



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

LA LÓGICA DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA

*La cuestión de la lógica de primer orden y la lógica de
segundo orden*

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRO EN
FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y LÓGICA DE LA
CIENCIA

PRESENTA:

JOSÉ LUIS BARRAGÁN OCHOA

ASESOR: DR. CARLOS TORRES ALCARAZ
FACULTAD DE CIENCIAS

MÉXICO D.F.

Febrero 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero agradecer, en primer lugar, al Dr. Carlos Torres Alcaraz por su apoyo incondicional al trabajo que he realizado dentro de esta maestría en estos dos años. Siempre pude contar con sus buenos consejos, su excelente orientación y su buen trato para sacar adelante este proyecto, por lo que estoy profundamente agradecido.

A mis sinodales, la Dra. Carmen Martínez Adame, el Dr. Max Fernández de Castro, el Dr. Francisco Hernández Quiroz y el Dr. Favio Miranda Perea, por su apoyo en leer mi trabajo para cumplir con el plazo límite, por sus observaciones que enriquecieron de manera cualitativa el mismo y por todo el apoyo y sus atenciones que tuvieron conmigo durante todo el proceso de investigación.

A la Universidad Autónoma de México, por haberme brindado la oportunidad de estudiar y educarme de manera gratuita en una institución de excelencia.

A la coordinación del posgrado, en especial al Dr. Jorge Linares Salgado, al Dr. Axel Barceló Aspeitia, a Noemí Vidal Reyes, a la Lic. Elizabeth Barajas García y a la Dra. Fabiola Villela con los que siempre pude contar para resolver cualquier problema que se me presentó en la maestría. Gracias por todo su apoyo, orientación y buena disposición.

A todos mis profesores que tuve durante la maestría, que me enseñaron y me proporcionaron herramientas para ser un mejor académico. Gracias por compartir su conocimiento conmigo.

A CONACYT por haberme concedido una beca desde agosto del 2010 hasta agosto del 2012 y con ello brindarme la posibilidad de enfocarme

exclusivamente en mis estudios sin tener que preocuparme por los recursos económicos para sostenerme en los mismos.

A mi familia, Sandra y Arcelia, porque siempre han sido fuente de motivación e inspiración para edificarme como ser humano y como académico. Gracias por su apoyo en todos los sentidos y por su amor incondicional. Metas como estas sólo se cumplen si hay personas como ustedes cerca.

A Jessica por compartir conmigo este proyecto de vida, por estar a mi lado apoyándome siempre y por su amor que ha sido inspiración y fortaleza para ser cada día una mejor persona. Porque su cariño y compañía hacen que el paso por esta vida sea mucho más divertido.

Gracias a aquellos, todos, los que con su amor, apoyo y buenos consejos hicieron posible concretar este objetivo.

Índice

Agradecimientos	1
Introducción	4
1. El programa formalista de Hilbert	11
2. El programa logicista de Frege	18
3. Skolem y la distinción entre lógica de primer y segundo orden	26
4. La discusión Shapiro vs Quine	29
<i>4.1 El caso de la lógica de segundo orden en Shapiro</i>	29
<i>4.2 Shapiro frente a la Filosofía de la Lógica de Quine</i>	34
5. Formalización de la aritmética de Peano	39
6. Otras posturas en torno a la discusión	47
<i>6.1 Boolos</i>	47
<i>6.2 Hintikka</i>	49
<i>6.3 Väänänen</i>	50
7. Reflexiones finales	53
Bibliografía	57

Introducción

Quine, en su texto *Filosofía de la Lógica*,¹ asegura que la lógica de primer orden tiene grandes ventajas sobre la lógica de segundo orden. Entre otras, le encuentra las siguientes cualidades, o le atribuye las siguientes virtudes: a) es el lenguaje más adecuado para traducir enunciados con cuantificadores múltiples, b) posee una semántica que caracteriza las condiciones de verdad de los enunciados compuestos, c) posee un sistema extensional² que satisface incluso a aquellos que defienden al nominalismo, d) como lenguaje formal, posee los tan deseados resultados metateóricos como son la consistencia, la corrección, la compacidad y la completud semántica, e) el teorema de Löwenheim y Skolem se sostiene en ésta lógica. Dado que la lógica de primer orden tiene todos estos beneficios, asegura, sólo ella tiene el derecho a ser considerada como “la lógica” y por ende, se puede justificar el que sea la herramienta de todas las ciencias y, en especial, de las matemáticas. Shapiro, por otro lado, en su texto *Fundamentos sin fundacionalismo: el caso para la lógica de segundo orden*,³ le responde a Quine mostrando las cualidades de la lógica de segundo orden al tiempo que argumenta que ésta es la lógica de la práctica matemática, ya que la teoría de conjuntos se expresa mejor con lógica de segundo orden. La discusión entre Quine y Shapiro parte del problema planteado por Quine acerca de cuál teoría –la lógica de primer orden o la de segundo orden– merece llamarse “Lógica” y de donde puede inferirse la pregunta sobre cuál de ellas es la que mejor se adapta a la práctica matemática.

Detrás de esta discusión se halla la pregunta por los beneficios que la lógica de primer orden ofrece a las matemáticas, las cuestiones de si la lógica de primer orden es en realidad la herramienta que mejor se adapta a la práctica matemática y la de si la lógica de segundo orden es tan sólo una ampliación de ella. En otras

¹ *Philosophy of Logic*.

² Esto es, que las proposiciones poseen un valor de verdad binario (0 o 1) el cual está de acuerdo con una teoría del significado dada por el sistema. Dicho en otras palabras, la lógica de predicados de primer orden es una extensión conservativa de la lógica proposicional.

³ *Foundations Without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*.

palabras se trata de ver si la tesis, según la cual la lógica de segundo orden es la lógica de la práctica matemática, está justificada. Al respecto, Quine presenta los beneficios que tiene la lógica de primer orden y Shapiro muestra en su texto los beneficios que tiene la lógica de segundo orden. Como es posible observar, ambos autores afirman que la lógica propuesta, distintas en ambos casos, es el lenguaje más apropiado para expresar la práctica matemática.

Es pertinente señalar que por práctica matemática se entenderá la labor que realizan los matemáticos cuando hacen teoría de conjuntos o cuando trabajan con los axiomas de Peano, entre otros. Es decir, por práctica matemática nos estamos refiriendo a ese tipo de matemáticas. Cuando hablamos de la lógica de la práctica matemática, estaremos hablando de cuál lógica expresa mejor esa práctica o dicho en otras palabras, cuál lógica prefieren usar los matemáticos al hacer teoría de conjuntos o al trabajar con los axiomas de Peano por ejemplo. Lo que se está haciendo, es darle un nombre, el de práctica matemática, al trabajo que hacen los matemáticos cuando hacen teoría de conjuntos. Así, nombramos también a la lógica de la práctica matemática, como la herramienta lógica que usan los matemáticos cuando hacen teoría de conjuntos. Así mismo, a continuación haré un breve resumen de lo que se entiende por lógica de primer orden y por lógica de segundo orden.

Lógica de primer orden

La Lógica de Primer Orden, también conocida como lógica de predicados o cálculo de predicados, es una extensión de la lógica proposicional. Esta lógica es un lenguaje formal a la que se le incluyen cuantificadores cuyo alcance es para variables de individuo y donde se tienen predicados y funciones cuyos argumentos son sólo constantes o variables de individuo. En este modelo lógico, la validez de los argumentos no sólo depende de la manera en que las proposiciones se combinan con los conectivos (como ocurriría con la lógica proposicional), sino que

depende de su estructura interna, es decir, además de variables y constantes para individuos se agregan los cuantificadores *existencial* y *universal*.

En la lógica de predicados las proposiciones se analizan en sujeto y predicado, donde el término *predicado* se utiliza en un sentido general, por lo que se abarcan no sólo propiedades de individuos sino propiedades de conjuntos finitos y ordenados de individuos. Esta lógica se sirvió de notaciones funcionales como $f(x)$, $g(x,y,z)$ etc., para tener funciones de uno o más argumentos. Esta notación, tomada de Frege, es conocida como funciones proposicionales, esto es, funciones que tienen como dominio un conjunto de individuos y como imágenes proposiciones acerca de dichos individuos. Con esta notación se tiene un lenguaje muy eficaz para el análisis de la estructura lógica de las teorías matemáticas y cabe señalar que en la notación moderna las funciones pueden también representar operaciones de suma, resta, multiplicación etc., es decir, lo que se entiende por el sentido usual de la palabra función.

La semántica de la lógica de predicados supone un conjunto U de individuos, denominado dominio de interpretación. También supone que dado un predicado $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n argumentos es una interpretación I de P , es decir, es una asignación P^I de valores de verdad a todos los individuos de U^n . La idea es que un conjunto de individuos $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de U^n está en la *relación* P^I si y sólo si $P^I(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$. Cabe señalar que las reglas que determinan el valor de verdad para las fórmulas construidas con los cuantificadores y los conectivos son obvias. En este contexto, se puede decir que una fórmula es *satisfacible* sobre un dominio, si hay una interpretación que la hace verdadera para algunos individuos. Un problema que se presenta en este punto es que cuando el dominio U es infinito, no es posible generar todas las interpretaciones posibles de un predicado P , de tal forma que el concepto de *totalidad de interpretaciones* queda como algo impreciso. De hecho, en muchos casos al establecer una interpretación se vuelve imposible indicar, para un predicado, el valor de verdad correspondiente a cada conjunto de argumentos. El problema radica, básicamente, en que además de los

conectivos (que se tienen desde la lógica proposicional) se incluyen los operadores $\forall$ y $\exists$ para expresar la universalidad y la existencia, es decir, los cuantificadores. Cuando el dominio de interpretación es finito, es posible decir que el uso de los cuantificadores es, en un sentido, superficial. Pero cuando el dominio de interpretación es infinito, no es posible determinar si la propiedad P^I es válida o no para todos los individuos o si lo es para algunos de ellos, es decir, no es posible decidir si $\forall x P(x)$ o $\exists x P(x)$ son verdaderas o no. Sin embargo, la teoría semántica de la lógica de predicados pasa por alto esta cuestión y pretende que todas las fórmulas cerradas (sin variables libres) tienen sentido incluso cuando no hay manera de verificarlas.⁴

La lógica de predicados posee grandes cualidades metateóricas. En 1929 Kurt Gödel demostró que la lógica de primer orden es *completa*, esto quiere decir que en este sistema de primer orden, con sus axiomas y sus reglas de inferencia, es posible demostrar que todas las fórmulas lógicamente válidas son demostrables. En otras palabras, en un lenguaje L de primer orden las fórmulas válidas, verdaderas bajo cualquier interpretación, son *demostrables* a partir de los axiomas y las reglas de inferencia del lenguaje. También se dice que un sistema es *decidible* cuando se tiene al menos un algoritmo para decidir si una fórmula del lenguaje del sistema es lógicamente válida o no. En la lógica proposicional se tiene un método, el de las tablas de verdad, para decidir la validez lógica (la tautología) de cualquier fórmula del sistema. En este sentido, la lógica de primer orden es indecible cuando tiene un predicado de *aridad* 2^5 o más distinto de la identidad;⁶ esto fue demostrado primero por Alonzo Church en 1936 y posteriormente por Alan Turing en 1937,⁷ aunque cuando la lógica de primer orden

⁴ Basado en el artículo de *La lógica matemática del siglo XX* (Torres, 2000; 66-68).

⁵ La **aridad** de un operador matemático o de una función es el número de argumentos necesarios para que dicho operador o función se pueda calcular. Aridad 0 = nularia, aridad 1 = unaria, aridad 2 = binaria, aridad 3 = ternaria. En este sentido, cuando la lógica de primer orden tiene un predicado binario es indecible.

⁶ En lógica de primer orden el principio de identidad se expresa como $\forall x (x = x)$.

⁷ Con lo que se dio una respuesta negativa al Entscheidungsproblem o problema de la decisión planteado por David Hilbert en 1928 y que consiste en la imposibilidad de encontrar un algoritmo para decidir si una fórmula del cálculo de primer orden es un teorema o no.

es monádica con o sin identidad, es decir, con *aridad 1*, ésta es *decidible*. Esto último fue demostrado por Leopold Löwenheim en 1915, pero es pertinente mencionar que la teoría general de primer orden para los números naturales, conocida como la aritmética de Peano, no puede ser decidida con ese tipo de algoritmo. En lógica de primer orden se puede probar que si una teoría de primer orden es consistente, tiene al menos un modelo con un dominio infinito o numerable. Más precisamente, sea T un subconjunto consistente de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ (con identidad): si T es infinito o numerable, entonces tiene al menos un modelo con dominio infinito o numerable. Esto es lo que se conoce como el teorema de Löwenheim-Skolem. Dicho con otras palabras, una teoría de primer orden es un conjunto de fórmulas en un lenguaje de primer orden y una teoría es numerable si sus fórmulas pueden ser ordenadas de manera que correspondan biunívocamente con algún subconjunto (finito o infinito) de los números naturales. Cabe señalar que una teoría tiene un modelo infinito si existe al menos una interpretación que, en un dominio infinito, hace verdaderas todas las fórmulas del modelo. Lo que el teorema afirma es, entonces, que si un modelo tiene una interpretación con un dominio infinito que hace verdaderas todas las fórmulas del modelo tiene, por ende, interpretaciones con dominios de cualquier cardinalidad que hacen verdaderas a todas las fórmulas del modelo. Esto significa que las teorías de primer orden no pueden controlar la cardinalidad de sus modelos, es decir, ninguna teoría consistente puede tener sólo modelos isomórficos. Una consecuencia de este asunto de la cardinalidad es que la aritmética de Peano, por ejemplo, en su formalización de primer orden tendrá como modelo no sólo al conjunto de los números naturales (que sería lo deseable), sino también al conjunto de los números reales y a otros conjuntos de mayor cardinalidad.

