



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estudio de la transferencia de calor de un
flujo que cruza a través de un arreglo de hilos
elípticos utilizando algoritmos paralelos
ejecutados en GPU

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

PRESENTA:
JAIME ULISES ESTEVEZ HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ JOAQUÍN LIZARDI DEL ÁNGEL



2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicado a mi padre
Jaime Estevez Hernández*

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios y a mi querida familia. Mi padre Jaime Estevez por todo su apoyo, paciencia y comprensión, a mi madre Alicia Hernández por darme ánimos para terminar todo lo que he intentado en la vida, a mi hermana Berenice Estevez por soportarme en momentos difíciles, también quiero agradecerle enormemente a mi tutor, mentor, maestro y sobre todo mi amigo el Dr. José Joaquín Lizardi del Ángel por creer en mí, darme su confianza y grandes oportunidades para desarrollarme académica y profesionalmente y así lograr esta y un gran número de metas que sin su guía y gran humanidad no hubiese podido ser capaz de alcanzar, a mi maestro de química en la secundaria Jaime Bustos Andrade por haberme iniciado y mostrado lo maravilloso de las ciencias, a mi novia Elvia Pérez por su apoyo, sus ideas y su alegría que iluminó tantos momentos complicados y quien siempre me acompaña con su cariño incondicional. De igual forma agradecerle a mis amigos de la oficina Omar, Paola, Sheila, Richie, Alonso, Laurita, Nidia, Martín, Abraham, Jorge, Arturo quienes con su gran amistad salimos adelante, superamos muchos retos juntos y nos divertimos pese a la presión que implicaba estudiar en la H. facultad de ciencias. A mi tutor en la facultad de ciencias M. en C. Augusto Cabrera quien fue un gran apoyo al inicio de la licenciatura, al Dr. Pablo de la Mora entre otras cosas por mostrarme el mundo tan genial del cómputo y Linux, Al Dr. Yépez Mulia por sus grandes enseñanzas, a mi comité evaluador agradezco su interés y sus importantes aportes a la presente tesis. A la Universidad Autónoma de la Ciudad de México le agradezco por darme la oportunidad de estar entre sus filas, finalmente quiero agradecer a mi hogar por durante todos estos años a la Universidad Nacional Autónoma de México por albergarme y darme todo su apoyo desde que curse la Preparatoria en el plantel 7 Ezequiel A. Chávez, la Escuela Nacional de Música, La Facultad de Ciencias. Agradecerles a todos los que han influenciado de manera significativa mi vida aun que no se encuentren en estas líneas pero que viven en mis recuerdos y pensamientos, les estoy eternamente agradecido.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	4
1.2. Sistema de ecuaciones en la fluido-dinámica	6
1.2.1. Volumen de Control	6
1.2.2. Derivada material	6
1.2.3. Teorema de Reynolds	7
1.2.4. Conservación de masa	10
1.2.5. Conservación de cantidad de movimiento	10
1.2.6. Conservación de la energía	11
1.3. Transferencia de calor	13
1.3.1. Ley de Fourier	13
1.3.2. Convección libre y forzada	14
1.4. Parámetros adimensionales	15
2. Planteamiento del Problema	17
2.1. Variación de la excentricidad	18
2.2. Ecuaciones de la fluido-dinámica	19
2.2.1. Ecuación de conservación de masa	20
2.2.2. Ecuación de balance de cantidad de movimiento	20
2.2.3. Adimensionalización de las ecuaciones de cantidad de movimien- to	21
2.2.4. Condiciones de frontera para la velocidad y la presión adi- mensionales	22
2.3. Planteamiento del problema térmico	23
2.3.1. Ecuación de la energía con dimensiones	23
2.3.2. Adimensionalización de la ecuación de la energía	23
2.3.3. Condiciones de frontera para la temperatura adimensional	24
2.4. Formulación de las ecuaciones en términos de la vorticidad y de la función de corriente	25
2.4.1. Condiciones de frontera de la función de corriente y vor- ticidad	25
2.5. Sistema de ecuaciones adimensionales para su simulación	26
3. Generación de mallas	29
3.1. Métodos de solución numéricos	29
3.2. Generación de Mallas computacionales	30
3.2.1. Ecuaciones para la generación de mallas elípticas	32
3.2.2. Ecuaciones en el sistema ξ y η	34

3.3.	Método numérico para la generación de malla	35
3.3.1.	Número de Courant dt adaptativo	36
3.4.	Solución matriz tridiagonal	37
3.4.1.	Planteamiento del método numérico Híbrido y algoritmos intrínsecos GPU para su composición	38
3.4.2.	Reducción Cíclica (CR Cyclic Reduction)	38
3.4.3.	Reducción paralela cíclica (PCR Parallel Cyclic Reduction)	39
3.4.4.	Duplicación Recursiva (RD Recursive Doubling)	40
3.4.5.	Algoritmo Híbrido	41
3.5.	Entorno de programación heterogénea CPU-GPU	42
4.	Análisis de Datos y Resultados	45
4.1.	Validación del algoritmo en ejecución con GPU	45
4.2.	Función de corriente y vorticidad	46
4.3.	Temperatura	52
4.4.	Análisis térmico	55
4.4.1.	Análisis de la temperatura promedio	55
4.4.2.	Análisis número de Nusselt	57
4.5.	Análisis de Performance	57
5.	Conclusiones	61
A.	Adimensionalización de las ecuaciones.	63
B.	Sistema ψ-Ω	67
C.	Clasificación de Mallas	69
D.	Método Numérico	75
D.1.	Corrección aguas-arriba y aguas-abajo	77
E.	Descripción de arquitectura GPU	79
E.1.	Arquitectura GPU Fermi	79
E.2.	Jerarquía de Memoria	82

Índice de figuras

1.1. Sistema en tiempos t y $t + \delta t$	7
1.2. Cambio de volumen del sistema	8
1.3. Movimiento de un elemento de área	9
1.4. Elemento de fluido	10
2.1. Esquematación del problema	17
2.2. Orientación de las elipses en función de sus semiejes	18
2.3. Tomando el arreglo de hilos elípticos realizamos un corte acorde a la simetría y se definen las regiones en el espacio	22
2.4. Condiciones de frontera para la temperatura sin dimensiones	24
2.5. Condiciones de frontera para la vorticidad y función de corriente	25
3.1. Condiciones de frontera de ψ	34
3.2. Condiciones de frontera para Ω	35
3.3. Elemento mínimo espacial para el calculo de el número de Courant	36
3.4. Patrón de Comunicación del algoritmo CR con un ejemplo de 8 incógnitas mostrando el flujo de ejecución entre cada ecuación etiquetadas de la $e1$ a la $e8$ donde e' y e'' son las ecuaciones actualizadas	39
3.5. Patrón de comunicación para el algoritmo PCR, el mismo caso que en la figura 3.4 solo que ahora las ecuaciones que están en los rectángulos verdes son el sistema de ecuaciones separado por el PCR	40
3.6. Patrón de comunicación para el algoritmo RD para el caso de 8 incógnitas	41
3.7. Patrón de comunicación del algoritmo Híbrido para un sistema de 8 incógnitas	41
3.8. Entorno heterogeneo de ejecución CPU-GPU	43
4.1. Gráfico con números de Reynolds seleccionados para validar con la excentricidad circular de la ref.[29] de la bibliografía	46
4.2. Comparación en el comportamiento de la fluido-dinámica entre la ejecución de la simulación con algoritmos GPU y CPU para $Re = 4.0$ y $\epsilon = 0$	46
4.3. Campo de la función de corriente y vorticidad del flujo que atraviesa el hilo elíptico	51
4.4. Campo de temperatura del flujo que atraviesa el hilo elíptico	54
4.5. Temperatura promedio Vs excentricidad aguas abajo	55

4.6. Excentricidad para la cual existe un mínimo de transferencia de calor	56
4.7. Temperatura Vs número de Reynolds	57
4.8. Número Nusselt Vs número de Reynolds	58
4.9. Gráfica de performance para las arquitecturas GPU y CPU en función de la excentricidad la orientación Dw, Up, excentricidad de referencia In y el número de Reynolds	59
C.1. Caracterización de las mallas generadas para resolver las ecuaciones de la fluido-dinámica de un flujo que atraviesa un arreglo de hilos elípticos	73
D.1. Transformación del espacio físico al espacio computacional	75
E.1. Arquitectura Fermi	80
E.2. Arquitectura de un SM (Simetrical Multiprocessor) en la arquitectura GF100	81
E.3. Arquitectura SP de GF100	82

Capítulo 1

Introducción

Cualquiera que sea la teoría o modelo que escojamos para describir el comportamiento de un fluido, obtendremos un sistema de ecuaciones diferenciales, estas claro dependiendo de la naturaleza pueden ser resueltas de forma analítica o numérica, de ser resueltas numéricamente es necesario discretizar el espacio y discretizar dichas ecuaciones dependiendo del modelo elegido tendremos un sistema lineal o no lineal de ecuaciones, que en la mayoría de casos son tanto más complejas cuanto más fielmente reflejan una solución aproximada.

En la presente introducción se conceptualiza el material necesario para que el lector interprete los resultados obtenidos, tomando en cuenta que se realicé un análisis teórico formulando aproximaciones analíticas que supeditaron a un posterior análisis numérico que permitió resolver e interpretar las soluciones al sistema de ecuaciones planteados a lo largo de el presente trabajo. Así pues si queremos conocer y visualizar un fluido en movimiento alrededor de un cuerpo, podemos hacerlo resolviendo sistema de ecuaciones que describen el movimiento de un fluido en un régimen laminar (Navier-Stokes, las ecuaciones de Euler o la teoría de los potenciales por ejemplo).

El estudio de la dinámica de un flujo a través de un arreglo de obstáculos con geometrías arbitrarias, tiene una enorme importancia debido a que te permite mejorar, optimizar, y refinar los procesos de transferencia de calor y masa que se utilizan en diversos diseños de dispositivos utilizados en la industria como por ejemplo el flujo que rodea los tubos de calefacción, anemometría de hilo caliente, la contaminación térmica, la dispersión de contaminantes, e incluso en el diseño de intercambiadores de calor.

A principios de siglo pasado, las ecuaciones de un flujo viscoso eran estudiadas en su forma más reducida esto con la finalidad de obtener soluciones analíticas simples que permitieran describir comportamientos globales de los fluidos; en específico, el estudio de los flujos alrededor de cuerpos, fue simplificado al caso de círculos a partir de los trabajos de Stokes en 1851, quien analizó el flujo alrededor de un cilindro y una esfera para el caso de un número de Reynolds muy bajo con respecto a la unidad, en su aproximación, él considera que existe un plano de simetría con respecto al diámetro del cilindro y toma en cuenta que el número de Reynolds en primera aproximación tiende a cero, con lo

que desprecia las fuerzas inerciales. Para 1910, Ossen realiza una aproximación diferente tomando como base la aproximación hecha por Stokes posteriormente reconoce la discrepancia que se halla implícita en esta aproximación para el caso en el que el cilindro es visto como un cuerpo sumergido en un campo lejano, notando que la aproximación de Stokes corresponde al caso donde la convección no existe porque la velocidad es cero, dándose cuenta que bajo esta idea que el flujo es observado como de velocidad libre, por esta razón Ossen propone linealizar las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando como velocidad característica la velocidad libre de flujo.

Los estudios anteriores, dieron la pauta para una serie de análisis que se concentraron en el estudio del flujo para el caso en el que el número de Reynolds es alto. Posteriormente el desarrollo de la aeronáutica, generó que el estudio de los flujos a altos números de Reynolds se transformaran en análisis de gran importancia. Se estableció un estudio de los esfuerzos generados sobre superficies, del cambio de la presión, de la sustentación alrededor de cuerpos, generando así un nuevo campo de investigación donde la turbulencia se convirtió en el eje central de los análisis. Si bien estos trabajos resultan importantes, también es cierto que existen otras áreas del análisis con relevancia tecnológica.

El primer intento por resolver las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido que cruza a través de un arreglo de hilos cilíndricos fue realizado por Kovasznay [1]. Él presentó una solución exacta simple para el caso bidimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes, la cual consistía en una descripción del flujo de agua debajo de un fluido que incidía normalmente sobre un arreglo de barras igualmente separadas. Este mismo problema, pero utilizando cilindros circulares, se estudia, inicialmente, con el trabajo de Tamada y Fujikawa [2] quienes retomarán el sistema de ecuaciones utilizado por Ossen, dando una solución a números de Reynolds pequeños en comparación a la unidad. El trabajo de ellos fue continuado por Miyagi [3] quien realizó una simplificación suponiendo un flujo incompresible. Posteriormente Hasimoto [4] consideró, además, a la ecuación de Stokes y soluciones periódicas descritas a través de series de Fourier, que dieron resultado para arreglos cuadrados en el caso de cilindros circulares. Happel, Kuwabara y Kawaguti [5] – [6], emplearon modelos de región cercana para hacer predicciones del flujo viscoso relativo a arreglos de cilindros. Estos resultados dan pie al desarrollo de una base de solución que funciona para dos cilindros contiguos y que, a su vez, sirve para representar un modelo de frontera no uniforme. Estas soluciones son válidas para casos donde el número de Reynolds es pequeño comparado con la unidad y son muy útiles para describir el problema de filtración de gases vía filtros viscosos. Los estudios antes mencionados entran en un marco de soluciones analíticas.

Los primeros trabajos analizados numéricamente se enfocaron, de manera principal, en flujos viscosos que pasaban alrededor de cilindros circulares suspendidos en medios infinitos. Thom [7] dio los fundamentos para una representación numérica, utilizando transformación conforme de la mitad superior del plano físico exterior del cilindro, a una barra rectangular semi-infinita. El obtuvo una solución para número de Reynolds de 10 y 20 y calculó los valores del esfuerzo sobre el cilindro, que tuvieron muy buena similitud con resultados experimentales. Kawaguti [6] estudió el flujo que atraviesa hilos con geometría

cilíndrica cerca de los números de Reynolds transitorios en dicha geometría ($Re=10,20,30,40,50$) basándose en el método de Thom y demostró la existencia de una solución permanente para este caso. Apelt dio soluciones para el caso de números de Reynolds del 40 al 44, la primera solución tuvo una muy buena correspondencia con la de Kawaguti [6] en la zona cercana a la superficie del cilindro; aunque mostró discrepancias para zonas más alejadas del mismo. Una formulación mucho más refinada, en función de las condiciones de frontera, fue lograda por Keller y Takami [10], quienes utilizaron soluciones asintóticas para valores de la función de corriente y de la vorticidad en regiones muy distantes del cilindro. Ellos calcularon las soluciones para el número de Reynolds $Re=2,4,10,15$.

Hamielec y Raal [9] obtuvieron, también soluciones “estacionarias” para números de Reynolds mayores a 100, posteriormente, Muzimoto resolvió el flujo alrededor de un obstáculo cilíndrico arbitrario; los resultados de estos autores, aunque contribuyeron al método numérico, no son del todo aplicables en la realidad, por que se conoce que para flujos de números de Reynolds mayores a 50, el flujo se vuelve inestable.

Una de las bases de esta investigación, es el trabajo de Gordon [17] que resuelve las ecuaciones de Continuidad y de Navier-Stokes de un flujo que cruza un arreglo de alambres, utilizando soluciones locales alrededor del cilindro del campo de la función de corriente y de la vorticidad, y acoplándolo a soluciones numéricas para las regiones más lejanas. Su estudio se centra en la idea de obtener las líneas de corriente y de vorticidad para los casos de números de Reynolds entre 20 y 100, lo cual representa una gran contribución para el caso donde la relación entre los términos difusivos y convectivos de las ecuaciones de Navier-Stokes tienen relevancia.

Inicialmente se estudió el problema de la convección forzada sobre un tubo circular, a temperatura uniforme y suspendido en un medio fluido que se realizaron de manera experimental y analítica durante las últimas décadas. En trabajos más recientes se han aplicado nuevas técnicas aproximadas, Cole y Roshko [11], utilizaron la aproximación de Oseen acoplada a la ecuación de la energía, fueron los primeros en calcular la transferencia de calor en un cilindro circular, el campo de temperaturas se obtuvo en términos de una serie infinita de ecuaciones de Bessel y trigonométricas. Illingworth [12] obtuvo los siguientes términos de la expansión utilizando una técnica similar. Heiber y Gebhart [13] trataron el problema de la transferencia de calor en un tubo por medio de expansiones asintóticas y teoría de acoplamientos, modificaron el número de Prandtl y considerando que el número de Reynolds tiende a cero. Dennis et al [14] evaluaron distintos números de Prandtl, desarrollando cálculos con las ecuaciones de Navier-Stokes y energía completas, la precisión de estos cálculos se correlaciona muy bien con los encontrados experimentalmente por Collins y Williams [15]. Más recientemente, Kurdyumov y Fernández [16], encontraron la transferencia de calor en un tubo con bajo número de Reynolds, en un medio infinito. Dichos estudios se centraron en el análisis de un alambre sumergido en un medio infinito, el problema de un arreglo de alambres ha sido abordado con menor frecuencia, pero los trabajos realizados han encontrado resultados satisfactorios tal como el de Gordon [17] que resuelve el campo fluido aplicando las soluciones

de la función de corriente y de la vorticidad de manera local por su parte Wung y Chen [18] [19] obtuvieron, a través de transformaciones Jacobianas la solución del campo fluido y del campo de temperaturas proponiendo que las condiciones de frontera tiene una solución analítica y acoplándolo a un arreglo numérico que ellos denominaron “soluciones analíticas finitas”. Wang [20] encontró, por este mismo método, una serie de soluciones para un banco de tubos, obteniendo también el desarrollo del número de Nusselt sobre los tubos, además de los esfuerzos viscosos sobre el arreglo.

1.1. Antecedentes

Un cilindro elíptico es una forma básica y general, que puede convertirse en una placa plana en un caso especial y también un cilindro circular en función de la relación entre sus ejes. Por otra parte, es bien sabido en dinámica de fluidos que su arrastre en un pequeño ángulo de ataque es menor que la del caso de un cilindro circular. Esto puede ser una característica ventajosa cuando se utiliza un elemento de superficie en tubos elíptico al estudiar la transferencia de calor, ya que la potencia de bombeo requerida puede ser reducida y generar así un intercambiador de calor que puede ser más compacto. Recientemente algunos estudios experimentales se han publicado en bancos de tubos llamados tubos lenticular o de forma ovalada, para reducir la caída de presión.

Dentro del estudio de la fluido-dinámica un importante fenómeno involucrado es la convección la cual tiene muchas aplicaciones en la ciencia y la ingeniería como por ejemplo en la experimentación, diseño e implementación de colectores solares, almacenamiento de energía térmica, la utilización de calor residual, la refrigeración de componentes electrónicos, y muchos otros. La convección tiene dos variantes la convección libre y forzada, en la descripción y análisis del mecanismo de transmisión de calor son complejos, aunque hay un hecho que condiciona el proceso: el movimiento del fluido. El fluido puede moverse de forma forzada por que se aplica una fuerza motriz; en este caso tendríamos una convección forzada. O bien el fluido puede moverse debido a las diferencias de densidad ocasionadas por el contacto con la superficie que está a diferente temperatura; para fines de terminología hablaremos de ellas con aplicaciones dentro del campo de estudio. El estudio de la convección libre de tubos de calefacción por ejemplo, es un caso de estudio en el que la geometría de dichos tubos es elíptica por lo que la comprensión de la fluido-dinámica y transferencia de calor es esencial para su funcionamiento. Como esta muchas aplicaciones prácticas donde los tubos o hilos de sección elíptica transversal han llamado especial atención pues se encontró que crean menos resistencia al fluido de refrigeración el cual se traduce en menos potencia de bombeo. Todo este entendimiento abre pauta para muchas otras aplicaciones de interés para los tubos elípticos y su empleo práctico como en el ámbito de la conservación de la energía.

En cuanto a las características de la convección forzada en la transmisión de calor de los hilos elípticos están disponibles algunas investigaciones por citar alguna el trabajo de Nishiyama del cual se tiene un estudio experimental de convección forzada y transferencia de calor de un flujo alrededor de uno y dos

hilos elípticos[21], con el fin de emplear los tubos elípticos como intercambiador de calor estudió un elemento de superficie y como se comportaba su transferencia de calor en el cual básicamente es importante examinar dicha característica de transmisión del arreglo y explorar una disposición óptima. Con ello se ha prestado especial atención a los tubos elípticos en los campos de investigación de convección libre tal es el caso del estudio de Badr y Shamsher [22] que resolvieron el problema de un cilindro elíptico con convección libre para números de Rayleigh (Ra) en un rango de 10 a 10^3 y la relación entre ejes que van desde 0.1 a 0.964, su resultado cubre toda la región donde pasa el flujo sin aproximaciones de capa límite. Posteriormente realizó un estudio igual para un tubo elíptico isotérmico [23] pero ahora uso convección natural y un flujo laminar variando las orientaciones desde la posición vertical hasta la horizontal, con el que el flujo atravesaba el tubo elíptico llamado ángulo de ataque, donde el estudio reveló que el número de Nusselt (Nu) es máxima cuando el eje mayor es vertical. Investigaciones Numéricas teóricas y experimentales se han hecho sobre la transferencia de calor por convección natural donde la importancia radica en la aportación de la geometría elíptica como el trabajo de Raithby y Hollands[24] que estudia el problema de la convección natural de un cilindro elíptico con una placa vertical y un cilindro horizontal circular como casos especiales al de uno elíptico pese a que su estudio se limita a la configuración vertical del eje principal dio el inicio para un estudio realizado por Hung y Mayinger[25] el cual es un estudio experimental con convección natural de un tubo elíptico con diferentes orientaciones y con diferentes proporciones entre sus ejes donde informó que existe una correlación de la media del número de Nusselt, sin embargo estas investigaciones se refiere a los espacios cerrados. Merkin[26] estudió el caso simétrico del mismo problema tomando como eje principal el eje menor y que este tuviese orientación vertical; el estudio se basó en la solución de las ecuaciones de capa límite y los resultados fueron obtenidos para toda la superficie con exclusión de las ecuaciones de capa flotante, pero el problema de la convección natural al interior de una composición abierta de anillos horizontales y verticales con diferentes relaciones entre los anillos lo realizó Sarhan et al[27]. Donde las correlaciones del grupo adimensional de la media $\overline{Nu}-Ra D/L$ se presentó para los casos horizontal y vertical.

Sobre este problema se realizaron varias investigaciones teóricas y experimentales por muchos investigadores como Khamis, Al-Arabi et al, entre otros donde el calor por convección natural y la transferencia dentro de anillos verticales fue la principal motivación al igual que la caracterización de variables como la relación entre radios, la calefacción de un tubo al interior o exterior mientras otro permanece adiabático. Shehata[28] investigó la convección natural dentro de tubos con disposiciones verticales, inclinadas y horizontales que tenían una relación entre radios de 0.73 tomando un tubo interior a una temperatura fija y el exterior de modo adiabático. Abdul-Aziz [29] estudiaron la transferencia de calor por convección natural en la superficie interior de un tubo calentado uniformemente a diferentes ángulos de inclinación, los experimentos se llevaron a cabo en el rango de Ra 1.44×10^7 hasta 8.85×10^8 , variando la relación L/D en un rango de 10 a 31.4, al igual que el ángulo de inclinación (medida desde la posición vertical) de 0 a 75 grados, los resultados mostraron que la media \overline{Nu} fue máxima cuando la disposición del tubo era vertical, de ello El-Shazly et al[30]. Estudiaron experimentalmente la superficie interior de tubos elípticos inclinados

y verticales cuyas correlaciones del número de Nusselt para el caso de convección libre al inclinar los tubos elípticos a diferentes orientaciones variando los ángulos de inclinación ayudaron al resultado que presentaron Moawed e Ibrahim[31]. En una investigación experimental de la libre transferencia de calor por convección desde la superficie interior de tubos elípticos verticales e inclinados de relación entre ejes diferentes tomando las mismas propiedades del trabajo antes citado y con las superficie uniformemente caliente. Los resultados mostraron que el \overline{Nu} aumento con el ángulo de orientación al mantener la razón entre sus ejes y el Ra constante. Todas estas investigaciones aportan una caracterización en el estudio de flujos que atraviesan obstáculos con geometrías cilíndricas y elípticas donde el régimen de variables como el Nusselt la relación entre ejes el Ra proporcionan información para optimizar una aplicación tecnológica o bien desarrollarla con pleno conocimiento de la fluido-dinámica involucrada.

1.2. Sistema de ecuaciones en la fluido-dinámica

En muchas ocasiones resolver la dinámica de un fluido es intentar resolver un sistema de ecuaciones que modelan dicha dinámica dentro de un proceso evolutivo en el tiempo en el cual nos enfrentamos a plantear un problema matemático donde las soluciones de este tipo de problemas generalmente pueden o no existir, de existir soluciones muchas veces dependen de propiedades intrínsecas de los fluidos, la geometría del sistema o cantidades que están sujetas a errores en la configuración del sistema de ecuaciones que modelan los procesos físicos.

1.2.1. Volumen de Control

Para aplicar las leyes físicas al flujo de un fluido es necesario definir los conceptos de volumen de control y de sistema. Se entiende por volumen de control una región fija en el espacio donde puede existir flujo de fluido a través de sus fronteras. Por esta razón, en diferentes instantes, se pueden tener diferentes partículas en el interior del volumen del control. Por Sistema se refiere a un conjunto de partículas en el cual permanecen siempre las mismas. Es decir, se están observando siempre una cantidad fija de materia.

1.2.2. Derivada material

El cambio con el tiempo de una variable de campo en un flujo se puede expresar en forma lagrangiana y euleriana. La rapidez de cambio siguiendo una partícula (punto de vista lagrangiano) se llama derivada material (o total o sustancial) y se escribe D/Dt . Las letras mayúsculas se usan para enfatizar que se trata de una descripción lagrangiana. Considérese una variable de campo α , que en una especificación euleriana tiene la forma $\alpha = \alpha(x, y, z, t)$. Siguiendo una partícula, el cambio de α en un tiempo δt es $(D\alpha/Dt)\delta t$. En este tiempo δt la partícula se ha movido una distancia δx , δy , δz en las direcciones x , y , z respectivamente.

