



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Análogo de efecto Unruh para  
un campo electromagnético**

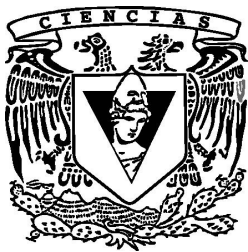
**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**Físico**

**P R E S E N T A:**

**Salvador Ramírez Acosta**



**DIRECTOR DE TESIS:  
Dra. Rocío Jáuregui Renaud  
2013**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Ramírez  
Acosta  
Salvador  
55 19 19 47 05  
Universidad Nacional Autónoma de  
México  
Facultad de Ciencias  
Física  
406048905

2. Datos del tutor

Dra.  
Rocío  
Jáuregui  
Renaud

3. Datos del sinodal 1

Dr.  
Fernando Matías  
Moreno  
Yntriago

4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Jerónimo Alonso  
Cortez  
Quezada

5. Datos del sinodal 3

Dr.  
Sahen  
Hacyan  
Saleryan

6. Datos del sinodal 4

Dr.  
Alejandro  
Corichi  
Rodríguez  
Gil

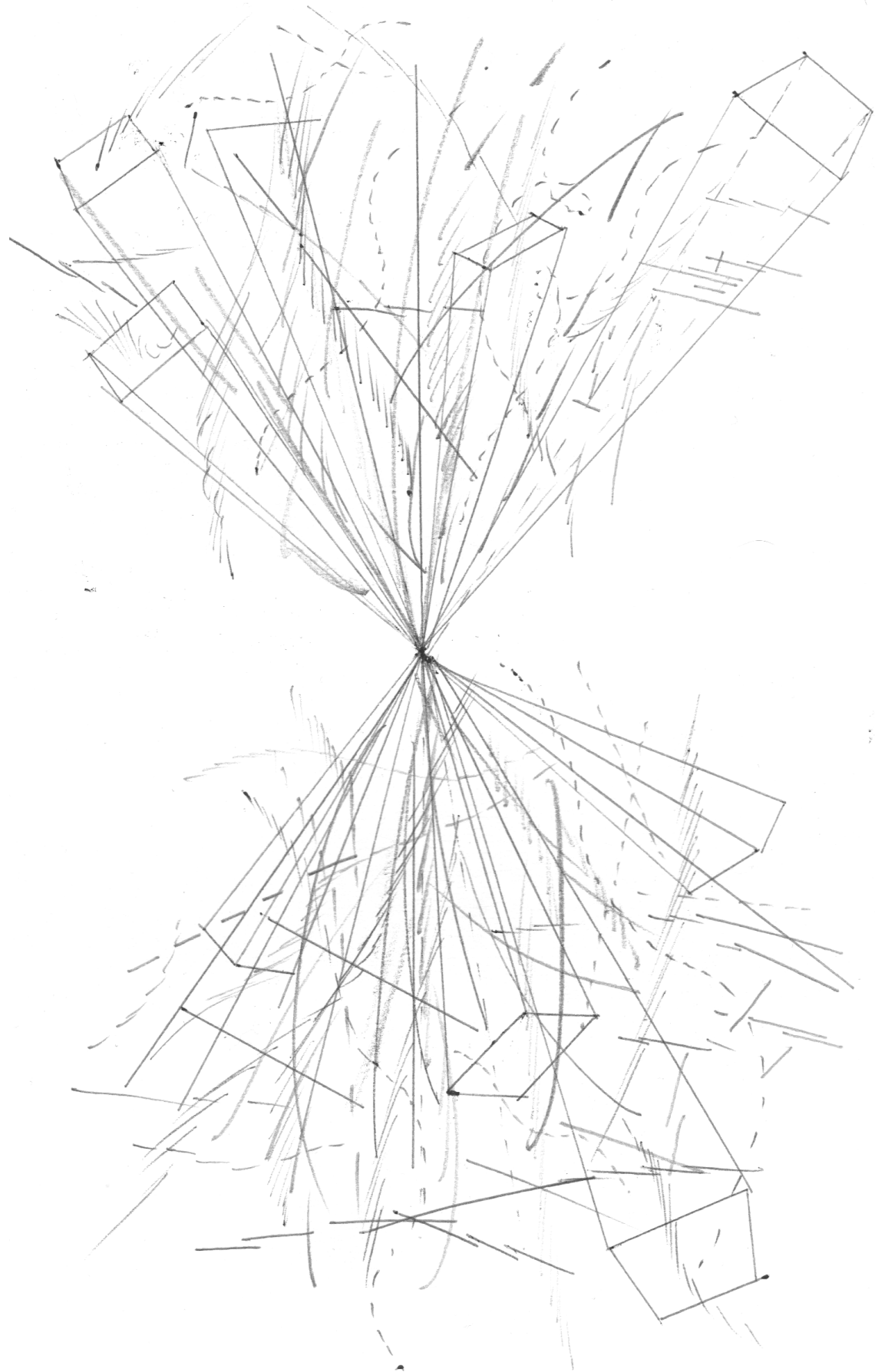
7. Datos del trabajo escrito  
Análogo de efecto Unruh para  
un campo electromagnético  
60 p  
2013

## Agradecimientos

*A mi madre por brindarme su apoyo y comprensión  
a lo largo de mi travesía por la vida ...*

*A Rocío Jáuregui por sus enseñanzas y ejemplo de  
disciplina en mi formación como físico ...*

*A mis amigos por todas las experiencias  
otora compartidas ...*



## I. Introducción

En 1919 el astrónomo Arthur Eddington se embarcó en un viaje para medir la deflexión de la luz, proveniente de estrellas lejanas, al pasar cerca del Sol. Las mediciones se llevaron a cabo durante un eclipse solar y los valores medidos confirmaron las predicciones de los cálculos de Albert Einstein. Fue así como la teoría de la relatividad general se convirtió en la descripción por excelencia del universo a gran escala y en el nuevo paradigma sobre el espacio-tiempo.

Dicha teoría predice el corrimiento al rojo de la frecuencia luz como consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo, entre otra plétora de resultados.

Otro fenómeno de interés es el análogo gravitacional de el efecto Magnus óptico, para el cual el vector de Poynting no coincide con la dirección de propagación de la luz sino que sufre una deflexión como consecuencia del campo gravitacional<sup>(1)</sup>.

Sin embargo tales efectos ópticos consideran sólo aspectos clásicos de la luz. Surge de manera natural el preguntarse que nuevos fenómenos deberíamos observar al considerar la naturaleza cuántica de la luz en presencia de un campo gravitacional.

En este trabajo describiré uno de tales fenómenos conocido como efecto Unruh<sup>(2)</sup>. Dicho efecto nos permitirá discutir el concepto de partícula para un observador inercial y un observador acelerado.



# Capítulo I

## Espacio-Tiempo

La mejor descripción que tenemos hoy en día del espacio-tiempo es la teoría de la relatividad general desarrollada por Einstein en los comienzos del siglo XX.

La clave para un mejor entendimiento de la gravedad es el principio de equivalencia el cual establece que un observador en presencia de un campo gravitacional es equivalente a un observador acelerado. Aunado a este razonamiento está la idea de Riemann sobre como la curvatura de una superficie cambia el vector de aceleración al desplazarlo sobre la superficie curva. Esto le permitió a Einstein establecer un vínculo entre la geometría diferencial y la gravitación al darse cuenta que la fuerza de gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. Así pues, la teoría de la relatividad general explota toda la riqueza de la geometría Riemanniana para desarrollar una teoría de la gravitación.

### I. Variedad suave

El espacio-tiempo se modela como una variedad suave cuyos puntos se pueden asociar con eventos.

Una variedad suave de dimensión  $n$ ,  $\mathcal{M}$ , es un espacio topológico de Hausdorff junto con una familia de abiertos  $\{O_\alpha\}$  que satisface las siguientes propiedades:

1.  $\{O_\alpha\}$  es una cubierta de  $\mathcal{M}$
2. Para cada  $\alpha$  existe un mapeo biyectivo  $\psi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$  donde  $U_\alpha$  es un abierto de  $\mathbf{R}^n$
3. Si la intersección de dos abiertos es no vacía,  $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$ , entonces el mapeo  $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$  que toma puntos en  $\psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbf{R}^n$  a puntos en  $\psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbf{R}^n$  es infinitamente diferenciable,  $C^\infty$ .

Para poder hablar de cantidades físicas como velocidad, aceleración, vector y tensor de energía momento, tensor electromagnético, etc... necesitamos saber como se definen tales cantidades en el lenguaje geométrico libre de coordenadas.



## II. Vector, vector dual y tensores

Podemos definir a un vector como una clase de equivalencia de curvas. Para ello recordemos que una curva es un mapeo de un intervalo en los reales a una variedad, que tomaremos de clase  $C^\infty$  y diremos que es un mapeo suave<sup>(3)</sup>.

$$\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$$

Decimos que dos curvas  $\sigma_1, \sigma_2$  son tangentes a un punto  $p$  en  $\mathcal{M}$  si satisfacen

1.  $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$
2. Para un sistema de coordenadas local  $(x^1, x^2, \dots, x^m)$  alrededor de  $p$ , las curvas  $\sigma_1, \sigma_2$  son tangentes en el sentido usual de  $\mathbf{R}^m$

$$\frac{\partial x^i}{\partial t}(\sigma_1(t))|_{t=0} = \frac{\partial x^i}{\partial t}(\sigma_2(t))|_{t=0}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

Notamos que si  $\sigma_1, \sigma_2$  son tangentes en un sistema coordenado, entonces son tangentes en cualquier sistema coordenado que cubra el punto  $p$ .

Definimos un vector en un punto  $p$  de  $\mathcal{M}$  como la clase de equivalencias de curvas  $[\sigma]$  que son tangentes al punto  $p$ . Al conjunto de todos los vectores tangentes al punto  $p$  lo llamamos espacio tangente y lo denotamos por  $T_p\mathcal{M}$ .

Una manera equivalente de definir vectores es como una derivada direccional

$$v(f) := \frac{\partial f}{\partial t}(\sigma(t))|_{t=0}$$

$[\sigma] = v$  actúa como un operador diferencial sobre el algebra de las funciones suaves.

Esta ecuación define un mapeo de  $T_p\mathcal{M}$  a  $D_p\mathcal{M}$ , donde  $D_p\mathcal{M}$  es el espacio de derivaciones y se define como sigue:

Una derivación en un punto  $p$  de  $\mathcal{M}$  es un mapeo

$$v : C^\infty \rightarrow \mathbf{R}$$

que cumple con lo siguiente

1.  $v(f + g) = v(f) + v(g)$
2.  $v(rf) = rv(f)$
3.  $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$   
para toda  $f$  y  $g$  de clase  $C^\infty$  y  $r$  en  $\mathbf{R}$ .

En otras palabras el mapeo es lineal y cumple con la regla de Leibniz.

Se puede demostrar que  $T_p\mathcal{M}$  y  $D_p\mathcal{M}$  son isomorfos como espacios vectoriales lo cual establece una equivalencia entre las 2 definiciones de vector.

Construimos un campo vectorial  $\chi$  sobre una variedad suave tomando un elemento del espacio tangente  $T_p\mathcal{M}$  para cada punto  $p$  de la variedad de tal forma que el mapeo definido por

$$\chi(f) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$p \rightarrow (\chi f)(p) := \chi_p(f)$$

sea de clase  $C^\infty$ .

Para poder discutir el concepto de tensor necesitamos hablar primero del vector cotangente.

Un vector cotangente  $\omega$  en un punto  $p$  de  $\mathcal{M}$  es un mapeo lineal de  $T_p\mathcal{M}$  a los reales y se denota como  $\langle \omega, v \rangle$  para  $v$  en  $T_p\mathcal{M}$ . El espacio generado por estos mapeos forma el espacio cotangente en el punto  $p$  y lo denotamos por  $T_p^*\mathcal{M}$ .

$T_p^*\mathcal{M}$  es el espacio dual del espacio tangente  $T_p\mathcal{M}$  por lo cual el vector cotangente es también llamado vector dual.

Con esto en mente definimos un tensor de rango  $(M,N)$  en un punto de la variedad como un mapeo multilineal que toma  $M$  vectores duales,  $N$  vectores y te arroja un número real

$$T : T_p^*\mathcal{M} \times \dots T_p^*\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \times \dots T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}.$$

La importancia del uso de tensores en física se manifiesta en su naturaleza geométrica independiente del marco de referencia. De esta manera podemos expresar las ecuaciones que describen la dinámica del sistema físico en su forma covariante.

### III. Cambiando de sistema coordenado

Una forma de definir vectores y tensores es de acuerdo a como se transforman sus componentes de un sistema coordenado  $\{x^\mu\}$  a otro  $\{x'^\mu\}$ .

Escogemos una base  $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$  para los vectores en  $T_p\mathcal{M}$ . En esta base la componente  $\mu$ -ésima del vector  $\mathbf{v}$  es  $v^\mu$ . De esta manera un vector es aquella cantidad que se transforma de acuerdo con

$$v'^\mu = \sum_{\mu=1}^n v^\mu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\mu}.$$

Analogamente, consideremos una base  $\{dx^\mu\}$  para los vectores duales en  $T_p^*\mathcal{M}$ . La componente  $\mu$ -ésima del vector dual en dicha base es  $\omega_\mu$ . El vector dual se transforma de acuerdo con

$$\omega'_\mu = \sum_{\mu=1}^n \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu}.$$

Así podemos definir la regla de transformación de un tensor de rango (M,N) como

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_N}_{\nu'_1 \dots \nu'_M} = \sum_{\mu_1 \dots \mu_M} T^{\mu_1 \dots \mu_N}_{\nu_1 \dots \nu_M} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_M}}{\partial x^{\nu'_M}}.$$

## IV. El tensor métrico

La métrica siendo un tensor simétrico de rango (0,2) es una estructura adicional que agregamos a la variedad diferencial y que nos permite introducir la noción de distancia entre dos puntos del espacio-tiempo.

Escogiendo una sistema coordenado  $\{x^\mu\}$  podemos desarrollar el tensor métrico en sus componentes  $g_{\mu\nu}$ . Haciendo uso de la convención de la suma sobre los índices repetidos de Einstein escribimos

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

Usualmente se usa la notación  $ds^2$  haciendo referencia al elemento infinitesimal de distancia al cuadrado. Siguiendo esta convención escribimos

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Podemos también formar el producto interno entre dos vectores con ayuda de la métrica

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}(u^\mu \partial_\mu, v^\nu \partial_\nu) = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$$

Dada una métrica  $\mathbf{g}$ , podemos encontrar una base de vectores ortonormales  $\{\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n\}$  en el espacio tangente a cada punto  $p$  pidiendo que

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \quad \mathbf{g}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) = \pm 1$$

La métrica del espacio-tiempo tiene signatura  $(- + + +)$ .

La métrica nos permite también construir una biyección entre el espacio dual y el espacio tangente. Para esto consideramos a la métrica como un tensor de rango (1,1) que mapea vectores en vectores duales.

## V. Derivada de Lie y vector de Killing

Para poder definir el concepto de derivada de Lie necesitamos saber como desplazar un tensor de un punto a otro en la variedad, por lo cual definiremos dos conceptos muy útiles.

Consideremos dos variedades suaves  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  y el mapeo  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  en  $\mathcal{A}(C^\infty)$ .

Para poder mapear un vector en  $T_p\mathcal{M}$  a  $T_{\phi(p)}\mathcal{N}$  definimos el “pushforward” de un vector:

$$\phi_* : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{\phi(p)}\mathcal{N}$$

donde para toda  $f$  en  $\mathcal{A}(C^\infty)$ , tenemos que

$$(\phi_*\mathbf{v})(f) = \mathbf{v}(f \circ \phi).$$

El “pushforward” para tensores de rango  $(M,0)$  se define como

$$(\phi_*T)_{a_1\dots a_N}(v_1)^{a_1}\dots(v_N)^{a_N} = T_{a_1\dots a_N}(\phi_*v_1)^{a_1}\dots(\phi_*v_N)^{a_N}.$$

Dado un vector dual definimos el “pullback”

$$\phi^* : T_{\phi(p)}\mathcal{N} \rightarrow T_p\mathcal{M}$$

donde, para todo  $\mathbf{v}$  en  $T_p\mathcal{M}$ , tenemos

$$(\phi^*\omega)_\mu v^\mu = \omega_\mu(\phi^*\mathbf{v})^\mu.$$

El “pullback” de un tensor de rango  $(0,N)$  se define como

$$(\phi^*T)^{b_1\dots b_M}(\omega_1)_{b_1}\dots(\omega_M)_{b_M} = T^{b_1\dots b_M}(\phi_*\omega_1)_{b_1}\dots(\phi_*\omega_M)_{b_M}$$

La extensión del “pullback” a tensores de rango  $(M,N)$  requiere que el mapeo  $\phi$  sea un difeomorfismo. Un difeomorfismo es un mapeo biyectivo con inversa de clase  $C^\infty$ , necesariamente  $\dim\mathcal{M} = \dim\mathcal{N}$ . Dicho esto podemos usar a  $\phi^{-1}$  para definir el “pullback” (4):

$$(\phi^{-1})^* : T_{\phi(p)}\mathcal{N} \rightarrow T_p\mathcal{M}$$

$$\begin{aligned} (\phi^*T)^{b_1\dots b_M}{}_{a_1\dots a_N}(\omega_1)_{b_1}\dots(\omega_M)_{b_M}(v_1)^{a_1}\dots(v_N)^{a_N} \\ = T^{b_1\dots b_M}{}_{a_1\dots a_N}(\phi_*\omega_1)_{b_1}\dots((\phi^{-1})^*v_N)^{a_N} \end{aligned}$$

Se puede probar que  $\phi_* = (\phi^{-1})^*$ .

Si  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  es un difeomorfismo y se cumple que

$$\phi^*\mathbf{T} = \mathbf{T}$$

decimos que  $\phi$  es una transformación de simetría para el campo tensorial  $\mathbf{T}$ . En el caso de que el campo tensorial corresponda al tensor métrico dicha transformación se llama isometría.

Con esto podemos definir la derivada de Lie de un campo tensorial. Consideremos un campo vectorial  $\mathbf{v}$  cuyas curvas integrales están descritas por un

mapeo suave  $\phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  que tiene la virtud de ser un difeomorfismo. Las curvas integrales están parametrizadas con el parámetro  $t$ . Definimos la derivada de Lie de un campo tensorial  $\mathbf{T}$  con respecto al campo  $\mathbf{v}$  como

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} T^{b_1 \dots b_M}_{a_1 \dots a_N} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_{-t}^* T^{b_1 \dots b_M}_{a_1 \dots a_N} - T^{b_1 \dots b_M}_{a_1 \dots a_N}}{t}.$$

Uno de los usos de la derivada de Lie en física es expresar la invariancia de tensores bajo cierta transformación. Decimos que un campo tensorial  $\mathbf{T}$  es invariante bajo el arrastre de un campo vectorial  $\xi$  si

$$\mathcal{L}_{\xi} T^{b_1 \dots b_M}_{a_1 \dots a_N} = 0.$$

En particular cuando el tensor es la métrica  $\mathbf{g}$ , el campo  $\xi$  recibe el nombre de campo Killing. El campo de Killing define una isometría del espacio-tiempo a lo largo de las curvas integrales de dicho campo, descritas por un difeomorfismo  $\phi_t$ . Como ya mencionamos esto significa que  $\phi_t$  es una transformación de simetría del campo tensorial definido por el tensor métrico.

