad de volumen) de aquellos componentes  $\xi$  los cuales son sustratos externos introducidos al reactor. La manera de cómo el reactor es alimentado y la naturaleza del sustrato (líquido o gaseoso) genera varios métodos de modelar las tasas de alimentación.

### Substratos Líquidos

Hay esencialmente dos formas de introducir un sustrato líquido en un reactor: ya sea diluido en el flujo de entrada (Figura 2.2.b) o independiente de éste (Figura 2.2.a).

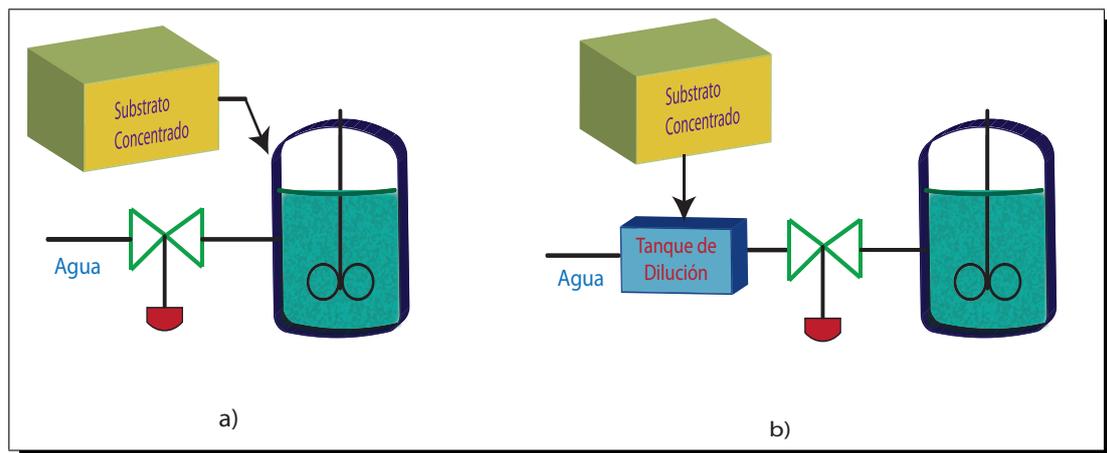


Figura 2.2: Substratos líquidos a la entrada

En el primer caso (Figura 2.2.a), no hay necesidad de especificar el modelo de la tasa de alimentación de sustrato  $F$ . Sin embargo para el segundo caso, cuando el sustrato es diluido en la corriente de agua, la tasa de alimentación es proporcional a la concentración del sustrato en la entrada. El coeficiente de proporcionalidad es precisamente la tasa de dilución  $D$ , en este caso cada tasa de alimentación  $F$  se escribe:

$$F = DS_{in} \quad (2.3)$$

Donde  $S_{in}$  denota la concentración de sustrato a la entrada y el modelo general puede reescribirse:

$$\frac{d\xi}{dt} = K\varphi(\xi, t) - D\xi - Q(\xi) + DS_{in} \quad (2.4)$$

### 2.3. Objetivo de control en procesos biológicos

Uno de los objetivos principales del control automático en un proceso biológico consiste en incrementar la productividad mediante métodos de monitoreo y control, permitiendo la optimización en tiempo real de la operación del proceso.

En la industria, la producción de proteínas usualmente es llevada a cabo usando cultivos de levaduras o cepas de bacterias genéticamente modificadas. Desde un punto de vista operacional, es necesario determinar una estrategia óptima de alimentación (es decir la evolución en el tiempo de la tasa de flujo de entrada hacia el cultivo) a fin de garantizar, mantener o maximizar la productividad de biomasa (Dewasme, 2011).

El control en un bioproceso consiste principalmente en mantener alguna variable de estado (o funciones de variables de estado) del proceso en un valor de referencia establecido, en especial cuando este valor es constante se llama “regulación”. El control de biorreactores, en aplicaciones industriales está únicamente limitado a regulación de pH y temperatura a valores que se suponen favorables para el crecimiento microbiano (Bastin y Dochain, 1990). Algunos ejemplos de regulación en procesos biológicos son:

- *Regulación de la concentración del sustrato*, en el caso donde el sustrato inhibe el crecimiento de biomasa. Por ejemplo en el tratamiento de aguas residuales, la regulación del sustrato es equivalente a controlar el nivel de contaminación en la planta.
- *Regulación de la concentración de oxígeno disuelto*, en procesos biológicos aerobios, esta concentración debe ser mantenida lo suficientemente alta para garantizar la actividad microbiana y lo suficientemente baja para economizar en costos de operación.
- *Regulación de la concentración del subproducto*, en procesos biológicos donde el subproducto limita o inhibe el crecimiento de biomasa.
- *Regulación de tasas de flujo de salida de gases*. Por ejemplo la regulación de tasa de flujo del gas metano en una planta de “biometanización” a fin de lograr una relación adecuada entre la producción de gas y la demanda de energía.

Un esquema de un biorreactor controlado por computadora es mostrado en la Figura 2.3. El lazo de realimentación involucra sucesivamente al reactor, un conjunto de sensores y dispositivos de medición, la computadora y el actuador (válvula). El sistema en lazo cerrado se define como la combinación del proceso y del controlador dentro del lazo de realimentación.

El proceso por lo tanto es controlado mediante la computadora a través de la manipulación de la tasa de alimentación de algún sustrato externo. La tarea del algoritmo de control, implementado en la computadora, es determinar, para cada instante, la acción de control, con base en la información obtenida en tiempo real mediante los sensores por software. Este tipo de “sensores” son llamados así debido a que son herramientas de software utilizadas para reconstruir de manera confiable la evolución de parámetros y variables en el transcurso del tiempo (Bastin y Dochain, 1990).

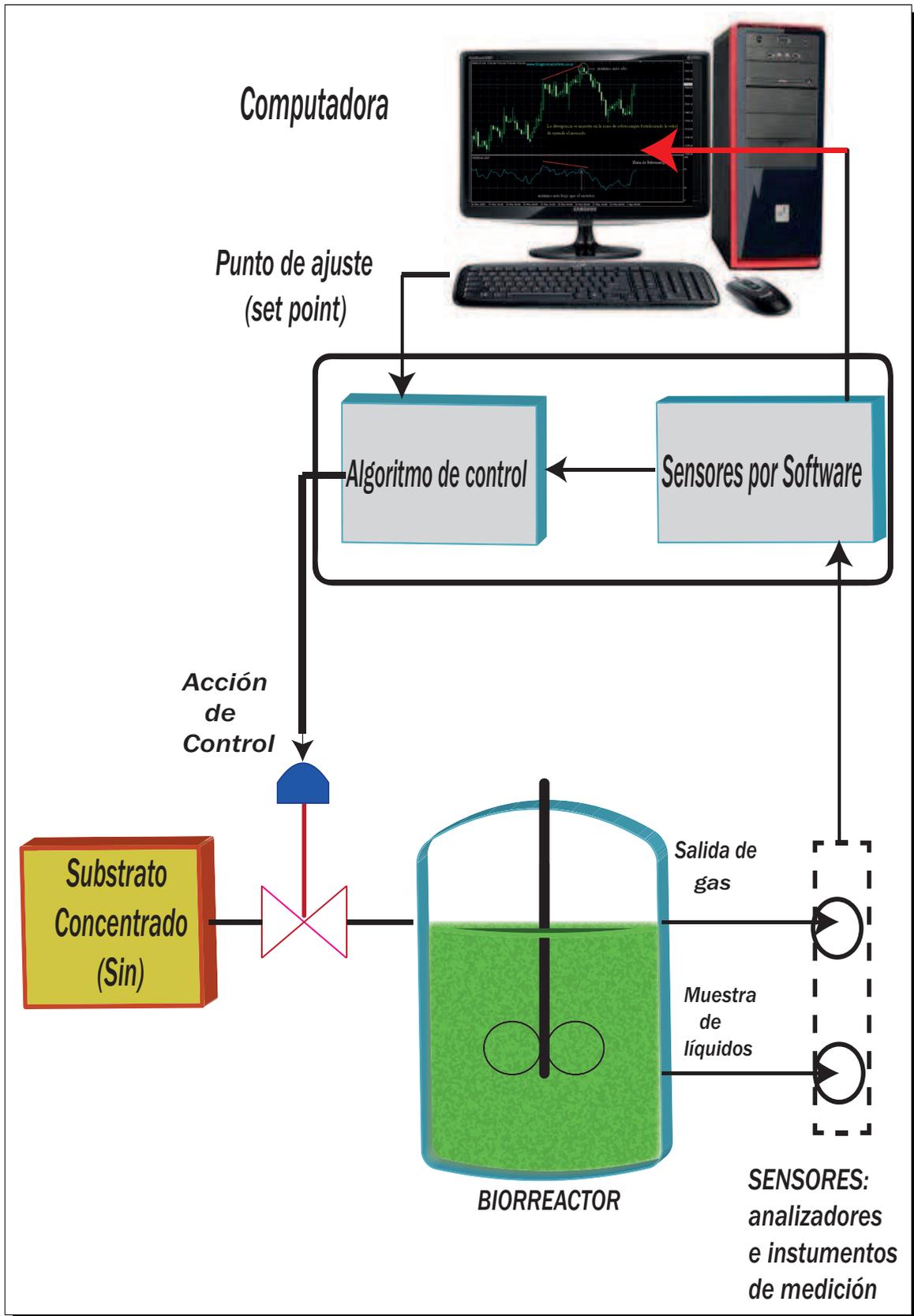


Figura 2.3: Sistema de control por computadora para bioprocesos



---

### Diseño de un Observador Super-Twisting Generalizado para la estimación de estados y entradas desconocidas en un proceso de digestión anaerobia

---

El algoritmo super-twisting (STA) inicialmente desarrollado para propósitos de control, ha sido utilizado también para el diseño de diferenciadores (Levant, 1998) y observadores robustos (Fridman *et al.*, 2007) (Davila *et al.*, 2005). Posteriormente, para simplificar su análisis se usó la idea de homogeneidad, sin embargo esta última aproximación no permite la determinación del tiempo de convergencia (Moreno, 2011). A continuación se da una breve explicación sobre la naturaleza del OSTG y más adelante se utiliza para estimar estados y entradas desconocidas en un proceso de digestión anaerobia.

#### 3.1. El Observador Super-Twisting Generalizado OSTG

En (Moreno, 2011), se reportó un algoritmo genérico de segundo orden (AGSO), en el cual está basado el diseño y la prueba de este observador. Para explicar este algoritmo considere el sistema (3.1) (de segundo orden) en forma observable:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(y, t) + x_2 - \delta_1(x, u, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(y, t) - \delta_2(x, u, t) \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $y$  es la salida medible,  $x_1$  y  $x_2$  son los estados a estimar,  $f_1(y, t)$  y  $f_2(y, t)$  son funciones conocidas del sistema y  $\delta_1(x, u, t)$  y  $\delta_2(x, u, t)$  son perturbaciones globalmente acotadas.

Ahora se considera el siguiente “observador super-twisting generalizado”:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= f_1(y, t) + \hat{x}_2 - l_1\phi_1(\hat{x}_1 - x_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f_2(y, t) - l_2\phi_2(\hat{x}_1 - x_1)\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$ , son las variables (escalares) a estimar,  $l_1$  y  $l_2$  son ganancias positivas a diseñar. Para  $i = 1, 2$ , el error de estimación se define como  $e_i = \hat{x}_i - x_i$  y las no linealidades  $\phi_1$  y  $\phi_2$  están dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned}\phi_1(e_i) &= m_1 |e_i|^p \text{sign}(e_i) + m_2 |e_i|^q \text{sign}(e_i) \\ \phi_2(e_i) &= m_1^2 p |e_i|^{2p-1} \text{sign}(e_i) + m_1 m_2 (p+q) |e_i|^{p+q-1} \text{sign}(e_i) + m_2^2 q |e_i|^{2q-1} \text{sign}(e_i)\end{aligned}\quad (3.3)$$

donde  $m_1$  y  $m_2 \geq 0$  son 2 constantes no negativas y  $q \geq 1 \geq p \geq \frac{1}{2}$  son números reales.

El observador (3.2) posee dos clases de términos estabilizantes: de bajo orden dado por  $p$  y de alto orden dado por  $q$ . Los términos de alto orden proveen al algoritmo de mayor fuerza de atracción cuando las trayectorías están muy alejadas del punto de equilibrio. Por otro lado los términos de bajo orden proveen convergencia en tiempo finito y atraen a las trayectorias con mayor fuerza cuando se encuentran cerca del origen (*vease* (Mendoza, 2011)).

La dinámica del error de observación es:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -l_1 \phi_1(e_1) + e_2 + \delta_1(x, u, t) \\ \dot{e}_2 &= -l_2 \phi_2(e_1) + \delta_2(x, u, t)\end{aligned}\quad (3.4)$$

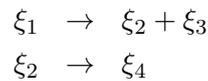
El cuál corresponde al algoritmo genérico de segundo orden (AGSO).

Con la elección apropiada de los parámetros  $q$ ,  $p$ ,  $m_1$  y  $m_2$  en (3.3) se presentan los siguientes casos:

Tabla I. Casos particulares del algoritmo	
$m_1 = 0, m_2 = 1, q = 1$	Caso lineal
$m_1 = 1, m_2 = 0, p = \frac{1}{2}$	Algoritmo Super-Twisting clásico
$m_1 = 1, m_2 = 1, p = \frac{1}{2}, q = 1$	AGSO

### 3.2. Planteamiento del problema y diseño del observador

La digestión anaerobia es un proceso para el tratamiento biológico de desperdicios orgánicos a través de la producción de gas metano, las ecuaciones de reacción que definen el proceso son:



Para dicho proceso dado en (Sbarciog *et al.*, 2012) y el observador propuesto en (Moreno, n.d.) para el mismo sistema, su dinámica se expresa a través de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\xi}_1 = u(\xi_{in1} - \xi_1) - ar_1(\xi) \quad (3.5)$$

$$\dot{\xi}_2 = u(\xi_{in2} - \xi_2) + cr_1(\xi) - dr_2(\xi) \quad (3.6)$$

$$\dot{\xi}_3 = -u\xi_3 + r_1(\xi) \quad (3.7)$$

$$\dot{\xi}_4 = -u\xi_4 + r_2(\xi) \quad (3.8)$$

donde:

$\xi_1$ : Substrato orgánico ( $g/l$ )

$\xi_2$ : Ácidos grasos volátiles ( $mmol/l$ )

$\xi_3$ : Concentración de bacterias acidogénicas ( $g/l$ )

$\xi_4$ : Concentración de bacterias metanogénicas ( $g/l$ )

$u$ : Tasa de dilución ( $d^{-1}$ )

$\xi_{in1}$ : Concentración de substrato orgánico ( $g/l$ )

$\xi_{in2}$ : Concentración de ácidos grasos volátiles ( $mmol/l$ )

$\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ \xi_4] \mathfrak{R}_+^4$ : Vector de estados

$a, c, d > 0$ : Coeficientes estequiométricos

$q > 0$ : Rendimiento de producción de metano

Las tasas de reacción  $r_1(\xi)$  y  $r_2(\xi)$ , definen como:

$$r_1(\xi) = \mu_1(\xi_1)\xi_3$$

$$r_2(\xi) = \mu_2(\xi_2)\xi_4$$

donde las funciones de crecimiento,  $\mu_1(\xi_1)$  y  $\mu_2(\xi_2)$  son de tipo Monod y Haldane, respectivamente:

$$\mu_1(\xi_1) = \mu_{m1} \frac{\xi_1}{K_{s1} + \xi_1}$$

$$\mu_2(\xi_2) = \mu_{m2} \frac{\xi_2}{K_{s2} + \xi_2 + \frac{\xi_2^2}{K_{i2}}}$$

Se asume que todas las variables y constantes son positivas. Además se define la tasa de flujo del gas metano como:

$$Q(\xi) = q\mu_2(\xi_2)\xi_4 = qr_2(\xi)$$

Las variables medibles son:  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $Q(\xi)$ . Las concentraciones en el afluente  $\xi_{in1}$  y  $\xi_{in2}$  se consideran entradas desconocidas. Durante el diseño del observador se introduce un cambio de variable para los estados medibles:

$$y_1 = \xi_1$$

$$y_2 = \xi_2$$

$$y_3 = Q(\xi)$$

El problema consiste en estimar las variables de estado no medibles  $\xi_3$  y  $\xi_4$  y las entradas desconocidas  $\xi_{in1}$  y  $\xi_{in2}$ , a partir de las variables medibles  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $Q(\xi)$ . Se supone también que el modelo es perfectamente conocido.

### 3.2.1. Estimación en tiempo finito de una entrada desconocida variante en el tiempo

La siguiente variable:

$$z = \frac{c}{a}\xi_1 + \xi_2$$

es conocida debido a que es una combinación de las variables medibles y satisface:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= u \left( \frac{c}{a}\xi_{in1} - \frac{c}{a}\xi_1 \right) - cr_1(\xi) + u(\xi_{in2} - \xi_2) + cr_1(\xi) - dr_2(\xi) \\ \dot{z} &= u \left( \frac{c}{a}\xi_{in1} + \xi_{in2} \right) - u \left( \frac{c}{a}\xi_1 + \xi_2 \right) - \frac{d}{q}y_3 \\ \dot{z} &= -uz - \frac{d}{q}y_3 + uz_{in}\end{aligned}$$

donde

$$z_{in} = \frac{c}{a}\xi_{in1} + \xi_{in2}$$

El siguiente observador puede estimar la entrada desconocida  $z_{in}$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= -k_1\phi_1(e_1) - uz - \frac{d}{q}y_3 + u\hat{z}_{in} \\ \dot{\hat{z}}_{in} &= -k_2u\phi_2(e_1)\end{aligned}$$

donde  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se definen como:

$$\begin{aligned}\phi_1(e_1) &= \gamma_1 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) + \gamma_2 e_1 \\ \phi_2(e_1) &= \frac{\gamma_1^2}{2} \text{sign}(e_1) + \frac{3}{2}\gamma_1\gamma_2 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) + \gamma_2^2 e_1\end{aligned}\tag{3.9}$$

El error se define como  $e_1 = \hat{z} - z$ , con  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos constantes no negativas a ser diseñadas. Cuando  $u$  esta acotada lejos del cero, i.e.  $u \geq \epsilon > 0$  para todo tiempo, entonces  $z_{in}$  se estima en tiempo finito. En este caso  $z_{in}$  puede ser una señal variante en el tiempo con una derivada de tiempo acotada, i.e.  $|\dot{\hat{z}}_{in}| \leq L$  y  $k_2 > L$ .

### 3.2.2. Estimación asintótica de la concentración de bacterias metanogénicas

El observador (en lazo abierto)

$$\dot{\hat{\xi}}_4 = -u\hat{\xi}_4 + \frac{Q(\xi)}{q} = -u\hat{\xi}_4 + \frac{1}{q}y_3$$

estima asintóticamente el valor de  $\xi_4$  siempre que  $u$  sea de excitación persistente.

### 3.2.3. Estimación en tiempo finito de la concentración de bacterias acidogénicas y substrato

Para esta estimación se supone que  $\xi_{in1}$  es constante por lo que  $\dot{\xi}_{in1} = 0$ . Introduciendo el vector:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_3 \exp(\int_0^t [u(\tau) - \mu_1(y_1(\tau))] d\tau) \\ \xi_{in1} \end{pmatrix}$$

En la expresión anterior con  $\eta_2$ , básicamente se resuelve el sistema autónomo variante en el tiempo para  $\xi_3$  y se multiplica por la inversa de la matriz de transición (en este caso un escalar que es la función exponencial) y obteniendo su derivada de tiempo:

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} u(\xi_{in1} - \xi_1) - ar_1(\xi) \\ (-u\xi_3 + \mu_1(\xi_1)\xi_3) \exp(\int_0^t [u(\tau) - \mu_1(y_1(\tau))] d\tau) - (-u + \mu_1(\xi_1))\xi_3 \exp(\int_0^t [u(\tau) - \mu_1(y_1(\tau))] d\tau) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} u(\xi_{in1} - \xi_1) - ar_1(\xi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u & -a\mu_1(y_1) \exp(-\int_0^t [u(\tau) - \mu_1(y_1(\tau))] d\tau) & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \eta$$

A través del siguiente observador:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}}_1 &= -K_1\phi_1(e_1) - uy_1 - (-a\mu_1(y_1) \exp(-\int_0^t [u(\tau) - \mu_1(y_1(\tau))] d\tau))\hat{\eta}_2 + u\hat{\eta}_3 \\ \dot{\hat{\eta}}_2 &= K_2(a\mu_1(y_1) \exp(-\int_0^t [u(\tau) - \mu_1(y_1(\tau))] d\tau))\phi_2(e_1) \\ \dot{\hat{\eta}}_3 &= -K_3u\phi_2(e_1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Con  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  constantes positivas y el error se define como  $e_1 = \hat{\eta}_1 - \eta_1$

El observador dado en (3.10) puede estimar en tiempo finito los valores de  $\eta_2$  y  $\eta_3$  por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} \xi_3 \\ \xi_{in1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2 \exp(-\int_0^t [u(\tau) - \mu_1(y_1(\tau))] d\tau) \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

A fin de evitar el cálculo explícito del término integral en el estimador, nótese que la solución de la ecuación diferencial:

$$\dot{Z}(t) = -[u(t) - \mu_1(y_1(t))]Z(t)$$

Con condición inicial  $Z(0) = 1$  es:

$$Z(t) = \exp(-\int_0^t [u(\tau) - \mu_1(y_1(\tau))] d\tau)$$

Por lo que finalmente el observador puede ser realizado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= -[u(t) - \mu_1(y_1(t))]Z(t), \quad Z(0) = 1 \\ \dot{\hat{\eta}}_1 &= -K_1\phi_1(e_1) - uy_1 - a\mu_1(y_1)Z(t)\hat{\eta}_2 + u\hat{\eta}_3 \\ \dot{\hat{\eta}}_2 &= K_2a\mu_1(y_1)Z(t)\phi_2(e_1) \\ \dot{\hat{\eta}}_3 &= -K_3u\phi_2(e_1) \\ \hat{\xi}_3 &= \hat{\eta}_2Z(t) \\ \hat{\xi}_{in1} &= \hat{\eta}_3 \end{aligned}$$

### 3.3. Simulaciones

#### 3.3.1. Entradas invariantes en el tiempo

En esta parte, se asume que las entradas (desconocidas)  $\xi_{in1}$  y  $\xi_{in2}$  son constantes y se analizan los siguientes casos:

- Estimación de estados y entradas desconocidas con parámetros conocidos (caso ideal)
- Estimación de estados y entradas desconocidas con parámetros conocidos y presencia de ruido en la medición
- Estimación de estados y entradas desconocidas con incertidumbre en los parámetros (sin ruido en la medición)
- Estimación de estados y entradas desconocidas con incertidumbre en los parámetros y presencia de ruido en la medición

Para los casos en los cuales existe ruido en la medición, se considera un ruido gaussiano con una magnitud del 5% del valor máximo de la señal.

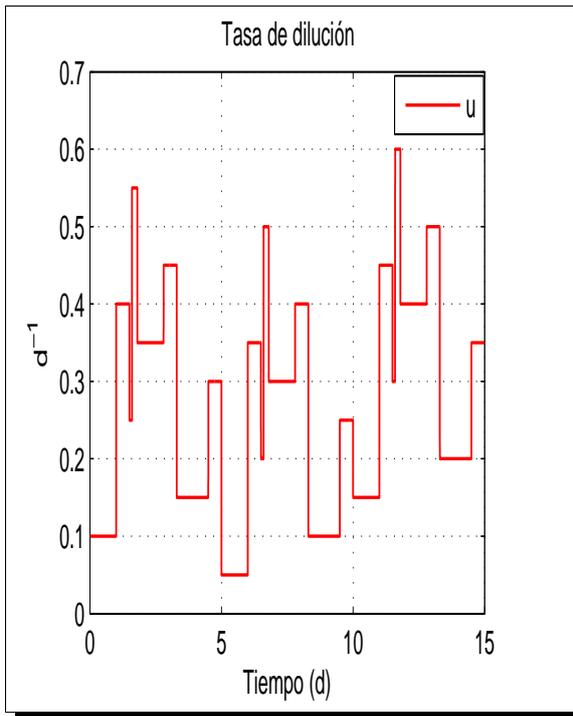
En la Tabla II y Tabla III se muestran los valores de los parámetros del sistema y los valores de las ganancias y condiciones iniciales del observador, respectivamente. Cabe aclarar que los valores de las ganancias del observador se sintonizaron de tal manera que resultan ser los mismos a lo largo de todas las simulaciones de este capítulo (tanto en los casos de las entradas invariantes y variantes en el tiempo, así como en sus respectivas situaciones sobre incertidumbre en parámetros y presencia de ruido), por lo que constantemente se hará referencia a estas dos tablas.

Tabla II. Valores de parámetros del sistema		
$a = 42.14$	$\xi_{in1} = 40 \text{ g/l}$	$K_{s1} = 7.1 \text{ g/l}$
$c = 116.5 \text{ mmol/g}$	$\xi_{in2} = 175 \text{ mmol/l}$	$K_{s2} = 9.28 \text{ mmol/l}$
$d = 268 \text{ mmol/g}$	$\mu_1 = 1.2 \text{ d}^{-1}$	$K_{i2} = 256 \text{ mmol/l}$
$q = 453 \text{ mmol/g}$	$\mu_2 = 0.74 \text{ d}^{-1}$	$u = [0, 0.6] \text{ d}^{-1}$

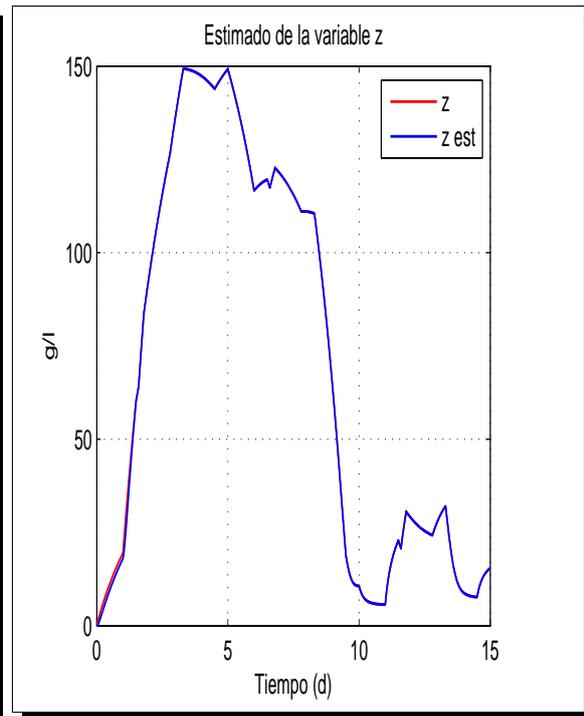
Tabla III. Valores de ganancias y condiciones iniciales del observador				
$\gamma_1 = 3$	$k_1 = 4.5$	$K_1 = 2$	$K_3 = 100$	$\hat{\xi}_3(0) = 0.1$
$\gamma_2 = 3$	$k_2 = 40$	$K_2 = 1 \times 10^{-5}$	$Z(0) = 1$	$\hat{\xi}_4(0) = 0.1$

#### Estimación de estados y entradas desconocidas con parámetros conocidos

En este primer caso se consideran las condiciones ideales de operación, se asume que no existe incertidumbre en los parámetros y tampoco existe ruido en las mediciones. A continuación en la Figura 3.1 se muestra la señal de entrada correspondiente a la tasa de dilución y el estimado de la variable  $z$  (que se supone conocida debido a que es una combinación de los estados medibles). En la Figura 3.2 se muestran los estimados de la entrada  $z_{in}$  y el estado  $\xi_3$ , ambos de manera correcta. La estimación de la concentración de bacterias metanogénicas ( $\xi_4$ ) y la entrada  $\xi_{in1}$  se pueden apreciar en la Figura 3.3 también con buenos resultados.

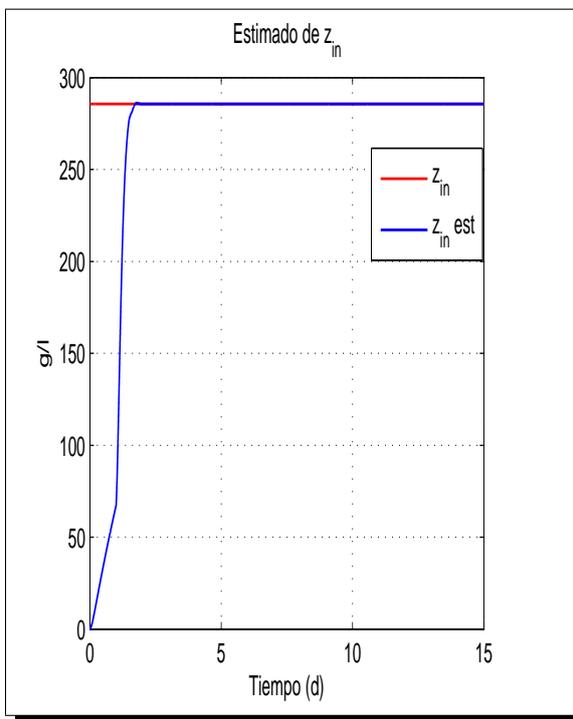


a)

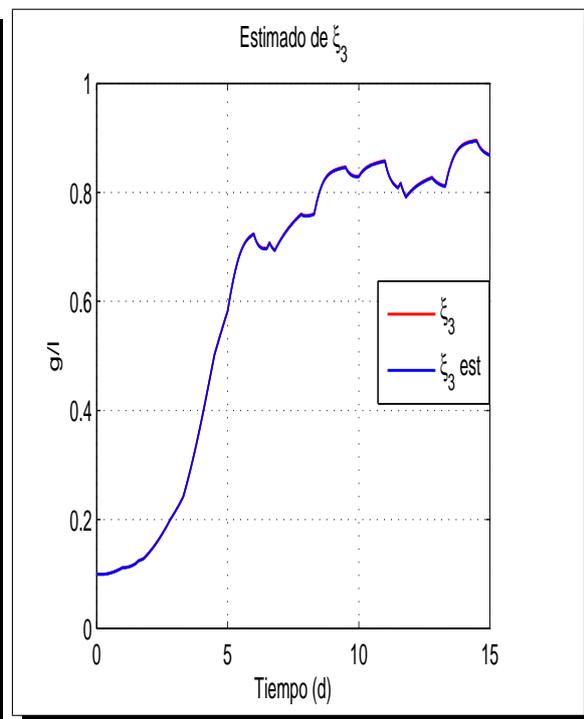


b)

Figura 3.1: a) Tasa de dilución b) Estimado de la variable  $z$

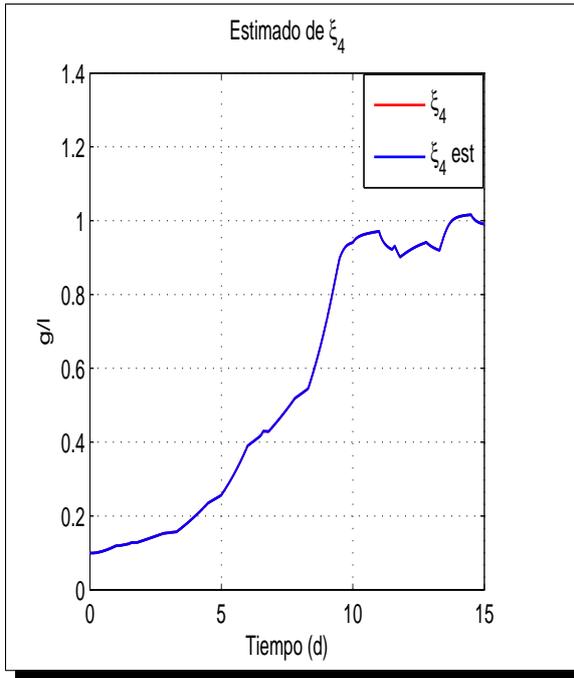


a)

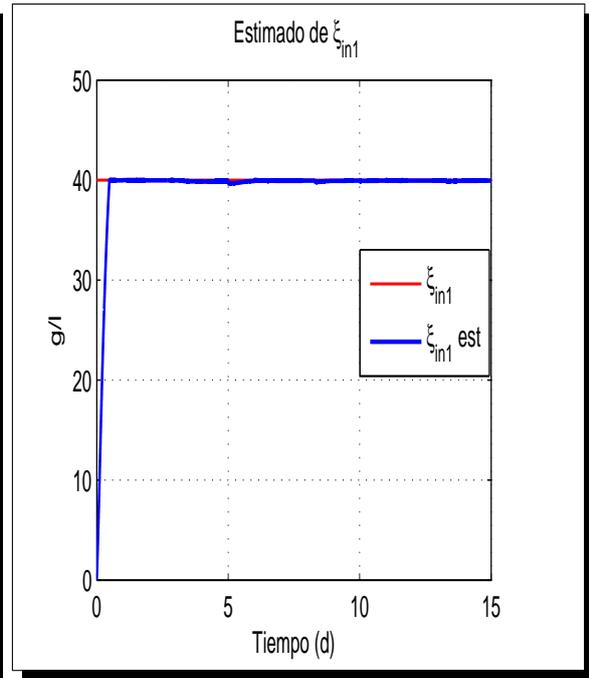


b)

Figura 3.2: a) Estimado de la entrada desconocida  $z_{in}$  b) Estimado de  $\xi_3$



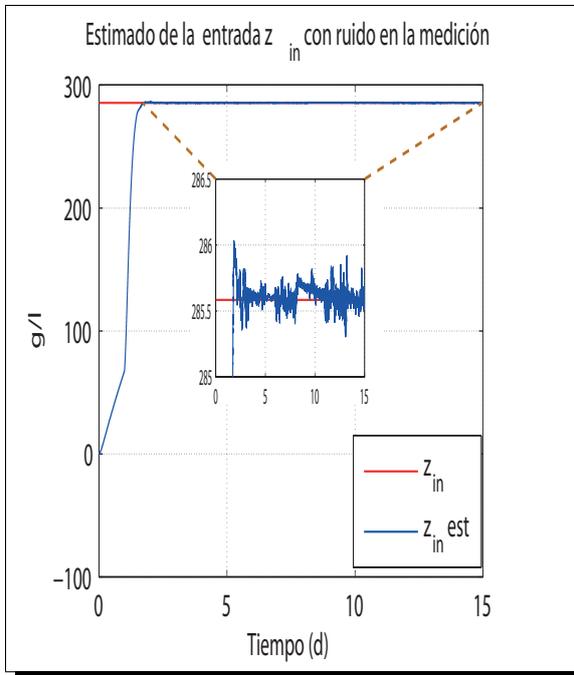
a)



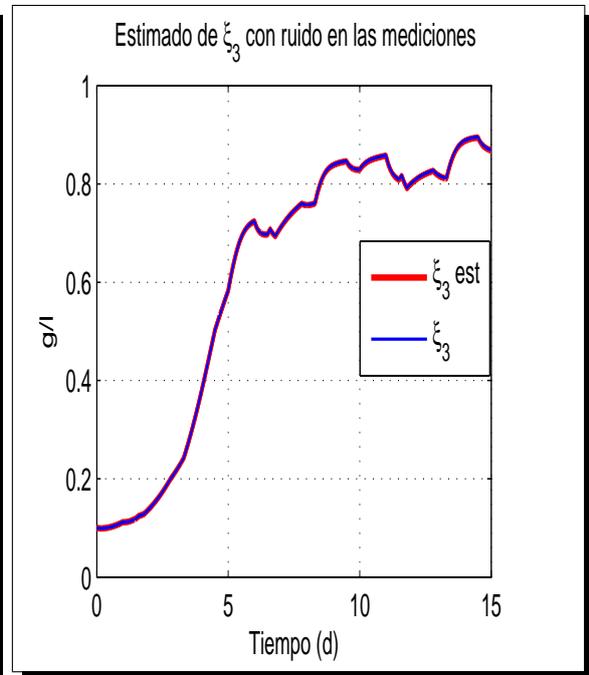
b)

Figura 3.3: a) Estimado de  $\xi_4$  b) Estimación de la entrada  $\xi_{in1}$

**Estimación de estados y entradas desconocidas con parámetros conocidos y ruido en la medición**



a)



b)

Figura 3.4: a) Estimado de  $z_{in}$  con ruido b) Estimado de  $\xi_3$  con ruido

En la Figura 3.4 que muestra los estimados de la entrada  $z_{in}$  y del estado  $\xi_3$ , se puede notar el buen desempeño del observador con respecto al rechazo a ruido. La misma situación se presenta en la estimación de la concentración de las bacterias metanogénicas y el estimado de la entrada  $\xi_{in1}$  en la Figura 3.5.

