



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Lights Out

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
SEBASTIÁN GONZÁLEZ HERMOSILLO DE LA
MAZA

DIRECTOR DE TESIS:
CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ



2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Apellido paterno	González Hermosillo
Apellido materno	de la Maza
Nombre(s)	Sebastián
Teléfono	55 33 99 00 47
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	306653366

2. Datos del tutor

Grado	Dr.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz

3. Datos del sinodal 1

Grado	Dr.
Nombre(s)	Juan José
Apellido paterno	Montellano
Apellido materno	Ballesteros

4. Datos del sinodal 2

Grado	Dra.
Nombre(s)	Mucuy-Kak del Carmen
Apellido paterno	Guevara
Apellido materno	Aguirre

5. Datos del sinodal 3

Grado	Mat.
Nombre(s)	Jesús
Apellido paterno	Alva
Apellido materno	Samos

6. Datos del sinodal 4

Grado	Mat.
Nombre(s)	Laura
Apellido paterno	Pastrana
Apellido materno	Ramírez

7. Datos del trabajo escrito.

Título	Lights Out
Número de páginas	83 p.
Año	2013

“ The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds new discoveries, is not “ Eureka!” (I found it) but “ that’s funny...” ”

Isaac Asimov

Agradecimientos

Hay muchas personas a quienes quiero agradecer ahora. Creo firmemente que toda persona con la que nos encontramos tiene una influencia en nuestra vida, en medida y de manera distintas, y no seríamos las personas que somos sin cada uno de esos encuentros. Sería imposible nombrarlos a todos. Dicho lo anterior, si tu nombre (no necesariamente con tus apellidos) puede encontrarse aquí

www.google.com,

gracias.

Quiero también mencionar algunos de esos nombres para los que el agradecimiento anterior no basta.

Rogelio, Graciela, Mariana y María José, de quienes no hay más que decir que son mi familia. Con eso se dice todo.

Luis, Mónica, Luis Raúl y Akemi, por permitirme formar parte de su familia desde hace ya tantos años.

Luis Humberto y Arturo. Dos mosqueteros, *mes potes*.

César, cuya influencia soy incapaz de resumir en una palabra. Me quedaré corto y usaré dos: amigo y maestro.

Laura, por conseguir algo que muchas veces me parece imposible: hacerme creer que puedo lograrlo. En verdad, muchas gracias.

José, por darme una oportunidad invaluable y más de algún consejo cuando realmente me hacía falta.

Daniela, por ayudarme en más de una ocasión a encontrar la perspectiva que necesito.

Chucho y Martín, por decir las palabras adecuadas en el momento adecuado.

Yulene, por seguir enseñándome muchas cosas sobre mí mismo, en particular, saber ser puerto y saber ser barco.

Leonardo, Poncho, Mafer y Gisela, por darme valor cuando es necesario y por hacerme reír cuando hace falta.

Pamela, por (supuestamente) encontrar extrañas figuras en el cabello de la gente.

Fernanda, Omar und Sandra. *Sie lehren mich etwas sehr wichtig: weiter kämpfen für meine Träume. Entschuldigen Sie mich für mein schlechtes Deutsch.*

Ana Laura, por tener la rara cualidad de decir las cosas como son.

Angie y Cons, por su resistencia a mi necesidad.

Ana, por enseñarme algo importante: no tenerle miedo al fracaso.

Adriana, Angel (sin acento) y Joaquín. Por escucharme y permitirme escucharlos.

Julieta, John y Laura, por haber hecho mi vida mucho más simple al recordarme que suelo complicármela demasiado.

Ceci y Juan, por recordarme que “*you step onto the road, and if you don’t keep your feet, there’s no knowing where you might be swept off to.*”

Rodolfo, por más de una charla y un cigarro.