En un sistema coordenado dado si las componentes de la métrica son independientes de alguna coordenada  $x^\mu$ , el elemento de la base asociado a dicha coordenada,  $\partial_\mu$ , es un vector de Killing

$$\mathcal{L}_{\partial_\mu} \mathbf{g} = 0$$

## VI. Derivada covariante

Hasta ahora hemos definido vectores y tensores sobre un punto de la variedad pero aún no tenemos forma de poder comparar dos vectores, por ejemplo, en dos puntos diferentes de la variedad. En el caso de que tales vectores representen el momento de una partícula (o alguna otra propiedad de la partícula) en dos puntos del espacio-tiempo, no tenemos forma de poder comparar tales cantidades.

Para resolver esto se introduce la noción de conexión a través de un operador de derivación conocido como derivada covariante. La derivada covariante nos permite hacer el transporte paralelo de vectores (tensores) sobre la variedad, es decir, podemos desplazar un vector de un punto a otro en la variedad sin cambiar su magnitud ni su dirección.

Formalmente la derivada covariante  $\nabla$  se define como un operador de derivación sobre la variedad que mapea un campo tensorial suave de rango  $(M, N)$  en un campo tensorial suave de rango  $(M, N+1)$  y satisface las siguientes propiedades<sup>(4)</sup>:

**I.** Es un operador lineal.

Para toda  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  en  $\mathcal{T}(M, N)$  y  $\alpha, \beta$  en  $\mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \nabla (\alpha A^{a_1 a_2 \dots a_M}_{b_1 b_2 \dots b_N} + \beta B^{a_1 a_2 \dots a_M}_{b_1 b_2 \dots b_N}) \\ = \alpha \nabla A^{a_1 a_2 \dots a_M}_{b_1 b_2 \dots b_N} + \beta \nabla B^{a_1 a_2 \dots a_M}_{b_1 b_2 \dots b_N} \end{aligned}$$

II. Satisface la regla de Leibniz.

Para toda  $\mathbf{A}$  en  $\mathcal{T}(M, N)$  y  $\mathbf{B}$  en  $\mathcal{T}(M', N')$

$$\begin{aligned} \nabla [A^{a_1 a_2 \dots a_M}_{b_1 b_2 \dots b_N} B^{c'_1 c'_2 \dots c'_M}_{d'_1 d'_2 \dots d'_N}] \\ = [\nabla A^{a_1 a_2 \dots a_M}_{b_1 b_2 \dots b_N}] B^{c'_1 c'_2 \dots c'_M}_{d'_1 d'_2 \dots d'_N} \\ + A^{a_1 a_2 \dots a_M}_{b_1 b_2 \dots b_N} [\nabla B^{c'_1 c'_2 \dots c'_M}_{d'_1 d'_2 \dots d'_N}] \end{aligned}$$

III. Conmuta con la operación de contracción.

Para toda  $\mathbf{A}$  en  $\mathcal{T}(M, N)$

$$\nabla (A^{a_1 \dots c \dots a_M}_{b_1 \dots c \dots b_N}) = \nabla A^{a_1 \dots c \dots a_M}_{b_1 \dots c \dots b_N}$$

IV. Debe de ser consistente con la definición de vector tangente como derivada direccional de funciones escalares.

Para toda  $f$  en  $\mathcal{A}(C^\infty)$  y  $v^a$  en  $T_p \mathcal{M}$

$$\mathbf{v}(f) = v^a \nabla_a f$$

V. No hay torsión.

Para toda  $f$  en  $\mathcal{A}(C^\infty)$

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$$

## VII. El espacio de Minkowski

En 1905 Einstein publicó un artículo que modificó nuestra concepción sobre la cinemática y la dinámica de los objetos físicos. Tomando como postulado la constancia de la velocidad de la luz, construyó la infraestructura de la física que rigió el mundo de las altas energías. Dicha teoría es conocida hoy en día como relatividad especial y desembocaría 10 años más tarde en una concepción más general del espacio-tiempo, la teoría de la relatividad general.

La relatividad especial nos brinda la herramienta para poder comparar las mediciones hechas por dos observadores inerciales vía una transformación que fue estudiada por Lorentz en el contexto del electromagnetismo y que hoy lleva su nombre. Definimos la transformación de Lorentz como aquella que deja invariante al intervalo de espacio-tiempo

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

e involucra transformaciones tanto en espacio, como en tiempo. Si los observadores se mueven en la dirección del eje de las  $x$ , la transformación entre los sistemas coordenados  $\{x^\mu\}$  y  $\{x'^\mu\}$  asignados a cada observador respectivamente es:

$$t' = \gamma(t - vx) \quad x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z$$

donde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

Podemos usar también la transformación de Lorentz para comparar cantidades físicas, de naturaleza tensorial, de un marco inercial a otro. Si denotamos a dicha transformación con el símbolo  $\Lambda^a_b$ , donde

$$[\Lambda^a_b] = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos escribir la transformación de un tensor de un marco inercial a otro como

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_N}_{\nu'_1 \dots \nu'_M} = \Lambda^{\mu'_1}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\nu'_N}_{\nu_N} T^{\mu_1 \dots \mu_N}_{\nu_1 \dots \nu_M}$$

Del intervalo de espacio-tiempo podemos leer las componentes del tensor métrico.

$$[\eta^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definimos el espacio de Minkowski como una variedad suave provista de la estructura dada por el tensor métrico  $\eta^{\mu\nu}$ .

Dado que las transformaciones de Lorentz preservan el intervalo de espacio-tiempo, corresponden a una isometría del espacio de Minkowski.

## VIII. Coordenadas de Rindler

De acuerdo a el principio de equivalencia, un observador en un campo gravitacional es equivalente a un observador acelerado. Podemos aproximar al campo gravitacional terrestre como un campo uniforme en una región para la cual la precisión de nuestros aparatos de medición es tal que no detecten la fuerzas de marea debidas al gradiente del campo gravitacional.

De esta manera podemos definir un observador inercial como aquél que esta en caída libre y un observador acelerado como aquél que se encuentra sobre la superficie de la Tierra.

Para estudiar observadores uniformemente acelerados se utilizan coordenadas de Rindler (T,X,Y,Z) que se obtienen mediante la siguiente transformación del espacio de Minkowski, con coordenadas (t,x,y,z):

$$t = Z \sinh(\eta) \quad z = Z \cosh(\eta)$$

Con  $\eta = aT$ , siendo  $a$  la aceleración y  $T$  el tiempo propio del observador acelerado.

Dicha transformación del espacio solo cubre la mitad del espacio de Minkowski y lo divide en cuatro regiones. Las regiones I y II se llaman cuñas de Rindler y tienen la peculiaridad de que el intervalo de espacio-tiempo de un punto en I con un punto en II es espacialoide, lo cual implica que I y II describen regiones causalmente desconectadas. De aquí que los planos  $z = \pm t$  reciban el nombre de horizontes. La región F es el cono del futuro y la región P es el cono del pasado.

Un observador de Rindler corresponde a un marco uniformemente acelerado y gráficamente se describe con la trayectoria hiperbólica definida por  $Z = \text{cte}$ .

$$z^2 - t^2 = Z^2$$

Observamos que los observadores de Rindler se acercan asintóticamente al horizonte cuando  $T \rightarrow \infty$

El elemento de espacio-tiempo para coordenadas de Rindler es:

$$ds^2 = -a^2 Z^2 dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

De donde podemos obtener las componentes de la métrica de Rindler

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} -(aZ)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

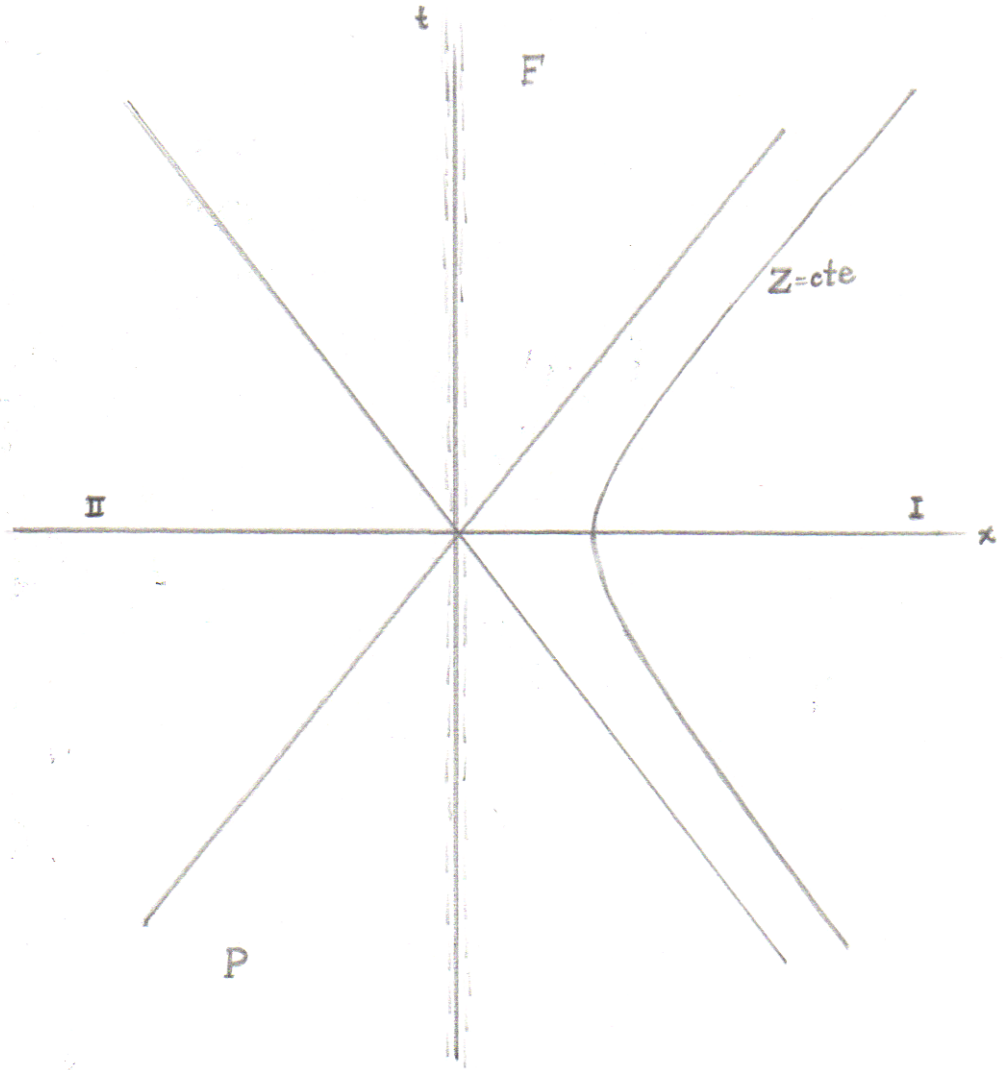
Esta métrica describe un espacio-tiempo estático ya que sus componentes son independientes del tiempo  $T$ . Observamos que  $g_{00}$  depende de la coordenada  $Z$  a diferencia de la métrica de Minkowski para la cual todas las componentes de la métrica eran constantes. Para una métrica que describe un espacio-tiempo curvo las componentes de la métrica dependen de las coordenadas.

Es importante aclarar que la métrica de Rindler describe un espacio-tiempo plano aunque las componentes de la métrica no sean constantes. La diferencia radica en que para las coordenadas de Rindler podemos remover dicha dependencia globalmente mediante una transformación de coordenadas mientras que para una métrica más general solo podemos hacer esto localmente.

La importancia de la métrica de Rindler reside en el hecho de que exhibe características que son propias de un espacio-tiempo curvo a pesar de que ésta describa un espacio-tiempo plano. Esto simplifica de manera significativa los cálculos y nos permite obtener intuición de como debería ser el fenómeno para un espacio-tiempo curvo.

Para poder comparar un tensor de un marco inercial a un marco acelerado usamos la regla para transformar tensores de un sistema coordenado a otro definida anteriormente.





## Capítulo II

# El campo escalar real

### I. Teoría de campo en el espacio de Minkowski

Un campo escalar lo describimos mediante una función  $\phi(x)$  que nos arroja el valor del campo en cada punto  $x$  del espacio-tiempo. Este valor es invariante ante transformaciones del grupo de Lorentz. Para encontrar la ecuación de movimiento del campo podemos aplicar el principio de mínima acción

$$S = \int L dt$$

donde la lagrangiana se define como la integral sobre el espacio de una densidad lagrangiana que depende de la función del campo y su derivada.

$$L = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^3x$$

La densidad lagrangiana es un escalar por lo cual es una cantidad covariante, lo cual implica que tanto la lagrangiana como la teoría de campo resultante son covariantes.

Luego al variar la acción del campo:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] \\ &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \right] \end{aligned}$$

El último término se convierte en una integral de superficie que en el límite al infinito se anula si el valor del campo en la infinidad es cero.

Haciendo  $\delta S = 0$  tenemos que

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi = 0$$

Ya que  $\delta \phi$  es arbitraria, el integrando debe ser cero. Así obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} = 0.$$

La densidad lagrangiana para el campo escalar es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2,$$

sustituyendo en las ecuaciones de Euler-Lagrange encontramos que  $\phi(x)$  satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$\square \phi(x) - m^2 \phi(x) = 0.$$

El operador d'Alambertiano se define como

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu.$$

La ecuación de Klein-Gordon se puede resolver por separación de variables. Una solución particular es una onda plana

$$\phi_k(x) = C e^{ik \cdot x}$$

con  $C$  una constante y  $k = (\omega, k_x, k_y, k_z)$ .

Al sustituir la onda plana en la ecuación de Klein-Gordon encontramos la relación de dispersión relativista.

$$k^2 - m^2 = 0$$

Cada  $k$  define un modo del campo escalar, nos referimos a estos modos como modos de Minkowski.

Decimos que los modos  $\phi_k$  son de frecuencia positiva con respecto a  $t$  si satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_k(x) = -i\omega \phi_k(x) \quad \omega > 0$$

Definimos el producto interno entre los modos Minkowski

$$(\phi_k, \phi_{\bar{k}}) = -i \int d\Sigma_{t=cte} [\phi_k(x) \partial_t \phi_{\bar{k}}^*(x) - \partial_t \phi_k(x) \phi_{\bar{k}}^*(x)],$$

la integral es sobre la superficie de Cauchy definida por el hiperplano  $\Sigma_{t=cte}$ .

Normalizamos los modos usando el producto interno

$$\phi_k(x) = [(2\pi)^3 2]^{-1} e^{ik \cdot x}.$$

Los modos de Minkowski forman un conjunto ortonormal con respecto a este producto escalar, ya que satisfacen

$$(\phi_k, \phi_{\bar{k}}) = \delta_{k, \bar{k}}$$

## I. Cuantización

Para cuantizar el campo escalar, usando el formalismo canónico, tomamos al operador  $\hat{\phi}$  que satisface las siguientes relaciones de conmutación a tiempos iguales<sup>(5)</sup>.

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{x}')] = 0$$

$$[\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] = 0$$

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

El operador  $\hat{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \hat{\phi})} = \partial_t \hat{\phi}$  es la variable canónica conjugada del operador  $\hat{\phi}$ .

Como los modos  $\phi_k$  son una base ortonormal, podemos escribir el operador de campo como una superposición de modos.

$$\hat{\phi} = \sum_k \phi_k(\vec{x}) e^{-i\omega t} \hat{a}_k + \phi_k^*(\vec{x}) e^{i\omega t} \hat{a}_k^\dagger$$

El primer término corresponde a las frecuencias positivas y el segundo a las frecuencias negativas.  $\hat{a}_k$  y  $\hat{a}_k^\dagger$  son operadores de creación y aniquilación que actúan sobre un espacio de Hilbert conocido como espacio de Fock. Además satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{\bar{k}}] = 0 \quad [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{\bar{k}}^\dagger] = 0 \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{\bar{k}}^\dagger] = \delta_{k, \bar{k}}$$

estas relaciones de conmutación son equivalentes a las relaciones de conmutación entre  $\hat{\phi}$  y  $\hat{\Pi}$ .

## II. La base de Fock

La base de Fock se construye de la siguiente manera:

Los operadores de creación y aniquilación satisfacen

$$\hat{a}_k^\dagger |n_k\rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} |(n+1)_k\rangle$$

$$\hat{a}_k |n_k\rangle = n^{\frac{1}{2}} |(n-1)_k\rangle$$

Definimos el operador de número para el modo  $k$  como

$$\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$$

Resulta que  $\hat{N}_k$  es una observable y corresponde al número de partículas en el modo  $k$ . Dicho esto, podemos definir una observable para el número total de partículas en el campo como

$$\hat{N} = \sum_k \hat{N}_k$$

Definimos el estado con cero *quantos* mediante la ecuación

$$\hat{a}_k|0\rangle = 0$$

físicamente el estado  $|0\rangle$  corresponde al vacío.

El estado que describe un *quanto* del campo en el modo  $k$  lo construimos a partir del estado de vacío usando el operador de creación asociado al modo  $k$

$$\hat{a}_k^\dagger|0\rangle = |1_k\rangle.$$

Para construir un estado con  $n$ -*quantos* en el modo  $k$  aplicamos el operador de aniquilación  $n$ -veces

$$(\hat{a}_k^\dagger)^n|0\rangle = \sqrt{n!}|n_k\rangle.$$

Un estado que representa dos *quantos* pero para diferentes modos se construye usando operadores de creación para cada modo en cuestión

$$\hat{a}_{\bar{k}}^\dagger\hat{a}_k^\dagger|0\rangle = |1_{\bar{k}}, 1_k\rangle.$$

Similarmente un estado con  $n$  *quantos* en diferentes modos es

$$\hat{a}_{k^1}\hat{a}_{k^2}\dots\hat{a}_{k^n}|0\rangle = |1_{k^1}, 1_{k^2}, \dots, 1_{k^n}\rangle.$$

En general un estado con  ${}^1n$ -*quantos* en el modo  $k^1$ ,  ${}^2n$ -*quantos* en el modo  $k^2$ ,  $\dots$ ,  ${}^in$ -*quantos* en el modo  $k^i$  y así sucesivamente, corresponde a

$$[{}^1n!{}^2n!\dots{}^in!\dots]^{-\frac{1}{2}}(\hat{a}_{k^1})^n(\hat{a}_{k^2})^n\dots(\hat{a}_{k^i})^n\dots|0\rangle = |{}^1n_{k^1}, {}^2n_{k^2}, \dots, {}^in_{k^i}, \dots\rangle$$

La constante  $[{}^1n!{}^2n!\dots{}^in!\dots]^{-\frac{1}{2}}$  es introducida para normalizar los estados.

$$\langle {}^1n_{k^1}, {}^2n_{k^2}, \dots, {}^rn_{k^r}, \dots | {}^1m_{k'^1}, {}^2m_{k'^2}, \dots, {}^sm_{k'^s}, \dots \rangle =$$

$$\delta_{rs} \sum_{\alpha} \delta_{n^1 m^{\alpha(1)}} \dots \delta_{n^r m^{\alpha(s)}} \delta_{k^1 k'^{\alpha(1)}} \dots \delta_{k^r k'^{\alpha(s)}}$$

La suma es sobre todas las permutaciones  $\alpha$  de los enteros de 1 hasta  $s$ .