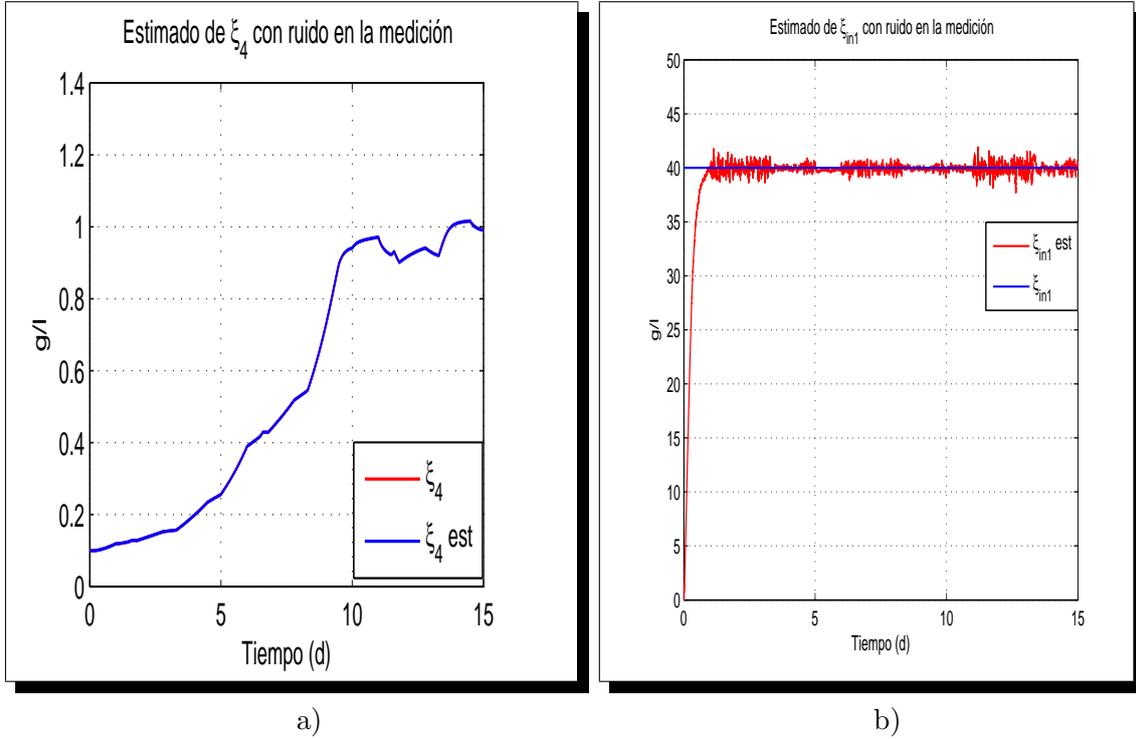


Figura 3.5: a) Estimado de  $\xi_4$  con ruido b) Estimado de  $\xi_{in1}$  con ruido

### Estimación de estados y entradas desconocidas con incertidumbre en los parámetros (sin ruido en la medición)

En este caso se asume que no se conocen exactamente los valores de los parámetros del sistema y no existe ruido en las mediciones. Para la realización de las simulaciones los valores de los parámetros del observador se manejan con un porcentaje de incertidumbre del 1, 3, 5 y 8% y se muestran en la Tabla IV (sin dejar de considerar los parámetros de la planta y las ganancias del observador brindados por las Tablas II y III respectivamente).

Tabla IV. Valores (con incertidumbre) de los parámetros del observador				
Parámetros	Incertidumbre del 1 %	Incertidumbre del 3 %	Incertidumbre del 5 %	Incertidumbre del 8 %
$a$	41.71	40.87	40.03	38.76
$c$	115.33 mmol/g	113 mmol/g	110.67 mmol/g	107.18 mmol/g
$d$	265.32 mmol/g	259.96 mmol/g	254.6 mmol/g	246.56 mmol/g
$q$	448.47 mmol/g	439.41 mmol/g	430.35 mmol/g	416.76 mmol/g
$\mu_1$	1.188 $d^{-1}$	1.164 $d^{-1}$	1.14 $d^{-1}$	1.104 $d^{-1}$
$\mu_2$	0.73 $d^{-1}$	0.71 $d^{-1}$	0.70 $d^{-1}$	0.68 $d^{-1}$
$K_{s1}$	7 g/l	6.88 g/l	6.74 g/l	6.532 g/l
$K_{s2}$	9.18 mmol/l	9 mmol/l	8.81 mmol/l	8.53 mmol/l
$K_{i2}$	253.44 mmol/l	248.32 mmol/l	243.2 mmol/l	235.52 mmol/l

En la Figura 3.6 se muestran los estimados de la entrada  $z_{in}$  y del estado  $\xi_3$  correspondientes a los porcentajes de incertidumbre utilizados en los parámetros del observador. De igual manera los estimados de  $\xi_4$  y  $\xi_{in1}$  se presentan en la Figura 3.7.

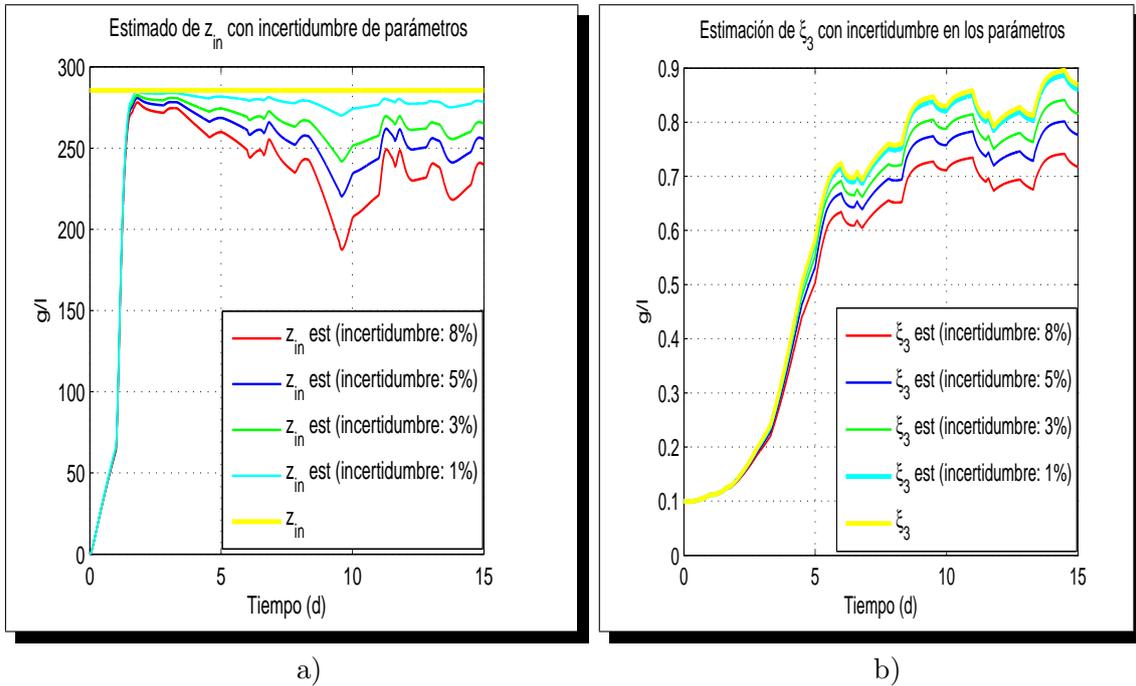


Figura 3.6: a) Estimado de  $z_{in}$  con parámetros inciertos b) Estimado de  $\xi_3$  con parámetros inciertos

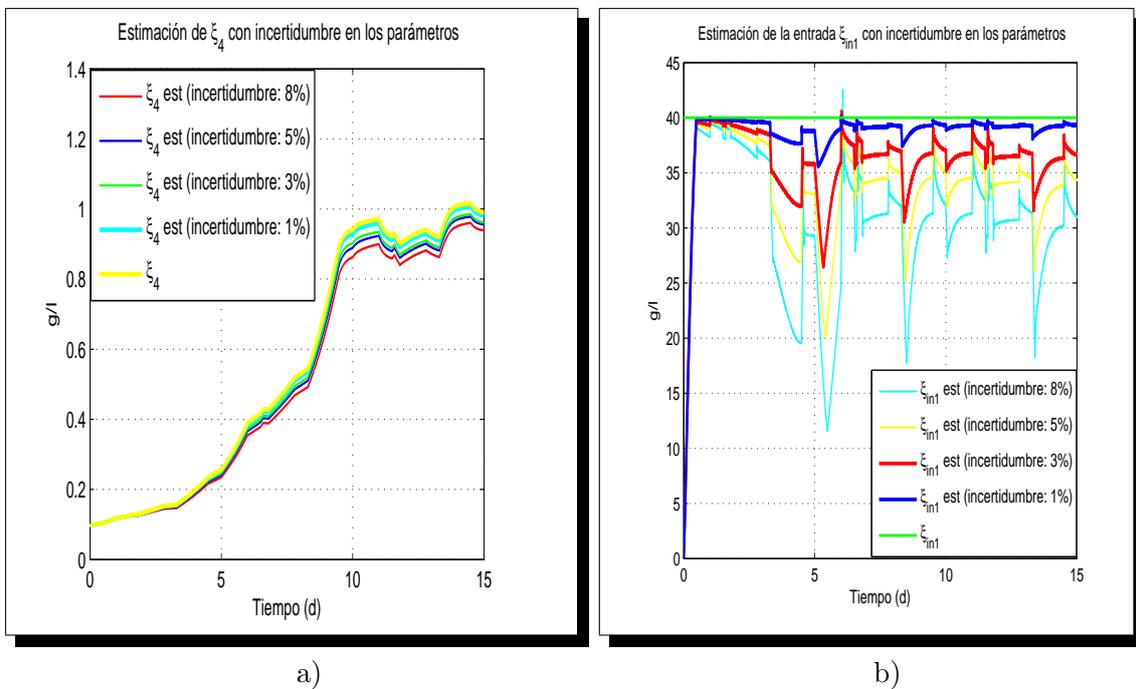


Figura 3.7: a) Estimado de  $\xi_4$  con parámetros inciertos b) Estimado de  $\xi_{in1}$  con parámetros inciertos

### Estimación de estados y entradas desconocidas con incertidumbre en los parámetros y presencia de ruido en la medición

Aquí se presenta la situación menos favorable en la etapa de estimación porque se considera que hay incertidumbre en los parámetros y se asume que existe ruido en las mediciones. Para las simulaciones, los datos del sistema, las ganancias y los valores de incertidumbre de los parámetros utilizados por el observador se encuentran en las Tablas II, III y IV, respectivamente.

En la Figura 3.8 se muestran los estimados de la entrada  $z_{in}$  y del estado  $\xi_3$ , además se puede observar que estos resultados son parecidos al caso anterior en donde no se considera ruido en la medición y es que esto se debe al rechazo del ruido por parte del observador. Así mismo los estimados de  $\xi_4$  y  $\xi_{in1}$  que se presentan en la Figura 3.9. son similares a los obtenidos en la Figura 3.7 por la misma razón.

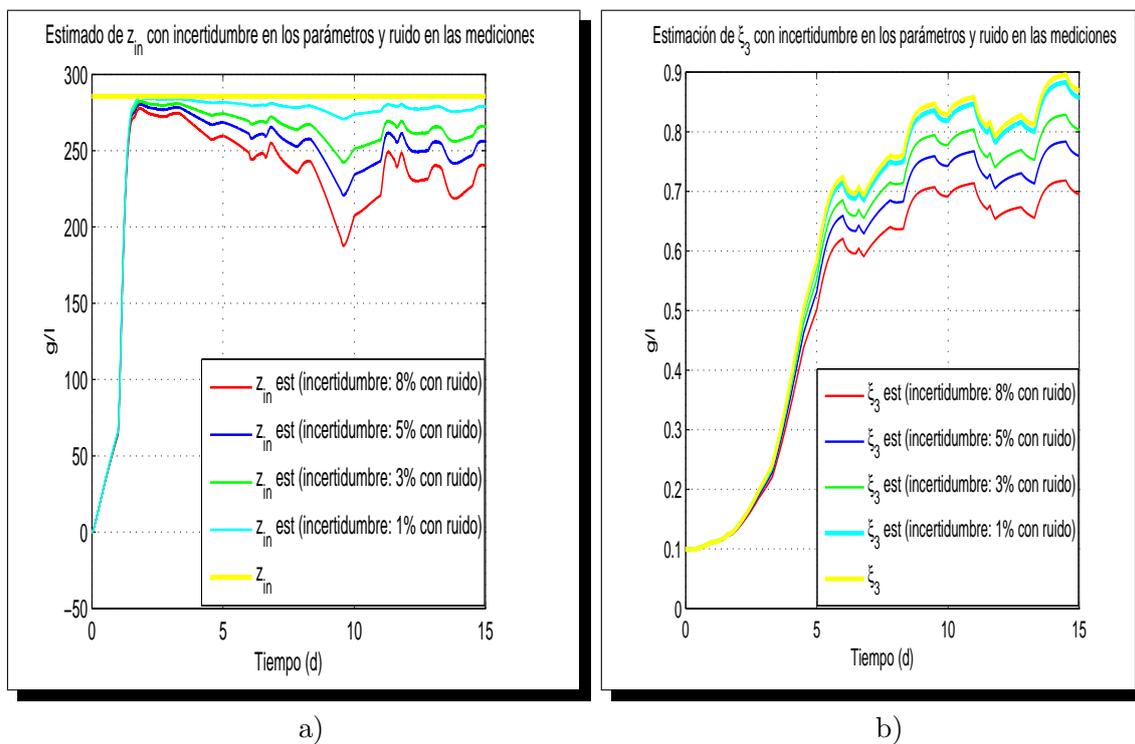
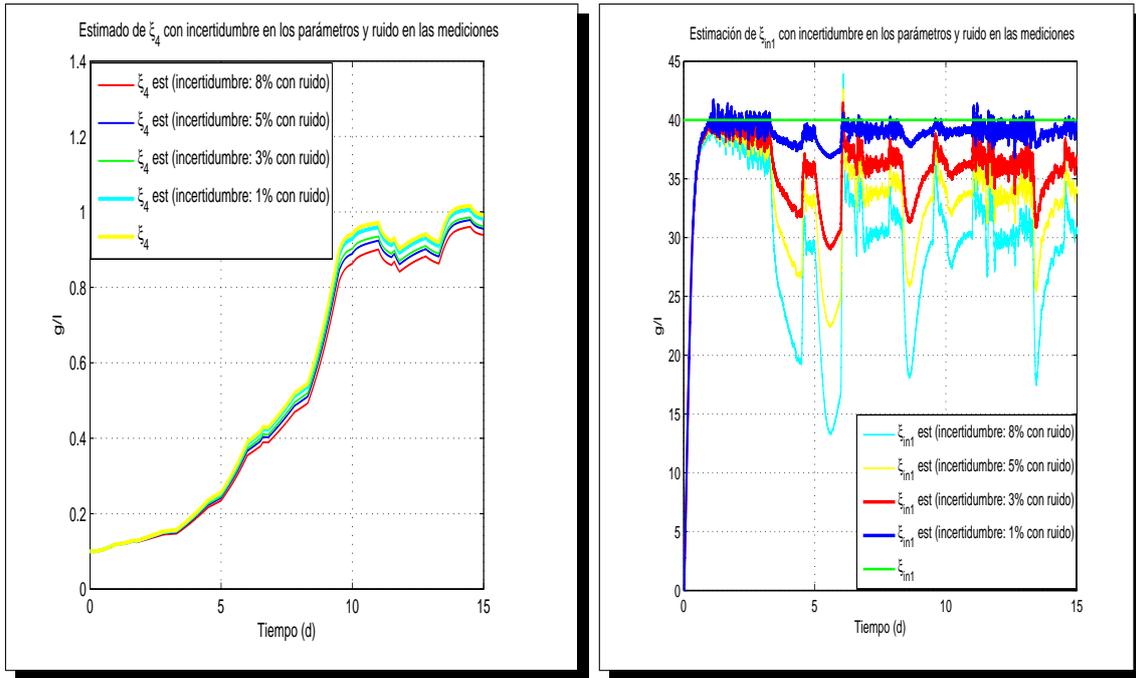


Figura 3.8: a) Estimado de  $z_{in}$  con parámetros inciertos y presencia de ruido b) Estimado de  $\xi_3$  con parámetros inciertos y presencia de ruido



a)

b)

Figura 3.9: a) Estimado de  $\xi_4$  con parámetros inciertos y presencia de ruido b) Estimado de  $\xi_{in1}$  con parámetros inciertos y presencia de ruido

### 3.3.2. Entradas variantes en el tiempo

En esta segunda parte de las simulaciones, se asume que la entrada desconocida  $\xi_{in2}$  es variante en el tiempo y cumple con lo siguiente:

- $\xi_{in2}$  es una señal senoidal positiva (debido a que no hay concentraciones negativas) y se propone de tal forma que  $z_{in}$  sea una señal variante con una derivada de tiempo acotada.

En la siguiente Figura se muestra la forma de la señal de la entrada  $\xi_{in2}$ :

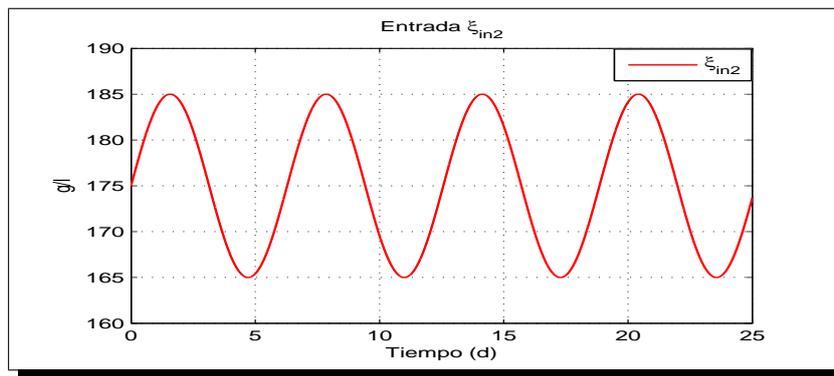


Figura 3.10: Entrada  $\xi_{in2}$

De manera similar que en la sección previa (entradas invariantes), para esta parte de las simulaciones se analizan los mismos casos de operación. Además se utilizará un tiempo de simulación de 25 segundos, simplemente para tener una mejor apreciación de los resultados. Para cuando

existe ruido en la medición se considera un ruido gaussiano con una magnitud del 5% del valor máximo de la señal y se maneja la misma señal de entrada correspondiente a la tasa de dilución (Figura 3.1.a). Así mismo, en la Tabla III se muestran los valores de las ganancias y condiciones iniciales del observador y a continuación en la Tabla V se muestran los parámetros del sistema:

Tabla V. Valores de parámetros del sistema con $\xi_{in2}$ variante		
$a = 42.14$	$\xi_{in1} = 40 \text{ g/l}$	$K_{s1} = 7.1 \text{ g/l}$
$c = 116.5 \text{ mmol/g}$	$\xi_{in2} = 175 + 10\sin(t) \text{ mmol/l}$	$K_{s2} = 9.28 \text{ mmol/l}$
$d = 268 \text{ mmol/g}$	$\mu_1 = 1.2 \text{ d}^{-1}$	$K_{i2} = 256 \text{ mmol/l}$
$q = 453 \text{ mmol/g}$	$\mu_2 = 0.74 \text{ d}^{-1}$	$u = [0, 0.6] \text{ d}^{-1}$

### Comentario:

Los resultados de las simulaciones para este apartado sólo se verán reflejados en las estimaciones de las variables  $z$  y  $z_{in}$ , debido a que la entrada  $\xi_{in2}$  tiene una incidencia directa sobre estas dos últimas variables y no afecta a los demás estimados ( $\xi_3$ ,  $\xi_4$  y  $\xi_{in1}$ ), por lo anterior sólo se mostrarán las gráficas de dichas variables. La influencia sobre los demás estados esta ligada a la entrada  $\xi_{in1}$  pero como en este caso esta última permanece constante, entonces los resultados son iguales a los mostrados en la sección anterior cuando se consideraban las entradas invariantes en el tiempo.

### Estimación de estados y entradas desconocidas con $\xi_{in2}$ variante en el tiempo y parámetros conocidos (caso ideal)

Tomando en cuenta lo anterior, en la Figura 3.11 se muestran los estimados de las variables  $z$  y  $z_{in}$  con buenos resultados. Los estimados de  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  y  $\xi_{in1}$  se pueden observar en las Figuras 3.2.b y 3.3, respectivamente.

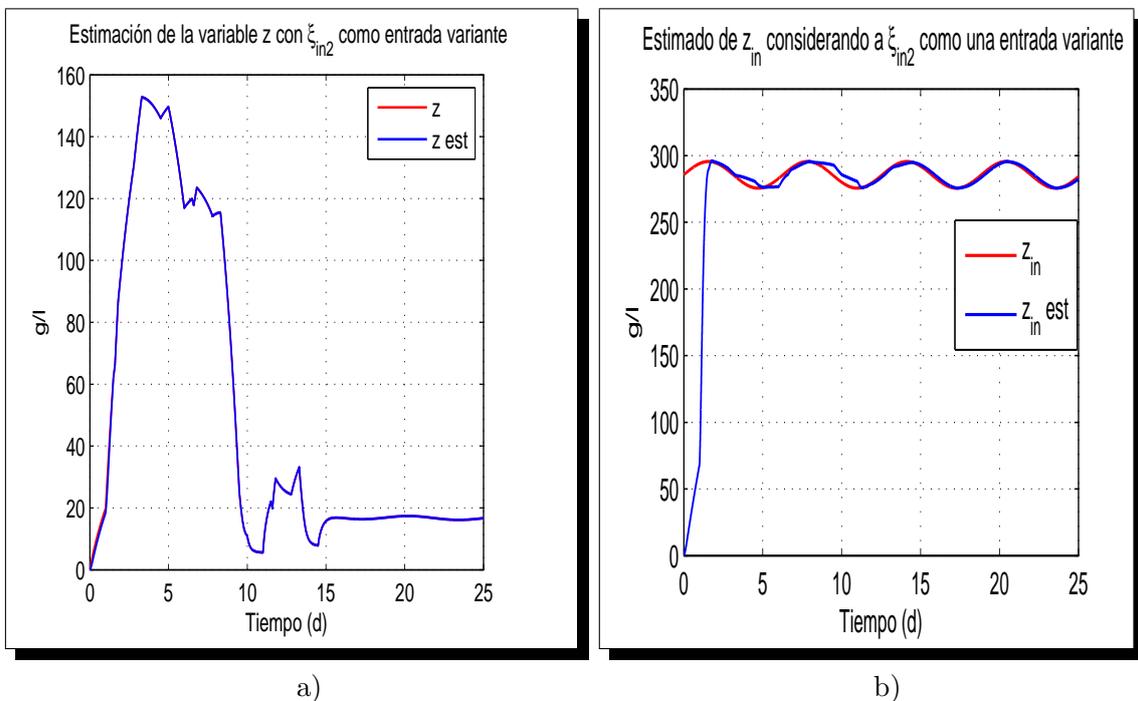


Figura 3.11: a) Estimado de  $z$  con entrada  $\xi_{in2}$  variante b) Estimado de  $z_{in}$  con entrada  $\xi_{in2}$  variante

### Estimación de estados y entradas desconocidas con $\xi_{in2}$ variante en el tiempo, parámetros conocidos y presencia de ruido en las mediciones

En la Figura 3.12 se muestran las gráficas de  $z$  y  $z_{in}$  considerando que los parámetros del sistema son conocidos y cuando existe presencia de ruido en las mediciones. Sin embargo y por el rechazo al ruido debido al diseño del observador, se tiene un buen desempeño en el estimado de las variables. Los estimados de  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  y  $\xi_{in1}$  se pueden observar en las Figuras 3.4.b y 3.5, respectivamente.

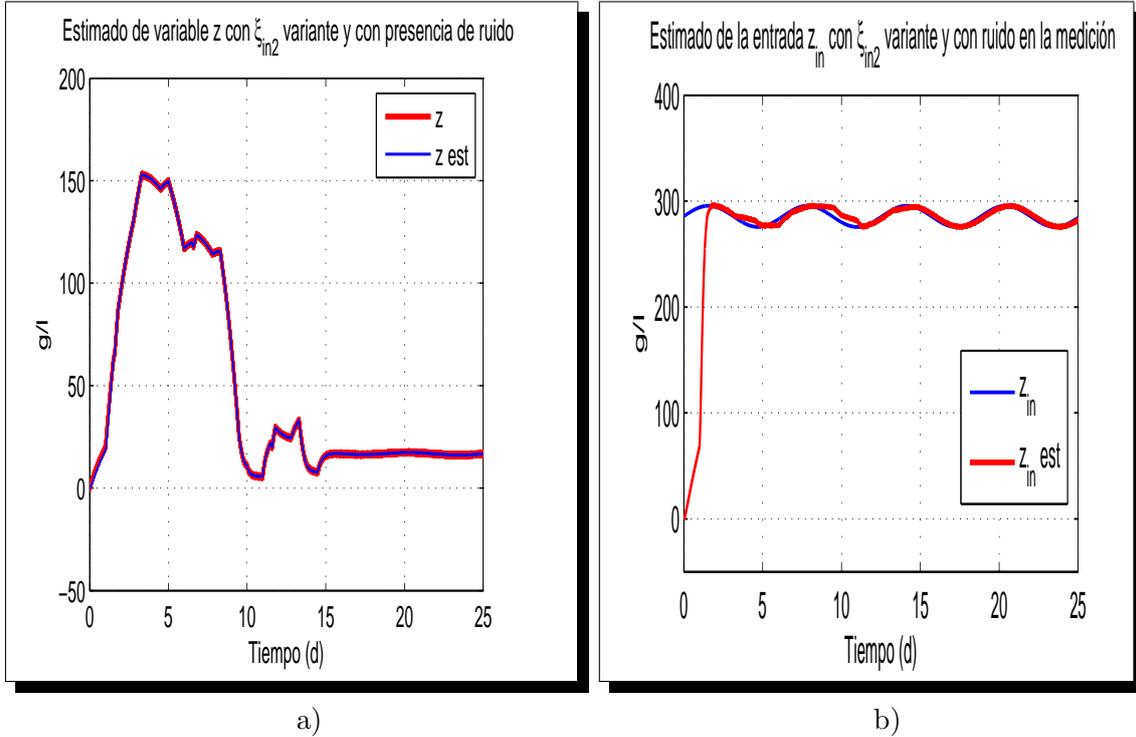


Figura 3.12: a) Estimado de  $z$  con entrada  $\xi_{in2}$  variante y ruido en las mediciones b) Estimado de  $z_{in}$  con entrada  $\xi_{in2}$  variante y ruido en las mediciones

### Estimación de estados y entradas desconocidas con $\xi_{in2}$ variante en el tiempo e incertidumbre en los parámetros (sin ruido)

En la Tabla IV se muestran los valores de los parámetros (con incertidumbre) que se utilizan para el observador. Los parámetros del sistema y las ganancias del OSTG se observan en las Tablas II y III. En la Figura 3.13 se muestran los estimados de  $z$  y  $z_{in}$  ahora tomando en cuenta que no se conocen exactamente los valores de los parámetros. Los estimados de  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  y  $\xi_{in1}$  se pueden observar en las Figuras 3.6.b y 3.7, respectivamente.

### Estimación de estados y entradas desconocidas con $\xi_{in2}$ variante en el tiempo, incertidumbre en los parámetros y con presencia de ruido en las mediciones

Esta se supone como la peor condición de operación del sistema, aunado a considerar que existe incertidumbre en los parámetros también se asume que hay presencia de ruido en las mediciones. En la Figura 3.14 se muestran los estimados de  $z$  y  $z_{in}$  para dichas consideraciones de operación. Los estimados de  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  y  $\xi_{in1}$  se pueden observar en las Figuras 3.8.b y 3.9, respectivamente.