La lógica de primer orden es entonces un sistema formal que posee grandes cualidades metateóricas,⁸ aunque cabe señalar que padece de ciertos problemas como el de la falta de categoricidad.

Lógica de segundo orden

Por otro lado, la lógica de segundo orden es una extensión de la lógica de primer orden a la que se le añaden variables para propiedades, funciones y relaciones y cuantificadores que operan sobre dichas variables. Lo que se obtiene al hacer esto es una extensión en el poder expresivo, es decir, en la lógica de segundo orden puede formalizar de mejor manera ciertas cosas que son imposibles de formalizar con lógica de primer orden. Sin embargo, lo que se gana en el sentido de poder expresivo, se pierden en propiedades metalógicas. No ha sido posible ni demostrar la consistencia ni la completud para esta lógica, por lo que, en este sistema, se podría derivar contradicciones dentro del mismo. No es posible probar que toda verdad lógica del sistema es un teorema, esto último porque justo el poder expresivo del sistema, lo lleva a ser afectado por los teoremas de incompletud de Gödel. Tampoco se sostiene en ella el teorema de Löwenheim-Skolem, sin embargo, con una lógica de segundo orden es posible formalizar cuestiones de la aritmética que no son posibles de formalizar en primer orden, ya que en la semántica estándar, para un predicado X , el rango del cuantificador $\forall X$ afecta a todo el conjunto del universo del discurso. Esta

⁸ A esto se le puede agregar el teorema de compacidad que afirma que un conjunto de fórmulas de primer orden tiene un modelo si y sólo si todo subconjunto finito de ese conjunto tiene un modelo. Esto implica que si una fórmula es una consecuencia lógica de un conjunto infinito de axiomas, entonces es una consecuencia lógica de algún subconjunto finito de ellos. El teorema fue demostrado por primera vez por Kurt Gödel como una consecuencia del teorema de completud, pero con el tiempo se han encontrado varias demostraciones adicionales. El teorema es una herramienta central en teoría de modelos, ya que provee un método fundamental para construirlos. Otro teorema importante que se ha probado para la lógica de primer orden es el teorema de Lindström, que establece que la lógica de primer orden es el sistema lógico más fuerte que cumple con el teorema de compacidad y el teorema descendente de Löwenheim-Skolem. Esto significa que el cumplimiento de esos dos teoremas *caracteriza* a la lógica de primer orden. Fue demostrado por Per Lindström, quien también definió la clase de los sistemas lógicos abstractos, permitiendo así la comparación entre sistemas.

posibilidad que se tiene en el segundo orden es lo que le da un alto grado de fuerza expresiva.

Una vez explicado lo que se entiende por una lógica de primer y segundo orden lo que nos proponemos, entonces, en el presente texto, es examinar los argumentos que Quine y Shapiro defienden en sus respectivas tesis para preferir entre una u otra lógica. Para poder llegar a lo que Quine y Shapiro presentan es necesario primero mostrar el modo en que Hilbert formaliza las teorías matemáticas en la lógica simbólica, en especial la de primer orden, para hacer más precisa la distinción. Posteriormente mostraré cómo para Frege la lógica de segundo orden es la lógica de las matemáticas. Presentaré después, cómo es que en la obra de Skolem se hizo clara la distinción entre la lógica de primer orden y la lógica de segundo orden. Posteriormente presentaré la discusión entre Quine y Shapiro, para después mostrar un ejemplo de formalización de las matemáticas en las lógicas de primer y segundo orden, usando la aritmética de Peano para este fin. Mostraré también lo que algunos otros autores involucrados en la discusión piensan sobre el tema para, finalmente, hacer algunas reflexiones en torno al estado actual de la discusión y algunas consideraciones a los problemas no resueltos de la misma.

1. El programa formalista de Hilbert

Desde la publicación de los *Fundamentos de la geometría* en 1899 Hilbert trabajó incansablemente en torno a la cuestión de los fundamentos de las matemáticas. En un principio su interés se centró en la cuestión axiomática, dejando de lado el asunto del aparato lógico utilizado. Posteriormente (a partir de 1917), tras la polémica con Brouwer en torno a estas cuestiones, propuso someter los recursos demostrativos de la matemática clásica a un riguroso examen a fin de establecer su consistencia y, con ello, su posibilidad y legitimidad como teoría matemática. Su plan incluía la formalización de los métodos y principios deductivos en una variante del lenguaje simbólico introducido por Russell y Whitehead en *Principia Mathematica*. A esto se le conoce como el programa de Hilbert. El programa tenía como sostén lo siguiente:

- La idea de que la formalización de la matemática clásica fuera de manera axiomática, es decir, que la matemática podía ser formalizada por completo. El objetivo era construir un sistema simbólico en el que todas las afirmaciones matemáticas pudieran escribirse y ser manipuladas siguiendo reglas bien definidas.
- La idea de que tal formalización podía llevarse a cabo de manera completa, es decir, de modo que todas las afirmaciones matemáticas verdaderas pudieran ser demostradas dentro del formalismo (completud semántica).
- La idea de que la *consistencia* de la matemática clásica se podría establecer de manera precisa siguiendo líneas de razonamiento similares a las abrigadas por Brouwer, es decir, razonando en exclusiva en torno a las reglas de manipulación de los signos. A esto es a lo que Hilbert se refiere cuando habla de razonamientos *finitistas*.

- La idea de que cualquier resultado acerca de los “objetos reales” de la matemática clásica obtenido mediante el uso de objetos o nociones “ideales” (como, por ejemplo, la noción de infinito o el principio del tercero excluido) se puede demostrar sin el uso de los mismos, es decir, buscaba probar que la teoría extendida⁹ era *conservativa*.
- La idea de que la claridad de los métodos sintácticos obtenidos permitiría decidir cualquier cuestión matemática que se pudiera plantear en el lenguaje de la teoría (problema de la decisión), es decir, si la cuestión se podía o no probar con los recursos deductivos de la teoría.

Para este trabajo, la cuestión importante es la formalización de la matemática clásica, ya que ésta incluye la formalización de la lógica. Esta cuestión ya la había tocado en el artículo de 1905 titulado *sobre los fundamentos de la Lógica y de la Aritmética*, donde no concibe una axiomatización separada de la lógica y la aritmética, es decir, no piensa estas teorías de manera inconexa. La vía de la que Hilbert se serviría para formalizar una teoría, para la cual ya se tenía una axiomatización informal, era la siguiente:

- Habría que escoger un lenguaje apropiado L , por lo común de primer orden, en el cual se pudieran reescribir los enunciados de T .
- Habría que disponer de una sintaxis para el lenguaje L que incluyera símbolos especiales que no dependieran de T . Por ejemplo, una lista precisa de variables, símbolos para las conectivas ($\neg$ para la negación, $\wedge$ para la conjunción, $\vee$ para la disyunción, $\rightarrow$ para la implicación y $\leftrightarrow$ para la equivalencia o doble implicación), un signo $=$ para la igualdad matemática y símbolos para los cuantificadores ($\forall$ para la cuantificación universal y $\exists$

⁹ Una teoría extendida es aquella teoría que captura de manera lógica a otra teoría y desde la cual, a pesar de ser distinta, conserva las mismas nociones de verdad.

para la cuantificación existencial). Además, serían necesarios términos indefinidos o parámetros para los objetos y relaciones básicas del sistema.

Lo anterior, conocido como la teoría “T”, hacía a la lógica de primer orden una parte del lenguaje (si no es que todo), dejando abierta la posibilidad de cuantificar (o no) sobre predicados y relaciones, no sólo sobre individuos.

El sentido de la formalización era retener el modo en que los objetos de la teoría informal se relacionan entre sí, dejando de lado su naturaleza específica. Esto lo expresaría Hilbert años atrás, con relación a la geometría, diciendo que “debe ser posible reemplazar en todos los enunciados geométricos las palabras punto, línea y plano por mesa, silla y jarra de cerveza sin cambiar en nada la estructura formal de la geometría” (Cfr. Torres, 1999b; 75). Para Hilbert, en una teoría formalizada ya no importa lo que signifiquen sus términos, sino la manera en que estos se relacionan entre sí. En otras palabras, lo único relevante es la estructura lógica de la teoría. Al respecto, Hilbert fue el primero en dar un paso más allá en esta dirección: Si al desplegar una red de conexiones lógicas entre objetos no especificados no se generan contradicciones, la teoría resultante es válida desde un punto de vista matemático. En este sentido, *fundamentar* una teoría matemática consiste en resolver el problema de su consistencia. Para atacar este problema fue que creó la *teoría de la demostración*.

En el artículo *Sobre el Infinito*, Hilbert explica cómo se han de formalizar las *pruebas matemáticas*. Explica que hay ciertas fórmulas que sirven como bloques de construcción para la estructura formal de las matemáticas y son llamados axiomas. Explica que una prueba matemática es una figura que como tal es accesible a nuestra intuición (en el sentido de que son expresiones expuestas a la mirada) y consiste en deducciones hechas de acuerdo al esquema de deducción siguiente:¹⁰ (Cfr. Hilbert, 1925).

¹⁰ We will now explain briefly how mathematical proofs are formalized. I have already said that certain formulas which serve as building blocks for the formal structure of mathematics are called

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{G} \\ \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I} \end{array}}{\mathcal{I}} \text{ (modus ponens)}$$

Posteriormente explica que su programa, en sí mismo, condiciona la preferencia de axiomas de su teoría de la prueba. Esto significa que a pesar de un cierto grado de arbitrariedad en la elección de los axiomas, como en la geometría, ciertos grupos de axiomas son cualitativamente distinguibles. Estos son algunos ejemplos de cada una de estos grupos:¹¹ (Cfr. Hilbert, 1925).

I. Axiomas para la implicación

- i. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
(adición de una hipótesis)
- ii. $(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$
(eliminación de una proposición)

II. Axiomas para la negación

- i. $\{A \rightarrow (B \ \& \ \sim B)\} \rightarrow \sim A$
(ley de no contradicción)
- ii. $\sim \sim A \rightarrow A$
(ley de la doble negación)

Los axiomas en los grupos I y II son simplemente los axiomas del cálculo proposicional.

"axioms." A mathematical proof is a figure which as such must be accessible to our intuition. It consists of deductions made according to the deduction schema: Mi traducción.

¹¹ Our program itself guides the choice of axioms for our theory of proof. Notwithstanding a certain amount of arbitrariness in the choice of axioms, as in geometry certain groups of axioms are qualitatively distinguishable. Here are some examples taken from each of these groups: Mi traducción.

III. Axiomas Transfinitos

- i. $(a) A(a) \rightarrow A(b)$
(inferencia del universal al particular; axioma aristotélico)
- ii. $\sim (a) A(a) \rightarrow (\exists a) \sim A(a)$
(si un predicado no aplica universalmente, entonces hay un contraejemplo)
- iii. $\sim (\exists a) A(a) \rightarrow (a) \sim A(a)$
(si no hay instancias de una proposición, entonces la proposición es falsa para toda a)

Hilbert explica que, hasta este punto, se puede observar el hecho muy notable de que estos axiomas transfinitos se pueden derivar de un sólo axioma, el cual contiene la esencia del llamado axioma de elección que es, entre otros, uno de los axiomas más discutidos en la literatura de las matemáticas.¹² (Cfr. Hilbert, 1925).

$$(i') A(a) \rightarrow A(eA)$$

Donde e es el símbolo de elección transfinita, una función de elección lógica.

Los siguientes axiomas matemáticos son añadidos a los anteriormente dados:

IV. Axiomas para la identidad

- i. $a = a$
- ii. $a = b \rightarrow \{A(a) \rightarrow A(b)\},$

Y finalmente:

V. Axiomas para el número

- i. $a + 1 \neq 0$

¹²At this point we discover the very remarkable fact that these transfinite axioms can be derived from a single axiom which contains the gist of the so-called axiom of choice, the most disputed axiom in the literature of mathematics: Mi traducción.

ii. El axioma de inducción.

Con estos axiomas Hilbert pretende fundamentar la aritmética, quedando como tarea pendiente la de probar su consistencia:

“Queda pendiente la tarea de llevar a la práctica en detalle las ideas básicas que aquí hemos delineado. La realización de ello permite la fundamentación completa del análisis, a la vez que sienta las bases para una fundamentación de la teoría de conjuntos misma” (Cfr. Hilbert, 1923)

Hilbert propuso así la completa formalización de la teoría de los números, el análisis y la teoría de conjuntos, con la esperanza de alcanzar las metas de su programa. Al respecto, en 1931 Gödel publicó sus famosos teoremas limitativos, mostrando las dificultades que habría de enfrentar la teoría de la demostración.¹³

Pese a las dificultades que debió enfrentar (y sigue enfrentando) el programa, Hilbert nos dejó ver que el lenguaje matemático es susceptible de un análisis preciso a través de su representación mediante lenguajes formales. Una cuestión relativa a este punto es la referente al tipo de lenguaje formal que mejor se adecúa a la matemática, es decir, la pregunta por el lenguaje formal que permite representar de mejor manera su estructura lógica y deductiva. Un factor importante en esta discusión es el relativo a las propiedades del lenguaje formal utilizado, es decir, a la riqueza que como herramienta puede ofrecer.