### III. El tensor de energía-momento

El teorema de Noether nos dice que para cada transformación continua de las funciones de campo y coordenadas que garantiza que la variación de la acción es cero, corresponde una cantidad física que se conserva en el tiempo.

La cantidad conservada que corresponde a traslaciones en el espacio-tiempo es el tensor de energía-momento, el cual podemos construir a partir de la densidad lagrangiana:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - \mathcal{L}\eta^{\mu\nu}.$$

Luego

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2\eta_{\mu\nu}$$

La componente  $T_{00}$  es la densidad de energía del campo

$$T_{00} = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 + \sum_{i=1}^3(\partial_i\phi)^2 + m^2\phi^2]$$

Usando la descomposición del campo en modos  $\phi_k$  e integrando sobre todo el espacio obtenemos el Hamiltoniano del campo

$$\begin{aligned} \int T_{00} d\Sigma_{t=0} &= \frac{1}{2}C \int \partial_0 \left[ \sum_k \hat{a}_k e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_k^\dagger e^{ik \cdot x} \right] \partial_0 \left[ \sum_{\bar{k}} \hat{a}_{\bar{k}} e^{-i\bar{k} \cdot x} + \hat{a}_{\bar{k}}^\dagger e^{i\bar{k} \cdot x} \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \partial_i \left[ \sum_k \hat{a}_k e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_k^\dagger e^{ik \cdot x} \right] \partial_i \left[ \sum_{\bar{k}} \hat{a}_{\bar{k}} e^{-i\bar{k} \cdot x} + \hat{a}_{\bar{k}}^\dagger e^{i\bar{k} \cdot x} \right] \\ &\quad + m^2 \left[ \sum_k \hat{a}_k e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_k^\dagger e^{ik \cdot x} \right] \left[ \sum_{\bar{k}} \hat{a}_{\bar{k}} e^{-i\bar{k} \cdot x} + \hat{a}_{\bar{k}}^\dagger e^{i\bar{k} \cdot x} \right] \\ &= \frac{1}{2}C \int [\omega\tilde{\omega} + |\vec{k}|^2 + m^2] \sum_{\bar{k}k} [\hat{a}_k \hat{a}_{\bar{k}}^\dagger e^{-i(k-\bar{k}) \cdot x} + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{\bar{k}} e^{i(k-\bar{k}) \cdot x}] d\Sigma_{t=0} \\ &= \sum_k \frac{\omega}{2} [\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k] \end{aligned}$$

El Hamiltoniano para el campo escalar es

$$\hat{H} = \sum_k \frac{\omega}{2} [\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k].$$

Recordemos que en un sistema cerrado el valor esperado del Hamiltoniano se identifica con la energía.

La componente  $T_{0i}$  se asocia con la densidad de momento del campo:

$$T_{0i} = \partial_t \phi \partial_i \phi$$

Análogamente integrando la densidad de momento sobre todo el espacio obtenemos el momento del campo

$$\hat{P}_i = \int T_{0i} d\Sigma_{t=0} = \sum_k k_i [\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k].$$

Es inmediato verificar que los operadores de número  $\hat{N}_k$  y  $\hat{N}$  conmutan con el operador Hamiltoniano y con el operador de momento.

$$[\hat{N}, \hat{H}] = [\hat{N}_k, \hat{H}] = 0$$

$$[\hat{N}, \hat{P}_i] = [\hat{N}_k, \hat{P}_i] = 0$$

## II. Cuantización del campo escalar para un espacio-tiempo estático

Consideremos un espacio-tiempo Lorentziano descrito por una métrica diagonal y que no depende de la coordenada temporal  $x^0$ . Esto implica que  $\partial_0$  es un vector de Killing

$$\mathcal{L}_{\partial_0} \mathbf{g} = 0$$

Esto nos permite foliar el espacio con las superficies de Cauchy ortogonales al vector de Killing. Este es el espacio de fondo sobre el cual desarrollaremos la teoría de campo escalar.

La ecuación de Klein Gordon generalizada a un espacio tiempo con métrica no trivial es

$$\square \phi(x) - m^2 \phi(x) = 0$$

donde el operador d'Alambertiano se define como

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu.$$

La densidad lagrangiana que da lugar a la ecuación de Klein-Gordon al minimizar la acción es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2).$$

Usando el formalismo canónico definimos el momento conjugado y el Hamiltoniano

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \sqrt{g} g^{00} \partial_0 \phi,$$

$$H = \int \pi \partial_0 \phi - \mathcal{L} d^4x.$$

Podemos resolver la ecuación de Klein-Gordon para un espacio tiempo estático por separación de variables, lo cual nos permite descomponer al campo en una parte espacial y otra temporal:

$$\phi(x^0, \vec{x}) = \psi_j(\vec{x}) e^{\pm i E_j t}.$$

Al sustituir en la ecuación de Klein Gordon encontramos una ecuación de eigenvalores

$$\mathcal{D} \psi_j \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} g_{00} \partial_l (\sqrt{g} g^{lk} \partial_k \psi_j) + g_{00} m^2 \psi_j = E_j^2 \psi_j,$$

$\mathcal{D}$  es un operador diferencial hermitiano y  $j$  es una etiqueta para denotar un conjunto de números  $\{j\}$  asociados a cada modo del campo. Siendo más precisos  $\{j\}$  está en el espectro del operador  $\mathcal{D}$  que se define como

$$\sigma(\mathcal{D}) = \{\lambda \in \mathbf{R} : \lambda I - \mathcal{D} \text{ no es invertible}\}.$$

Definimos un producto interno sobre el espacio de funciones<sup>(6)</sup>

$$(f_1, f_2) = \int d^3x g^{00} \sqrt{g} f_1^*(\vec{x}) f_2(\vec{x}).$$

Notamos que  $\mathcal{D}$  es positivo definido

$$\begin{aligned} (f, \mathcal{D}f) &= \int d^3x f^*(\vec{x}) \partial_t [\sqrt{g} g^{lk} \partial_k f(\vec{x})] + \int d^3x \sqrt{g} m^2 |f(\vec{x})|^2 \\ &\geq - \int d^3x \sqrt{g} g^{lk} \partial_l f^*(\vec{x}) \partial_k f(\vec{x}) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

En lo que sigue vamos a tomar  $E_j \geq 0$ .

Usando el producto interno escribimos la relación de ortonormalización para las eigenfunciones  $\psi_j$ . Así

$$\int d^3x g^{00} \sqrt{g} \psi_j^*(\vec{x}) \psi_{j'}(\vec{x}) = \delta_{jj'}.$$

Introducimos una medida  $\mu(j)$  en  $\sigma(\mathcal{D})$  que nos permita definir una transformada integral de tal forma que cualquier función  $f$  se puede escribir como

$$f(\vec{x}) = \int d\mu(j) \tilde{f}(j) \psi_j(\vec{x}).$$

Dicha transformada integral nos permite pasar del espacio de coordenadas al espacio de las  $j$ 's. Con ayuda de  $\sigma$  reescribimos el producto interno en el espacio de las  $j$ 's.

$$(f_1, f_2) = \int d\mu(j) \tilde{f}_1^*(j) \tilde{f}_2(j)$$

La relación de completez para el conjunto de eigenfunciones es

$$\int d\mu(j) \psi_j^*(\vec{x}) \psi_j(\vec{y}) = \frac{1}{g^{00} \sqrt{g}} \delta(\vec{x} - \vec{y}).$$

Postulamos las siguientes relaciones de conmutación a tiempos iguales considerando al campo  $\phi$  como un operador de campo

$$[\hat{\phi}(x^0, \vec{x}), \hat{\phi}(x^0, \vec{x}')] = [\hat{\pi}(x^0, \vec{x}), \hat{\pi}(x^0, \vec{x}')] = 0$$

$$[\hat{\phi}(x^0, \vec{x}), \hat{\pi}(x^0, \vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Escribimos al operador de campo  $\hat{\phi}$  en un desarrollo de eigenfunciones con su respectiva parte temporal en frecuencias positivas y frecuencias negativas introduciendo operadores de aniquilación  $\hat{a}_j$  y creación  $\hat{a}_j^\dagger$ , para cada modo  $j$ ,

$$\hat{\phi}(x^0, \vec{x}) = \int \frac{d\mu(j)}{\sqrt{2E_j}} [\psi_j(\vec{x}) e^{-iE_j x^0} \hat{a}_j + \psi_j(\vec{x}) e^{iE_j x^0} \hat{a}_j^\dagger].$$

$\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger$  satisfacen las siguientes relaciones de conmutación



$$[\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}] = 0 \quad [\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_{j'}^\dagger] = 0 \quad [\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}^\dagger] = \delta(j, j')$$

que son equivalentes a las relaciones de conmutación para el operador de campo y el operador de momento conjugado.

El Hamiltoniano define una evolución unitaria del operador de campo mediante

$$\hat{\phi}(x^0, \vec{x}) = e^{i\hat{H}x^0} \hat{\phi}(0, \vec{x}) e^{-i\hat{H}x^0}$$

El operador de campo  $\hat{\phi}$  actúa sobre un espacio de Fock que construimos de manera análoga al caso de la teoría de campo escalar en el espacio de Minkowski.

Definimos el estado del vacío

$$\hat{a}_j|0\rangle = 0$$

para toda  $j$ .

Un estado de una partícula en el modo  $j$  es

$$\hat{a}_j^\dagger|0\rangle = |1_j\rangle$$

En general un estado con  $^1n$ -quantos en el modo  $j^1$ ,  $^2n$ -quantos en el modo  $j^2$ , ...,  $^in$ -quantos en el modo  $j^i$  y así sucesivamente, corresponde a

$$[{}^1n!{}^2n!\dots{}^in!\dots]^{-\frac{1}{2}} (\hat{a}_{j^1})^{{}^1n} (\hat{a}_{j^2})^{{}^2n} \dots (\hat{a}_{j^i})^{{}^in} \dots |0\rangle = |{}^1n_{j^1}, {}^2n_{j^2}, \dots, {}^in_{j^i}, \dots\rangle$$

## I. El campo escalar en el espacio de Rindler

La métrica de Rindler describe un espacio-tiempo estático por lo que podemos aplicar el formalismo de la sección anterior para este caso en particular.

Para poder comparar más adelante con el campo electromagnético haremos la descripción de un campo escalar con una masa  $m = k_\perp$ , con  $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ .

La ecuación de Klein-Gordon admite una solución de la forma

$$\phi_j(\vec{x}, \eta) = \psi_j(Z) e^{i(k_x x + k_y y - \Omega \eta)}.$$

La función  $\psi_j$  satisface una ecuación de Bessel

$$\left[ Z^2 \frac{d^2}{dZ^2} + Z \frac{d}{dZ} - k_\perp^2 Z^2 + \frac{\Omega^2}{a^2} \right] \psi_j(Z) = 0.$$

La solución que no diverge cuando  $Z \rightarrow \infty$  es

$$\psi_j(Z) = N_R K_{i\frac{\Omega}{a}}(k_\perp Z),$$

$N_R$  es una constante de normalización y  $K_{i\frac{\Omega}{a}}(k_\perp Z)$  es la función de Bessel modificada de tercer tipo que se define en general en forma integral como

$$K_\mu(x) = \int_0^\infty e^{-x \cosh(u)} \cosh(\mu u) du.$$

## II. Normalización de los modos de Rindler

Normalizamos la función con respecto al siguiente producto interno

$$(\phi_j, \phi_k) = -i \int d\Sigma_{\eta=cte}. [\phi_j \partial_\eta \phi_k^* - \partial_\eta \phi_j \phi_k^*].$$

Donde  $d\Sigma_{\eta=cte.} = (aZ)^{-1} dX dY dZ$ .

Para ello resolvemos para la constante  $N_R$  de la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} -i N_R^2 \int dX dY dZ (aZ)^{-1} [K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}}(k_\perp Z) e^{-i\tilde{\Omega}\eta} \overleftrightarrow{\partial}_\eta K_{-i\frac{\Omega}{a}}(k_\perp Z) e^{i\Omega\eta}] \\ \times e^{-i[(\tilde{k}_x - k_x)x + (\tilde{k}_y - k_y)y]} = 1. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} N_R^2 \int dX dY dZ (aZ)^{-1} [(\tilde{\Omega} + \Omega) e^{-i(\Omega - \tilde{\Omega})\eta} K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}}(k_\perp Z) K_{-i\frac{\Omega}{a}}(k_\perp Z)] \\ \times e^{-i[(\tilde{k}_x - k_x)x + (\tilde{k}_y - k_y)y]} = 1. \end{aligned}$$

Integramos sobre las variables  $x, y$

$$(2\pi)^2 N_R^2 \int dZ (Z)^{-1} [(\frac{\tilde{\Omega}}{a} + \frac{\Omega}{a}) e^{-i(\Omega - \tilde{\Omega})\eta} K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}}(k_\perp Z) K_{-i\frac{\Omega}{a}}(k_\perp Z)] = 1.$$

Para resolver la integral en  $Z$  usamos<sup>(7)</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx x^{\alpha-1} K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}}(cx) K_{-i\frac{\Omega}{a}}(cx) &= \frac{2^{\alpha-3}}{c^\alpha \Gamma(\alpha)} \\ \times \Gamma(\frac{\alpha + \mu + \nu}{2}) \Gamma(\frac{\alpha + \mu - \nu}{2}) \Gamma(\frac{\alpha + \nu - \mu}{2}) \Gamma(\frac{\alpha - \mu - \nu}{2}) \end{aligned}$$

Para  $\{\mathbf{Re}c > 0, \mathbf{Re}\alpha > |\mathbf{Re}\mu| + |\mathbf{Re}\nu|\}$

En nuestro caso  $\alpha = 0$  por lo que tenemos que introducir una  $\varepsilon > 0$  para que se satisfaga la condición anterior.

$$I_Z = (2\pi)^2 N_R^2 \int dZ (Z)^{\varepsilon-1} (\frac{\tilde{\Omega}}{a} + \frac{\Omega}{a}) [K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}}(k_\perp Z) K_{-i\frac{\Omega}{a}}(k_\perp Z) e^{-i(\Omega - \tilde{\Omega})\eta}] = 1.$$

$$\begin{aligned} I_Z &= \frac{2^{\varepsilon-3}}{c^\varepsilon \Gamma(\varepsilon)} \Gamma[\frac{\varepsilon}{2} + \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} - \Omega)] \Gamma[\frac{\varepsilon}{2} + \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} + \Omega)] \\ &\quad \Gamma[\frac{\varepsilon}{2} - \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} - \Omega)] \Gamma[\frac{\varepsilon}{2} - \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} + \Omega)] (\frac{\tilde{\Omega}}{a} + \frac{\Omega}{a}) e^{-i(\Omega - \tilde{\Omega})\eta}. \end{aligned}$$

Ahora usamos la siguiente identidad para  $z \in \mathbf{C}$

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z \sin(\pi z)}.$$

Luego

$$\begin{aligned} I_Z &= \frac{2^{\varepsilon-3}}{c^\varepsilon \Gamma(\varepsilon)} \left( \frac{\tilde{\Omega}}{a} + \frac{\Omega}{a} \right) e^{-i(\Omega-\tilde{\Omega})\eta} \\ &\quad \times \left[ \frac{-\pi}{\left[ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} - \Omega) \right] \sin \left[ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} - \Omega) \right]} \right] \\ &\quad \times \left[ \frac{-\pi}{\left[ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} + \Omega) \right] \sin \left[ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} + \Omega) \right]} \right]. \end{aligned}$$

Cuando  $\tilde{\Omega} \neq \Omega$  se tiene que  $I_Z \propto \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}$ . En el límite en que  $\varepsilon \rightarrow 0$  esto implica  $I_Z \rightarrow 0$ .

Para el caso en que  $\tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ , pedimos que  $\tilde{\Omega} - \Omega$  tienda cero con la misma rapidez que  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Aproximamos a primer orden en el límite  $(\tilde{\Omega} - \Omega) \rightarrow 0$  y  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \approx \frac{\varepsilon}{2} + \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} - \Omega).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \pi \left[ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} - \Omega) \right]} &\approx \frac{2a}{\pi} \frac{1}{(\tilde{\Omega} - \Omega) + i\varepsilon} \\ &= \frac{2a}{\pi} \left[ \frac{\pi}{i} \delta(\tilde{\Omega} - \Omega) + V.P. \frac{1}{(\tilde{\Omega} - \Omega)} \right]. \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos después de simplificar

$$N_R^2 \frac{\pi^2}{\sinh \frac{\Omega}{a} \pi} \left[ \delta(\tilde{\Omega} - \Omega) + \mathcal{V.P.} \frac{1}{(\tilde{\Omega} - \Omega)} \right] = 1.$$

Así cuando  $\tilde{\Omega} = \Omega$

$$N_R = \pi^{-1} \left[ \sinh \frac{\Omega}{a} \pi \right].$$

La función solución a la ecuación de Bessel ya normalizada es

$$\psi_j(Z) = \pi^{-1} \left[ \sinh \pi \frac{\Omega}{a} \right]^{\frac{1}{2}} K_{i\frac{\Omega}{a}}(k_\perp Z).$$

Definimos los modos de Rindler para el campo escalar como

$$\phi_j(\eta, \vec{x}) = \pi^{-1} \left[ \sinh \pi \frac{\Omega}{a} \right]^{\frac{1}{2}} K_{i\frac{\Omega}{a}}(k_\perp Z) e^{i(k_x x + k_y y - \Omega \eta)}$$

la etiqueta  $j$  en este caso designa el conjunto de parámetros  $\{k_x, k_y, \Omega\}$  que caracterizan a cada modo del campo escalar.