Alan, Sofía, Susana, Adrián, Viridiana, Olinka, Iván, Hugo, Paco y Nikee. Por ser apoyo y motivación en más de una ocasión. De todos aprendí algo valioso.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN103010 “Geometría de foliaciones y ecuaciones diferenciales holomorfas”. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Prefacio

Todas las actividades humanas tienen que trabajar, en mayor o menor medida, con la manera en la que distintas cosas se relacionan entre sí: la proporción correcta de los ingredientes en una receta de cocina, el transcurrir de las acciones y la interacción de los personajes en una novela, la distribución del peso de un edificio en sus cimientos, el fluir de verso en verso que da color a un poema o la composición de una pintura. Alterar un pequeño elemento tiene un efecto en el todo, que algunas veces es inapreciable y otras veces determinante. Además, inevitablemente el hombre compara las distintas cosas que ve, traslada lo que piensa de una situación a la otra, y externa esa percepción, unas veces con imágenes, otras con sabores y otras más con símbolos y palabras. Las Matemáticas no son para nada ajenas a ese estudio de las relaciones, pues frecuentemente las distintas áreas que la componen se traslapan, permitiendo descubrir conexiones entre conceptos que, a primera vista, parecen ser ajenos.

La presente tesis estudia algunos aspectos de un juego conocido como “Lights Out”, en el que la manera en que pequeñas partes se relacionan es esencial. En palabras simples, el juego trata de presionar botones que apagan o encienden ciertos conjuntos de luces. Empezamos con algunas luces encendidas y otras apagadas. Queremos encontrar una serie de botones que, al presionarlos, logremos dejar todas las luces apagadas, momento en el que decimos que ganamos el juego.

Si fuera posible empezar con cualquier configuración de luces y llegar a la configuración final, el estudio del juego se reduciría a encontrar una manera de ganar. Afortunadamente ese no es el caso, pues existen configuraciones tales que, sin importar qué botones presionemos, nunca llegarán al punto en que todas las luces están apagadas. De esa manera, encontrar cómo y, en algunos casos, cuántas son las configuraciones desde las que podemos ganar se vuelve parte esencial del estudio del juego.

El presente es un trabajo autocontenido, que emplea, entre otras cosas, la Teoría de Gráficas y el Álgebra Lineal para el estudio del juego. En el primer capítulo se describen las reglas en su forma original, que es la de un juego electrónico, que salió a la venta en la década de los años noventa. Uno de sus primeros análisis matemáticos formales aparece en [1] que fue publicado en 1998, usando únicamente, como el título indica, Álgebra Lineal.

La idea básica del juego fue extendida naturalmente a gráficas más generales que la que se puede asociar al tablero original, y en 2001 se publicó [2], en el que la Teoría de Gráficas se vuelve la herramienta primordial. Aparecen además nuevas formulaciones del problema, en las que esencialmente se agregan nuevas reglas o se modifican las ya existentes. El segundo capítulo trata de esas generalizaciones del juego.

Una pregunta que surge de este modo es si existe alguna relación entre los juegos bajo diferentes reglas, es decir, si una partida en particular que se puede ganar con ciertas reglas se puede ganar también con otras. En [3], publicado en 2009, se estudian algunas de esas relaciones. En el tercer capítulo se encuentran los resultados acerca de dichas relaciones entre distintas reglas del juego.

Así, puedo resumir los temas que se tratan en cada capítulo del siguiente modo:

1. Presentación del juego y primera solución.
2. Generalización del juego e introducción de nuevas reglas.
3. Análisis de la relación entre las distintas reglas del juego.

De ese modo busco una exposición natural del juego que estudio: analizarlo en su forma más sencilla, trasladar esas ideas a otros elementos, y encontrar las relaciones que guardan entre sí.

Índice general

Prefacio	VII
1. Introducción	1
1.1. Preliminares	1
1.2. <i>Lights Out</i> : Solución con Álgebra Lineal	12
2. Lights Out	23
2.1. Solución con Teoría de Gráficas	23
2.2. Juegos Dirigidos vs. Juegos No Dirigidos	27
2.3. Una nueva restricción: sólo-encendidos	29
3. El efecto de la nueva restricción	37
3.1. Relaciones entre σ^+ y σ^+ <i>sólo-encendidos</i>	37
3.2. Relaciones entre σ y σ <i>sólo-encendidos</i>	59
Índice Alfabético	82

Capítulo 1

Introducción

1.1. Preliminares

La presente sección incluye los conceptos, definiciones y resultados tanto de Álgebra Lineal como de Teoría de Gráficas que sirven de base para el resto del trabajo. Además, se presentan algunas convenciones de notación que serán usadas en todo el texto. Antes de enunciar un resultado sin demostración aparece la referencia bibliográfica en la que puede encontrarse, aunque la mayoría son resultados clásicos y bien conocidos.