¹³ En el artículo que Gödel publicó en 1931 *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I*, su primer teorema demuestra que en cualquier sistema formal consistente que contenga la estructura básica de la aritmética (números naturales, suma y multiplicación) se pueden construir afirmaciones aritméticas que son *verdaderas* pero *indemostrables* dentro del sistema. Esto significa en otras palabras que cualquier teoría consistente suficientemente amplia es incompleta. Por su parte, el segundo teorema de incompletud demuestra que cualquier sistema formal que tenga las características ya señaladas, es incapaz de probar su propia consistencia. En ambos casos, Gödel nos muestra que el poder expresivo de la aritmética elemental es enorme, pues tiene la capacidad de articular la sintaxis de cualquier sistema formal, lo cual es un punto a favor de la lógica de primer orden.

Fue así que la lógica simbólica, una de cuyas partes es la lógica de primer orden, ofreció grandes beneficios al momento de formalizar las teorías matemáticas. Los matemáticos de ese tiempo, como Hilbert, Gödel, Pierce, Löwenheim, entre otros, comenzaron a usar la lógica como una herramienta que mostró ser muy útil para ellos. Más allá del aparente fracaso de su programa, cuyas metas no pudo alcanzar, Hilbert favoreció esta poderosa herramienta en el estudio de los fundamentos de las matemáticas, dando la impresión de que para él la lógica adecuada era la de primer orden. Al obtener resultados favorables para la investigación matemática, por medio de la lógica simbólica, Hilbert influenció su uso y la investigación de esta herramienta.

2. El programa logicista de Frege

Desde la lógica aristotélica siempre se supuso que los conceptos (ideas, nociones) son los elementos básicos del pensamiento y estos son expresados por términos. La segunda operación del pensamiento (y la que es pertinente para el presente trabajo) es la proposición o el juicio, que se caracteriza por la predicación. En la teoría clásica la predicación consiste en la unión o separación, por medio del pensamiento, de dos conceptos objetivos, denominando al primer concepto “sujeto”, al segundo “predicado” y a la partícula que los une o separa como cópula. El signo del juicio es la proposición. Las distintas modalidades de ésta en la teoría aristotélica se expresan en la siguiente tabla:

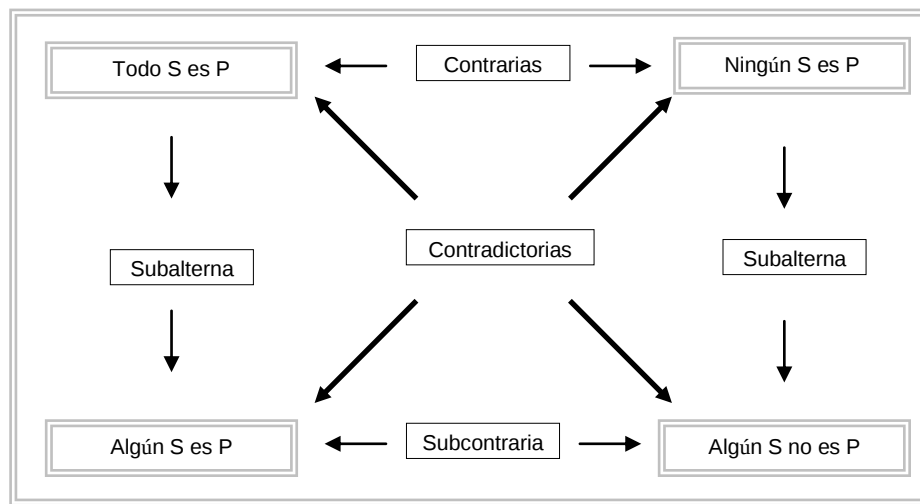
	Afirmaciones		Negaciones	
Universal	P es afirmado de todo S	Todo S es P Cada S es P	P es negado de todo S	Ningún S es P
Particular	P es afirmado de algún S	Algún S es P	P es negado de algún S	Algún S no es P No todo S es P
Indefinida	P es afirmado de S	S es P	P es negado de S	S no es P

Las proposiciones categóricas propiamente dichas son cuatro:

Proposición Categórica	Símbolo	Expresión
<i>Afirmativa Universal</i>	A	Todo S es P

		Todos los S son P
<i>Negativa Universal</i>	E	Ningún S es P Todo S no es P Todos los S no son P
<i>Afirmativa Particular</i>	I	Algún S es P Algunos S son P
<i>Negativa Particular</i>	O	Algún S no es P Algunos S no son P

Las proposiciones categóricas se ordenan de la siguiente forma dentro del cuadro de oposición.



La aportación de Aristóteles se basa, pues, en distinguir cuatro formas válidas de silogismo, conocidas tradicionalmente como figuras del silogismo y que resultan del distinto lugar que ocupa el término medio y por lo tanto, de la función que le corresponde en las premisas. La conclusión de todas las figuras es siempre S es P. Las formas válidas o figuras del silogismo son las siguientes (aunque la última fue considerada por Aristóteles como una mera variante de la primera):

Formas válidas del silogismo o figuras del silogismo			
Primera figura	Segunda figura	Tercera figura	cuarta figura
M es P S es M ----- S es P	P es M S es M ----- S es P	M es P M es S ----- S es P	P es M M es S ----- S es P
El término medio es Sujeto en la premisa mayor y Predicado en la menor	El término medio es Predicado en ambas premisas	El término medio es Sujeto en ambas premisas	El término medio es Predicado en la premisa mayor y Sujeto en la menor

Estas cuatro figuras pueden, a su vez, teniendo en cuenta la cualidad y la cantidad de las proposiciones que las componen, dar lugar a un total de 64 modos diferentes de silogismo, de los que sólo 19 son modos válidos de razonamiento en la teoría clásica. Esto lo establece Aristóteles a partir de la determinación de las leyes o reglas de legitimidad del silogismo, entre ellas, que el silogismo ha de constar de tres términos que no pueden ser tomados con mayor extensión en la conclusión que en las premisas, que el término medio ha de tomarse universalmente al menos en una premisa y que de dos premisas negativas no se puede seguir ninguna conclusión.

Grosso modo, ésta es la manera en que Aristóteles organiza la lógica. No fue sino hasta Frege que la lógica comenzó a entenderse desde una perspectiva diferente.

Una de las principales aportaciones de Frege a la lógica fue pensar a la proposición como algo que consta de una parte fija y una variable; por tanto, de la proposición aristotélica “conserva” sólo el segundo término, mientras que el primero se “convierte” en un individuo que pertenece a una clase especial, a saber, un dominio de individuos respecto a los cuales tiene sentido la predicación

del concepto. Así, el “sujeto” aristotélico se transforma en un término insaturado, a diferencia del concepto que sería saturado. Todo concepto de una proposición tiene entonces una cierta extensión, es decir, tiene asociada una clase formada por los individuos que caen bajo él. Es así que aparece la cuantificación bajo sus dos modalidades: universal o particular. De esta manera, Frege ofrece una interpretación diferente de la estructura de las proposiciones, entendiéndolas en términos de relaciones que se expresan mediante lo que él llama funciones proposicionales. El objetivo de Frege es el de evitar problemas que ocurrían con la teoría presentada por Aristóteles y que hasta su tiempo era el paradigma que se usaba en el análisis lógico.

A continuación muestro un ejemplo para así poder observar cómo es que la lógica propuesta por Frege supera los problemas que se tenían con la lógica Aristotélica:

Según la teoría lógica de Aristóteles, para expresar el resultado de la batalla entre griegos y persas en Platea (479 a. C.), es necesario distinguir a alguno de los actores como sujeto y al otro integrarlo en el predicado; por ejemplo, “Los griegos derrotaron a los persas en Platea”. Aquí, los “griegos” son el sujeto y los “persas” el predicado. No obstante, la proposición “Los persas fueron derrotados por los griegos en Platea” ofrece la misma información desde el punto de vista de la lógica, aunque en ella el sujeto son los “persas” y el predicado son los “griegos”. Por tanto, para el análisis lógico esta distinción es irrelevante, es decir, es innecesaria la distinción sujeto-predicado que establece Aristóteles. Frege habla, entonces, de que lo que hay es una relación binaria, una relación que corresponde a una función proposicional. La relación se puede expresar como una función, por ejemplo, $D(x, y)$. Entender las relaciones de manera funcional tiene la ventaja de permitir expresar de manera homogénea relaciones más complejas que la de sujeto-predicado, o con un número mayor de argumentos como, por ejemplo, x está entre y y z (orden entre los puntos de una línea recta) o x es el máximo común divisor de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

En otro orden de ideas, el programa logicista de Frege resultó un intento, como el de Hilbert, de fundamentar la matemática. Este proyecto constaba de dos etapas. En la primera etapa Frege construyó un cálculo lógico (*Conceptografía*) con la idea de representar y fundamentar una teoría de conceptos. En la segunda etapa se enfocó en los fundamentos de la aritmética defendiendo una posición logicista (*Los Fundamentos de la Aritmética y Los Principios de la Aritmética*), criticando el empirismo de Stuart Mill, el idealismo de Kant y el formalismo de Hilbert. En el segundo apéndice de *Los Fundamentos de la Aritmética* reconoce la inconsistencia de su sistema y, por ende, el fracaso de su proyecto a causa de la paradoja descubierta por Russell.¹⁴

En la *Conceptografía* Frege presenta el cálculo proposicional y el cálculo de predicados de manera axiomática-deductiva. Al conjunto de leyes que implican a las demás lo denomina el “núcleo” de su sistema. En una notación moderna es el siguiente:

Axiomas para la implicación:

$$a \rightarrow (b \rightarrow a), \quad (1)$$

$$(c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a)), \quad (2)$$

$$(d \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow (b \rightarrow (d \rightarrow a)). \quad (8)$$

¹⁴ Russell se preguntaba por el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos y le interesaba saber qué clase de conjunto sería, i.e, si éste era un conjunto normal o un conjunto anormal. Una manera de entender esto es identificar lo *anormal* con aquel conjunto que es miembro de sí mismo, y al mismo tiempo, se identifica lo *normal* con aquel conjunto que no pertenece a sí mismo. La paradoja resulta ser más comprensible de esta manera, ya que ésta ocurre porque si el conjunto es anormal entonces sería normal y si el conjunto es normal, entonces sería anormal, i.e, el conjunto forma parte de sí mismo, sólo si no forma parte de sí mismo.

Formalizándola quedaría de la siguiente manera:

M: es el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos.

$$a) \quad M = \{x : x \notin x\}$$

Esto se representa así:

$$b) \quad \forall x \quad x \in M \iff x \notin x$$

Esto significa que cada conjunto de x es elemento de M si y sólo si no es elemento de sí mismo. Pero siendo que M es un conjunto, éste se puede sustituir por x en b) y donde se obtiene

$$c) \quad M \in M \iff M \notin M$$

Entonces, M es un elemento de M si y sólo si M no es un elemento de M , lo cual resulta ser una paradoja.

Axiomas para la implicación y la negación:

$$(b \rightarrow a) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b), \quad (28)$$

$$\neg \neg a \rightarrow a, \quad (31)$$

$$a \rightarrow \neg \neg a. \quad (41)$$

Axiomas para la identidad

$$(c=d) \rightarrow (f(c) \rightarrow f(d)), \quad (52)$$

$$c=c \quad (54)$$

Axioma para la cuantificación universal

$$\forall x f(x) \rightarrow f(c). \quad (58)$$

Es importante hacer notar que “Frege establece que las letras deben de ser consideradas como variables”. (Gillies, 2009; 79)

Frege usa como regla de inferencia el *modus ponens* con el que, a partir de los primeros seis axiomas y la sustitución, se obtiene un sistema de cálculo de predicados completo. Cabe señalar que los axiomas no son independientes, ya que el tercer axioma, por ejemplo, puede deducirse de los otros dos. Por otro lado, es necesario hacer notar que Frege proyectó este cálculo para cuantificar sobre predicados, es decir, Frege lo hizo pensando en una lógica de orden superior; sin embargo, “un fragmento apropiado de su sistema puede ser interpretado como un sistema de cálculo de predicados de primer orden con identidad, y de esta forma resulta completo”. (Gillies, 2009; 80)

Para Frege hay, entonces, objetos, conceptos sobre los objetos, conceptos de conceptos, etc. de modo que los números se definen como conceptos de conceptos. Esto implica lo siguiente: los objetos y los conceptos se entremezclan. V. gr., el número *dos* es un objeto (es decir, algo de lo cual se pueden predicar propiedades) y un concepto de orden superior (es decir, la extensión de un concepto). Aquí el problema es la pretensión de que para todo concepto

corresponde un objeto, pues entonces se tiene la paradoja Russell. No obstante, esto es indispensable en la reconstrucción de la aritmética que lleva a cabo Frege. Aquí, es posible decir, como Boolos lo hace, que:

“aunque la división en dos tipos de entidades, conceptos y objetos, se pueden encontrar en los “fundamentos”, es evidente que Frege utiliza no una sino dos relaciones de instanciación: “cayendo en” (relación entre algunos de los objetos con algunos conceptos), y “estar en” (relación entre algunos conceptos con algunos de los objetos), en donde a veces ambas relaciones son dadas reciprocamente: el 1 es un objeto que cae en “idéntico con el 1”, y es un concepto que está en el número 1”.¹⁵ (Boolos, 1987; p. 3).

Lo anterior representa un intento por evitar cosas tales como la paradoja de Russell en el programa de Frege. Sin embargo, el problema formal que esto representa no es salvable tan fácilmente ya que tenemos lo siguiente: ¹⁶

- $(\forall x)(Fx \leftrightarrow Gx) \rightarrow \text{Ext}([z|Fz]) = \text{Ext}([z|Gz])$ (Va)
- $\text{Ext}([z|Fz]) = \text{Ext}([z|Gz]) \rightarrow (\forall x)(Fx \leftrightarrow Gx)$ (Vb)
- Por comprensión, sea R el concepto de primer orden $[x \mid \exists F(x = \text{Ext}(F) \wedge \neg Fx)]$, es decir, el concepto [ser extensión de un concepto y no caer bajo él]. Considere el objeto $\text{Ext}(R)$ (suponemos que existe un representante objetual, $\text{Ext}(R)$, por cada concepto R).
- Si $\neg R(\text{Ext}(R))$, entonces $\forall F(\text{Ext}(R) = \text{Ext}(F) \rightarrow F(\text{Ext}(R)))$, en particular, $R(\text{Ext}(R))$; por tanto, $R(\text{Ext}(R))$, es decir que existe un concepto F tal que $\text{Ext}(R) = \text{Ext}(F) \wedge \neg F(\text{Ext}(R))$, pero por la ley Vb, $\neg R(\text{Ext}(R))$, se da la contradicción.