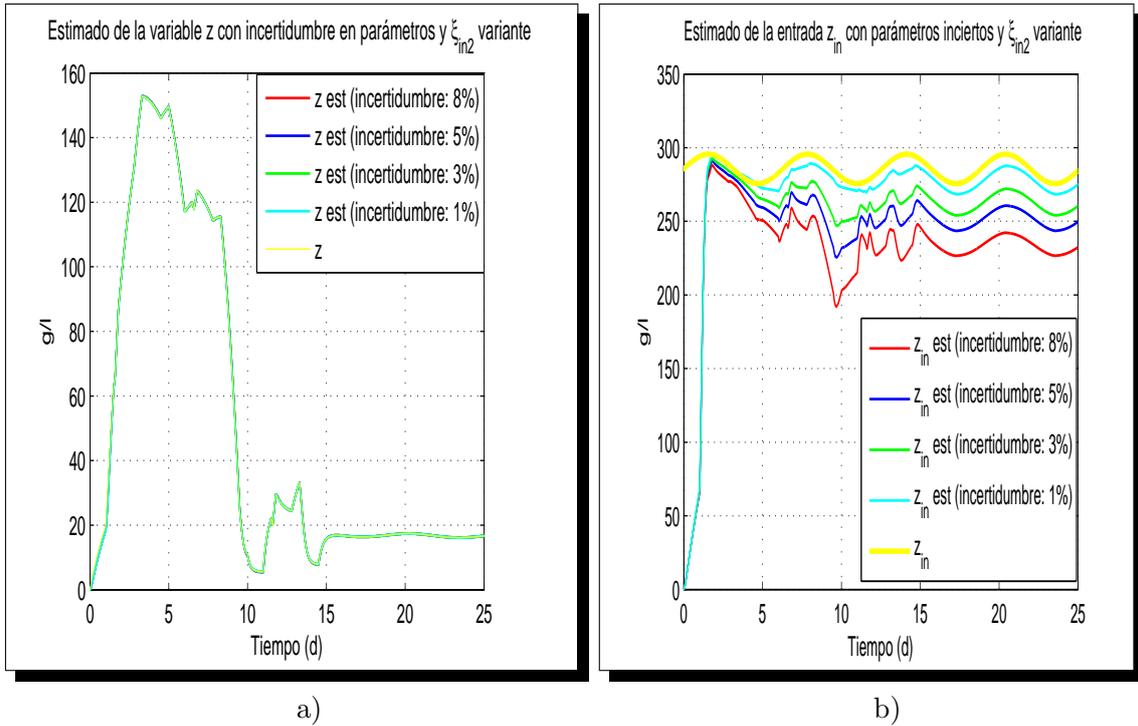


Figura 3.13: a) Estimado de  $z$  con entrada  $\xi_{in2}$  variante e incertidumbre en los parámetros b) Estimado de  $z_{in}$  con entrada  $\xi_{in2}$  variante y valores inciertos de parámetros

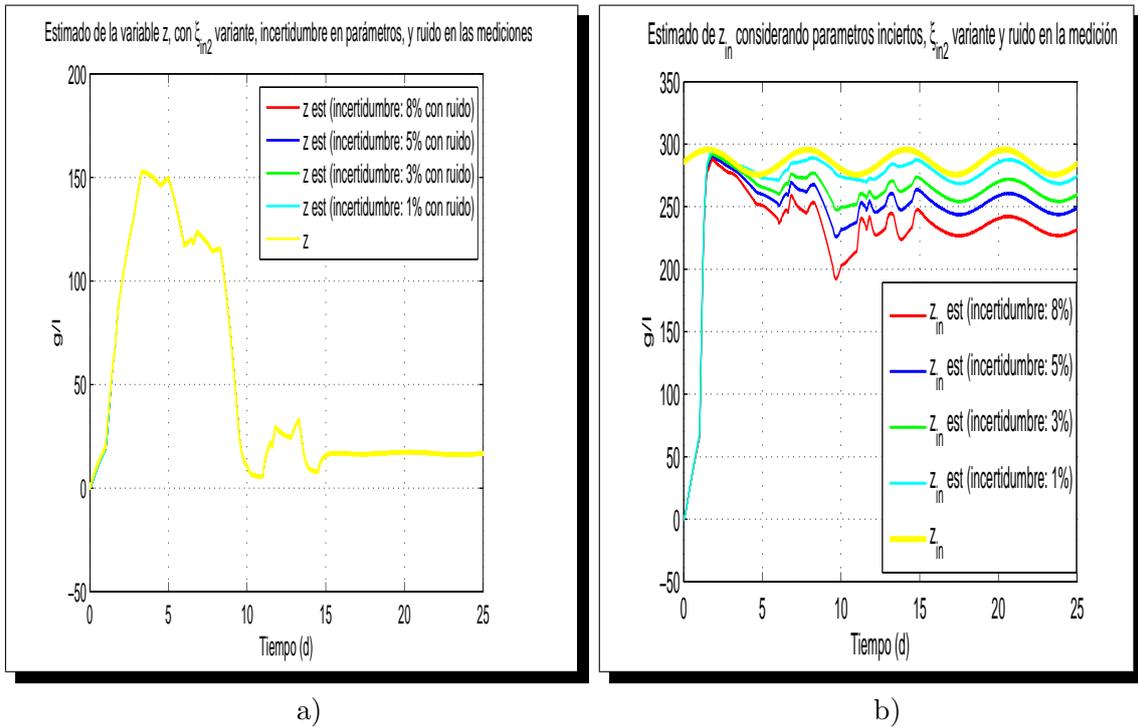


Figura 3.14: a) Estimado de  $z$  con entrada  $\xi_{in2}$  variante, incertidumbre en los parámetros y ruido en la medición b) Estimado de  $z_{in}$  con entrada  $\xi_{in2}$  variante, con valores inciertos de parámetros y ruido en la medición

### 3.3.3. Resultados

Los resultados sobre la estimación de estados y entradas desconocidas en el sistema de digestión anaerobia fueron:

- Este sistema fue utilizado principalmente para saber cómo funciona el OSTG, en cuanto a la estimación de los estados y entradas desconocidas.
- Para este proceso se presentan dos casos de estudio, cuando las entradas desconocidas se consideran variantes e invariantes en el tiempo.
- Tratando de no caer en lo irreal y sobre todo lograr resultados más acorde a la vida práctica, se considera una entrada de dilución variable (Figura 3.1.a) y para cada caso se plantean diferentes condiciones de operación del sistema; caso nominal (ideal), con incertidumbre en parámetros, presencia de ruido en las mediciones y combinaciones de las anteriores.
- Se logró que el ajuste del valor de las ganancias del observador fuera el mismo para todos los casos de las simulaciones.
- Cuando se consideró que existían incertidumbres en los valores de los parámetros, estos valores se manejaron en porcentajes y se obtuvieron resultados para cada uno de ellos, lo que permitió tener una mejor apreciación sobre la robustez del observador.
- En cuanto a los resultados de simulación sobre el valor manejado para cada incertidumbre, se puede apreciar que para los valores del 1% y 3% los resultados son aceptables en la mayoría de los estimados. Sin embargo para los valores del 5% y 8% las gráficas muestran un margen de error considerable, principalmente en los estimados de las entradas  $z_{in}$  y  $\xi_{in1}$  tanto para el caso ideal como para el caso con ruido.
- Cuando se considera a la entrada desconocida  $\xi_{in2}$  como una señal variante en el tiempo, las estimaciones se ven afectadas en las variables  $z$  y  $z_{in}$  debido a que sólo sobre estas dos variables incide esta entrada y por esa razón únicamente se muestran los resultados de esas variables. Los demás estimados no se afectan porque la entrada  $\xi_{in1}$  que incide sobre ellos permanece constante y se repite así el primer caso de estudio.
- Como dato relevante, en la parte referida al diseño del observador, se añadió una ganancia que mejora en gran medida la estimación de la entrada desconocida  $\xi_{in1}$  (concentración de substrato orgánico) y en general mejora el desempeño del observador.
- Debido a que las simulaciones presentaban en cierta forma una cantidad considerable de ruido y de tipo numérico, se eligió un paso fijo de solución muy pequeño (.5/3600) con un resolvidor ode3, que redujo en gran medida dicho ruido.
- El observador utilizado en este ejemplo fue un OSTG con término lineal.
- A pesar de la presencia de ruido en las mediciones se obtuvo un buen desempeño, debido a que el observador logra un buen rechazo a ruido por la naturaleza de su diseño.



---

## Estimación de estados y tasas de reacción a través de OSTG en un proceso biológico de crecimiento microbiano

---

### 4.1. Caso de estudio: Estimación de estados desconocidos y tasas de reacción en cultivos de *Escherichia coli*

#### 4.1.1. Formulación del problema

El principal problema planteado en (Dewasme, 2011) proviene de los cambios metabólicos de dichas cepas cuando existe un exceso de alimentación. Un *desbordamiento del metabolismo* también llamado *efecto Crabtree a corto plazo*, es un fenómeno metabólico que se genera cuando la tasa de glucólisis (oxidación de la glucosa) excede un valor crítico, expresando la máxima capacidad de producción de energía debido a la oxidación de la glucosa, generalmente llevando consigo una disminución de piruvato. En el caso del cultivo aerobio del *E. coli*, con la disminución de piruvato se da la formación de acetato. Para evitar este efecto indeseable se requiere una estrategia de optimización en lazo cerrado, la cuál puede tomar varias formas ((Pomerleau, 1990), (Chen *et al.*, 1995), (Renard *et al.*, 2006), (Dewasme *et al.*, 2009)).

En este tipo de procesos se tienen 2 principales objetivos de control:

- Regular la concentración de sustrato (generalmente glucosa) exactamente a un “nivel crítico”, es decir al umbral de separación entre los 2 regímenes (con y sin exceso de alimentación)
- Limitar la producción de acetato controlando su concentración a un nivel bajo

Desafortunadamente la sensibilidad de las sondas actuales que miden la glucosa es a menudo insuficiente para brindar una medición correcta. En realidad, el nivel crítico es muy bajo (de  $10^{-2}$  g/l a  $10^{-1}$  g/l). Debido a esto y por razones prácticas, se prefiere la regulación del acetato. Sin embargo las sondas para medir el acetato son escasas o no existen en el mercado. Por otro lado las sondas de medición de biomasa y las sondas de medición de presión parcial de oxígeno se encuentran disponibles ampliamente y pueden ser la base para el desarrollo de sensores por software ((Bastin y Dochain, 1990), (Bogaerts y Wouwer, 2003), (Velooso *et al.*, 2009)).

En este trabajo se considera una “cepa salvaje tipo B-11303, ATCC ”, la cuál produce una gran cantidad de acetato y con ello la reducción del crecimiento de biomasa en las primeras horas del cultivo. Esto motiva a centrarse en la estimación en línea de la concentración de acetato y en menor importancia a la estimación en línea de la concentración de glucosa. A fin de diseñar

sensores por software, la concentración de biomasa se considera medible en línea al igual que el oxígeno disuelto y el análisis de gas a la salida.

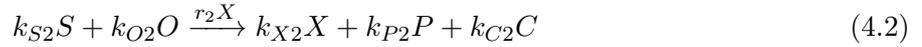
#### 4.1.2. Modelo del sistema

El modelo del sistema en (Dewasme, 2011) representa el cultivo de diferentes cepas (levaduras, bacterias, células animales) en condiciones de *desbordamiento del metabolismo*. Se consideran 3 principales reacciones catabólicas:

Oxidación de sustrato:



Fermentación de sustrato:



Oxidación del subproducto (acetato) :



Donde  $X$ ,  $S$ ,  $P$ ,  $O$  y  $C$  son la concentración de biomasa, el sustrato (glucosa), el subproducto (etanol o metanol en cultivo de levadura, acetato en cultivo de bacterias o lactato en el cultivo de células animales), el oxígeno disuelto y dióxido de carbono respectivamente.  $k_{\xi i}$  ( $i = 1, 2, 3, \xi = X, S, P, O, C$ ) son coeficientes pseudo-estequiométricos del sistema,  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  son las tasas de consumo específico no lineales y están dadas por:

$$r_1 = \frac{\min(r_S, r_{Scrit})}{k_{S1}} \quad (4.4)$$

$$r_2 = \frac{\max(0, r_S - r_{Scrit})}{k_{S2}} \quad (4.5)$$

$$r_3 = \frac{\max(0, \frac{k_{O1}(r_{Scrit} - r_S)}{k_{O3}} \frac{P}{P + K_P})}{k_{P3}} \quad (4.6)$$

Note que estas tasas de consumo específico están divididas, para cada reacción, por el coeficiente del sustrato correspondiente a fin de normalizar con respecto a la fuente consumida. Los términos cinéticos asociados con el consumo de sustrato  $r_S$  y el consumo de sustrato crítico  $r_{Scrit}$  (que está en función de la capacidad respiratoria  $r_O$ ) se expresan:

$$r_S = \mu_S \frac{S}{S + K_S} \quad (4.7)$$

$$r_{Scrit} = \frac{r_O}{k_{O1}} = \frac{\mu_O}{k_{O1}} \frac{O}{O + K_O} \frac{K_{ip}}{K_{ip} + P} \quad (4.8)$$

El modelado de las tasas de consumo específico  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  se basa en la suposición de “cuello de botella” de Sonnleitner ((Sonnleitner y Kappeli, 1986)), la cual fue aplicada a una cepa de levadura *Saccharomyces cerevisiae*. Durante un cultivo las células están propensas a cambiar su metabolismo a causa de su limitada capacidad oxidativa. Cuando el sustrato se encuentra en exceso (la concentración  $S > S_{crit}$  y la tasa de consumo de glucosa  $r_S > r_{Scrit}$ ), las células generan un subproducto  $P$  a través del camino fermentativo y el cultivo se dice estar en régimen respiro-fermentativo. Por otro lado, cuando el sustrato se encuentra limitado (la concentración  $S < S_{crit}$  y la tasa de consumo de glucosa  $r_S < r_{Scrit}$ ), el sustrato disponible (típicamente glucosa), y posiblemente el subproducto  $P$  (como un sustituto de fuente de carbono) son oxidados y el cultivo está en un régimen respirativo.

El modelo del sistema en variables de estado es:

$$\dot{X} = (k_{X1}r_1 + k_{X2}r_2 + k_{X3}r_3)X - DX \quad (4.9)$$

$$\dot{S} = -(k_{S1}r_1 + k_{S2}r_2)X + DS_{in} - DS \quad (4.10)$$

$$\dot{P} = (k_{P2}r_2 - k_{P3}r_3)X - DP \quad (4.11)$$

$$\dot{O} = -(k_{O1}r_1 + k_{O2}r_2 + k_{O3}r_3)X - DO + OTR \quad (4.12)$$

$$\dot{C} = (k_{C1}r_1 + k_{C2}r_2 + k_{C3}r_3)X - DC - CTR \quad (4.13)$$

$$\dot{V} = F_{in} \quad (4.14)$$

Donde:

$X$ : Concentración de biomasa ( $g/l$ )

$S$ : Concentración de sustrato ( $g/l$ )

$P$ : Concentración de subproducto ( $g/l$ )

$O$ : Oxígeno disuelto ( $g/l$ )

$C$ : Dióxido de carbono ( $g/l$ )

$V$ : Volumen medio en el cultivo ( $l$ )

$D$ : Tasa de dilución ( $h^{-1}$ )

$F_{in}$ : Tasa de alimentación a la entrada ( $g/h$ )

$S_{in}$ : Concentración del sustrato en la alimentación ( $g$ )

$OTR$ : Tasa de transferencia del oxígeno de la fase gaseosa a la fase líquida

$CTR$ : Tasa de transferencia del carbono de la fase líquida a la fase gaseosa

Los modelos clásicos para  $OTR$  y  $CTR$  se expresan de la siguiente manera:

$$OTR = k_{LaO}(O_{sat} - O)$$

$$CTR = k_{LaC}(C - C_{sat})$$

donde  $k_{LaO}$  y  $k_{LaC}$  son coeficientes de transferencia volumétrica de oxígeno y dióxido de carbono respectivamente;  $O_{sat}$  y  $C_{sat}$  son concentraciones de oxígeno y dióxido de carbono en saturación y gracias a que se cuenta con un analizador de gases se supone que  $OTR$  y  $CTR$  son medibles en línea. Existen varias simplificaciones posibles de (4.9)-(4.14), dependiendo de las condiciones del cultivo. En operación controlada, la concentración del sustrato podría ser puesta a un valor cerca de cero (regulación 1) lo que conlleva a que  $S \approx 0$ ,  $\dot{S} \approx 0$  o alternadamente, la concentración del subproducto puede ser regulada a un nivel bajo (regulación 2) llevando a  $\dot{P} = 0$ ,  $P \ll K_{ip}$ . Además de que se provee amplia oxigenación ( $O \approx O_{sat}$ ) y por lo tanto  $\dot{O} = 0$  y  $O \gg K_O$ . Estas suposiciones serán consideradas cuando se haga el análisis de la observabilidad del sistema y en el diseño del observador.

### 4.1.3. Análisis de observabilidad

La observabilidad del sistema puede ser evaluada usando las formas canónicas de observabilidad presentadas en (Gauthier y Kupka, 1994) y (Zeitz, 1984):

$$\forall i \in \{1, \dots, q\}, x_i \in R^{n_i}, n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_q$$

$$\sum_{1 \leq i \leq q} n_i = n$$

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \vdots \\ \dot{x}_{q-1} = f_{q-1}(x_1, \dots, x_q) \\ \dot{x}_q = f_q(x_1, \dots, x_q) \end{cases} \quad (4.15)$$

$$y = x_1 = [x_{1,1} x_{1,2} \dots x_{1,n_1}]' \quad (4.16)$$

Donde  $x$  es el vector de estado,  $y$  es el vector de estados medible,  $f_i$  es una partición de las ecuaciones de estado no lineales,  $q$  es el número de particiones. (4.15)-(4.16) es la “*relación de indeterminación de Hessenberg*” es decir un sistema donde  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$  con  $j > i + 1$ .

Para evaluar si el sistema es observable, primero se revisa si el modelo del bioproceso puede ser llevado a la forma (4.15)-(4.16) definiendo una partición apropiada y entonces la siguiente condición es evaluada:

$$\text{rank} \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} = n_{i+1}, \forall i \in \{1, \dots, q-1\} \quad (4.17)$$

(4.17) simplemente traslada el hecho de que una partición de estados  $x_{i+1}$  es sólo observable si cualquier perturbación de esos estados se propaga a lo largo de  $x_i$ .

El modelo (4.9)-(4.14) puede ser puesto de forma genérica de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{X} = f_1(X, S, P, O) \\ \dot{O} = f_4(X, S, P, O) \\ \dot{S} = f_2(X, S) \\ \dot{P} = f_3(X, S, P, O) \end{cases} \quad (4.18)$$

En (4.18) se observa que la ecuación diferencial correspondiente al dióxido de carbono no es considerada, debido a que usualmente no es medido, no necesita ser estimado y tampoco influye en los demás estados. También es interesante ver que la variación de la concentración de substrato sólo esta en función de él mismo y de la concentración de microorganismos.

Siguiendo con el análisis, se toma en cuenta que el cultivo opera bajo el régimen respiratorio-fermentativo ( $S > S_{crit}$  y  $r_S > r_{Scrit}$ ) y por lo tanto las tasas de consumo específico dadas en (4.4)-(4.6) quedan definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{r_{Scrit}}{k_{S1}} \\
r_2 &= \frac{r_S - r_{Scrit}}{k_{S2}} \\
r_3 &= 0
\end{aligned}$$

También son definidas las siguientes constantes:

$$k_1 = \frac{k_{X1}}{k_{S1}}, k_2 = \frac{k_{X2}}{k_{S2}}, k_3 = \frac{k_{X3}}{k_{P3}}, k_4 = \frac{k_{P2}}{k_{S1}}, k_5 = \frac{k_{O1}}{k_{S1}} \text{ y } k_6 = \frac{k_{O2}}{k_{S2}}$$

Note que la única partición que satisface (4.15)-(4.17) y permite la estimación de  $S$  y  $P$  es  $y = x_1 = [X \ O]'$  y  $x_2 = [S \ P]'$ . Efectivamente, el sistema se convierte:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= [\dot{X} \ \dot{O}]' = f_1([X \ O]', [S \ P]') = f_1(x_1, x_2) \\
\dot{x}_2 &= [\dot{S} \ \dot{P}]' = f_2([X \ O]', [S \ P]') = f_2(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$y = x_1 = [X \ O]'$$

y

$$\begin{aligned}
\text{rank} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{X}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{X}}{\partial P} \\ \frac{\partial \dot{O}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{O}}{\partial P} \end{pmatrix} \\
&= \text{rank} \begin{pmatrix} X \mu_S \frac{K_S}{k_2(S+K_S)^2} & X \frac{(k_1-k_2)\mu_O O K_{iP}}{k_5 k_1 k_2 (O+K_O)(P+K_{iP})^2} \\ -X \mu_S \frac{k_6 K_S}{k_2(S+K_S)^2} & X \frac{(k_1 k_5 - k_2 k_6)\mu_O O K_{iP}}{k_5 k_1 k_2 (O+K_O)(P+K_{iP})^2} \end{pmatrix} = n_2 = 2 \\
&X, O \neq 0
\end{aligned}$$

Analizando para el caso de la regulación 1,  $S \approx 0$ ,  $\dot{S} \approx 0$ ,  $\dot{O} = 0$  y  $O \gg K_O$ . El sistema puede ser reescrito como sigue:

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{X} = f_1(X, P) \\ \dot{P} = f_2(X, P) \\ y = X \end{cases} \tag{4.20}$$

En el caso particular de (4.20)  $n_i = 1 \ \forall i$  y la condición (4.17) se reduce a  $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} \neq 0$  lo cual se verifica si  $X, O \neq 0$  (Nótese que a fin de llevar a cabo un cultivo aerobio, las concentraciones de biomasa y de oxígeno nunca pueden ser cero).

También es posible simplificar (4.18) de acuerdo a la regulación 2,  $\dot{P} = 0$ ,  $P \ll K_{ip}$  junto a que  $\dot{O} = 0$  y  $O \gg K_O$ :

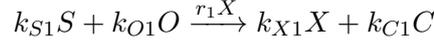
$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{X} = f_1(X, S) \\ \dot{S} = f_2(X, S) \\ y = X \end{cases} \tag{4.21}$$

y  $\frac{\partial \dot{X}}{\partial S} \neq 0$  si  $X \neq 0$ . Combinando (4.20) y (4.21), se observa que la medición de la biomasa puede ser suficiente para reconstruir la concentración del subproducto y del substrato tanto como sus concentraciones permanezcan a un nivel suficientemente bajo ( $S < \mathcal{O}(10^{-1} \text{ g/l})$  y  $0 \text{ g/l} < P < 1 \text{ g/l}$ ).

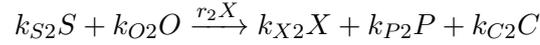
#### 4.1.4. Modelo reducido

Comenzando del modelo general (4.9)-(4.14), existe un esquema de reacción simplificado dado en (Dewasme, 2011) tomando en cuenta solamente el camino respiro-fermentativo (es decir la oxidación y fermentación de la glucosa) y considerando que las condiciones de oxígeno no limitan el crecimiento de las células entonces se deriva lo siguiente:

Oxidación de sustrato:



Fermentación de sustrato:



Las tasas de crecimiento específico son:

$$r_1 = \frac{\min(r_S, r_{Scrit})}{k_{S1}}$$

$$r_2 = \frac{\max(0, r_S - r_{Scrit})}{k_{S2}}$$

Como se considera que la cantidad de oxígeno es suficiente, entonces la constante  $K_O$  es ignorada por lo que:

$$r_S = \mu_S \frac{S}{S + K_S} \quad (4.22)$$

$$r_{Scrit} = \frac{r_O}{k_{O1}} \approx \frac{\mu_O}{k_{O1}} \frac{K_{ip}}{K_{ip} + P} \quad (4.23)$$

Por lo tanto asumiendo la existencia de una reacción de fermentación ( $S > S_{crit}$ ), las tasas de crecimiento específico toman la forma:

$$r_1 = \frac{r_{Scrit}}{k_{S1}} \quad (4.24)$$

$$r_2 = \frac{r_S - r_{Scrit}}{k_{S2}} \quad (4.25)$$

Finalmente normalizando con respecto al sustrato ( $k_{S1} = k_{S2} = 1$ ), la dinámica del sistema reducido en variables de estado es:

$$\dot{X} = (k_{X1}r_{Scrit} + k_{X2}(r_S - r_{Scrit}))X - DX \quad (4.26)$$

$$\dot{S} = -r_S X + DS_{in} - DS \quad (4.27)$$

$$\dot{P} = k_{P2}(r_S - r_{Scrit})X - DP \quad (4.28)$$

$$\dot{O} = -(k_{O1}r_S + k_{O2}(r_S - r_{Scrit}))X - DO + OTR \quad (4.29)$$

## 4.2. Diseño de OSTG para la estimación de tasas de reacción y estados no medibles

Para el diseño del OSTG reportado en (Mendoza, 2011) se toma el modelo reducido del sistema y definiendo:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= r_S X \\ \varphi_2 &= r_{Scrit} X\end{aligned}$$

El sistema (4.26)-(4.29) puede ser reescrito de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{S} \\ \dot{P} \\ \dot{O} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_{X2} & k_{X1} - k_{X2} \\ 1 & 0 \\ k_{P2} & -k_{P2} \\ -k_{O2} & -k_{O1} + k_{O2} \end{pmatrix}}_K \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ S \\ P \\ O \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} 0 \\ DS_{in} \\ 0 \\ OTR \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Para obtener las tasas de reacción a través del OSTG, se hace una partición de los estados y se consideran solamente los estados medibles:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{O} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_{X2} & k_{X1} - k_{X2} \\ -k_{O2} & -k_{O1} + k_{O2} \end{pmatrix}}_{K^a} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ O \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} 0 \\ OTR \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Y bajo la suposición que el modelo (4.30) y (4.31) cumplen las siguientes condiciones:

- $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2]^T$  son desconocidas
- La matriz de coeficientes (K) es conocida
- El número de estados medibles ( $\xi^a$ ), es igual o mayor que el rango de la matriz K
- La matriz de coeficientes de los estados medibles ( $K^a$ ), es de rango completo e invertible (por la izquierda)
- Las derivadas de las tasas de reacción son acotadas (acorde a las propiedades del sistema y a la práctica)

Definiendo a  $y = (K^a)^{-1} \xi^a$ , entonces sus derivadas se describen:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{-k_{O1} + k_{O2}}{-k_{X2}k_{O1} + k_{O2}k_{X1}} & \frac{k_{X1} - k_{X2}}{-k_{X2}k_{O1} + k_{O2}k_{X1}} \\ \frac{k_{O2}}{-k_{X2}k_{O1} + k_{O2}k_{X1}} & \frac{k_{X2}}{-k_{X2}k_{O1} + k_{O2}k_{X1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} DX \\ DO + OTR \end{pmatrix}$$

Tomando a la derivada de las tasas de reacción como estados o dinámicas extendidas, entonces se considera el siguiente observador:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}_1 &= -l_{1X} \phi_1(\tilde{X}) + \hat{\varphi}_1 - \left[ DX \left( \frac{-k_{O1} + k_{O2}}{-k_{X2}k_{O1} + k_{O2}k_{X1}} \right) - (DO + OTR) \left( -\frac{k_{X1} - k_{X2}}{-k_{X2}k_{O1} + k_{O2}k_{X1}} \right) \right] \\ \dot{\hat{\varphi}}_1 &= -l_{2X} \phi_2(\tilde{X}) \\ \dot{\hat{y}}_2 &= -l_{1O} \phi_1(\tilde{O}) + \hat{\varphi}_2 - \left[ DX \left( \frac{k_{O2}}{-k_{X2}k_{O1} + k_{O2}k_{X1}} \right) + (DO + OTR) \left( \frac{k_{X2}}{-k_{X2}k_{O1} + k_{O2}k_{X1}} \right) \right] \\ \dot{\hat{\varphi}}_2 &= -l_{2O} \phi_2(\tilde{O})\end{aligned}$$

Con  $\tilde{X} = \hat{X} - X$  y  $\tilde{O} = \hat{O} - O$  y donde  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se definen como:

$$\begin{aligned}\phi_1(\tilde{\xi}_i) &= m_{1\xi_i} |\xi_i|^p \text{sign}(\tilde{\xi}_i) + m_{2\xi_i} |\xi_i|^q \text{sign}(\tilde{\xi}_i) \\ \phi_2(\tilde{\xi}_i) &= m_{1\xi_i} {}^2p |\xi_i|^{2p-1} \text{sign}(\tilde{\xi}_i) + m_{1\xi_i} m_{2\xi_i} (p+q) |\xi_i|^{p+q-1} \text{sign}(\tilde{\xi}_i) + m_{2\xi_i} {}^2q |\xi_i|^{2q-1} \text{sign}(\tilde{\xi}_i)\end{aligned}$$

Con  $\xi_i = \{X, O\}$ .

Finalmente para obtener el estimado de los estados medibles se realiza  $\xi^a = (K^a)\hat{y}$  :

$$\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{X2} & k_{X1} - k_{X2} \\ -k_{O2} & -k_{O1} + k_{O2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix}$$

Una vez que se han estimado las tasas de reacción, éstas son utilizadas para conocer el valor de los estados no medibles. Para la parte no medible del sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{P} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k_{P2} & -k_{P2} \end{pmatrix}}_{K^b} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S \\ P \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} DS_{in} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Considere el observador:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{S}} &= -\hat{\varphi}_1 - D\hat{S} + DS_{in} \\ \dot{\hat{P}} &= k_{P2}\hat{\varphi}_1 - k_{P2}\hat{\varphi}_2 - D\hat{P}\end{aligned}$$

#### 4.2.1. Observador de alta ganancia (HGO)

En (Mendoza, 2011) se explica que mediante la configuración adecuada de las ganancias y de los parámetros, se logra un caso particular del OSTG que corresponde a un observador de alta ganancia HGO (*High Gain Observer* de sus siglas en inglés). Siguiendo dicha explicación y metodología de diseño, a continuación se presenta un observador de este tipo que estima las tasas de reacción del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}_1 &= -2\theta\tilde{X} + \hat{\varphi}_1 - \left[ DX \left( \frac{-k_{O1} + k_{O2}}{-k_{X2}k_{O1} + k_{O2}k_{X1}} \right) - (DO + OTR) \left( -\frac{k_{X1} - k_{X2}}{-k_{X2}k_{O1} + k_{O2}k_{X1}} \right) \right] \\ \dot{\hat{\varphi}}_1 &= -\theta^2\tilde{X} \\ \dot{\hat{y}}_2 &= -2\theta\tilde{O} + \hat{\varphi}_2 - \left[ DX \left( \frac{k_{O2}}{-k_{X2}k_{O1} + k_{O2}k_{X1}} \right) + (DO + OTR) \left( \frac{k_{X2}}{-k_{X2}k_{O1} + k_{O2}k_{X1}} \right) \right] \\ \dot{\hat{\varphi}}_2 &= -\theta^2\tilde{O}\end{aligned}$$

donde  $\theta$  es la única ganancia a calibrar.

### 4.3. Simulaciones

Como se mencionó anteriormente todos los datos (parámetros, entradas, etc.) para las simulaciones son dados en (Dewasme, 2011). Los valores de los parámetros del sistema son:

Tabla VI. Valores de parámetros del sistema				
$k_{X1} = 1.742$	$k_{O1} = 0.974$	$K_{iP} = 4$	$K_{La} = 100$	$P(0) = 0.8 \text{ g/l}$
$k_{X2} = 0.305$	$k_{O2} = 0.197$	$\mu_S = 0.72$	$X(0) = 0.504 \text{ g/l}$	$O(0) = 0.0069 \text{ g/l}$
$k_{P2} = 1.196$	$K_S = 0.05$	$\mu_O = 0.0935$	$S(0) = 3.8 \text{ g/l}$	$S_{in} = 200 \text{ g}$

Los valores de los parámetros, condiciones iniciales y ganancias del OSTG (tanto para el caso ideal como para caso con ruido) se presentan a continuación en la Tabla VII:

Tabla VII. Valores de parámetros y ganancias del OSTG		
Parámetro	Caso ideal	Caso con ruido
$\hat{y}_1(0)$	1	1
$\hat{y}_2(0)$	1	1
$\hat{\varphi}_1(0)$	0	0
$\hat{\varphi}_2(0)$	0	0
$\hat{S}(0)$	3 g/l	3 g/l
$\hat{P}(0)$	2 g/l	2 g/l
$p$	0.5	0.5
$q$	1	1
$l_{1X}$	21	10
$l_{2X}$	0.5	1
$l_{1O}$	8	4
$l_{2O}$	1	0.1
$m_{1X}$	5	4
$m_{2X}$	5	4
$m_{1O}$	7	5
$m_{2O}$	7	5

Los parámetros y los valores de las ganancias (caso ideal y con ruido) para el HGO se muestra en la siguiente Tabla:

Tabla VIII. Valores de parámetros y ganancias del HGO		
Parámetro	Caso ideal	Caso con ruido
$\hat{y}_1(0)$	1	1
$\hat{y}_2(0)$	1	1
$\hat{\varphi}_1(0)$	0	0
$\hat{\varphi}_2(0)$	0	0
$\hat{S}(0)$	3 g/l	3 g/l
$\hat{P}(0)$	2 g/l	2 g/l
$\theta$	100	80

*Nota: Las condiciones iniciales utilizadas por el OSTG, serán las mismas durante todo el trabajo de tesis, tanto para la parte de observación (capítulo 4) como para la parte de control (capítulo 5). Por lo anterior, en las siguientes tablas donde se especifiquen los datos del observador se omitirá el valor de dichas condiciones iniciales.*

A fines de comparación, se reprodujeron los resultados de estimación obtenidos en (Dewasme, 2011) a través de un filtro de Kalman. La metodología de diseño de este filtro puede verse en el *Apéndice I* de este trabajo. Los parámetros de simulación para el filtro de Kalman son:

Tabla IX. Valores de parámetros del filtro de Kalman				
$\hat{X}(0) = 0.504 \text{ g/l}$	$\hat{S}(0) = 3.8 \text{ g/l}$	$\hat{P}(0) = 0.8 \text{ g/l}$	$\sigma(X) = 0.5$	$R = 25^{-2}$

La matriz de covarianza del ruido en el proceso es:

$$Q = \begin{pmatrix} 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-2} \end{pmatrix}$$

En la Figura 4.1 se muestran los estados del sistema y las tasas de consumo de sustrato  $r_S$  y de sustrato crítico  $r_{Scrit}$ . En esta figura se puede apreciar que  $r_S > r_{Scrit}$  debido a que el modelo (reducido) del sistema considera que se trabaja en un régimen respiro-fermentativo, por lo anterior se tiene un correcto comportamiento del sistema. En la Figura 4.2 se muestra el estimado de las tasas de reacción  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  a través de los observadores OSTG y HGO. Una vez obtenidas las tasas de reacción (en línea mediante un OSTG) se conocen los estados no medidos correspondientes a las concentraciones de sustrato (Figura 4.3) y acetato (Figura 4.4), respectivamente, así como su error de estimación. En estas últimas graficas se compara el desempeño entre el OSTG, HGO y el filtro de Kalman para la estimación de  $S$  y  $P$ .