Los *conjuntos* se denotarán con letras mayúsculas, salvo que se indique lo contrario. Se usa la notación estándar para relaciones entre conjuntos, es decir, si A y B son conjuntos, $A \subseteq B$ quiere decir que A es subconjunto de B , incluyendo la posibilidad de que $A = B$; cuando se excluya ese caso diremos que A es un subconjunto propio de B y lo denotaremos $A \subset B$. Para decir que un objeto a es elemento de un conjunto A escribiremos $a \in A$. La negación de las proposiciones anteriores (no es subconjunto, no es subconjunto propio o no es elemento de) se denotan con los mismos símbolos cruzados por una diagonal, por ejemplo $a \notin A$ quiere decir que a no es elemento de A . Si A es un conjunto, denotaremos también a los subconjuntos con k elementos de A como $\binom{A}{k}$. Denotaremos la cardinalidad de un conjunto A por $|A|$.

Se usa \mathbb{N} para denotar al conjunto de los números naturales (en los que se incluye al cero) y \mathbb{Z} para denotar al conjunto de los números enteros. Se usa \mathbb{Z}_2 para denotar a los enteros módulo 2. Para denotar un vector se usan letras minúsculas y se escribe sobre ellas una flecha, de ese modo, \vec{x} denota al vector x . Se omitirá la flecha cuando no haya lugar a confusión.

Álgebra Lineal

Para estudiar el juego *Lights Out* se hará uso de varios resultados de Álgebra, especialmente de Álgebra Lineal. Primero daremos las definiciones de las principales estructuras algebraicas que se usan en el trabajo junto con algunos ejemplos de ellas.

Definición 1.1.1. Un conjunto G con una operación \cdot es un *monoide* si para cualesquiera $f, g, h \in G$ se cumple que:

- $f \cdot g \in G$
- $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$
- Existe un único elemento $e \in G$ tal que $\forall g \in G$ se cumple $f \cdot e = e \cdot f = f$

Un ejemplo sencillo de monoide es el siguiente: consideremos el conjunto $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ (los enteros positivos incluido el cero) con la suma definida del modo usual. Es fácil ver que se cumplen las tres condiciones de la definición anterior, donde el elemento e es el 0.

Otra estructura que usaremos es la de espacio vectorial, y para definirla adecuadamente necesitamos definir antes un campo.

Definición 1.1.2. Un *campo* es un conjunto F en el cual se definen dos operaciones $+$ y \times (llamadas suma y multiplicación) de modo que para cualquier par de elementos $a, b \in F$ existen únicos elementos $a + b \in F$ y $a \times b \in F$ tales que para cualesquiera $a, b, c \in F$ se cumplen las siguientes condiciones:

- $a + b = b + a$ y $a \times b = b \times a$
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- Existen dos elementos distintos 0 y 1 en F tales que $0 + a = a$ y $1 \times a = a$
- Para cada $a \in F$ y cada elemento $b \in F$ con $b \neq 0$ existen elementos $c, d \in F$ tales que $a + c = 0$ y $b \times d = 1$
- $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

El ejemplo clásico de campo es el de los números reales \mathbb{R} , pero otros ejemplos conocidos son los \mathbb{Z}_p , donde p es un número primo. En particular usaremos continuamente el campo \mathbb{Z}_2 .

Definición 1.1.3. Un *espacio vectorial* V sobre un campo F es un conjunto en el que están definidas dos operaciones (suma y multiplicación por elementos del campo) tal que para cualquier par de elementos $x, y \in V$ existe un único elemento $x + y \in V$, y para cada elemento $a \in F$ y cada $x \in V$ existe un único elemento $ax \in V$, de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- $\forall x, y \in V$ se cumple $x + y = y + x$
- $\forall x, y, z \in V$ se cumple $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Existe un elemento en V llamado 0 tal que $x + 0 = x$ para toda $x \in V$
- Para cada $x \in V$, existe un elemento $y \in V$ tal que $x + y = 0$
- Para cada $x \in V$ se cumple $1x = x$, donde $1 \in F$
- Para cada par $a, b \in F$ y cada $x \in V$ se cumple $abx = a(bx)$
- Para cada $a \in F$ y cada par de elementos $x, y \in V$ se cumple que $a(x + y) = ax + ay$
- Para cada par de elementos $a, b \in F$ y cada $x \in V$ se cumple que $(a + b)x = ax + bx$

A los elementos de V se les llama *vectores* y a los de F se les llama *escalares*.