Desde el punto de vista euleriano, el cambio de α es:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \delta z \quad (1.1)$$

El cambio en ambas descripciones es el mismo por lo que:

$$\frac{D\alpha}{Dt}\delta t = \frac{\partial\alpha}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\delta z \quad (1.2)$$

de donde

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta t} \quad (1.3)$$

Para δt muy pequeños, $\delta x/\delta t$, $\delta y/\delta t$, $\delta z/\delta t$ tienden a las velocidades de la partícula en las direcciones x , y , z , que son u , v , w , respectivamente. Entonces tenemos de la ecuación anterior:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial x}u + \frac{\partial\alpha}{\partial y}v + \frac{\partial\alpha}{\partial z}w \quad (1.4)$$

En notación indicial:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + U_i \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} \quad (1.5)$$

En la ecuación anterior el primer término de la derecha significa la rapidez de cambio de α en un punto (derivada local). Los otros términos representan el cambio convectivo de α , es decir, el cambio a consecuencia del movimiento del fluido. α es una variable de campo que puede ser escalar, vector o tensor. En el caso especial donde α es la velocidad U_i tenemos

$$\frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (1.6)$$

donde el lado izquierdo representa la aceleración de la partícula.

1.2.3. Teorema de Reynolds

El teorema de transporte de Reynolds relaciona, la derivada lagrangiana de una integral de volumen de un sistema, con una integral en derivadas eulerianas. Consideremos un sistema en dos instantes de tiempo t y $t + \delta t$. Sea α alguna propiedad por unidad de volumen. El sistema puede tener un cambio de volumen y posición como se muestra en la siguiente figura: La cantidad total de propiedad

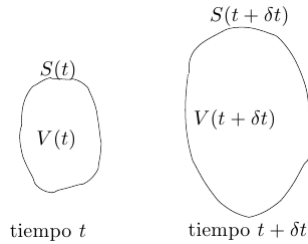


Figura 1.1: Sistema en tiempos t y $t + \delta t$

α en el sistema en el instante t es:

$$\int_{V(t)} \alpha(t) dV \quad (1.7)$$

y la cantidad de α en el instante $t + \delta t$ es

$$\int_{V(t+\delta t)} \alpha(t + \delta t) dV \quad (1.8)$$

La derivada material de la cantidad total de α en el sistema se puede expresar:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \int_{V(t+\delta t)} \alpha(t + \delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right\} \quad (1.9)$$

que se obtiene de la definición de derivada:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta t} \left\{ \int_{V(t+\delta t)} \alpha(t + \delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t + \delta t) dV \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta t} \left\{ \int_{V(t)} \alpha(t + \delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right\} \right] \quad (1.10) \end{aligned}$$

En esta ecuación:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(t + \delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t + \delta t) dV \right] \quad (1.11)$$

representa el integrando fijo con cambio de volumen como se muestra en la figura 1.2, y estas dos integrales se pueden reducir a:

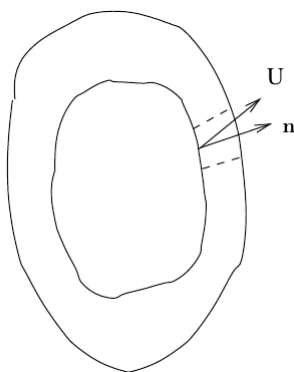


Figura 1.2: Cambio de volumen del sistema

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{V(t+\delta t) - V(t)} \alpha(t + \delta t) dV \quad (1.12)$$

Si consideramos que un elemento dA de la superficie del sistema tiene dos posiciones diferentes en los dos instantes de tiempo considerados t y $t + \delta t$, el barrido

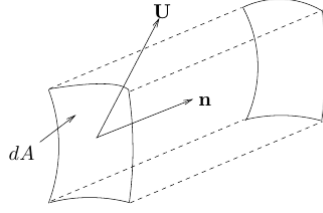


Figura 1.3: Movimiento de un elemento de área

de ésta superficie entre los dos instantes conforma el elemento de volumen dV como se muestra en la figura 1.3. Si n_i es el vector normal a la superficie y U_i representa la velocidad, $U_i n_i$ será la velocidad normal a la superficie.

En el tiempo δt la superficie se mueve una distancia $U_i n_i \delta t$ normal a la misma. Por lo que:

$$dV = U_i n_i \delta t dA \quad (1.13)$$

La integral 1.12 se reduce a la integral sobre la superficie:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \int S(t) \alpha(t + \delta t) U_i n_i \delta t dA \quad (1.14)$$

Tomando el límite se simplifica a:

$$\int_{S(t)} \alpha(t) U_i n_i \delta t dA \quad (1.15)$$

Aplicando el teorema de Gauss, esta integral toma la forma

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \alpha U_i}{\partial x_i} dV \quad (1.16)$$

Los dos términos de la ecuación 1.10 se reduce a la integral sobre la superficie

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t)} \alpha(t + \delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right] &= \int_{V(t)} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} [\alpha(t + \delta t) - \alpha(t)] dV \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (1.17)$$

Tomando el límite se simplifica a

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha U_i)}{\partial x_i} \right] dV \quad (1.18)$$

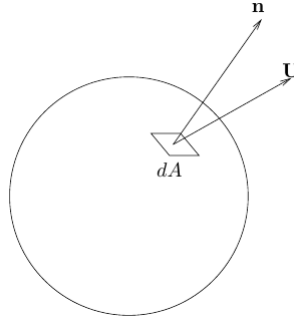


Figura 1.4: Elemento de fluido

1.2.4. Conservación de masa

Considérese un volumen de control de forma arbitraria en el flujo. Por el principio de conservación de masa, la suma de la rapidez de variación de la masa dentro del volumen y la salida neta de masa a través de la superficie del volumen es cero. por lo tanto la forma integral es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_A \rho U_i n_i dA = 0 \quad (1.19)$$

Transformando la segunda integral con el teorema de la divergencia de Gauss, e introduciendo la derivada dentro de la primera integral (el volumen V es independiente del tiempo)

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_i} \right] dV = 0 \quad (1.20)$$

Como el volumen V es arbitrario esta ecuación es válida para cualquier volumen. Esto implica que el integrando es cero.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i) = 0 \quad (1.21)$$

Esta es la forma diferencial de la conservación de masa. A esta ecuación se le llama ecuación de continuidad se simplifica a

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.22)$$

1.2.5. Conservación de cantidad de movimiento

En el estudio de medios continuos este concepto lagrangiano se transforma a una forma euleriana para facilitar su manejo. Considérese un sistema con un campo de velocidad U_i , fuerzas de cuerpo por unidad de masa f_i y fuerzas superficiales por unidad de área representadas por P_i . Aplicando la segunda ley de Newton a este sistema tenemos:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho U_i dV = \int_A P_i dA + \int_V \rho f_i dV \quad (1.23)$$

Donde P_i está relacionado con el tensor de esfuerzos τ por lo que la relación entre estas dos cantidades es:

$$P_{ij} = \tau_{ji}n_j \quad (1.24)$$

Se puede simplificar la forma integral de la ecuación 1.23 aplicando el teorema de Reynolds en el lado izquierdo y 1.24 en la primera integral del lado derecho logrando así:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho U_i U_k) \right] dV = \int_A \tau_{ji} n_j dA + \int_V \rho f_i dV \quad (1.25)$$

Aplicando el teorema de Gauss a la primera integral del lado derecho:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho U_i U_k) \right] dV = \int_A \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} dA + \int_V \rho f_i dV \quad (1.26)$$

Debido a que el volumen V es arbitrario tenemos:

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho U_i U_k) = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (1.27)$$

o bien realizando las derivadas parciales obtenemos:

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_i \frac{\partial (\rho U_k)}{\partial x_k} + \rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (1.28)$$

El segundo y tercer término es un múltiplo de la ecuación de continuidad, entonces:

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (1.29)$$

Esta es la forma diferencial de la conservación de momentum. Usando la derivada material

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (1.30)$$

Esta expresión muestra el balance entre la aceleración por unidad de volumen del lado izquierdo y las fuerzas de superficie y las de cuerpo respectivamente del lado derecho.

1.2.6. Conservación de la energía

La primera ley de la termodinámica establece la conservación de la energía. Si se considera un sistema, el cambio de energía del sistema es la suma de la entrada de energía en forma de calor y de trabajo. La energía del sistema comprende la energía interna y la energía cinética. La energía interna por unidad de masa es e . Considerando un elemento de volumen dV del sistema, $\rho e dV$ es su energía interna y $(\rho U_i U_i dV)/2$ su energía cinética. Considerando un elemento de superficie del sistema dA , $q_i n_i dA$ representa la rapidez de salida de calor, donde q_i es el flujo de calor. El trabajo se efectúa por las fuerzas de cuerpo y las fuerzas de superficie. El término $P dA$ representa la fuerza de superficie sobre el elemento dA Y $U_i P_i dA$ la rapidez con la que realiza este trabajo. El

término $\rho f dV$ es la fuerza de cuerpo sobre el elemento dV y $U_i \rho f_i dV$ la rapidez del trabajo realizado por la fuerza del cuerpo.

Entonces, considerando la rapidez del cambio de energía del sistema tenemos:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho U_i U_i \right\} dV = \int_A U_i P_i dA + \int_V U_i \rho f_i dV - \int_A q_i n_i dA \quad (1.31)$$

donde por convención el signo del último término se toma positivo cuando el flujo es hacia afuera con respecto al sistema. Sustituyendo $P_{ij} = \tau_{ij} n_j$ y utilizando el teorema de Reynolds se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho U_i U_i \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} U_i U_i \right\} U_k \right] dV = \\ = \int_A U_i \tau_{ki} n_k dA + \int_V U_i \rho f_i dV - \int_A q_i n_i dA \end{aligned} \quad (1.32)$$

Utilizando nuevamente el teorema de Gauss:

$$\begin{aligned} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho U_i U_i \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} U_i U_i \right\} U_k \right] dV = \\ = \int_V \frac{\partial (U_i \tau_{ki})}{\partial x_k} dA + \int_V U_i \rho f_i dV - \int_V \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dA \end{aligned} \quad (1.33)$$

Puesto que V es un volumen arbitrario se establece

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} \rho U_i U_i \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho e + \frac{1}{2} U_i U_i \right\} U_k = \frac{\partial U_i \tau_{ki}}{\partial x_k} + U_i \rho f_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (1.34)$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} U_i U_i \right) + e \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho U_k \right) + \frac{1}{2} U_i U_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho U_k \right) + \\ + \rho U_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + \rho U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} U_i U_i \right) = U_i \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} + \tau_{ki} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_i \rho f_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Por continuidad tenemos:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho U_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + \rho U_k \left(U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) = \\ = U_i \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} + \tau_{ki} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_i \rho f_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Esta es la ecuación de conservación de energía total. Sin embargo, la conservación de la energía mecánica se obtiene multiplicando escalarmente las ecuaciones 1.29 por la velocidad:

$$\rho U_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k \left(U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) = U_i \left(\frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} + U_i \rho f_i \right) \quad (1.37)$$

Restando estas ecuaciones a las anteriores

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = \tau_{ki} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (1.38)$$

Esta es la forma diferencial de la conservación de energía interna. Usando la derivada material:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \tau_{ki} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (1.39)$$

El lado izquierdo representa la rapidez de cambio de energía interna, el primer término del lado derecho la acción sobre la deformación y el último término el efecto de la transmisión de calor.

1.3. Transferencia de calor

Un cuerpo sumergido en un fluido el cual tiene una temperatura distinta a dicho cuerpo es una fuente de perturbación del estado de equilibrio del medio, de aquí podemos aislar elementos del flujo localizados en los límites de la superficie del cuerpo el cual al tener una temperatura distinta al elemento de fluido se creará un proceso de intercambio y distribución de calor por la conductividad térmica debida a la diferencia de temperatura existente, este es el mecanismo básico de la transferencia de calor. Si además consideramos la no uniformidad de la temperatura que provoca la no uniformidad de la densidad ó bien genera una variabilidad en $\Delta\rho$ podremos notar que se generan corrientes de convección las cuales transfieren el calor, en general, la transferencia de calor por convección natural se produce en un campo no uniforme de fuerzas o en la presencia de una fuerza gravitacional, entonces el movimiento que ocurre se conoce como convección térmica gravitatoria. Un cambio en la densidad también puede deberse entre otras cosas a la no-uniformidad de como se distribuye la concentración de algún componente en alguna mezcla o reactivo químico (en este caso hablamos de difusión de concentración ó convección), a la presencia de fases con diferentes densidades o fuerzas de tensión sobre la superficie, etc. Así pues las corrientes por convección natural pueden ser inducidas tanto por la gravedad como por otras fuerzas de masa (centrífuga, de Coriolis, electromagnéticas, etc.). Por ejemplo, la convección dentro de tubos en rotación llenos de gas inmerso en un campo de fuerza gravitatoria no-uniforme donde también hay una diferencia de densidades y un campo de aceleración no-uniforme debida a la rotación. Ahora de todo ello podemos decir que el movimiento y el intercambio de calor que ocurre en un espacio infinito se llama convección libre.

1.3.1. Ley de Fourier

En fluidos dada la conducción de calor, aparece un movimiento convectivo debido a la variación de la densidad del fluido con la temperatura como ya bien se ha comentado, Cuando en un medio existe un gradiente de temperatura el calor fluye, esto es, la energía se transmite debido al movimiento del elemento de fluido, así pues se puede relacionar el transporte de energía por conducción con la ley de Fourier:

$$\mathbf{q} = k\nabla T \quad (1.40)$$

es decir la densidad de flujo de calor \mathbf{q} , es directamente proporcional al gradiente de temperatura ∇T , en otras palabras el calor fluye de una zona de temperatura alta a otra de temperatura baja. A la constante k se le denomina conductividad

térmica donde sus unidades son $J/(smK)$, siendo las unidades del flujo de calor W/m^2 ó $J/(sm^2)$ y la temperatura en grados centígrados o Kelvin.

1.3.2. Convección libre y forzada

La presión juega un papel importante en el ámbito de no-uniformidad térmica pese a esto en la zona de flujo convectivo puede considerarse constante, entonces decimos ahora que el movimiento y el intercambio de calor en un volumen acotado se denomina convección natural. La convección natural de flujos pueden ser laminar o turbulento, los datos experimentales muestran que en la convección libre la parte básica de las perturbaciones térmicas e hidrodinámicas se concentran en una capa límite más delgada del líquido cerca de la superficie donde existe contacto y por lo tanto transferencia de calor, por ejemplo en el fondo de una lamina caliente en posición vertical se forma una capa límite laminar con el aumento de la altura de la placa aumenta el espesor de la capa límite y por lo tanto disminuye la transferencia de calor, a cierta altura, el movimiento laminar se altera y se convierte en turbulento. En esta región, el flujo representa el movimiento al azar de las masas del fluido, cuyas características se describen mediante funciones estocásticas de espacio y tiempo variables. Para una parte de la superficie caliente, donde las características de la turbulencia térmica se vuelven estadísticamente idénticas, existe un coeficiente de transferencia térmica la cual es independiente de las dimensiones del cuerpo. Se sabe que en la convección libre no se puede considerar por separado capas límite térmicas e hidrodinámicas puesto que el movimiento del líquido está totalmente determinado por el proceso de transferencia de calor, sin embargo los principales factores que afectan a la velocidad de transferencia de calor por convección pueden ser clasificando su modalidad en libre o forzada como ya mencionamos pueden ser en el régimen laminar o turbulento, debida a la geometría del flujo o ya sea un flujo externo o interno al cuerpo en la convección libre la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el entorno en reposo estas diferencias pueden crear una fuerza de empuje, esta fuerza de empuje tiene el impulso que causa el desplazamiento del líquido estableciendo así corrientes y una velocidad que se pueden determinar para distintos elementos de volumen del flujo. Ahora para el proceso de transferencia de calor por convección se sabe que en situaciones en que se induce el flujo del fluido por algún medio externo como una bomba o un ventilador la transferencia de calor promovido por este medio se llama convección forzada y que puede ser estudiada de dos formas, al interior y exterior del cuerpo. En el caso de flujo externo, capas límites son generalmente capaces de desarrollarse libremente, mientras que para el flujo interno las restricciones impuestas por las superficies adyacentes afectan el desarrollo del estudio. Por lo tanto de ello la importancia de la interrelación de tres parámetros adimensionales de los cuales se hablará con mas profundidad en las secciones siguientes, a saber los números de Reynolds, Prandtl, Nusselt. Que si bien se han discutido con anterioridad nos ocuparemos de definirlos adecuadamente para un mejor entendimiento del proceso de fluido-dinámica y transferencia de calor en hilos elípticos.

Independientemente del mecanismo ya sea libre o forzado la convección proporciona la fuerza motriz para la transferencia de calor donde la geometría y las condiciones iniciales del flujo proporcionan las variables para la ley de convección fundamental denominada Ley de enfriamiento de Newton, esta ley describe

Cuadro 1.1: Rango de valores para el coeficiente de transferencia de calor

Proceso	Tipo de fluido	$\alpha(W/m^2k)$
Convección Libre	Gas	2-25
	Líquido	50-1000
Convección Forzada	Gas	25-250
	Líquido	50-2000

que la razón de pérdida de calor de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y el medio que lo circunda la cual se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{dq}{dt} = \alpha A \Delta T \quad (1.41)$$

Donde q es el flujo de calor (W/m^2), α el coeficiente de transferencia de calor por convección (W/m^2K), y $\Delta T = (T_s - T)$ la diferencia de temperatura entre la superficie T_s y el fluido (K). A menudo, la temperatura de la superficie y los líquidos determinan el conocimiento de α la cual solo determina la tasa de transferencia de calor, cuando el flujo de calor es constante la derivación de la transferencia de calor por convección proporciona el cálculo del coeficiente α siendo este la diferencia de temperaturas entre el elemento de superficie y el fluido. Ahora las velocidades del fluido son mayores para los sistemas de convección forzada que es nuestro caso de estudio por tanto el coeficiente de transferencia de calor superficial generalmente también es más grande, en el cuadro 1.1 se presenta una comparación de la gama de valores mas comunes para α en la convección forzada y libre, tanto líquidos como gases. Como puede verse en la tabla. α es generalmente mayor para la convección forzada, hay un cierto grado de solapamiento en sus valores para los dos procesos de convección y entre cada uno de los tipos de líquidos. Para grandes diferencias de temperatura, las fuerzas de flotabilidad inducida en la convección libre puede crear velocidades que se acercan a las realizadas en determinados sistemas de convección forzada. Además, para líquidos viscosos, la transferencia de calor por convección forzada sus coeficientes pueden ser inferiores a la establecida para un sistema de convección libre que incluye una solución menos viscosa. El estudio de ambas convecciones libre y forzada junto con la transferencia de calor por dicha convección es ante todo cuestión de la derivación de los coeficientes y números adimensionales, ello a fin de definir las temperaturas y flujos de calor dentro de los sistemas térmicos que funcionan con fluidos. El coeficiente de transferencia de calor depende en gran medida del estado de la capa límite que se forma cuando pasa un fluido en movimiento (o elemento de volumen del fluido) relativo a la superficie.

1.4. Parámetros adimensionales

Para que las ecuaciones presentadas en las secciones anteriores sean consistentes y resuelvan problemas en general y no casos particulares debidos a las condiciones físicas del problema tenemos que expresarlas en forma generalizada lo cual nos lleva a integrarles parámetros adimensionales que ayudan a cumplir dicho propósito. Entre las cuestiones más importante que pueden definir

un parámetro adimensional están su geometría por ejemplo en la ecuación de continuidad no aparece ningún parámetro pero en la ecuación de cantidad de movimiento contiene sólo uno, considerado, como el más importante en mecánica de fluidos el número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} \quad (1.42)$$

Donde U es la velocidad característica del fluido, L una longitud característica, ρ la densidad, y μ la viscosidad. Este número siempre es importante y su efecto sólo puede despreciarse fuera de regiones donde hay gradientes altos de velocidad por ejemplo lejos de las superficies fijas, chorros o estelas. De igual forma las cantidades adimensionales son una herramienta poderosa en el análisis de las pérdidas por convección o también es muy útil para predecir el rendimiento de sistemas que tienen características aproximadamente semejantes. Por lo tanto podemos decir para el número de Re expresa la importancia de los efectos de inercia relativos al flujo viscoso en problemas de fluido-dinámica. También existen varias cantidades adimensionales que representan propiedades distintas, acordes a sus rangos, de flujo de fluidos en la presente tesis se mencionarán solo los que nos competen tal es el caso de el número de Peclet la cual es también una magnitud adimensional que expresa la convección térmica durante un proceso de flujo, viene definido por el producto del número de Re por el Prandtl, dado como:

$$Pe = \frac{UL}{a} \quad (1.43)$$

Donde U y L son cantidades como se describen para el Re y a es la difusividad térmica. Se mencionaba un parámetro llamado número de Prandtl el cual nos ayuda a calcular la transferencia de calor y materia a través de un fluido estacionario o laminar y viene dado por la relación:

$$Pr = \frac{\nu}{\rho a} \quad (1.44)$$

donde ν es la viscosidad y a la difusividad térmica, se ha demostrado experimentalmente que los coeficientes de transferencia de calor y materia alcanzan unos valores límites bajos dados por $Nu = 2$, donde Nu es el número de Nusselt con respecto al fluido. Con respecto a esta última cantidad adimensional la definimos como un cantidad que permite medir la magnitud del flujo de calor por conducción en un proceso de transferencia de calor. También puede considerarse que el número de Nusselt es un gradiente adimensional de la temperatura sobre la superficie en la que tiene lugar dicho proceso y está dado por la relación

$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (1.45)$$

donde h es el coeficiente de intercambio térmico que se define de tal forma que:

$$\mathbf{q} = h(T_1 - T_0)\mathbf{n} \quad (1.46)$$

donde \mathbf{n} es la dirección normal a las isoterms, T_1 es la temperatura de una de las paredes que limitan el espacio donde ocurre la transferencia de calor y T_0 es la temperatura de la pared restante. Con estas cantidades adimensionales se describirán muchos de los resultados de la presente Tesis.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

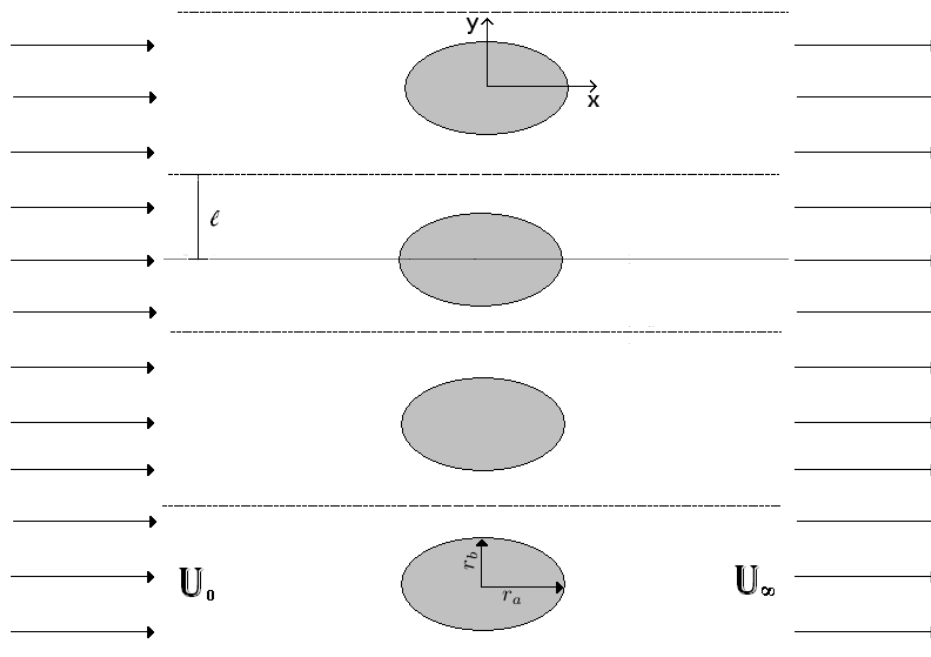


Figura 2.1: Esquematización del problema

El problema que resolveré en la presente tesis es el siguiente, esquematizado en la fig 2.1 consideremos un gas que se mueve a una velocidad U_0 aguas abajo, el cual incide sobre un arreglo de hilos con geometría elíptica, sobre la superficie de éstos la velocidad del flujo es cero por condición de no deslizamiento, además se considera que existe una caída de presión entre la entrada y la salida del sistema por lo que la presión inicial del sistema es p_0 y la presión de salida es p_∞ .

Como puede verse en la figura 2.1, cuando \bar{y} es igual a cero, sobre todo el eje \bar{x} existe una línea de simetría lo mismo sucede para el caso en el cual $\bar{y} = \ell$ este hecho implica la posibilidad de simplificar el esquema físico del problema. Es importante hacer notar la definición en este caso elíptico de r_a y r_b están definidos como el semi-eje mayor y el semi-eje menor respectivamente, de igual forma definimos a cualquier cantidad \bar{c} como una cantidad con dimensiones y a toda cantidad c como una cantidad adimensional. Una vez caracterizado el problema se presenta la dinámica del flujo a través de los hilos con geometría elíptica, pasaremos a hacer uso de las ecuaciones que describen este proceso y también realizaré una descripción del comportamiento del fluido sobre el sistema teniendo en cuenta los efectos de la caída de presión y la disminución de la velocidad del flujo cuando cruza el arreglo, de tal manera que se favorezcan los procesos de transferencia de calor y de transporte de masa, todo esto con el fin de estudiar la eficiencia del sistema. Las leyes que nos permiten explicar la dinámica de un fluido son: La conservación de la masa, energía y momento; estas se encuentran descritas en un sistema lagrangiano, pero es necesario describirlas a través de un sistema euleriano que centra su idea en la conservación de los flujos a través de un volumen de control como se menciona en el capítulo anterior, la transformación que nos lleva a éste resultado está descrita a través del teorema del transporte de Reynolds. Se desarrolla conjuntamente la formulación de dos cantidades que describen el comportamiento del campo de velocidades llamadas vorticidad Ω y la función de corriente ψ las cuales se muestran en secciones subsecuentes. El objetivo es: estudiar el comportamiento de la transferencia de calor si existe una excentricidad que no sea la circular (ya que este es un caso bastante estudiado) para el cual se tenga un mínimo de transferencia de calor, de existir medir que valor se obtiene de excentricidad y si esta conserva una geometría elíptica, determinando de igual forma su orientación.