### III. Cuantización de los modos de Rindler

La cuantización es completamente analoga a la sección anterior por lo que introducimos operadores de creación  $\hat{b}_j^\dagger$  y aniquilación  $\hat{b}_j$  que satisfacen relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{b}_j, \hat{b}_{j'}] = 0 \quad [\hat{b}_j^\dagger, \hat{b}_{j'}^\dagger] = 0 \quad [\hat{b}_j, \hat{b}_{j'}^\dagger] = \delta(j, j')$$

Construimos una base de Fock usando dichos operadores usando el procedimiento ya mencionado anteriormente.

Descomponemos el operador de campo  $\hat{\phi}$  en frecuencias positivas y negativas con respecto al parámetro temporal  $\eta$  haciendo un desarrollo del campo en modos de Rindler

$$\hat{\phi}(\eta, \vec{x}) = \int d\Sigma_{\eta=cte}. [\psi_j(\vec{x}) e^{-i(k_x x + k_y y)} e^{-i\Omega\eta} \hat{b}_j + \psi_j(\vec{x}) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{i\Omega\eta} \hat{b}_j^\dagger]$$

## III. Comparación entre los modelos de cuantización en el espacio de Minkowski y en el espacio de Rindler para el campo escalar

### I. La transformación de Bogolubov

Como hemos visto podemos describir el campo escalar en un marco inercial y en un marco acelerado, lo cual conduce a dos modelos de cuantización. Como veremos en esta sección ambos modelos no son equivalentes ya que el estado del vacío para un observador inercial no coincide con el estado de vacío para un observador acelerado y por ende los estados de Fock generados a partir de tales estados, aplicando los respectivos operadores de creación, serán distintos.

Como el campo es covariante no depende del marco de referencia en el que hacemos la descripción. Además como ya vimos tanto los modos de Minkowski como los modos de Rindler son conjuntos completos que nos permiten hacer un desarrollo del campo en frecuencias positivas y negativas, podemos escribir un modo de Rindler como una superposición de modos de Minkowski y viceversa:

$$\phi_j = \sum_k \alpha_{jk} \phi_k + \beta_{jk} \phi_k^*,$$

$$\phi_k = \sum_j \alpha_{jk}^* \phi_j - \beta_{jk} \phi_j^*.$$

Estas relaciones definen la transformación de Bogolubov.  $\alpha_{jk}$  y  $\beta_{jk}$  se denominan

coeficientes de Bogolubov y se calculan mediante:

$$\begin{aligned}
(\phi_j, \phi_k) &= -i \int d\Sigma_{\eta=cte}. [\phi_j \partial_\eta \phi_k^* - \partial_\eta \phi_j \phi_k^*] \\
&= -i \int d\Sigma_{\eta=cte}. \left\{ \sum_k' [\alpha_{jk'} \phi_{k'} + \beta_{jk'} \phi_{k'}^*] \right\} \partial_\eta \phi_k^* - \partial_\eta \left\{ \sum_{k'} [\alpha_{jk'} \phi_{k'} + \beta_{jk'} \phi_{k'}^*] \right\} \phi_k^* \\
&= \sum_{k'} \alpha_{jk'} (\phi_{k'}, \phi_k) + \beta_{jk'} (\phi_{k'}^*, \phi_k) \\
&= \alpha_{jk}
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
(\phi_j, \phi_k^*) &= -i \int d\Sigma_{\eta=cte}. [\phi_j \partial_\eta \phi_k - \partial_\eta \phi_j \phi_k] \\
&= -i \int d\Sigma_{\eta=cte}. \left\{ \phi_j \partial_\eta \left[ \sum_{j'} \alpha_{j'k}^* \phi_{j'} - \beta_{j'k} \phi_{j'}^* \right] - \partial_\eta \phi_j \left[ \sum_{j'} \alpha_{j'k}^* \phi_{j'} - \beta_{j'k} \phi_{j'}^* \right] \right\} \\
&= \sum_{j'} \alpha_{j'k}^* (\phi_j, \phi_{j'}^*) - \beta_{j'k} (\phi_j, \phi_{j'}) \\
&= -\beta_{jk}
\end{aligned}$$

Los coeficientes de Bogolubov satisfacen<sup>(5)</sup>

$$\sum_l \alpha_{kl} \alpha_{jl}^* - \beta_{kl} \beta_{jl} = \delta_{kj} \quad \sum_l \alpha_{kl} \beta_{jl} - \beta_{kl} \alpha_{jl} = 0$$

Usando la transformación de Bogolubov podemos relacionar los operadores de creación y aniquilación en un marco con respecto al otro marco. Para esto igualamos el desarrollo del campo en modos de Minkowski con el desarrollo en modos de Rindler.

$$\begin{aligned}
\sum_k \phi_k \hat{a}_k + \phi_k^* \hat{a}_k^\dagger &= \sum_j \phi_j \hat{b}_j + \phi_j^* \hat{b}_j^\dagger \\
&= \sum_j \hat{b}_j \left[ \sum_k \alpha_{jk} \phi_k + \beta_{jk} \phi_k^* \right] + \hat{b}_j^\dagger \left[ \sum_k \alpha_{jk}^* \phi_k^* + \beta_{jk}^* \phi_k \right] \\
&= \sum_k \phi_k \left[ \sum_j \alpha_{jk} \hat{b}_j + \beta_{jk}^* \hat{b}_j^\dagger \right] + \phi_k^* \left[ \sum_j \beta_{jk} \hat{b}_j + \alpha_{jk}^* \hat{b}_j^\dagger \right].
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\hat{a}_k = \sum_j \alpha_{jk} \hat{b}_j + \beta_{jk}^* \hat{b}_j^\dagger \quad \hat{a}_k^\dagger = \sum_j \beta_{jk} \hat{b}_j + \alpha_{jk}^* \hat{b}_j^\dagger$$

Para calcular los coeficientes de Bogolubov necesitamos transformar los modos de Minkowski al marco instantáneo en reposo del observador acelerado, ya que el producto interno que usaremos está definido para los modos de Rindler.

Los modos transformados son

$$\tilde{\phi}_k(\eta, \vec{x}) = [(2\pi)^3 2]^{-1} e^{i(\tilde{k}_x x + \tilde{k}_y y)} e^{ik_\perp Z \sinh(\theta - \eta)}$$

Sustituyendo esta expresión junto con los modos de Rindler en la definición de  $\alpha_{jk}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha_{jk} &= -i\pi^{-1} [(2\pi)^3 2]^{-1} [\sinh \frac{\Omega}{a} \pi]^\frac{1}{2} \\ &\int [K_{i\frac{\Omega}{a}}(k_\perp Z) e^{-i\Omega\tau} \overleftrightarrow{\partial}_\eta e^{-ik_\perp Z \sinh(\theta - a\tau)}] e^{i[(k_x - \tilde{k}_x)x + (k_y - \tilde{k}_y)y]} (aZ)^{-1} dX dY dZ \\ &= [(2\pi)^2]^{-1} [\sinh \frac{\Omega}{a} \pi]^\frac{1}{2} \int_0^\infty [\Omega + k_\perp aZ \cosh(\theta - a\tau)] \\ &\times [K_{i\frac{\Omega}{a}}(k_\perp Z) e^{-i\Omega\tau} e^{-ik_\perp Z \sinh(\theta - a\tau)}] (aZ)^{-1} dZ \\ &\times \delta(k_x - \tilde{k}_x) \delta(k_y - \tilde{k}_y) \end{aligned}$$

Para la integral en la variable Z usamos <sup>(7)</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K_{i\frac{\Omega}{a}}(k_\perp Z) e^{-ibZ} Z^{-1} dZ &= \frac{1}{4} \Gamma(i\frac{\Omega}{2a}) \Gamma(-i\frac{\Omega}{2a}) {}_2F_1(i\frac{\Omega}{2a}, -i\frac{\Omega}{2a}; \frac{1}{2}; -\frac{b^2}{k_\perp^2}) \\ &- i\frac{b}{2a} \Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\Omega}{2a}) \Gamma(\frac{1}{2} - i\frac{\Omega}{2a}) \\ &\times {}_2F_1(\frac{1}{2} + i\frac{\Omega}{2a}, \frac{1}{2} - i\frac{\Omega}{2a}; \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{k_\perp^2}) \\ &= \frac{\pi a}{2 \Omega} \{ [\sinh(\frac{\Omega}{2a} \pi)]^{-1} \cos[(\theta - a\tau) \frac{\Omega}{a}] - i [\cosh(\frac{\Omega}{2a} \pi)]^{-1} \sin[(\theta - a\tau) \frac{\Omega}{a}] \}, \end{aligned}$$

donde  $b = k_\perp \sinh(\theta - a\tau)$  y utilizamos las siguientes identidades para las funciones hipergeométricas  ${}_2F_1$  <sup>(7)</sup>

$${}_2F_1(\zeta, 1 - \zeta; \frac{1}{2}; z) = \cos(2\zeta \arcsin \sqrt{z})$$

$${}_2F_1(\zeta, 1 - \zeta; \frac{3}{2}; z) = \frac{[2\zeta - 1]^{-1}}{\sqrt{z}} \sin((2\zeta - 1) \arcsin \sqrt{z})$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K_{i\frac{\Omega}{a}}(k_\perp Z) e^{-ibZ} dZ &= \frac{\pi}{4} [b^2 + k_\perp^2]^\frac{1}{2} \{ \sec(\frac{\Omega \pi}{2a}) [k_\perp^{-\frac{\Omega}{a}} (\sqrt{b^2 + k_\perp^2} + b)^\frac{\Omega}{a} \\ &+ k_\perp^{-\frac{\Omega}{a}} (\sqrt{b^2 + k_\perp^2} - b)^\frac{\Omega}{a}] + \csc(\frac{\Omega \pi}{2a}) \\ &\times [k_\perp^{-\frac{\Omega}{a}} (\sqrt{b^2 + k_\perp^2} + b)^\frac{\Omega}{a} + k_\perp^{-\frac{\Omega}{a}} (\sqrt{b^2 + k_\perp^2} - b)^\frac{\Omega}{a}] \} \\ &= \frac{\pi}{4} [k_\perp \cosh(\theta - a\tau)]^{-1} \{ \frac{\cos[(\theta - a\tau) \frac{\Omega}{a}]}{\cosh(\frac{\Omega}{2a} \pi)} - i \frac{\sin[(\theta - a\tau) \frac{\Omega}{a}]}{\sinh(\frac{\Omega}{2a} \pi)} \}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\alpha_{jk} &= \pi^{-1} [\sinh \frac{\Omega}{a} \pi]^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\cos [(\theta - a\tau) \frac{\Omega}{a}]}{\sinh (\frac{\Omega}{2a} \pi)} - i \frac{\sin [(\theta - a\tau) \frac{\Omega}{a}]}{\cosh (\frac{\Omega}{2a} \pi)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos [(\theta - a\tau) \frac{\Omega}{a}]}{\cosh (\frac{\Omega}{2a} \pi)} - i \frac{\sin [(\theta - a\tau) \frac{\Omega}{a}]}{\sinh (\frac{\Omega}{2a} \pi)} \right\} e^{-i\Omega\tau} \delta_{k_x \bar{k}_x} \delta_{k_y \bar{k}_y} \\
&= [\sinh \frac{\Omega}{a} \pi]^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\Omega}{2a} \pi} e^{-i\theta \frac{\Omega}{a}} \delta_{k_x \bar{k}_x} \delta_{k_y \bar{k}_y}
\end{aligned}$$

El cálculo para el otro coeficiente es completamente análogo

$$\begin{aligned}
\beta_{jk} &= -i\pi^{-1} [(2\pi)^3 2]^{-1} [\sinh \frac{\Omega}{a} \pi]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \int [K_{i\frac{\Omega}{a}}(k_{\perp} Z) e^{-i\Omega\tau} \overleftrightarrow{\partial}_{\eta} e^{ik_{\perp} Z \sinh(\theta - a\tau)}] e^{i[(k_x + \bar{k}_x)x + (k_y + \bar{k}_y)y]} (aZ)^{-1} dX dY dZ \\
&= [\sinh \frac{\Omega}{a} \pi]^{\frac{1}{2}} \delta_{k_x - \bar{k}_x} \delta_{k_y - \bar{k}_y} \int_0^{\infty} [\Omega - k_{\perp} aZ \cosh(\theta - a\tau)] \\
&\quad \times [K_{i\frac{\Omega}{a}}(k_{\perp} Z) e^{-i\Omega\tau} e^{ik_{\perp} Z \sinh(\theta - a\tau)}] (aZ)^{-1} dZ.
\end{aligned}$$

Así

$$\beta_{jk} = [\sinh \frac{\Omega}{a} \pi]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\Omega}{2a} \pi} e^{-i\theta \frac{\Omega}{a}} \delta_{k_x - \bar{k}_x} \delta_{k_y - \bar{k}_y}$$

Podemos escribir ahora los operadores de creación y aniquilación del modelo de cuantización en espacio de Minkowski en términos de los respectivos operadores del modelo en espacio de Rindler.

$$\begin{aligned}
\hat{a}_k &= [\sinh \frac{\Omega}{a} \pi]^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} d\Omega [e^{\frac{\Omega}{2a} \pi} e^{-i\theta \frac{\Omega}{a}} \hat{b}_j + e^{-\frac{\Omega}{2a} \pi} e^{i\theta \frac{\Omega}{a}} \hat{b}_j^{\dagger}] \\
\hat{a}_k^{\dagger} &= [\sinh \frac{\Omega}{a} \pi]^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} d\Omega [e^{-\frac{\Omega}{2a} \pi} e^{-i\theta \frac{\Omega}{a}} \hat{b}_j + e^{\frac{\Omega}{2a} \pi} e^{i\theta \frac{\Omega}{a}} \hat{b}_j^{\dagger}]
\end{aligned}$$

## II. Efecto Unruh

Consideremos el estado de vacío del modelo de cuantización en el marco acelerado y apliquemos el operador de aniquilación del modelo de cuantización en el marco inercial usando la expresión obtenida mediante la transformación de Bogolubov.

$$\hat{a}_k |0\rangle_{Rindler} = \sum_j [\alpha_{jk} \hat{b}_j + \beta_{jk}^* \hat{b}_j^{\dagger}] |0\rangle_{Rindler} = \sum_j \beta_{jk} |1_j\rangle$$

Notamos que el estado de vacío no es el mismo en ambos modelos de cuantización a menos que  $\beta_{jk}$  sea cero para toda j. Físicamente esto implica que un observador inercial que no detecta partículas en el vacío, detectaría partículas si estuviera acelerado.

Para ver esto tomamos el operador de número correspondiente al modo  $\phi_i$  y lo aplicamos al vacío de Rindler.

$$\langle 0|\hat{N}_i|0\rangle_{Rindler} = \langle 0|\hat{b}_j^\dagger\hat{b}_j|0\rangle_{Rindler} = \sum_j |\beta_{jk}|^2$$

$\sum_j |\beta_{jk}|^2$  corresponde a la distribución de partículas que detecta el observador como resultado de estar acelerado. Este fenómeno es consecuencia de cuantizar el campo en un espacio-tiempo diferente al espacio de Minkowski.

En este caso el espacio de Rindler posee un vector de Killing global que nos permite definir que modos son de frecuencias positivas y negativas, y es con respecto a esta descomposición que podemos hablar de partículas introduciendo respectivos operadores de creación y aniquilación. Sin embargo en un espacio-tiempo general no existen tales vectores de Killing, por lo cual no esta claro como introducir el concepto de partícula usando estos modelos de cuantización. El hecho de que el vacío de Minkowski no corresponde al vacío de Rindler se debe a que estamos usando diferentes vectores de Killing para descomponer al campo en modos de frecuencias positivas y negativas.

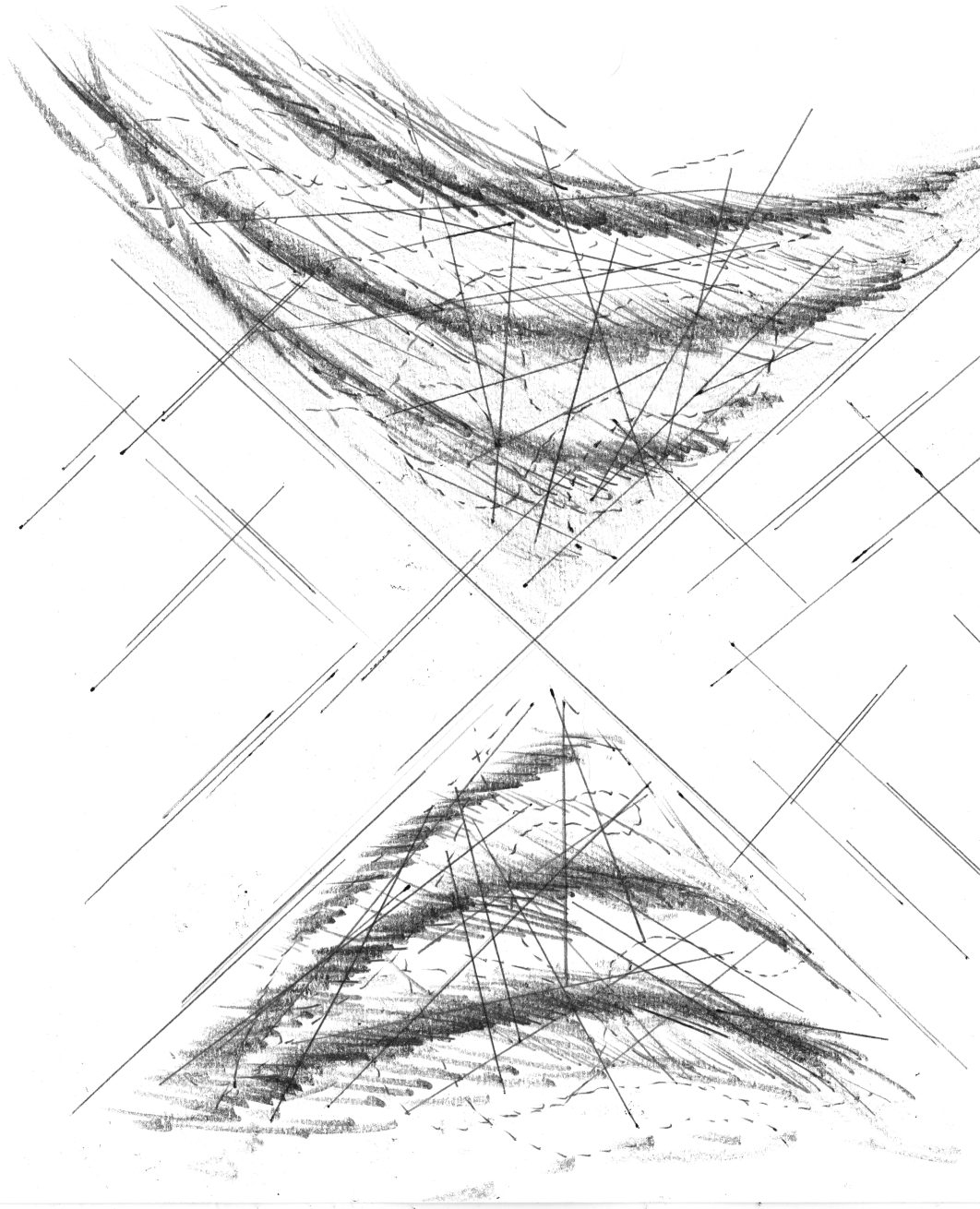
Usando el valor obtenido para  $\beta_{kj}$  calculamos

$$\sum_j |\beta_{jk}|^2 = \int_0^\infty d\Omega \frac{1}{e^{2\pi\frac{\Omega}{a}} - 1}$$

Notamos que la densidad de partículas que el observador acelerado detecta obedece una distribución de Bose-Einstein a una temperatura efectiva  $T = \frac{1}{2\pi a}$ . Es importante observar que la temperatura depende de la aceleración del detector. A este fenómeno se le conoce como efecto Unruh.