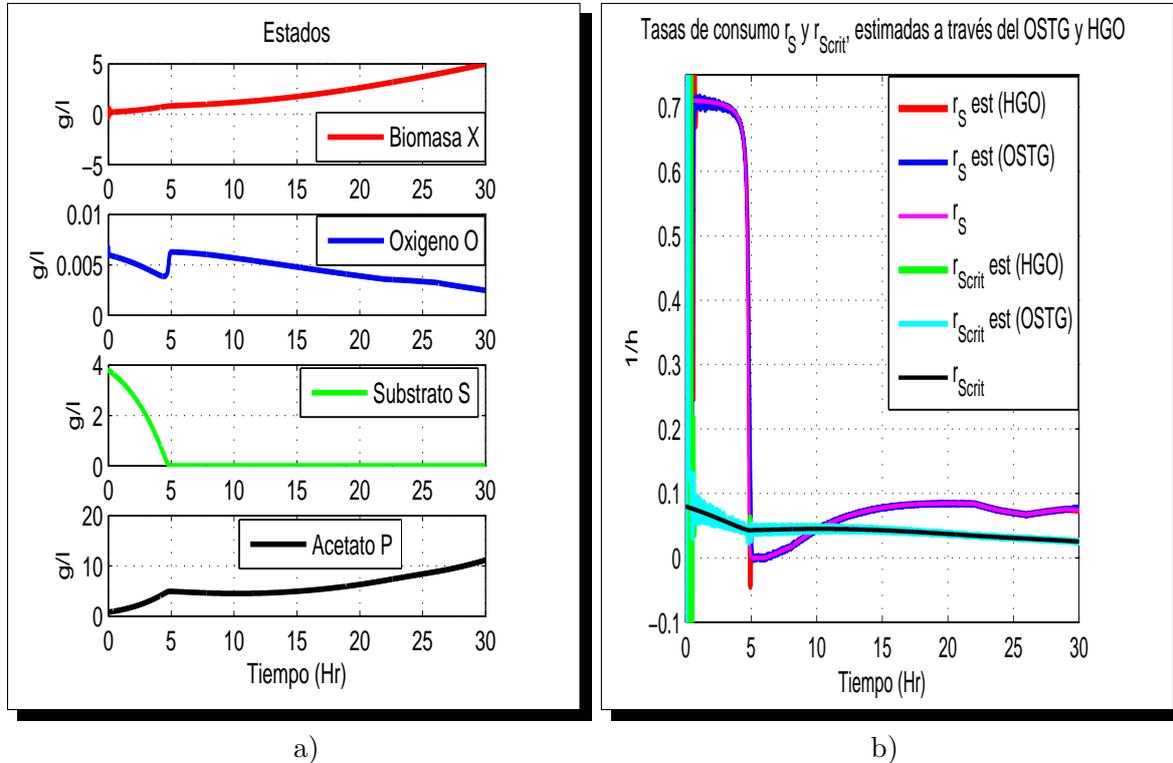
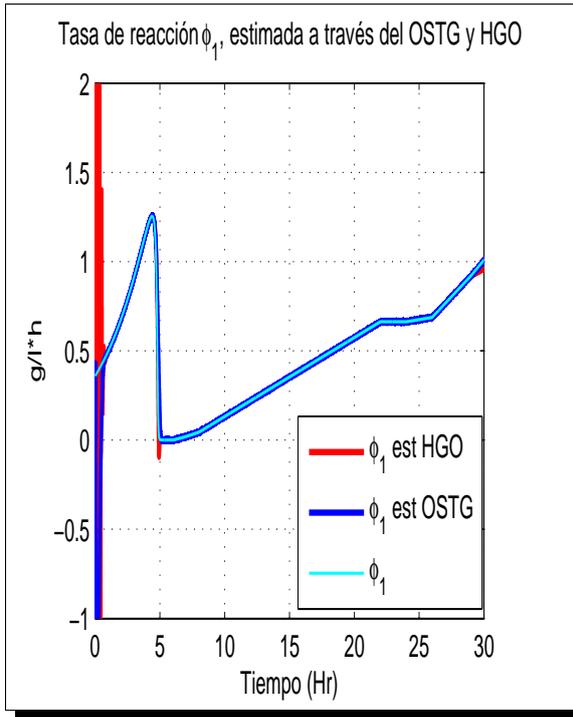
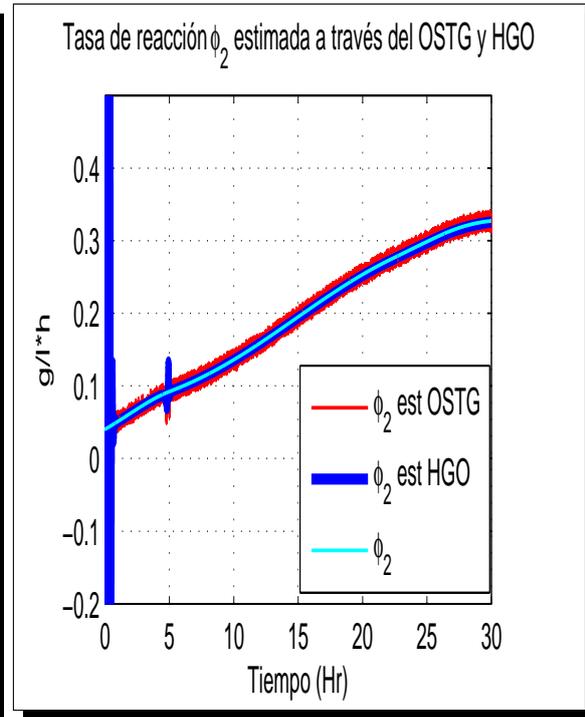


Figura 4.1: a) Estados del sistema b) Tasas de consumo  $r_S$  y  $r_{Scrit}$

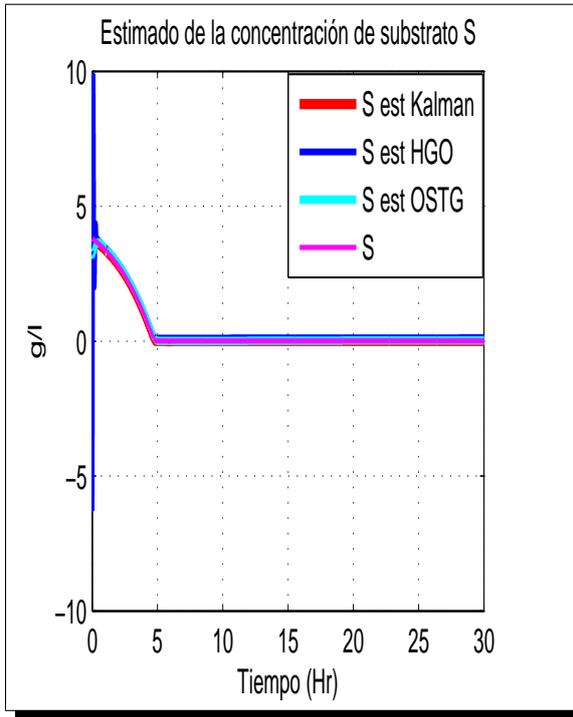


a)

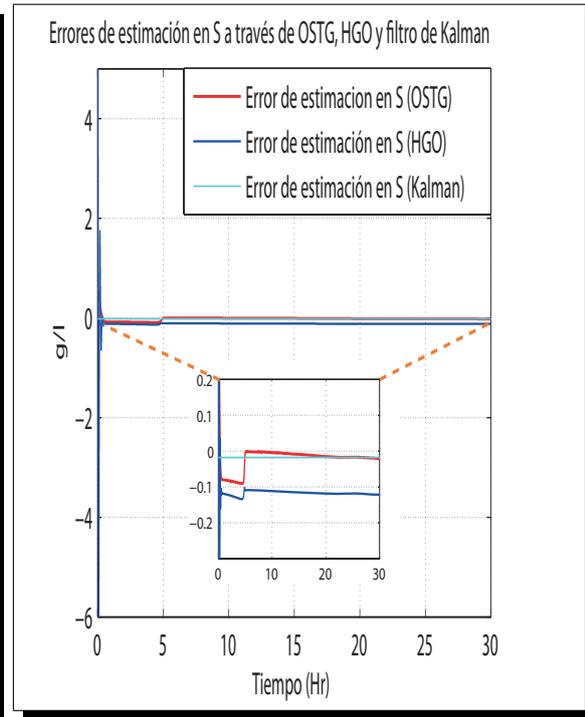


b)

Figura 4.2: a) Tasa de reacción  $\phi_1$  b) Tasa de reacción  $\phi_2$

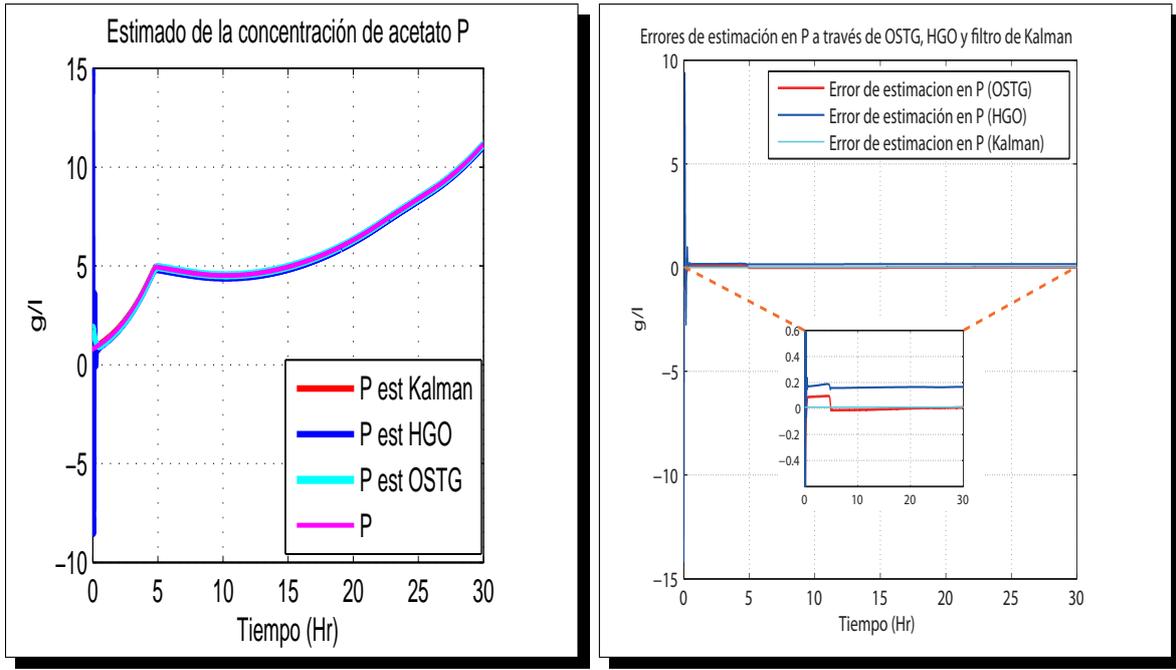


a)



b)

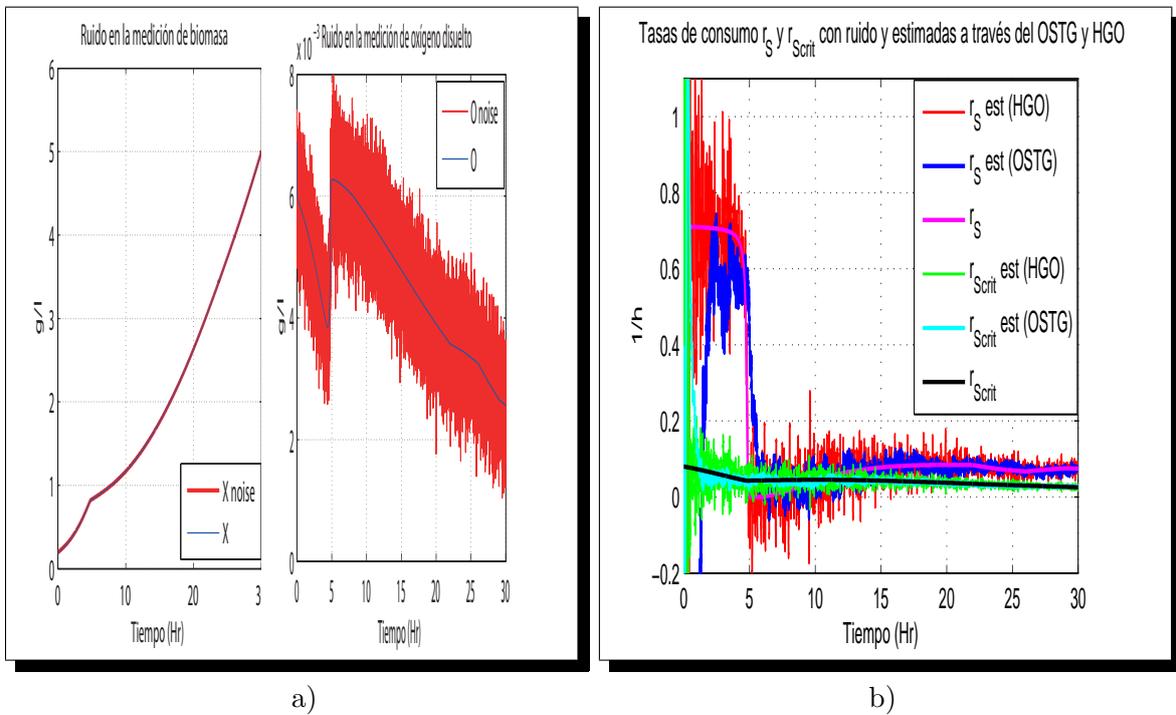
Figura 4.3: a) Estimado de la concentración de sustrato S b) Errores de estimación en S



a) Estimado de la concentración de acetato  $P$  b) Errores de estimación en  $P$

### Estimación de tasas de reacción y estados no medibles con ruido en la medición

En la Figura 4.5 se muestran las mediciones con ruido y el estimado de las tasas de consumo de sustrato  $r_S$  y de sustrato crítico  $r_{Scrit}$  bajo la influencia del mismo.



a) Ruido en las mediciones b) Tasas de consumo  $r_S$  y  $r_{Scrit}$  con ruido

En la siguiente figura se observa el estimado de las tasas de reacción  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  con presencia de ruido. Para ambos observadores (OSTG y HGO) el resultado es correcto pero se obtiene una mejor respuesta por parte del OSTG debido a que éste brinda una estimación con menor cantidad de ruido.

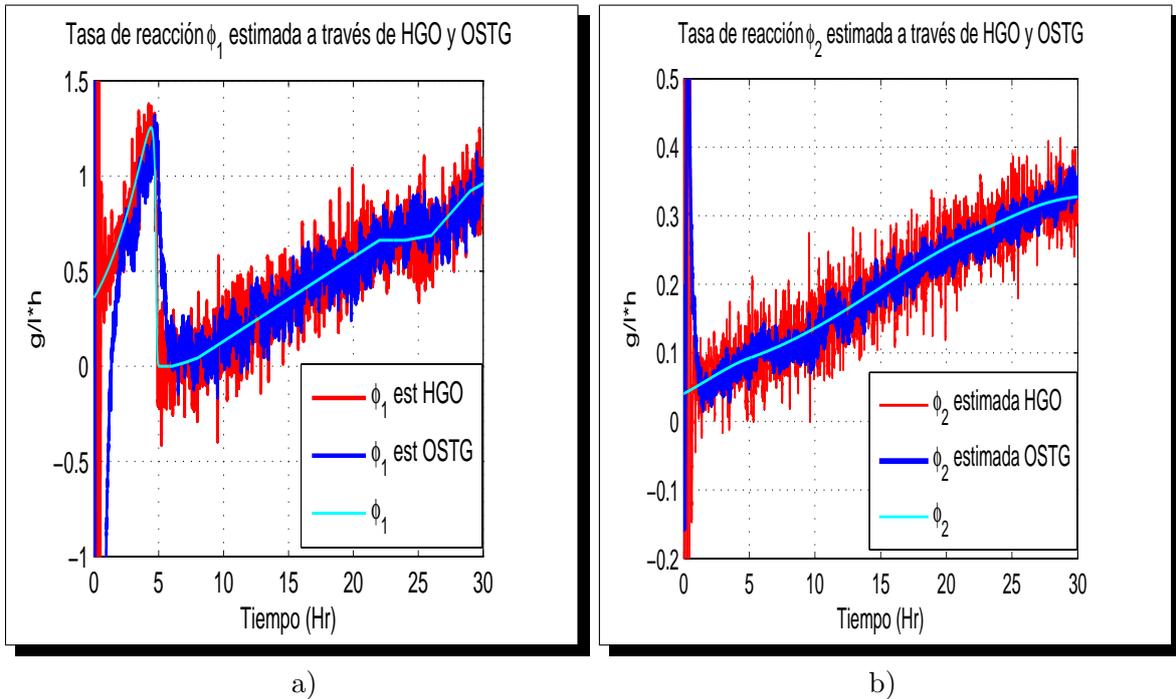


Figura 4.6: a) Tasa de reacción  $\varphi_1$  con ruido b) Tasa de reacción  $\varphi_2$  con ruido

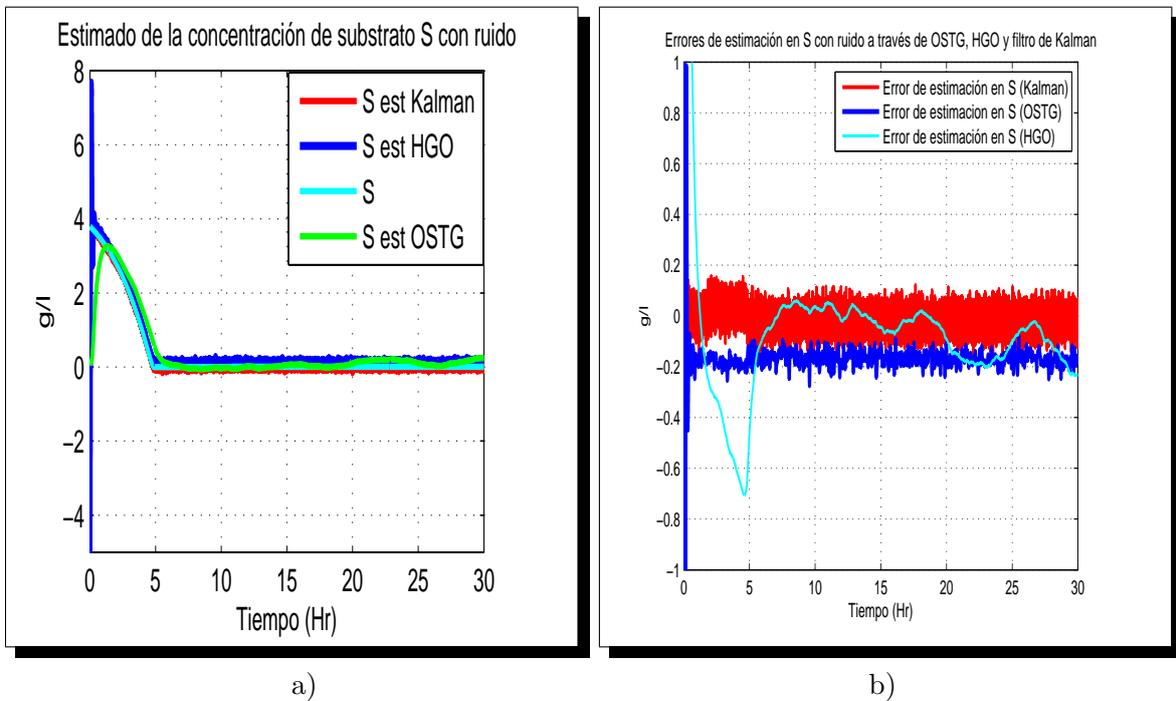


Figura 4.7: a) Estimado de  $S$  con ruido b) Error de estimación en  $S$  con ruido

Por último en las Figuras 4.7 y 4.8 se muestran los estimados y los errores de estimación de los estados no medibles a través del filtro de Kalman, del HGO y del OSTG.

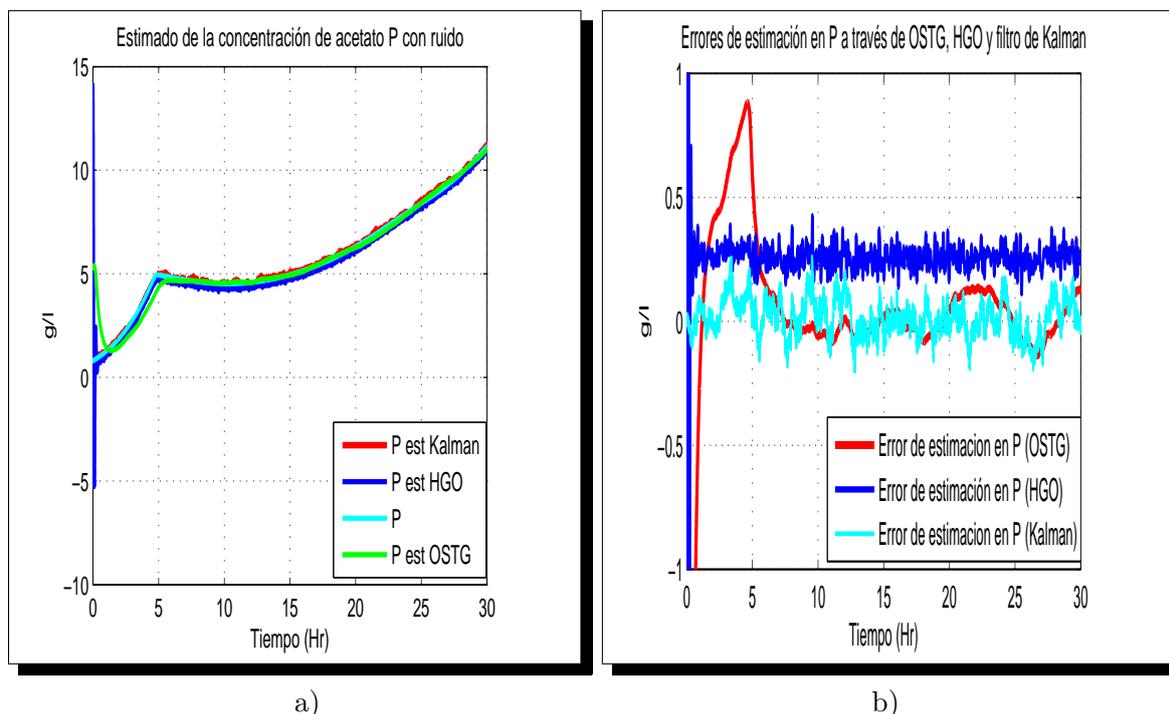


Figura 4.8: a) Estimado de  $P$  con ruido b) Error de estimación en  $P$  con ruido

#### 4.3.1. Resultados

- El objetivo de este capítulo se logra con la estimación en línea de las tasas de reacción mediante un OSTG y posteriormente (y utilizando la información obtenida) se conocen los estados no medibles. Se consideraron las condiciones de operación ideales y con ruido para analizar la robustez del observador ante las perturbaciones.
- A fin de comparar el desempeño del OSTG frente otros esquemas de observación, se reprodujeron resultados previos de estimación para este sistema a través de un filtro de Kalman extendido (Dewasme, 2011), además se propuso un observador de alta ganancia derivado del diseño del OSTG.
- Con las gráficas correspondientes a  $r_S$  y  $r_{Scrit}$  (tanto en el caso ideal como en el caso con ruido) se puede ver el correcto funcionamiento del sistema porque se confirma que el proceso trabaja bajo un régimen respiro-fermentativo (consideración indispensable para trabajar con el modelo reducido visto en la sección 4.1.4 de este capítulo).
- Los resultados muestran que a pesar de la presencia de ruido en la medición, el OSTG tiene un buen desempeño mejorando la estimación frente a los observadores lineales comunmente utilizados en bioprocesos.
- Un punto importante sobre las consideraciones en este capítulo es que resulta arriesgado suponer que los parámetros son conocidos porque en la realidad no es así, siempre existen incertidumbres en el proceso.
- Cabe aclarar que en este capítulo sólo se hace **estimación** de tasas de reacción y estados no medibles, no se aplican estrategias de control como por ejemplo; para regular la concentración del subproducto o del sustrato.

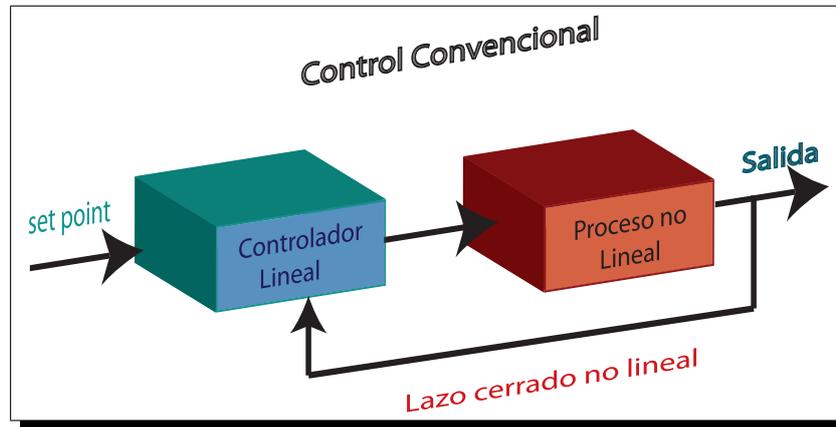


Regulación del subproducto en un proceso biológico de crecimiento microbiano con base en estimación mediante OSTG

5.1. Control por linealización exacta (entrada-salida)

La diferencia entre una tecnica de control convencional y un control por linealización exacta es la forma en que la linealización se incluye en el problema. En una aproximación estandar (Figura 5.1.a), primeramente se calcula una aproximación linealizada del modelo y se diseña un *controlador lineal* para este modelo aproximado. Pero el *lazo cerrado del modelo* permanece no lineal y se garantiza estabilidad local y no para un amplio número de puntos de operación.

En la aproximación por linealización exacta (Figura 5.1.b), se obtiene un *controlador no lineal* el cuál es precisamente diseñado para lograr un *lazo cerrado lineal* que es estable para cualquier punto de operación o en la trayectoria transitoria del sistema (Bastin y Dochain, 1990).

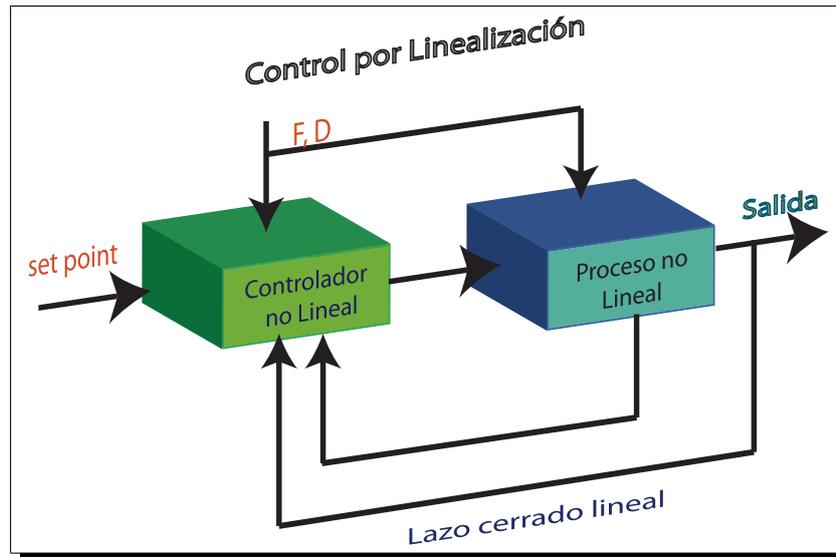


a)

5.1.1. Principio del control por linealización exacta

Considere el proceso biológico descrito mediante el siguiente modelo dinámico general:

$$\frac{d\xi}{dt} = K\varphi(\xi) - D\xi + F - Q \tag{5.1}$$



b)

Figura 5.1: a) Control lineal convencional b) Control mediante linealización exacta

El objetivo de control es seguir la señal de referencia definida como  $y^*(t)$ . En especial en el caso cuando  $y^*(t)$  es constante y es llamada *set point* y el control es llamado *regulación*.

El principio del control por linealización consiste en encontrar una *ley de control*  $u(\xi, Q, F, y^*(t))$  tal que el error de seguimiento ( $y^* - y$ ) sea gobernado mediante una ecuación diferencial *lineal estable* predefinida, llamada *modelo de referencia*.

El diseño de este control se puede llevar a cabo mediante los 3 siguientes pasos:

- El primero es derivar un modelo *entrada-salida* mediante manipulaciones apropiadas (diferenciaciones sucesivas) del modelo general de bioprocesos. Este modelo toma la forma de una ecuación diferencial de orden  $\delta$ :

$$\frac{d^\delta y}{dt^\delta} = f_0(t) + u(t)f_1(t) \quad (5.2)$$

donde  $\delta$  es llamado *grado relativo*

- El segundo paso consiste en proponer un *modelo de referencia lineal estable* del error de seguimiento  $y^*(t) - y(t)$  (Figura 5.2) y se selecciona de la siguiente manera:

$$\sum_{j=0}^{\delta} \lambda_{\delta-j} \frac{d^j}{dt^j} [y^*(t) - y(t)] = 0 \quad (5.3)$$

con  $\lambda_0 = 1$

Este es un modelo que representa cómo queremos que el error de seguimiento decrezca, los coeficientes  $\lambda_{\delta-j}$  son arbitrarios mientras (5.3) sea estable. El modelo de referencia es independiente de algún punto de operación particular.

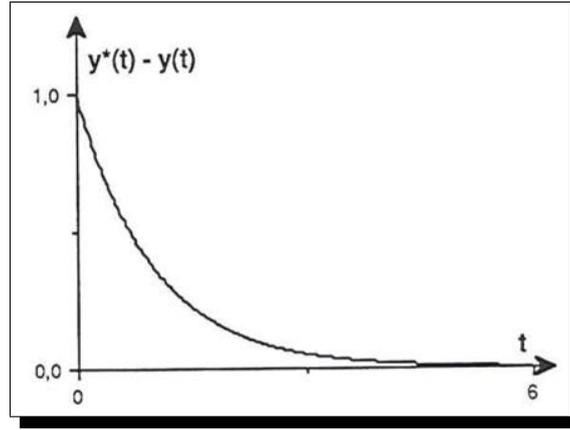


Figura 5.2: Modelo de referencia para el error de seguimiento

- Finalmente el diseño del control consiste en calcular la acción de control  $u(t)$  tal que el modelo entrada-salida (5.2) se relacione exactamente con el modelo de referencia en (5.3). Esto se logra eliminando  $\frac{d^\delta y}{dt^\delta}$  de entre ambas ecuaciones. La solución puede ser escrita como:

$$u(t) = \frac{1}{f_1(t)} \left[ -f_0(t) + \sum_{j=0}^{\delta-1} \lambda_{\delta-j} \frac{d^j}{dt^j} [y^*(t) - y(t)] + \frac{d^\delta y^*}{dt^\delta} \right] \quad (5.4)$$

Ley de control linealizante

*En esta capítulo se tiene como objetivo diseñar de un esquema de control por retroalimentación de salida, teniendo como base de estimación un observador super-twisting generalizado y un controlador por linealización exacta (LE) que utiliza los estados y parámetros estimados.*

### 5.1.2. Regulación de la concentración del subproducto con base en OSTG

El objetivo principal es regular la concentración del subproducto a un nivel bajo y recordando que  $F = DS_{in}$ , entonces para este trabajo se considerará que la entrada de control para este sistema es la concentración  $S_{in}$  con una tasa de dilución constante.  $S_{in}$  físicamente representa la cantidad de alimento que se suministra al cultivo en el biorreactor para que las bacterias puedan lograr un crecimiento exponencial. La otra manera de controlar al sistema es a través de manipular la tasa de dilución y manteniendo la cantidad de alimento constante, pero ésta no es utilizada en el trabajo.