2.1. Variación de la excentricidad

En el presente problema considero un área constante para la elipse tomando un radio circular de referencia $r = 0.5$ ya que se sabe que el círculo es un caso especial de una elipse con excentricidad $e = 0$, donde dicho valor para el radio de referencia es tomado a partir de la caracterización geométrica del problema, de igual forma realizo una variación de la excentricidad conservando en todas las variaciones dicha área constante, ahora sabemos que la excentricidad se describe por la siguiente ecuación:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (2.1)$$

Dado un radio de referencia (en este caso el de excentricidad circular) tenemos que para conservar el área constante la ecuación

$$A_c = \pi r^2 = \pi 0.25 \quad (2.2)$$

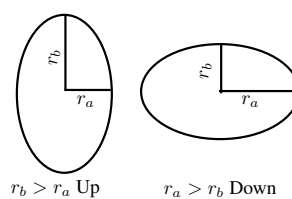


Figura 2.2: Orientación de las elipses en función de sus semiejes

Debiendo ser igual el área de la elipse en todo momento que se varíen los semiejes, dicha área elíptica es:

$$A_e = \pi r_a r_b \quad (2.3)$$

Igualando las ecuaciones 2.2 y 2.3 obtenemos:

$$A_c = A_e \Rightarrow \pi 0.25 = \pi r_a r_b \quad \therefore r_a = \frac{0.25}{r_b} \quad (2.4)$$

r_b	$r_a = \frac{0.25}{r_b}$	$c = \sqrt{1 - \left(\frac{r_b}{r_a}\right)^2}$
0.260	0.962	0.963
0.270	0.926	0.957
0.290	0.862	0.942
0.300	0.833	0.933
0.310	0.806	0.923
0.320	0.781	0.912
0.330	0.758	0.900
0.340	0.735	0.887
0.350	0.714	0.872
0.360	0.694	0.855
0.370	0.676	0.837
0.380	0.658	0.816
0.400	0.625	0.768
0.410	0.610	0.740
0.420	0.595	0.709
0.430	0.581	0.673
0.440	0.568	0.633
0.450	0.556	0.586
0.470	0.532	0.468
0.490	0.510	0.276
0.500	0.500	0.0
0.510	0.490	0.276
0.520	0.481	0.381
0.550	0.455	0.563
0.568	0.440	0.632
0.580	0.431	0.669
0.595	0.420	0.709
0.600	0.410	0.740
0.640	0.400	0.750
0.643	0.391	0.792
0.658	0.380	0.816
0.670	0.373	0.831

Cuadro 2.1: Valores para la excentricidad en función de r_b

Se clasifican las elipses dependiendo de la orientación que tengan estas y sus respectivas orientación están en función de cual semieje es mayor, esto se muestra en la figura 2.1. Por lo tanto, dada la descripción anterior tenemos que las excentricidades a experimentar numéricamente se muestran en el cuadro 2.1, cabe destacar que donde los semiejes son iguales ($r_a = r_b = 0.5$) se tiene un valor de excentricidad igual a cero y la geometría se vuelve circular, para este caso en particular nombré la orientación In que será referida en varias imágenes a lo largo de la presente tesis y pertenece al caso de referencia.

2.2. Ecuaciones de la fluido-dinámica

Una de las consideraciones de estudio en las propiedades del flujo es el campo de velocidad $\mathbf{U}(x, y, z)$, de hecho determinar la velocidad es a menudo equivalente a resolver el problema, ya que otras propiedades se obtienen directamente

de aquélla al igual que la presión se necesitan conocer dichos campos para encontrar muchas de las propiedades importantes en la fluido-dinámica incluso es posible encontrar el campo de temperaturas y la transferencia de calor a partir de dichas velocidades. Al ser la velocidad un vector, esta cantidad es función de la posición y del tiempo, que tiene tres componentes escalares, u , v y w :

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\mathbf{i} + v(x, y, z, t)\mathbf{j} + w(x, y, z, t)\mathbf{k} \quad (2.5)$$

Ya en el capítulo 1 se planteo el uso de este campo en términos de ecuaciones más complejas y que detallan muchas de las propiedades que se quieren encontrar en los fluidos para poder así describirlos, para el problema planteado en el presente trabajo tenemos que no se usan las tres dimensiones y es un problema estacionario por lo cual no depende del tiempo, por lo tanto, nuestro campo de velocidades queda descrito como:

$$\mathbf{U}(x, y) = u(x, y, z)\mathbf{i} + v(x, y, z)\mathbf{j} \quad (2.6)$$

y haremos uso de esta expresión en términos de otras que proveen de una mayor cantidad de información para la descripción del flujo a saber la vorticidad y la función de corriente.

2.2.1. Ecuación de conservación de masa

La ecuación de continuidad se deriva de la ecuación de conservación de masa, también conocida como la primera ley de Newton. Descrita en dos dimensiones y para un sistema estacionario siendo ρ la densidad del fluido y su valor $\rho = \text{cte}$ obtenemos la siguiente ecuación de continuidad:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.7)$$

Ya que $D\rho/Dt = 0$ y donde \bar{u} , \bar{v} representan las velocidades en la dirección longitudinal y transversal de manera dimensional. Con esto la ecuación de continuidad queda reducida a dos términos que no son distintos de cero, de ella es posible derivar la función de corriente que fue desarrollada por el matemático francés J. L. Lagrange en 1755 y la cual retomaré más adelante.

2.2.2. Ecuación de balance de cantidad de movimiento

La ecuación de balance de cantidad de movimiento se deriva de la segunda ley de Newton, lo que nos lleva a describir al flujo, a través de la conservación de la cantidad de movimiento que actúa sobre el volumen de control dentro del sistema euleriano. La derivada material del momento queda descrita a través de las velocidades longitudinales y transversales del flujo y el cambio de la presión dentro del sistema. Se muestra a continuación la ecuación de conservación de momento en su forma bidimensional, en el caso no estacionario, donde \bar{p} es la presión en el sistema, μ_g es la viscosidad del gas, los términos de la derivadas de primer orden son conocidos como los términos convectivos, mientras que los que involucran a la segunda derivada son llamados difusivos. Reescribiendo la ecuación para el caso en el cual el flujo es estacionario las derivadas temporales

de las velocidades longitudinales y transversales \bar{u} y \bar{v} son cero como puede verse a continuación:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] \quad (2.8)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right] \quad (2.9)$$

Las ecuaciones de cantidad de movimiento son una aplicación de la segunda ley de Newton. Cada una de ellas establece que la fuerza de inercia (debida a la aceleración del fluido) es igual a la fuerza neta externa que actúa sobre el fluido. Los primeros términos constituyen a la aceleración convectiva y son términos no lineales (convección forzada). Los dos primeros términos del lado derecho de la igualdad son las fuerzas superficiales, motriz y viscosa, respectivamente.

2.2.3. Adimensionalización de las ecuaciones de cantidad de movimiento

En la forma en que se presentó el sistema de ecuaciones de la sección anterior están descritas de manera dimensional, lo que correspondería a un problema en concreto, lo que a continuación se desarrollará es una generalización en la descripción de las ecuaciones del problema, realizando un cambio de variables adimensionalizaré el sistema de ecuaciones para resolver al mismo, esto apoya a posibles planteamientos de cualquier condición de frontera que se quiera realizar posteriormente, esto es, las ecuaciones quedan en función de constantes adimensionales como el número de Reynolds, Prandtl, etc.

Comenzamos con las escalas de longitud las cuales adimensionalizamos con longitudes características del problema, tomando la longitud entre las elipses ℓ esto es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{\ell} \\ y &= \frac{\bar{y}}{\ell} \end{aligned} \quad (2.10)$$

En ambas direcciones, igualmente las velocidades con la velocidad libre de flujo U_0 :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\bar{u}}{U_0} \\ v &= \frac{\bar{v}}{U_0} \end{aligned} \quad (2.11)$$

De donde la adimensionalización de la presión es:

$$p = \frac{\bar{p}}{\rho U_0^2} \quad (2.12)$$

Las deducciones para la adimensionalización de las ecuaciones se muestran en el apéndice A donde las ecuaciones adimensionalizadas quedan descritas como se muestran a continuación:

- Ecuación de conservación de masa:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.13)$$

- Ecuación de conservación de cantidad de movimiento, en ambas direcciones es:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.14)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (2.15)$$

Donde el número de Reynolds se define de la siguiente forma:

$$Re = \frac{\rho_g U_0 \ell}{\mu_g} = \frac{\ell U_0}{\nu_g} \quad (2.16)$$

2.2.4. Condiciones de frontera para la velocidad y la presión adimensionales

Dada la simetría del problema y una vez adimensionalizadas las ecuaciones de la fluido-dinámica tenemos que las condiciones de frontera del presente problema para la velocidad y la presión para las regiones definidas en el espacio según se muestran en la siguiente figura:

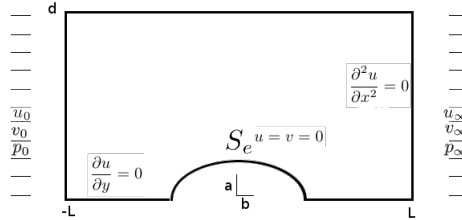


Figura 2.3: Tomando el arreglo de hilos elípticos realizamos un corte acorde a la simetría y se definen las regiones en el espacio

Donde S_e es la superficies de la elipse la cual definimos ya que a, b están cambiando dependiendo de la excentricidad y dadas dichas regiones las condiciones de frontera en los intervalos a los contornos son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x = -L, y \in [0, \ell] &\longrightarrow u = U_\infty, v = 0. \\ x = L, y \in [0, \ell] &\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0, v = 0. \\ x \in [-L, L], y = \ell &\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0. \\ x \in [-L, -r_b], y = 0 &\longrightarrow v = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \\ x \in [r_b, L], y = 0 &\longrightarrow v = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \\ x, y \in S_e &\longrightarrow u = 0, v = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.3. Planteamiento del problema térmico

Una vez estudiada la dinámica del gas, es posible hacer la extensión al modelo con transferencia de calor. Para este caso, las condiciones de simetría establecidas anteriormente en la dinámica del flujo se mantienen; además que la densidad y la viscosidad en el sistema se mantienen constantes. Podemos establecer que inicialmente el flujo se encuentra a una temperatura T_∞ menor que la temperatura a la que se encuentra sometido el hilo T_w . De esta manera, atendiendo a la transferencia de calor, el hilo cederá calor al flujo calentándolo. La cantidad de calor que se ceda al sistema dependerá de la velocidad, del calor específico, de la densidad y de la viscosidad del flujo de gas.

Una vez estudiada la dinámica del fluido, es posible hacer la extensión al modelo con transferencia de calor. Para este caso, las condiciones de simetría establecidas anteriormente en la dinámica del flujo se mantienen; además que la densidad y la viscosidad en el sistema también se mantienen constantes. Podemos establecer que inicialmente el flujo se encuentra a una temperatura T_∞ menor que la temperatura a la que se encuentra sometida el hilo T_w . De esta manera, atendiendo a la transferencia de calor, el hilo cederá calor al flujo calentándolo. La cantidad de calor que se ceda al sistema dependerá de la velocidad, del calor específico, de la densidad y de la viscosidad del flujo de gas, tal como se verá en las secciones siguientes.

2.3.1. Ecuación de la energía con dimensiones

La ecuación de la energía describe la transferencia de calor que existe en un sistema, en este caso de los hilos elípticos hacia el fluido, es importante hacer hincapié en la comprensión física de los términos de la ecuación, si se encuentran del lado derecho describen la transferencia de calor por convección, ésta se debe al transporte de calor vía el movimiento de flujo; como se había mencionado en la introducción, los términos del lado izquierdo de la ecuación dan la información de la transferencia de calor, que obedece a la conducción de calor que existe en el gas, la ecuación de la energía en su forma dimensional es:

$$\rho C_p \left(\bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} \right) = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} \right] + \mathbf{F} \quad (2.18)$$

donde C_p es la capacidad calorífica del gas, k es la conductividad térmica del gas \mathbf{F} representa un término fuente, que para el caso de estudio que nos interesa es cero. La ecuación es una consecuencia de la primera ley de la termodinámica. El lado izquierdo representa la rapidez de cambio de energía interna (transferencia convectiva) y el lado derecho representa la rapidez a la cual se adiciona calor por conducción y la disipación viscosa es importante para flujos muy viscosos moviéndose a altas velocidades.

2.3.2. Adimensionalización de la ecuación de la energía

La ecuación 2.18, se encuentran descrita en forma dimensional como se mencionaba anteriormente, lo que significa que corresponde a un problema específico, por ello se propone una serie de cambio de variables que adimensionalice la

ecuación y así se puedan resolver para cualquier condición, para ello usamos el parámetro de adimensionalización para la temperatura

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (2.19)$$

donde T_w es la temperatura dimensional de la superficie de la elipse, por lo tanto, la ecuación de la energía en forma adimensional y estacionaria queda escrita de la siguiente manera:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pe} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right] \quad (2.20)$$

2.3.3. Condiciones de frontera para la temperatura adimensional

En el apéndice A se realiza una deducción más detallada de la ecuación 2.20 y sus respectivas condiciones de frontera adimensionales son como se muestra en la siguiente figura:

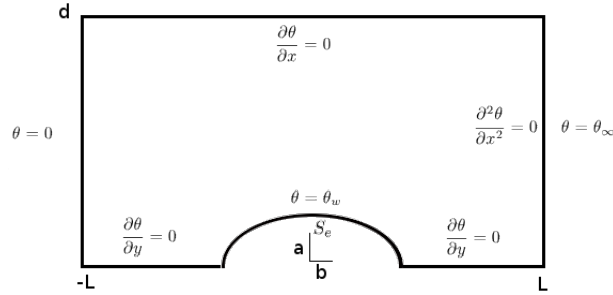


Figura 2.4: Condiciones de frontera para la temperatura sin dimensiones

$$\begin{aligned}
 x = -L, y \in [0, \ell] &\longrightarrow \theta = 0. \\
 x = L, y \in [0, \ell] &\longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0. \\
 x \in [-L, L], y = \ell &\longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \\
 x \in [-L, -r_b], y = 0 &\longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \\
 x \in [r_b, L], y = 0 &\longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \\
 x, y \in S_e &\longrightarrow \theta = 1.
 \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.4. Formulación de las ecuaciones en términos de la vorticidad y de la función de corriente

Se desarrolló en las secciones anteriores las ecuaciones que rigen al movimiento del fluido, éstas se describen en términos de valores característicos adimensionales como son: la velocidad longitudinal v , la velocidad transversal u y la presión p del fluido, además de las ecuaciones de conservación de la masa, cantidad de movimiento en ambas direcciones. Ya con esta información tenemos que el sistema se encuentra cerrado, lo cual implica que la solución es única y utilizando una formulación del sistema de ecuaciones dependientes de la función de corriente y la vorticidad se obtiene un sistema integrador numérico del presente problema. La deducción más detallada se presenta en el apéndice B, por lo tanto la nueva descripción vorticidad y función de corriente queda reducida a dos ecuaciones:

$$\Omega = - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] \quad (2.22)$$

Donde la ecuación de vorticidad establece que la rapidez de cambio de la vorticidad de un elemento de fluido depende del gradiente de velocidad y de su difusión por efectos viscosos.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right] \quad (2.23)$$

2.4.1. Condiciones de frontera de la función de corriente y vorticidad

Donde las condiciones de frontera que les correspondería en la entrada y en la salida del sistema son:

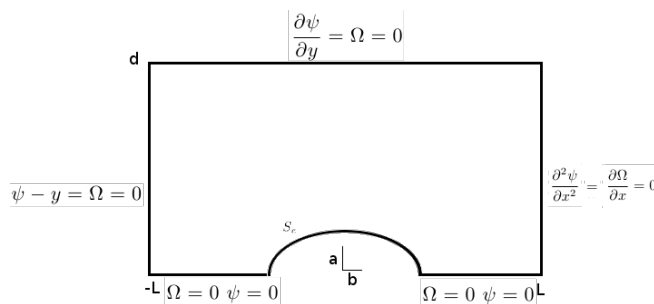


Figura 2.5: Condiciones de frontera para la vorticidad y función de corriente

condiciones de frontera para la función de corriente:

$$\begin{aligned}
x = -L, y \in [0, \ell] &\longrightarrow \psi = y. \\
x = L, y \in [0, \ell] &\longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \\
x \in [-L, L], y = \ell &\longrightarrow \psi = 1. \\
x \in [-L, -r_b], y = 0 &\longrightarrow \psi = 0. \\
x \in [r_b, L], y = 0 &\longrightarrow \psi = 0. \\
x, y \in S_e &\longrightarrow \psi = 0.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

condiciones de frontera para la vorticidad:

$$\begin{aligned}
x = -L, y \in [0, \ell] &\longrightarrow \Omega = 0. \\
x = L, y \in [0, \ell] &\longrightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0. \\
x \in [-L, L], y = \ell &\longrightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0. \\
x \in [-L, -r_b], y = 0 &\longrightarrow \Omega = 0. \\
x \in [r_b, L], y = 0 &\longrightarrow \Omega = 0. \\
x, y \in S_e &\longrightarrow \Omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Donde n es la normal a la superficie.

2.5. Sistema de ecuaciones adimensionales para su simulación

Por lo tanto de las secciones anteriores tenemos en resumen que las ecuaciones adimensionales que se resuelven y simulan al igual que se obtendrán los resultados de la presente tesis son:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Pe} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right] \\
\Omega &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right]$$

que al ser un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales se tienen que resolver con métodos y algoritmos numéricos así como todo el tratamiento

2.5. SISTEMA DE ECUACIONES ADIMENSIONALES PARA SU SIMULACIÓN²⁷

matemático con respecto a las transformaciones del espacio computacional al físico generando un mallado que forma una parte importante al contribuir en el espacio de soluciones óptimos que represente toda la física del problema.

Capítulo 3

Generación de mallas y ejecución del esquema numérico en CPU y GPU

3.1. Métodos de solución numéricos de sistemas de ecuaciones elípticos en derivadas parciales

Una ecuación elíptica en derivadas parciales de segundo orden es una ecuación del tipo:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0 \quad (3.1)$$

en la cual la matriz

$$Z = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

es definida positiva. Ejemplos de este tipo de ecuaciones son: la ecuación de Poisson, la ecuación de Laplace, la ecuación Biarmónica y la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Puesto que las ecuaciones que rigen al sistema son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden como se muestra en capítulos anteriores, es necesario conocer las técnicas numéricas para resolver dicho sistemas de ecuaciones que describen el problema. Los métodos comúnmente usados son los iterativos que consisten en la aplicación repetida de un algoritmo el cual conduce a una eventual convergencia después de un número finito de repeticiones ó iteraciones. El método empleado para resolver el presente problema es el de Gauss-Seidel, que consiste en proponer una solución, resolver la matriz resultante e iterar sobre estas hasta que las funciones convergan, la ventaja de este método es que requiere de poca carga de memoria RAM ya que todo el proceso de cómputo se ejecuta en el procesador CPU eliminando así accesos a memoria. Cabe señalar que existen métodos directos que se emplean para la inversión de matrices tales como la regla de Cramer, el algoritmo de Thomas (algoritmo de resolución de una matriz tri-día-gol-mal). Así pues resolver sistemas de ecuaciones con la metodología de ir iterando los algoritmos es de gran importancia en la resolución de problemas físicos y matemáticos de

hecho se le denomina adaptación geométrica que se ve reflejada en una mayor cantidad de nodos utilizados al generar la malla de tal manera que cumpla con las condiciones del problema, al tomar en cuenta que se generan una mayor cantidad de nodos de tal forma que no se tenga cambios abruptos y por el contrario estos sean graduales.

Las mallas computacionales deben cumplir con ciertos requisitos, para generar así un espacio de soluciones sea correcto y sin fuentes de errores numéricos:

- 1) Minimizar errores numéricos. La resolución y la orientación de la malla con respecto a la dirección del flujo, así como el no considerar los errores de truncamiento, puede llegar a convertirse en fuente de grandes errores.
- 2) Proporcionar estabilidad numérica. En ciertos métodos numéricos de resolución de ecuaciones ya sean estos implícitos o explícitos, su estabilidad depende del tamaño del elemento discretizado, por lo que se debe tener cuidado a la hora de generar la malla.
- 3) Lograr un ahorro de cálculos computacionales.
- 4) Disponer de un fácil manejo en las condiciones de frontera.

Existen una extensa cantidad de métodos numéricos para generar mallas, entre los que destacan se encuentran: el método algebraico, el método de interpolación a través de polinomios de Hermite, etc. sin embargo por adaptarse mejor para resolver nuestras condiciones del problema se utilizó el método elíptico de generación de mallas. Este método se desarrolló en los años 70's siendo Thompson el precursor de este.

Sus primeros usos fueron para calcular los esfuerzos de un flujo sobre superficies complejas sumergidas en medios infinitos. La idea se centra en utilizar un sistema de ecuaciones elípticas para convertirlo en un sistema de coordenadas cartesiano normal y ortogonal, Thompson usó en un principio la ecuación de Laplace para realizar la transformación, posteriormente utilizó la ecuación de Poisson donde propuso funciones de peso que fueran capaces de distribuir la malla dentro del sistema, además de proveer de condiciones de frontera ortogonales en regiones donde fuera necesario.

Las ventajas que proporciona este método ya que se tiene una ecuación elíptica de clase CA son:

- Su primera y segunda derivada siempre existen dentro del campo de la función, implicaría que las derivadas de las ecuaciones diferenciales que rigen al flujo también existen invariablemente, además de que las ecuaciones de Navier-Stokes son también elípticas y de clase CA.
- Las discontinuidades en las condiciones de frontera generadas por las esquinas de la malla no adicionan mayor problema numérico ya que las discontinuidades en las condiciones de frontera de un sistema de ecuaciones elíptico es de clase CA y se suavizan hacia dentro del espacio.

3.2.1. Ecuaciones para la generación de mallas elípticas

Como se mencionaba en secciones anteriores la geometría del problema es compleja, por lo que es necesario utilizar un método para generar un espacio computacional de soluciones. Tomando el esquema de Thomson y Eiseman al proponer un método de sistemas de de coordenadas curvilíneas, que consiste en convertir un sistema de coordenadas (x, y) con una forma geométrica arbitraria a un espacio cartesiano ortonormal (ξ, η) .