Si consideramos el principio de equivalencia, el observador acelerado corresponde a un observador en reposo en presencia de un campo gravitacional constante. Desde esta perspectiva es el campo gravitacional el que da origen a que el observador inmerso en dicho campo detecte una distribución de partículas.





## Capítulo III

# El campo electromagnético

### I. Ecuaciones de Maxwell en un marco inercial

Los campos eléctrico  $\vec{E} = (E^1, E^2, E^3)$  y magnético  $\vec{H} = (H^1, H^2, H^3)$  satisfacen las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{H}}{\partial x^0} \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 & \nabla \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Podemos obtener una interpretación física de tales ecuaciones al escribirlas en su forma integral.

Para el campo magnético, usando el teorema de Gauss, encontramos que el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada es cero. Lo cual es consecuencia de que no existan las cargas magnéticas.

$$\int_V \nabla \cdot \vec{H} d^3x = \oint_{\partial V} \vec{H} \cdot \hat{n} d^2x = 0,$$

$\hat{n}$  es un vector unitario perpendicular al elemento de volumen  $d^3x$ . Analogamente para el campo eléctrico se tiene que

$$\begin{aligned}\int_V \nabla \cdot \vec{E} d^3x &= \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot \hat{n} d^2x \\ &= 4\pi \int_V \rho d^3x,\end{aligned}$$

el flujo del campo eléctrico a través de la superficie que encierra al volumen  $V$  es proporcional a la carga contenida en dicho volumen.

Usando el teorema de Stokes encontramos que la circulación del campo eléctrico sobre cualquier contorno cerrado es igual a menos el cambio en el tiempo del flujo magnético:

$$\begin{aligned}\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{n} d^2x &= \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \hat{l} dx \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{H} \cdot \hat{n} d^2x,\end{aligned}$$

$\hat{l}$  es un vector unitario tangente al elemento de línea  $dx$ .

Similarmente se tiene que la circulación del campo magnético sobre cualquier contorno es proporcional al flujo de la corriente y de la corriente de desplazamiento.

$$\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot \hat{l} dx = \frac{4\pi}{c} \int_S \left( \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} d^2x$$

## II. El vector potencial $\mathbf{A}$

Podemos escribir a los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  usando un vector potencial auxiliar

$$\mathbf{A} = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \vec{A})$$

Clásicamente el vector potencial no tiene significado físico pero en electrodinámica cuántica sí, como lo prueba el efecto Aharonov-Bohm.

Escribimos entonces:

$$\vec{E} = \nabla A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{H} = \nabla \times \vec{A}.$$

Una vez dado el potencial podemos determinar de manera única los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , sin embargo, el vector potencial vectorial no está determinado de manera única; esto se debe a que las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante una transformación de norma dada por

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f \quad A'^0 = A^0 - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t},$$

donde  $f$  es una función escalar arbitraria que podemos usar a nuestro favor. Por ejemplo, podemos escoger  $f$  de tal forma que  $A^0 = 0$ .

El potencial vectorial  $\mathbf{A}'$  genera los mismos campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , lo cual se puede comprobar por sustitución directa en las ecuaciones que definen a los campos en términos del vector potencial.

## III. El tensor electromagnético

Un observador en reposo que mide los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  en su laboratorio, no coincide con las mediciones que realiza un observador que se mueve a velocidad constante con respecto al otro. Esto se debe a que dichos campos no

son cantidades invariantes bajo una transformación de Lorentz. La forma covariante de describir el campo electromagnético es mediante un tensor antisimétrico de rango dos definido como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

usando la definición de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  en términos del vector potencial encontramos que

$$[\mathbf{F}_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para un observador que se mueve a lo largo del eje de las  $x$  a velocidad constante, las componentes del tensor  $F_{\mu\nu}$  son distintas en comparación con un observador en reposo. El observador en reposo puede medir que el campo magnético es cero en su marco de referencia mientras que el observador que se mueve con respecto a él mide que el campo magnético es distinto de cero. Esto es claro al aplicar la transformación de Lorentz al tensor  $F_{\mu\nu}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{E}^1 &= E^1 & \tilde{E}^2 &= \gamma(E^2 - \beta H^3) & \tilde{E}^3 &= \gamma(E^3 + \beta H^2) \\ \tilde{H}^1 &= H^1 & \tilde{H}^2 &= \gamma(H^2 + \beta E^3) & \tilde{H}^3 &= \gamma(H^3 - \beta E^2) \end{aligned}$$

## IV. Ecuaciones de Campo

Analogamente a mecánica clásica podemos obtener ecuaciones para el campo electromagnético al pedir que la variación de la acción del campo sea cero.

Para encontrar la forma que debe tener la acción del campo electromagnético, recordemos que el campo satisface el principio de superposición por lo que las ecuaciones de campo deben ser ecuaciones diferenciales lineales. También debemos considerar que el variar la acción disminuye en un grado a ésta, por lo que debemos tener una forma cuadrática. Además la acción debe ser un escalar. El único escalar cuadrático que podemos formar usando  $F_{\mu\nu}$  es  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  <sup>(8)</sup>.

Dada una corriente  $j_\mu$  la acción del campo electromagnético es

$$S = \int \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu d\Theta$$

donde  $d\Theta$  es el elemento de volumen de espacio-tiempo.

Variamos la acción del campo

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \frac{1}{16\pi} \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) - j^\mu \delta A_\mu d\Theta \\
&= \int \frac{1}{16\pi} \{F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}\} - j^\mu \delta A_\mu d\Theta \\
&= \int \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta \left[ \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right] - j^\mu \delta A_\mu d\Theta \\
&= \int \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu - j^\mu \delta A_\mu d\Theta.
\end{aligned}$$

Integramos por partes y consideramos que el campo se desvanece en la infinidad

$$\delta S = \int \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - j^\mu \right\} \delta A_\mu d\Theta.$$

Aplicamos el principio de acción mínima  $\delta S = 0$ . Como  $\delta A_\mu$  es arbitraria el integrando debe ser cero, lo cual nos da las ecuaciones del campo electromagnético en el vacío.

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 4\pi j^\mu.$$

## V. Densidad de energía del campo y vector de Poynting

Multiplicamos por  $\vec{E}$  la ecuación

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

y multiplicamos por  $\vec{H}$  la ecuación

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

De restar las ecuaciones resultantes obtenemos

$$\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} - (\vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H})$$

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{H}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{H}}{8\pi} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \nabla \cdot \vec{S}$$

Donde hemos definido el vector de Poynting como

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$$

Integramos sobre un volumen  $V$  y aplicamos el teorema de Gauss al término que tiene la divergencia, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{H}}{8\pi} d^3x = - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3x - \oint_{\partial V} \vec{S} d^2x$$

Para un conjunto de cargas puntuales, podemos escribir la integral  $\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3x$  como  $\sum e\vec{v} \cdot \vec{E}$ .

Además

$$e\vec{v} \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{E}$$

donde  $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ . En esta expresión  $m$  es la masa en reposo de cada carga.

Luego si integramos sobre todo el espacio, el término de superficie en la ecuación se hace cero

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \int_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{H}}{8\pi} d^3x + \sum \mathcal{E} \right\} = 0.$$

Esta ecuación expresa la conservación de energía de el campo electromagnético con cargas presentes. Como el segundo término corresponde a la energía cinética de las cargas, el primer término corresponde a la energía del campo electromagnético.

Definimos la densidad de energía del campo como

$$W = \frac{\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{H}}{8\pi}.$$

Si integramos sobre un volumen finito obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \int_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{H}}{8\pi} d^3x + \sum \mathcal{E} \right\} = - \oint_{\partial V} \vec{S} d^2x.$$

Esta ecuación nos dice que el cambio en la energía total del campo y las cargas presentes en el volumen debe ser igual al flujo de energía que atraviesa la superficie que contiene a el volumen  $V$ . Por ello interpretamos a

$$\oint_{\partial V} \vec{S} d^2x$$

como el flujo de energía del campo y  $\vec{S}$  corresponde a la densidad de flujo de energía del campo.

## VI. El tensor de energía-momento

Consideremos en general la acción para un sistema físico cuya acción es

$$S = \int \Lambda(q, \frac{\partial q}{\partial x^\mu}) d\Theta$$

donde  $\Lambda$  funge como densidad lagrangiana y sólo depende de la coordenada  $q$  y la primera derivada de ésta.

Aplicamos el principio de acción mínima:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\mu}} \delta q_{,\mu} \right\} d\Theta \\ &= \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\mu}} \delta q \right) - \delta q \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\mu}} \right\} d\Theta = 0. \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\mu}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0.$$

Usamos que

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\nu}} \frac{\partial q_{,\nu}}{\partial x^\mu}.$$

Luego

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\nu}} \right) q_{,\mu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\nu}} \frac{\partial q_{,\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( q_{,\mu} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\nu}} \right).$$

Por otra parte

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} = \delta_{\mu\nu} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\nu}.$$

Así

$$\delta_{\mu\nu} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( q_{,\mu} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\nu}} \right).$$

Introducimos<sup>(8)</sup>

$$T_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \Lambda - q_{,\mu} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\nu}.$$

Notamos que se satisface

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0.$$

Es decir, la divergencia del tensor  $T_{\mu\nu}$  es cero. Esto es equivalente a que el flujo de la cantidad descrita por dicho tensor a través de una hipersuperficie tridimensional se conserve. Identificamos a  $T_{\mu\nu}$  como el tensor de energía-momento.

Para el campo electromagnético

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Usando la expresión para  $T^\mu_\nu$

$$T^\mu_\nu = -\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial \Lambda}{\partial A_{\sigma,\mu}} + \delta^\mu_\nu \Lambda.$$

Para encontrar la derivada que involucra a  $\Lambda$  calculamos la variación de  $\Lambda$

$$\begin{aligned} \delta\Lambda &= -\frac{1}{16\pi}[F_{\mu\sigma}\delta F^{\mu\sigma} + F^{\mu\sigma}\delta F_{\mu\sigma}] \\ &= -\frac{1}{8\pi}F^{\mu\sigma}\delta\left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi}F^{\mu\sigma}\delta\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\mu}, \end{aligned}$$

como  $\Lambda$  solo depende de las derivadas del potencial

$$\delta\Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\mu}} \delta q_{,\mu}.$$

Así

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial A_{\sigma,\mu}} = -\frac{1}{4\pi}F^{\mu\sigma}.$$

Luego

$$T^\mu_\nu = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\nu} F^{\mu\sigma} - \frac{1}{16\pi} \delta^\mu_\nu F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}.$$

Para hacer que la expresión para  $T_{\mu\nu}$  sea simétrica en los índices  $\mu, \nu$  agregamos el término

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A^\sigma}{\partial x_\mu} F_{\sigma\nu}$$

Podemos agregar este término sin problema alguno ya que se puede escribir como la divergencia de algo y al ser integrado sobre todo el espacio se anula lo cual no afecta la cantidad conservada.

$$\frac{\partial A^\sigma}{\partial x_\mu} F_{\sigma\nu} = \frac{\partial(A^\sigma F_{\sigma\nu})}{\partial x_\mu} - A^\sigma \frac{\partial F_{\sigma\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial(A^\sigma F_{\sigma\nu})}{\partial x_\mu}$$

donde usamos que  $F_{\sigma\nu,}{}^\mu = 0$  ya que no hay cargas presentes, sólo el campo.

Finalmente escribimos el tensor de energía-momento del campo electromagnético

$$T^\mu_\nu = \frac{1}{4\pi} \left\{ F^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu} - \frac{1}{4} F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda} \delta^\mu_\nu \right\}$$



## VII. Potenciales de Hertz

Otra manera de representar a los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  es a través del uso de potenciales de Hertz  $\vec{\Pi}_E$  y  $\vec{\Pi}_M$ . Escribimos al potencial vectorial como sigue:

$$A^0 = -\nabla \cdot \vec{\Pi}_E \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\Pi}_E + \nabla \times \vec{\Pi}_M$$

Al sustituir en la expresión para los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  que involucra a  $\mathbf{A}$  obtenemos<sup>(9)</sup>

$$\vec{E} = \nabla \nabla \cdot \vec{\Pi}_E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\Pi}_E - \frac{1}{c} \nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{\Pi}_M$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{\Pi}_E + \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_M.$$

## VIII. Ecuaciones de Maxwell usando potenciales de Hertz

Vamos a resolver las ecuaciones de Maxwell usando los potenciales de Hertz de tal forma que obtengamos un modo transversal eléctrico y un modo transversal magnético.

Para el modo transversal eléctrico  $U_E$  consideramos

$$\vec{\Pi}_E = \hat{k}_z U_M,$$

y para el modo transversal magnético  $U_M$

$$\vec{\Pi}_M = \hat{k}_z U_E.$$

En el marco inercial (espacio de Minkowski) las ecuaciones de Maxwell en el vacío son

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

escribimos el vector potencial como

$$\mathbf{A} = (-\partial_3 U_M, \partial_2 U_E, -\partial_1 U_E, \partial_0 U_M).$$

Las componentes del tensor electromagnético en términos de los hertzianos son

$$F_{01} = \partial_0 \partial_2 U_E - \partial_1 \partial_3 U_M \quad F_{02} = -\partial_0 \partial_1 U_E - \partial_2 \partial_3 U_M$$

$$F_{03} = \partial_0 \partial_0 U_M - \partial_3 \partial_3 U_M \quad F_{12} = -\partial_1 \partial_1 U_E - \partial_2 \partial_2 U_E$$

$$F_{23} = \partial_2 \partial_0 U_M + \partial_3 \partial_1 U_E \quad F_{31} = \partial_3 \partial_2 U_E - \partial_1 \partial_0 U_M$$

Al sustituir estas expresiones en las ecuaciones de Maxwell encontramos que los hertzianos satisfacen la ecuación

$$\square U_{(E,M)} = 0,$$

cuyas soluciones son ondas planas

$$U_{(E,M)} = (E, B)e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}.$$

Reescribimos las componentes del tensor, que llamaremos modos de Minkowski, usando las soluciones de onda plana

$$\begin{aligned} F_{01} &= \omega k_y U_E + k_x k_z U_M & F_{02} &= -\omega k_x U_E + k_y k_z U_M \\ F_{31} &= -k_y k_z U_E - \omega k_x U_M & F_{23} &= \omega k_y U_M - k_x k_z U_E \\ F_{03} &= (k_z^2 - \omega^2) U_M & F_{12} &= k_{\perp}^2 U_E \end{aligned}$$

## IX. Ecuaciones de Maxwell en el espacio de Rindler

Para el marco uniformemente acelerado, espacio de Rindler, el transporte paralelo de vectores y tensores en la variedad (que representan cantidades físicas que se desplazan a lo largo de geodésicas) requiere el uso de la derivada covariante; por ello escribiremos las ecuaciones de Maxwell en términos de este operador de derivación.

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0.$$

Para la métrica de Rindler las ecuaciones de Maxwell sin fuentes son

$$\partial_{\mu}(ZF^{\mu\nu}) = 0.$$

Proponemos a modo de *ansatz* <sup>(1)</sup>:

$$\mathbf{A} = (aZ\partial_3 U_M, \partial_2 U_E, -\partial_1 U_E, \frac{1}{aZ}\partial_0 U_M).$$

El escribir al vector potencial  $A^{\mu}$  usando potenciales hertzianos reduce a dos el número de grados de libertad. Estos grados de libertad son los que se observan en la naturaleza y se identifican con las 2 únicas proyecciones posibles del espín del fotón, a pesar de ser una partícula de espín uno.

Escribimos las componentes del tensor electromagnético usando los potenciales hertzianos:

$$\begin{aligned} F_{12} &= -\partial_1 \partial_1 U_E - \partial_2 \partial_2 U_E & F_{23} &= \frac{1}{aZ} \partial_2 \partial_0 U_M + \partial_1 \partial_3 U_E \\ F_{31} &= \frac{-1}{aZ} \partial_1 \partial_0 U_M + \partial_2 \partial_3 U_E & F_{01} &= -aZ \partial_1 \partial_3 U_M + \partial_2 \partial_0 U_E \\ F_{02} &= -aZ \partial_2 \partial_3 U_M - \partial_1 \partial_0 U_E & F_{03} &= -\partial_3 (aZ \partial_3 U_M) + \frac{1}{aZ} \partial_0 \partial_0 U_M \end{aligned}$$

Al sustituir  $F^{\mu\nu}$  en las ecuaciones de Maxwell notamos que los potenciales  $U_E$ ,  $U_M$  satisfacen la ecuación

$$\partial_0 \partial_0 U_{(E,M)} - a^2 Z^2 \nabla_{\perp}^2 U_{(E,M)} - a^2 Z \partial_3 (Z \partial_3 U_{(E,M)}) = 0,$$

con  $\nabla_{\perp}^2 = (\partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2)$ .

Al resolver por separación de variables obtenemos una solución de la forma

$$U_{(E,M)}(x^\mu) = e^{i(-\Omega T + k_x x + k_y y)} \mathcal{U}_{(E,M)}(Z)$$

donde  $\Omega$  es la frecuencia que se mide en el marco acelerado y  $\mathcal{U}_{(E,M)}(Z)$  satisface la ecuación

$$Z^2 \frac{d^2}{dZ^2} \mathcal{U}_{(E,M)} + Z \frac{d}{dZ} \mathcal{U}_{(E,M)} + \left[ \left( \frac{\Omega}{a} \right)^2 - k_{\perp}^2 Z^2 \right] \mathcal{U}_{(E,M)} = 0.$$

La solución que no diverge cuando  $Z \rightarrow \infty$  es

$$\mathcal{U}_{(E,M)}(Z) = C_{(E,M)} K_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta)$$

con  $\zeta = k_{\perp} Z$  y  $C_{(E,M)}$  es una constante asociada a los modos transversal magnético y eléctrico respectivamente.