Definiremos dos tipos de funciones que están ligadas al concepto de espacio vectorial.

Definición 1.1.4. Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo F . Una *función lineal* es una función $h : V \rightarrow W$ tal que para cualesquiera $x, y \in V$ y $\lambda \in F$, se cumplen:

- $h(x + y) = h(x) + h(y)$
- $h(\lambda x) = \lambda h(x)$

Definición 1.1.5. Sean A y B dos conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Decimos que f es invertible si existe una función $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$ se cumple que $f \circ f^{-1}(a) = a$ y $f^{-1} \circ f(b) = b$.

Definición 1.1.6. Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo F . Un *isomorfismo* es una función lineal $h : V \rightarrow W$ que es invertible.

Otra idea básica en el estudio de los espacios vectoriales es la idea de *independencia lineal*, que se puede definir a partir de la idea de *combinación lineal* de un conjunto de vectores.

Definición 1.1.7. Sea V un espacio vectorial y $S \subseteq V$. Decimos que $x \in V$ es *combinación lineal* de elementos de S si existe un número finito de elementos $y_1, y_2, \dots, y_k \in S \subseteq V$ y $a_1, a_2, \dots, a_k \in F$ tales que $x = \sum_{i=1}^k a_i y_i$. Se dice que x es una combinación lineal de $y_1, y_2, \dots, y_k \in S \subseteq V$.

Definición 1.1.8. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F y $S \subseteq V$. Definimos al *subespacio generado por S* como el conjunto

$$\langle S \rangle = \left\{ x \in V : x = \sum_{i=1}^k a_i y_i, \text{ con } a_i \in F \text{ y } y_i \in S, 1 \leq i \leq k, \text{ con } k \in \mathbb{N} \right\}$$

Definición 1.1.9. Sea $S \subseteq V$. Decimos que S es *linealmente dependiente* si existe un número finito de vectores distintos $y_1, y_2, \dots, y_k \in S$ y escalares $a_1, a_2, \dots, a_k \in F$ no todos iguales a 0 tales que $\sum_{i=1}^k a_i y_i = 0$. Si un conjunto no es linealmente dependiente se dice que es *linealmente independiente*.

Esto nos permite definir la dimensión de un espacio vectorial.

Definición 1.1.10. Decimos que un espacio vectorial V tiene *dimensión n* si el máximo conjunto de vectores de V que es linealmente dependiente tiene cardinalidad n .

Con esto podemos enunciar un importante resultado sobre los espacios vectoriales de dimensión finita, que los hace estructuras cómodas de trabajar. La demostración puede consultarse en [7].

Teorema 1.1.11. Sean V un espacio vectorial sobre un campo F , de dimensión finita igual a n . Entonces, V es isomorfo a \mathbb{F}^n .

Siguiendo con la idea del ejemplo anterior, si bien el ejemplo más usual de espacio vectorial es \mathbb{R}^n (las n -adas de números reales) sobre el campo \mathbb{R} , el espacio vectorial que usaremos usualmente será \mathbb{Z}_2^n sobre el campo \mathbb{Z}_2 . Cuando se habla de espacios vectoriales es usual hablar también de matrices, que serán de gran utilidad en el primer capítulo. A continuación definimos una matriz y varios conceptos asociados.

Definición 1.1.12. Una *matriz de $n \times m$* es un arreglo rectangular de n renglones y m columnas de elementos de un campo. Si A es una matriz, a la entrada correspondiente al i -ésimo renglón y la j -ésima columna se le denota por $a_{i,j}$ o por $(A)_{i,j}$ según convenga.

Definición 1.1.13. La *matriz identidad* de $n \times n$ se denota por I_n y es la matriz que tiene por entradas $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ y $a_{i,j} = 0$ en otro caso.

Definiremos ahora dos operaciones utilizando matrices.

Definición 1.1.14. Si A y B son matrices de $n \times m$, la suma de A con B se denota por $A + B$, es una matriz de $n \times m$ que tiene como entrada $(A + B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Definición 1.1.15. Si A y B son matrices de $n \times r$ y $r \times m$, el producto de A con B se denota por AB , es una matriz de $n \times m$ que tiene como entrada $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^r a_{i,k}b_{k,j}$.