La propuesta es un sistema generador de coordenadas a través de la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \quad (3.3)$$

Si consideramos que el sistema de ecuaciones debe de ser resuelto en el espacio computacional entonces los términos de las variables dependientes e independientes debe de ser intercambiados, esto es posible utilizando la transformación jacobiana del sistema, por lo que obtenemos un sistema de ecuaciones elípticas no lineales en el plano de transformación:

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = -J^2 \left(P(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \quad (3.4)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = -J^2 \left(P(\xi, \eta) \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q(\xi, \eta) \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \quad (3.5)$$

Donde J es el jacobiano de la transformación y α , β y γ son los coeficientes de la transformación escritos a continuación:

$$\alpha = \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \quad (3.6)$$

$$\beta = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.7)$$

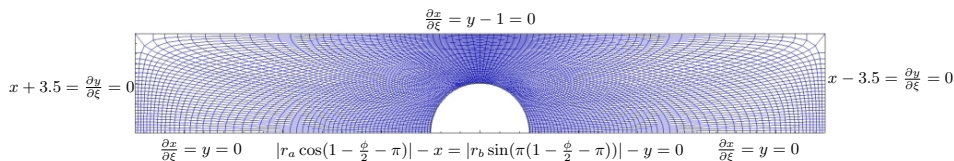
$$\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3.8)$$

Los parámetros $P(\xi, \eta)$ y $Q(\xi, \eta)$ definen la distribución de la densidad de la malla, dependen de la geometría del problema y del tipo de transformación, para este caso los parámetros tomaron la siguiente forma:

$$P(\xi, \eta) = \sum (-a_i \text{sign}(\xi - \xi_i) \exp(-c_i |\xi - \xi_i|)) \quad (3.9)$$

$$Q(\xi, \eta) = \sum (-b_i \text{sign}(\eta - \eta_i) \exp(-d_i |\eta - \eta_i|)) \quad (3.10)$$

Por lo tanto la malla computacional para los valores $P(\xi, \eta)$ y $Q(\xi, \eta)$ es:



La gran ventaja de estos parámetros es que logran una buena distribución en la frontera y tiene su mayor densidad cerca del cilindro, donde nos interesa mayormente los procesos físicos a estudiar. Teniendo la transformación de coordenadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x(\xi(x, y), \eta(x, y)) &= x \\ y(\xi(x, y), \eta(x, y)) &= y \end{aligned} \quad (3.11)$$

Diferenciando ambas ecuaciones con respecto a y tenemos:

$$\begin{aligned} x_\xi \xi_x + x_\eta \eta_x &= 1, & x_\xi \xi_y + x_\eta \eta_y &= 0 \\ x_\xi \xi_x + x_\eta \eta_x &= 0, & y_\xi \xi_y + y_\eta \eta_y &= 1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

La matriz resultante del sistema de ecuaciones es

$$\begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De tal manera que el Jacobiano de la matriz J , para la transformación del plano $x - y$ al plano $\xi - \eta$ esta dada por:

$$J = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Lo que implica que J es una ecuación invertible, por lo que la transformación inversa J^{-1} se encuentra dada por

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

El jacobiano J de la transformación de coordenadas se encuentra dado por el determinante de la matriz que es:

$$J = \det(J) = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (3.15)$$

De tal manera que se puede también obtener el determinante inverso de la matriz. Este se obtiene de manera muy sencilla, invirtiendo el determinante del jacobiano para el caso de una matriz de 2×2 , obteniendo la siguiente forma alternativa.

$$J^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Comparando la ecuación anterior se pueden obtener los coeficientes geométricos de la transformación. Resumiendo, para una función F , como forma general para cualquier ecuación diferencial parcial que describa el problema, se pueden obtener las derivadas primeras y segundas en el nuevo sistema coordenado a través del siguiente sistema matricial:

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{J}, \quad \xi_y = \frac{-x_\eta}{J}, \quad \eta_x = \frac{-y_\xi}{J}, \quad \eta_y = \frac{x_\xi}{J} \quad (3.17)$$

La expresión geométrica para las derivadas de segundo orden queda descrita por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\xi_{xx} &= [-J_\xi y_\eta^2 + J y_\eta y_{\xi\eta} + J_\eta y_\xi y_\eta - J y_\xi y_{\eta\eta}] / J^3, \\
\xi_{xy} &= [J_\xi x_\eta y_\eta - J y_\eta x_{\xi\eta} - J_\eta y_\xi x_\eta + J y_\xi x_{\eta\eta}] / J^3, \\
\xi_{yy} &= [-J_\xi x_\eta^2 + J x_\eta x_{\xi\eta} + J_\eta x_\xi x_\eta - J x_\xi x_{\eta\eta}] / J^3, \\
\eta_{xx} &= [-J_\eta y_\xi^2 + J y_\xi y_{\xi\eta} + J_\xi y_\xi y_\eta - J y_\eta y_{\xi\xi}] / J^3, \\
\eta_{xy} &= [J_\eta x_\xi y_\eta - J y_\xi x_{\xi\eta} - J_\xi y_\eta x_\xi + J y_\eta x_{\xi\xi}] / J^3, \\
\eta_{yy} &= [-J_\eta x_\xi^2 + J x_\xi x_{\xi\eta} + J_\xi x_\xi x_\eta - J x_\eta x_{\xi\xi}] / J^3.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

De tal manera que agrupando el sistema de ecuaciones en las variables apropiadas el nuevo sistema queda como:

$$\begin{aligned}
J_\xi &= x_{\xi\xi} y_\eta + x_\xi y_{\xi\eta} - x_{\xi\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\xi}, \\
J_\eta &= x_{\xi\eta} y_\eta + x_\xi y_{\eta\eta} - x_{\eta\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\eta}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

3.2.2. Ecuaciones en el sistema ξ y η

El sistema de ecuaciones completo del problema es llevado también a través de la transformación Jacobiana a continuación se muestran las ecuaciones escritas en el espacio computacional (ξ, η) . Vorticidad:

$$-\tau \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \sigma \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \left(2\beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} - J^2 \Omega \right) \tag{3.20}$$

Con sus correspondientes condiciones de frontera en términos del apéndice B:

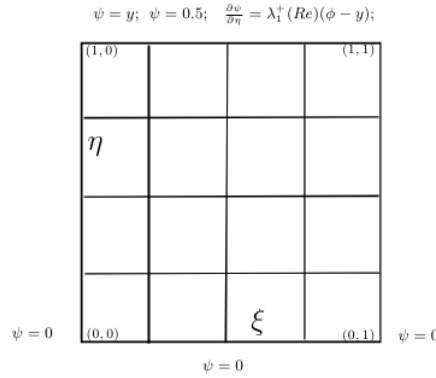
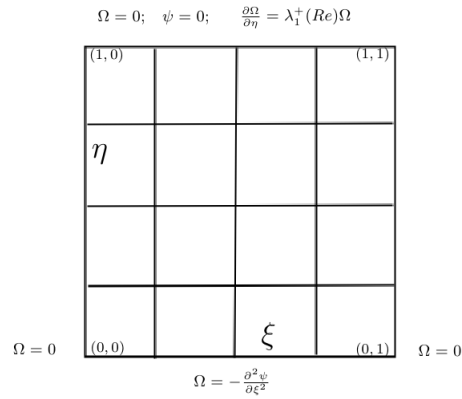


Figura 3.1: Condiciones de frontera de ψ

Ecuación de Navier-Stokes en el espacio (ξ, η)

$$\left[JRe \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \tau \right] \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \left[-JRe \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \sigma \right] \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = \alpha \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta \partial \xi} \tag{3.21}$$

Con sus correspondientes condiciones de frontera igualmente en términos del apéndice B:

**Figura 3.2:** Condiciones de frontera para Ω

Donde:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{j} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} D_x - \frac{\partial x}{\partial \xi} D_y \right) \\ \tau &= \frac{1}{j} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} D_x - \frac{\partial x}{\partial \eta} D_y \right) \\ D_x &= \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \\ D_y &= \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Cuando se resuelven problemas del flujo de un fluido y de la transferencia de calor por estos métodos, es necesario la generación de un sistema coordenado que se adapte al dominio físico complejo. El sistema coordenado x y y , es el resultado de la transformación del dominio, que es el sistema ξ y η , por lo que, las ecuaciones diferenciales que gobiernan al sistema, deben ser transformadas en su expresión equivalente en el espacio ξ y η . En esta sección se mostrará como se construyen la primera y la segunda derivada como expresiones generales para poder escribir el nuevo sistema de ecuaciones diferenciales parciales que describen el problema.

3.3. Método numérico para la generación de malla

Para resolver las ecuaciones del sistema x y y de generación de malla, es necesario buscar un método iterativo. Éste es implícito y de él se utiliza la parte difusiva para iterar en las ecuaciones completas. Lo primero que se hace es generar una malla usando sólo la ecuación de Laplace, y se le deja converger hasta un factor de 1×10^{-8} tanto en x como en y . Después se recalculan los factores α , β , γ , σ y τ para establecer una distribución de malla consistente pero no ortogonal. Para lograr la ortogonalidad del sistema, se lee el campo coordenado dentro de éste, sin considerar las condiciones de frontera preestablecidas, por lo que se imponen nuevas condiciones de frontera, que den la forma a ésta, pero imponiendo además una condición de ortogonalidad. Por otra parte, para poder establecer la correcta distribución de los nodos al interior de la malla, se utilizan las funciones de peso $P(\xi, \eta)$ Y $Q(\xi, \eta)$ que están definidas por las ecuaciones

3.9 y 3.10.

La formulación del espacio computacional donde se resuelve el sistema de ecuaciones se encuentra descrito, donde se muestra al sistema vorticidad-función de corriente, transformado en el espacio computacional. Las condiciones de frontera son transformadas también en el nuevo espacio, mientras que el sistema utilizado para la generación de mallas, al ser elíptico, es el mismo para resolver la dinámica del flujo, iniciando primero con la condición de un flujo irrotacional, para luego establecer el campo de vorticidad adecuado. El sistema de ecuaciones se itera hasta el punto donde la convergencia de la diferencia del campo de la función de corriente sea del orden antes mencionado.

3.3.1. Número de Courant dt adaptativo

El número de Courant en un parámetro adimensional que relaciona el paso de tiempo con la menor distancia entre dos puntos en la malla del espacio físico y se multiplica por la velocidad máxima esto es:

$$Co \equiv U_{max} \frac{\tau}{\min(h)} \quad (3.22)$$

Donde U_{max} es la velocidad máxima del fluido, $\tau = dt$ fijo y $\min(h)$ es el parámetro espacial, para este tipo de métodos donde se resuelven flujos sobre sistemas de ecuaciones diferenciales parciales elípticas el usar el número de Courant estabiliza y asegura la convergencia a la solución, es importante mencionar que la magnitud del dt en el método numérico es recalculado por Co y $Co \ll 1.0$ de esta última condición tenemos que un valor pequeño del número de Courant es indicativo de un cálculo numérico con un tamaño pequeño del elemento temporal. Al generarse las mallas con diferentes excentricidades el $\min(h)$ se vuelve dinámico y su valor se extrae del mínimo intervalo al generarse el espacio mallado lo que implicaría una carga extra de cómputo para extraer dicho valor, pero dentro de la malla existe una condición que nos asegura que existe una mínima distancia común para todas las mallas y es dicho valor el que se toma para calcular Co , en la siguiente figura de que región de la malla se extrae dicho valor dicho factor:

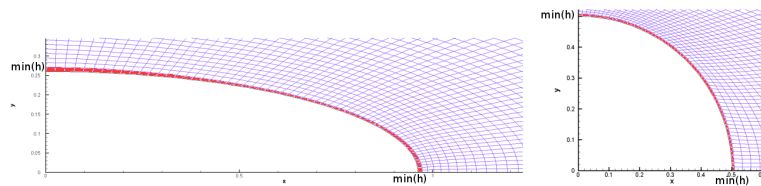


Figura 3.3: Elemento mínimo espacial para el cálculo de el número de Courant

Este contorno en la superficie de la elipse que se a coloreado para fines de visualización tiene una característica adicional que es el hecho de condicionar a la perpendicularidad de las derivadas sobre dicha superficie lo cual proporciona un cálculo con mucha mayor precisión al momento de resolver las propiedades fluidas y de temperatura.

3.4. Método de solución de una matriz tridiagonal con GPU

Dentro de la caracterización de las condiciones de frontera encontramos aquella que nos plantea un sistema de ecuaciones tridiagonal y son las condiciones de Dirichlet que involucra la solución a dicho sistema que además posee la característica de ser simétrica y con elementos uniformes sobre las diagonales principales, de aquí que se pueda desprender un método numérico en paralelo alternativo al algoritmo serial de Thomas para la resolución de dichos sistemas. Una observación clave para la ganancia en el rendimiento esta determinando por la composición de los factores que incluyen accesos a memoria *global/compartida* (*global/shared*, una descripción de estos elementos se ofrece en el Apéndice E), conflictos entre bancos de datos, la complejidad computacional del algoritmo, el control y la sincronización de los hilos de ejecución, pese a estas barreras encontré dentro de los patrones de estos sistemas de ecuaciones que:

- Las diagonales superior (Upper) e inferior (Lower) del nuevo sistema tridiagonal formado durante la fase de sustitución regresiva se fija con sus elementos idénticos.
- Únicamente los primeros y últimos tres elementos de la diagonal principal operan sin tener cambios frente a los demás elementos de la diagonal principal.
- El cálculo de todos los subsecuentes valores para los nuevos elementos de las diagonales donde se encuentran A_{12} y A_{21} únicamente requiere del conocimiento del valor inicial de A_{11} .

Dentro de la GPU estas observaciones nos permitirá reducir el almacenar en la memoria compartida (shared memory) y así de igual forma reducir las operaciones de lectura/escritura en memoria.

Para aplicar sobre este breve análisis, tomándolo como una primera aproximación a la paralelización de un algoritmo para resolver un sistema tridiagonal, se tienen que conocer un conjunto de algoritmos típicos y propios de la arquitectura GPU que nos permitan como operaciones elementales generar un algoritmo híbrido que nos lleve a la solución de nuestro sistema tridiagonal en el mínimo tiempo posible y superando los cuellos de botella. Caracterizando el coste de estos diferentes algoritmos con respecto a la complejidad computacional, números de pasos, conflictos en accesos a bancos de memoria, vectorización a nivel hardware y otros factores encontramos la combinación que nos permite proponer el algoritmo híbrido y este es aquel que integra la operabilidad del algoritmo de Reducción Cíclica (Cyclic Reduction CR) Reducción Cíclica Paralela (Parallel Cyclic Reduction PCR) y Duplicación Recursiva (Recursive Doubling) que logran un algoritmo en GPU en el máximo performance y reducen pasos ineficientes dentro de un algoritmo global. Una propiedad importante que dentro de los métodos numéricos se debe considerar es que se tiene una gran considerable exactitud y estabilidad numérica lo que nos permite tener una solución rápida del sistema tridiagonal que se origina de la aplicación del método ADI (alternating direction implicit) para la solución de ecuaciones diferenciales elípticas.

3.4.1. Planteamiento del método numérico Híbrido y algoritmos intrínsecos GPU para su composición

Inicialmente se planteo un sistema tridiagonal que provenía de la discretización de las ecuaciones diferenciales, en esta sección trataremos nuestra matriz como un ente matemático matricial en el cual no importa de donde provienen los factores y obedece a sus principales características de matriz no singular, entonces tenemos que resolver el sistema con n ecuaciones de la forma $Ax = b$ donde la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

Como comentábamos el algoritmo que comúnmente es usado para resolver este tipo de sistemas es el algoritmo de Thomas que usa eliminación Gaussiana para dicha función, haciendo unas modificaciones obtenemos una primera aproximación a nuestro algoritmo. Tenemos que el TA (Thomas Algorithm) opera en dos fases, eliminación progresiva sustitución regresiva, en la primera fase eliminamos la diagonal inferior mediante:

$$\begin{aligned} c'_1 &= \frac{c_1}{b_1} \\ c'_i &= \frac{c_i}{b_i - c'_{i-1}a_i}, i = 2, 3, \dots, n-1 \\ d'_1 &= \frac{d_1}{b_1} \\ d'_i &= \frac{d_i - d'_{i-1}a_i}{b_i - c'_{i-1}a_i}, i = 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned}$$

La segunda fase resuelve para todas las incógnitas recorriendo desde la última hasta la primera:

$$x_n = d'_n, x_i = d'_i - c'_i x_{i+1}$$

El algoritmo es relativamente simple, pero inherentemente serial y toma $2n$ pasos de cómputo, por lo que el cálculo de c'_i , d'_i y x_i depende del resultado de su precedente inmediato en este caso c'_{i-1} , d'_{i-1} y x_{i+1} , por lo que existe la necesidad de introducir nuevos algoritmos paralelamente propios de la arquitectura GPU en general estos métodos realizan una mayor transacción de datos con un menor numero de pasos y son mucho más adecuados para una implementación paralela.

3.4.2. Reducción Cíclica (CR Cyclic Reduction)

Es un algoritmo que también consiste en dos pasos, reducción progresiva y sustitución regresiva. La reducción progresiva, reduce sucesivamente a un sistema cada vez mas pequeño, sistema que se va reduciendo a la mitad el número de incógnitas en cada paso hasta que el sistema ha alcanzado 2 incógnitas. La sustitución regresiva determina sucesivamente la otra mitad de las incógnitas usando los valores resueltos previamente. En cada paso de la reducción progresiva, se actualizan todas las ecuaciones con índices par en paralelo con la ecuación i -ésima del actual sistema esto como una combinación lineal de las ecuaciones con

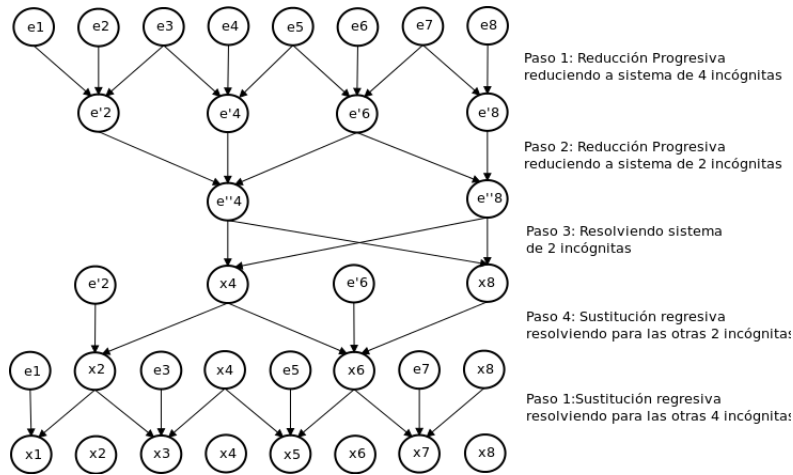


Figura 3.4: Patrón de Comunicación del algoritmo CR con un ejemplo de 8 incógnitas mostrando el flujo de ejecución entre cada ecuación etiquetadas de la e_1 a la e_8 donde e' y e'' son las ecuaciones actualizadas

índice i , $i+a$ e $i-1$, de aquí que se deriva el sistema de incógnitas con únicamente índices pares. La ecuación i -ésima tendrá la forma: $a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$. Al actualizar los valores de a_i , b_i , c_i y d_i tenemos:

$$\begin{aligned} a'_i &= -a_{i-1}k_1, \\ b'_i &= b_i - c_{i-1}k_1 - a_{i+1}k_2 \\ c'_i &= -c_{i+1}k_2, \\ d'_i &= d_i - d_{i-1}k_1 - d_{i+1}k_2 \\ k_1 &= \frac{a_i}{b_{i-1}}, \quad k_2 = \frac{c_i}{b_{i+1}} \end{aligned}$$

En cada paso de las sustitución regresiva, resolvemos las incógnitas con índices impares x_i en paralelo se sustituye las ya resueltas x_{i-1} y x_{i+1} valores de la ecuación i ,

$$x_i = \frac{d'_i - a'_i x_{i-1} - c'_i x_{i+1}}{b'_i}$$

Nótese que, en aras de la simplicidad, en la descripción anterior, se prescinde del tratamiento especial de la ecuación anterior y la primera incógnita, respectivamente, en las dos fases del algoritmo. Además, resolvemos un sistema de 2-incógnitas entre las dos fases del algoritmo. la Figura 3.4 muestra el patrón de comunicación del algoritmo para un sistema de 8-incógnitas. Tanto el algoritmo paralelo de CR y el serial de Thomas realizan una serie de operaciones que son lineales en el número de incógnitas. El algoritmo de Thomas realiza $8n$ operaciones mientras el CR realiza $17n$ operaciones, sin embargo sobre una arquitectura paralela calculando con n procesadores, el algoritmo CR requiere $2 \log_2 n - 1$ pasos mientras que el de Thomas requiere $2n$ pasos.

3.4.3. Reducción paralela cíclica (PCR Parallel Cyclic Reduction)

PCR es una variante del CR, en contraste para CR, PCR únicamente tiene la fase de reducción progresiva. Mientras el mecanismo de reducción y las ecua-

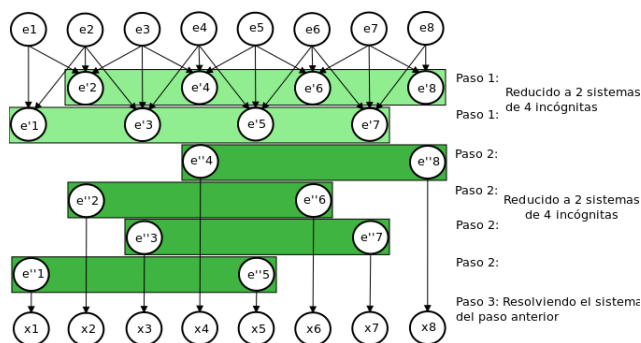


Figura 3.5: Patrón de comunicación para el algoritmo PCR, el mismo caso que en la figura 3.4 solo que ahora las ecuaciones que están en los rectángulos verdes son el sistema de ecuaciones separado por el PCR

ciones son las mismas que el CR en cada paso de la reducción, PCR reduce cada uno de los sistemas actuales a dos sistemas de la mitad del tamaño original por ejemplo, para un sistema de 8-incógnitas se reducen hasta dos de 4-incógnita en un primer paso estas a su vez a cuatro de 2-incógnitas en el paso 2, y finalmente se resuelve el sistema en el paso 3. A PCR le toma $12n \log_2 n$ operaciones y $\log_2 n$ pasos para finalizar. PCR requiere muchos menos pasos algorítmicamente que CR pero funciona más asintóticamente a través de los pasos.

3.4.4. Duplicación Recursiva (RD Recursive Doubling)

El RD es una reformulación del algoritmo de exploración (scan ó prefix sum) de un arreglo, scan es una primitiva de la programación y arquitecturas paralelas originalmente desarrollada para las maquinas vectoriales que puede mejorarse en implementación sobre su ejecución en GPU. Una gran variedad de algoritmos se desarrollas a partir de la realización del scan. La idea básica del RD es expresar las incógnitas como la multiplicación de una cadena de matrices que puede ser evaluada en paralelo usando esta primitiva llamada scan. la Figura 3.5 muestra el patrón de comunicación del RD. Primero construimos las matrices B_i . $1 \leq i \leq n$,

$$B_i = \begin{pmatrix} -\frac{b_i}{c_i} & -\frac{a_i}{c_i} & \frac{d_i}{c_i} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Después se realiza la operación scan en B_i , la salida que es un vector de n-componentes con cada componente como la multiplicación de una cadena de matrices,

$$\text{scan}(B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n) = [B_1 \ B_2 B_1 \ \dots \ B_{n-1} \dots B_2 B_1 \ B_n \dots B_2 B_1] = [C_1 \ \dots \ C_{n-1} \ C_n].$$

Entonces obtenemos $x_1 = -\frac{c_{13}}{c_{11}}$, donde:

$$C_n = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

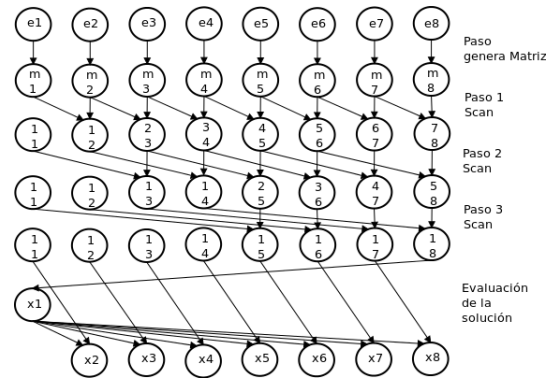


Figura 3.6: Patrón de comunicación para el algoritmo RD para el caso de 8 incógnitas

Finalmente, todas las incógnitas pueden ser evaluadas como. $[X_2 X_3 \dots X_n] = X_1[C_1 C_2 \dots C_n] = [X_1C_1 X_1C_2 \dots X_1C_n]$ donde

$$X_i = \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los pasos eficientes que le toma al RD son $20n \log_2 n$ operaciones y $\log_2 n + 2$ pasos para finalizar el proceso de resolución.

3.4.5. Algoritmo Híbrido

De los algoritmos descritos anteriormente se puede construir un algoritmo Híbrido único que contiene a cada uno de estos la idea básicamente es construir bloques a partir de los cuales se construya un algoritmo mucho más complejo y eficiente. Una característica fundamental en estos algoritmos es el tener una estructura paralela de grano fino la cual es naturalmente acorde con la arquitectura GPU y tienen un sencillo grado de complejidad el mapeo de datos hacia los threads que constituyen a dicha arquitectura, otro enfoque paralelo tal como el método de subestructuración y dos formas de eliminación Gaussiana que son métodos tanto de grano fino como de grano grueso que se describen por la asignación de grandes cantidades de datos distribuidos en los threads del GPU. Con

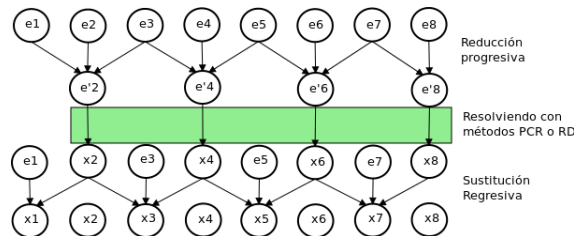


Figura 3.7: Patrón de comunicación del algoritmo Híbrido para un sistema de 8 incógnitas

respecto a la complejidad computacional, CR es el mejor algoritmo ya que tiene un orden $O(n)$, mientras PCR y RD tienen $O(n \log_2 n)$, por lo tanto CR sufre de

una falta de paralelismo en los extremos durante la fase de reducción progresiva y al comienzo de la sustitución regresiva. Por otro lado, PCR y RD tienen menos pasos algorítmicos, que siempre tienen más paralelismo a través de todas las iteraciones, estas observaciones básicas nos llevan a desarrollar métodos Híbridos sobre la GPU. El método Híbrido mejora al CR cambiando pasos intermediarios por los métodos PCR o RD para reducir las medidas de ineficiencias cuando no hay paralelismo suficiente para mantener a la GPU ocupada, esta idea de combinar pasos eficientemente paralelos fue usado para desarrollar el algoritmo scan que trabaja de una forma óptimamente eficiente en una implementación a GPU.

El algoritmo híbrido primero reduce el sistema a cierto tamaño usando una fase de reducción progresiva con el CR, entonces resuelve el sistema reducido con los algoritmos PCR/RD, finalmente se sustituyen las incógnitas dentro del sistema original usando la sustitución regresiva con el CR la figura 3.7 muestra el árbol de dependencias del método híbrido en donde se cambia al proceso de PCR o RD antes de que la reducción progresiva halla alcanzado un sistema de 2 incógnitas en comparación al caso con el CR original de la figura 3.4 el PCR y RD nos permite finalizar el paso intermedio ineficaz del CR mucho más rápido pues se tienen menos pasos algorítmicos que el antes mencionado. Notar que mientras los algoritmos se realizan sobre la GPU estos alcanzan un óptimo balance en la eficiencia de ejecución y eficiencia en pasos algorítmicos que solo se podría obtener dentro de la caracterización de una arquitectura vectorial.