Dicha solución es el análogo de onda plana para un marco uniformemente acelerado. Hacemos notar que la parte espacial de la función que involucra la coordenada  $Z$  es una función de Bessel, esto nos permite concluir que el efecto del campo gravitacional sobre la onda plana es que modifica la estructura espacial de esta. En cierta forma el campo gravitacional difracta el haz de luz.

Reescribimos las componentes del tensor electromagnético

$$F_{12} = k_{\perp}^2 C_E K_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) e^{i(-\Omega T + k_x x + k_y y)}$$

$$F_{23} = [ik_x k_{\perp} C_E K'_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) + \frac{1}{aZ} \Omega k_y C_M K_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta)] e^{i(-\Omega T + k_x x + k_y y)}$$

$$F_{31} = [ik_y k_{\perp} C_E K'_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) - \frac{1}{aZ} \Omega k_x C_M K_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta)] e^{i(-\Omega T + k_x x + k_y y)}$$

$$F_{01} = [\Omega k_y C_E K_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) - aZ ik_{\perp} k_x C_M K'_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta)] e^{i(-\Omega T + k_x x + k_y y)}$$

$$F_{02} = [-\Omega k_x C_E K_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) - aZ ik_{\perp} k_y C_M K'_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta)] e^{i(-\Omega T + k_x x + k_y y)}$$

$$F_{03} = -aZ k_{\perp}^2 C_M K_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) e^{i(-\Omega T + k_x x + k_y y)}.$$

## X. El vector de corriente conservada

Ya vimos que la métrica de Rindler no depende de  $\eta$  y que por ende admite un vector de Killing  $\frac{\partial}{\partial \eta}$  que es tangente a las trayectorias hiperbólicas de los observadores uniformemente acelerados.

En el marco instantáneo en reposo el vector se ve como  $\frac{\partial}{\partial \eta} = (1, 0, 0, 0)$ .

Usando el vector de Killing podemos definir un vector de corriente que se conserva con ayuda del tensor de energía-momento del campo electromagnético

$$\mathcal{J}^\alpha \equiv T^{\alpha\beta} \xi_\beta.$$

El tensor de energía-momento del campo electromagnético es

$$T^\alpha_\beta = \Re(F^\alpha_\mu F^{*\mu}_\beta) + \frac{1}{4} \delta^\alpha_\beta F^{\lambda\mu} F^*_{\lambda\mu}.$$

Donde el símbolo  $\Re$  denota la parte real y el símbolo  $*$  el complejo conjugado.

Dicho tensor es invariante bajo el arrastre del campo Killing

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial \eta}} T^\alpha_\beta = 0.$$

La ecuación de conservación para el vector de corriente es

$$\nabla_\alpha \mathcal{J}^\alpha = 0.$$

Las componentes espaciales de  $\mathcal{J}$  definen el vector de Poynting y la componente temporal integrada sobre la caña de Rindler nos da la energía del campo:

$$\int_0^\infty \mathcal{J}^0 \sqrt{|-g|} dx dy dZ,$$

siendo  $\sqrt{|-g|}$  el jacobiano de la transformación.

Si consideramos el corrimiento al rojo de la luz resultado de la dilatación temporal que produce el campo gravitacional, debemos modificar el tensor de energía-momento de tal forma que tome en cuenta diferentes modos del campo:

$$T^\alpha_\beta = \frac{1}{2} [(G^\alpha_\mu F^{*\mu}_\beta + G_{\beta\mu} F^{*\mu\alpha}) + \frac{1}{2} \delta^\alpha_\beta G^{\lambda\mu} F^*_{\lambda\mu}]$$

El modo  $G^{\mu\nu}$  es idéntico en estructura que el modo  $F^{\mu\nu}$  y corresponde a un modo del campo con frecuencia  $\tilde{\Omega}$  y componentes de vector de onda  $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y$ .

Debemos corroborar que el tensor así definido es una cantidad conservada:

$$T^\alpha_{\beta;\alpha} = \frac{1}{2} [(G^\alpha_\mu F^{*\mu}_{\beta;\alpha} + G_{\beta\mu;\alpha} F^{*\mu\alpha}) + \frac{1}{2} \delta^\alpha_\beta (G^{\beta\mu}_{;\alpha} F^*_{\beta\mu} + G^{\beta\mu} F^*_{\beta\mu;\alpha})]$$

donde se usó  $G^\alpha_{\mu;\alpha} = 0$  y  $F^{*\alpha\mu}_{;\alpha} = 0$ , luego

$$\begin{aligned} T^\alpha_{\beta;\alpha} &= \frac{1}{2} [G^\alpha_\mu F^{*\mu}_{\beta;\alpha} + G_{\beta\mu;\alpha} F^{*\mu\alpha}] \\ &= \frac{1}{2} [g_{\mu\beta} G^{\alpha\beta} F^{*\mu}_{\beta;\alpha} + g^{\mu\beta} G_{\beta\mu;\alpha} F^*_{\beta\alpha}] \\ &= \frac{1}{2} g_{\mu\beta} [G^{\alpha\beta} F^{*\mu}_{\beta;\alpha} + \frac{1}{g_{\mu\beta}} G_{\beta\mu;\alpha} F^*_{\beta\alpha}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

la igualdad a cero se sigue de que la última expresión entre corchetes es anti-simétrica en los índices  $\mu, \beta$  y esta contraída con el tensor simétrico  $g_{\mu\beta}$ .

## XI. Cuantización del campo electromagnético en el espacio de Rindler

Vamos a utilizar a  $T_0^0$  para definir un producto interno entre los modos del campo electromagnético con respecto al cual vamos a normalizar los modos a una constante. Dicha constante corresponde a la energía de cada *quanto* del campo electromagnético. De esta manera la energía del campo estará cuantizada siguiendo la idea originaria de Einstein de introducir el concepto de fotón.

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \sum_l \frac{1}{(aZ)^2} G_{0l} F_{0l}^* + \frac{1}{2} \left[ \sum_m -\frac{1}{(aZ)^2} G_{0m} F_{0m}^* + \sum_{m<n} G_{mn} F_{mn}^* \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_m \frac{1}{(aZ)^2} G_{0m} F_{0m}^* + \sum_{m<n} G_{mn} F_{mn}^* \right], \end{aligned}$$

para  $a, b = 1, 2, 3$

Al sustituir las expresiones correspondientes para los modos  $G^{\mu\nu}$  y  $F^{*\mu\nu}$  se tiene que

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{1}{2} \{ (\tilde{C}_E C_E^* + \tilde{C}_M C_M^*) (K'_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) K'_{-i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) \tilde{k}_\perp k_\perp (\tilde{k}_x k_x + \tilde{k}_y k_y)) \\ &\quad + K_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) K_{-i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) [(k_\perp^2 k_\perp^2) + \frac{\Omega \tilde{\Omega}}{(aZ)^2} (\tilde{k}_x k_x + \tilde{k}_y k_y)] \} \\ &\quad + \frac{i}{(aZ)^2} (\tilde{C}_E C_M^* - \tilde{C}_M C_E^*) (\tilde{k}_x k_y + \tilde{k}_y k_x) \\ &\quad \times [\Omega \tilde{k}_\perp K'_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) K_{-i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) - \tilde{\Omega} k_\perp K_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) K'_{-i\frac{\Omega}{a}}(\zeta)] \\ &\quad \times e^{i[-(\tilde{\Omega}-\Omega)T + (\tilde{k}_x - k_x)x + (\tilde{k}_y - k_y)y]}. \end{aligned}$$

Sin embargo ya que la energía del campo es un número real debemos quedarnos sólo con la parte real de  $T_0^0$ , es decir:

$$\begin{aligned} \Re(T_0^0) &= \frac{1}{2} \{ (\tilde{C}_E C_E^* + \tilde{C}_M C_M^*) (K'_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) K'_{-i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) \tilde{k}_\perp k_\perp (\tilde{k}_x k_x + \tilde{k}_y k_y)) \\ &\quad + K_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) K_{-i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) [(k_\perp^2 k_\perp^2) + \frac{\Omega \tilde{\Omega}}{(aZ)^2} (\tilde{k}_x k_x + \tilde{k}_y k_y)] \} \\ &\quad \times e^{i[-(\tilde{\Omega}-\Omega)T + (\tilde{k}_x - k_x)x + (\tilde{k}_y - k_y)y]}. \end{aligned}$$

Es importante notar que en la expresión que obtuvimos para la densidad de energía las constantes de normalización  $(\tilde{C}_E C_E^* + \tilde{C}_M C_M^*)$  nos indican que los modos magnéticos no se mezclan con los modos eléctricos. De hecho vamos a probar que son ortogonales con respecto al producto interno definido como:

$$\int_0^\infty \Re(T_0^0) d\Sigma_{\eta=0},$$

donde la integral es sobre la superficie de Cauchy  $\eta = 0$ .

Sustituimos la expresión que encontramos para  $\Re(T_0^0)$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Re(T_0^0) d\Sigma_{\eta=0} &= \int_0^\infty \left[ \frac{1}{2} (\tilde{C}_E C_E^* + \tilde{C}_M C_M^*) [k_\perp^4 K'_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}}(\zeta) K'_{-i\frac{\tilde{\Omega}}{a}}(\zeta) \right. \\ &\quad \left. + K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}}(\zeta) K_{-i\frac{\tilde{\Omega}}{a}}(\zeta) (k_\perp^4 + \frac{\tilde{\Omega}\Omega}{(aZ)^2} k_\perp^2)] aZ dZ \right. \\ &\quad \left. \times 4\pi^2 \delta(\tilde{k}_x - k_x) \delta(\tilde{k}_y - k_y) e^{-i(\tilde{\Omega}-\Omega)T} \right]. \end{aligned}$$

Usamos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} K'_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}}(\zeta) &= -\frac{1}{2} [K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}+1}(\zeta) + K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}-1}(\zeta)] \\ \frac{i\tilde{\Omega}}{a\zeta} K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}}(\zeta) &= \frac{1}{2} [K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}+1}(\zeta) - K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}-1}(\zeta)]. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Re(T_0^0) d\Sigma_{\eta=0} &= \int_0^\infty \frac{1}{4} (\tilde{C}_E C_E^* + \tilde{C}_M C_M^*) k_\perp^4 \\ &\quad \times [K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}+1}(\zeta) K_{-i\frac{\tilde{\Omega}}{a}+1}(\zeta) \\ &\quad + K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}-1}(\zeta) K_{-i\frac{\tilde{\Omega}}{a}-1}(\zeta) \\ &\quad + 2K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}}(\zeta) K_{-i\frac{\tilde{\Omega}}{a}}(\zeta)] aZ dZ \\ &\quad \times 4\pi^2 \delta(\tilde{k}_x - k_x) \delta(\tilde{k}_y - k_y) e^{-i(\tilde{\Omega}-\Omega)T}. \end{aligned}$$

Resolvemos la integral usando<sup>(7)</sup>

$$\begin{aligned} I_\zeta &= \int_0^\infty d\zeta \frac{a}{k_\perp} K_\lambda(\zeta) K_{\lambda'}(\zeta) \zeta = \frac{a}{k_\perp} \frac{1}{2\Gamma(2)} \\ &\quad \times \Gamma\left(\frac{1+\lambda+\lambda'+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\lambda-\lambda'+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\lambda+\lambda'+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\lambda-\lambda'+1}{2}\right) \end{aligned}$$

para  $\Re[1 \pm \lambda \pm \lambda' + 1] > 0$ .

El caso  $\lambda = -i\frac{\tilde{\Omega}}{a}$  y  $\lambda' = i\frac{\tilde{\Omega}}{a}$  no es singular como vamos a mostrar:

$$\begin{aligned} I_\zeta &= \frac{a}{k_\perp^2} \frac{1}{2\Gamma(2)} \\ &\quad \times \Gamma\left(1 + \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} - \Omega)\right) \Gamma\left(1 - \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} - \Omega)\right) \\ &\quad \times \Gamma\left(1 + \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} + \Omega)\right) \Gamma\left(1 - \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} + \Omega)\right) \\ I_\zeta &= \frac{\pi^2}{4ak_\perp^2} \frac{1}{2\Gamma(2)} \frac{(\tilde{\Omega}^2 - \Omega^2)}{\sinh\left(\frac{\pi(\tilde{\Omega}-\Omega)}{2a}\right) \sinh\left(\frac{\pi(\tilde{\Omega}+\Omega)}{2a}\right)}. \end{aligned}$$

En el caso que involucra el producto  $K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}+1}(\zeta)K_{-i\frac{\tilde{\Omega}}{a}+1}(\zeta)$  añadimos un factor  $\epsilon$  a modo de satisfacer  $\Re[1 \pm \lambda \pm \lambda' + 1] > 0$ , calculamos la integral y tomamos el límite en que  $\epsilon$  tiende a cero.

Tomamos  $\lambda = K_{-i\frac{\tilde{\Omega}}{a}+1+\epsilon}$  y  $\lambda' = K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}+1+\epsilon}$

$$I_\zeta = \frac{a}{k_\perp^2} \frac{1}{2\Gamma(2)} \\ \times \Gamma\left(1 + \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} - \Omega - i\epsilon)\right) \Gamma\left(1 - \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} - \Omega + i\epsilon)\right) \\ \times \Gamma\left(1 + \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} + \Omega)\right) \Gamma\left(1 - \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} + \Omega)\right)$$

$$I_\zeta \approx \frac{a}{k_\perp^2} \frac{i\pi}{2\Gamma(2)} \left(1 + \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} - \Omega - i\epsilon)\right) \\ \times \frac{(\tilde{\Omega} - \Omega - i\epsilon)}{(\tilde{\Omega} - \Omega + i\epsilon)} \frac{\frac{\pi(\tilde{\Omega} + \Omega)}{2a}}{\sinh\left(\frac{\pi(\tilde{\Omega} + \Omega)}{2a}\right)} \\ \times \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi(\tilde{\Omega} - \Omega + i\epsilon)}{2a}\right)},$$

aproximando a primer orden

$$\frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi(\tilde{\Omega} - \Omega + i\epsilon)}{2a}\right)} \approx \frac{2a}{\pi} \frac{1}{\alpha + i\epsilon} = \frac{2a}{\pi} \left[\frac{\pi}{i} \delta(\alpha) + V.P \frac{1}{\alpha}\right]$$

tomando el límite  $\epsilon \rightarrow 0$

$$I_\zeta \approx \frac{a\pi^2}{k_\perp^2 2\Gamma(2)} \left(1 + \frac{i}{2a}(\tilde{\Omega} - \Omega)\right) \frac{(\tilde{\Omega} + \Omega)}{\sinh\left(\frac{\pi(\tilde{\Omega} + \Omega)}{2a}\right)} \left[\delta(\tilde{\Omega} - \Omega) + V.P \frac{1}{\sinh(\tilde{\Omega} - \Omega)}\right].$$

El caso que involucra el producto  $K_{i\frac{\tilde{\Omega}}{a}-1}(\zeta)K_{-i\frac{\tilde{\Omega}}{a}-1}(\zeta)$  es completamente análogo.

Hemos probado que los modos  $(\tilde{P}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{\Omega})$  y  $(P, k_x, k_y, \Omega)$  son ortogonales. Aquí P y  $\tilde{P}$  se refieren a la polarización:  $(C_E, \tilde{C}_E), (C_M, \tilde{C}_M), (C_E, \tilde{C}_M), (C_M, \tilde{C}_E)$ .

Cuando  $\tilde{\Omega} = \Omega$  obtenemos el valor de las constantes de normalización para los 2 modos de polarización.

$$C_E = C_M = \frac{[a \sinh \frac{\Omega}{a} \pi]^\frac{1}{2}}{(2\pi)^\frac{3}{2} k_\perp}.$$

Finalmente obtenemos

$$\int_0^\infty T_0^0 d\Sigma_{\eta=0} = \Omega.$$

Con ello hemos demostrado que la densidad de energía para un modo del campo integrada sobre la parte espacial es  $\Omega$ . Así para cada modo del campo podemos hablar de *quantos* de energía  $\Omega$ . En este sentido hablaremos de los fotones del campo una vez construido el espacio de Fock.

Definimos los modos de Rindler como

$$F_{\mu\nu}(T, \vec{x}) = \frac{[a \sinh \frac{\Omega}{a} \pi]^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} k_{\perp}} K_{i\frac{\Omega}{a}}(k_{\perp} Z) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{-i\Omega T}.$$

Escribimos el operador del campo electromagnético como un desarrollo en modos Rindler de frecuencias positivas y negativas

$$\mathcal{R} \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = \sum_j \mathcal{R} F_{\mu\nu} \hat{b}_j + \mathcal{R} F_{\mu\nu}^* \hat{b}_j^{\dagger}.$$

La etiqueta  $j$  denota el conjunto de números cuánticos que caracterizan a los modos de Rindler. Estos son: las componentes del vector de onda  $k_x, k_y$ , la frecuencia  $\Omega$ , y la polarización ( $C_E$  para los modos eléctricos o  $C_M$  para los modos magnéticos).

Los operadores de creación  $\hat{b}_j^{\dagger}$  y aniquilación  $\hat{b}_j$  satisfacen relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{b}_j, \hat{b}_{j'}] = 0 \quad [\hat{b}_j^{\dagger}, \hat{b}_{j'}^{\dagger}] = 0 \quad [\hat{b}_j, \hat{b}_{j'}^{\dagger}] = \delta(j, j')$$

El espacio de Fock se construye en completa analogía como lo hicimos con el campo escalar.

## XII. Cuantización de los modos de Minkowski

Normalizamos los modos de Minkowski usando el producto interno que definimos para los modos de Rindler

$$\int_0^{\infty} d\Sigma_{t=0} \frac{1}{2} \left[ \sum_m F_{0m} F_{0m}^* + \sum_{m < n} F_{mn} F_{mn}^* \right] = \omega.$$

Sustituimos las expresiones que obtuvimos usando los potenciales de Hertz para los modos de Minkowski

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} d\Sigma_{t=0} \frac{1}{2} \left[ (\omega\omega' k_y k'_y |\mathcal{E}|^2 + k_x k'_x k_z k'_z |\mathcal{B}|^2) + (\omega\omega' k_x k'_x |\mathcal{E}|^2 + k_y k'_y k_z k'_z |\mathcal{B}|^2) \right. \\ & \quad \left. (\omega\omega' k_y k'_y |\mathcal{B}|^2 + k_x k'_x k_z k'_z |\mathcal{E}|^2) + (\omega\omega' k_x k'_x |\mathcal{B}|^2 + k_y k'_y k_z k'_z |\mathcal{E}|^2) \right. \\ & \quad \left. + (k_z^2 - \omega^2)(k_z'^2 - \omega'^2) |\mathcal{B}|^2 + k_{\perp}^2 k_{\perp}'^2 |\mathcal{E}|^2 \right] \\ & \quad e^{i[(k_x - k'_x)x + (k_y - k'_y)y + (k_z - k'_z)z - (\omega - \omega')t]} = \omega. \end{aligned}$$



Usamos la relación de dispersión  $|\vec{k}|^2 = \omega^2$  e integramos sobre el espacio a  $t = 0$

$$(2\pi)^3(|\mathcal{E}|^2 + |\mathcal{B}|^2)k_{\perp}^2\omega^2 = \omega,$$

de donde obtenemos las constantes de normalización

$$|\mathcal{E}| = |\mathcal{B}| = [(2\pi)^{\frac{3}{2}}k_{\perp}\omega^{\frac{1}{2}}]^{-1}.$$

Escribimos el operador de campo como un desarrollo en modos Minkowski de frecuencias positivas y negativas .

$$\mathcal{M}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = \sum_i \mathcal{M}F_{\mu\nu}\hat{a}_i + \mathcal{M}F_{\mu\nu}\hat{a}_i^{\dagger}.$$

La etiqueta  $i$  denota el conjunto de números cuánticos que caracterizan a los modos de Minkowski. Estos son: las componentes del vector de onda  $k_x, k_y$ ; la frecuencia  $\omega$ ; y la polarización,  $\mathcal{E}$  para los modos eléctricos o  $\mathcal{B}$  para los modos magnéticos.