Considerando el modelo reducido del sistema y retomando las ecuaciones (4.26)-(4.28):

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (k_{X1} - k_{X2})\varphi_2 + k_{X2}\varphi_1 - DX \\ \dot{S} &= -\varphi_1 - DS + F \\ \dot{P} &= k_{P2}\varphi_1 - k_{P2}\varphi_2 - DP \end{aligned} \quad (5.5)$$

Puede observarse que la ecuación (5.5) no es un modelo entrada-salida, por lo que no existe explícitamente una conexión entre la entrada de alimentación y el acetato (el cual quiere ser regulado). Esta aparente dificultad se resuelve de la siguiente forma:

- Retomando la ecuación (5.5) y obteniendo su segunda derivada:

$$\frac{d^2P}{dt} = k_{P2} \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial X} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial S} \frac{dS}{dt} \right) - k_{P2} \left( \frac{\partial\varphi_2}{\partial X} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial P} \frac{dP}{dt} \right) - D \frac{dP}{dt} \quad (5.6)$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial X} &= \mu_S \frac{S}{S + K_S} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial S} &= \mu_S X \frac{k_S}{(S + K_S)^2} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial X} &= \frac{\mu_O}{k_{O1}} \frac{K_{ip}}{K_{ip} + P} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial P} &= -\frac{\mu_O}{k_{O1}} \frac{K_{ip}X}{(K_{ip} + P)^2} \end{aligned}$$

- Ahora se propone un modelo de referencia de segundo orden debido a que el sistema tiene grado relativo 2:

$$\frac{d^2(P^* - P)}{dt} + \lambda_1 \frac{d(P^* - P)}{dt} + \lambda_2(P^* - P) = 0$$

Pero como la derivada de  $P^*$  es cero entonces:

$$\frac{d^2P}{dt} = \lambda_2(P^* - P) - \lambda_1 \frac{dP}{dt} \quad (5.7)$$

Igualando (5.6) con (5.7), realizando las operaciones de substitución y simplificación respectivas:

$$\lambda_2(P^* - P) - \lambda_1 (k_{P2}\varphi_1 - k_{P2}\varphi_2 - DP) =$$

$$\begin{aligned} &k_{P2} \left( \mu_S \frac{S}{S + K_S} ((k_{X1} - k_{X2})\varphi_2 + k_{X2}\varphi_1 - DX) + \mu_S X \frac{k_S}{(S + K_S)^2} (-\varphi_1 - DS + F) \right) \\ &- k_{P2} \left( \frac{\mu_O}{k_{O1}} \frac{K_{ip}}{K_{ip} + P} ((k_{X1} - k_{X2})\varphi_2 + k_{X2}\varphi_1 - DX) - \frac{\mu_O}{k_{O1}} \frac{K_{ip}X}{(K_{ip} + P)^2} (k_{P2}\varphi_1 - k_{P2}\varphi_2 - DP) \right) \\ &- D(k_{P2}\varphi_1 - k_{P2}\varphi_2 - DP) \end{aligned}$$

- La ley de control a través de la tasa de alimentación  $F$  es:

$$\begin{aligned}
F = & \left( \frac{1}{k_{P2}\mu_S K_S X} \right) [(\lambda_2(P^* - P) - \lambda_1(k_{P2}\varphi_1 - k_{P2}\varphi_2 - DP)) ((S + K_S)^2)] + \\
& + \left[ k_{P2}(S + K_S)^2 \left( \frac{\mu_O}{k_{O1}} \frac{K_{ip}}{K_{ip} + P} \right) [(k_{X1} - k_{X2})\varphi_2 + k_{X2}\varphi_1 - DX] \right] - \\
& - \left[ k_{P2}(S + K_S)^2 \left( \frac{\mu_O}{k_{O1}} \frac{K_{ip}}{K_{ip} + P} \right) \frac{X}{(K_{ip} + P)} (k_{P2}\varphi_1 - k_{P2}\varphi_2 - DP) \right] - \\
& - [k_{P2}(\mu_S) [S(S + K_S) ((k_{X1} - k_{X2})\varphi_2 + k_{X2}\varphi_1 - DX) - K_S X(\varphi_1 + DS)]] + \\
& + [D(S + K_S)^2(k_{P2}\varphi_1 - k_{P2}\varphi_2 - DP)]
\end{aligned}$$

- Como  $S_{in}$  es realmente lo que se debe manipular, entonces:

$$S_{in} = \frac{F}{D}$$

### 5.1.3. Simulaciones

Para las simulaciones de esta sección, se consideran dos etapas para el esquema de control:

- Como primera etapa; las tasas de reacción y estados del sistema se consideran conocidos debido a que son estimados (en línea) mediante un OSTG (problema tratado a detalle en el capítulo 4 de este trabajo).
- Como segunda etapa; una vez conocidos los estados se aplica una ley de control por linealización exacta entrada-salida para regular la concentración del subproducto a un nivel bajo (.6 g/l), permitiendo así el crecimiento exponencial de la concentración de microorganismos.

Los valores de los parámetros del sistema son:

Tabla X. Valores de parámetros del sistema				
$k_{X1} = 1.742$	$k_{O1} = 0.974$	$K_{iP} = 4$	$K_{La} = 100$	$P(0) = 0.8 \text{ g/l}$
$k_{X2} = 0.305$	$k_{O2} = 0.197$	$\mu_S = 0.72$	$X(0) = 0.504 \text{ g/l}$	$D = 0.02 \text{ (Hr)}^{-1}$
$k_{P2} = 1.196$	$K_S = 0.05$	$\mu_O = 0.0935$	$S(0) = 3.8 \text{ g/l}$	$P^* = P_{ref} = 0.6 \text{ g/l}$

Los valores de las ganancias del controlador:

Tabla XI. Valores de ganancias del controlador		
Ganancias	Caso ideal	Caso con ruido
$\lambda_1$	11	100
$\lambda_2$	20	100

Los valores de los parámetros y ganancias del observador son:

Tabla XII. Valores de parámetros y ganancias del OSTG		
Parámetro	Caso ideal	Caso con ruido
$p$	0.5	0.5
$q$	1	1
$l_{1X}$	26	25
$l_{2X}$	1	0.6
$l_{1O}$	10	9
$l_{2O}$	2	0.3
$m_{1X}$	6	4
$m_{2X}$	6	4
$m_{1O}$	9	5
$m_{2O}$	9	5

En la Figura 5.3 se muestra la regulación de la concentración de acetato al valor de referencia deseado así como su error de regulación correspondiente. Como consecuencia de esto y analizando lo que pasa en la Figura 5.4.a se puede notar que se logra el objetivo de control debido a que hay un crecimiento exponencial en la concentración de microorganismos. En la Figura 5.5 y 5.6.a, se observan los estimados de las tasas de reacción  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  y la concentración de substrato mediante el OSTG dada la entrada de control  $F$  (Figura 5.4.b). Por último en la Figura 5.6.b es representada la cantidad de substrato a la entrada  $S_{in}$ , variable manipulada para lograr dicho objetivo.

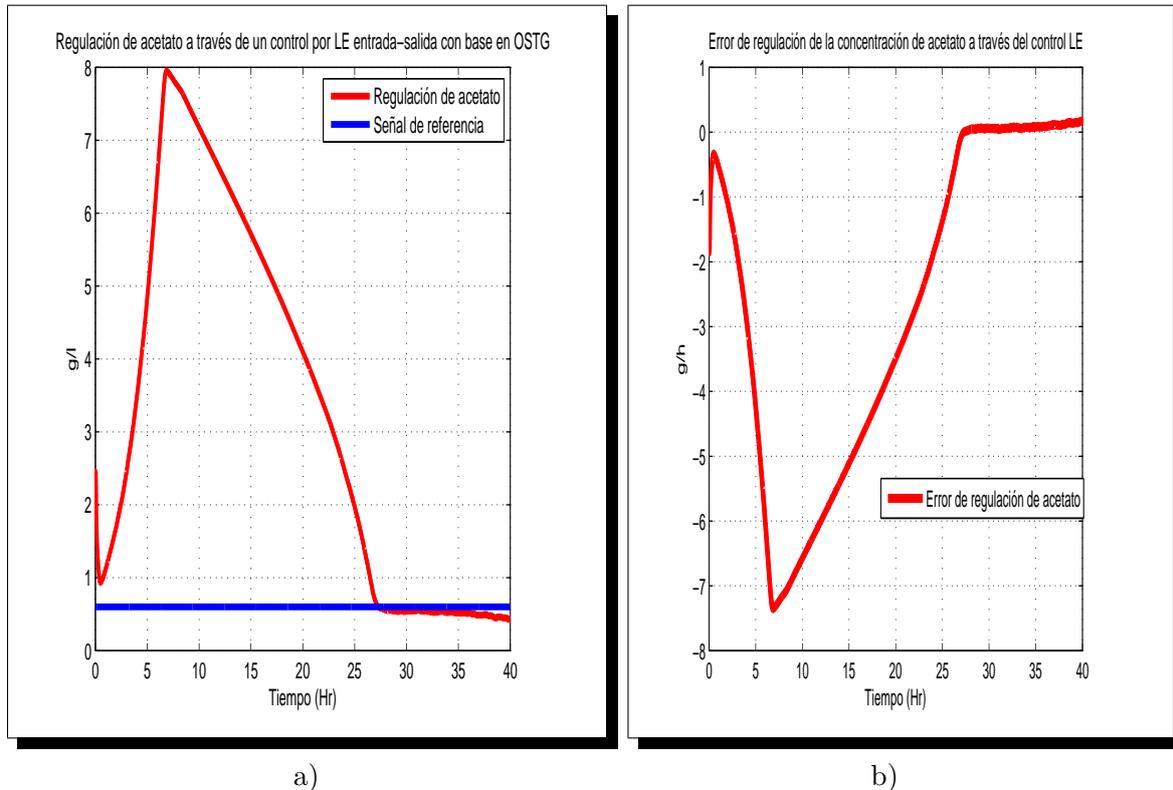
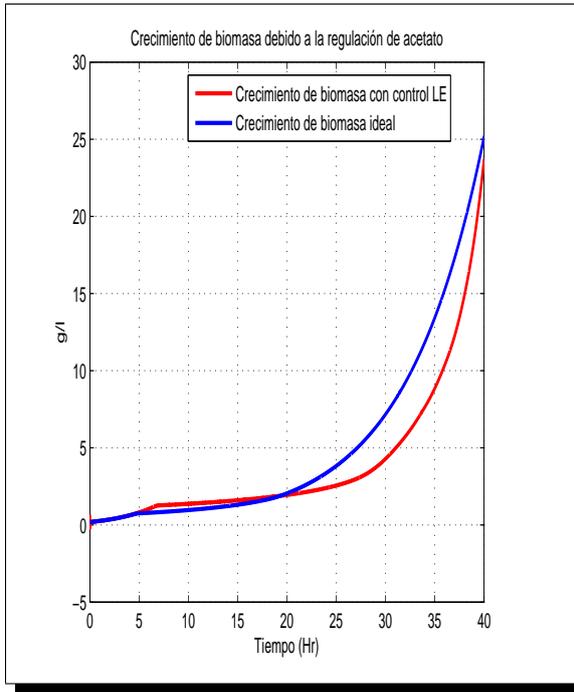
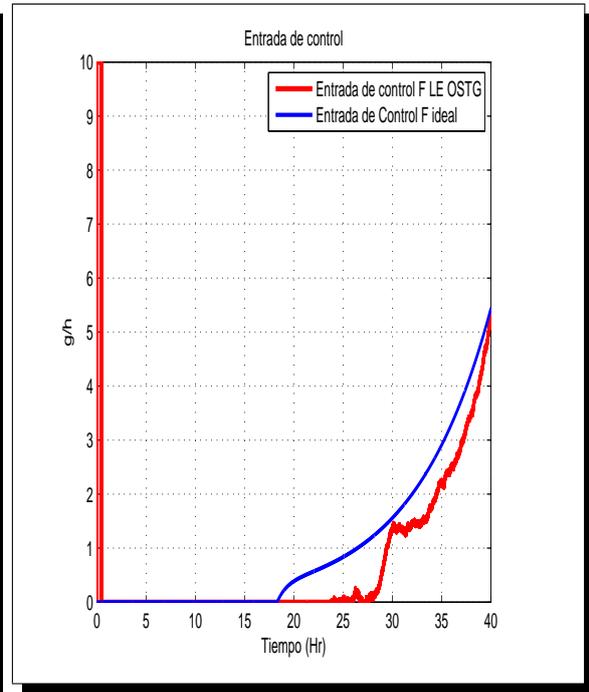


Figura 5.3: a) Regulación de acetato a través de un control por linealización exacta entrada-salida con base en estimación mediante OSTG b) Error de regulación

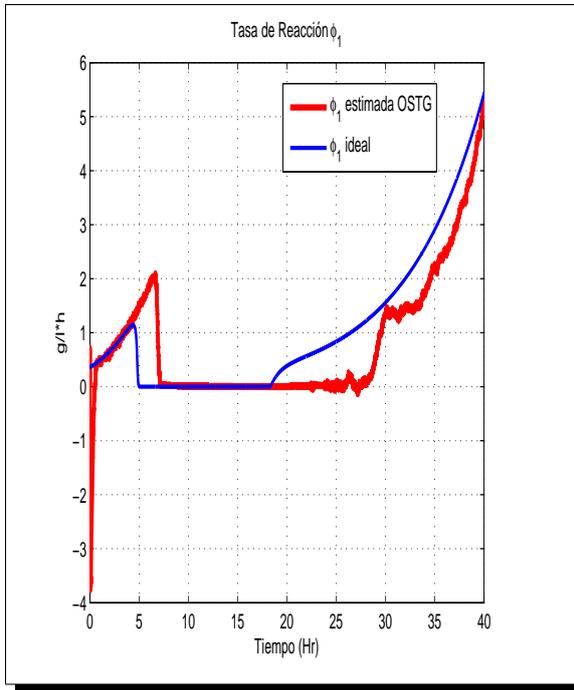


a)

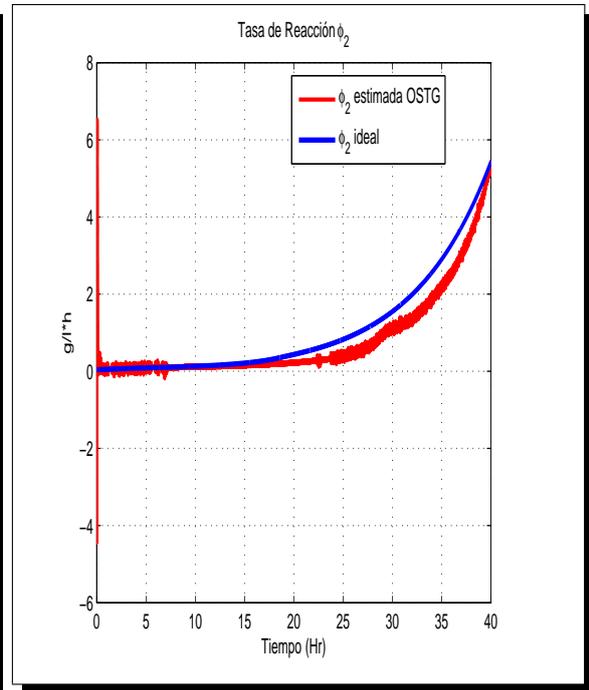


b)

Figura 5.4: a) Crecimiento de  $X$  regulando  $P$  a través de un control por LE b) Entrada de control  $F$



a)



b)

Figura 5.5: a) Estimación de  $\varphi_1$  mediante OSTG dada una entrada de control por LE b) Estimación de  $\varphi_2$  mediante OSTG dada una entrada de control por LE

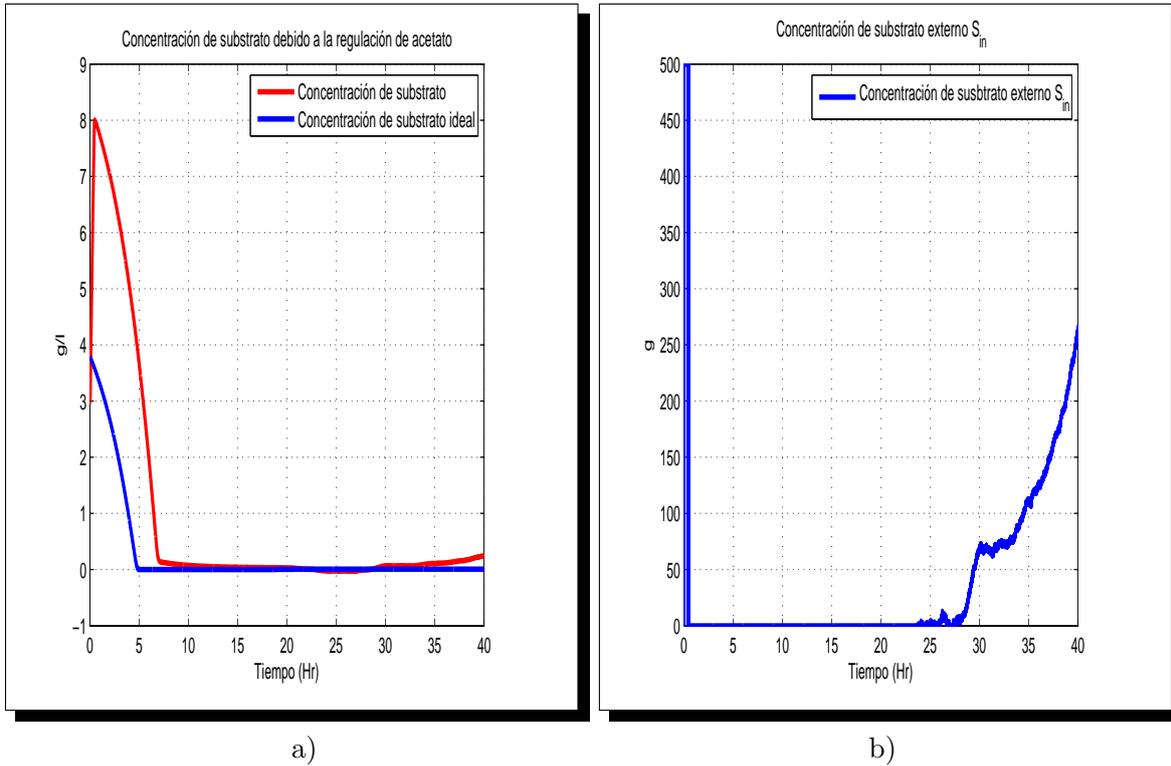


Figura 5.6: a) Concentración de sustrato debido a una entrada de control por LE y con base en estimación mediante OSTG b) Concentración de sustrato a la entrada

### Regulación de acetato considerando ruido en la medición

En la Figura 5.7 se muestra la regulación del acetato con su respectivo error de regulación ahora con presencia de ruido en las mediciones. Para este caso en específico y con este control, uno de los efectos que tiene el ruido en el sistema, es que se afecta tanto el crecimiento de la concentración de biomasa como la del acetato.

Analizando la grafica 5.7, puede notarse que la concentración del subproducto alcanza un valor máximo de 5  $g/l$  a diferencia del caso nominal en el que alcanza un máximo de 8  $g/l$ , pero la regulación en este caso (con presencia de ruido) tarda más horas en llevarse a cabo y sin la precisión como cuando se opera en condiciones ideales. Por todo lo anterior el crecimiento exponencial de biomasa (Figura 5.8.a) es afectado pero sin ser suficientemente grave y se tiene un importante crecimiento de microorganismos.

En las gráficas 5.9 y 5.10.a se muestran las estimaciones en línea de las tasas de reacción  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  y la concentración de sustrato. Finalmente en la Figura 5.10.b correspondiente a la variable  $S_{in}$ , se puede ver que es afectada por el ruido pero se necesita practicamente la misma cantidad de sustrato a la entrada que en el caso ideal.

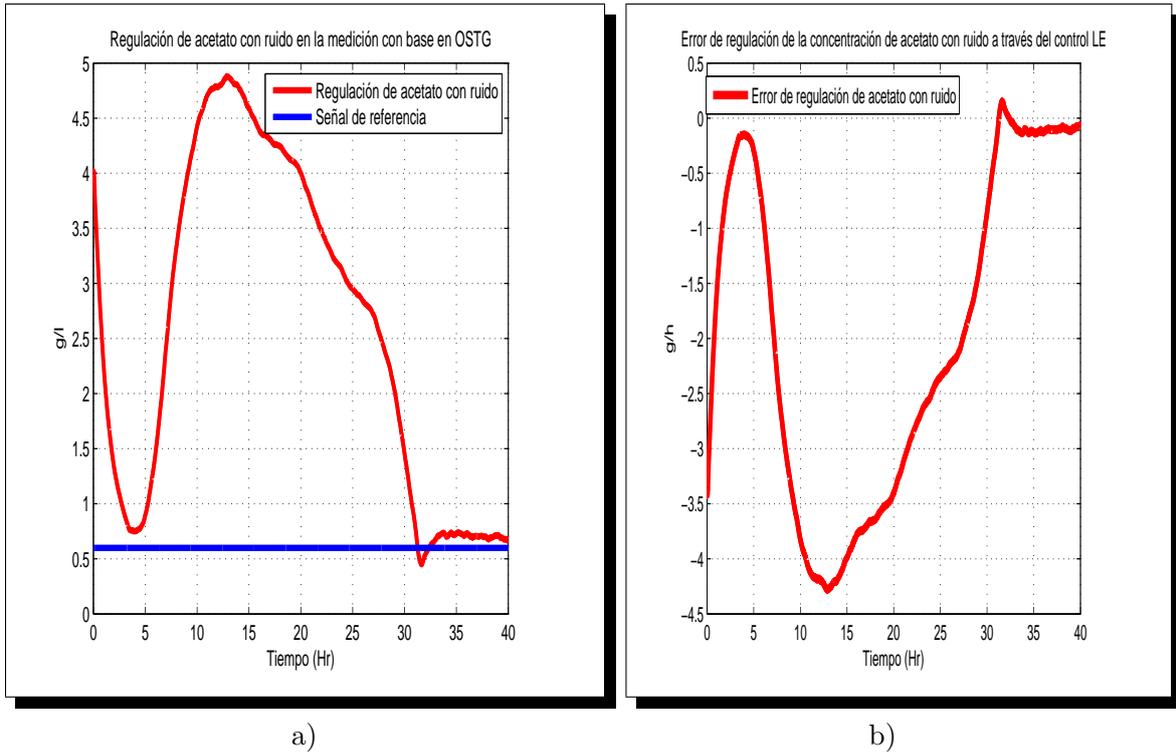


Figura 5.7: a) Regulación de acetato con ruido con un control por LE b) Error de regulación

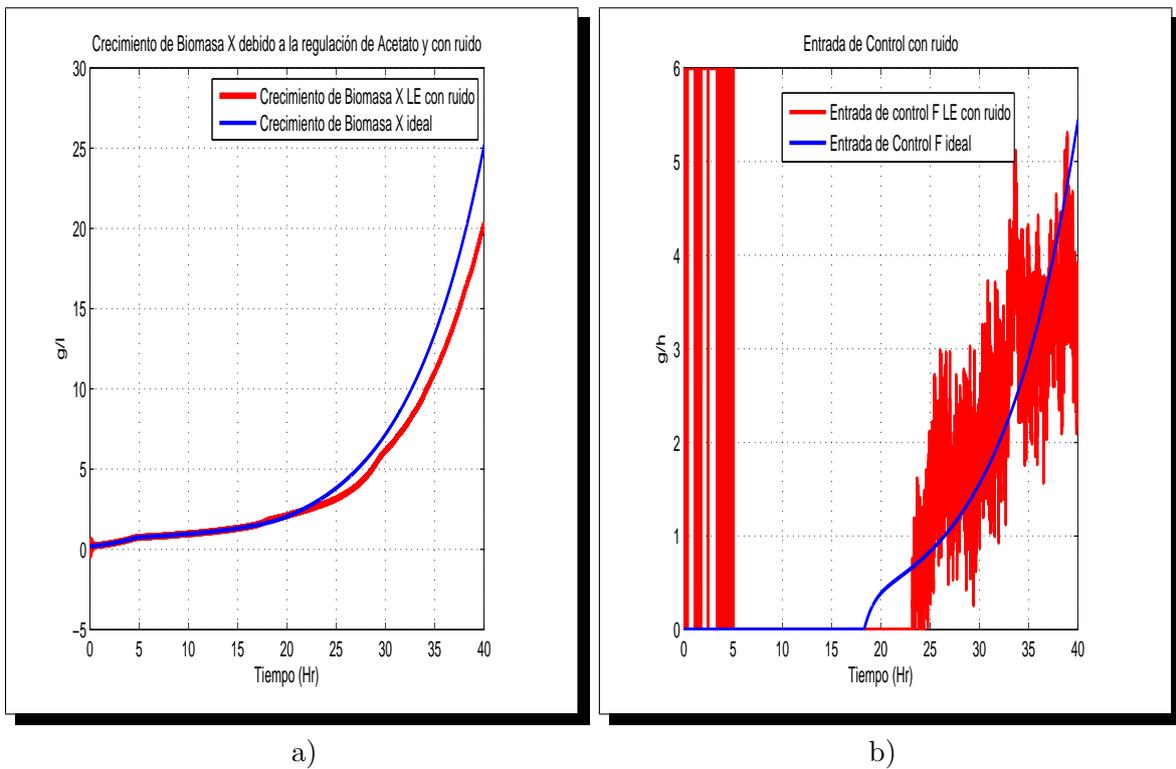
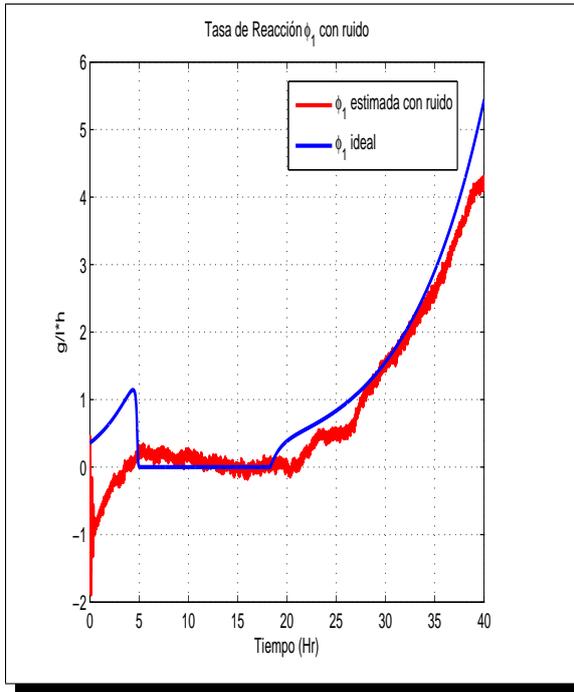
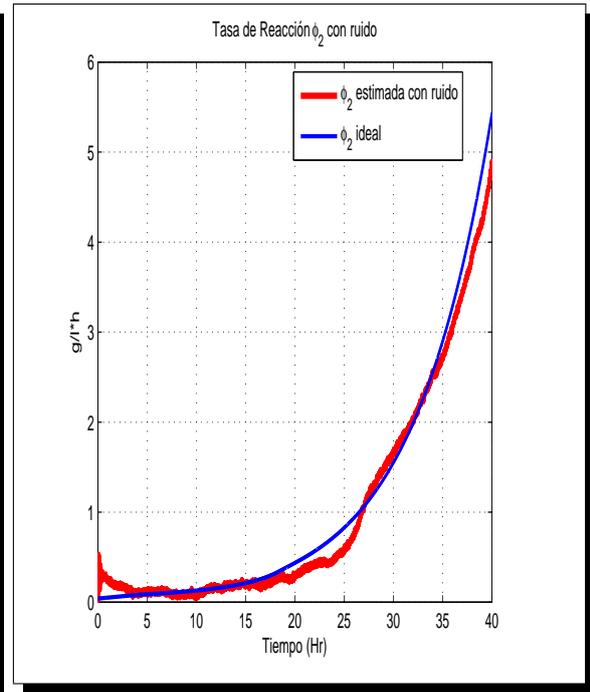


Figura 5.8: a) Crecimiento de  $X$  con ruido regulando  $P$  a través de un control por LE b) Entrada de control  $F$  con ruido

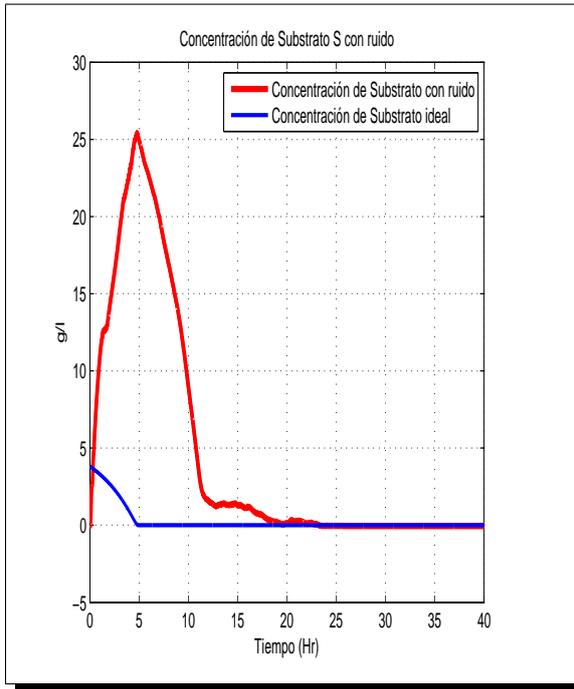


a)

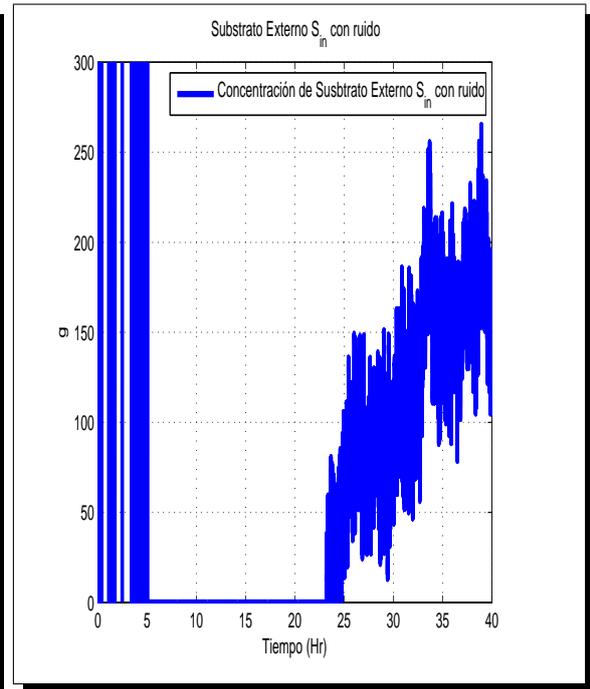


b)

Figura 5.9: a) Estimado de  $\varphi_1$  con ruido mediante OSTG con una entrada de control por LE  
 b) Estimado de  $\varphi_2$  con ruido mediante OSTG con una entrada de control por LE



a)



b)

Figura 5.10: a) Estimación de la concentración de sustrato mediante OSTG con ruido dada una entrada de control por LE  
 b) Concentración de sustrato a la entrada con ruido

## Análisis de estabilidad en lazo cerrado

Generalmente, el principal objetivo del *control retroalimentado* es lograr la estabilidad de la planta. Es muy importante recordar que en los procesos biológicos que operan en un biorreactor tipo *lote-alimentado* el objetivo principal es desestabilizar la planta. Un biorreactor tipo lote-alimentado es, por definición, operado durante un tiempo finito. Usualmente el propósito es la acumulación exponencial de algún producto de reacción, el cual es *cosechado* al final de la operación. En términos matemáticos, esto significa que alguna variable de estado sigue alguna trayectoria de crecimiento exponencial, la cuál es una característica de un comportamiento inestable. En muchos aspectos esta trayectoria exponencial puede ser o no óptima, regulando algunas otras variables de estado a valores de referencia apropiados.

Con respecto al sistema que se ha venido trabajando, el objetivo es claramente no estabilizar globalmente el proceso pero sí mantener una trayectoria inestable bajo control, que en este caso es la concentración de microorganismos. Considerando el proceso de crecimiento microbiano del *E. coli*:

$$\frac{dX}{dt} = (k_{X1}r_{Scrit}(P) + k_{X2}(r_S(S) - r_{Scrit}(P)) - D)X$$

Para que la concentración de acetato permanezca constante y además sea pequeña, si  $D$  es constante, se necesita que  $r_S \approx r_{Scrit}$ , lo cual obliga que  $S \approx S_{crit}$ , entonces no hay un estado de equilibrio en lazo cerrado y la dinámica de la biomasa crece asintóticamente:

$$\frac{dX}{dt} = (k_{X1}r_{Scrit} - D)X$$

Dado que la concentración de la biomasa es exponencialmente creciente sin límite, este proceso opera en un modo lote-alimentado, con una producción de biomasa, este inestable comportamiento es exactamente el objetivo deseado. Pero si el proceso operara en modo continuo este comportamiento sería completamente inaceptable.

## 5.2. Regulación de la concentración de acetato a través de un control adaptable por linealización exacta

Con el propósito de comparar el desempeño del esquema de control con base en OSTG visto en la sección anterior, en esta parte se diseñará un control adaptable con base en un esquema de observación a través de un estimador de tasas de crecimiento específico y de un observador asintótico (OA). El OA estima los estados desconocidos (que en este caso corresponden a las concentraciones de sustrato y de subproducto) sin necesidad de conocer las tasas de reacción y/o crecimiento específico .

### 5.2.1. El problema del control adaptable

Consideremos el proceso biológico descrito por el siguiente modelo en espacio de estados:

$$\frac{d\xi}{dt} = KG(\xi)\alpha - D\xi + F - Q \quad (5.8)$$

Donde  $G(\xi)$  es una matriz diagonal que depende únicamente de los reactantes en el biorreactor, mientras que  $\alpha(\xi, t)$  es un conjunto variante en el tiempo dependiente del estado, llamado *tasas de reacción específicas*.

Para el diseño de este control linealizante adaptable se consideran las siguientes suposiciones:

- $Q$  es medido en línea
- $\xi$  es conocido en línea o a través de un observador asintótico
- Las tasas de reacción específica  $\alpha$  son desconocidas

#### Comentario:

*En esta parte el modelo del proceso esta representado (parametrizado) mediante un conjunto de parámetros  $\alpha$  desconocidos. Esto es lo que inmediatamente motiva el diseño de controladores adaptables, es decir, controladores que pueden lidiar con parámetros inciertos.*

**El problema de control linealizante adaptable** consiste en encontrar una ley de control  $u(\xi, Q, \hat{\alpha})$  que sea función de las mediciones  $\xi$ ,  $Q$  y de las estimaciones en línea de  $\hat{\alpha}$  tal que la dinámica del error de seguimiento ( $y^* - y$ ) sea gobernada al menos asintóticamente y en la vecindad de la trayectoria de referencia deseada  $y^*$  a través de una dinámica lineal estable.