El programa logicista de Frege muestra, a diferencia del programa formalista de Hilbert, que la lógica de segundo orden era la manera en que la misma lógica era

¹⁵ Thus, although a division into two types of entity, concepts and objects, can be found in the ‘Foundations’, it is plain that Frege uses not one but two instantiation relations, ‘falling under’ (relating some objects to some concepts), and ‘being in’ (relating some concepts to some objects), and that both relations sometimes obtain reciprocally: the number 1 is an object that falls under ‘identical with 1’, a concept that is in the number 1. Mi traducción.

¹⁶ Tomado de las notas de Filosofía de las Matemáticas del seminario dado por Max Fernández de Castro en el Instituto de Investigaciones Filosóficas en el año del 2011.

concebida. En otras palabras, mientras que Hilbert parece preferir a la lógica de primer orden para realizar sus formalizaciones, Frege consideraba que la mejor manera de trabajar con la representación de la matemática de manera lógica era en órdenes superiores. Esto apunta a dos maneras de representar la matemática: en primer orden como apunta Hilbert y en segundo orden como lo hace Frege. Fue en estas dos maneras de tratar una misma cuestión que empezó a diferenciarse entre una lógica y la otra.

En la actualidad, a la lógica de primer orden se le reconoce la ventaja de contar con una gran cantidad de resultados metalógicos. Esto llevó a convertirla en un importante objeto de estudio y, por decirlo de algún modo, a considerarla como la lógica de la práctica matemática, ya que los teóricos de la matemática comenzaron a usarla para fundamentar dicha práctica debido al sustento firme que representaban los resultados metalógicos obtenidos, es decir, le daba un sentido de objetividad a su práctica. Respecto a la fundamentación de las teorías matemáticas y la teoría de la demostración, todo parecía indicar que la lógica de primer orden era la mejor herramienta. Sin embargo, si el objetivo en la actualidad ya no es fundamentar las teorías matemáticas, la lógica de segundo orden puede muy bien competir con la lógica de primer orden, ya que como herramienta lógica puede atrapar la categoricidad de la teoría de conjuntos que actualmente se supone como la teoría básica de la práctica matemática moderna. Por ello, la cuestión es entonces, cuál de ellas es una mejor herramienta vista desde la práctica matemática.

3. Skolem y la distinción entre lógica de primer y segundo orden

En el artículo de 1923, *Sobre los fundamentos de la aritmética elemental establecida por medio del modo recursivo de pensamiento sin el uso de variables aparente que van sobre dominios infinitos*, Skolem argumenta que la axiomatización de la teoría de conjuntos no puede ser tomada como una última fundamentación para las matemáticas, a pesar de que algunos matemáticos de su tiempo, como Cantor, Dedekind o Peano, creían lo contrario. Explica que para eliminar el relativismo de sus nociones, la teoría de conjuntos debía formularse en lógica de primer orden. Esto resultaba históricamente extraño, dado que la teoría de conjuntos requería cuantificadores no sólo para individuos, como ocurre con la lógica de primer orden, sino para conjuntos de individuos, conjuntos de conjuntos de individuos y así sucesivamente. La sugerencia radical propuesta por Skolem era que la relación $\in$ (de pertenencia) debía de ser tratada no como parte de la lógica, sino como cualquier relación que podía ser dada en una variedad de interpretaciones en varios dominios.¹⁷

Yendo un poco más atrás en el tiempo, tenemos que en 1920 Skolem comenzó a publicar los resultados de su investigación sobre el teorema del Löwenheim evitando usar lógica de segundo orden. Fue entonces que extendió este resultado para lógica de primer orden al demostrarlo no sólo para fórmulas individuales, sino para conjuntos numerables de fórmulas.¹⁸ Sin embargo, no lo presentó como un teorema por separado, sino que probó el teorema de Löwenheim para conjunciones y disyunciones infinitas numerables de fórmulas de primer orden.

¹⁷ (Cfr. Moore, 1998; 125-128)

¹⁸ En 1923, Skolem probó que si una teoría de primer orden es consistente, entonces tiene al menos un modelo con dominio infinito o numerable. Más precisamente: sea T un subconjunto consistente de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ (con identidad): si T es infinito o numerable, entonces tiene al menos un modelo con dominio infinito o numerable. Dicho de otra manera, si un sistema formal tiene un modelo infinito, entonces tiene un modelo numerable, es decir, tiene un modelo cuyos elementos pueden ser puestos en correspondencia uno a uno con los enteros positivos. Esto significa que las teorías de primer orden no pueden controlar la cardinalidad de sus modelos: ninguna teoría consistente puede tener sólo modelos isomórficos.

Cuando Skolem aplicó el teorema de Löwenheim a la teoría de conjuntos en 1923, declaró el teorema Löwenheim-Skolem en su forma habitual, es decir, en primer orden. En adelante, Skolem no volvió a la lógica infinitista que había heredado de Schröder y Löwenheim.

Hubo varias réplicas, a dicha proposición de Skolem, que valen la pena mencionar. Bernays le argumentó a Skolem, en las conferencias de Zurich a la que ambos asistieron en 1938, que la restricción axiomática a la noción de conjunto [en lógica de primer orden] no previene que se obtengan todos los teoremas usuales de la teoría de conjuntos de Cantor. Menciona que esta manera de construir la noción de conjunto (o de predicado) precisa una consecuencia de otro tipo: la interpretación del sistema no es necesariamente única. Por último, Bernays le argumentó que la imposibilidad de caracterizar lo finito con respecto de lo infinito viene de lo restrictiva que es la formalización en primer orden. Skolem objetó a estas cuestiones planteadas por Bernays argumentando que la axiomatización de la teoría de conjuntos en primer orden era la más apropiada. (Cfr. Moore, 1998; 128).

A partir de Skolem se hizo tangible una preferencia por el primer orden sobre el segundo orden, ya que los resultados metateóricos obtenidos en los lenguajes de primer orden parecían favorecer la representación de teorías matemáticas en dichos lenguajes y como ya señalamos, el teorema de Löwenheim-Skolem no se sostiene en la lógica de segundo orden. Por otro lado, las objeciones sobre la restricción de la capacidad expresiva de los lenguajes de primer orden ya se hacían manifiestas desde ese momento.

Podemos decir que ningún sistema llegó a predominar abiertamente sobre el otro. Para Peano, Frege, Löwenheim y Schröder, entre otros, era común pasar de una lógica a la otra sin siquiera mencionarlo. El mismo Hilbert solía hacer esto, a pesar de que reconoció que la lógica de primer orden emergió como un sistema diferenciado de la lógica simbólica en su conferencia de 1917 y de manera

impresa en 1928 en el artículo de Hilbert y Ackermann, y nunca mencionó que la lógica de primer orden tendría que ser el mejor fundamento para las matemáticas. Fue Skolem quien propuso a la lógica de primer orden como “la Lógica” cuando formalizó la teoría de conjuntos en ella. Durante las siguientes décadas Skolem se propuso demostrar que ambas propuestas –que la lógica de primer orden es la “lógica” y que esta lógica es el lenguaje más apropiado para formalizar la teoría de conjuntos– eran correctas y Quine, quizá de manera independiente, defendió este mismo argumento.

4. La discusión Shapiro vs Quine

Antes de Shapiro no hubo muchas consideraciones en cuanto a este tema, ya que se asumía que la lógica de primer orden era la *lógica* e igualmente se asumía que ésta era la *lógica de la práctica matemática*. La discusión se torna entonces en estos dos actores principalmente, Quine y Shapiro. El primero defiende a la lógica de primer orden como la lógica de la práctica matemática y en general de todas las ciencias, es decir, defiende a la lógica de primer orden como la herramienta de uso que se considera como “Lógica”, mientras el segundo está enfocado en mostrar cómo la lógica de segundo orden es el único modelo lógico que atrapa la práctica matemática. El análisis se enfoca en dos textos principalmente; *Fundamentos sin Fundacionalismo: el Caso de la Lógica de Segundo Orden* de Shapiro y la *Filosofía de la Lógica* de Quine.

4.1 El caso de la lógica de segundo orden en Shapiro

Shapiro en 1991 presentó su texto *Fundamentos sin Fundacionalismo: el Caso de la Lógica de Segundo Orden*, donde defiende la tesis según la cual los lenguajes de segundo orden, junto con sus sistemas deductivos y su semántica, deberían ser vistos como la herramienta adecuada para codificar los razonamientos que los matemáticos llevan a cabo.

Shapiro comienza el texto discutiendo el significado pre-formal de la noción de consecuencia lógica¹⁹ y cómo se intenta capturar esta noción en los sistemas formales y en las teorías semánticas formales. Cuando muestra las diferencias entre términos lógicos y no lógicos argumenta que no hay un principio o un criterio que pueda distinguir entre estos términos si no se ha dado la semántica propia del lenguaje. También discute la diferencia entre las nociones de conjunto lógico o

¹⁹ Tarski explica que “el concepto de consecuencia lógica es uno de esos cuya introducción en el campo de la investigación formal estricto no era una cuestión de decisión arbitraria por parte de uno u otro investigador, en la definición de este concepto, se hicieron esfuerzos para cumplir con el uso común de la lenguaje de la vida cotidiana” (Tarski, 1936; 409).

clases y los conjuntos iterativos de la axiomática de la teoría de conjuntos, argumentando que la noción de conjunto lógico o clase se considera con justicia como perteneciente a la lógica, mientras que la noción de conjunto iterativo no se considera como parte de la lógica.

Posteriormente argumenta que el fundacionalismo es, por mucho, el responsable de que la lógica de primer orden sea considerada como “la lógica de las matemáticas” y lo contrasta con el semanticismo, teoría que considera, desde la filosofía de la lógica, que los lenguajes de segundo orden que poseen una semántica estándar deben de ser llamados, igualmente, “Lógica”. Shapiro muestra esto desde un punto de vista histórico, discutiendo el fundacionalismo logicista de Frege, Russel y Whitehead, el finitismo de Hilbert, el psicologismo en la lógica y la relación entre la lógica y la computación.

Shapiro continúa con un examen del desarrollo de la lógica de segundo orden y su metateoría, argumentando que esta lógica es el único modelo formal que atrapa correctamente el discurso informal de las matemáticas. Éste argumento se enfoca principalmente en el poder expresivo de los lenguajes de segundo orden y específicamente en la habilidad para determinar un modelo estándar de segundo orden de manera isomórfica con el conjunto de axiomas de segundo orden. Con cierto detalle, muestra un lenguaje de primer orden y cómo puede ser extendido a un sistema con variables libres de segundo orden o a un sistema completo de cuantificación de segundo orden. Discute brevemente las ramificaciones de los sistemas de segundo orden y los sistemas de órdenes mayores y da un recuento formal de la semántica estándar de Henkin de primer orden para lenguajes de segundo orden, mostrando las diferencias técnicas entre la semántica estándar de segundo orden y aquella que no lo es, para justificar que un lenguaje de segundo orden puede perfectamente ser construido a partir de semánticas estándar. Presenta también, aunque no prueba, los metateoremas más importantes de primer orden, como el de corrección, completud y el teorema de Lowenheim-Skolem, mostrando que todos estos resultados, con excepción de la corrección,

fallan en la lógica de segundo orden dada la semántica estándar de Henkin. Asimismo, ofrece un sistema axiomático para el análisis y la aritmética y muestra que éstos son categóricos añadiendo un axioma al sistema MK de Morse-Kelley, el cual considera que es equivalente a un sistema de la teoría de conjuntos. El resultado es un sistema de deducción de segundo orden totalmente cuantificado, donde se conjuntan los axiomas típicos de primer orden, como el de extensionalidad, de pares, de uniones, de infinito, etc., y el axioma de reemplazo de segundo orden:

$$\forall f \forall x \exists y \forall z (z \in y \equiv \exists w (w \in x \ \& \ z = f(w))).$$

Posteriormente, Shapiro muestra una serie de conceptos matemáticos que pueden ser caracterizados en un lenguaje de segundo orden sin terminología no lógica y da una caracterización de cierre mínimo, de comparaciones de cardinalidades probando el teorema de Cantor y el de Bernstein-Schröder, del infinito de Dedekind, de contabilidad, de los alephs, del continuo y del axioma del buen orden. Argumenta que las caracterizaciones en primer orden del cierre mínimo y de finitud son inadecuadas, ya que ambos usan el teorema de compacidad de la lógica de primer orden para construir modelos no estándar. Muestra como la hipótesis del continuo puede ser presentada en la terminología del segundo orden, y argumenta que las versiones en primer orden de la aritmética, del análisis y de la teoría de conjuntos son inadecuadas ya que, como había mencionado antes, las teorías de primer orden no son categóricas.

Shapiro trata la metateoría de la lógica de segundo orden con una semántica estándar. Esto lo hace mostrando la esencia del enésimo orden y su semántica, para después señalar cómo la lógica de órdenes superiores, con las semánticas estándar, son reducibles a la lógica de segundo orden con semántica estándar. Discute el principio de Kreisel que especifica que la verdad en una estructura de conjuntos es equivalente a la verdad en todas las estructuras existentes. No obstante, esta prueba, que es a lo sumo informal y no rigurosa, involucra el

teorema de completud de la lógica de primer orden. Al respecto, dicha prueba no existe para el principio de Kreisel, que involucra enunciados de segundo orden, aunque Shapiro muestra que cuando el caso de Kreisel en segundo orden se añade a ZFC²⁰ son implicados, semánticamente, múltiples resultados acerca de la existencia de cardinales inaccesibles.