Los operadores  $\hat{a}_i$  y  $\hat{a}_i^{\dagger}$  satisfacen relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_{i'}] = 0 \quad [\hat{a}_i^{\dagger}, \hat{a}_{i'}^{\dagger}] = 0 \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_{i'}^{\dagger}] = \delta_{i,i'}$$

Construimos el espacio de Fock en la manera usual definiendo un estado de vacío y aplicando operadores de creación para diversos modos del campo.

Es importante notar que el espacio de Fock para este modelo de cuantización es diferente al ya desarrollado para los modos de Rindler. Vamos a ver que al igual que en el campo escalar el estado de vacío definido para un observador inercial no coincide con el estado de vacío para un observador uniformemente acelerado.

### XIII. Comparación entre los modelos de cuantización en el espacio de Minkowski y en el espacio de Rindler para el campo electromagnético

#### I. La transformación de Bogolubov

Para calcular los coeficientes de Bogolubov seguimos el mismo procedimiento que para el campo escalar pero usando el producto interno definido para los modos de Rindler del campo electromagnético que involucra a  $\mathfrak{R}(T_0^0)$  <sup>(10)</sup>.

Evaluamos el producto interno entre un modo de Minkowski, con números cuánticos  $(P', k'_x, k'_y, \omega)$ ; y un modo de Rindler, con números cuánticos  $(P, k_x, k_y, \Omega)$

$$({}^M F_{\mu\nu}^{(i)}, {}^R F_{\mu\nu}^{(j)}) = \int_0^{\infty} d\Sigma_{\eta=0} \frac{1}{2} \left[ \sum_{\mu} {}^M F_{0\mu}^{(i)} {}^R F_{0\mu}^{*(j)} + \sum_{a < b} {}^M F_{ab}^{(i)} {}^R F_{ab}^{*(j)} \right].$$

En esta expresión  $i$  denota el conjunto de números cuánticos de los modos Minkowski,  $j$  el conjunto de números cuánticos de los modos Rindler; y  $\mu, \nu$  son las componentes del tensor.

Ya que los modos de Rindler son un conjunto completo en la cuña de Rindler, podemos expresar a los modos de Minkowski como un desarrollo de modos de Rindler usando los coeficientes de Bogolubov.

$${}^M F_{\mu\nu}^{(i)} = \sum_{j'} \sum_{\mu'\nu'} \alpha_{ij'} {}^R F_{\mu'\nu'}^{(j')} + \beta_{ij'}^* {}^R F_{\mu'\nu'}^{*(j')}.$$

Luego

$$\begin{aligned} ({}^M F_{\mu\nu}^{(i)}, {}^R F_{\mu\nu}^{(j)}) &= \int d\Sigma_{\eta=0} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\mu} \left[ \sum_{j'} \sum_{\mu'\nu'} \alpha_{ij'} {}^R F_{\mu'\nu'}^{(j')} + \beta_{ij'}^* {}^R F_{\mu'\nu'}^{*(j')} \right] {}^R F_{0\mu}^{*(j)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{a<b} \left[ \sum_{j'} \sum_{\mu'\nu'} \alpha_{ij'} {}^R F_{\mu'\nu'}^{(j')} + \beta_{ij'}^* {}^R F_{\mu'\nu'}^{*(j')} \right] {}^R F_{ab}^{*(j)} \right\}. \end{aligned}$$

Cuando normalizamos los modos de Rindler encontramos que solo aquellos modos con la misma polarización estaban permitidos, esto excluye los términos de la forma  ${}^R F_{0'\mu'}^{(j')} {}^R F_{ab}^{*(j)}$ .

Los términos  ${}^R F_{0'a'}^{(j')} {}^R F_{0b}^{*(j)}$  se cancelan con los términos  ${}^R F_{b'0'}^{(j')} {}^R F_{0a}^{*(j)}$ . Así la expresión que nos queda es:

$$\begin{aligned} ({}^M F_{\mu\nu}^{(i)}, {}^R F_{\mu\nu}^{(j)}) &= \sum_{j'} \alpha_{ij'} \int d\Sigma_{\eta=0} \frac{1}{2} \left[ \sum_{\mu} {}^R F_{0\mu}^{(j')} {}^R F_{0\mu}^{*(j)} + \sum_{a<b} {}^R F_{ab}^{(j')} {}^R F_{ab}^{*(j)} \right] + \\ &\quad \sum_{j'} \beta_{ij'} \int d\Sigma_{\eta=0} \frac{1}{2} \left[ \sum_{\mu} {}^R F_{0\mu}^{*(j')} {}^R F_{0\mu}^{(j)} + \sum_{a<b} {}^R F_{ab}^{*(j')} {}^R F_{ab}^{(j)} \right] \\ &= \sum_{j'} \alpha_{ij'} \delta_{jj'} \Omega. \end{aligned}$$

Donde hemos usado la normalización de los modos Rindler.

Así el coeficiente de Bogolubov es

$$\alpha_{ij} = \frac{({}^M F_{\mu\nu}^{(i)}, {}^R F_{\mu\nu}^{(j)})}{\Omega}.$$

Analogamente se demuestra que el otro coeficiente está dado por

$$\beta_{ij} = \frac{({}^M F_{\mu\nu}^{(i)}, {}^R F_{\mu\nu}^{*(j)})}{\Omega}.$$

Para poder evaluar los coeficientes necesitamos transformar los modos de Minkowski al marco instantáneo en reposo del observador acelerado.

$${}^M F_{01}^{(i)} = aZk_{\perp}(U_E k_y \cosh(\theta - \eta) + U_M k_x \sinh(\theta - \eta))$$

$${}^M F_{02}^{(i)} = aZk_{\perp}(-U_E k_x \cosh(\theta - \eta) + U_M k_y \sinh(\theta - \eta))$$

$${}^M F_{23}^{(i)} = k_{\perp}(-U_E k_x \sinh(\theta - \eta) + k_y U_M \cosh(\theta - \eta))$$

$${}^M F_{31}^{(i)} = -k_{\perp}(U_E k_y \sinh(\theta - \eta) + U_M k_x \cosh(\theta - \eta))$$

$${}^M F_{03}^{(i)} = -aZk_{\perp}^2 U_M$$

$${}^M F_{12}^{(i)} = k_{\perp}^2 U_E.$$

Sustituimos las expresiones que tenemos para los modos de Rindler y los modos de Minkowski transformados en la definición de  $\alpha_{ij}$ .

$$\begin{aligned} ({}^M F_{\mu\nu}^{(i)}, {}^R F_{\mu\nu}^{(j)}) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \{K_{-i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) [(aZ)^{-1} \Omega k_{\perp}' \cosh(\theta - \eta) (k_x k_x' + k_y k_y') \\ &\times (\mathcal{E}C_E^* + \mathcal{B}C_B^*)] + k_{\perp}^2 k_{\perp}'^2 (\mathcal{E}C_E^* + \mathcal{B}C_B^*) + k_{\perp}' \Omega \sinh(\theta - \eta) C_E^* \mathcal{B} (k_x' k_y - k_x k_y') \\ &+ k_{\perp}' \Omega C_M^* \mathcal{E} (k_x k_y' - k_x' k_y)] + K_{-i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) [i k_{\perp} k_{\perp}' \sinh(\theta - \eta) (\mathcal{E}C_E^* - i\mathcal{B}C_B^*) (k_x k_x' + k_y k_y') \\ &+ C_M^* \mathcal{E} \cosh(\theta - \eta) k_{\perp} k_{\perp}' (k_x' k_y - k_x k_y') - iC_E^* \mathcal{B} \cosh(\theta - \eta) k_{\perp} k_{\perp}' (k_x k_x' + k_y k_y')]\} \\ &\times e^{i[(k_x' - k_x)x + (k_y' - k_y)y]} e^{ik_{\perp} Z \sinh(\theta - \eta)} e^{i\Omega T} (aZ) dX dY dZ. \end{aligned}$$

Integramos sobre las variables  $X$  y  $Y$

$$\begin{aligned} ({}^M F_{\mu\nu}^{(i)}, {}^R F_{\mu\nu}^{(j)}) &= \frac{(2\pi)^2}{2} \delta_{k_x \tilde{k}_x}^{(j)} \delta_{k_y \tilde{k}_y}^{(j)} (\mathcal{E}C_E^* + \mathcal{B}C_B^*) \\ &\int_0^{\infty} \{K_{-i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) [\Omega k_{\perp}'^3 \cosh(\theta - \eta) + k_{\perp}'^4 aZ] \\ &+ iK_{-i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) [k_{\perp}'^4 aZ \sinh(\theta - \eta)]\} e^{ik_{\perp} Z \sinh(\theta - \eta)} e^{i\Omega T} dZ \end{aligned}$$

Usando las identidades

$$K_{i\frac{\Omega}{a}}'(\zeta) = -\frac{1}{2} [K_{i\frac{\Omega}{a}+1}(\zeta) + K_{i\frac{\Omega}{a}-1}(\zeta)]$$

$$\frac{i\tilde{\Omega}}{a\zeta} K_{i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) = \frac{1}{2} [K_{i\frac{\Omega}{a}+1}(\zeta) - K_{i\frac{\Omega}{a}-1}(\zeta)]$$

Reescribimos la integral a resolver

$$\begin{aligned} ({}^M F_{\mu\nu}^{(i)}, {}^R F_{\mu\nu}^{(j)}) &= \frac{(2\pi)^2}{2} \delta_{k_x \tilde{k}_x}^{(j)} \delta_{k_y \tilde{k}_y}^{(j)} (\mathcal{E}C_E^* + \mathcal{B}C_B^*) k_{\perp}'^4 \int_0^{\infty} \{[K_{-i\frac{\Omega}{a}}(\zeta) - \frac{i}{2} K_{-i\frac{\Omega}{a}-1}(\zeta) e^{(\theta - \eta)} \\ &+ \frac{i}{2} K_{-i\frac{\Omega}{a}+1}(\zeta) e^{-(\theta - \eta)}]\} e^{ik_{\perp} Z \sinh(\theta - \eta)} e^{i\Omega T} aZ dZ \end{aligned}$$

Para facilitar el álgebra introducimos la siguiente notación

$$\nu = -i\frac{\Omega}{a} \quad c = k_{\perp} \quad b = k_{\perp} \sinh(\theta - \eta)$$

$$S_{\pm}^{\nu} = \sec\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) \pm i \csc\left(\nu\frac{\pi}{2}\right)$$

$$S_{+}^{\nu\pm-1} = \pm i S_{+}^{\nu} \quad S_{-}^{\nu\pm-1} = \mp i S_{-}^{\nu}$$

Resolvemos la integral

$$\begin{aligned} ({}^M F_{\mu\nu}^{(i)}, {}^R F_{\mu\nu}^{(j)}) &= \frac{(2\pi)^2}{2} \delta_{k_x \tilde{k}_x}^{(j)} \delta_{k_y \tilde{k}_y}^{(j)} (\mathcal{E}C_E^* + \mathcal{B}C_B^*) \frac{k_{\perp}^4 e^{i\Omega T}}{(b^2 + c^2)} \left\{ [S_{-}^{\nu} \left(\frac{\sqrt{b^2 + c^2} - b}{c}\right)^{\nu} \right. \\ &\quad \times \left(\frac{-b}{\sqrt{b^2 + c^2}} - \nu\right) + S_{+}^{\nu} \left(\frac{\sqrt{b^2 + c^2} + b}{c}\right)^{\nu} \left(\frac{-b}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \nu\right)] \\ &\quad - \frac{i}{2} e^{(\theta - \eta)} [S_{-}^{\nu-1} \left(\frac{\sqrt{b^2 + c^2} - b}{c}\right)^{\nu-1} \left(\frac{-b}{\sqrt{b^2 + c^2}} - (\nu - 1)\right) \\ &\quad + S_{+}^{\nu-1} \left(\frac{\sqrt{b^2 + c^2} + b}{c}\right)^{\nu-1} \left(\frac{-b}{\sqrt{b^2 + c^2}} + (\nu - 1)\right)] \\ &\quad + \frac{i}{2} e^{-(\theta - \eta)} [S_{-}^{\nu+1} \left(\frac{\sqrt{b^2 + c^2} - b}{c}\right)^{\nu+1} \left(\frac{-b}{\sqrt{b^2 + c^2}} - (\nu + 1)\right) \\ &\quad \left. + S_{+}^{\nu+1} \left(\frac{\sqrt{b^2 + c^2} + b}{c}\right)^{\nu+1} \left(\frac{-b}{\sqrt{b^2 + c^2}} + (\nu + 1)\right)] \right\} \\ &= \frac{(2\pi)^2}{2} \delta_{k_x \tilde{k}_x}^{(j)} \delta_{k_y \tilde{k}_y}^{(j)} (\mathcal{E}C_E^* + \mathcal{B}C_B^*) \frac{k_{\perp}^4 e^{i\Omega T}}{(b^2 + c^2)} S_{-}^{\nu} \left[\frac{\sqrt{b^2 + c^2} - b}{c}\right]^{\nu} \\ &\quad \times \left\{ \left[\frac{-b}{\sqrt{b^2 + c^2}} - \nu\right] \left[1 - \frac{1}{2} e^{(\theta - \eta)} \left(\frac{\sqrt{b^2 + c^2} - b}{c}\right)^{-1} + \frac{1}{2} e^{-(\theta - \eta)} \left(\frac{\sqrt{b^2 + c^2} - b}{c}\right)\right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2} e^{(\theta - \eta)} \left(\frac{\sqrt{b^2 + c^2} - b}{c}\right)^{-1} + \frac{1}{2} e^{-(\theta - \eta)} \left(\frac{\sqrt{b^2 + c^2} - b}{c}\right)\right] \right\} \\ ({}^M F_{\mu\nu}^{(i)}, {}^R F_{\mu\nu}^{(j)}) &= \frac{(2\pi)^2}{2} \delta_{k_x \tilde{k}_x}^{(j)} \delta_{k_y \tilde{k}_y}^{(j)} (\mathcal{E}C_E^* + \mathcal{B}C_B^*) \frac{k_{\perp}^4 e^{i\Omega T}}{(b^2 + c^2)} S_{-}^{\nu} \left[\frac{\sqrt{b^2 + c^2} - b}{c}\right]^{\nu} \\ &\quad \times \left[ \left(\frac{-b}{\sqrt{b^2 + c^2}} - \nu\right) (2 \cosh^2(\theta - \eta)) + 2 \sinh(\theta - \eta) \cosh(\theta - \eta) \right] \end{aligned}$$

Notamos que en la expresión anterior las constantes de normalización nos están indicando que el cálculo del coeficiente para modos eléctricos es independiente de los modos magnéticos, análogamente a lo que teníamos en la normalización de los modos Rindler.

Escogemos un modo de polarización del campo, digamos eléctrico, y sustituimos el valor de la constante de normalización para dicho modo.

Finalmente simplificamos y obtenemos el valor del coeficiente.

$$\alpha_{ij}^E = \frac{i}{2\pi\omega^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{\frac{\Omega}{a}\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\Omega}{a}\theta}}{[\sinh \frac{\Omega}{a}\pi]^{\frac{1}{2}}} \delta_{k_x \tilde{k}_x}^{(j)} \delta_{k_y \tilde{k}_y}^{(j)}$$

Notamos que para obtener el coeficiente  $\beta_{jk}$  tenemos que resolver la misma integral si cambiamos  $\Omega$  por  $-\Omega$  en la definición de la  $\beta_{ij}$ .

Luego

$$\beta_{ij}^E = \frac{i}{2\pi\omega^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{-\frac{\Omega}{a}\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{\Omega}{a}\theta}}{[\sinh \frac{\Omega}{a}\pi]^{\frac{1}{2}}} \delta_{k_x \tilde{k}_x}^{(j)} \delta_{k_y \tilde{k}_y}^{(j)}$$

Las coeficientes de Bogolubov para los modos magnéticos son exactamente los mismos.

Como ya tenemos los coeficientes de Bogolubov podemos expresar los operadores de creación y aniquilación de los modos de Minkowski para el campo electromagnético en términos de los operadores de creación y aniquilación de los modos de Rindler.

$$\hat{a}_i = \frac{i}{\pi a^{\frac{1}{2}} \omega^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{i\frac{\Omega}{a}\theta}}{[\sinh \frac{\Omega}{a}\pi]^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty d\Omega [e^{\frac{\Omega}{a}\frac{\pi}{2}} \hat{b}_j - e^{-\frac{\Omega}{a}\frac{\pi}{2}} \hat{b}_j^\dagger]$$

$$\hat{a}_i^\dagger = \frac{i}{\pi a^{\frac{1}{2}} \omega^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{-i\frac{\Omega}{a}\theta}}{[\sinh \frac{\Omega}{a}\pi]^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty d\Omega [e^{-\frac{\Omega}{a}\frac{\pi}{2}} \hat{b}_j - e^{\frac{\Omega}{a}\frac{\pi}{2}} \hat{b}_j^\dagger]$$

## II. Efecto Unruh

Si aplicamos el operador de aniquilación para los modos de Minkowski del campo electromagnético al vacío de Rindler y usamos la expresión para dicho operador en términos de operadores para los modos de Rindler, notamos que el vacío de Rindler no coincide con el vacío de Minkowski; análogamente a lo que sucedía para el caso del campo escalar.

$$\hat{a}_i |0\rangle_{\mathcal{R}} = \sum_j \beta_{ij}^* |1_j\rangle$$

Ya discutimos que este fenómeno es resultado de usar diferentes vectores de Killing para definir los desarrollos del campo en frecuencias positivas y negativas, lo cual da lugar a dos modelos distintos de cuantización. Físicamente esto nos dice que el estado natural de vacío para el campo electromagnético es distinto para un observador inercial que para un observador uniformemente acelerado.