Notemos que se puede pensar a los elementos de \mathbb{R}^n o \mathbb{Z}_2^n como matrices en la que $r = 1$ y $m = n$, con lo que tiene sentido hablar de multiplicar una matriz M por un vector v , producto que denotamos por Mv . De ese modo tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.1.16. Si A es una matriz de $n \times n$ y v, w son vectores de n entradas, se cumple que $A(v + w) = Av + Aw$

La demostración puede consultarse en [7].

Definición 1.1.17. Si A es una matriz de $n \times n$, diremos que es invertible si existe una matriz de $n \times n$ que denotamos por A^{-1} que cumple que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. A la matriz A^{-1} se le llama la inversa de A . A una matriz que es invertible se le llama también *no singular*, y si no, es llamada *singular*.

Definición 1.1.18. Si A es una matriz de $n \times m$, definimos a la *matriz transpuesta de A* como A^t la matriz de $m \times n$ tal que su entrada i, j es igual a la entrada j, i de la matriz A , es decir, $(A^t)_{i,j} = (A)_{j,i}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Las siguientes definiciones nos ayudan a ver parte de la relación que hay entre matrices y espacios vectoriales, pues en ellas consideraremos a las columnas y los renglones de las matrices como vectores.

Definición 1.1.19. Sea M una matriz y S un subconjunto de los vectores formados por las columnas de M , donde S es un conjunto de vectores linealmente independientes máximo por cardinalidad. Definimos el *rango* de M como $|S|$.

Definición 1.1.20. Sea M una matriz de $m \times n$. Cualquiera de las siguientes tres operaciones por renglones (columnas) de M se denomina *operación elemental* sobre los renglones (las columnas) de M :

- Intercambio de la posición de dos renglones (columnas) cualesquiera de M
- Multiplicación de cualquier renglón (columna) por una constante distinta de cero.
- Suma de cualquier múltiplo constante de un renglón (una columna) de M a otro renglón (otra columna) distinto.

La demostración de la siguiente proposición puede consultarse en [7].

Proposición 1.1.21. *Las operaciones elementales con renglones y columnas en una matriz conservan el rango.*

Finalmente definiremos dos tipos de funciones que se usan en el segundo capítulo.

Definición 1.1.22. Sean $(A, +)$ y $(B, *)$ monoides. Un *homomorfismo* es una función $h : A \rightarrow B$ tal que para cualesquiera $a, b \in A$, se cumple la siguiente igualdad:

$$h(a + b) = h(a) * h(b)$$

Definición 1.1.23. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo F . Una función $T : V \rightarrow V$ se llama *transformación afín* si existen M una matriz de $n \times n$ con entradas en F y $v \in V$ tales que para todo $x \in V$ se cumple

$$T(x) = Mx + v$$

Denotaremos a la transformación anterior como $T_{M,v}$.

Finalmente, demostraremos un resultado sencillo sobre transformaciones afines.

Proposición 1.1.24. Sea $V = \mathbb{Z}_2^n$ y consideremos al conjunto

$$\mathcal{T} = \{t : V \rightarrow V \mid t \text{ es transformación afín}\}.$$

Entonces (\mathcal{T}, \circ) , donde \circ es la composición de funciones, es un monoide.

Demostración. Probaremos las tres condiciones que aparecen en la definición de monoide. Sean $T_{A,w}$ y $T_{B,u}$ transformaciones afines y $x \in V$ un vector cualquiera.

- $T_{A,w} \circ T_{B,u}(x) = T_{A,w}(Bx + u) = A(Bx + u) + w = (AB)x + Au + w$ tomando $C = AB$ y $z = Au + w$ tenemos que la composición de $T_{A,w}$ y $T_{B,u}$ puede verse como $T_{C,z}(x)$, que es una transformación afín.
- La segunda condición está dada por el hecho de que la composición de funciones es asociativa.
- Tomando a la transformación $T_{I_n,0}$ como e tenemos la tercera propiedad.