Es mediante esta estrategia que Shapiro muestra en su texto que la lógica de segundo orden es una herramienta tan confiable como lo es una lógica de primer orden, a pesar de que fallen ciertos resultados metateóricos en ella. Shapiro está interesado, entonces, en mostrar que por medio de la lógica de segundo orden es posible formalizar de manera adecuada cuestiones que en la práctica matemática se formalizan comúnmente en primer orden.

En la última parte del texto, Shapiro se preocupa por el nacimiento de los lenguajes de primer orden y los sistemas deductivos a finales del siglo XIX y principios del siglo XX y argumenta que los primeros lenguajes para la lógica matemática, los de Frege y Russel-Whitehead, se interpretan mejor desde una semántica estándar de segundo (o mayor) orden y explica como en Hilbert y Löwenheim se halla el nacimiento del primer orden. Con esto da un recuento histórico de cómo se fue diferenciando entre una y otra lógica y cómo se dio la preferencia por el primer orden

Como un argumento en contra de la lógica de primer orden, Shapiro utiliza la “Tesis de Uso”, que proviene del principio “el significado es dado por el uso” de Wittgenstein, para preguntarse cuál de las semánticas, la de primer orden o la de segundo orden, dan cuenta de mejor manera de la semántica de la práctica matemática informal. A pesar de que Dummett ha argumentado que la aceptación de esta “Tesis de Uso” lleva a un punto de vista intuicionista del discurso matemático, porque implica un reemplazo del modelo teórico de las condiciones

²⁰ ZFC significa un sistema axiomático para la teoría de conjuntos propuesto por Zermello-Fraenkel más el axioma de elección.

de verdad para las proposiciones matemáticas por medio de condiciones de prueba. Shapiro argumenta que ésta es perfectamente consistente con el realismo vigente y, por ende, con la adopción de la semántica estándar de segundo orden. Con esto espera mostrar que la preferencia por la lógica de primer orden no está justificada y bien podría ser modificada con la preferencia por una lógica de segundo orden.

El texto de Shapiro termina con el análisis de las diferencias técnicas entre una lógica de segundo orden y algunas otras teorías formalizadas. Considera que la mayoría de los sistemas no son compactos y, por ende, evaden lo que él llama inadecuaciones de la lógica de primer orden. Además, muchas de estas lógicas tienen modelos teóricos más manejables que los de la lógica de segundo orden. Discute también la lógica monádica de segundo orden atendiendo puntualmente la sugerencia de Boolos (Cfr. Boolos; 1975) que dice que la cuantificación existencial sobre propiedades debe de ser interpretada como si estuviera expresando plurales desde la construcción en lenguaje natural, es decir, debe interpretarse, en lugar de “hay una propiedad o hay un conjunto como hay objetos, individuos (algunos)” a fin de eliminar la noción de conjunto.²¹ Para terminar, Shapiro argumenta que si se fuera a tomar la teoría de conjuntos como el fundamento de las matemáticas, entonces tendríamos que tomar a ésta teoría desde su forma de segundo orden en lugar que su forma en primer orden. Así pues, Shapiro concluye que los matemáticos consideran, o entienden, que la teoría informal de conjuntos determina sus modelos de manera isomórfica, es decir, son la estructura que subyace en toda la práctica matemática y lo que da cuenta de este hecho es la teoría de conjuntos formulada en un lenguaje de segundo orden con semántica estándar. Así pues, es mediante estos argumentos que Shapiro considera que la lógica de segundo orden debería de ser la lógica de la práctica matemática.

²¹ Desde la semántica conjuntista de Tarsky el cuantificador existencial se interpretaría así, sin embargo, Boolos diría que no hay fórmulas de segundo orden, sino que lo que hay es una interpretación de segundo orden de la misma fórmula.

4.2 Shapiro vs la Filosofía de la Lógica de Quine

Shapiro está discutiendo lo que Quine, en su texto de *Filosofía de la Lógica*, defiende. Quine explica que la lógica de primer orden forma un conjunto cerrado y homogéneo. Asimismo, sostiene que ésta puede separarse de otros desarrollos teóricos que pretenden para sí el título de lógica. Especifica que mantenerse dentro de la lógica de primer orden trae grandes ventajas por ser un lenguaje adecuado para traducir enunciados con cuantificadores múltiples, y que posee una semántica que caracteriza las condiciones de verdad de los enunciados que se tienen de manera compuesta. De igual manera, se tiene un sistema extensional que satisface, incluso, a aquellos que defienden el nominalismo. Además de todo esto, se tienen los tan deseados resultados metateóricos como la consistencia, la corrección, el teorema de Löwenheim y Skölem, el teorema de compacidad y la completud semántica. Todo esto nos da la sensación de que, en la lógica de primer orden tenemos una teoría asentada en suelo firme y que cualquier modificación o extensión que nos lleve a la pérdida de cualquier propiedad obtenida en esta teoría lógica es indeseable. Quine afirma que “la lógica no atiende preferencialmente a ninguna sección determinada del léxico, ni tampoco a ningún subdominio o sector del campo de valores de las variables”. (Quine, 1973; 136). Esto significa que la lógica, por ser una disciplina formal, no tiene un tema propio, ya que sus variables no nos comprometen con la existencia de ninguna clase de entidades y esto, considera Quine, no se cumple en la lógica de segundo orden. Así pues, aquello que divide lo lógico y lo matemático tiene que especificarse antes de llegar al segundo orden, ya que en el segundo orden²² se tiene una teoría lógica que depende de una teoría de conjuntos, por lo que realmente no puede considerarse como una teoría lógica en sí.²³

²² Así como también la teoría de modelos.

²³ Quine piensa que la lógica de segundo orden es un disfraz de oveja para una teoría de conjuntos. Esto se observa claramente porque los cuantificadores corren sobre todos los subconjuntos (noción que de igual manera resulta no ser clara) y esto para Quine resultaría por dejarnos con un problema de categoricidad.

En Quine se puede observar claramente una preferencia por la lógica de primer orden cuando en su texto *Set Theory and its logic* al trabajar con teoría de conjuntos menciona que:

Los esquemas proposicionales utilizados en lógica elemental, llamados esquemas cuantificacionales, comprenden los esquemas proposicionales atómicos "p", "q", "Fx", "Gx", "Gy", "Fxy", "Gxyz", y similares, y todos los compuestos constructivos de estos por medio de la funciones de verdad y la cuantificación. Así que las letras "F", "G",... nunca pueden ser consideradas como variables, es decir, como teniendo valores de atributos o clases. Estos u otros objetos abstractos pueden, por supuesto, seguir perteneciendo a nuestro universo de discurso, sobre el cual, a nuestras variables genuinas "x", "y",... correrá, de manera permitida, el rango de la cuantificación. Pero las letras "F", "G",... son eliminadas de la cuantificación, y de hecho son eliminadas como enunciados propiamente, para utilizarse sólo como maniqués en la representación de las formas de las proposiciones no especificadas.²⁴(Quine, 1969; pág 10).

Así pues, es claro que la lógica que Quine usará para la teoría de conjuntos, será la lógica de primer orden, es decir, una lógica donde los cuantificadores no corran sobre atributos o clases. En el texto de *Filosofía de la Lógica*, defiende a profundidad esta idea e incluso la señala como una confusión, explicando que:

"la frase "función proposicional" adaptada por Frege, detonó la confusión; Russell la usó para referirse a veces como predicados y a veces como atributos. Como resultado de ello se pensó, por algunos, que Russell había derivado teoría de conjuntos, y con esto las matemáticas en general, de los muy estrechos inicios lógicos. Los seguidores de Hilbert han seguido cuantificando las letras predicado, obteniendo lo que ellos llaman un cálculo de predicados de orden superior. Los

²⁴ "The sentence schemata used in elementary logic, called quantificational schemata, comprise the atomic sentence schemata "p", "q", "Fx", "Gx", "Gy", "Fxy", "Gxyz", and the like, and all compounds constructive of these by truth functions and quantification. So the letters "F", "G",... are never to be thought of as variables, taking say attributes or classes as values. Abstract objects, these or others, may of course still belong to our universe of discourse, over which our genuine variables "x", "y",... of quantification are allowed to range. But the letters "F", "G", ... are withheld from quantifiers, indeed withheld from sentences altogether, and used only as dummies in depicting the forms of unspecified sentences". Mi traducción.

valores de estas variables son en efecto conjuntos, y esta manera de presentar la teoría de conjuntos da una semejanza engañosa a la lógica. (Quine, 1991; 69).

Ahora bien, Quine usa para las matemáticas, cuando él hace matemáticas, la lógica de primer orden y rechaza tajantemente que al trabajar con matemáticas se trabaje con una lógica de segundo orden, ya que él considera que al trabajar con una lógica de segundo orden no se está haciendo lógica, sino que se sigue solamente haciendo teoría de conjuntos; considera además que trabajar teoría de conjuntos en segundo orden presupone entidades de manera ontológica y esto, como ya dijimos, no es aceptable para Quine. Por ende, es posible inferir que la lógica que Quine usa para la práctica matemática es entonces una lógica de primer orden.

El argumento de Shapiro supone que Quine no toma en cuenta la práctica de los matemáticos porque si consideramos, –como Quine afirma en el ensayo de *Dos Dogmas del Empirismo*– que no hay una diferencia esencial entre lo que llamamos leyes lógicas y las más complejas hipótesis de las ciencias fácticas, porque podríamos abandonarlas si la práctica o la evidencia empírica así lo indica, entonces no tiene ningún sentido pretender que existe una distinción clara entre la lógica y la matemática. Si el interés es el proyecto desde una epistemología holista y no fundacionista, tales distinciones no tienen mucho sentido. Además, piensa que ni la lógica aristotélica ni la lógica proposicional son lógicas adecuadas para la práctica matemática y añade que “el tema principal de este libro es argumentar que los lenguajes de primer orden y su semántica son modelos inadecuados de las matemáticas”.²⁵ (Shapiro, 1991; 43). Shapiro piensa, como Kreisel, que las formalizaciones del primer orden son demasiado restringidas. Explica que “Hay buenas razones para afirmar que la teoría en primer orden [de los campos reales

²⁵ *The main theme of this book is to argue that first-order languages and semantics are also inadequate models of mathematics.* Mi traducción.

cerrados^{26]} es demasiado pobre para ser una formalización adecuada del análisis clásico”.²⁷ (Shapiro, 1991; 121).²⁸

Así pues, Shapiro considera que la lógica más apropiada para modelar la práctica matemática, que no para fundamentarla, es la de segundo orden, la cual tiene grandes ventajas sobre la de primer orden. De igual manera, si ya no se pretende fundamentar la matemática, la completud no parece ser una condición *sine qua non* para el estudio de ésta, ni para que una teoría sea considerada *lógica*, ya que al crecer nuestra confianza en la semántica dudaremos más de la exigencia de que la lógica haya de satisfacer ciertos metateoremas.

Dice Shapiro “Parece que los movimientos filosóficos generan tendencias que permanecen mucho tiempo después de que los mismos puntos de vista son desechados, por lo menos públicamente. Una de estas tendencias, creo yo, es la preferencia por la lógica de primer orden”.²⁹ (Shapiro, 1991; 25) En otras palabras, para él la preferencia por la lógica de primer orden es una mera tradición injustificada.

Ahora bien, también es posible considerar que hay algo que no está del todo bien en el argumento de Shapiro en contra de Quine. Shapiro afirma que la práctica matemática se sustenta en una lógica de segundo orden, es decir, que los matemáticos se están expresando en lógica de segundo orden. Esta afirmación tiene un marcado carácter pragmático. Con base en lo anterior se supone que

²⁶ En matemáticas un campo real cerrado es un campo F que tiene las mismas propiedades de primer orden, tanto como lo tiene el campo de los números reales.

²⁷ *There are good reasons why the first-order theory [of the real closed fields] is far too impoverished to be an adequate formalization of classical analysis.* Mi traducción.

²⁸ Ignacio Jané (Cfr. 2005) piensa que la lógica de primer orden padece de una debilidad de recursos y por ende no puede cumplir con sus funciones porque, por ejemplo, no puede expresar cosas como el axioma del buen orden de inducción. Aunque podría agregar aquí, que el análisis clásico se trata de funciones de valores reales y no sobre números reales, así pues, cualquier teoría de análisis clásico ya sea de primer o segundo orden, debe de ser en un lenguaje que sea posible referir dichas funciones.

²⁹ *It seems that philosophical movements spawn tendencies that remain long after the views themselves are dismissed, at least publicly. One of these tendencies, I believe, is a preference for first-order logic.* Mi traducción.

Quine no debería estar en desacuerdo con ella, ya que él mismo rompe con el positivismo lógico justo por tener una posición pragmática de la filosofía y la lógica. Sin embargo, Quine está considerando que la lógica que mejor se ajusta a la práctica matemática es la lógica de primer orden porque ésta posee grandes fortalezas metateóricas y lo considera así porque exactamente, la práctica matemática pretende ser objetiva y que mejor herramienta que la lógica de primer orden para lograr este objetivismo. Parece pues no querer fundamentar las matemáticas, sino seguir con ese objetivismo pretendido por las matemáticas en su práctica, determinando que la lógica que mejor cumpliría con ese objetivo sería la lógica de primer orden por sus cualidades metateóricas. Por su parte, Shapiro parece no tomar esto en consideración. De esto surgen dos posibles maneras de observar la práctica matemática más allá de todo afán fundacionista por parte de Quine, una pragmática y otra objetivista. Por otro lado, según sus mismas palabras, Shapiro explica que el hecho de que “aún haya una preferencia por la lógica de primer orden es una mera tradición injustificada”, sin embargo, este hecho no representaría una tradición injustificada, sino que la misma tradición justificaría su práctica, es decir, la “Tesis de Uso” justificaría que se siguiera usando la lógica de primer orden como la herramienta para las matemáticas.