Consideremos un aparato de medición que detecta fotones, es decir, que hace click cuando absorbe un *quanto* del campo electromagnético. La detección de  $n$  fotones por parte del detector corresponde en nuestro esquema de la base de Fock a que el valor esperado del operador de número sobre el estado del vacío del campo sea  $n$ .

Si calibramos nuestro detector con respecto al marco inercial, el evento de cero clicks corresponde a que el valor esperado del operador de número, sobre el estado natural de vacío del marco inercial, sea cero.

$$\mathcal{M}\langle 0|\hat{N}_i|0\rangle_{\mathcal{M}} = 0,$$

donde  $\hat{N}_i$  es el operador de número usado en la cuantización del espacio de Minkowski.

Si colocamos nuestro detector, con la calibración ya descrita, en un marco uniformemente acelerado encontraremos que el detector hará click. Esto como resultado de que el estado natural de vacío en el marco acelerado, vacío de Rindler, no coincide con el estado natural de vacío en el marco inercial que fue con respecto al cual calibramos nuestro detector.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\langle 0|\hat{N}_i|0\rangle_{\mathcal{R}} &= \sum_j |\beta_{ij}|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi^2 a\omega} \int_0^\infty d\Omega \frac{1}{e^{\frac{\Omega}{a} 2\pi} - 1}. \end{aligned}$$

Esto nos dice que el observador acelerado detecta una distribución de Bose-Einstein con una temperatura efectiva  $T = \frac{1}{2\pi a^{-1}}$ , análogamente al caso del campo escalar.

### III. Densidad de energía del campo electromagnético

El operador de densidad de energía del campo electromagnético es:

$$\hat{T}_0^0 = \sum_{jj'} \Re(T_0^0) [\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j'} + \hat{a}_j \hat{a}_{j'}^\dagger + \hat{a}_j \hat{a}_{j'} + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j'}^\dagger].$$

Usando la relación de conmutación  $[\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}^\dagger] = \delta_{jj'}$  obtenemos:

$$\hat{T}_0^0 = \sum_{jj'} \Re(T_0^0) [2\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j'} + \delta_{jj'} + \hat{a}_j \hat{a}_{j'} + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j'}^\dagger],$$

donde

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \sum_l \frac{1}{(aZ)^2} G_{0l} F_{0l}^* + \frac{1}{2} \left[ \sum_m -\frac{1}{(aZ)^2} G_{0m} F_{0m}^* + \sum_{m<n} G_{mn} F_{mn}^* \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_m \frac{1}{(aZ)^2} G_{0m} F_{0m}^* + \sum_{m<n} G_{mn} F_{mn}^* \right]. \end{aligned}$$

Calculamos el valor esperado de la densidad de energía del campo electromagnético en términos de los modos Rindler sobre el vacío de Minkowski. Para hacer esto escribimos los operadores de creación y aniquilación de los modos de Rindler en términos de operadores de creación y aniquilación de los modos Minkowski usando la transformación de Bogolubov. Al tomar el valor esperado de la expresión resultante sobre el vacío de Minkowski obtenemos:

$$\mathcal{M}\langle 0|\hat{T}_0^0|0\rangle_{\mathcal{M}} = \sum_{i,j,j'} \Re(T_0^0) [2\beta_{ij}\beta_{ij'}^* + \delta_{jj'} + \alpha_{ij}\beta_{ij'}^* + \alpha_{ij'}^*\beta_{ij}]$$

La suma es sobre los números cuánticos de los modos Rindler  $\{j, j'\}$  y sobre los números cuánticos de los modos Minkowski  $\{i\}$  (excepto para el término de la delta).

El término  $\alpha_{ij}\beta_{ij'}^*$ , no contribuye, como podemos comprobar al hacer una de las integrales:

$$\sum_{jj'} \int dk_x^{(i)} \int dk_y^{(i)} \int dk_z^{(i)} \frac{1}{(2\pi)^2 \omega a} \frac{e^{(\frac{\Omega}{a} + \frac{\tilde{\Omega}}{a}) \frac{\pi}{2}} e^{i(\Omega + \tilde{\Omega}) \frac{\theta}{a}}}{[\sinh \frac{\Omega}{a} \pi]^{\frac{1}{2}} [\sinh \frac{\tilde{\Omega}}{a} \pi]^{\frac{1}{2}}} \delta_{k_x \tilde{k}_x}^{(j)} \delta_{k_y \tilde{k}_y}^{(j)} \delta_{k_x \tilde{k}_x}^{(j')} \delta_{k_y \tilde{k}_y}^{(j')}.$$

Usamos que  $k_z = k_{\perp} \sinh \theta$ ,  $\omega = k_{\perp} \cosh \theta$  y  $dk_z = k_{\perp} \cosh \theta d\theta$ . Luego al integrar sobre  $\theta$  obtenemos

$$\sum_{jj'} \int dk_x^{(i)} \int dk_y^{(i)} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(\frac{\Omega}{a} + \frac{\tilde{\Omega}}{a}) \frac{\pi}{2}}}{[\sinh \frac{\Omega}{a} \pi]^{\frac{1}{2}} [\sinh \frac{\tilde{\Omega}}{a} \pi]^{\frac{1}{2}}} \delta(\Omega + \tilde{\Omega}) \delta_{k_x \tilde{k}_x}^{(j)} \delta_{k_y \tilde{k}_y}^{(j)} \delta_{k_x \tilde{k}_x}^{(j')} \delta_{k_y \tilde{k}_y}^{(j')}.$$

Cuando integremos sobre  $\Omega$  la delta implica que solo cuando se satisfaga que  $\Omega = -\tilde{\Omega}$  la integral es distinta de cero. Pero  $\Omega > 0$  por lo que la integral vale cero.

Analogamente se demuestra que el término  $\alpha_{ij'}^* \beta_{ij}$  tampoco contribuye. Solo tenemos que calcular ahora la integral que involucra a  $\beta_{ij}\beta_{ij'}^*$  y a  $\delta_{jj'}$ .

Integramos primero sobre  $k_x^{(j)}, k_y^{(j)}, k_x^{(j')}, k_y^{(j')}$  ya que las deltas son muy fáciles de integrar.

$$\begin{aligned} \sum_{j,j'} \Re(T_0^0) [\sum_i 2\beta_{ij}\beta_{ij'}^* + \delta_{jj'}] &= \int \dots \int dk_x^{(i)} dk_y^{(i)} dk_z^{(i)} d\tilde{\Omega}^{(j')} \\ &\times \Re(T_0^0) \frac{2}{(2\pi)^2 \omega a} \frac{e^{-(\frac{\Omega}{a} + \frac{\tilde{\Omega}}{a}) \frac{\pi}{2}} e^{i(\tilde{\Omega} - \Omega) \frac{\theta}{a}}}{[\sinh \frac{\Omega}{a} \pi]^{\frac{1}{2}} [\sinh \frac{\tilde{\Omega}}{a} \pi]^{\frac{1}{2}}} + \int d\Omega^{(j)} dk_x^{(j)} dk_y^{(j)} \Re(T_0^0). \end{aligned}$$

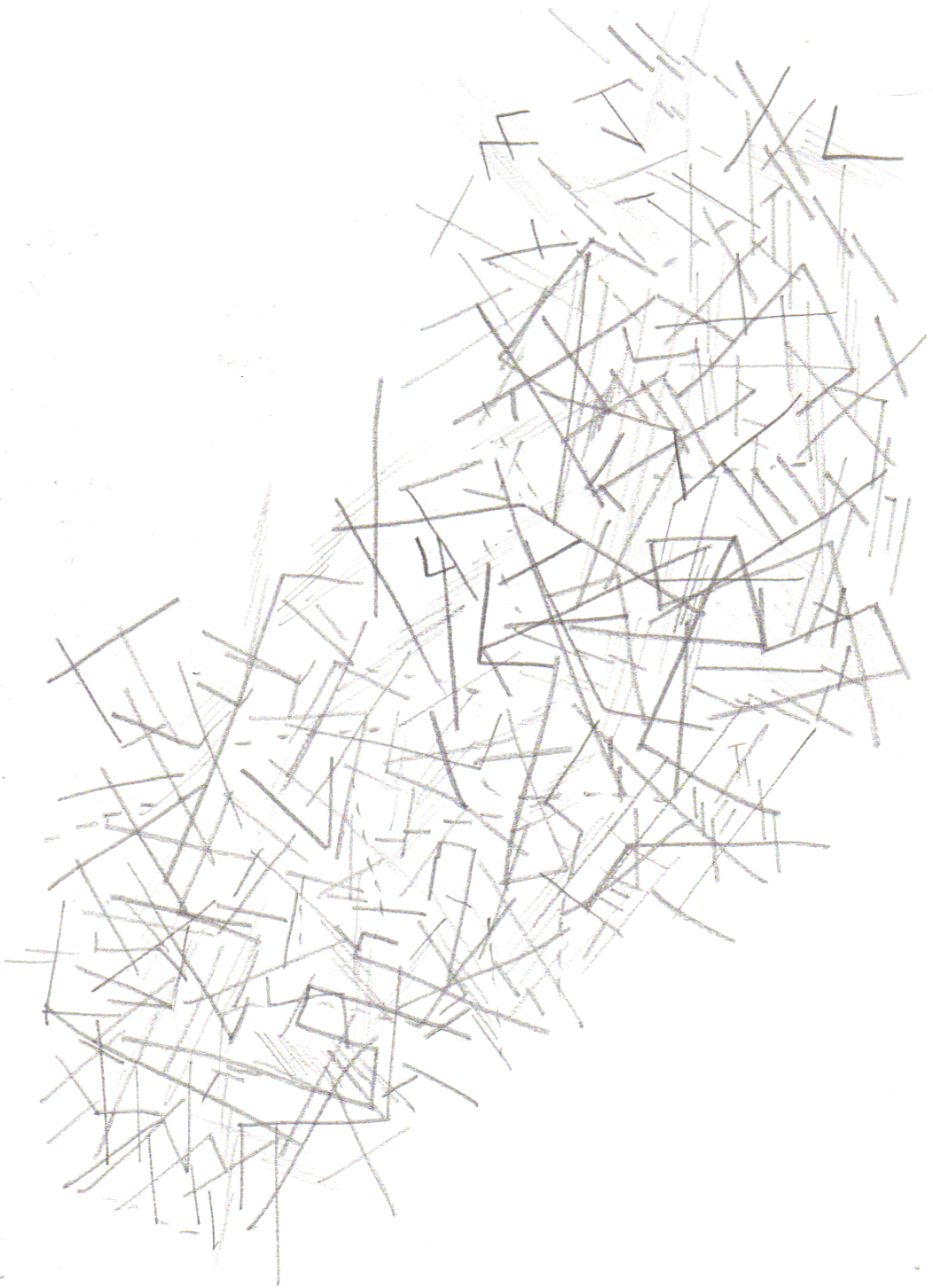
El integrar sobre  $k_z^{(i)}$  nos da una delta  $\delta(\tilde{\Omega} - \Omega)$  por lo que al integrar sobre  $\tilde{\Omega}$  nos queda

$$\begin{aligned} \sum_{j,j'} \Re(T_0^0) [\sum_i 2\beta_{ij}\beta_{ij'}^* + \delta_{jj'}] &= \int d\Omega^{(j)} [2 \frac{e^{-\frac{\Omega}{a} \pi}}{\sinh \frac{\Omega}{a} \pi} + 1] \int_0^{2\pi} d\phi \int k_{\perp} dk_{\perp} \Re(T_0^0) \\ &= \int d\Omega^{(j)} \frac{1}{\pi Z^4} [\frac{1}{e^{\frac{\Omega}{a} 2\pi} - 1} + \frac{1}{2}] [\Omega + \frac{\Omega^3}{a^2}]. \end{aligned}$$

Finalmente el valor esperado de la densidad de energía del campo sobre el vacío de Minkowski es:

$$de = \frac{1}{\pi Z^4} [\frac{1}{e^{\frac{\Omega}{a} 2\pi} - 1} + \frac{1}{2}] [\Omega + \frac{\Omega^3}{a^2}] d\Omega.$$

Notamos que tenemos el término de la energía de vacío y un término adicional que corresponde a una Planckiana multiplicada por un factor  $[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{\Omega^2}]$  que se asocia al espín del campo. Este resultado es consistente con los resultados previos encontrados por Deutsch y Candelas<sup>(11)</sup>, y por Hacyan<sup>(12)</sup>.







## Capítulo IV

# Conclusiones

Se resolvieron las ecuaciones de Maxwell en el espacio de Rindler usando potenciales de Hertz lo cual nos permitió escribir las componentes del tensor electromagnético y definir los modos de Rindler.

Ya que la métrica de Rindler admite un vector de Killing temporal, definimos un vector de corriente conservada contrayendo el vector de Killing con el tensor de energía-momento del campo electromagnético. Dicha corriente nos permitió definir un producto interno como la integral de la componente cero-cero del tensor de energía-momento sobre una superficie de Cauchy perpendicular al vector de Killing.

Normalizamos los modos de Rindler a una constante  $\Omega$  con respecto al producto interno y definimos al fotón como un *quanto* de energía  $\Omega$  del campo electromagnético. Obtuvimos el operador del campo electromagnético como un desarrollo en modos Rindler introduciendo operadores de creación y aniquilación para cada modo.

Una vez cuantizado el campo electromagnético se calcularon los coeficientes de Bogolubov entre un modo Rindler y un modo Minkowski, usando como herramienta el producto interno definido en la cuantización. Se procedió a calcular el efecto Unruh y encontramos que el valor esperado, sobre el vacío de Rindler, de el operador de número asociado a los modos de Minkowski es una distribución de Bose-Einstein con una temperatura efectiva que depende de la aceleración; análogamente a como sucede en el caso de campo escalar.

Finalmente se calculó el valor esperado de la densidad de energía del campo electromagnético en el espacio Rindler sobre el vacío de Minkowski. Obtuvimos que aparte de la energía de vacío hay un término extra que es una Planckiana multiplicada por un factor  $[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{\Omega^2}]$ , que en trabajos previos se asocia con el espín del campo.

Este trabajo sirve como punto de partida para construir un modelo de detector que sirva para medir el efecto Unruh, ya que tiene la ventaja de que el campo electromagnético se acopla de manera natural a la materia a diferencia de los campos escalares.

**Exitus!**

## Bibliografía

- (<sup>1</sup>) S. Hacyan, *Journal of Optics* **13**, 105710 (2011).
- (<sup>2</sup>) B. Unruh, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- (<sup>3</sup>) C. Isham, *Differential geometry for physicists*, World Scientific (2001).
- (<sup>4</sup>) R. Wald, *General Relativity*, Chicago University Press (1984).
- (<sup>5</sup>) N. D. Birrel & P. C. W. Davies, *Quantum field theory in curved space-time*, Cambridge University Press (1994).
- (<sup>6</sup>) S. Fulling, *Phys. Rev. D* **7**, 2850 (1973).
- (<sup>7</sup>) Prudnikov, *Integrals and series* Vol. 2 pag. 385. ,Vol 3 pag. 460 (1990).
- (<sup>8</sup>) D. Landau & Lifshitz, *Classical theory of fields*, Pergamon Press (1971).
- (<sup>9</sup>) A. Nisbet, *Proc. R. Soc. London* **231**, 250 (1955)
- (<sup>10</sup>) R. Jáuregui, M. Torres, S. Hacyan, *Phys. Rev.* **43**, 3979 (1991)
- (<sup>11</sup>) P. Candelas and D. Deutsch, *Proc. R. Soc. London* **A254**, 79 (1977); **A362**, 251 (1978)
- (<sup>12</sup>) S. Hacyan, *Phys. Rev. D* **32**, 3216 (1985)

# Índice general

|             |  |           |
|-------------|--|-----------|
| I.          | Introducción . . . . .   | 5         |
| <b>I.</b>   | <b>Espacio-Tiempo</b>  | <b>7</b>  |
| I.          | Variedad suave . . . . .   | 7         |
| II.         | Vector, vector dual y tensores . . . . .   | 8         |
| III.        | Cambiando de sistema coordenado . . . . .  | 9         |
| IV.         | El tensor métrico . . . . .  | 10        |
| V.          | Derivada de Lie y vector de Killing . . . . .  | 10        |
| VI.         | Derivada covariante . . . . .  | 12        |
| VII.        | El espacio de Minkowski . . . . .  | 13        |
| VIII.       | Coordenadas de Rindler . . . . .   | 14        |
| <b>II.</b>  | <b>El campo escalar real</b>   | <b>17</b> |
| I.          | Teoría de campo en el espacio de Minkowski . . . . .   | 17        |
| I.          | Cuantización . . . . .   | 19        |
| II.         | La base de Fock . . . . .  | 19        |
| III.        | El tensor de energía-momento . . . . .   | 20        |
| II.         | Cuantización del campo escalar para<br>un espacio-tiempo estático . . . . .  | 22        |
| I.          | El campo escalar en el espacio de Rindler . . . . .  | 24        |
| II.         | Normalización de los modos de Rindler . . . . .  | 25        |
| III.        | Cuantización de los modos de Rindler . . . . .   | 27        |
| III.        | Comparación entre los modelos de cuantización en el espacio de<br>Minkowski y en el espacio de Rindler para el campo escalar . . . . . | 27        |
| I.          | La transformación de Bogolubov . . . . .   | 27        |
| II.         | Efecto Unruh . . . . .   | 30        |
| <b>III.</b> | <b>El campo electromagnético</b>   | <b>33</b> |
| I.          | Ecuaciones de Maxwell en un marco inercial . . . . .   | 33        |
| II.         | El vector potencial A . . . . .  | 34        |
| III.        | El tensor electromagnético . . . . .   | 34        |
| IV.         | Ecuaciones de Campo . . . . .  | 35        |
| V.          | Densidad de energía del campo<br>y vector de Poynting . . . . .  | 36        |
| VI.         | El tensor de energía-momento . . . . .   | 38        |
| VII.        | Potenciales de Hertz . . . . .   | 40        |
| VIII.       | Ecuaciones de Maxwell usando potenciales de Hertz . . . . .  | 40        |
| IX.         | Ecuaciones de Maxwell en el espacio de Rindler . . . . .   | 41        |
| X.          | El vector de corriente conservada . . . . .  | 42        |

|  |           |
|--|-----------|
| XI. Cuantización del campo electromagnético en el espacio de Rindler   | 44        |
| XII. Cuantización de los modos de Minkowski . . . . .  | 47        |
| XIII. Comparación entre los modelos de cuantización en el espacio de<br>Minkowski y en el espacio de Rindler para el campo electro-<br>magnético . . . . . | 48        |
| I. La transformación de Bogolubov . . . . .  | 48        |
| II. Efecto Unruh . . . . .   | 52        |
| III. Densidad de energía del campo electromagnético . . . . .  | 53        |
| <b>IV. Conclusiones</b>  | <b>57</b> |