3.5. Entorno de programación heterogénea CPU-GPU

Pese a que el algoritmo híbrido ejecutado en GPU es realmente potente para la programación del método numérico que genera el espacio de soluciones a las ecuaciones no-lineales se tiene un esquema de ejecución heterogéneo, esto es el programa principal que llena el sistema tridiagonal, itera y ejecuta el método ADI (Alternating Direction Implicit method) llama como subrutina al programa con el algoritmo híbrido GPU para resolver el sistema tridiagonal que resulta al discretizar el sistema de ecuaciones, en términos generales la solución se encuentra de iterar los valores numéricos y de ahí se realiza el llamado a la ejecución GPU. Todo el procesamiento de iteración y del método ADI de ahí se llama a la arquitectura paralela GPU y se disponen de los hilos para que se resuelva el sistema tridiagonal, todo el programa tanto serial como paralelo GPU es difícil que se ejecute únicamente en el entorno GPU ya que la cantidad de memoria es limitada y la estrategia de paralelización se complicaría al extremo que se volviese lenta y no se obtendría ganancia en performance como en el actual esquema de ejecución heterogénea que uso para resolver las ecuaciones no-lineales. Por lo tanto se reserva una cantidad de memoria en el huésped y el llenado de la tridiagonal, para después ser transmitido vía el puerto pci-express hacia la GPU que lo procesa en paralelo como muestra la siguiente figura de una forma simplificada:

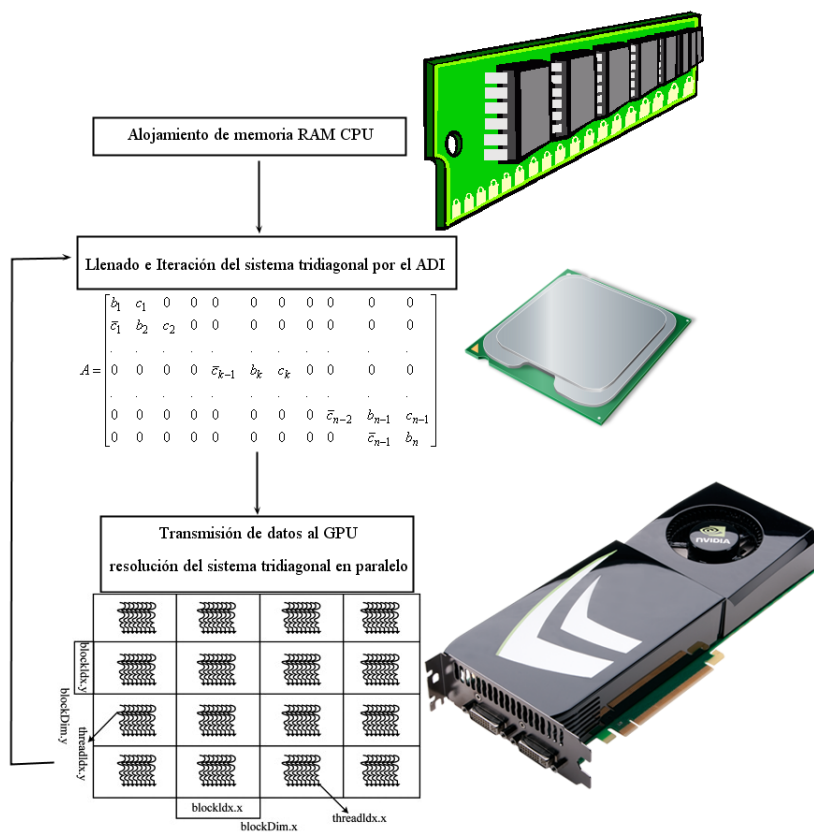


Figura 3.8: Entorno heterogeneo de ejecución CPU-GPU

Capítulo 4

Análisis de Datos y Resultados

En el presente capítulo se muestran los resultados de las ejecuciones del programa generado para resolver y simular el conjunto de ecuaciones que se plantearon en el capítulo 2 con sus correspondientes condiciones de frontera adimensionales. Siendo de gran interés el poder mostrar los campos de vorticidad Ω , función de corriente ψ y temperatura θ en las diferentes regiones del espacio físico donde se caracteriza su comportamiento dependiendo del número de Reynolds y la excentricidad ϵ ya que la variación de este último parámetro determinará el resultado más importante para la presente tesis.

4.1. Validación del algoritmo en ejecución con GPU

Para realizar la validación del algoritmo que realiza la resolución del sistema tridiagonal en paralelo GPU y determinar si está arrojando datos concordantes con la física del problema usé el caso particular con excentricidad circular ($\epsilon = 0$ y $r_a = 0.5, r_b = 0.5$) que es bien conocida, esta documentado dentro de la literatura y que reportan en la referencia ref.29 Lizardi et al. En la gráfica 4.1 se muestra los casos para los cuales se tienen los mismos números de Reynolds reportados en ambos casos pese a que en la presente tesis se tienen para un mayor muestreo en el número de Reynolds.

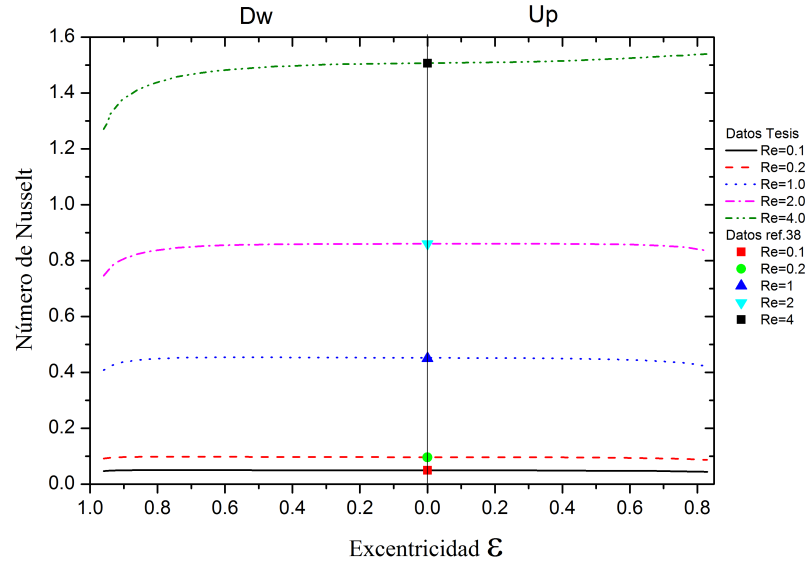


Figura 4.1: Gráfico con números de Reynolds seleccionados para validar con la excentricidad circular de la ref.[29] de la bibliografía

Observamos que para $\epsilon = 0$ todos los puntos de la ref.[29] caen sobre la línea vertical que indica dicha excentricidad con una diferencia de hasta 10^{-4} lo cual nos indica que la física del problema resuelta con GPU esta bien fundamentada y tiene validez aún resolviéndose el sistema tridiagonal de una subrutina de ejecución paralela. De igual forma se muestra para comparativa en el número de Reynolds $Re = 4.0$ las ejecuciones en ambos casos sobre la excentricidad de referencia:

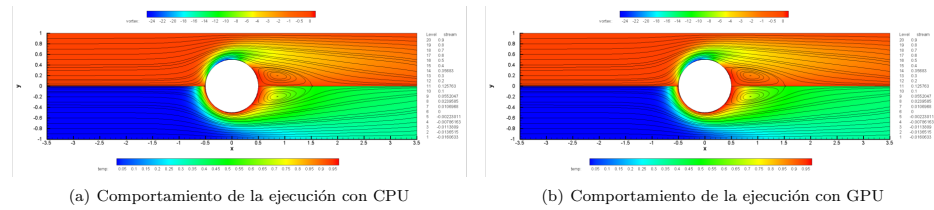


Figura 4.2: Comparación en el comportamiento de la fluido-dinámica entre la ejecución de la simulación con algoritmos GPU y CPU para $Re = 4.0$ y $\epsilon = 0$

Para ambos casos tanto el campo de vorticidad Ω , el de la función de corriente ψ y el de temperatura θ tiene el mismo comportamiento y se forma en la misma región una zona de recirculación al igual que pierden simetría en la vorticidad.

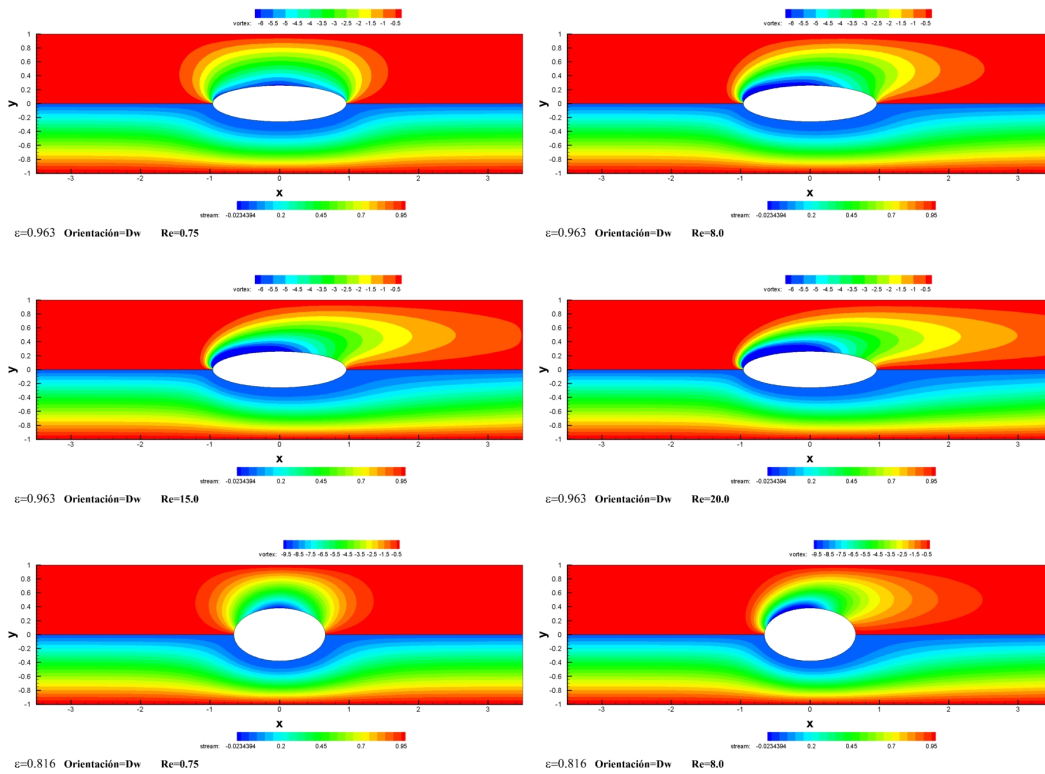
4.2. Función de corriente y vorticidad

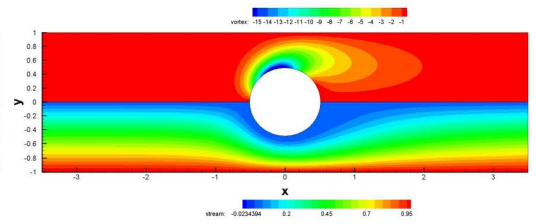
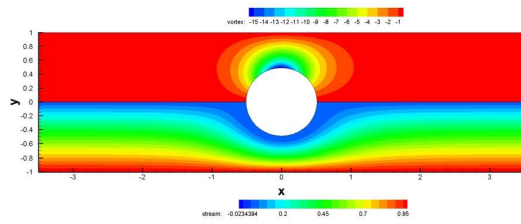
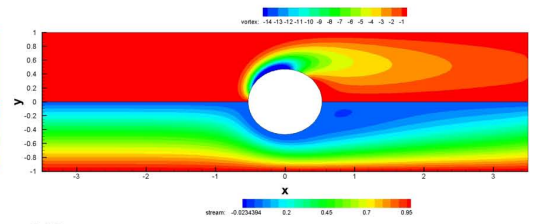
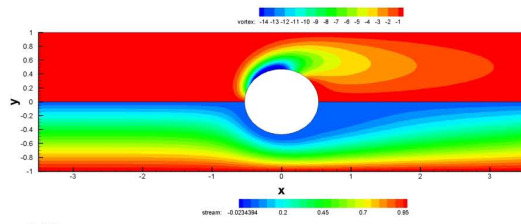
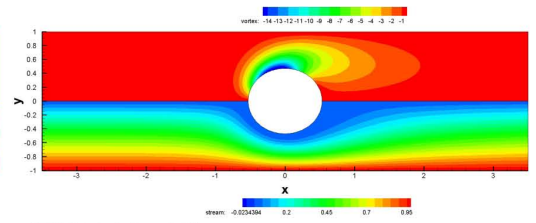
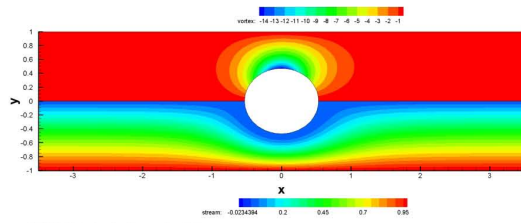
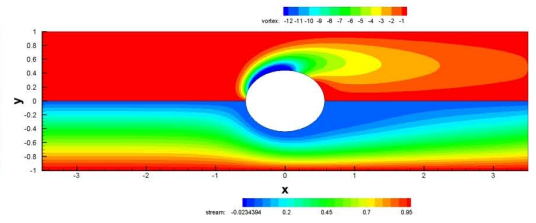
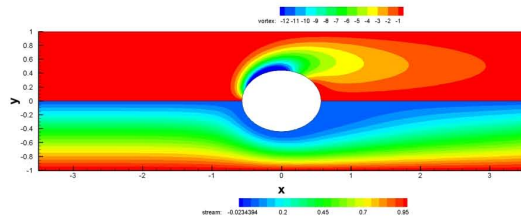
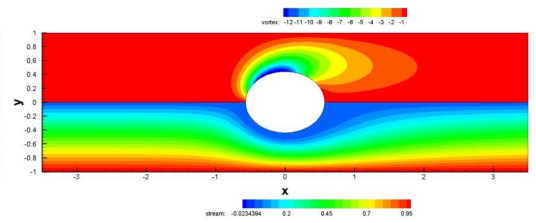
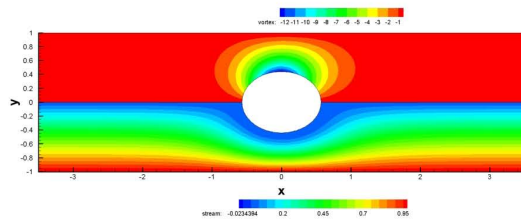
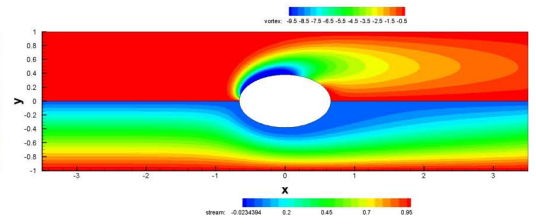
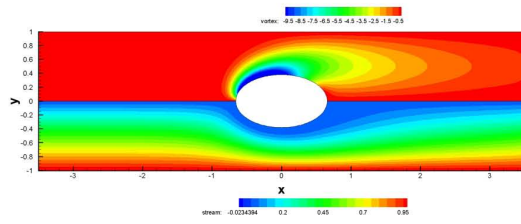
A continuación se muestra los campos de la vorticidad de la función de corriente obtenidos de la ejecución del programa mediante los métodos numéricos

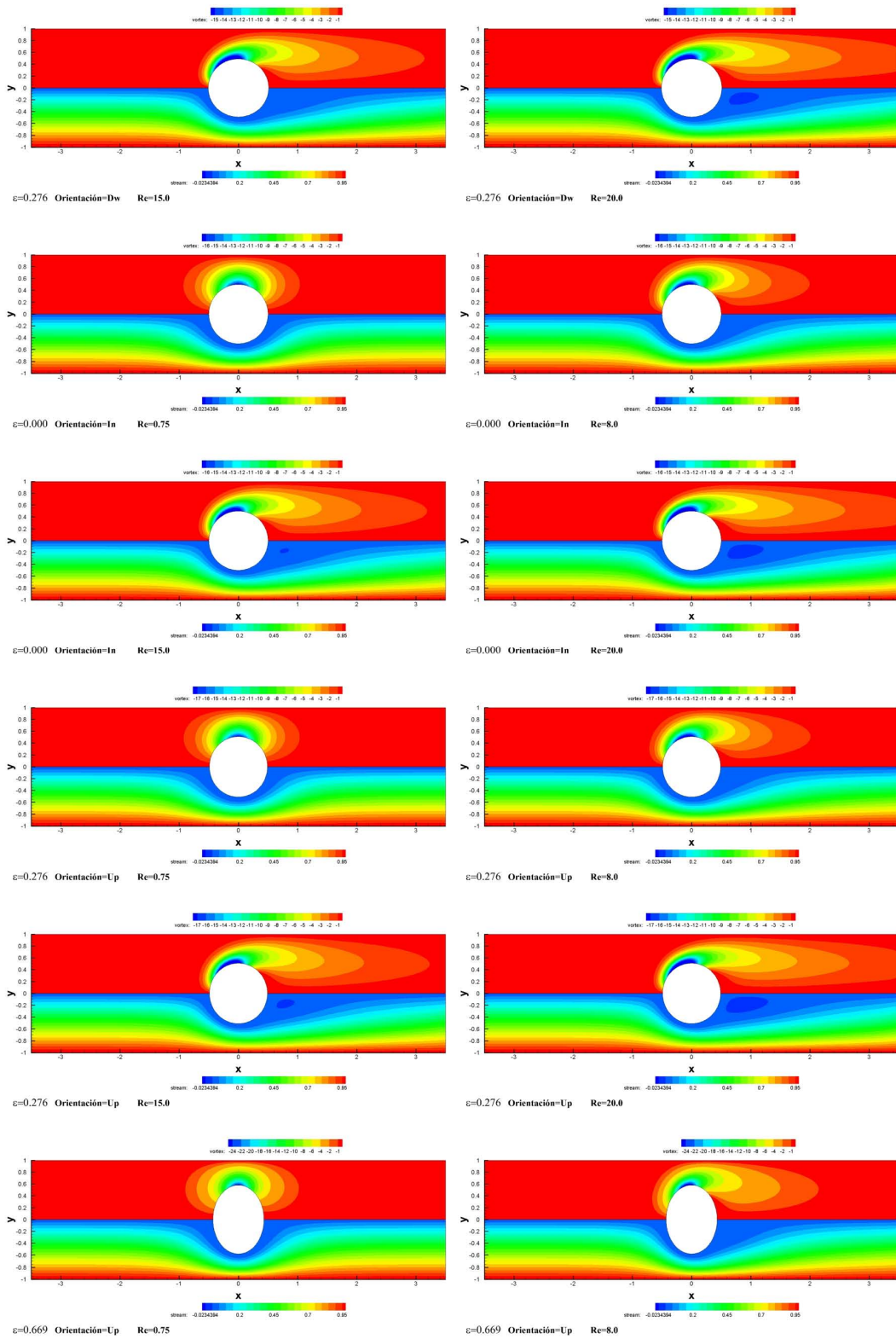
seriales y paralelos cuando se varía la excentricidad ε conforme a los datos de la tabla 2.1 y el número de Reynolds Re que va de un intervalo de 0.1-20.0 haciendo un salto entre el 15.0 al 20.0 esto es por el hecho del comportamiento que en este último intervalo no se percibe un gran cambio. De igual forma se clasifican las imágenes para los casos más significativos donde se encuentran cambios abruptos y muy notorios en los campos tanto en la simetría para la Ω como la generación de zonas de recirculación para ψ . En primera instancia se visualizan dichos campos y se procederá a una descripción de los mismos. Los gráficos muestran las curvas de nivel y la escala de magnitud a la que se encuentran dichas curvas con su respectivo código de color. Las variaciones en el Número de Reynolds para la ejecución se abarcó en un rango de 0.1 hasta 20 como se muestra en la siguiente lista:

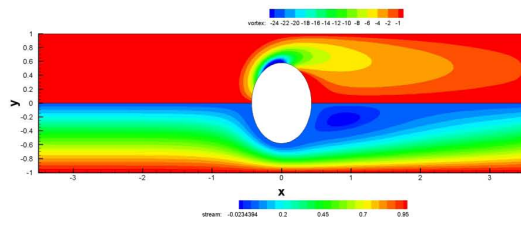
Cuadro 4.1: Valores para el número de Reynolds Re

0.1	0.2	0.5	0.75	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20
-----	-----	-----	------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

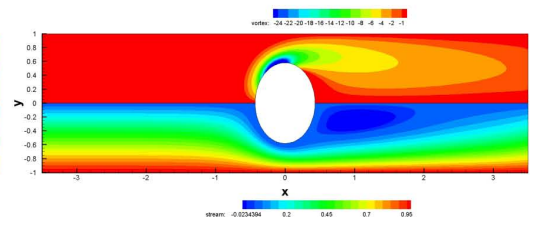




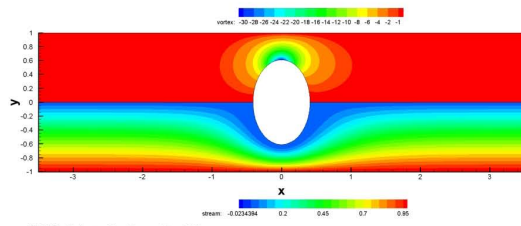




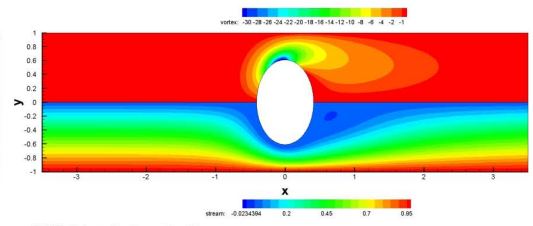
$\epsilon=0.669$ Orientación=Up Re=15.0



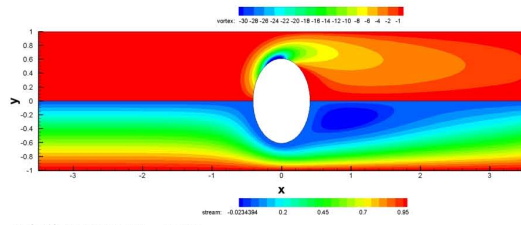
$\epsilon=0.669$ Orientación=Up Re=20.0



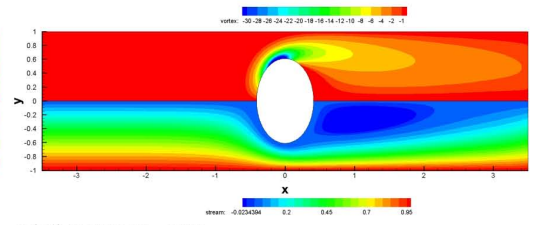
$\epsilon=0.740$ Orientación=Up Re=0.75



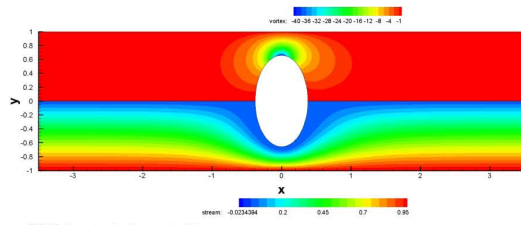
$\epsilon=0.740$ Orientación=Up Re=8.0



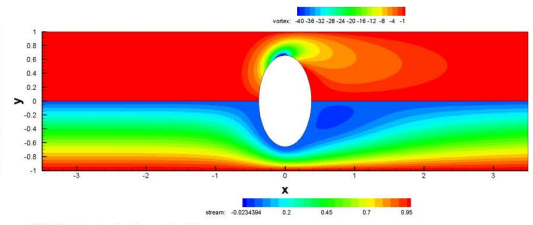
$\epsilon=0.740$ Orientación=Up Re=15.0



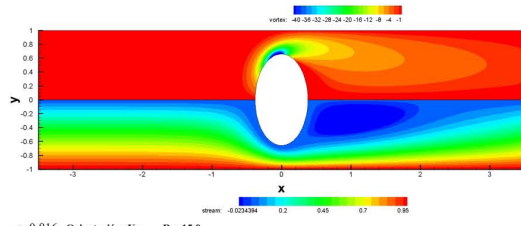
$\epsilon=0.740$ Orientación=Up Re=20.0



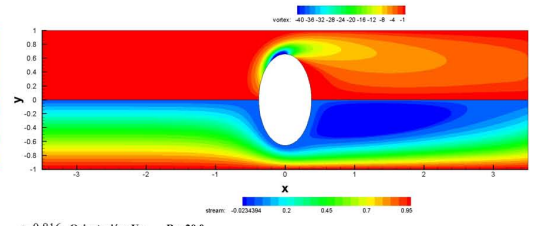
$\epsilon=0.816$ Orientación=Up Re=0.75



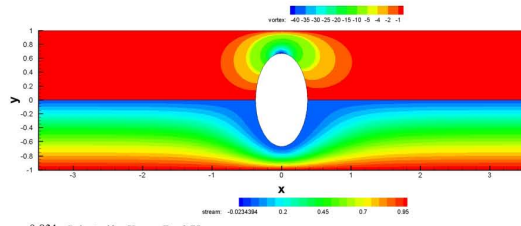
$\epsilon=0.816$ Orientación=Up Re=8.0



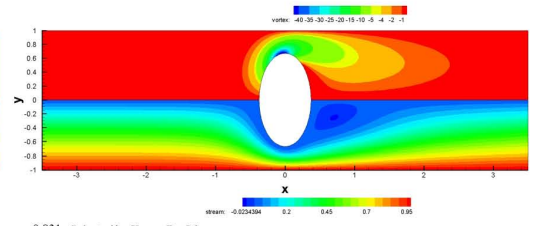
$\epsilon=0.816$ Orientación=Up Re=15.0



$\epsilon=0.816$ Orientación=Up Re=20.0



$\epsilon=0.831$ Orientación=Up Re=0.75



$\epsilon=0.831$ Orientación=Up Re=8.0

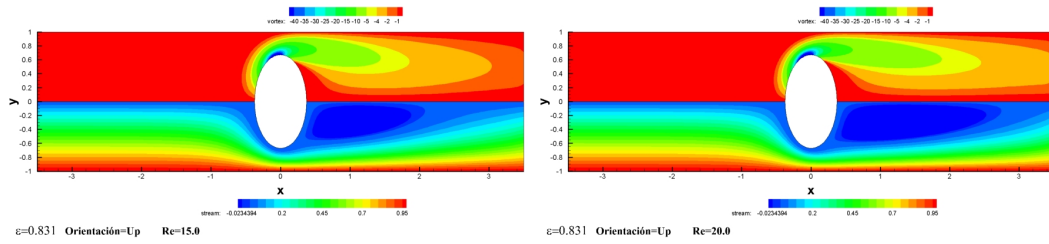


Figura 4.3: Campo de la función de corriente y vorticidad del flujo que atraviesa el hilo elíptico