■

Teoría de Gráficas

Una *gráfica* es una pareja ordenada (V, E) con V y E conjuntos ajenos tales que $E \subseteq \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$. Se denota con $G(V, E)$ a una gráfica, y con $V(G) = V$ y $E(G) = E$ a sus conjuntos de vértices y aristas respectivamente. Cuando no haya lugar a confusión se usarán G , V y E . A la arista $\{x, y\}$ se le denota

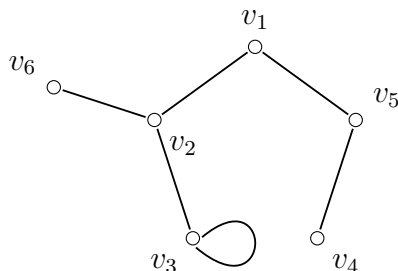


Figura 1.1: Una gráfica G , con $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ como conjunto de vértices y $E = \{\{v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_1\}, \{v_2, v_6\}\}$ como conjunto de aristas.

por comodidad como xy . A los elementos de E contenidos en $\binom{V}{1}$ se les llama *lazos*. Al lazo $\{x\}$ se le hace referencia como *lazo en x* .

En una gráfica $G(V, E)$, dos vértices v, u son *vecinos* o *adyacentes* si $vu \in E$. Decimos que una arista xy incide en un vértice z si $z = x$ o $z = y$. En la figura 1.1 los vértices v_1 y v_2 son vecinos, por lo que la arista v_1v_2 incide en v_1 (y en v_2). Si tenemos un subconjunto $A \subseteq V(G)$ tal que para cualesquiera $v, u \in A$ la arista $vu \notin E$, decimos que A es *independiente*, es decir, un conjunto de vértices es independiente si entre cualesquiera dos no hay arista. En la figura 1.1 el conjunto $\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ es independiente. Para cada $v \in V(G)$ definimos la *vecindad abierta* de v como el subconjunto $N_G(v) \subseteq V$ tal que el vértice $u \in N_G(v)$ si y sólo si $vu \in E \cap \binom{V}{2}$. Al conjunto $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ se le llama *vecindad cerrada*. En la gráfica G vemos que el conjunto $N_G(v_2) = \{v_1, v_3, v_6\}$ y el conjunto $N_G[v_2] = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$. El *grado* de un vértice $v \in V$ es un concepto importante y se define como $d(v) = |N_G(v)| + 2|\{\{v\}\} \cap E|$, es decir, es el número de aristas que inciden en él si contamos cada lazo como dos aristas. De ese modo $d(v_2) = 3$ y $d(v_3) = 3$.

Definiremos ahora algunas gráficas con una estructura especial que serán de utilidad en varios resultados. Una gráfica G es *completa* si el máximo conjunto independiente de vértices tiene cardinalidad 1, es decir, si para cualesquiera dos vértices distintos $v, u \in V$, la arista $vu \in E$. Decimos que G es *bipartita* si existen dos conjuntos $X, Y \subseteq V$ independientes tales que $X \cap Y = \emptyset$ y $X \cup Y = V$. Decimos que es *bipartita completa* si para cada $x \in X$ y para cada $y \in Y$ la arista $xy \in E$. En la Figura 1.2 vemos una

gráfica completa y una bipartita completa.

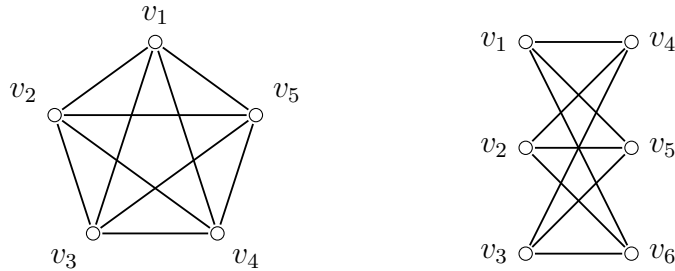


Figura 1.2: A la izquierda está la gráfica completa de 5 vértices, a la derecha una gráfica bipartita completa con 6 vértices

Una *trayectoria* es una sucesión $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ de vértices distintos tales que $v_i v_{i+1} \in E$ para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, al número n se le llama la *longitud* de la trayectoria. Se denota por $l(P)$ a la longitud de una trayectoria P . La *distancia* entre dos vértices u y v de una gráfica es el mínimo valor de $l(P)$, donde $P \in \{P : P \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\}$, si no existe alguna trayectoria que los una, la distancia se define como infinita. Una gráfica es *conexa* si para cualesquiera dos vértices hay una trayectoria (contenida en la gráfica) que los une, es decir, que para cualesquiera $u, w \in V$ existe una trayectoria $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ tal que $v_0 = u$ y $v_n = w$. Las gráficas de las figuras 1.1 y 1.2 son conexas, mientras que en la Figura 1.3 tenemos una gráfica inconexa.