A partir de esta discusión es posible observar que la lógica de segundo orden posee características con las que la práctica matemática se expresa mejor. Sin embargo, perder las fortalezas de la lógica de primer orden tampoco parece la opción más adecuada para resolver este problema. Shapiro está considerando sólo el uso que se da en la práctica matemática, pero es claro que el uso de la lógica de primer orden en la misma práctica matemática representa grandes beneficios, como los señalados por Quine. Por su parte Shapiro muestra las fortalezas de los lenguajes de segundo orden y con ello considera que su punto ha quedado demostrado.

5. Formalización lógica de los axiomas de Peano

Para que sea posible hacer una comparación entre la lógica de primer orden y la lógica de segundo orden, como una herramienta para la matemática, tomaremos como ejemplo la axiomática para la aritmética de Peano. Giuseppe Peano formuló nueve axiomas para la formalización de la aritmética. Este conjunto de axiomas para la aritmética, introducidos por él en el siglo XIX, se han utilizado prácticamente sin cambios para una variedad de investigaciones metamatemáticas, incluyendo cuestiones acerca de la consistencia y completud de la aritmética y la teoría de números. Cabe hacer notar que los axiomas de Peano rigen la estructura de los números naturales sin necesidad de otra teoría (por ejemplo, la de la teoría de conjuntos). Requiere, sin embargo, de la noción previa de sucesor. Los nueve axiomas que en un principio propuso Peano, se han reducido con el paso del tiempo a sólo cinco axiomas, pues se ha podido demostrar que los otros cuatro se pueden deducir sin problemas de los cinco que persisten. De estos cinco axiomas, es posible deducir en N (visto como el conjunto de los números naturales) tanto las propiedades de las operaciones internas de suma y multiplicación como su orden total.

Los cinco axiomas son los siguientes:

Axioma 1. *0 es un número natural.*

Axioma 2. *Todo número natural tiene un sucesor.*

Axioma 3. *Dos números naturales con igual sucesor son a su vez iguales.*

Axioma 4. *0 no es sucesor de ningún número natural.*

Axioma 5. *Un conjunto X que contenga a 0 y que si contiene a n contiene a su sucesor, contiene a todos los números naturales.*

Una posible formulación de los axiomas de Peano en primer orden sería de la siguiente manera;³⁰

El sistema *AP* para la aritmética de los números naturales.

El lenguaje L_{AP} es muy reducido: sólo tiene un símbolo de relación para la igualdad «=», una constante «0» y tres símbolos de operación: «s» (sucesor), «+» (suma) y «·» (producto). Por comodidad, en vez de escribir la suma en la forma $+(x, y)$ escribiremos, como es usual, $x + y$, pudiéndose decir lo mismo para el producto (notación infija). El sistema de axiomas *AP* es el siguiente:

Axiomas para la igualdad

$x = x$	(Identidad)
$x = y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y))$	(Axioma de Leibniz)

Axiomas aritméticos

$\neg(sx = 0)$	(axiomas para el sucesor)
$sx = sy \rightarrow x = y$	
$x + 0 = x$	(axiomas para la suma)
$x + sy = s(x + y)$	
$x \cdot 0 = 0$	(axiomas para el producto)
$x \cdot sy = x \cdot y + x$	
$(A(0) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(sx))) \rightarrow A(x)$	(axiomas de inducción)

A partir de estos axiomas se derivan, en el cálculo de predicados, los teoremas aritméticos de la aritmética de primer orden. Dada la inexistencia de un símbolo especial para cada número natural, dichos números se representan mediante las expresiones $s0$, $ss0$, $sss0$, etc. que por comodidad escribimos $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, etc.;

³⁰ Tomado del apéndice 17 de la tesis *Elementos para una crítica matemática de la razón filosófica. La filosofía matemática de David Hilbert y Kurt Gödel*, (Torres, 2001).

asimismo, aunque el lenguaje no tiene signos especiales para relaciones como la desigualdad o la divisibilidad, éstas se pueden definir mediante predicados aritméticos « $x < y$ » y « $x \mid y$ » como sigue:

$x \leq y \equiv_{\text{def}} \exists z(x + z = y)$	x es menor o igual que y .
$x < y \equiv_{\text{def}} \exists z(\neg(z = 0) \wedge x + z = y)$	x es estrictamente menor que y .
$x \mid y \equiv_{\text{def}} \exists z(x \cdot z = y)$	x es un divisor de y .

Asimismo, la propiedad de ser un número primo se puede definir de la siguiente manera:

$$\text{prim}(x) \equiv_{\text{def}} x > \bar{1} \wedge \forall z(z \mid x \rightarrow (z = \bar{1} \vee z = x)) \quad x \text{ es un número primo.}$$

Este esquema para el axioma de inducción $(A(0) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(sx)) \rightarrow A(x)$, que está escrito en lenguaje de primer orden, está especificando que para cada fórmula de n se tiene un axioma. Debemos entenderla de esta manera: si A es una fórmula que se satisface para 0 , y cada vez que se satisface para un natural, se satisface para su sucesor, entonces se satisface para todos los números naturales. *Grosso modo* así es como se tendría una formulación en primer orden para la aritmética de Peano.

En lo que respecta a la formalización de los axiomas de Peano, siguiendo la comparación que nos propusimos, mostraré un ejemplo de formalización en lógica de segundo orden usando un simbolismo moderno para la misma. Partiré de lo que se define como el conjunto N de los números naturales para verificar las siguientes cinco condiciones o los cinco axiomas de Peano:

1. Tenemos un elemento de N al que llamaremos cero (0), esto es, $0 \in N$
2. Tenemos *ser sucesor de*, esto es, $\phi : N \rightarrow N \quad \forall n \in N, \phi(n) \in N$
3. *Ser sucesor de*, se aplica cuando: $n, m \in N \times N, \phi(n) = \phi(m) \rightarrow n = m$

Esto es, cuando tenemos el caso de que dos números naturales tengan el mismo sucesor, estos números naturales serán el mismo.

4. El cero no es imagen de nadie por la *sucesión de*, es decir, el cero no es sucesor de nadie: $\forall n \in N, \phi(n) \neq 0$
5. Por último, tenemos el axioma de inducción:³¹

$$A = N \leftarrow \begin{cases} 0 \in A \\ \forall n \in A \rightarrow \phi(n) \in A \end{cases}$$

El quinto axioma es de vital importancia, ya que éste nos dota de un método con el cual estamos en posición de demostrar propiedades porque nos está indicando que todo conjunto A al que pertenezca el *cero*, y dado que todo elemento de A tiene un elemento siguiente en A , necesariamente tendrá que incluir el conjunto N de los números naturales A . Este método se denomina como inducción.

Es por medio de estos cinco axiomas, es decir, de estas cinco condiciones, y usando sistemáticamente el quinto axioma de inducción que, formalizado en lógica de segundo orden, podemos probar todas las propiedades del conjunto N .

A continuación sólo verificaremos algunas de estas propiedades:

Teorema 1

Ningún número natural coincide con su sucesor, $\forall n \in N, n \neq \phi(n)$.

Demostración:

Sea $A = \{n \in N / n \neq \phi(n)\}$. Veamos que tal conjunto coincide con N .

- 1) $0 \in A$, ya que por Ax. 3, $0 \neq \phi(0)$
- 2) $\forall n \in A, n \neq \phi(n) \rightarrow \phi(n) \neq \phi(\phi(n))$, por Ax. 4. Luego $\phi(n) \in A$

Con esto tenemos que 1) $0 \in A$, 2) $n \in A \rightarrow \phi(n) \in A \Rightarrow A = N$, por Ax.5.

³¹ Es decir, no inferimos que $A=N$ sino que A es una clase inductiva.

Por ende, se demuestra que en todo N ningún número natural coincide con su sucesor.

Teorema 1.2

Cuando ocurre que dos aplicaciones de N en N conmutan con la aplicación siguiente y tienen la misma imagen para el cero, entonces ambas coinciden.

Esto es:

$$f, g \in Ap(N) / \begin{cases} f \circ \phi = \phi \circ f \\ g \circ \phi = \phi \circ g \end{cases} \wedge f(0) = g(0) \Rightarrow f(n) = g(n) \quad \forall n \in N$$

Demostración:

Sea $A = \{n \in N / f(n) = g(n)\}$. Observemos que tal conjunto coincide con N .

- 1) $0 \in A$, por hipótesis del teorema, $f(0) = g(0)$.
- 2) $\forall n \in A, f(n) = g(n) \rightarrow \phi[f(n)] = \phi[g(n)] \rightarrow (\phi \circ f)(n) = (\phi \circ g)(n) \rightarrow$
 $(f \circ \phi)(n) = (g \circ \phi)(n) \rightarrow f[\phi(n)] = g[\phi(n)] \rightarrow \phi(n) \in A$

Con esto tenemos que 1) $0 \in A$, 2) $n \in A \rightarrow \phi(n) \in A \Rightarrow A = N$, por Ax.5.

Por ende, se demuestra que $f(n) = g(n)$, $\forall n \in N$

Teorema 1.3

Cuando ocurre que dos aplicaciones de N en N , $f, g \in Ap(N)$, tienen la misma imagen para el cero y existe alguna aplicación ρ de N en N tal que $f \circ \rho = \rho \circ f$, $g \circ \rho = \rho \circ g$, entonces ambas aplicaciones coinciden, esto es, $f(n) = g(n)$, $\forall n \in N$

Demostración:

Sea $A = \{n \in N / f(n) = g(n)\}$. Observemos que tal conjunto coincide con N .

- 1) $0 \in A$, por hipótesis del teorema, $f(0) = g(0)$.
- 2) $\forall n \in A, (f \circ \rho)(n) = (\rho \circ f)(n) \rightarrow f[\rho(n)] = \rho[f(n)] = \rho[g(n)] = (\rho \circ g)(n) =$
 $(g \circ \rho)(n) = g[\rho(n)] \rightarrow \forall n \in A, f[\rho(n)] = g[\rho(n)] \rightarrow \rho(n) \in A$

Con esto tenemos que 1) $0 \in A$, 2) $n \in A \rightarrow \rho(n) \in A \Rightarrow A = N$, por Ax.5

Por ende se demuestra que $f(n) = g(n)$, $\forall n \in N$

La siguiente propiedad, la de la suma, se define de la siguiente manera:

Definimos la suma de números naturales como una aplicación $S: N \times N \rightarrow N$, de modo que para $\forall n, m \in N \times N$, $S(n, m) \in N$ se cumple que:

$$1) S(0, m) = m$$

$$2) S(\phi(n), m) = \phi[S(n, m)]$$

Dada la definición de suma es posible derivar el **Teorema 2**

La definición de suma es única, es decir, si S_1, S_2 son sumas, entonces $S_1 = S_2$.

Demostración:

Definamos dos aplicaciones, f y g , mediante S_1 y S_2 y veamos a continuación que éstas han de coincidir.

Sea $f: N \rightarrow N$ definida para $\forall n \in N$, $f(n) = S_1(n, m)$, $m \in N$

Sea $g: N \rightarrow N$ definida para $\forall n \in N$, $g(n) = S_2(n, m)$, $m \in N$

Entonces:

$$f(0) = g(0) \leftarrow \begin{cases} f(0) = S_1(0, m) = m \\ g(0) = S_2(0, m) = m \end{cases}$$

$$\forall n \in N, (f \wedge \phi)(n) = f[\phi(n)] = S_1(\phi(n), m) = \phi[S_1(n, m)] = \phi[f(n)] = (\phi \wedge f)(n) \rightarrow$$

$$\forall n \in N, (f \wedge \phi)(n) = (\phi \wedge f)(n) \rightarrow f \wedge \phi = \phi \wedge f$$

$$\forall n \in N, (g \wedge \phi)(n) = g[\phi(n)] = S_2(\phi(n), m) = \phi[S_2(n, m)] = \phi[g(n)] = (\phi \wedge g)(n) \rightarrow$$

$$\forall n \in N, (g \wedge \phi)(n) = (\phi \wedge g)(n) \rightarrow g \wedge \phi = \phi \wedge g$$

Esto significa que las dos aplicaciones, f y g , son tales que tienen la misma imagen para el cero y además conmutan con la aplicación siguiente, por lo que, aplicando el teorema 1.2 se tiene que, $f(n) = g(n)$, $\forall n \in N$

Esto significa que, $S_1(n, m) = S_2(n, m)$, $n, m \in N$ y así obtenemos su demostración

Teorema 3

La definición de multiplicación es única, es decir, si P_1, P_2 son multiplicaciones, entonces $P_1 = P_2$.

Demostración:

Definamos dos aplicaciones, f y g , mediante P_1, P_2 y veamos a continuación que éstas han de coincidir.