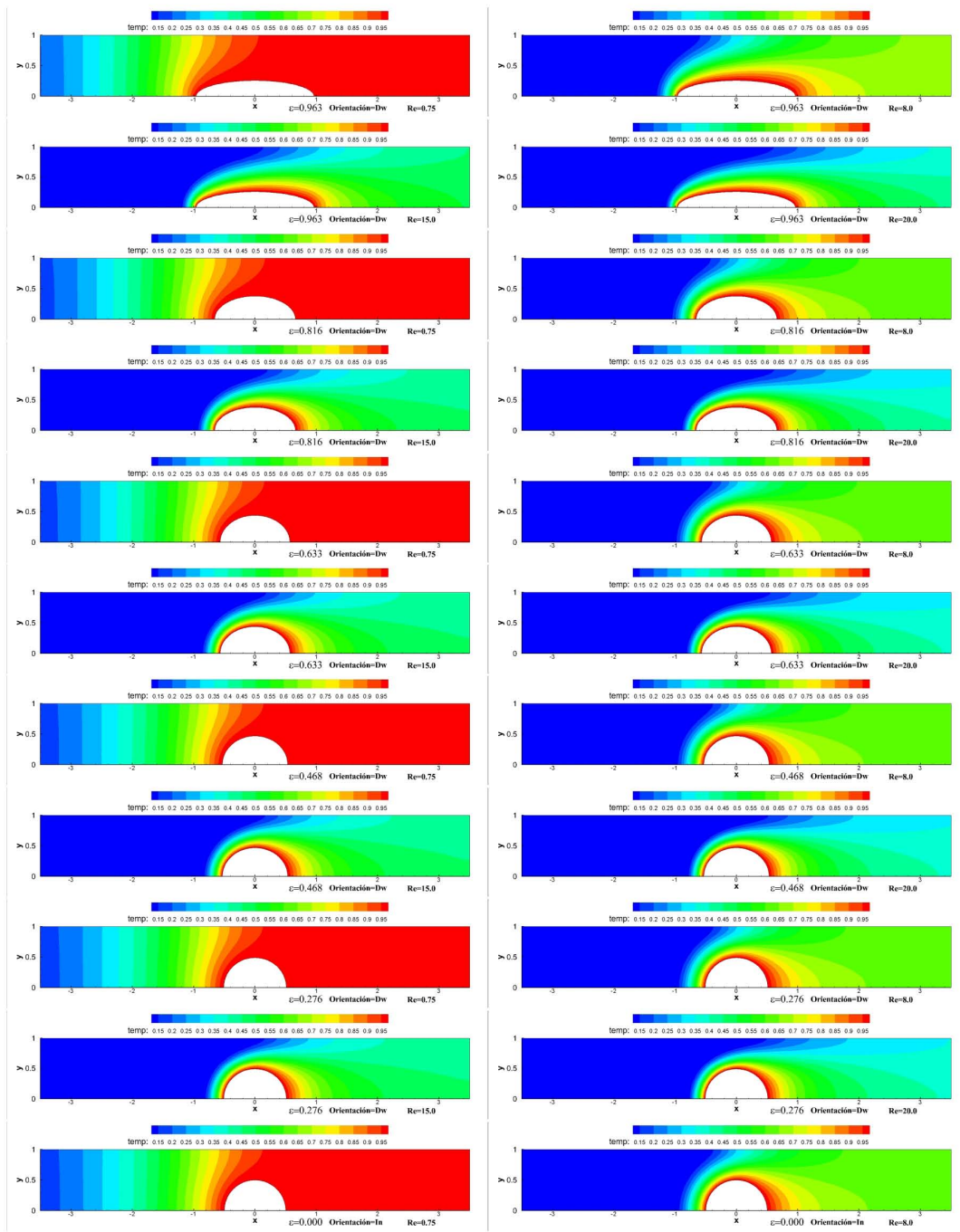
Para los cálculos de Ω , ψ y θ . Sin embargo por la densidad de los datos se dejaron los Re en los cuales se puede observar un comportamiento significativo. Ahora podemos observar la influencia del número de Reynolds y de la ε en los campos de vorticidad Ω y ψ en virtud para el primero de su simetría y para el segundo en la generación de zonas de recirculación, se realiza la descripción en general para todos los datos y visualizaciones aún que solo se muestren en el presente trabajo aquellas visualizaciones que son representativas. Retomando el punto se tiene que para ε con orientaciones Dw e In dentro de los rangos $Re \leq 1.0$ se conserva la simetría en Ω y no se forman zonas de recirculación y casi no existe arrastre, pese a ello se muestra que el esfuerzo de deformación del gas se da en la región superior de las elipses y de forma bastante simétrica donde las líneas de corriente se recuperan con mucha facilidad a un costado del obstáculo con geometría elíptica o circular $\varepsilon = 0$. Si aumentamos el numero de $Re \in [1.0, 10]$ en los primeros dos valores se sigue teniendo un efecto puramente simétrico para Ω y las líneas de corriente se siguen recuperando con mucha facilidad pero esta restitución en las líneas de corriente no se sigue respetando si disminuimos la excentricidad $\varepsilon \in [0, 0.768]$ en la orientación Dw pese a que el número Re es considerablemente bajo y todavía no se encuentra en una zona transitoria vemos que el efecto geométrico inside bastante en el comportamiento del fluido al no permitirle restituirse una vez atravesado el obstáculo de igual forma la simetría se comienza a perder en Ω formándose poco a poco una estela que se cuelga aguas abajo ya que en los términos difusivos y convectivos de la ecuación de vorticidad se comportan con una gran distinción conforme abarcamos los casos referencia.. Esta estela en forma de pluma se vuelve más intensa conforme aumentamos el número de $Re > 10$ y se amplifica aun más con los efectos geométricos. En este caso el término difusivo domina sobre el convectivo, para los casos en que el Re de un orden de magnitud mayor ($Re \geq 1$) no sucede este comportamiento dándose la mayor asimetría para el caso $Re = 20$ donde podemos observar una estela que indica como las líneas de corriente no pueden recuperarse fácilmente las líneas de corriente cambian drásticamente. De igual forma el campo de vorticidad acoplado al resultado obtenido con el campo de la función de corriente puede observarse para los casos en que $Re < 1$, $Re \geq 1$ y $Re \geq 20$, para el primer caso se muestra que el esfuerzo de deformación del gas se da en la región superior de las elipses y de forma bastante simétrica, como sucede en el caso de la función de corriente, así pues el flujo se recupera con mucha facilidad detrás de las elipses por lo que las líneas de vorticidad regresan simétricas al hilo un comportamiento que no muestra para el segundo y tercer caso donde el esfuerzo de deformación es muy pronunciado, en estos casos re-

sulta importante ver que los términos convectivos y difusivos de la ecuación son equiparables, además de útiles en términos de eficiencia si se quisiera diseñar un intercambiador de calor.

Para la orientación Up con valores muy cercanos a $\varepsilon > 0.0$ se puede observar un comportamiento asimétrico para Ω aun para números de $0.2 < Re < 1.0$ una zona con Re para los cuales el flujo es muy estable, pero conforme se aumenta la excentricidad ε en la misma orientación y este obstaculiza casi por completo el paso del flujo todo se vuelve inestable aunque para Re muy pequeños sea apenas notorio la asimetría $Re < 0.2$ aun que en este régimen de Re . Para el último caso los campos de vorticidad se ven afectados por la inercia del gas formando una estela detrás de las elipses que prácticamente toca la frontera aguas abajo del sistema, donde se ven representadas las líneas que tienden a infinito, las líneas de corriente no muestran recirculación pero pasando ya a $Re > 0.5$ el flujo se vuelve inestable. Los números de Re podrán parecer muy pequeños y en la literatura se encuentran dentro de un rango que no es transitorio pero para la presente tesis ya valores en donde $Re > 20$ se vuelve el flujo altamente inestable para esta última orientación y por lo tanto se transforma en un flujo turbulento para el cual no es el propósito de estudio de la presente tesis y sería difícilmente medible aun cuando las orientaciones Dw tengan un mejor comportamiento.

4.3. Temperatura

En esta sección se muestra el comportamiento del campo de temperatura y se analiza el proceso de intercambio de calor que se da del hilo elíptico hacia el flujo mediante la superficie S_e que varía en función de la excentricidad ε y dada la geometría general del problema influye en el proceso de intercambio de calor. Podemos observar de la visualización del campo de temperatura, gráfica 4.4. Que para bajos números de Reynolds en comparación a la unidad tanto para las excentricidades con orientación Dw , In y Up casi no se tiene una transferencia de calor aguas abajo esto es el flujo del fluido en esta zona no percibe que el hilo elíptico tiene una temperatura mayor por lo tanto el término difusivo predomina sobre el convectivo en la ecuación adimensional de la energía, sin embargo existe una gran transferencia de calor en las regiones muy cercanas a la elipse se puede ver que la eficiencia de transferencia de calor es alta por lo cual la temperatura aguas abajo tiende a uno y se tiene una gran afectación debida a la geometría y orientación elíptica claro esto es estrictamente para $Re \ll 1$. Si tomamos el caso para $Re > 1$ el efecto antes mencionado se pierde dando lugar a que predomine el término convectivo sobre el difusivo logrando así no aumentar la temperatura del fluido aguas abajo ni en zonas muy cercanas a la elipse, pero sobre la superficie del obstáculo elíptico la temperatura tiende a uno de igual forma aquí el efecto geométrico interviene de tal forma que al calentar el fluido se puede encontrar un mínimo de transferencia de calor para una excentricidad dada y su orientación, podemos ver que conforme el Re aumenta en la zona superior de la elipse existe una menor transferencia de calor observando del caso límite de la geometría de la elipse para la orientación Up que el fluido permanece a la misma temperatura por un largo intervalo espacial pese a que obstruye casi el 80% del espacio por donde atraviesa el flujo



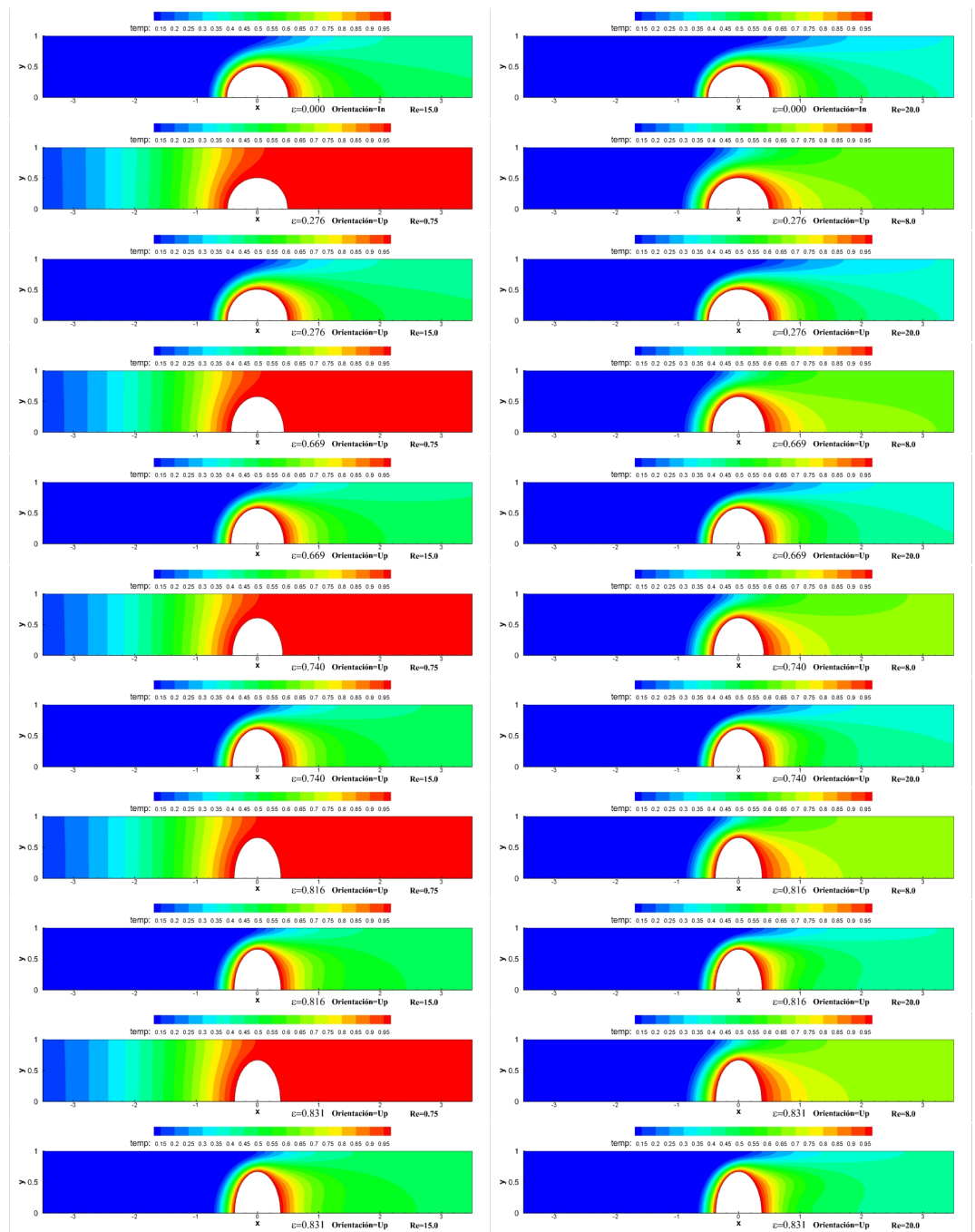


Figura 4.4: Campo de temperatura del flujo que atraviesa el hilo elíptico

4.4. Análisis térmico para los diferentes valores de excentricidad y número de Reynolds

En la presente sección se analizan los datos obtenidos de las corridas del programa con todos los casos mencionados en la tabla ?? por la densidad de datos se muestran algunas gráficas con casos de denotan una resolución visual que facilita a la explicación de los diferentes puntos a tratar.

4.4.1. Análisis de la temperatura promedio

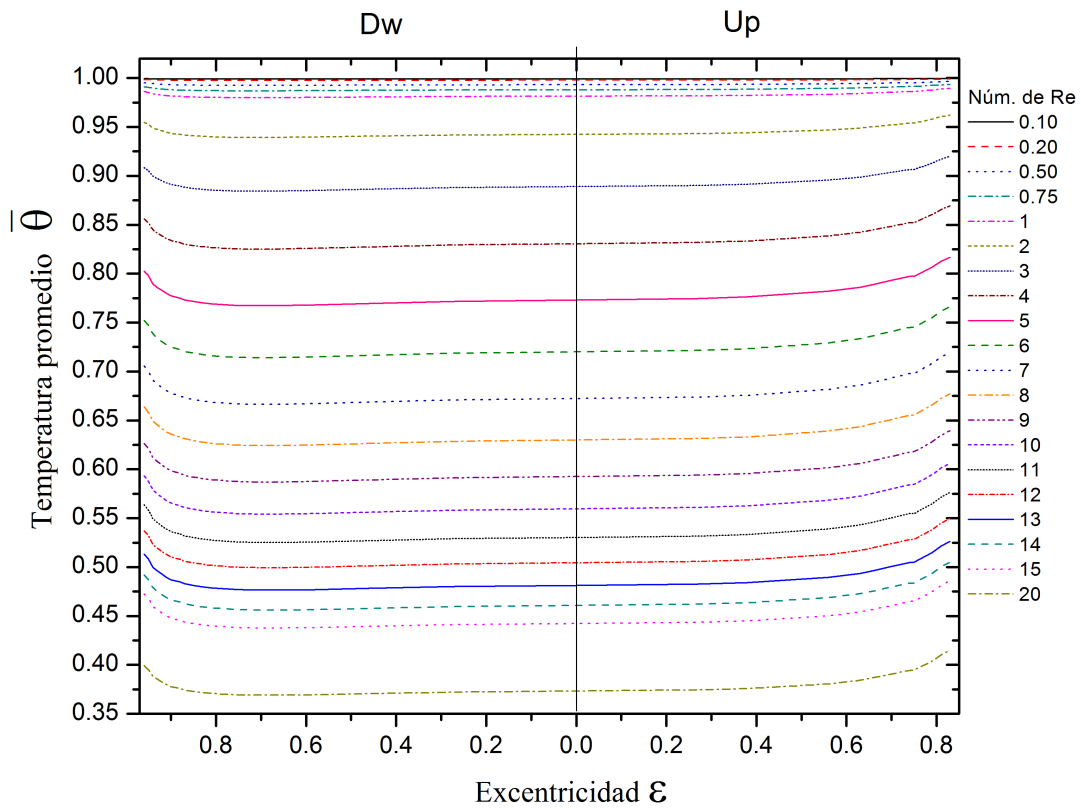


Figura 4.5: Temperatura promedio Vs excentricidad aguas abajo

Medí la temperatura promedio aguas abajo esto es la temperatura $\bar{\theta}$ del fluido una vez atravesando el obstáculo elíptico y sobre la frontera $y \in [y(x)|_L, d]$ con el propósito de encontrar una eficiencia térmica de la transferencia de calor, desafortunadamente la $\bar{\theta}$ no es una cantidad que proporcione una alta fidelidad del fenómeno de transferencia de calor sin embargo pondera un significado con una buena aproximación de dicho fenómeno físico para ello se muestra la gráfica 4.5. Estas mediciones se realizaron para diferentes números de Re y para cada excentricidad, en la gráfica podemos ver dos zonas Dw y Up , que corresponden a las orientaciones, delimitadas por una línea vertical sobre el caso de

referencia $\varepsilon = 0$ correspondiente a la excentricidad circular a la excentricidad circular donde además forma un punto de inflexión para la temperatura en la zona Dw donde concentramos un resultado importante para la presente tesis es que se encuentra un mínimo, que tiene como significado que existe una excentricidad donde la transferencia de calor es mínima sin ser esta el caso en que la elipse parece una placa plana ni la circular por el contrario se conserva la geometría elíptica y para todos los números de Reynolds esa excentricidad mínima se cumple, esto se puede observar de la siguiente gráfica La cual mues-

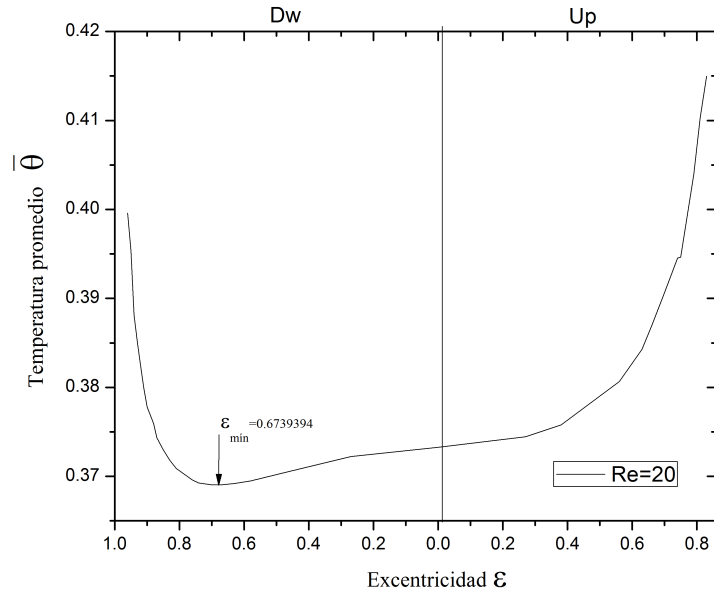


Figura 4.6: Excentricidad para la cual existe un mínimo de transferencia de calor

tra el mínimo para un $Re = 20$ que es un caso extremo muy representativo, ya que para este valor ocurre una transición hacia un flujo turbulento y donde el número de Reynolds es característico a la geometría del problema simulado en la presente tesis. Ahora se medirá la eficiencia térmica en el proceso de transferencia de calor en el intervalo en el cual se varió el número de Re dentro de las diferentes excentricidades, dicha eficiencia térmica nos indicará si el proceso de transferencia de calor tiene una influencia por la geometría de las elipses dado un número de Reynolds. De esta gráfica 4.7 se obtiene la eficiencia térmica a partir del intervalo en la posición fija para el número de Reynolds más alto en este caso $Re = 20$ que resulta ser $T_\eta = 3.7\%$ en función de la excentricidad ε donde los valores extremos se encuentran en $\varepsilon = 0.96$ orientación Dw y $\varepsilon = 0.83$ orientación Up , donde la primera excentricidad es una aproximación de la placa plana y la segunda excentricidad es el caso donde se obstaculiza la mayor porción de la zona transversal del paso del fluido. El inconveniente de usar la temperatura promedio es que no cuenta con la suficiente información y puede ser una medición burda de la eficiencia térmica pues no contempla muchos de los procesos físicos involucrados.

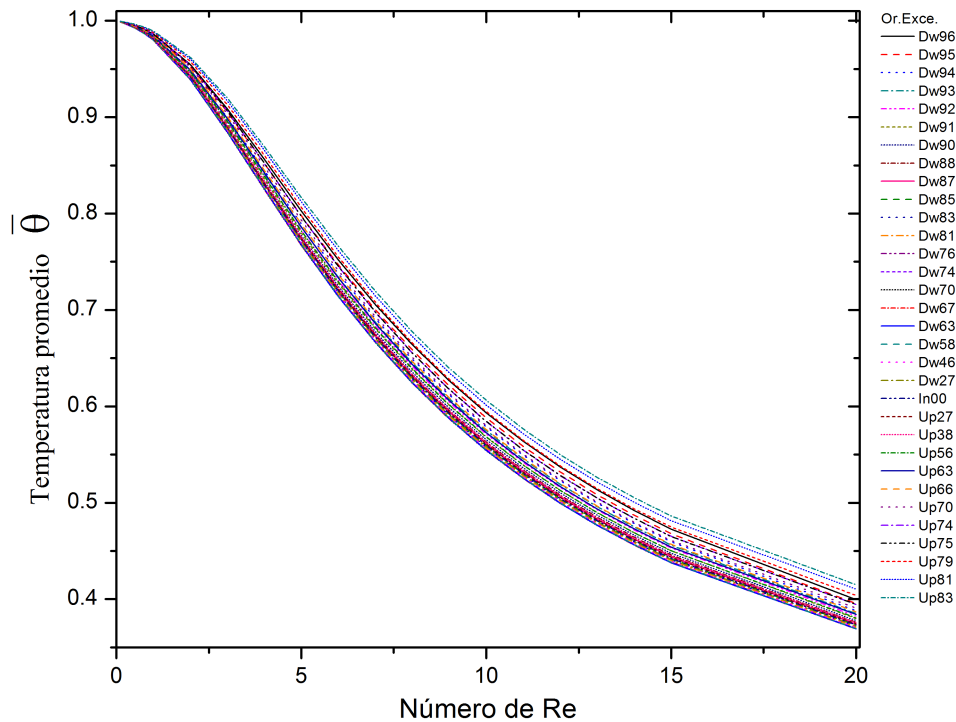


Figura 4.7: Temperatura Vs número de Reynolds

4.4.2. Análisis número de Nusselt

Como el Número de Nusselt involucra una mayor cantidad de información en el despliegue de su valor numérico usaremos dichos valores para las diferentes excentricidades ε en el valor más alto del Re para encontrar la eficiencia térmica, dado este precepto mostramos la gráfica 4.8 Ahora tenemos que para $Re = 20$ la excentricidad $\varepsilon = 0.96$ orientación Dw se tiene un valor para el número de Nusselt $Nu = 2.875467455$ y para el valor de $\varepsilon = 0.83$ con orientación Up el número de Nusselt $Nu = 3.639342781$ de lo que podemos decir que para la eficiencia térmica tenemos un valor de $T_\eta = 20\%$

4.5. Análisis de Performance

En la presente sección se hace un análisis del Performance con la ejecución del algoritmo en paralelo sobre arquitectura GPU así que en las siguientes gráficas se muestran los tiempos de ejecución midiendo dicho tiempo que se devine como el tiempo que le tomo al programa converger hasta una tolerancia de convergencia 1×10^{-11} y estas mediciones se muestran en la gráfica 4.9. El tiempo esta en días y se encuentra en función del número de Reynolds ya que la especificación del problema contempla que para Reynolds altos el tiempo de ejecución es mucho mayor pues por la cantidad de memoria se deja fijo el tamaño de la malla, dicha limitante de memoria no permitiría un refinamiento o alguna ma-