Si la salida es  $y = C^T\xi$ , donde  $C^T$  es el vector que representa la salida correspondiente y notamos que  $C^TF = 0$ , pero suponemos que al menos uno de esos productos (acetato) es generado por alguna reacción a la cual el sustrato también pertenece. Esto se formaliza asumiendo que:

$$C^TK \frac{\partial[G(\xi)\alpha]}{\partial\xi} \neq 0 \quad (5.9)$$

Bajo estas suposiciones se puede observar que:

$$\frac{dy}{dt} = C^T K G(\xi) \alpha - D y \quad (5.10)$$

La ecuación (5.10) no involucra la entrada de control  $F$ , por lo que no es útil para el diseño de la ley de control. Si se deriva (5.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= -D \frac{dy}{dt} + C^T K \frac{\partial [G(\xi) \alpha]}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + C^T K G(\xi) \frac{d\alpha}{dt} \\ &= -D [C^T K G(\xi) \alpha - D y] + C^T K G(\xi) \frac{d\alpha}{dt} + C^T K \frac{\partial}{\partial \xi} [G(\xi) \alpha] [K G(\xi) \alpha - D \xi + F - Q] \end{aligned} \quad (5.11)$$

La ecuación anterior es un modelo entrada/salida. Ahora se propone un modelo de referencia de segundo orden debido a que el sistema tiene grado relativo 2:

$$\frac{d^2(y^* - y)}{dt^2} + \lambda_1 \frac{d(y^* - y)}{dt} + \lambda_2(y^* - y) = 0 \quad (5.12)$$

Entonces el principio de control linealizante requiere el cálculo de una ley de control  $F(\xi, \alpha, \frac{d\alpha}{dt})$ . Satisfaciendo (5.11) y (5.12) la ley de control resulta:

$$\begin{aligned} F(\xi, \alpha, \frac{d\alpha}{dt}) &= \\ &= \left[ C^T K \frac{\partial}{\partial \xi} [G(\xi) \alpha] \right]^{-1} \left[ \frac{d^2 y^*}{dt^2} + \lambda_1 \frac{d(y^* - y)}{dt} + \lambda_2(y^* - y) + D [C^T K G(\xi) \alpha - D y] - C^T K G(\xi) \frac{d\alpha}{dt} \right] - \\ &- K G(\xi) \alpha + D \xi + Q \end{aligned} \quad (5.13)$$

Se observa que esta ley de control no sólo depende del valor de las tasas de reacción específicas sino también de sus derivadas  $\frac{d\alpha}{dt}$ . Esta dificultad se resuelve colocando los estimados  $\hat{\alpha}$  y  $\frac{d\hat{\alpha}}{dt}$  a fin de hacer la ley de control adaptable.

$$\begin{aligned} F(\xi, \hat{\alpha}, \frac{d\hat{\alpha}}{dt}) &= \\ &= \left[ C^T K \frac{\partial}{\partial \xi} [G(\xi) \hat{\alpha}] \right]^{-1} \left[ \frac{d^2 y^*}{dt^2} + \lambda_1 \frac{d(y^* - y)}{dt} + \lambda_2(y^* - y) + D [C^T K G(\xi) \hat{\alpha} - D y] - C^T K G(\xi) \frac{d\hat{\alpha}}{dt} \right] - \\ &- K G(\xi) \hat{\alpha} + D \xi + Q \end{aligned} \quad (5.14)$$

### 5.2.2. Diseño de un observador asintótico

Para aplicar un control linealizante es necesario contar con los estados del sistema. Para este caso se diseñara un OA, el cuál es muy utilizado en procesos biológicos para estimar los estados cuando las tasas de reacción son desconocidas. Tomando el modelo general en espacio de estados que describe el proceso:

$$\frac{d\xi}{dt} = K \varphi - D \xi + F - Q$$

Considerando que se satisfacen las siguientes condiciones:

- La matriz de coeficientes (K) es conocida

- El número de variables conocidas, es igual o mayor que el rango de la matriz  $K$
- La matriz de coeficientes de los estados medibles ( $K^a$ ), es de rango completo e invertible.

El proceso de diseño del OA planteado en (Mendoza, 2011) consta de los siguientes pasos:

- Hacer una partición del sistema en estados medibles y no medibles:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}^a &= K^a \varphi(\xi^a, \xi^b) - D\xi^a + F^a - Q^a \\ \dot{\xi}^b &= K^b \varphi(\xi^a, \xi^b) - D\xi^b + F^b - Q^b\end{aligned}$$

- Definir una combinación lineal de la particion del sistema:

$$Z = \xi^b - K^b(K^a)^{-1}\xi^a$$

su dinámica queda definida como:

$$\dot{Z} = -DZ - Q^b + F^b - K^b(K^a)^{-1}[F^a - Q^a]$$

- El OA es:

$$\dot{\hat{Z}} = -D\hat{Z} - Q^b + F^b - K^b(K^a)^{-1}[F^a - Q^a] \quad (5.15)$$

$$\hat{\xi}^b = \hat{Z} + K^b(K^a)^{-1}\xi^a \quad (5.16)$$

Dada la metodología previa, el sistema puede ser reescrito de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{S} \\ \dot{P} \\ \dot{O} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_{X2} & k_{X1} - k_{X2} \\ -1 & 0 \\ k_{P2} & -k_{P2} \\ -k_{O2} & -k_{O1} + k_{O2} \end{pmatrix}}_K \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ S \\ P \\ O \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} 0 \\ DS_{in} \\ 0 \\ OTR \end{pmatrix}$$

Se realiza la partición de estados correspondiente:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{O} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_{X2} & k_{X1} - k_{X2} \\ -k_{O2} & -k_{O1} + k_{O2} \end{pmatrix}}_{K^a} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ O \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} 0 \\ OTR \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{P} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k_{P2} & -k_{P2} \end{pmatrix}}_{K^b} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S \\ P \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} DS_{in} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La combinación lineal resulta ser:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k_{P2} & -k_{P2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-k_{O1}+k_{O2}}{-k_{X2}k_{Q1}+k_{O2}k_{X1}} & \frac{-k_{X1}+k_{X2}}{-k_{X2}k_{Q1}+k_{O2}k_{X1}} \\ \frac{k_{O2}}{-k_{X2}k_{O1}+k_{O2}k_{X1}} & \frac{k_{X2}}{-k_{X2}k_{O1}+k_{O2}k_{X1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ O \end{pmatrix}$$

El observador asintótico es:

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{Z}}_1 \\ \dot{\hat{Z}}_2 \end{pmatrix} = -D \begin{pmatrix} \hat{Z}_1 \\ \hat{Z}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k_{P2} & -k_{P2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-k_{O1}+k_{O2}}{-k_{X2}k_{Q1}+k_{O2}k_{X1}} & \frac{-k_{X1}+k_{X2}}{-k_{X2}k_{Q1}+k_{O2}k_{X1}} \\ \frac{k_{O2}}{-k_{X2}k_{O1}+k_{O2}k_{X1}} & \frac{k_{X2}}{-k_{X2}k_{O1}+k_{O2}k_{X1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ OTR \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{S} \\ \hat{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Z}_1 \\ \hat{Z}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k_{P2} & -k_{P2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-k_{O1}+k_{O2}}{-k_{X2}k_{Q1}+k_{O2}k_{X1}} & \frac{-k_{X1}+k_{X2}}{-k_{X2}k_{Q1}+k_{O2}k_{X1}} \\ \frac{k_{O2}}{-k_{X2}k_{O1}+k_{O2}k_{X1}} & \frac{k_{X2}}{-k_{X2}k_{O1}+k_{O2}k_{X1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ O \end{pmatrix}$$

### 5.2.3. Estimador basado en observador para obtener las tasas de crecimiento específico

En este caso se estiman las tasas de reacción a partir del conocimiento en línea de las variables de estado (o a través de un OA). Consideremos el modelo general de bioprocesos dado en (5.1) y asumimos lo siguiente:

- La matriz  $K$  es conocida
- La tasa de dilución  $D$ , la tasa de alimentación  $F$ , y la tasa de flujo de gas de salida  $Q$  son medidas en línea
- El vector de variables de estado  $\xi$  es conocido en línea mediante medición o a través de un OA

Asumimos también que el vector  $\varphi$  de tasas de reacción es “parcialmente desconocido” y expresado de la siguiente forma:

$$\varphi(\xi) = H(\xi)\rho(\xi) \quad (5.17)$$

Donde  $H(\xi)$  es una matriz de  $M \times r$  de funciones de estado conocidas y  $\rho(\xi)$  un vector de funciones desconocidas de  $\xi$ , con dimension  $\rho(\xi) = r$ .

Con la expresión en (5.17) podemos reescribir el sistema dado en (5.1) de la siguiente forma:

$$\frac{d\xi}{dt} = KH(\xi)\rho(\xi) - D\xi + F - Q \quad (5.18)$$

Estamos interesados en resolver el problema de estimar  $\rho(\xi)$  a partir del conocimiento en línea de  $D$ ,  $F$ ,  $Q$  y  $\xi$ . Para la solución se propone un “estimador basado en observador”.

## Diseño de estimador basado en observador

La idea básica planteada en (Bastin y Dochain, 1990) es utilizar un observador de estados, no para estimarlos (ya que se suponen conocidos) sino para proveernos información en línea para actualizar el estimado de  $\rho(\xi)$ . El algoritmo de estimación es el siguiente:

$$\frac{d\hat{\xi}}{dt} = KH(\xi)\hat{\rho} - D\xi + F - Q - \Omega(\xi - \hat{\xi}) \quad (5.19)$$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = [KH(\xi)]^T \Gamma(\xi - \hat{\xi}) \quad (5.20)$$

donde  $\hat{\rho}$  denota el estimado en línea de  $\rho(\xi)$ . Algunas características y sugerencias sobre este estimador son:

- $\Gamma$  es la matriz de ganancias de la ley de adaptación dada en (5.20) y debe ser elegida de tal manera que la matriz  $\Omega^T \Gamma + \Gamma \Omega$  sea negativa definida.
- La ley de adaptación (5.20) a su vez está impulsada mediante la desviación  $(\xi - \hat{\xi})$  la cual refleja el desajuste entre  $\hat{\rho}$  y  $\rho(\xi)$
- Es común proponer a  $\Omega = \text{diag}\{-\omega_i\}$  con  $i = 1 \dots N$  y  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_j\}$  con  $j = 1 \dots r$  para cumplir que la matriz  $\Omega^T \Gamma + \Gamma \Omega$  sea negativa definida
- Las ganancias  $\omega_i$  y  $\gamma_i$  se proponen como escalares y son ajustadas a prueba y error

Necesitamos dejar al sistema (4.26)-(4.28) en la forma:

$$\frac{d\xi}{dt} = KH(\xi)\rho(\xi) - D\xi + F - Q$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{S} \\ \dot{P} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_{X2} & k_{X1} - k_{X2} \\ -1 & 0 \\ k_{P2} & -k_{P2} \end{pmatrix}}_K \underbrace{\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}}_{H(\xi)} \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}}_{\rho(\xi)} - D \begin{pmatrix} X \\ S \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde:

$$\varphi = H(\xi)\rho(\xi)$$

El estimador es:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{S} \\ \dot{P} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_{X2} & k_{X1} - k_{X2} \\ -1 & 0 \\ k_{P2} & -k_{P2} \end{pmatrix}}_K \underbrace{\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}}_{H(\xi)} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \end{pmatrix}}_{\hat{\rho}(\xi)} - D \begin{pmatrix} X \\ S \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - \hat{X} \\ S - \hat{S} \\ P - \hat{P} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{\mu}}_1 \\ \dot{\hat{\mu}}_2 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} k_{X2} & k_{X1} - k_{X2} \\ -1 & 0 \\ k_{P2} & -k_{P2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - \hat{X} \\ S - \hat{S} \\ P - \hat{P} \end{pmatrix}$$

### 5.2.4. Regulación del subproducto con base en OA y estimador de tasas de crecimiento específico

Retomando la ecuación que define la dinámica del acetato y obteniendo su segunda derivada:

$$\dot{P} = k_{P2}\mu_1X - k_{P2}\mu_2X - DP$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{dt} &= k_{P2} \left( \frac{\partial(\mu_1X)}{\partial X} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial(\mu_1X)}{\partial S} \frac{dS}{dt} \right) - k_{P2} \left( \frac{\partial(\mu_2X)}{\partial X} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial(\mu_2X)}{\partial P} \frac{dP}{dt} \right) \\ &- D \frac{dP}{dt} + k_{P2}X \frac{d\mu_1}{dt} - k_{P2}X \frac{d\mu_2}{dt} \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu_1X)}{\partial X} &= \mu_1 \\ \frac{\partial(\mu_1X)}{\partial S} &= \mu_S X \frac{k_S}{(S + K_S)^2} \\ \frac{\partial(\mu_2X)}{\partial X} &= \mu_2 \\ \frac{\partial(\mu_2X)}{\partial P} &= -\mu_2 \frac{X}{(K_{iP} + P)} \end{aligned}$$

Ahora se propone un modelo de referencia de segundo orden:

$$\frac{d^2(P^* - P)}{dt} + \lambda_1 \frac{d(P^* - P)}{dt} + \lambda_2(P^* - P) = 0$$

Pero como la derivada de  $P^*$  es cero entonces:

$$\frac{d^2P}{dt} = \lambda_2(P^* - P) - \lambda_1 \frac{dP}{dt} \quad (5.22)$$

Igualando (5.21) y (5.22), la tasa de alimentación  $F$  es:

$$F = \frac{[\lambda_2(P^* - P) - \lambda_1 f_1 + D f_1] f_4 + f_7 \left[ f_2 - f_1 \frac{X}{f_6} \right] - k_{P2} [\mu_S [S f_5 f_2 - k_S X (\hat{\mu}_1 X + DS)] - X \frac{d\hat{\mu}_1}{dt} + X \frac{d\hat{\mu}_2}{dt}]}{f_3}$$

con:

$$\begin{aligned} f_1 &= k_{P2}(\hat{\mu}_1 X) - k_{P2}(\hat{\mu}_2 X) - DP \\ f_2 &= (k_{X1} - k_{X2})(\hat{\mu}_2 X) + k_{X2}(\hat{\mu}_1 X) - DX \\ f_3 &= k_{P2}\mu_S K_S X \\ f_4 &= (S + K_S)^2 \\ f_5 &= (S + K_S) \\ f_6 &= K_{iP} + P \\ f_7 &= \frac{k_{P2}\mu_o K_{iP} f_4}{k_{O1} f_6} \end{aligned}$$

Finalmente la variable a manipular es:

$$S_{in} = \frac{F}{D}$$

### 5.2.5. Simulaciones

Los valores de los parámetros del sistema se pueden ver en la Tabla X. Los valores de las ganancias del estimador de tasas de crecimiento específico se muestran la siguiente Tabla:

Tabla XIII. Valores de ganancias del estimador de tasas de crecimiento		
Ganancia	Caso ideal	Caso con ruido
$\omega_1$	50	50
$\omega_2$	50	50
$\omega_3$	50	50
$\Gamma_1$	0.1	0.1
$\Gamma_2$	0.1	0.1
$\Gamma_3$	0.1	0.1

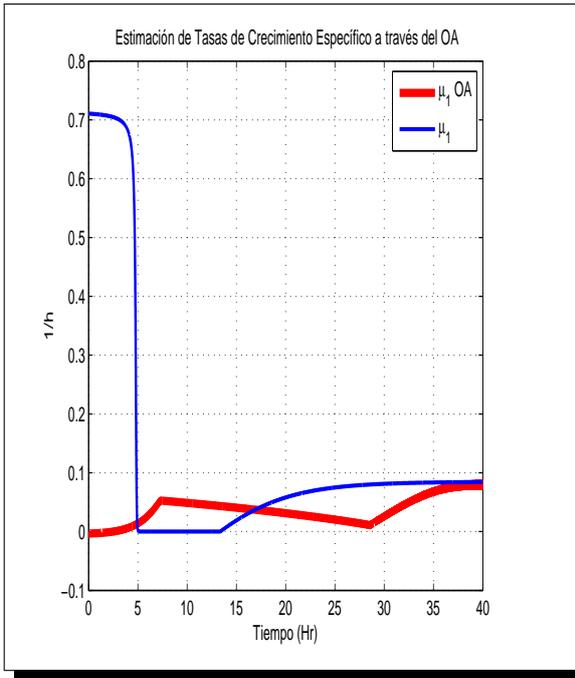
Los valores de las ganancias del controlador:

Tabla XIV. Valores de ganancias del controlador		
Ganancias	Caso ideal	Caso con ruido
$\lambda_{1OA}$	30	30
$\lambda_{2OA}$	30	30

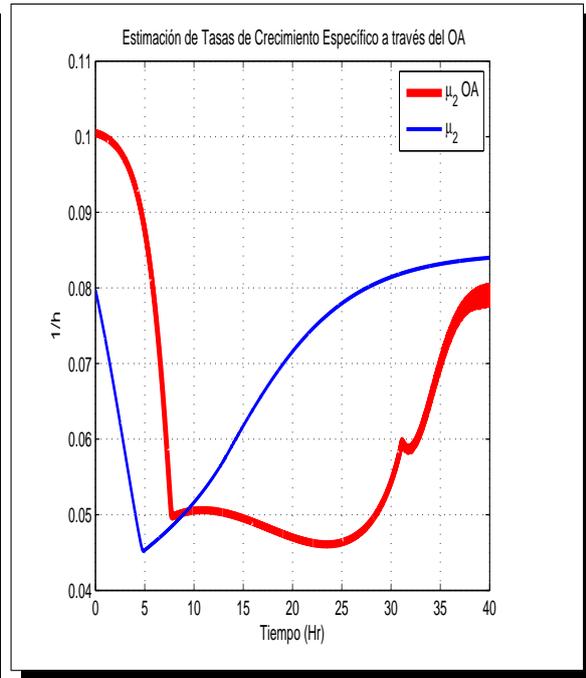
En la Figura 5.11 se presenta el estimado de las tasas de crecimiento específico a través de un estimador basado en un observador, la primera tasa  $\mu_1$  converge al final del proceso y la tasa  $\mu_2$  no llega a converger durante el mismo. En la Figura 5.12 se muestra la regulación del subproducto y su error de regulación, en este caso la regulación se logra prácticamente en las últimas horas del proceso y por tal razón el crecimiento de la biomasa (Figura 5.13.a) es deficiente comparado con el crecimiento de biomasa cuyo esquema de control tuvo como base de estimación el OSTG.

Debido a que el estimado de las tasas de crecimiento específico es deficiente al igual que la regulación de acetato, entonces la señal de control  $F$ , la concentración de substrato  $S$  y la concentración de substrato externo a la entrada del biorreactor  $S_{in}$  también lo son, como se puede ver en las Figuras 5.13.b y en la 5.14 respectivamente.

La misma situación que ocurre en el caso ideal ocurre en el caso con ruido, en el estimado de las tasas de crecimiento, una converge al final del proceso ( $\mu_1$ ) y la segunda ( $\mu_2$ ) no llega a converger durante el mismo (Figura 5.15), la regulación del subproducto se logra al final del proceso (Figura 5.16) y por lo tanto el crecimiento de la biomasa resulta pobre (Figura 5.17.a). Lo mismo pasa con la entrada de control, la concentración de substrato y la concentración de substrato externo en las Figuras 5.17.b y 5.18.

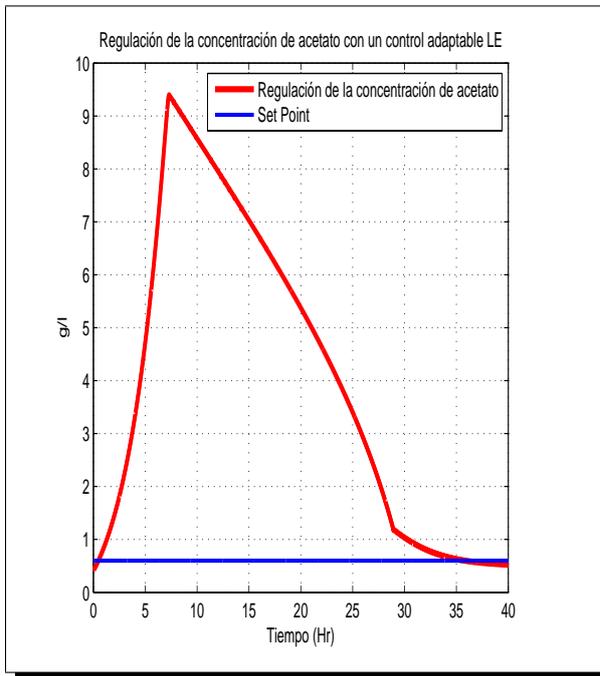


a)

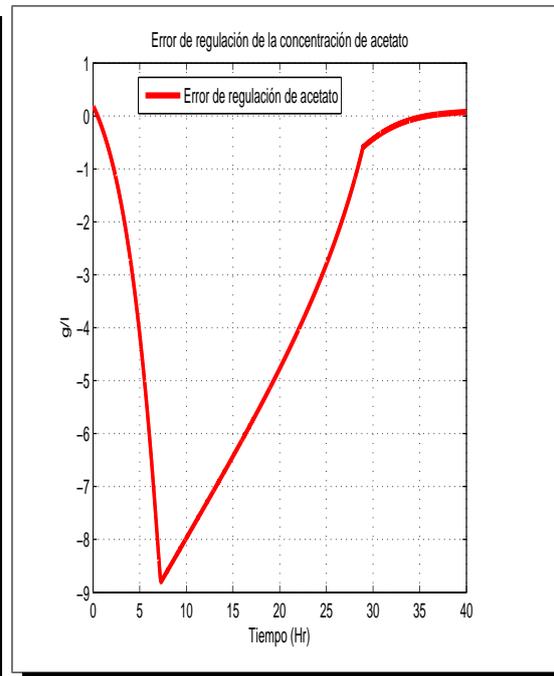


b)

Figura 5.11: a) Estimado de la tasa de crecimiento específico  $\mu_1$  debido a un control por LE con base en OA b) Estimado de la tasa de crecimiento específico  $\mu_2$  debido a un control por LE con base en OA

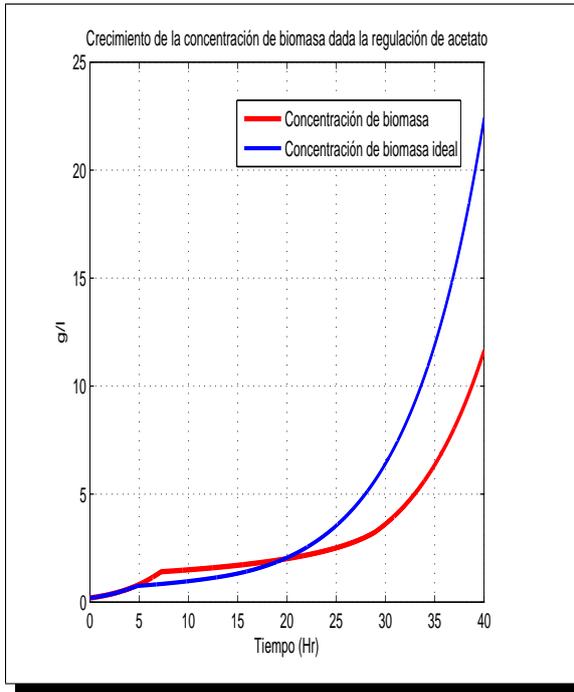


a)

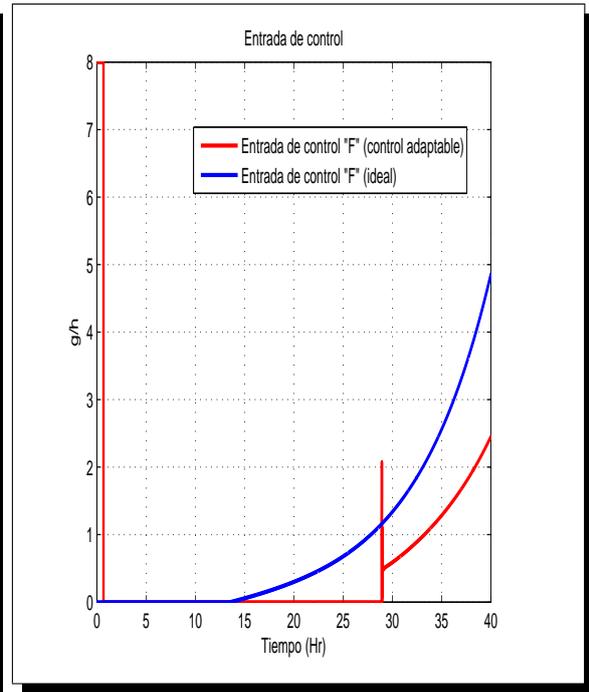


b)

Figura 5.12: a) Regulación de acetato a través de un control por linealización exacta entrada-salida con base en OA b) Error de regulación

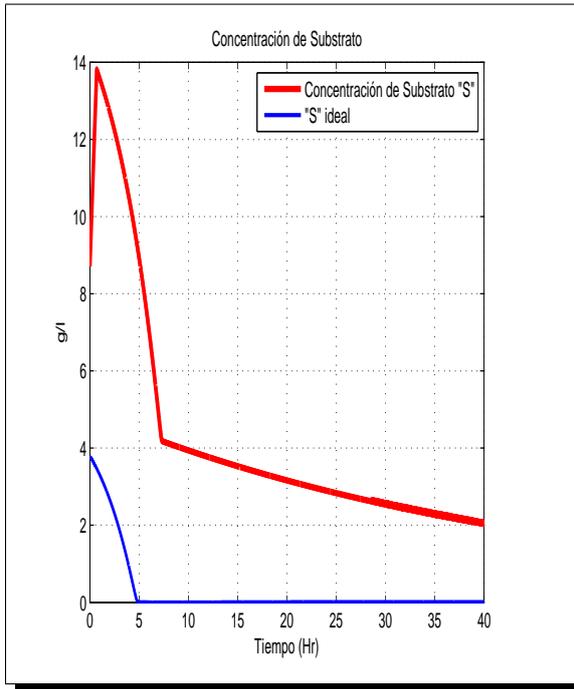


a)

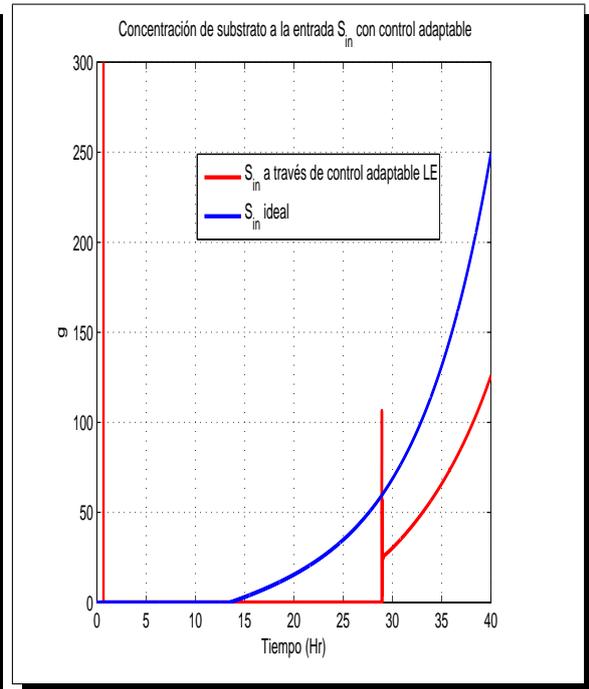


b)

Figura 5.13: a) Crecimiento de biomasa dada la regulación en  $P$  mediante un control por LE con base en OA b) Entrada de control  $F$



a)



b)

Figura 5.14: a) Concentración de substrato dada una entrada de control por LE con base en OA b) Concentración de substrato  $S_{in}$

## Regulación de acetato considerando ruido en la medición

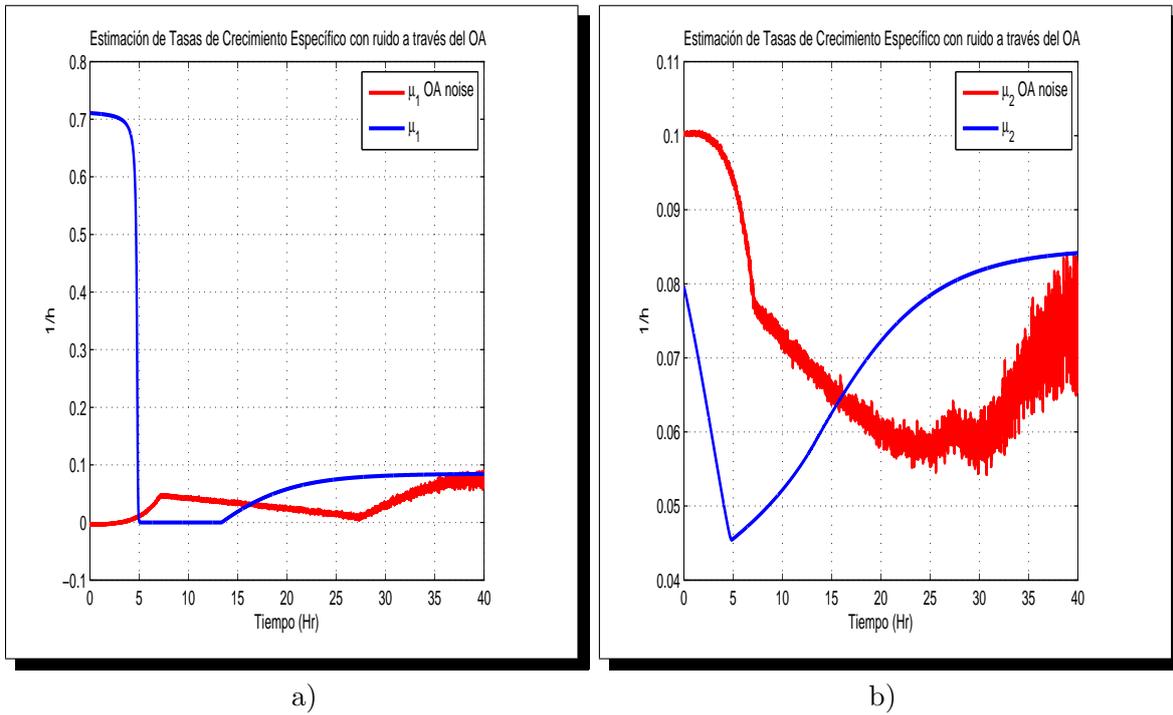


Figura 5.15: a)  $\mu_1$  con ruido debido a un control por LE entrada-salida con base en OA b)  $\mu_2$  con ruido debido a un control por LE entrada-salida con base en OA

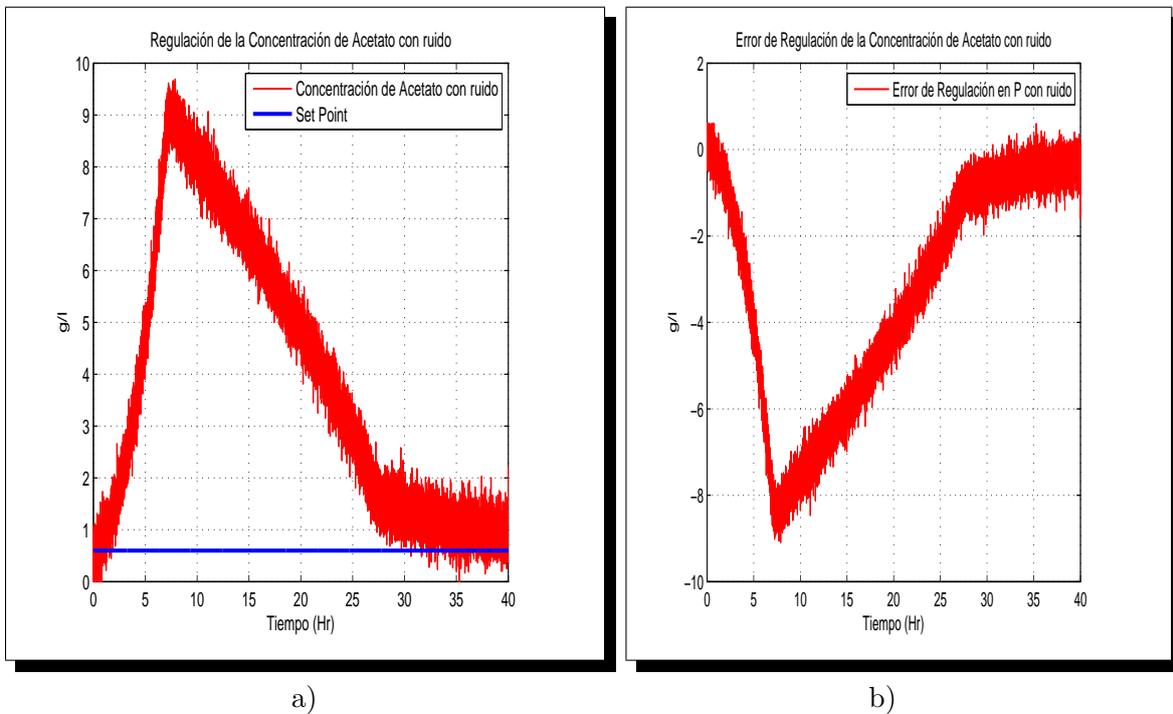
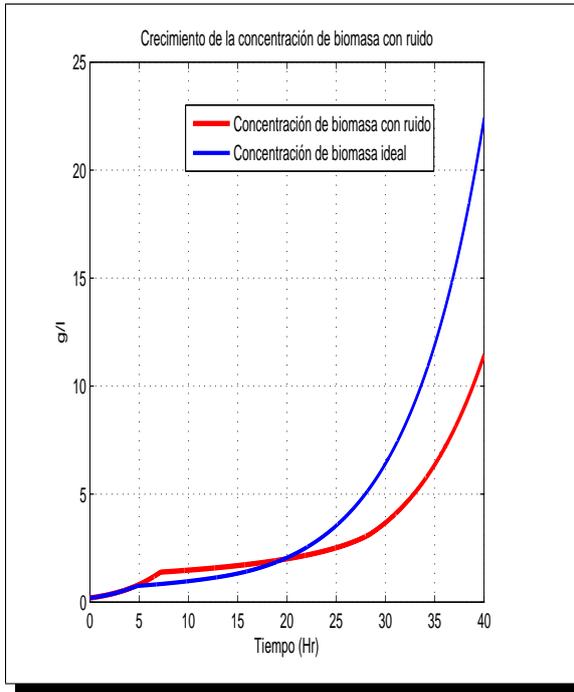
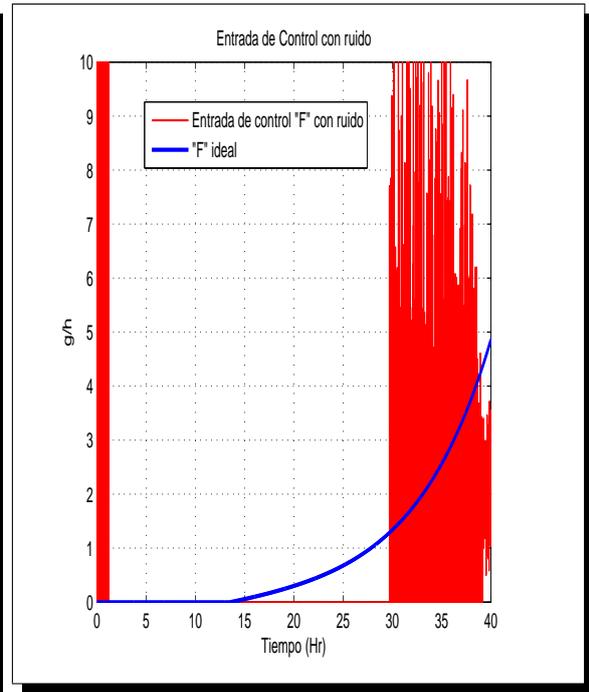