Sea $f : N \rightarrow N$ definida para $\forall n \in N, f(n) = P_1(n, m), m \in N$

Sea $g : N \rightarrow N$ definida para $\forall n \in N, g(n) = P_2(n, m), m \in N$

Definamos³² también $\rho : N \rightarrow N : \forall n \in N, \rho(n) = n + m, m \in N$

Entonces:

$$f(0) = g(0) \leftarrow \begin{cases} f(0) = P_1(0, m) = m \\ g(0) = P_2(0, m) = m \end{cases}$$

$$\forall n \in N, (f \wedge \phi)(n) = f[\phi(n)] = P_1(\phi(n), m) = P_1(n, m) + m = \rho[P_1(n, m)] =$$

$$\rho[f(n)] = (\rho \wedge f)(n) \rightarrow f \wedge \phi = \rho \wedge f$$

$$\forall n \in N, (g \wedge \phi)(n) = g[\phi(n)] = P_2(\phi(n), m) = P_2(n, m) + m = \rho[P_2(n, m)] =$$

$$\rho[g(n)] = (\rho \wedge g)(n) \rightarrow g \wedge \phi = \rho \wedge g$$

Esto significa que las dos aplicaciones, f y g , son tales que tienen la misma imagen para el cero y además existe una aplicación ρ de N en N tal que $f \wedge \phi = \rho \wedge f$, $g \wedge \phi = \rho \wedge g$, por lo que, aplicando el teorema 1.3, ambas aplicaciones coinciden, $f(n) = g(n)$, $\forall n \in N$ esto es, $P_1(n, m) = P_2(n, m)$, $n, m \in N$ y así obtenemos su demostración.

³² Representaré en adelante la suma de dos elementos de N , m y n , en la manera habitual: $S(n, m) = n + m$

Así como también, las dos condiciones de la definición serán con esta notación:

1) $0 + m = m$

2) $\phi(n) + m = \phi(n + m)$

Esto para donde aplique.

A partir de los axiomas de Peano es posible entender que todo número natural tiene un siguiente. Cualquier número natural, excepto el cero, es siguiente de otro número natural y esto queda claro a partir de una proposición muy simple.

Teorema 4

Todo número natural distinto del cero es el siguiente de otro número natural:

$$\forall n \in \mathbb{N} / n \neq 0, \exists m \in \mathbb{N} / \phi(m) = n$$

Demostración:

Teniendo que $A = \{n \in \mathbb{N} / n = 0 \vee \exists m \in \mathbb{N} / \phi(m) = n\}$, es posible observar que esto coincidirá con $\mathbb{N}$ usando el axioma 5 o de inducción completa.

$0 \in A$, por construcción de A .

$$\forall n \in A, \exists m \in \mathbb{N} / \phi(m) = n \rightarrow \phi[\phi(m)] = \phi(n) \rightarrow \exists \phi(m) / \phi[\phi(m)] = \phi(n) \rightarrow \phi(n) \in A$$

Esto significa que, 1) $0 \in A$, $\forall n \in A \rightarrow \phi(n) \in A$, lo que verifica que $A = \mathbb{N}$, y por ende, todo número natural n distinto del cero es el siguiente de otro número natural m , que, además, es único, ya que por el axioma 4, $\phi(a) = \phi(b) \rightarrow a = b$

En este punto, dada la comparación, es importante señalar que al parecer la formalización en segundo orden es mejor, ya que en primer orden el axioma sólo permite trabajar con una propiedad, es decir, hay que aplicar el quinto axioma a cada una de las propiedades de un conjunto de los números naturales, mientras que el quinto axioma en segundo orden permite trabajar de una sola vez con todas las propiedades del conjunto. Otra cuestión importante es que la formalización del axioma cinco de la aritmética de Peano en primer orden es solo para propiedades definibles, esto es, que un conjunto A es definido por la fórmula $\phi(n)$ en el lenguaje de aritmética de Peano si $n \in A \leftrightarrow \mathbb{N} \models \phi(n)$. Lo que significa que los elementos de A son exactamente los números que satisfacen ϕ . Así pues, un conjunto es definible mediante aritmética de primer orden si el mismo es definido por alguna fórmula en el lenguaje de la aritmética de Peano.

6. Otras posturas en torno a la discusión

6.1 Boolos

Como ya vimos en el *apartado 4*, para Quine la lógica de segundo orden es una teoría de conjuntos disfrazada. Piensa que los axiomas de la teoría de conjuntos no califican como verdades lógicas porque no valen para todos los modelos. Esto le indica a Quine que hay un compromiso ontológico con las entidades específicas que cumplen con la relación, es decir, piensa que la cuantificación en segundo orden implica un compromiso que está más allá del primer orden. Boolos (1984) difiere de esto y considera que el compromiso ontológico de una teoría está en la interpretación de sus cuantificadores. Considera que ampliar el límite de la lógica de primer orden llevándola a la lógica de predicados monádicos de segundo orden es una gran ventaja, ya que se pueden expresar cosas que no se pueden expresar en primer orden, como por ejemplo, la definición de identidad entre individuos:

$$(x = y) \text{ syss } (\forall F) (Fx = Fy)$$

Quine critica las lecturas tradicionales de los cuantificadores de segundo orden porque la interpretación de dichos cuantificadores o está presuponiendo una teoría matemática o está partiendo de una posición metafísica, por eso es que en ambos casos la interpretación no es un asunto de lógica pura. Boolos le concede a Quine que para que la lógica de segundo orden sea considerada “Lógica”, sus cuantificadores no pueden tomar como valores nada que implique un compromiso ontológico sustantivo y afirma que no hay un compromiso ontológico extra que involucre la cuantificación de segundo orden, por ende, las teorías de segundo orden son teorías lógicas. El camino de Boolos es invertir la estrategia de Quine y explica que si entendemos el lenguaje natural, entonces en éste hay cuantificadores plurales, por ende, la cuantificación de segundo orden puede ser comprendida como dichas expresiones plurales y con esta estrategia no hay

necesidad de comprometerse con nada más que lo que nos comprometemos en primer orden.

Para Boolos, las variables de segundo orden toman los mismos valores que las variables de primer orden y lo que se obtiene es un nuevo tipo de cuantificación, es decir, la cuantificación plural sobre aquellas cosas que aparecen en el dominio de primer orden. La posibilidad de una cuantificación plural nos aumenta la capacidad expresiva del lenguaje pero no hay aumento ontológico.

La consideración de una ampliación de la lógica de primer orden es de suma importancia para Boolos (Jeffrey-Boolos, 1989), ya que prueba que la aritmética puede reducirse a una lógica de segundo orden³³ desde esta visión de la lógica de segundo orden como la teoría de la cuantificación plural. Piensa que puede ser aplicada a todos los campos del lenguaje no importando qué objetos estén siendo referidos en este campo, siendo en este sentido, muy parecida a la cuantificación de primer orden. Para Boolos esto diferencia de manera importante a la cuantificación plural de la teoría de conjuntos y las teorías de segundo orden con su semántica conjuntista usual, ya que éstas cuantifican sobre un tipo particular de entidades y debido a la paradoja de Russell, ambas no pueden ser aplicadas a discursos que hablen de dominios demasiado grandes. En la cuantificación plural, pues, lo que se establece es que cualquier variable individual puede representar tanto valores plurales como singulares.

La discusión entre Quine y Boolos se enfoca principalmente, entonces, en torno a si la lógica de segundo orden puede o debe considerársele como “Lógica”, dando por sentado que de ser afirmativa la respuesta, entonces la lógica de segundo orden podría ocupar sin ningún problema el lugar de la lógica de la práctica matemática, ya que su poder expresivo le permitiría representar de mejor manera en formas lógicas aquello que los matemáticos están trabajando.

³³ Esto bien podría representar un neologicismo, porque si la lógica de segundo orden es lógica, la aritmética puede entonces reducirse a la lógica.

6.2 Hintikka

Hintikka tiene una posición revisionista de la lógica de primer orden. Considera que la lógica de primer orden no es la “Lógica” de las matemáticas pero no está considerando o no se está refiriendo a los lenguajes de segundo orden como la “Lógica”. Hintikka va más allá y considera que lógica *Independence Friendly Logic* (IF) es la “Lógica”, es decir, es la herramienta lógica que pretende ocupar el lugar de verdadera lógica elemental y por ende se presenta como una alternativa para modelar las matemáticas, esto es, se presenta como una alternativa para ser la lógica de la práctica matemática.

*Gabriel Sandu y Jaakko Hintikka desarrollaron un sistema semántico y sintáctico para la interpretación y el uso de los cuantificadores y conectivos lógicos al que denominaron Independence Friendly Logic y al que me referiré como Lógica IF. Este sistema posee interesantes propiedades matemáticas que lo hacen ya de suyo digno de estudio. Sin embargo, Hintikka en un texto de 1998, *The Principles of Mathematics Revisited*, ha propuesto que la lógica IF es la parte básica de la lógica, la verdadera lógica elemental o el núcleo de la lógica. Según él, la aceptación de este punto de vista conlleva o implica la ruptura completa del marco conceptual en que ordinariamente son pensadas las relaciones entre lógica y matemáticas. (Fernández de Castro, 2008; 147)*

Las innovaciones que dan lugar a la lógica IF, son en primer lugar, que pretende suplantar la definición de verdad de Tarski, esto significa que busca superar la limitación de la monotonía formulándola en términos de la teoría de juegos. En segundo lugar, lo que pretende es superar la linealidad de la lógica generalizando la idea de los cuantificadores ramificados de Henkin, ambas cosas consideradas por Hintikka como defectos de la lógica clásica entendida como la lógica de predicados de primer orden.

Hintikka le da pues un giro a la discusión e introduce una nueva versión de lógica para ocupar el lugar de la “lógica fundamental”. Considera que ni la lógica de

primer orden, ni la lógica de segundo orden, son las herramientas lógicas correctas para representar el lenguaje de las matemáticas, es decir, para representar correctamente la práctica matemática.

6.3 Väänänen

Väänänen ha publicado varios artículos con respecto a las diferencias que tienen la lógica de segundo orden y la teoría de conjuntos como fundamento para las matemáticas. En el artículo *Second order logic and the foundations of mathematics* del 2001, Väänänen muestra que si la lógica de segundo orden es entendida en su total capacidad semántica para caracterizar de manera categórica los conceptos centrales de las matemáticas, ésta se basaría totalmente en razonamientos informales. Señala que si se le da una semántica débil, entonces pierde su poder para expresar conceptos de manera categórica. Argumenta que la teoría de conjuntos de primer orden y la lógica de segundo orden no son radicalmente diferentes ya que la segunda es un gran fragmento de la primera. En el artículo termina señalando que todo aquello que es probado con *ZFC* puede ser transformado en un argumento informal en lógica de segundo orden. Al mismo tiempo, señala que si algo puede ser argumentado de manera informal en lógica de segundo orden, entonces puede ser formalizado en *ZFC*.

En otros artículos como *Second order logic, set theory and foundations of mathematics* del 2012 y *Second order logic or set theory?* 2012^a, se pregunta si la lógica de segundo orden fundamenta mejor las matemáticas que la teoría de conjuntos, es decir, cuál es el mejor fundamento para ellas. En el primer texto del 2012 explica que la mayor diferencia que puede haber entre la lógica de segundo orden y la teoría de conjuntos, es que la teoría de conjuntos construye una jerarquía transfinita acumulativa, mientras que la lógica de segundo orden se queda dentro de conjuntos limitados. Piensa que esta diferencia es meramente ilusoria ya que la teoría de conjuntos y la lógica de segundo orden permiten una categoricidad similar. Entonces, se pregunta ¿cuál es la mejor manera de hacer

matemáticas, la lógica de segundo orden o la teoría de conjuntos? Piensa que si se considera que la teoría de conjuntos es categóricamente más “alta” se puede optar por esta vía, pero si no nos interesa esa “altura” entonces sin problemas se puede reemplazar la teoría de conjuntos por una lógica de segundo orden. Sin embargo, insiste, en que la teoría de conjuntos y la lógica de segundo orden son categóricamente equivalentes.

En el segundo artículo, el del 2012^a cambia un poco de parecer porque considera que la lógica de segundo orden y la teoría de conjuntos no están en total sincronía porque tienen una naturaleza distinta en sus formalizaciones, como por ejemplo en lo que es considerado como un axioma, aunque piensa que si consideramos la práctica matemática, entonces estas diferencias desaparecen. Considera pues que es un error decir que la lógica de segundo orden captura de manera isomórfica todo aquello que es capturado por la teoría de conjuntos, sin embargo, como ambas manifiestan un alto grado de categoricidad, a la hora de trabajar con una u otra, parece que sus similitudes son mayores a sus diferencias porque incluso ambas permiten modelos similares no estándares. Esta cuestión es de suma importancia y el mismo Shapiro también la menciona en el texto de *Fundamentos sin fundacionalismo: el caso para la lógica de segundo orden*, porque al trabajar con una lógica de segundo orden lo que se obtiene es una lógica categórica, es decir, el uso del axioma cinco de Peano con una lógica de segundo orden implica categoricidad.

Para Väänänen entonces, la cuestión de cuál es la lógica de la práctica matemática es muy clara, al grado que su pregunta radica más bien en si la lógica de segundo orden es incluso un mejor fundamento para las matemáticas que la misma teoría de conjuntos. Con esto vemos un interés de fundamentar las matemáticas, sin embargo, podríamos decir que Väänänen está pensando no en un fundamento epistémico, sino en un fundamento pragmático, ya que no es inconsciente de los problemas que padece la lógica de segundo orden (como incompletud, inconsistencia, etc.), sin embargo, como la práctica matemática se

basa en una teoría de conjuntos, Väänänen considera entonces que esta teoría de conjuntos bien puede sustituirse por la lógica de segundo orden, ya que en la práctica, se puede trabajar de la misma manera tanto con lógica de segundo orden como con teoría de conjuntos porque ambas entregan los mismos resultados.

7 Reflexiones finales

La arista de esta discusión se centra en particular en el problema de la representación de la matemática en la esfera de la lógica simbólica. Como pudimos observar, lo que está en juego es la pregunta por cuál representación lógica se adecua mejor a la práctica matemática. Cabe señalar que la práctica matemática a la que se hace referencia es a la de los matemáticos teóricos, ya que es a ellos a los que les interesan estas cuestiones.