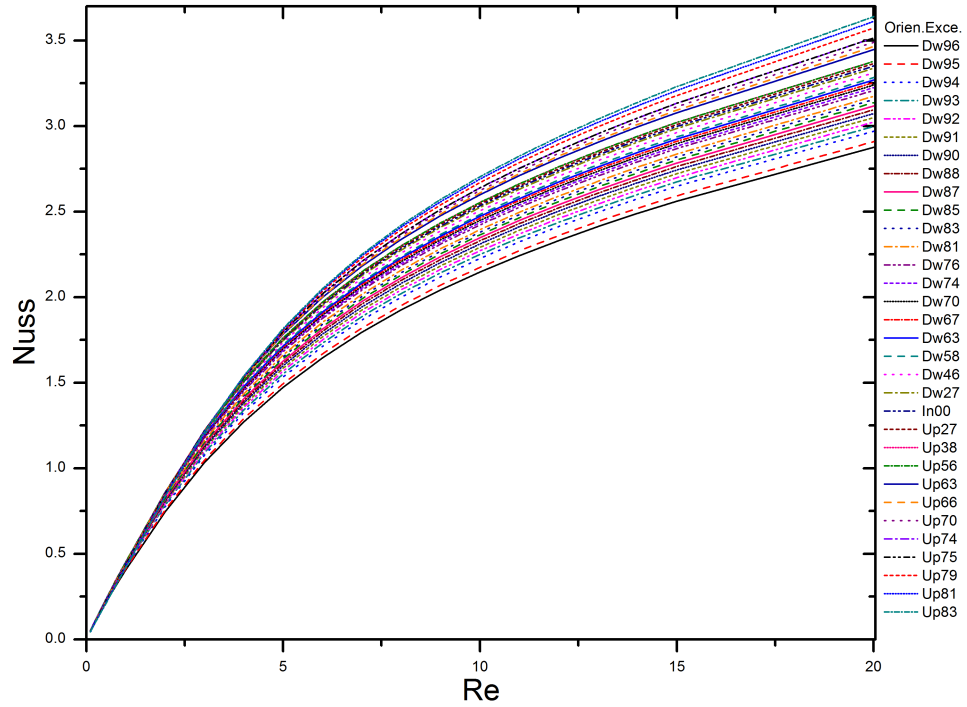
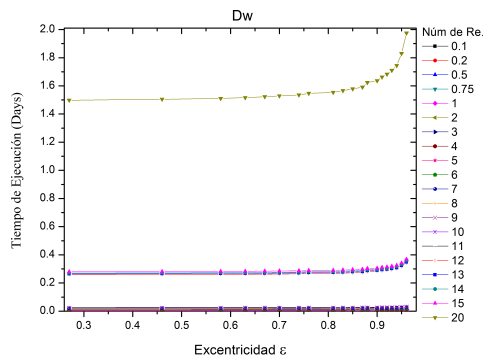
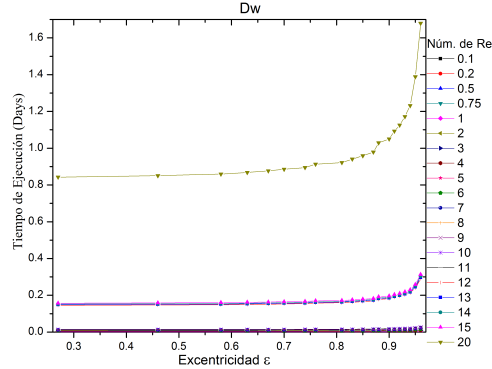


Figura 4.8: Número Nusselt Vs número de Reynolds

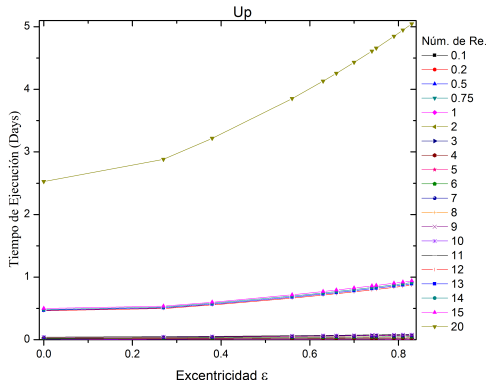
nipulación del mallado, no por ellos el efecto geométrico pierde influencia sobre el proceso computacional, observamos de las gráficas que el efecto geométrico también tiene una fuerte influencia en el tiempo de ejecución tomándole una cantidad variable de pasos de integración para así converger en un tiempo dado. El comportamiento de las ejecuciones esta caracterizado por brechas muy bien definidas para los diferentes intervalos de los números de Reynolds tanto en la orientación Dw como en la orientación Up , para $Re < 1$ tenemos la brecha del fondo de la gráfica para $Re \in [1, 15]$ la banda es la central en todas las gráficas y para el caso en el que $Re \geq 20$ que sólo es un caso pues de ahí tenemos que el flujo se vuelve transitorio para nuestro problema y más aún teniendo efectos de la geometría de ello la causa de solo un Reynolds tan alto. Con la ejecución en GPU se obtuvo una mejora en el tiempo en que tarda en resolverse el problema, para excentricidades muy cercanas a la circular $\varepsilon = 0$ le toma una menor cantidad de tiempo lograr la convergencia pero conforme nos alejamos de esta excentricidad tanto para las orientaciones Dw como para la Up la convergencia se vuelve cada vez más lenta, teniendo el mismo comportamiento para el caso en el que elevamos el número de Reynolds pese a que en todos los casos la tolerancia para converger es la misma. Tomando por bandas consideremos la primera y obteniendo el performance para esa tenemos que para $Re < 1$ se obtiene un speedup 3.9 veces más rápido sobre el tiempo de ejecución esto es que del tiempo total de la ejecución en CPU la GPU logró resolver el sistema tridiagonal y colaborativamente en el algoritmo global con el la CPU fue más



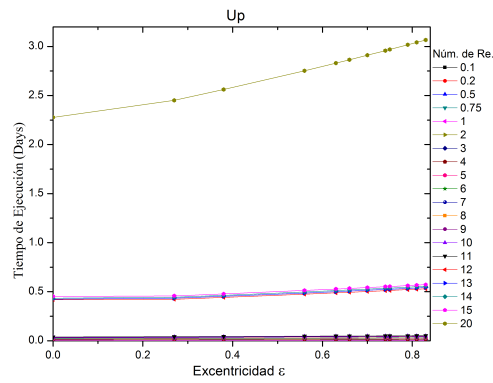
(a) Performance CPU orientación Dw



(b) Performance GPU orientación Dw



(c) Performance CPU orientación Up



(d) Performance GPU orientación Up

Figura 4.9: Gráfica de performance para las arquitecturas GPU y CPU en función de la excentricidad la orientación Dw, Up, excentricidad de referencia In y el número de Reynolds

rápido que si solo trabajara la CPU en resolver el sistema tridiagonal y realizar el proceso iterativo, para el caso en el que $Re \in [1, 15]$ el speedup fue $3.8X$ y para el caso en el que $Re = 20$ se midió que el speedup fue de $3.6X$ en la orientación Dw. Ahora para el caso en el que la orientación es *In* el caso de referencia y *Up* tenemos que las mediciones se comportaron con el mismo bandado por lo que abordaremos los casos para cada banda, en el caso $Re < 1$ tenemos que el speedup es de $3.8X$, para el caso en el que $Re \in [1, 15]$ el speedup resultante fue de $3.7X$, la contribución de los speedups de los en los diferentes casos fue el número de *Re* y la geometría del problema. El resultado de aquí obtenido es que se tiene un performance promedio de $3.75X$ de performance

Capítulo 5

Conclusiones

En el presente capítulo se muestran las conclusiones de todo el estudio y análisis de los datos de ello desprendemos que: se estudió la fluido-dinámica planteándose inicialmente, el sistema de ecuaciones y sus respectivas condiciones de frontera para las velocidades adimensionalizando dichos entes matemáticos se realizó su reformulación en términos de la vorticidad y la función de corriente llamadas las variables sintéticas para posteriormente discretizarlas, generando previamente un mallado del espacio físico mediante una transformación del espacio ξ, η al x, y a diferentes excentricidades y orientaciones (In, Dw, Up) pero conservando el área constante $a = 0.25\pi$ en función del caso referencia $\varepsilon = 0$ los cuales mediante la programación de varios algoritmos numéricos que resuelven sistemas tridiagonal e iterativos dentro del método ADI en entornos de ejecución seriales con arquitectura CPU y paralelos con arquitectura GPU con este último recurso se logró desplegar dichos campos para así estudiar su comportamiento mientras se variaba ε su orientación y el número de Reynolds donde se puede concluir el gran efecto que se tiene para $Re > 8$ y $\varepsilon > 70$ en la orientación Dw y Up pues ya en la reformulación en términos de ψ y Ω dentro de estos intervalos antes mencionados se pierde la simetría de este último campo y se forman zonas de recirculación para ψ . También se estudió el proceso de transferencia de calor del flujo que cruza a través de un arreglo de elipses con área constante se analizaron distintos casos variando su excentricidad y el número de Reynolds como se mencionó anteriormente, el estudio contemplo las ecuaciones en forma adimensional considerando áreas de referencia. Para poder realizar el análisis de los resultados fue necesario reescribir las ecuaciones adimensionales de la temperatura en forma primitiva. Los resultados fueron descritos en términos del número de Nusselt y de la temperatura promedio aguas abajo dentro del arreglo de hilos elípticos. El resultado fundamental dentro del problema fue que se encontró una excentricidad característica para cualquier flujo de tal forma que existe un mínimo en la transferencia de calor del sistema y este es distinto al caso de excentricidad cero el cual es $\varepsilon = 0.6739394$, así el presente estudio demuestra que la metodología utilizada permite encontrar un valor óptimo para la transferencia de calor de un flujo que cruza a través del arreglo de hilos elípticos independientemente del área utilizada y del número de Reynolds, esto es variando r_a semi-eje menor y r_b semi-eje mayor y dejando como caso de referencia la excentricidad del círculo, existe así un mínimo de transferencia de calor el cual no sucede en la excentricidad de referencia como podría esperarse, si no que se

encuentra en una excentricidad con geometría elíptica en cuyo caso se cumple para todos los números de Re lo que podría establecerse como una constante física que impacta en el conocimiento de los intercambiadores de calor que se rigen por este modelo.

En la parte computacional se puede concluir que la GPU a pesar de ser una tecnología ya probada para simulación gráfica su potencial de procesamiento en punto flotante de doble precisión es una característica reciente gracias al CUDA capability, con ello y en base a los resultados obtenidos podemos asegurar que para resolver los sistemas tridiagonales que resultan de discretizar las ecuaciones no lineales de la fluido-dinámica de este problema los resultados obtenidos representan adecuadamente la física del problema hasta un error de 1×10^{-4} dentro de un entorno de procesamiento cooperativo serial-CPU y paralelo-GPU así pues adicionando una región de código paralela se obtuvo una ganancia significativa en el performance dirigido al tiempo de ejecución logrando un speedup promedio de $3.75X$, esto es hasta 4 veces más rápido convergió el programa en comparación de un entorno de programación serial ejecutado por la CPU.

Apéndice A

Adimensionalización de las ecuaciones.

En este apéndice se deduce las ecuaciones adimensionales que se resuelven en la presente tesis iniciando con la ecuación de conservación de momento estas es:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Tomando valores característicos como la longitud L , la velocidad U_0 y la presión P_0 tenemos la siguiente lista:

$$u = \frac{\bar{u}}{U_0} \quad (\text{A.2})$$

$$v = \frac{\bar{v}}{U_0} \quad (\text{A.3})$$

$$x = \frac{\bar{x}}{\ell} \quad (\text{A.4})$$

$$y = \frac{\bar{y}}{\ell} \quad (\text{A.5})$$

$$P = \frac{\bar{P}}{P_0} \quad (\text{A.6})$$

Donde encontraremos bajo el análisis dimensional el valor para P_0 , substituyendo en la ecuación A.1 con A.2-A.5 y desarrollando tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0 u}{\ell \partial x} + \frac{\partial U_0 v}{\ell \partial y} &= 0 \\ \frac{U_0}{\ell} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_0}{\ell} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{U_0}{\ell} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Obteniendo así la ecuación de continuidad adimensionalizada:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Para adimensionalizar la ecuación de cantidad de movimiento sustituimos de A.2-A.6 y desarrollando inicialmente la ecuación dimensional que:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} &= \mu_g \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] \\ \frac{U_0^2 u}{\ell} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_0^2 v}{\ell} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{P_0}{\ell \rho_g} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\mu_g U_0}{\ell^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{P_0}{\rho_g U_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\mu_g}{\ell U_0} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto el valor encontrado para la presión es

$$P_0 = \rho U_0^2 \quad (\text{A.8})$$

Para el caso en la dirección en v es el mismo procedimiento encontrando que la presión referencial tiene el mismo valor que A.8. Ahora tomando este valor de la presión pondremos la ecuación de cantidad de movimiento en términos del número adimensional Re quedando de la siguiente manera:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\nu_g}{\ell U_0 \rho_g} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

Siendo $\mu_g = \nu_g / \rho_g$ tenemos que el número adimensional que da definido de la forma 2.16. Por lo tanto la ecuación de continuidad en función del número adimensional Re es 2.14 para la dirección en u y 2.15 para la dirección en v. Para la ecuación de la energía esto es:

$$\rho_g C_p \left(\bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} \right) = k_g \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} \right] + \mathbf{F} \quad (\text{A.9})$$

Donde realizando los siguientes cambios de variable en el sistema obtendremos un nuevo sistema físico adimensional:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_w - T_0} \quad (\text{A.10})$$

$$\theta (T_w - T_0) = T - T_0$$

$$T = \theta \Delta T + T_0 \quad (\text{A.11})$$

Sustituyendo en la ec. 2.20 y desarrollándola tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_g c_p U_0}{\ell} \left[u \frac{\partial (\theta \Delta T + T_0)}{\partial x} + v \frac{\partial (\theta \Delta T + T_0)}{\partial y} \right] &= \\ = \frac{\kappa_g}{\ell^2} \left[\frac{\partial^2 (\theta \Delta T + T_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\theta \Delta T + T_0)}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

Pero como

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_0}{\partial x} = 0 \quad y \quad \frac{\partial T_0}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial x} = 0 \quad y \quad \frac{\partial \Delta T}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Al igual que sus segundas derivadas por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_g c_p U_0}{\ell} \left[u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] &= \frac{\kappa_g}{\ell^2} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right] \\ \left[u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] &= \frac{\kappa_g}{\ell \rho_g c_p U_0} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

Acomodando las constantes dimensionales para dejar la última ecuación en términos del número adimensional Pe tenemos:

$$\begin{aligned} \left[u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] &= \frac{\kappa_g \mu_g}{\rho_g c_p U_0 \ell \mu_g} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right] \\ \left[u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] &= \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \frac{\kappa_g}{\mu_g c_p} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

Resultando así la ecuación 2.20.

Apéndice B

Deducción del sistema vorticidad-función de corriente

Partiendo de la ecuación de la conservación de la masa, es posible encontrar una función que satisfaga la ecuación de continuidad, esta es la denominada función de corriente y fue introducida por el matemático francés Lagrange en 1775, la función de corriente es descrita en términos de las componentes de la velocidad del fluido y para el caso donde el flujo es incompresible se escribe de la siguiente forma:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{B.1})$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{B.2})$$

Donde ψ es la variable a la que llamamos función de corriente, si sustituimos los cambios de variable B.1-B.2 en la ecuación de continuidad observamos que se satisface. Con la ecuación de continuidad tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Tomando las ecuaciones 2.14, 2.15 y derivándolas respecto de y y de x respectivamente tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \right) \end{aligned}$$

Obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right] \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right] \quad (\text{B.5})$$

Restando B.4-B.5 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \\ & = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Desarrollando las diferenciales tenemos:

$$\begin{aligned} & u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \\ & = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Utilizando las definiciones de vorticidad y función de corriente B.1 y B.2 tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \\ & + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \\ & = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2 \partial y} = \\ & = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

De la definición de Vorticidad:

$$\Omega = - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{B.9})$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] = \frac{\partial \psi}{\partial y} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right] = \\ & = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

De donde obtenemos las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento respectivamente en términos de la vorticidad y la función de corriente:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Omega \quad (\text{B.11})$$

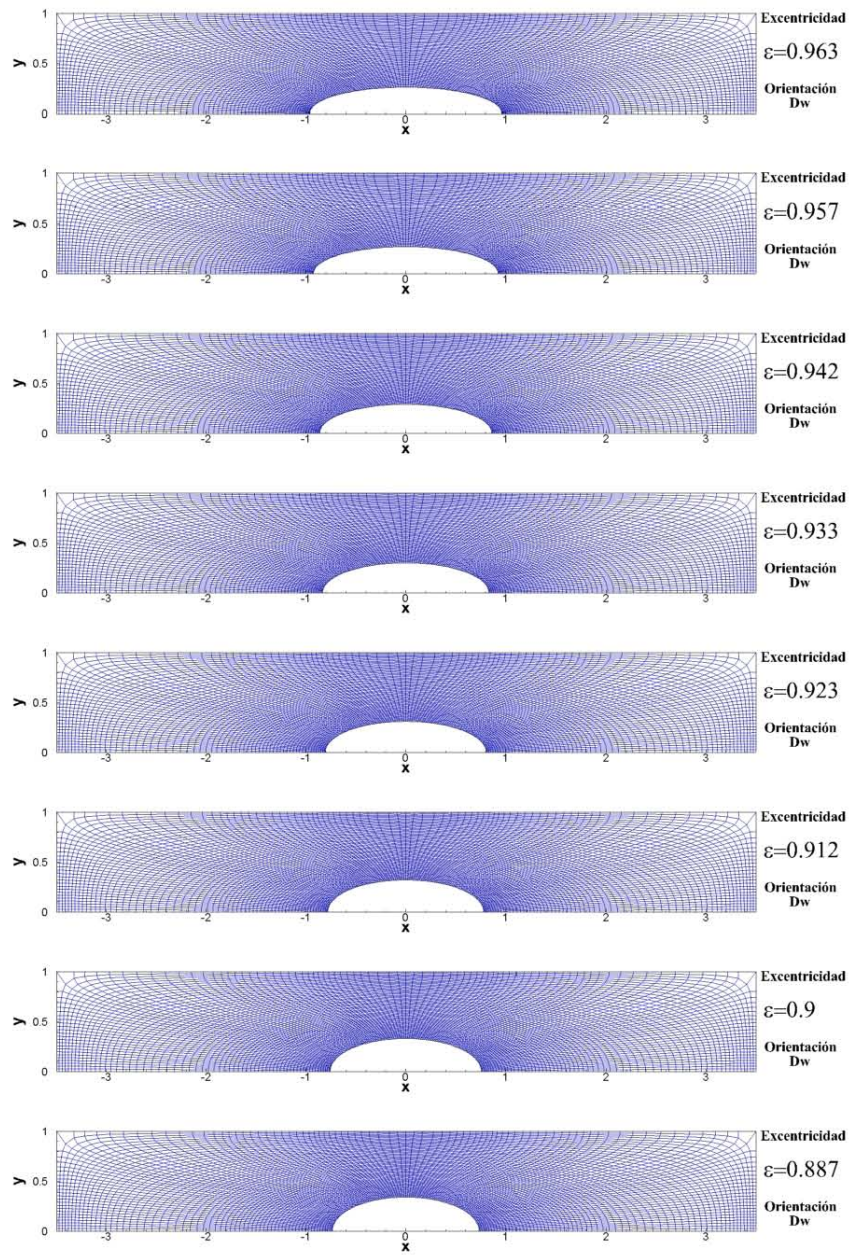
$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right] \quad (\text{B.12})$$

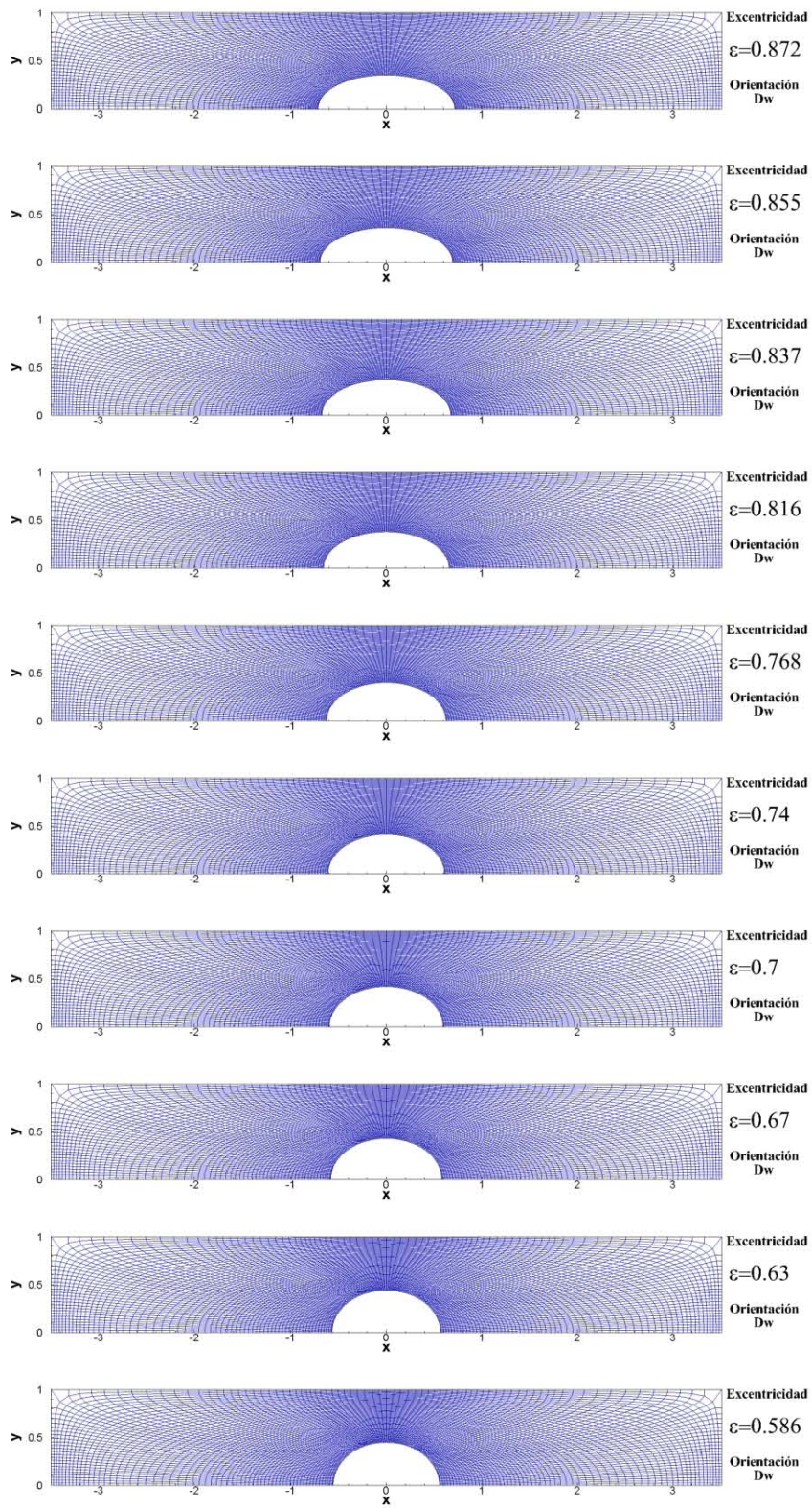
Apéndice C

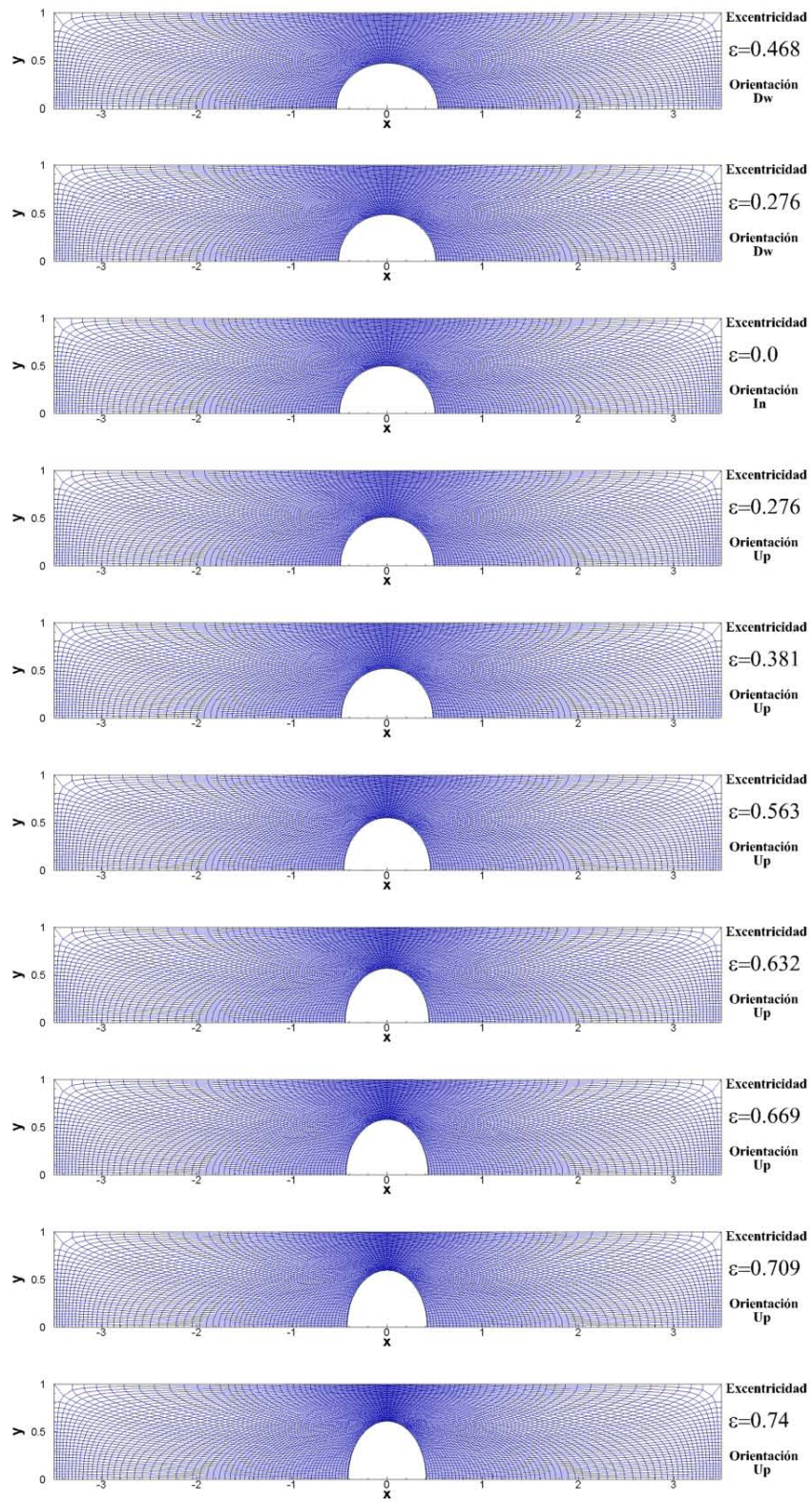
Clasificación de mallas elípticas a diferentes excentricidades

Una de las características especiales de las mallas generadas es su ortogonalidad como se mencionaba en el capítulo 2 existe una curva de nivel pegada a la superficie de la elipse que induce una ortogonalidad para asegurarnos que las derivadas existen y proporcionan información confiable de la solución en esta región del espacio físico. Puede observarse en las esquinas de la frontera tanto aguas abajo como aguas arriba que el calculo de la ortogonalidad del espacio no es tan fiel por lo conflictivo de la geometría cuadrada de esta zona sin embargo se procura un equispaciado lo más uniforme posible al igual que una quassi-ortogonalidad que permita la mejor aproximación del espacio de derivadas, esto se logra con las funciones de peso 3.9 y 3.10 que conforman los coeficientes no-lineales del sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

Las siguientes imágenes clasifican las mallas generadas en el presente trabajo según la variación de sus semiejes acorde a la tabla 2.1, por la cantidad de datos e imágenes no se exponen los campos de temperatura, vorticidad y función de corriente para todas ellas sin embargo se dejan los casos más significativos donde se puede observar un gran cambio en el comportamiento de dichos campos. Para la variación de la excentricidad se escogieron lo que se llamo "orientación" no en el sentido estricto de la palabra pero sí con un significado tal que nos ayuda a la clasificación, ejemplo de ello es Dw (Down) para el caso $r_a > r_b$ que es la región de excentricidades donde se encuentra una aproximación a la placa plana, Up $r_b > r_a$ donde no se puede abarcar toda la longitud del por donde cruza el fluido y lo delimitamos hasta una tolerancia donde se cumplen la ecuación de continuidad entre otras, y nuestro caso de referencia la excentricidad circular a la cual llamamos In (Invariante) $r_a = r_b$.