Figura 5.16: a) Regulación de acetato con ruido a través de un control por LE con base en OA b) Error de regulación

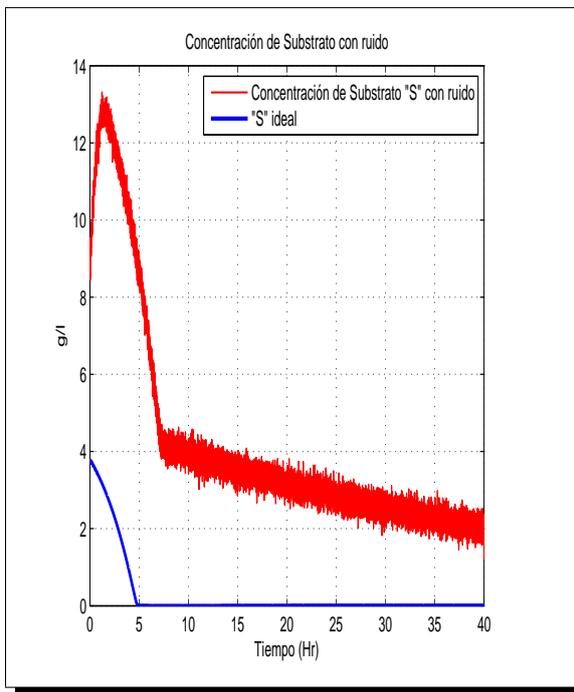


a)

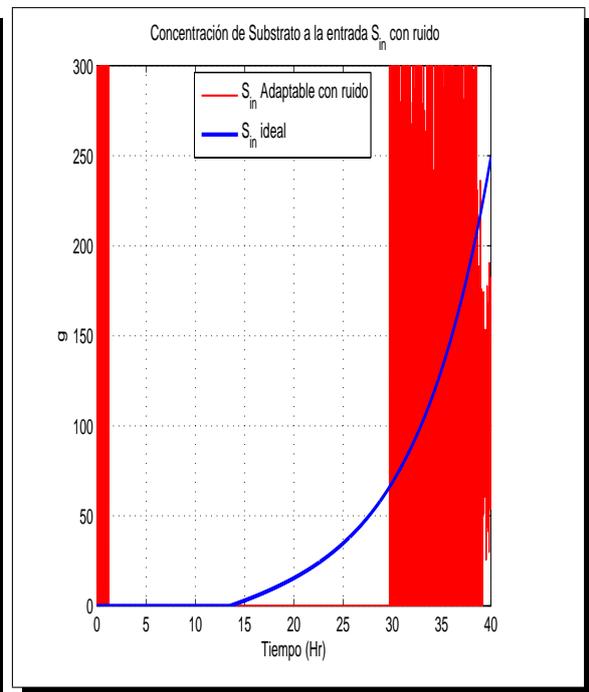


b)

Figura 5.17: a) Crecimiento de biomasa con ruido dada la regulación en  $P$  a través de un control por LE con base en OA b) Entrada de control  $F$  con ruido



a)



b)

Figura 5.18: a) Concentración de substrato con ruido debido a un control por LE con base en OA b) Substrato  $S_{in}$  con ruido

### 5.3. Regulación de acetato a través de un control cuasi-continuo por modos deslizantes con base en OSTG

El control por modos deslizantes (SMC *Sliding Mode Control* de sus siglas en inglés) continúa siendo una de las herramientas más robustas y efectivas para lidiar con fuertes condiciones de incertidumbre. En este apartado se plantea un esquema de control robusto por modos deslizantes con base en estimación mediante OSTG. Este observador es utilizado nuevamente para estimar en línea las tasas de reacción y posteriormente conocer los estados no medibles del proceso ( $S$  y  $P$ ) en combinación con una ley de control cuasi-continua por modos deslizantes que utiliza los estados estimados.

Sea  $s$  una variable de salida de un sistema dinámico SISO incierto y  $w(t)$  una entrada desconocida suave, ambas disponibles en tiempo real. La tarea principal es estabilizar y mantener  $\sigma = s - w(t) = 0$ . El control por modos deslizantes estandar  $u = -k \text{sign}(\sigma)$  se aplica si el grado relativo del sistema es 1, es decir  $\dot{\sigma}$  depende explícitamente del control  $u$ . Los modos deslizantes de alto orden (HOSM) se utilizan para controlar sistemas inciertos SISO de grados relativos arbitrarios. La correspondiente convergencia en tiempo finito de estos controladores requiere en realidad sólo del conocimiento del grado relativo  $r$  del sistema (*r-sliding* controllers). El control producido es una función discontinua del error de seguimiento  $\sigma$  y de sus derivadas sucesivas calculadas en tiempo real  $\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ .

El modo deslizante estandar utilizado en la mayoría de los sistemas de estructura variable, es el de primer orden ( $\sigma$  es continua y  $\dot{\sigma}$  es discontinua).

Considere un sistema dinámico de la forma:

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u, \sigma = \sigma(t, x)$$

Donde  $x \in R^n$ ,  $a, b$  y  $\sigma: R^{n+1} \rightarrow R$  son funciones suaves desconocidas,  $u \in R$  es también incierta. La tarea es proveer en tiempo finito el mantenimiento de  $\sigma \equiv 0$ . El grado relativo del sistema se asume constante y conocido, en otras palabras; la primera vez en que el control aparece en la derivada total  $r$  de  $\sigma$

$$\sigma^{(r)} = h(t, x) + g(t, x)u$$

Donde  $h(t, x) = \sigma^{(r)}|_{u=0}$ ,  $g(t, x) = \frac{\partial}{\partial u} \sigma^{(r)} \neq 0$ , son algunas funciones desconocidas y se supone que para alguna  $K_m, K_M, C > 0$

$$0 < K_m \leq \frac{\partial}{\partial u} \sigma^{(r)} \leq K_M, |\sigma^{(r)}|_{u=0} \leq C$$

Los controladores “cuasi-continuos” dan un control continuo para cualquier lugar excepto para el conjunto  $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ . Específicamente para este problema nos enfocaremos al control de segundo orden (Levant, 2005) :

$$u = \frac{-\alpha(\dot{\sigma} + \beta|\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma))}{(|\dot{\sigma}| + \beta|\sigma|^{1/2})} \quad (5.23)$$

### 5.3.1. Simulaciones

Debido a que se quiere regular el subproducto se define a  $\sigma$  como:

$$\begin{aligned}\sigma &= P_{OSTG} - P_{ref} \\ \dot{\sigma} &= \frac{dP_{OSTG}}{dt}\end{aligned}$$

Entonces el control queda definido:

$$F = \frac{-\alpha(\dot{\sigma} + \beta|\sigma|^{1/2}sign(\sigma))}{(|\dot{\sigma}| + \beta|\sigma|^{1/2})} \quad (5.24)$$

Donde  $\alpha = C$ ,  $\dot{\sigma} \in [-C, C]$  y  $\beta$  es un parámetro que nos permite mejorar la velocidad de convergencia. Los valores de los parámetros del sistema pueden verse en la Tabla X y los valores de las ganancias del observador se muestran a continuación:

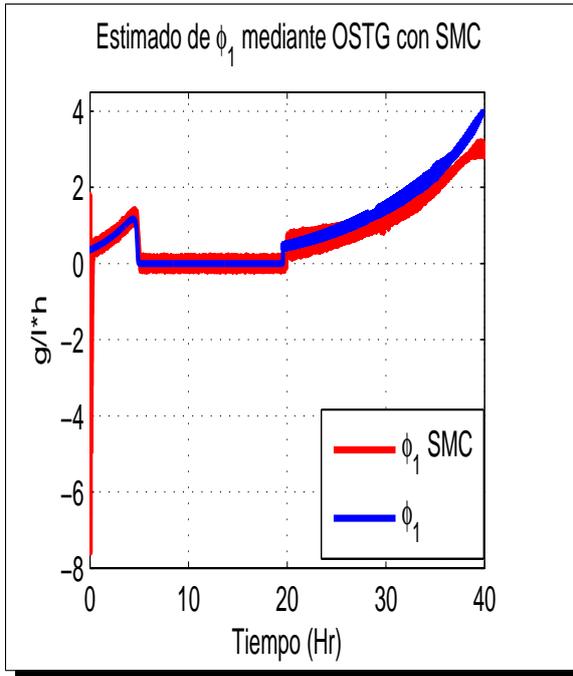
Parámetro	Caso ideal	Caso con ruido
$l_{1X}$	35	21
$l_{2X}$	2	0.7
$l_{1O}$	10	9
$l_{2O}$	1	0.7
$m_{1X}$	6	5
$m_{2X}$	6	5
$m_{1O}$	9	7
$m_{2O}$	9	7

Los valores de las ganancias del controlador son:

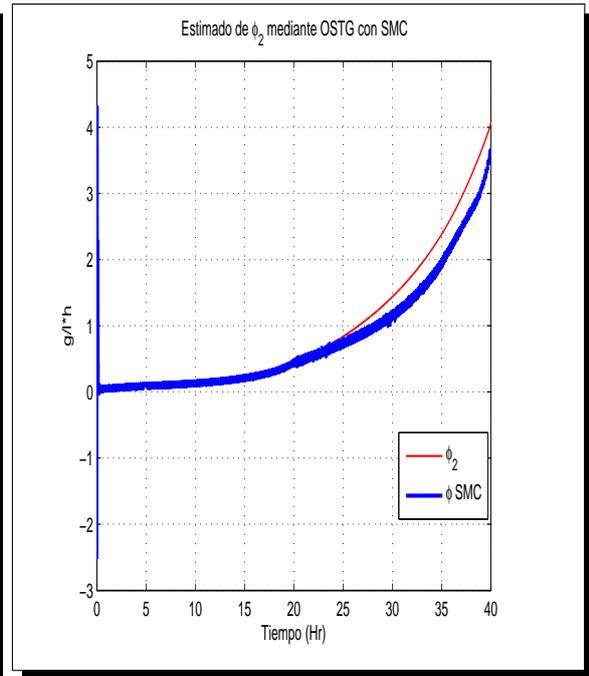
Ganancias	Caso ideal	Caso con ruido
$\alpha$	3	3
$\beta$	3	2

En la Figura 5.19 se observa el estimado de las tasas de reacción  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , teniendo un buen resultado. En la Figura 5.20 se muestra la regulación de acetato y su respectivo error de regulación, en esta grafica se aprecia el buen desempeño de este control debido a que el acetato es regulado al valor deseado en un tiempo mucho menor comparado con las estrategias de control antes realizadas (para el caso ideal) y el error de regulación tiende a cero en tiempo finito. Como consecuencia de la regulación eficiente de acetato, el crecimiento exponencial de biomasa (Figura 5.21.a) es mayor que en los casos anteriores. En la Figura 5.22.b se expresa la cantidad de substrato  $S_{in}$  suministrada al sistema.

En las simulaciones con presencia de ruido, el estimado de las tasas de reacción (Figura 5.23) no es tan eficiente como en el caso ideal, la regulación del subproducto (Figura 5.24) no se lleva a cabo de manera correcta y por ende decae el crecimiento de la concentración de microorganismos (Figura 5.25.a). Esta situación provoca que se tenga el mejor desempeño (respecto al crecimiento microbiano) con el esquema de control por linealización exacta con base en OSTG para el caso con ruido y la mejor respuesta con el esquema de control por modos deslizantes con base en OSTG para el caso ideal.

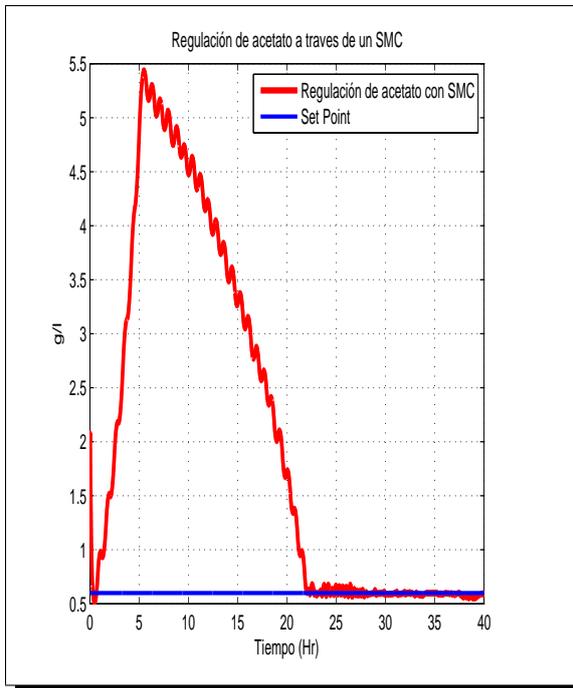


a)

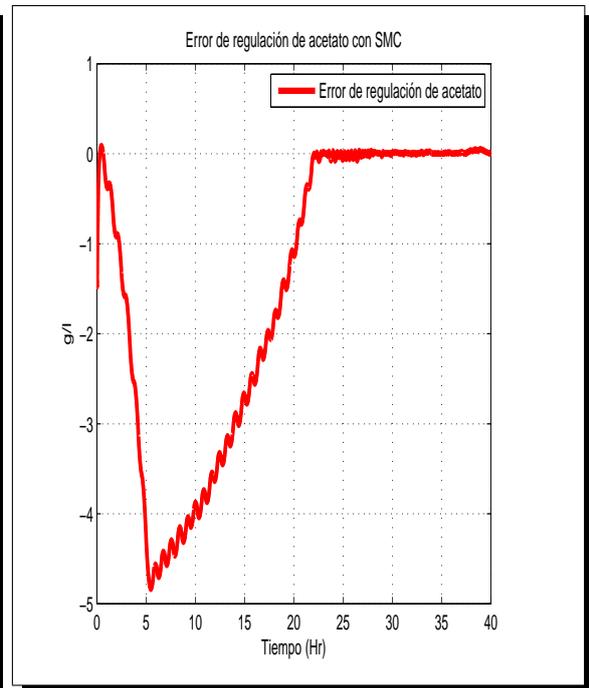


b)

Figura 5.19: a) Estimado de  $\varphi_1$  mediante OSTG dada una entrada de control por modos deslizantes b) Estimado de  $\varphi_2$  mediante OSTG dada una entrada de control por modos deslizantes



a)



b)

Figura 5.20: a) Regulación de acetato a través de un SMC con base en estimación mediante OSTG b) Error de regulación

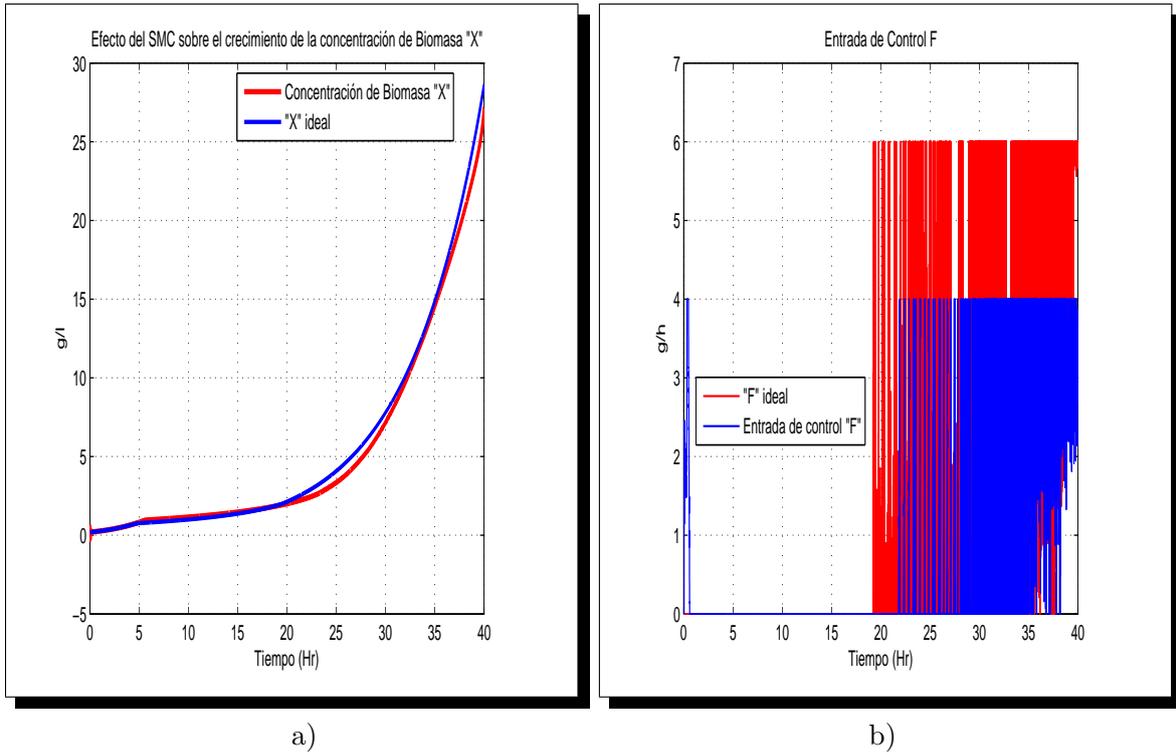


Figura 5.21: a) Crecimiento de biomasa regulando  $P$  mediante SMC b) Entrada de control  $F$

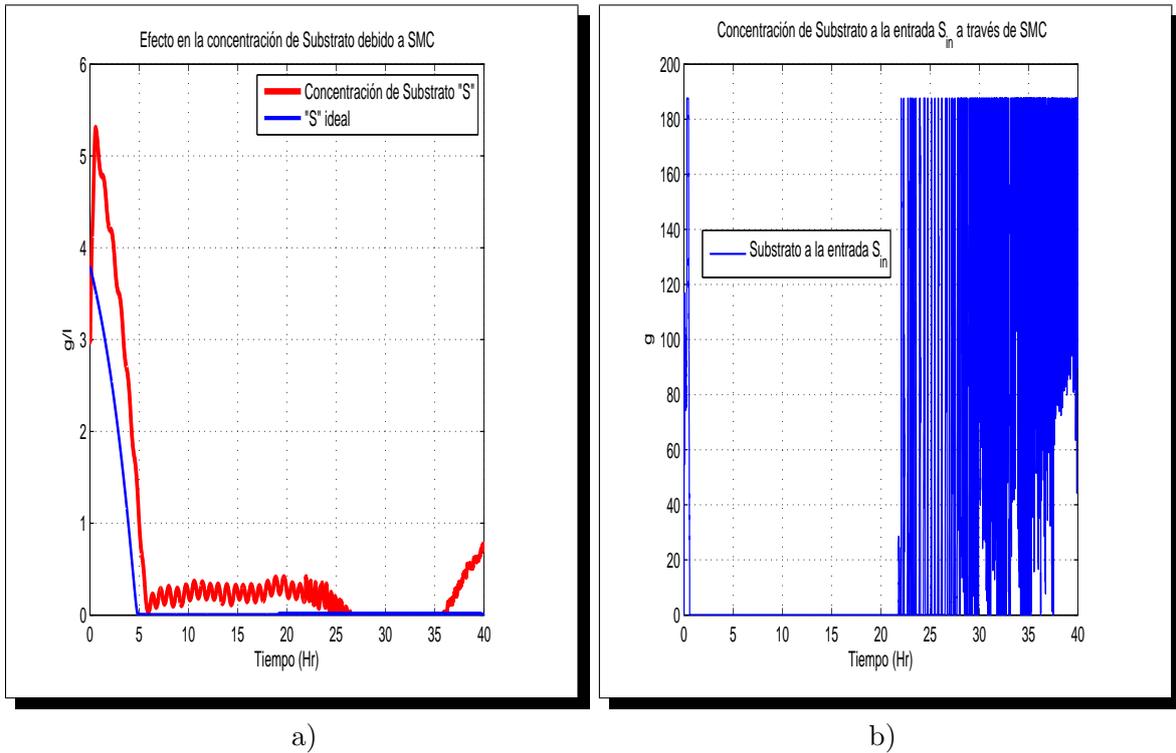


Figura 5.22: a) Concentración de substrato debido a un SMC con base en estimación mediante OSTG b) Concentración de substrato a la entrada  $S_{in}$

## Regulación de acetato considerando ruido en la medición

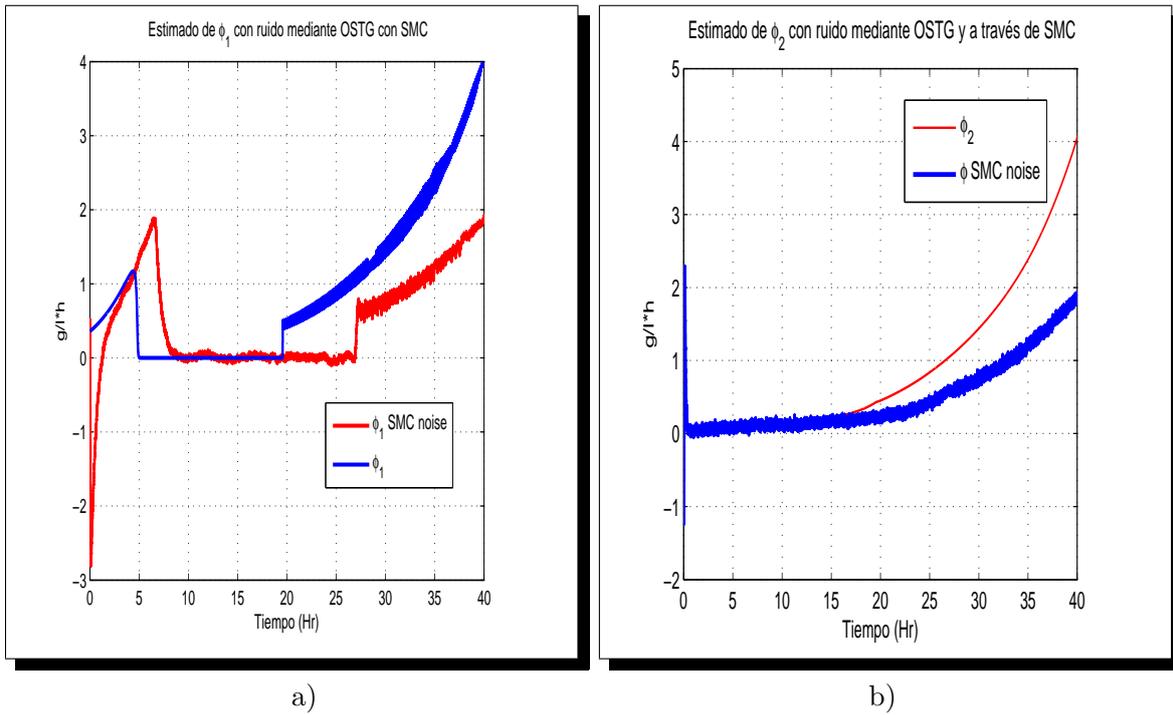


Figura 5.23: a) Estimado de  $\varphi_1$  mediante OSTG con ruido dada una entrada por SMC b) Estimado de  $\varphi_2$  mediante OSTG con ruido dada una entrada por SMC

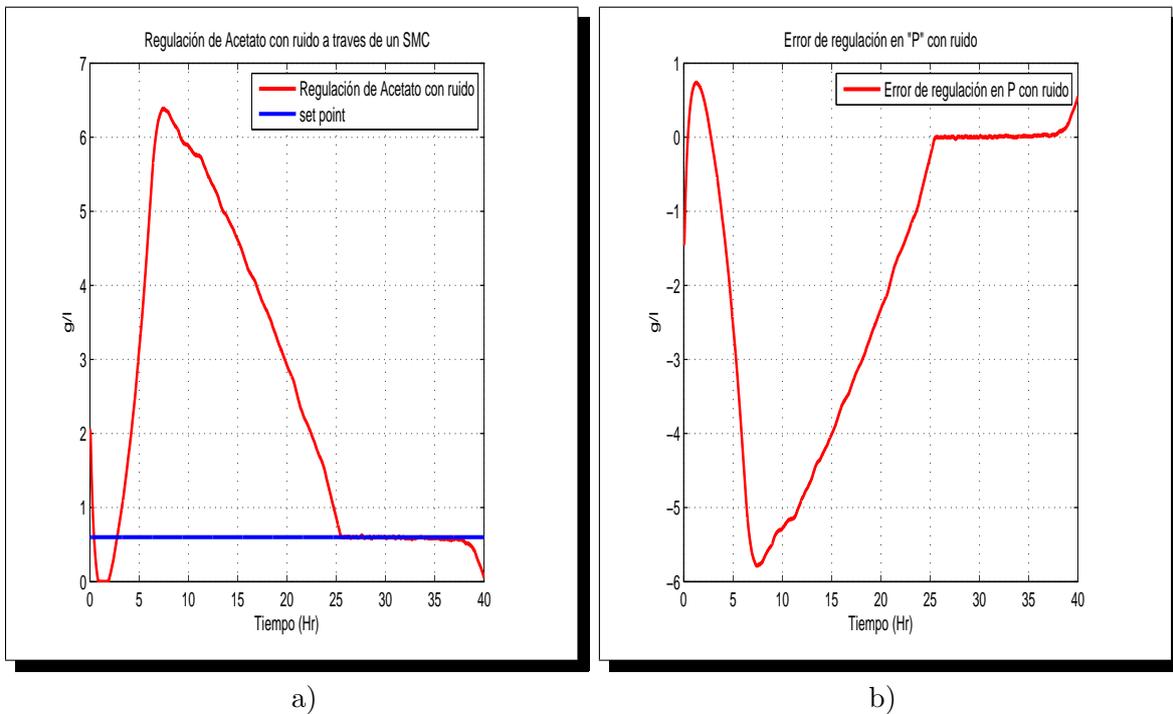
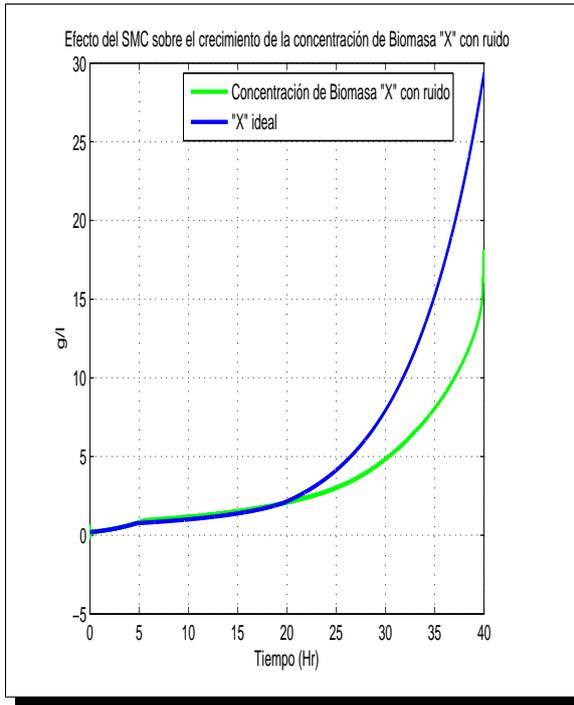
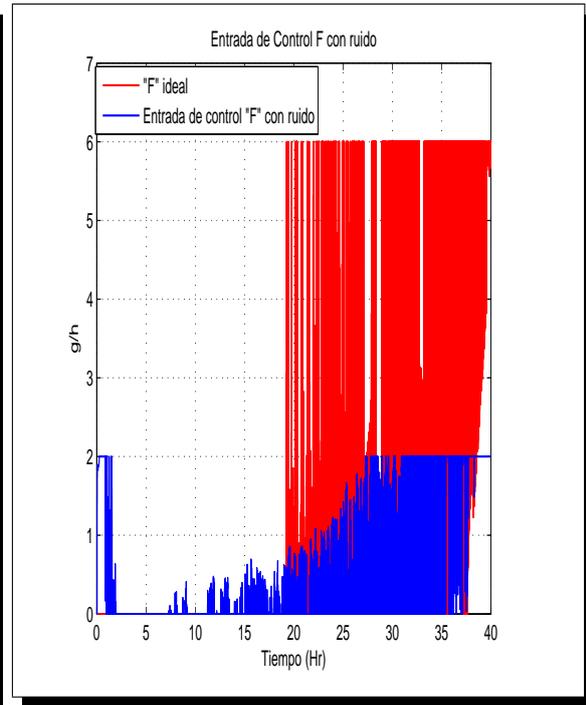


Figura 5.24: a) Regulación de acetato con ruido a través de un SMC y con base en estimación mediante OSTG b) Error de regulación con ruido

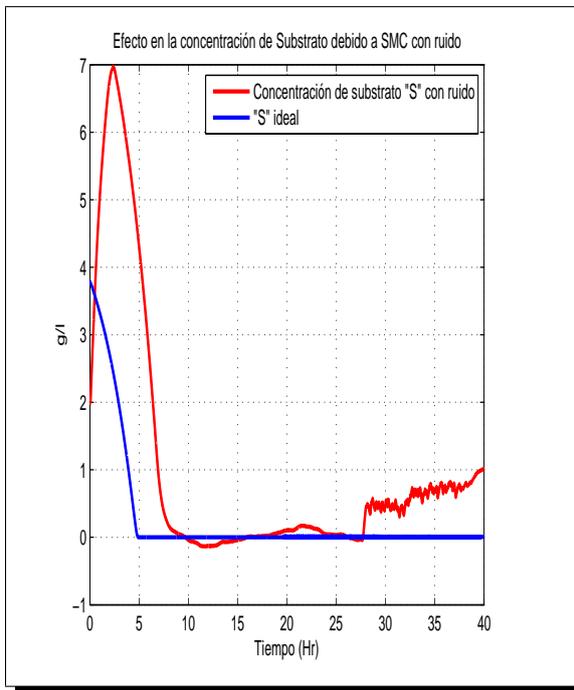


a)

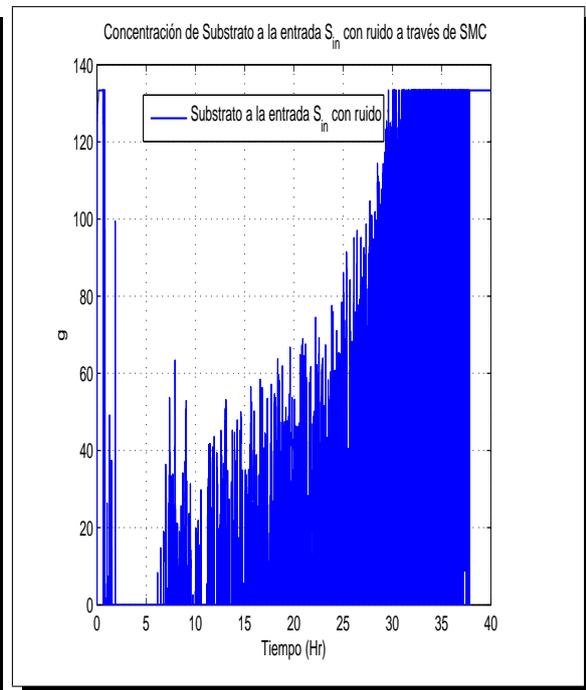


b)

Figura 5.25: a) Crecimiento de biomasa con ruido regulando  $P$  a través de un SMC b) Entrada de control  $F$  con ruido



a)



b)

Figura 5.26: a) Concentración de substrato con ruido debido a un SMC con base en estimación mediante OSTG b) Concentración de substrato a la entrada  $S_{in}$  con ruido

## 5.4. Resultados

Para los esquemas de control utilizados durante este capítulo con base en los diversos esquemas de observación se tienen los siguientes resultados:

- A continuación, en las siguientes figuras se presentan las gráficas que contienen los resultados finales sobre la regulación del acetato y el crecimiento de la concentración de microorganismos debido a los diferentes esquemas de control diseñados, tanto para el caso ideal como para el caso con presencia de ruido en las mediciones.