La cuestión anterior pareciera no tener sentido, es decir, pareciera absurdo tratar de responder *cuál lógica sirve mejor* como si se tratara de imponer una lógica sobre otra. La pregunta adecuada es, *¿cuál es la lógica que usan los matemáticos en su práctica?* ¿Habría una adecuada para todos los casos? Shapiro respondería que la lógica de segundo orden es la que usan preferiblemente los matemáticos modernos.³⁴ Cabe señalar que esto no es lo que aparentemente habrían respondido matemáticos como Hilbert, Löwenheim, Turing, Church, Skolem, Peirce y el mismo Quine, entre otros, que abierta o aparentemente preferían la lógica de primer orden.

Como hemos visto, la lógica de primer orden es una herramienta muy poderosa debido a los beneficios metateóricos que posee. Sin embargo, padece una debilidad en lo que respecta a su capacidad de expresión que lleva a problemas. La discusión que hemos tratado lleva a Shapiro a considerar que esa debilidad es suficiente para abandonarla como herramienta, es decir, que esa carencia amerita que ya no se le considere la herramienta de la práctica matemática. En su opinión la lógica de la práctica matemática moderna es la lógica de segundo orden. Es decir, algunos lógicos como Shapiro y Väänänen prefieren usar la lógica de segundo orden en lo que respecta a la práctica matemática. No obstante, no está probado que la práctica matemática sea necesariamente así. Más bien, en la

³⁴ A pesar de que según Shapiro, algunos matemáticos siguen usando el primer orden de manera injustificada.

práctica matemática lo que se observa es un ir y venir entre el primer y el segundo orden. Además, cabe aclarar que el uso actual de la formalización de la teoría de conjuntos en lógica de primer orden a la manera de Zermelo-Fraenkel, no ha perdido vigencia. Shapiro parece no tomar esto en consideración, como si quisiera influir en que se opte por una formalización de la teoría de conjuntos en segundo orden.

La práctica matemática moderna está basada en la matemática de conjuntos y es cuestionable que la lógica que mejor representa dicha práctica matemática es la lógica de segundo orden. Por otro lado, lo que es posible observar es que la lógica de la práctica matemática es, por decir lo menos, imprecisa, ya que se suele formalizar en ambos sistemas, como lo vimos con la aritmética de Peano.

En todo caso, en lugar de la propuesta de Shapiro, bien podríamos tomar la propuesta de Hintikka y optar por la lógica *IF* como aquella lógica en la que se debería de modelar la práctica matemática. Sin embargo, decir esto nos llevaría precisamente a aceptar que “debemos” preferir entre una u otra lógica para llevarla a la práctica matemática, cuando en realidad, como ya mencioné, la cuestión se debe llevar a cuál lógica es la que los matemáticos prefieren usar para su práctica, es decir, cuál lógica es una mejor herramienta para ellos y por ende, cuál lógica es la que mejor modela la práctica matemática. Si observamos con cuidado el ejemplo del apartado 5, entonces podríamos decir que la lógica de segundo orden es la que los matemáticos prefieren, ya que ésta les facilita mucho las cosas a la hora de trabajar con el axioma de inducción. Sin embargo, el hecho es que hay una interpretación en primer orden que muchos matemáticos prefieren usar, tal como ocurre con la teoría de conjuntos en su forma de primer y segundo orden.

En este dominio es posible distinguir dos visiones distintas sobre la idea de fundamentar la práctica matemática. La primer visión está interesada en fundamentar de manera epistémica dicha práctica, es decir, está interesada en justificar el conocimiento matemático. La segunda visión está interesada en

fundamentar en un sentido pragmático, es decir, está interesada en determinar cuál es la teoría que está en la base de la práctica matemática. Podríamos decir, que lo que Quine considera como práctica matemática es aquella que los matemáticos como Hilbert, Turing, Church, Gödel, etc., practicaban, es decir, Quine está pensando en que dichos matemáticos estaban interesados en cimentar de manera epistémica, en una base sólida, su práctica, y si esto es así, no habría mejor herramienta que la lógica de primer orden por todos los beneficios metateóricos que conlleva. Quine, considerando que esa es la intención de los matemáticos, sostiene que la lógica para esa práctica es la lógica de primer orden. Sin embargo, la segunda visión, la de Shapiro, considera que la práctica moderna de la matemática parece no estar interesada en fundamentar en ese sentido, es decir, parece no considerar los problemas que tiene la teoría de conjuntos como tal y entonces las cuestiones de completitud y consistencia no les resultan condicionantes para abandonar su trabajo, ya que, a pesar de no cumplir con estas condiciones, siguen entregando resultados “útiles” mediante su práctica. Dicho de otra manera, Shapiro considera que la teoría conjuntos, fuera de la axiomatización de ZFC, es la teoría de la práctica matemática actual y por ende, que la lógica de segundo orden es la que mejor representa la teoría de conjuntos. Según Shapiro, la fundamentación que propone Quine es epistémica, mientras que la fundamentación que él propone es pragmática. Aquí resulta pertinente señalar, entonces, que Shapiro está pensando en el rechazo de una fundamentación epistémica, que es posible dudar que Quine, por su naturalismo, esté proponiendo. Shapiro considera entonces estar justificado, es decir, él considera que al llevar la cuestión hacia cuál es la teoría que está en la base de la práctica matemática ya está autorizado en decir que la lógica de segundo orden es la que mejor atrapa o en donde mejor se puede expresar dicha teoría básica. No obstante, la formulación de la teoría de conjuntos en primer orden sigue estando vigente, por lo que no es tan fácil decir que esto ocurre por una mera tradición injustificada, ya que trabajar con la teoría de conjuntos en primer orden, también entrega resultados “útiles” para los matemáticos. Entonces, decir que la lógica de primer orden es la teoría que mejor atrapa la práctica matemática, sería también

una aseveración tan pragmática como la de Shapiro y no fundacionista en un sentido epistémico.

También es importante verificar, con mayor profundidad, si realmente la práctica matemática, o los practicantes de la misma, están verdaderamente prefiriendo el segundo orden sobre el primer orden, ya que de otra manera se podría decir que lo que Shapiro está intentando es influenciar a los matemáticos para que usen o prefieran la lógica de segundo orden para realizar su práctica porque él la prefiere.

Por último, este trabajo representa un esfuerzo para aclarar estas líneas de investigación aún abiertas, con la intención de reunir algunos elementos que permitan una mejor comprensión de esta problemática.

Bibliografía.

ANDERSON, D. ZALTA, E. (2004). *Frege Boolos and Logical Objects*. Journal of Philosophical Logic, 33/1. Pp. 1-26.

BARWISE, Jon. (1979). *On Branching Quantifiers in English*. Journal of Philosophical Logic 8. Pp. 47-80.

BOOLOS. (1987). *'The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic', On Being and Saying*. MIT Press. Cambridge, MA

- (1998). *Saving Frege from contradiction, "The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic"*. En Boolos, *Logic, Logic and Logic*, Harvard University Press. Harvard Pennsylvania.
- (1975). *On Second-Order Logic*. The Journal of Philosophy, Vol. 72, No. 16. Pp. 509-527.
- (1984). *To Be is to be a Value of a Variable (or to be Some Values of Some Variables)*. The Journal of Philosophy, Vol. 81, No. 8. Pp. 430-449.

FERNÁNDEZ DE CASTRO, Max. (2008). *La lógica IF y los fundamentos de las matemáticas*. Signos Filosóficos, Vol. X, núm. 19, enero-junio. Pp. 146-171.

FREGE, Gottlob. (1971). *Conceptografía, fundamentos de la aritmética, otros estudios filosóficos*. Trad. Hugo Padilla. UNAM. México.

- (1980) *The Frege-Hilbert correspondence*. En FREGE, Gottlob, *Philosophical and Mathematical Correspondence*. The University of Chicago Press. Chicago.

GILLIES, D. (1995). *The Fregean Revolution in Logic*. En *Revolutions in Mathematics*. Ed. Gillies, D. Oxford University Press. Oxford. Trad. Marcela del Pilar y Angel Rivera. En (2009). Revista Saga núm. 20. Pp. 71-107 . Colombia.

GÖDEL, Kurt (1931). *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I*. Monatshefte für Mathematik und Physik 38. pp. 173-198.

HILBERT, David. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. En Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal in Göttingen, Leipzig: Teubner, 1-92, 1st ed.

- (1905). *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, in Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904, A. Krazzer, ed., Leipzig: Teubner, 174-85. Trad. al inglés en Van Heijenoort (1967, 129-38).
- (1923). *Die logischen Grundlagen der Mathematik*. Mathematische Annalen, 88: 151-165. Conferencia presentada en el Deutsche Naturforscher-Gesellschaft, en Septiembre de 1922. Reimpreso en Hilbert (1935, 178-191). Trad. al inglés en Ewald (1996, 1134-1148).
- (1925) *on the infinite*. Trad. al inglés por Putnam, E y Massey, G. en *Mathematische Annalen* (Berlin) vol. 95 (1926), pp. 161-90. Springer. Berlín. En Heijenoort, Van. (1967). *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic. 1879-1971*. Pp. 367-392. Harvard. Pensilvania.
- Y ACKERMANN, Wilhelm. (1928). *Grundzüge der theoretischen Logik*. Springer. Berlín.

HINTIKKA, Jaakko. (1973). *Quantifiers vs. Quantification Theory*. Dialectica Vol. 27, No 3-4. Pp. 329-358.

- (1996). *The Principles of Mathematics Revisited*. Cambridge university press. Cambridge.

JANÉ, Ignacio. (2005). *Higher-order logic reconsidered*. En SHAPIRO, S. (ed), *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*, Oxford University Press, Oxford.

JEFFREY, R. C. y BOOLOS, G. S. (ed). (1989). *Computability and Logic*. 3ra. Ed. Cambridge University Press. Cambridge.

KREISEL, Georg, (1968). *A survey of proof theory*, Journal of Symbolic Logic, 33: 321-388.

MANCOSU, P. (2008). *The Philosophy of Mathematical Practice*. University of California. Berkeley.

MENDELSON, R. (2008). *La filosofía de Gottlob Frege*. Cambridge university press. Cambridge.

MOORE, Gregory H, (1988). *A house divided against itself: The emergence of first-order logic as the basis for mathematics*. En Aspray W y KITCHER P (eds). *History and philosophy of modern mathematics*. Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Vol. 11, pp. 98-136. University of Minnesota Press, Minnesota.

MOSTERÍN, Jesús. (2004) *How Set Theory Impinges on Logic*, en WEINGARTNER, Paul (ed.), *Alternative Logics: Do Sciences Need Them?* Springer, Berlín-Heidelberg-New York. Pp. 55-63.

QUINE W. V. O. (1991). *Filosofía de la Lógica* Trad. M. Sacristán. Alianza. Madrid.

- (2002). *Desde un Punto de Vista Lógico*. Paidós. Barcelona.
- (1963). *Set Theory and its logic*. Harvard University Press. Harvard, Mass.

SHAPIRO, S. (1991). *Foundations without foundationalism. A case for second-order logic*. Clarendon Press, Oxford.

- (1985). *Second-Order Languages and Mathematical Practice*. The Journal of Symbolic Logic, Vol. 50, No. 3. Pp. 714-742.

SKOLEM, T. (1922). *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*. Trad. Heijenoort, Van. (1967). *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic. 1879-1931*. Pp 290-301. Harvard University press. Harvard. Mass.

- (1923). *The Foundations of elementary arithmetic established by means of the recursive mode of thought without the use of apparent variables ranging over infinite domains*. Trad. Heijenoort, Van. (1967). *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic. 1879-1931*. Pp 302-333. Harvard University press. Harvard. Mass.

TARSKI, A. (1936). *On the Concept of Logical Consequence*. En (1956) *Logic, Semantic, Metamathematics*. Clarendon Press.

THARP, L. (1975). *Which logic is the right logic?* Synthese, 31, 1-31.

TORRES, A. Carlos. (2009). *De la matemática clásica a la matemática moderna: Hilbert y el esquematismo kantiano*. Diánoia, V. 54. Núm. 63.

- (2001). *Elementos para una crítica matemática de la razón filosófica. La filosofía matemática de David Hilbert y Kurt Gödel*. UNAM. México.
- (2000). *La lógica matemática del siglo XX*. Miscelánea matemática 31. Pp. 61-105.
- (1999a). *Hilbert, Kant y el fundamento de las matemáticas*. Theoria, Revista del Colegio de Filosofía (Facultad de Filosofía y Letras–UNAM), núms. 8– 9. Pp. 111–129.
- (1999b). *El segundo problema de Hilbert sobre la compatibilidad de los axiomas de la matemática*. Miscelánea matemática 29. Pp. 73-97.
- (1995). *The Philosophy and the Program of Hilbert*. Mexican Studies in the History and Philosophy of Science, vol. 172, pp. 151–172, Kluwer Academic Press, Dordrecht.
- (1989) *la filosofía y el programa de Hilbert*. Mathesis, Vol. 5 núm. 1. Febrero. Pp. 33-55.

VÄÄNÄNEN, Jouko. (2001). *Second order logic and the foundations of mathematics*. The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 7. Pp. 504-520.

- (2012) *Second order logic, set theory and foundations of mathematics*. En: http://www.math.helsinki.fi/logic/people/jouko.vaananen/second_order_or_set_theory.pdf
- (2012^a). *Second order logic or set theory?*. En: <http://www.math.helsinki.fi/logic/people/jouko.vaananen/solost.pdf>

VAN HEIJENOORT, Jean. (1967). *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic. 1879-1931*. Harvard University press. Harvard, Mass.