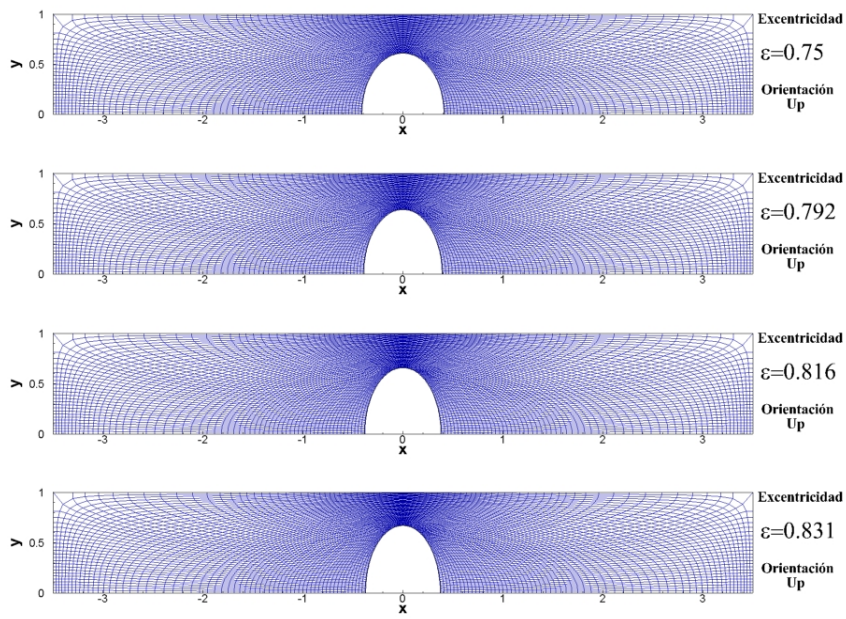


Figura C.1: Caracterización de las mallas generadas para resolver las ecuaciones de la fluido-dinámica de un flujo que atraviesa un arreglo de hilos elípticos

Apéndice D

Método Numérico

A continuación se presentan las ecuaciones generadoras de la malla que modelan el espacio computacional donde se encuentran las soluciones a las ecuaciones de la fluido-dinámica:

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = P(\xi, \eta) + Q(\xi, \eta) \quad (D.1)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = P(\xi, \eta) + Q(\xi, \eta) \quad (D.2)$$

Para encontrar una óptima generación y convergencia de la malla primero resolvemos el caso especial:

$$P = Q = \beta = 0 ; \alpha = \gamma = 1 \implies$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \quad (D.3)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \quad (D.4)$$

Por lo que al tener las siguientes transformaciones que corresponde al mapeo del espacio físico al espacio computacional:

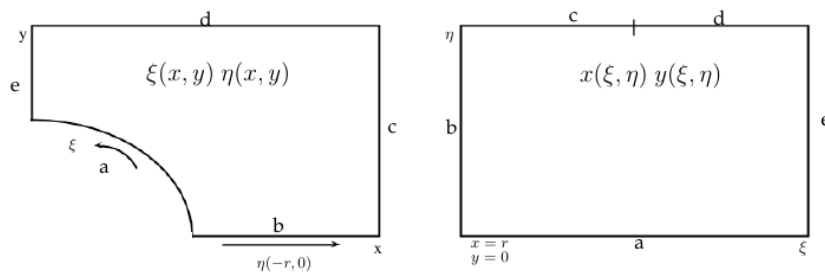


Figura D.1: Transformación del espacio físico al espacio computacional

Tomando las siguientes condiciones de frontera:

- 1) $\eta = 0 \rightarrow x=\text{elipse}, y=\text{elipse}.$
- 2) $\xi = 1 \rightarrow x[a, L] y[0].$
- 3) $\xi = 0 \rightarrow x[0] y[b, h].$
- 4) $\eta = 1 \rightarrow \xi[0, 3/4] \rightarrow x[0, L] y[h]; \xi[3/4, 1] \rightarrow x[L] y[h, 0].$

Ahora realizamos una discretización a las ecuaciones, tomando el caso para x del Laplaciano puesto que el desarrollo en y es similar:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = \frac{\partial x}{\partial t} \quad (\text{D.5})$$

$$\text{donde } \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x - x^a}{\Delta t} \quad (\text{D.6})$$

Usando la definición de discretización para δx tenemos:

$$\delta x = x - x^a \Rightarrow \quad (\text{D.7})$$

$$\Rightarrow x = \delta x + x^a \quad (\text{D.8})$$

si hacemos $\delta x \rightarrow 0$ y sustituyendo D.8 en D.5 obtenemos:

$$\frac{\delta x}{\Delta t} = \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \delta x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \delta x}{\partial \eta^2} \Rightarrow \quad (\text{D.9})$$

$$\Rightarrow \delta x - \Delta t \frac{\partial^2 \delta x}{\partial \xi^2} - \Delta t \frac{\partial^2 \delta x}{\partial \eta^2} = \left(\frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \eta^2} \right) \Delta t \quad (\text{D.10})$$

Como la solución esta en función de δx , entonces, tomamos el lado izquierdo de D.10 y tomando la segunda derivada como un operador como un operador actuando en $\delta x \Rightarrow$

$$\left(1 - \Delta t \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \Delta t \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \delta x = \left(\frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \eta^2} \right) \Delta t \quad (\text{D.11})$$

Este ultimo paso lo podemos realizar pues el término

$$\left(\Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \approx \Delta t^2 \quad (\text{D.12})$$

y puesto que $0 < \Delta t \ll 1$ podemos tomarlo como despreciable \Rightarrow realizando un cambio de variable tenemos:

$$F = \left(1 - \Delta t \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \delta x \quad (\text{D.13})$$

\Rightarrow D.11 toma la forma:

$$\left(1 - \Delta t \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) F = \left(\frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \eta^2} \right) \Delta t \quad (\text{D.14})$$

a la ecuación D.14 lo llamamos barrido en $\xi \Rightarrow$ con esto ahora la solución es F , tomando el hecho de que

$$\left(\delta x - \Delta t \frac{\partial^2 \delta x}{\partial \eta^2} \right) = F \quad (\text{D.15})$$

que son resueltas con su respectivas condiciones de frontera:

$$\psi'(\infty, y) = \psi'(x, d) = \psi'(x, 0) = \Omega'(\infty, y) = \Omega(x, d) = \Omega(x, 0) = 0 \quad (\text{D.23})$$

donde las soluciones de las ecuaciones D.21 y D.22 están dadas por:

$$\psi'(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} C_n \exp(\lambda_n x) \sin(2n\pi y), \quad (\text{D.24})$$

$$\Omega'(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} C_n [(2\pi n)^2 - \lambda_n^2] \exp(\lambda_n x) \sin(2n\pi y) \quad (\text{D.25})$$

con $\lambda_n^{\pm}(A) = A/2 \pm \sqrt{(A/2)^2 + (2n\pi)^2}$, donde A es un número adimensional que en este caso corresponde al numero de Reynolds, $A = Re$. Si se usa únicamente el eigenvalor negativo su correspondiente $n = 1$, entonces, las ecuaciones D.23 y D.24 se obtiene la posición $x = \pm x_0$, entonces:

$$\psi_x = \lambda_1^+(Re)(\psi - y); \quad \Omega_x = \lambda_1^+(Re)\Omega \text{ en } x = -x_0, \quad (\text{D.26})$$

$$\psi_x = \lambda_1^-(Re)(\psi - y); \quad \Omega_x = \lambda_1^-(Re)\Omega \text{ en } x = x_0, \quad (\text{D.27})$$

Usando el mismo procedimiento para la temperatura adimensional, las condiciones de frontera resultantes toman la forma de:

$$\theta_x = \lambda_1^+(Pe)\theta \text{ en } x = -x_0 \quad (\text{D.28})$$

$$\theta_x = \lambda_1^-(Pe)(\theta - \theta_{\infty}) \text{ en } x = x_0 \quad (\text{D.29})$$

las condiciones de frontera D.26 a la D.29 son correcciones usadas en el programa de solución a la vorticidad, función de corriente y temperatura.

Apéndice E

Descripción de arquitectura GPU

En este apéndice trataremos los tópicos de la arquitectura GPU y sus beneficios por adelantar algunos datos interesantes del mismo comentare que la GPU (Graphic Processor Unit) en su versión de arquitectura Fermi esta hecha de 3 billones de transistores, con 480 simetrical multi-processors o CUDA cores organizados en multiprocesadores en streaming con 32 alus (arithmetic logic units), la memoria global es de tipo GDDR5 separada en 6 canales de 64 bits cada canal con un bus de 384 bits. La memoria del sistema puede soportar hasta 6 GB y tiene verificación ECC al igual que cada Cuda core ha mejorado sus ALUs y la unidad de coma flotante siguiendo el estandar IEEE 754-2008. El modelo de programación CUDA según la taxonomía de Flynn (Flynn M. , 1995) se encuentra clasificada en dos de sus ramificaciones:

- SIMD Single Instruction Multiple Data
- MIMD Multiple Instruction Multiple Data

Tomando con respecto a la memoria la caracterización de que existen numerosos modelos conviviendo en esta sola arquitectura pues cada procesador posee una serie de registros a modo de memoria local y a su vez cada multiprocesador posee una memoria compartida accesibles por el alcanza en que se localiza en dichas jerarquías de memoria y finalmente tenemos la memoria global, la cual es accesible por toda la arquitectura.

E.1. Arquitectura GPU Fermi

El computo GPU mejora muchos de los algoritmos que evocan a las operaciones en su mayor medida matriciales y vectoriales ello conlleva a pensar que sus mejoras en performance podrían superar incluso reemplazar a los procesadores CPU escalares una cuestión que no es cierta y en la presente tesis se muestra como es necesaria la convivencia de ambos para lograr reducir los tiempos de ejecución. La arquitectura usada para la realización de esta Tesis es la GF100 la cual se basa en un arreglo de Cluster de Procesamiento Gráfica (Graphics

Processing Clusters, GPC), multiprocesadores de streaming (SM) y los controladores de memoria. una GF100 tiene 4GPC, 16SM y 6 controladores de memoria. Estas cantidades dependen del modelo de la arquitectura. Los controladores de memoria atienden a las unidades ROP (Raster Operation Processor) las cuales solo mencionamos mas no utilizamos durante el procesamiento del algoritmos y que son para operaciones específicas para gráficos pero que son importantes pues realizan operaciones atómicas sobre la memoria global. Ahora de la jerarquía de memoria la cual hablaremos más adelante pero para considerar el hecho que en la arquitectura la memoria caché L2, los controladores de memoria y los grupos ROP están íntimamente relacionados, la aplicación o modificación de uno influyen sobre los demás, la importancia de este punto radica en el uso de las memorias compartidas ya que por limitantes en sincronización debemos considerar una pequeña parte de la arquitectura a saber un solo SM. En la Figura E.1 se muestra un esbozo general de un CUDA-GPU. Una consideración

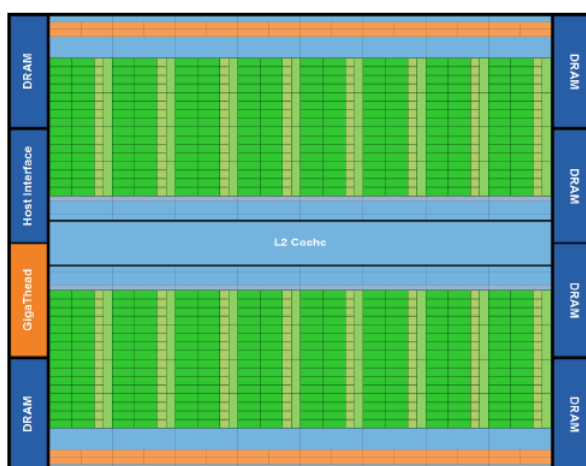


Figura E.1: Arquitectura Fermi

importante ya planteado el hecho de un uso limitado de la arquitectura es que el GPC encapsula todas las unidades claves de procesamiento gráfico y de punto flotante, a excepción de las funciones ROP, por ende una GPC puede ser considerado como una GPU autónoma, y los SM al igual que las unidades de textura se agrupan en bloques de hardware, de ahí la característica de concurrencia que podemos encontrar en esta arquitectura.

Ahora describiremos un Simmetrical Multiprocessor del cual se muestra en la figura E.2, los SM presentan varias innovaciones, las cuales lo hacen no sólo más potente sino también más eficiente y programable. Cada SM tiene 32 SP (Simmetrical Processor ó Streaming Processor ó Cuda Core), 16 unidades load/store, las cuales permiten calcular direcciones de origen o destino a 16 threads por ciclo de reloj. Estas unidades leen o escriben los datos de cada dirección en la caché o la DRAM. Las SFU (Special Function Unit) tienen la característica de almacenar y ejecutar en paralelo las funciones comúnmente usadas en la matemática. Por su parte un SP tiene una unidad aritmética/lógica de enteros (ALU) y una unidad de punto flotante proporcionando instrucciones fu-

sionadas de multiplicar-sumar (FMA), tanto para aritmética de precisión simple como doble. Este tipo de instrucciones mejora las instrucciones de multiplicar-sumar (MAD) haciendo la multiplicación y la suma con un simple paso de redondeo final, sin ninguna pérdida de precisión en la suma, la FMA es más precisa que la realización de las operaciones por separado. En esta arquitectura

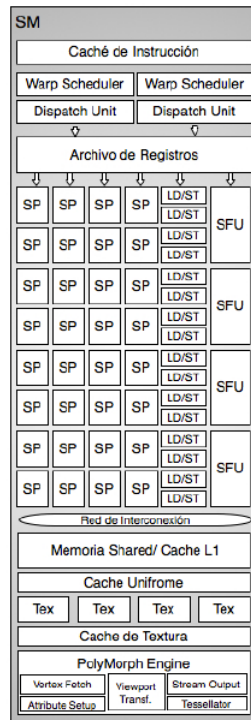


Figura E.2: Arquitectura de un SM (Simetrical Multiprocessor) en la arquitectura GF100

se planteó un nuevo diseño de ALU para números enteros. Ésta soporta una precisión de 32 bits para todas las instrucciones. La ALU es también optimizada para soportar operaciones de 64-bits. Varias instrucciones específicas son soportadas, incluyendo operaciones: booleanas, shift, move, compare, convert, extracción del bit-field, inserción de bit-reverse y el recuento de la población de datos. Otra de las características importantes de la arquitectura Fermi, es la aritmética de doble precisión en donde dicha arquitectura fue específicamente diseñada para ofrecer un performance sin precedentes en doble precisión, hasta 16 operaciones multiplicar-sumar pueden ser realizadas por SM por ciclo de reloj. Estas características se muestran en la figura E.3. Respecto a la administración de los threads, estos son administrados a los SM en grupos de 32 llamado agrupamiento warp, Cada SM tiene dos administradores de warp y dos unidades de dispatch de instrucciones, permitiendo a dos warps ejecutar concurrentemente. El planificador dual del warp en el SM selecciona a dos warps y da una instrucción de cada uno a un grupo de 16 SP, 16 unidades load/store o a 4 SFU. La memoria compartida es una facilidad que permite optimizar el performance de las aplicaciones desarrolladas en CUDA. También contamos con que cada SM

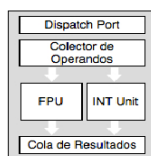


Figura E.3: Arquitectura SP de GF100

en la GF100 tiene 64KB de memoria compartida y 16 KB de caché L1 lo cual triplica la capacidad de memoria compartida para las aplicaciones que utilizan esta propiedad del SM que es el caso del presente trabajo, pero aquellas que no la utilizan se benefician automáticamente de la caché L1.

Una de las características no descrita aún es la interfaz con el host o sistema huésped y la unidad GigaThread que aunque no se ahonda para propósitos de la presente tesis mencionamos brevemente que los comandos de la CPU son leídos por la GPU a través de la interfaz de host y pasados a la unidad GigaThread quien obtiene los datos especificados desde la memoria global y los copia al framebuffer. La GigaThread crea y envía bloques de threads a varios SM, cada SM, en turno administra los warps a los SP y otras unidades de ejecución. También es su responsabilidad la redistribución del trabajo de los SM cuando se produce una sobrecarga en el pipeline gráfico, por ejemplo después de las etapas de tessellation y rasterization propias de operaciones gráficas. Como es bien sabido una tarjeta gráfica realiza su comunicación a través de la PCI-express de un host huésped.

E.2. Jerarquía de Memoria en la arquitectura CUDA

Una descripción necesaria para esbozar la realización de los algoritmos de la presente tesis es la Jerarquía de memoria. Tenemos que la CPU se comunica con la GPU a través de la memoria. Tanto al inicio de la computación enviando los datos de entrada como al final de la misma para obtener los resultados de la ejecución paralela. Los datos de entrada para cada uno de los threads están disponibles en la memoria del dispositivo, generalmente es la memoria global. En la GPU se distinguen dos grandes tipos de memoria, la memoria on-chip, la cual reside en el dispositivo y, en consecuencia, tiene un rápido acceso; la memoria off-chip, alojada fuera del dispositivo y con un costo de acceso mayor.

En función de los distintos tipos de memoria del dispositivo, CUDA posee una jerarquía de memoria, en la cual existen distintos tipos dependiendo de las velocidades de lectura escritura y su ámbito de ejecución al igual que el ciclo de vida de los objetos definidos en estas. Describiremos ahora cada una de las memorias y su jerarquización:

- Memoria Global
- Memoria compartida (shared)
- Memoria Local

- Memoria de Registros
- Memoria Constante
- Memoria de Texturas

Una consecuencia positiva de conocer a profundidad la arquitectura GPU es que el programador puede tomar decisiones respecto a qué memoria utilizar a fin de mejorar y optimizar la eficiencia de la aplicación ejecutada sobre la GPU, de esta última consideración de gran relevancia es ser consciente de la latencia de una instrucción de memoria la cual varía dependiendo del espacio que tenga y a la cual se accede e incluso del patrón de acceso generado por dicha instrucción. Considerando que los distintos tipos de memoria a los cuales pueden acceder los threads y que estos están dispuestos en bloques y grid donde los distintos tipos de memoria se diferencian entre ellos, no solo por las restricciones de acceso y los tamaños, sino también por que cada una de las memorias tienen su propio ancho de banda. Un punto a destacar es la sincronización, consideremos el hecho de que el acceso a la memoria global es más lento, dependiendo del patrón de acceso puede variar su velocidad así los accesos a la memoria global se resuelven sincronizando medio warp, para aumentar la eficiencia de la memoria global, el hardware puede unificar las transacciones dependiendo del patrón de acceso, las restricciones para la unificación depende de la arquitectura, sin embargo, si los threads acceden a n segmentos distintos de memoria, entonces se producen n transacciones.

Bibliografía

- [1] Kovasznay, L.I.G. “Laminar flow behind a two-dimensional grid”, Proc. Camb.Philos. Soc. 44, pp. 58-62, 1948
- [2] Tamada k. And h. Fujikawa, “the steady two-dimensional flow of viscous fluid at low reynolds numbers passing through an infinite row of equal parallel circular cylinders”, q j mechanics appl math 1957 10: 425-432:
- [3] Miyagi T 1958 Viscous flow at low Reynolds number past an infinite row of equal circular cylinders J. Phys.Soc. Japan 13 439
- [4] Happel C. And Kuwabara C., Viscous flow in multiparticle systems: slow motion of fluids relative to beds of spherical particles, AIChE J. 4 (1958), 197-201.
- [5] J. Happel and H. Brenner, Low Reynolds Number Hydrodynamics with Special Applications to Particulate Media, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986
- [6] M. Kawaguti, ' Numerical Solution of the NS Equations for the Flow Around a Circular Cylinder at Reynolds Number 40 ', Journal of Phy. Soc. Japan, vol, 8, pp. 747-757, 1953
- [7] A. Thom, ' The flow Past Circular Cylinders at Low Speeds ', Proc. Royal Society, A141, pp. 651-666, London, 1933
- [8] Hasimoto H 1959 On the periodic fundamental solutions of the Stokes ewuations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres J. Fluid Mech. 5 317
- [9] Hamielec, A. C., and J. D. Raal, Numerical studies of viscous flow around a circular cylinder. Phys. Fluids, 12, 11-221969
- [10] Takami, H., and H. B. Keller, 1969: Steady two-dimendional viscous flow of an incompressible fluid past a circular cylinder. Phys. Fluid, Suppl. II, 51-56
- [11] Cloe, J., and Roshko, A., 1954, “Heat Transfer From Wires at Reynolds Numbers in the Ossen Range”, Proceeding of Heat Transfer an fluid Mechanics Institute, University of California, Berkeley, CA, pp. 13-23.
- [12] Illingworth, C. R., 1963 “Flow at Small Reynolds Numbers in Laminar Boundary Layers L. Rosenhead, ed., Claredon Press, Oxford.

- [13] Hieber, C. N., and Gebhart, B., 1968, "Low Reynolds Number Heat Transfer from a Circular Cylinder", *J. Fluid. Mech.*, Vol.32, pp. 21-28.
- [14] Dennis, S.C. R., Hudson, J.D., and Smith, N., 1968 "Low Reynolds Number Heat Transfer from a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers", *Physics of Fluids*, Vol. 11, pp. 933-940.
- [15] Collis, D. S., and Williams, M. J., 1959, "Two-Dimensional Convection From Heated Wires at Low Reynolds Numbers", *J. Fluid Mech.* Vol. 6, pp. 357-384
- [16] Kurdyumov, V.N., and Fernández, E., 1998 "Heat Transfer From a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers", *J. Heat Transfer*, Vol.120, pp72-75.
- [17] D. Gordon, Numerical Calculation on viscous flow fields through cylinder arrays, *Computers and Fluids*, vol 6 pp.1-13,1978.
- [18] T.-S. Wung and C.J. Chen, Finite analytics solution of convective Heat Transfer for tube arrays in CrossFlow: Part I, Flow Field Analysis, *J. Heat Transfer*, vol.111, pp.631-638, Aug. 1989.
- [19] C.J.Chen and T.-S. Wung, Finite analytic solution of convective Heat Transfer for tube Arrays in CrossFlow: Part II, Heat Transfer Analysis, *J. Heat Transfer*, vol. 111, pp. 641-648, Aug 1989.
- [20] Y.Q.Wang, L.A. Penner, and S. J. Ormiston, Analysis of laminar forced convection of air for crossflow in bank of staggered tubes, *Numerical Heat Transfer Part A*. vol. 38, pp. 819-845, 2000.
- [21] Hide Nishiyama, Terukazu Ota, Tohru Matsuno, 1987 "Heat Transfer and Flow Around Elliptic Cylinders in Tandem Arrangement". The Japan Society of Mechanical Engineers. pp. 41 Series II, Vol. 31, No.3, 1988.
- [22] A. Shehata, "Natural convection from the inside surface of annuli", M.S. thesis, Al-Azhar University, Cairo, Egypt, 1989.
- [23] S. Allmann, T. Rauber, and G. Runger. Cyclic reduction on distributed shared memory machines. *Euromicro Conference on Parallel, Distributed, and Network-Based Processing*, pp. 290-297, 2001.
- [24] Y. Dotsenko, N. K. Govindaraju, P.-P. J. Sloan, C. Boyd, and J. Manfredelli. Fast scan algorithms on graphics processors. In *Proceedings of the 22nd Annual International Conference on Supercomputing*, pages 205-213. ACM, June 2008.
- [25] Ö. Eğecioğlu, C. K. Koc, and A. J. Laub. A recursive doubling algorithm for solution of tridiagonal systems on hypercube multiprocessors, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 27:95-108, 1989.
- [26] R. W. Hockney, A fast direct solution of Poisson's equation using Fourier analysis. *Journal of the ACM*, 12(1):95-113, Jan. 1965.
- [27] M. Kass and G. Miller. Tapid, stable fluid dynamics for computer graphics. In *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH 90)*, pp. 49-57, Aug. 1990.

- [28] M. Prieto, R. Santiago, D. Espadas, I. M. Llorente, and F. Tirado. Parallel multigrid for anisotropic elliptic equations. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 61(1):96-114, 2001.
- [29] J. Lizardi, L. Martínez-Suástegui, Steady viscous flow past an array of isothermal wires: effect of the blockage ratio on the flow and heat transfer characteristics. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)
- [30] J. Lizardi, C. Treviño, A. Liñan, Ignition and combustion of diluted hydrogen mixtures in a flow past an array of catalytic wires. *Combustion Theory and Modelling* Vol. 11, No3, June 2007, 483-499.