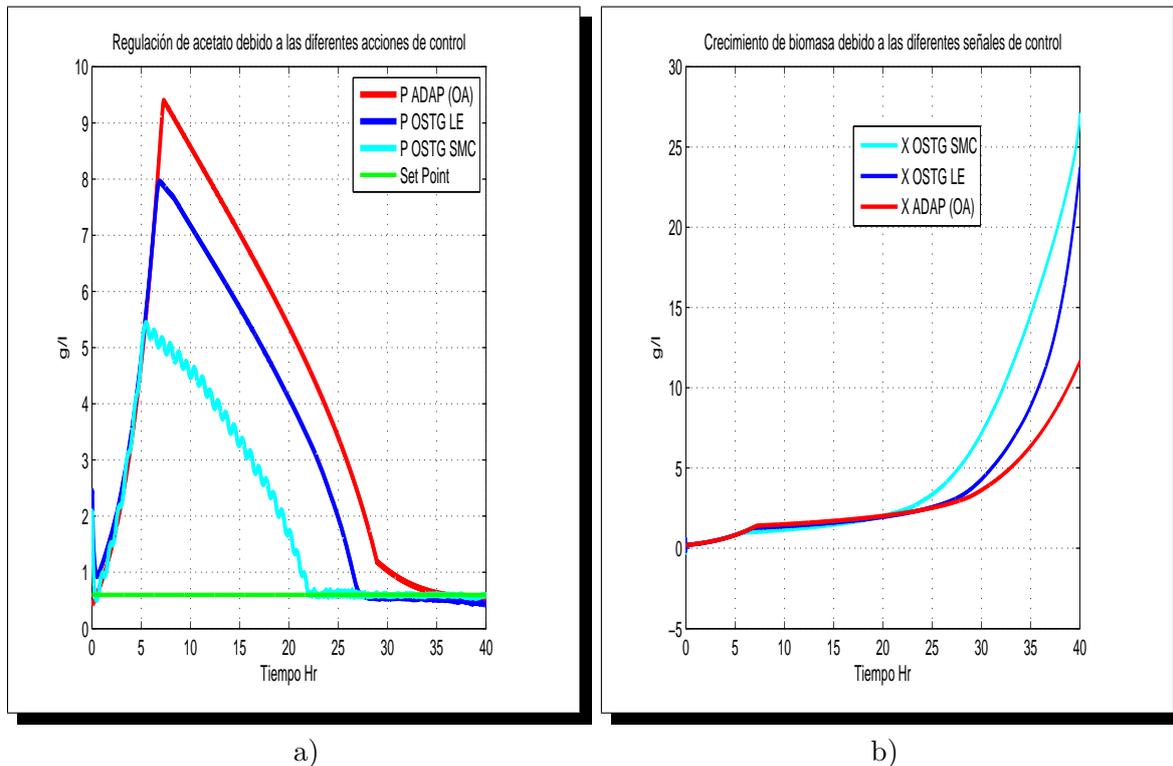


Figura 5.27: a) Regulación de acetato a través de las diferentes estrategias de control y estimación b) Crecimiento de biomasa debido a la regulación del subproducto

- Para las gráficas correspondientes a las condiciones ideales de operación (Figura 5.27) se nota claramente que el mejor desempeño en cuanto a la regulación del subproducto y que permite un mayor crecimiento (exponencial) de biomasa, lo genera el esquema de control cuasi-continuo por modos deslizantes con base en estimación mediante OSTG, seguido del esquema de control por linealización exacta entrada-salida cuya base de estimación fue también por OSTG y al final el esquema de control adaptable por linealización entrada-salida con base de estimación mediante OA y estimador de tasas de crecimiento específico.
- En particular para los resultados del caso ideal, se infiere que los controles cuya base de estimación es a través del OSTG resultan más eficientes (referente al crecimiento de biomasa y regulación del subproducto) que los que se basan en observadores asintóticos y estimadores de tasas de crecimiento como los utilizados en (Bastin y Dochain, 1990).
- Siguiendo con las gráficas, la Figura 5.28 muestra las condiciones de operación del sistema ante perturbaciones y en este caso dichas perturbaciones se refieren a ruido en las mediciones. A diferencia del caso ideal, en esta condición de operación y basándose en

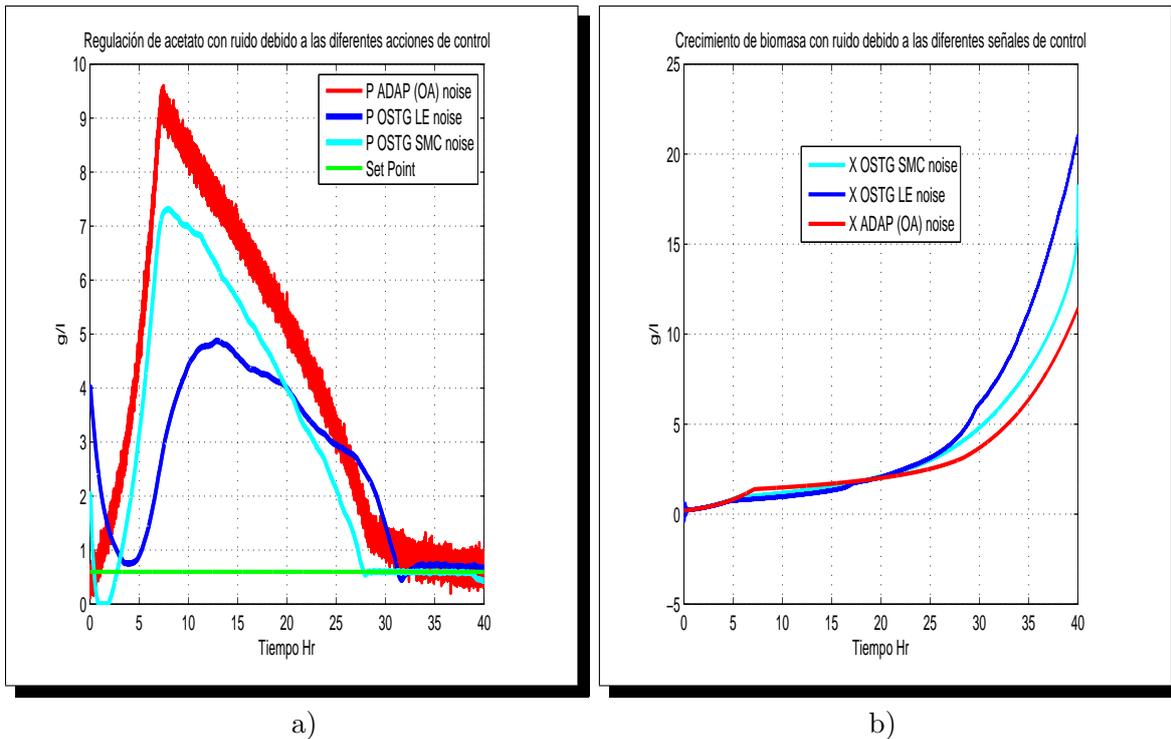


Figura 5.28: a) Regulación de acetato con ruido a través de las diferentes estrategias de control y estimación b) Crecimiento de biomasa con ruido debido a la regulación del subproducto

el resultado proporcionado por dichas gráficas, se obtiene el mejor desempeño tanto en regulación del subproducto como en el crecimiento de microorganismos con el control por linealización exacta entrada-salida con base de estimación a través del OSTG, seguido del control cuasi-continuo por modos deslizantes con base de estimación también por OSTG y al último el control adaptable por linealización exacta con base de estimación a través de OA y estimador de tasas de crecimiento específico.

- En el caso con ruido, el control más robusto ante perturbaciones resultó ser el control por linealización exacta y el menos robusto fue el control por modos deslizantes, debido a que el crecimiento de biomasa en éste decayo drásticamente.
- Según los datos obtenidos para el caso perturbado y comparandolos con los resultados dados en (Dewasme, 2011), en donde en este ultimo se aplica un esquema de observación basado en filtro de Kalman extendido y no hay detalles sobre el control utilizado. El crecimiento de la concentración de microorganismos mediante el control por linealización exacta y cuya base de estimación es mediante el OSTG llega aproximadamente a 20.5  $g/l$ , en el control por modos deslizantes este crecimiento llega aproximadamente a 18  $g/l$  mientras que el crecimiento en (Dewasme, 2011) llega aproximadamente a 18  $g/l$ .
- Esta ultima comparación resulta satisfactoria debido a que se obtiene un mejor resultado en cuanto al crecimiento de la bacteria *E. coli* con un esquema de control por linealización exacta y un resultado similar con el control por modos deslizantes y ambos basados en OSTG, lo que abre la posibilidad de considerar, introducir e implementar estos observadores al control de procesos biológicos.



---

## Conclusiones y perspectivas futuras

---

### 6.1. Conclusiones

La finalidad de este trabajo fue diseñar estrategias de control a un proceso biológico de crecimiento microbiano con base a una estimación robusta a través de observadores por modos deslizantes, específicamente utilizando el observador super-twisting generalizado. Además se realizaron comparaciones (en la parte de observación de estados y estimación de parámetros del capítulo 4) con el desempeño de otros observadores lineales como observadores asintóticos, filtro de Kalman y observadores de alta ganancia. Las conclusiones de esta tesis fueron:

- El esquema completo de observación y control ofrece una amplia posibilidad de mejorar la respuesta del sistema, debido a que existen muchos grados de libertad lo que en cierta forma es contraproducente debido a que la combinación de ganancias del esquema de observación y las del esquema del control resulta ser considerable y el sintonizarlas genera algunas complicaciones.
- El sistema dinámico general en variables de estado para crecimiento bacteriano (*E.coli*) dado en (Rocha, 2003) puede ser reducido a un modelo brindado en (Dewasme, 2011) con resultados similares, sólo considerando las concentraciones que intervienen directamente en el proceso, haciendo más sencillos los diseños del observador y del control.
- En las simulaciones para los casos ideales, el esquema completo funciona de manera correcta sin problema alguno y la sintonización de las ganancias resulta sencilla de alguna manera. Las complicaciones surgen cuando se considera presencia de ruido en mediciones debido a que la naturaleza altamente no lineal del sistema y su alta sensibilidad hace que todo el conjunto de ganancias tengan que ser calibradas nuevamente hasta lograr una buena respuesta, tarea muy complicada ya que el esquema ofrece una alta “flexibilidad”.
- La parte del análisis detallado sobre el diseño del OSTG se puede ver en (Mendoza, 2011) cuyo trabajo de tesis se basó en aplicar estos observadores para estimar las tasas de reacción en bioprocesos y en donde se brinda una forma sistemática de aplicar el algoritmo para cualquier sistema biológico siempre que se cumplan las condiciones necesarias. En este trabajo sólo se retomó el algoritmo (sin entrar en detalles sobre el mismo) y se aplicó al sistema para posteriormente y a diferencia del trabajo de (Mendoza, 2011) diseñar técnicas de control para procesos biológicos.
- Este trabajo tuvo como objetivo principal demostrar en simulación que la eficiencia (respecto al crecimiento microbiano) de las leyes de control utilizadas tomando como base

de estimación a los observadores super-twisting, es superior a las técnicas de control cuyo esquema de estimación se basa comúnmente en observadores lineales, lo que brinda al usuario una novedosa herramienta de diseño y le permita atacar este problema para estos sistemas biológicos.

## 6.2. Contribuciones

Las contribuciones principales de esta tesis son:

- Se ha diseñado un esquema de control por retroalimentación de salida, teniendo como base de estimación un observador super-twisting y un controlador que utiliza los estados y parámetros estimados.
- Mostrar a través de simulaciones que las estrategias de control convencionales (linealización exacta, control por modos deslizantes, etc.) logran mejores resultados basándose en un esquema de observación particularmente para este trabajo en un OSTG.
- Los resultados obtenidos dejan ver que la eficiencia en las leyes de control utilizando observadores por modos deslizantes es de gran importancia debido a que las mismas estrategias de control pero con observadores lineales (comúnmente utilizados en bioprocesos, OA, EFK, OAG, etc.) no tienen una mejor respuesta que la que tiene una ley de control basada en un OSTG. La eficiencia de las estrategias utilizadas en base a un OSTG se refleja tanto en el caso ideal como el caso con ruido.
- Este esquema de control tiene la ventaja de que sólo se requiere medir la concentración de microorganismos y del subproducto, y que si éste último no se puede medir, al menos se puede estimar.
- Se plantea un nuevo y completo esquema de observación y control para procesos biológicos con resultados eficientes para crecimiento microbiano.

## 6.3. Perspectivas futuras

Para facilitar el diseño del esquema planteado a lo largo de este trabajo existen aspectos importantes a mejorar y se enuncian a continuación:

- Tratar de encontrar un algoritmo o una forma sistemática de sintonizar o simplificar el número de ganancias en un esquema completo debido a que se vuelve complicado buscar valores de combinaciones que den un resultado satisfactorio y más aún cuando se trata del caso en que existe ruido en la medición ya que el sistema para cualquier variación por pequeña que ésta sea se vuelve muy sensible y se necesitan calibrar todas las ganancias nuevamente.
- Aplicar y validar estos esquemas basados en observadores super-twisting a diferentes procesos biológicos tales como procesos de fermentación, tratamiento de aguas residuales, etc.
- Dada la base teórica que se ha venido generando, implementar algún esquema de control a un proceso biológico real. Actualmente se continúan empleando y controlando procesos biológicos de manera estadística con tablas en donde se especifican las actividades a realizar durante el desarrollo del proceso.
- A falta de sensores en el mercado, tratar de implementar un sensor por software basado en observadores super-twisting para después aplicar estrategias de control.

---

## Apéndice I

---

### El Filtro de Kalman Extendido EKF

En esta sección se presenta la metodología de diseño del filtro de Kalman extendido (debido a que en el capítulo 4 fue utilizado y diseñado a fin de comparar su desempeño con un OSTG y un observador de alta ganancia).

Este filtro es considerado como la herramienta de estimación de estados más popular en el monitoreo de procesos biológicos (Gelb, 1974) y tiene dos características principales que explican el éxito que ha tenido dentro de la ingeniería de control. En primer lugar, es un método robusto frente al ruido en las mediciones y las imperfecciones en el modelado. En segundo lugar, las estimaciones del filtro de Kalman son estadísticamente óptimas con respecto a cualquier función cuadrática de estimación. Además es un algoritmo eficiente y sencillo de implementar, ya que es recursivo y no requiere almacenar y volver a procesar los datos de pasos anteriores (Vidal, 2006).

El filtro de Kalman es un conjunto de ecuaciones matemáticas que proporciona una forma eficiente de estimar el estado de un proceso minimizando la media del error cuadrático. Es usado para sistemas no lineales y se basa en una linealización de primer orden del modelo del sistema a lo largo de la trayectoria deseada. El algoritmo de diseño consta de los siguientes pasos:

- Considere las siguientes ecuaciones que describen a un sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), t) + w(t) \\ y(t) &= h(x(t), t) + v(t)\end{aligned}$$

Donde  $f$  y  $h$  son las funciones no lineales que relacionan las derivadas del estado con las salidas del propio estado, las señales  $w(t)$  representan las perturbaciones del sistema y  $v(t)$  representan el ruido en las mediciones

- Las matrices  $F$  y  $H$  representan las Jacobianas de  $f$  y  $h$  respecto al estado y evaluada en el punto de operación donde se encuentre el sistema:

$$\begin{aligned}F(t) &= \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x(t)} \\ H(t) &= \frac{\partial h(x(t), t)}{\partial x(t)}\end{aligned}$$

- Las ecuaciones del filtro de Kalman son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 K(t) &= P(t)H^T R^{-1} \\
 \dot{\hat{x}}(t) &= f(x(t), t) + K(t)(y(t) - h(\hat{x}(t), t)) \\
 \dot{P}(t) &= F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + Q - K(t)H(t)P(t)
 \end{aligned}$$

donde,  $Q$  representa la matriz de covarianza de ruido del proceso,  $R$  corresponde a la matriz de covarianza de ruido en la medición,  $P$  representa la matriz de covarianza del error de estimación y  $K$  son las ganancias del filtro.

El filtro de Kalman estima el estado de un sistema usando un bucle de control: se estiman  $x$  y  $P$  por medio del modelo matemático del sistema, utilizando los valores en el instante anterior de  $x$  y  $P$  y el valor de  $Q$ , y esta estimación se corrige teniendo en cuenta el valor de las medidas  $y$  y  $R$ .

Para que el filtro de Kalman pueda funcionar hay que proporcionarle el vector de las matrices  $R$  y  $Q$ , y condiciones iniciales para el vector de estado y para la estimación de la matriz del error  $P$ .

En general, es posible conocer un valor bastante aproximado de la matriz de covarianza del ruido de la medida  $R$ , porque de la misma forma que se toman medidas durante el funcionamiento del filtro, es posible tomar algunas medidas fuera de línea y estudiarlas para determinar la covarianza del ruido de las medidas.

---

## Apéndice II

---

### Caso particular de estudio: regulación de la concentración de sustrato

Debido a que existen 2 alternativas de control que permiten el crecimiento de biomasa y dado que durante el trabajo se enfocó a la regulación del acetato directamente, en este apartado se tiene como objetivo regular la concentración de sustrato a un nivel muy bajo (umbral) para así mantener también la concentración del subproducto a un nivel bajo y por consiguiente generar un crecimiento en la concentración de microorganismos.

Considerando el sistema en variables de estado que describe el comportamiento dinámico del cultivo de *E. coli*:

$$\dot{X} = (k_{X1} - k_{X2})\varphi_2 + k_{X2}\varphi_1 - DX \quad (6.1)$$

$$\dot{S} = -\varphi_1 - DS + F \quad (6.2)$$

$$\dot{P} = k_{P2}\varphi_1 - k_{P2}\varphi_2 - DP \quad (6.3)$$

Tomemos en cuenta que los estados  $S$ ,  $P$  y las tasas de reacción  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  se consideran conocidas debido a que han sido estimadas a través de un OSTG (Moreno, 2011).

Ahora tomando en cuenta la dinámica del estado que se quiere regular y siguiendo los pasos en el diseño del control por linealización exacta se tiene:

$$\dot{S} = -\varphi_1 - DS + F$$

Notese que la ecuación (6.2) es un modelo entrada-salida y cumple con:

- Grado relativo  $\delta = 1$
- Se propone un modelo de referencia de primer orden de la siguiente forma:

$$\frac{d(S^* - S)}{dt} + \lambda_1(S^* - S) = 0$$

Pero como la derivada de  $S^*$  es cero debido a que es constante entonces:

$$\lambda_1(S^* - S) = \frac{dS}{dt}$$

entonces igualando esta expresión con la ecuación (6.2) tenemos:

$$\lambda_1(S^* - S) = -\varphi_1 - DS + F$$

- Entonces la ley de control a través de la tasa de alimentación  $F$  es:

$$F = \lambda_1(S^* - S) + \varphi_1 + DS$$

## Simulaciones

Los parámetros del sistema estan dados en la Tabla X. Los valores de los parametros del OSTG se presentan a continuación:

Parámetro	Caso ideal
$l_{1X}$	21
$l_{2X}$	0.5
$l_{1O}$	8
$l_{2O}$	1
$m_{1X}$	5
$m_{2X}$	5
$m_{1O}$	7
$m_{2O}$	7
$S^*$	0.01 g/l

En la Figura 6.1 se observa la regulación del sustrato al valor deseado (.01 g/l) y sin más preámbulo, para este apéndice se puede concluir analizando la Figura 6.2.b que el crecimiento de la concentración de biomasa es mucho menor al crecimiento que se logra regulando directamente la concentración del acetato considerando el caso nominal, por lo que debido a estos resultados ya no se presenta el caso con ruido en la medición.

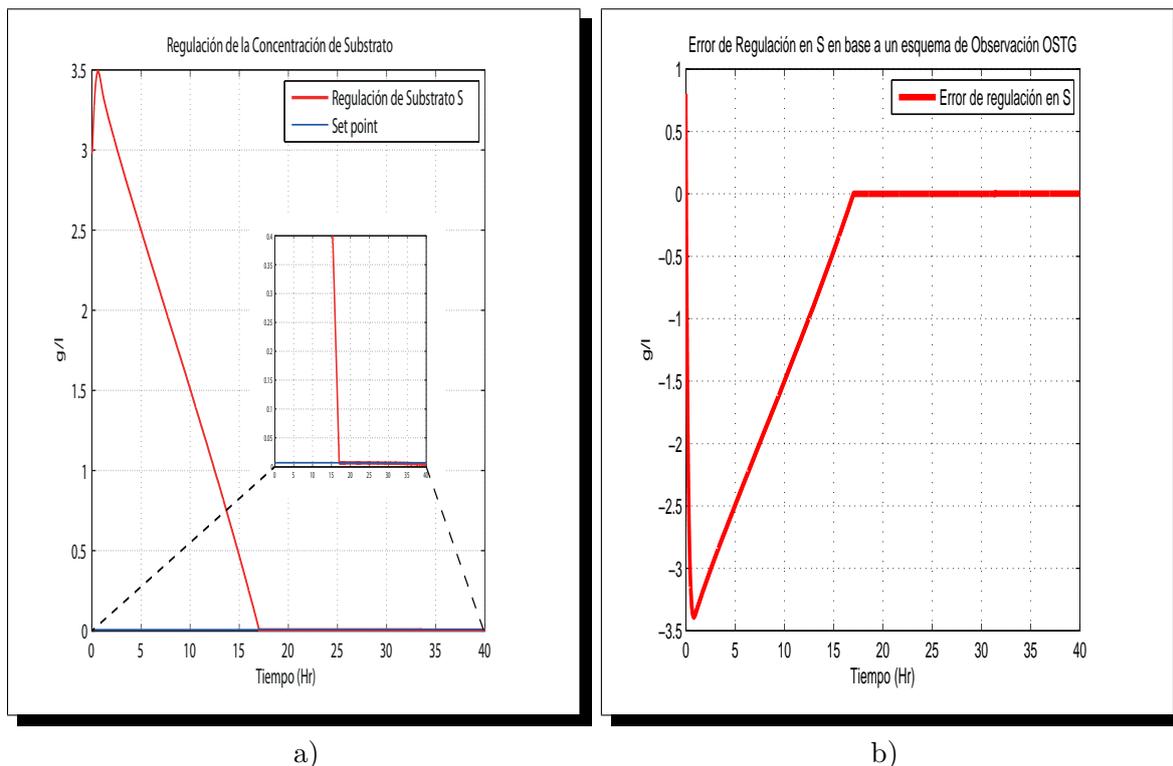
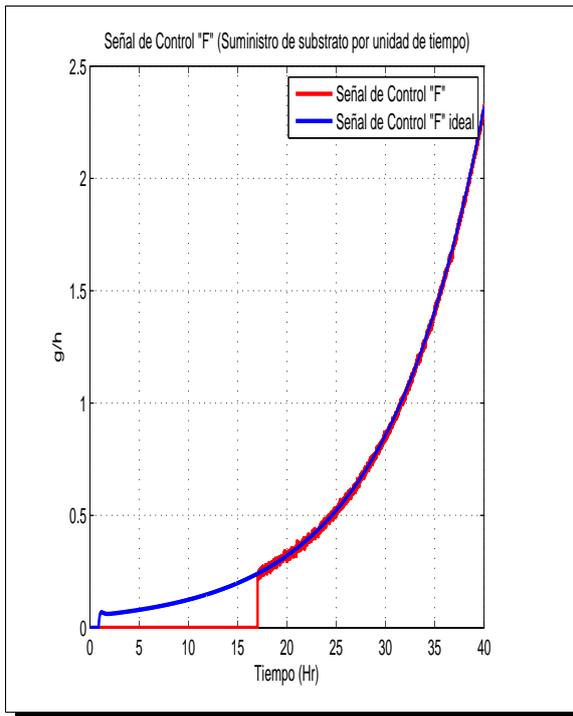
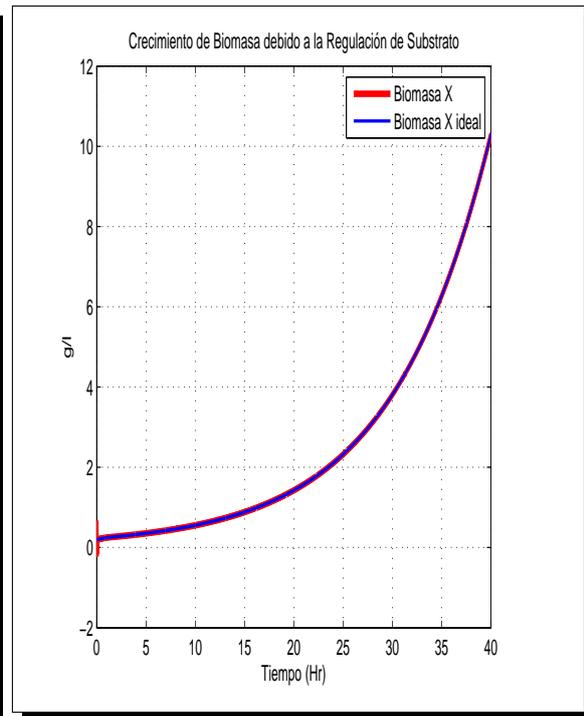


Figura 6.1: a) Concentración de sustrato regulada b) Error de regulación en S

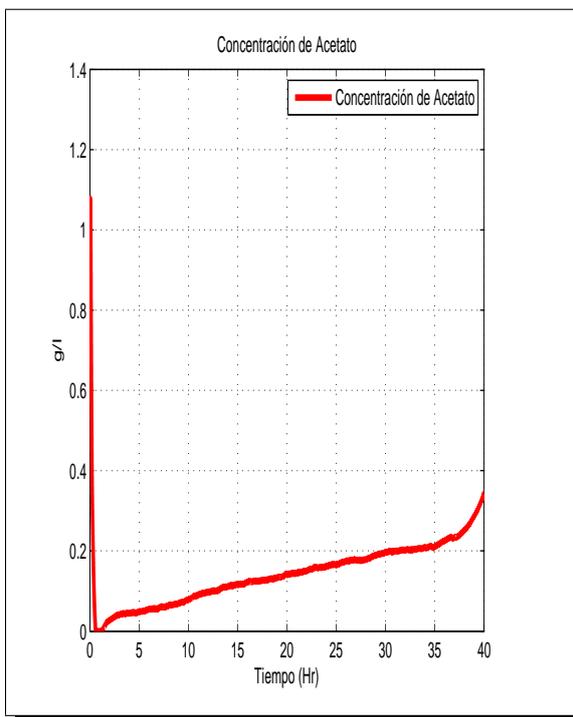


a)

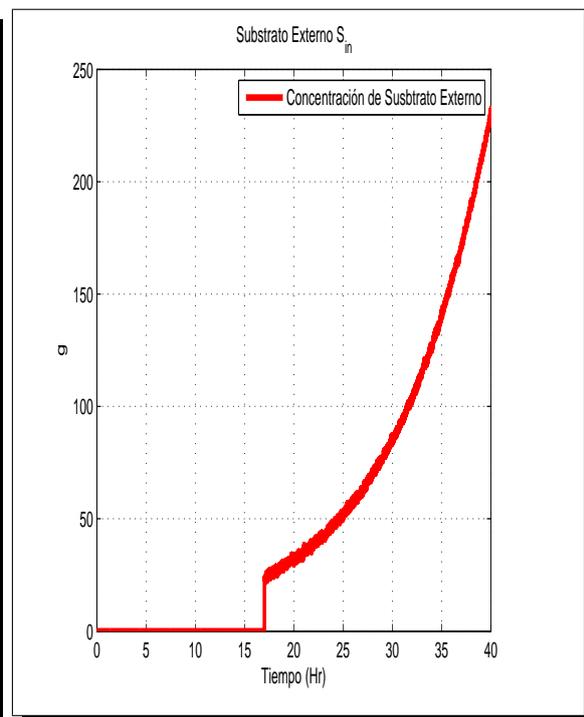


b)

Figura 6.2: a) Señal de control  $F$  para regulación de  $S$  b) Señal de biomasa  $X$



a)



b)

Figura 6.3: a) Concentración de acetato b) Substrato externo

---

## Bibliografía

---

- Antonelli, R., J. Harmand, J. Steyer y A. Astolfi (July, 2003). Set-point regulation of an anaerobic digestion process with bounded output feedback. *IEEE Transactions on automatic control technology* **11**, 495–504.
- Arndt, M., S. Kleist, G. Miksch, K. Friehs, E. Flaschel, J. Trierweiler y B. Hitzmann (2005). A feedforward-feedback substrate controller based on a kalman filter for a fed-batch cultivation of escherichia coli producing phytase. *Computers and Chemical Engineering* pp. 1113–1120.
- Bastin, G. y D. Dochain (1990). *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Elsevier, Science Publishers, Amsterdam.
- Bogaerts, P. y A. Vande Wouwer (2003). Software sensors for bioprocesses. *ISA Transactions* pp. 547–558.
- Chen, L., G. Bastin y V. Breusegem (1995). A case study of adaptive nonlinear regulation of fed-batch biological reactors. *Automatica* **31(1)**, 55 – 65.
- Davila, J., L. Fridman y A. Levant (2005). Second-order sliding-modes observers for mechanical systems. *IEEE Transactions on automatic control* pp. 1785–1789.
- Deken, R.H. (1966). The crabtree effect: A regulatory system in yeast. *J. gen. Microbiol* pp. 149–156.
- Dewasme, G. Goffaux, A.-L Hanston A. Vande Wouwer (2011). Extended kalman filter design for acetate estimation in e. coli cultures. *IFAC* pp. 1–6.
- Dewasme, L., A. Richelle, P. Dehottay, P. Georges, M. Remy, Ph. Bogaerts y A. VandeWouwer (2009). Linear robust control of s. cerevisiae fed-batch cultures at different scales. *Biochemical Engineering Journal*.
- Dochain, Denis (2008). *Automatic Control of Bioprocess*. Wiley, Great Britain and the United States.
- Doran, Pauline (1995). *Bioprocess Engineering Principles*. Elsevier Science & Technology Books, Sydney, Australia.
- Fridman, L., Y. Shtessel, C. Edwards y X. Yan (2007). High-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems. *International Journal of Robust Control and Nonlinear Control*.
- Gauthier, J.P. y I. Kupka (1994). Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM. Journal Control and Optimization* pp. 975–994.
- Gelb, A. (1974). *The Analytic Sciences Corporation Technical Staff: Applied Optimal Estimation*.

- Haldane, J.B.S (1930). *Enzymes*. Longmans, London.
- Juma, C. y V Konde (2001). *The new bioeconomy - Industrial and environmental biotechnology in developing countries*. United Nations Conference on Trade and Development.
- Levant, A (2006). Homogeneous quasi-continuous sliding mode control. *School of Mathematical Sciences. Tel-Aviv University*. pp. 1–26.
- Levant, Arie (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica* pp. 379–384.
- Levant, Arie (2005). Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE Transactions on automatic control* pp. 1812 – 1816.
- Levant, Arie y Yuri Pavlov (2008). Generalized homogeneous quasi-continuous controllers. *Robust and Nonlinear Control* pp. 385 – 398.
- Mendoza, Ismael (2011). Estimación de tasas de reacción en bioprocesos mediante observadores tipo super-twisting. Tesis de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Monod, J. (1942). *Recherches sur la Croissance des Cultures Bacteriennes..* Hermann, Paris.
- Moreno, Jaime (2011). Lyapunov approach for analysis and design of second order sliding mode. *Sliding Modes After the First Decade of the 21st Century* pp. 113–150.
- Moreno, Jaime A. (2009). A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm. *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control* pp. 1–6.
- Moreno, Jaime A. (n.d.). State and unknown input estimation for an anaerobic digestion system.
- Nielsen, Jens, John Villadsen y Gunnar Liden (2003). *Bioreaction Engineering Principles*. second edition ed. Kluwer Academic & Plenum.
- Pomerleau, Y. (1990). Modélisation et commande d'un procédé fedbatch de culture des levures pain. Tesis de doctorado. Département de génie chimique. Université de Montréal.
- Renard, F., A. VandeWouwer, S. Valentinotti y D. Dumur (2006). A practical robust control scheme for yeast fed-batch cultures an experimental validation. *Journal of Process Control* pp. 855–864.
- Rocha, Isabel Cristina (2003). *Model-based strategies for computer-aided operation of a recombinant E. coli fermentation*. Universidade de Minho.
- Sbarciog, Mihaela, Jaime A. Moreno y Alain Vande Wouwer (2012). A biogas-based switching control policy for anaerobic digestion systems. *IFAC* pp. 603–608.
- Sonnleitner, B. y O. Kappeli (1986). Growth of *saccharomyces cerevisiae* is controlled by its limited respiratory capacity : Formulation and verification of a hypothesis. *Biotechnol. Bioeng* pp. 927–937.
- Veloso, A., I. Rocha y E. C. Ferreira (2009). Monitoring of fed-batch e. coli fermentations with software sensors. *Bioprocess Biosyst Eng* pp. 381–388.
- Vidal, Jesús (2006). Un método general, sencillo y eficiente para la definición y simulación numérica de sistemas multicuerpo. Tesis de doctorado. Universidad Politécnica de Madrid.
- Zeitz, M. (1984). Observability canonical (phase-variable) form for nonlinear time-variable systems. *International Journal of System Science* pp. 949–958.