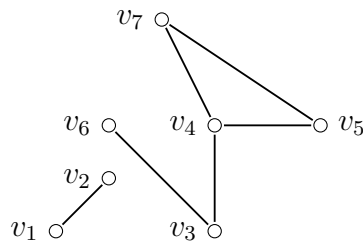


Figura 1.3: La gráfica es inconexa, pues no hay una trayectoria que una a los vértices v_1 y v_3 ,

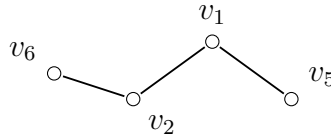
Las definiciones anteriores nos permiten enunciar y demostrar un primer

resultado que será de utilidad más adelante.

Proposición 1.1.25. *Si G es una gráfica conexa y no es completa, existen $x, y, z \in V$ tales que sus vecindades cerradas son distintas.*

Demostración. Como G no es completa, existen dos vértices $x, y \in V$ tales que $xy \notin E$, con lo que claramente $N_G[x] \neq N_G[y]$. Como la gráfica es conexa, existe una trayectoria $T = v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ de longitud mínima tal que $v_0 = x$ y $v_n = y$. Como la arista xy no está en la gráfica, T tiene al menos longitud 2, así que tomemos el vértice v_1 y llamémosle z . Como $x \in N_G[z]$, entonces $N_G[y] \neq N_G[z]$. Como la trayectoria es de longitud mínima, sabemos que el vértice v_2 (que puede ser igual a y) no es vecino de x , de ese modo tenemos que $N_G[x] \neq N_G[z]$, probando el resultado. ■

Otra gráfica que será útil es la llamada *gráfica inducida por A* , en la que $A \subseteq V$. Ésta es la gráfica $G[A]$ tal que su conjunto de vértices es A y su conjunto de aristas es $F \subseteq E$ donde $uv \in F$ si y sólo si $u \in A$ y $v \in A$. Considerando la gráfica de la Figura 1.1, la gráfica inducida por $A = \{v_6, v_2, v_5, v_1\}$ es la siguiente:



Una extensión natural del concepto de gráfica consiste en asignar a las aristas una “dirección”, de modo que en lugar de aristas consideremos flechas, teniendo así una gráfica dirigida o *digráfica*, que formalmente podemos definir como una pareja ordenada (V, A) con V y A conjuntos ajenos tales que $E \subseteq V \times V$. Se denota con $D(V, A)$ a una digráfica y con $V(D)$ y $A(D)$ a sus conjuntos de vértices y *flechas* respectivamente. Cuando no haya lugar a confusión se usarán D, V y A . A la flecha (x, y) se le denota por comodidad como xy . Si $x = y$ se le llama también *lazo*.

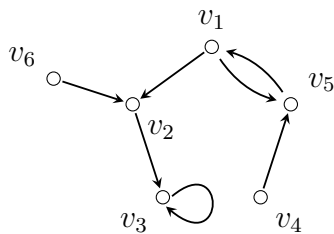


Figura 1.4: Una digráfica G , con $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ como conjunto de vértices y $E = \{(v_3, v_3), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_1, v_5), (v_5, v_1), (v_6, v_2)\}$ como conjunto de flechas.

Para extender el concepto de vecino que tenemos para gráficas debemos considerar la dirección de la flecha que une dos vértices. Para cada $v \in V(D)$ definimos la *exvecindad* (*invecindad*) de v como el subconjunto $N_D^+(v) \subseteq V$ ($N_D^-(v) \subseteq V$) tal que para cada $u \in V$, se tiene que $u \in N_D^+(v)$ ($u \in N_D^-(v)$) si y sólo si $vu \in A$ ($uv \in A$). De igual modo, definimos el *exgrado* (*ingrado*) de un vértice $v \in V$ en una digráfica D como $d^+(v) = |N_D^+(v)|$ ($d^-(v) = |N_D^-(v)|$), es decir, es el número de flechas que salen del vértice (entran al vértice). Si tenemos una flecha uv en la digráfica, decimos que es *simétrica* si la flecha vu también está en la digráfica. Así consideraremos la *parte asimétrica* de una digráfica D , denotada por $Asim(D)$, como la digráfica que tiene como conjunto de vértices a V y su conjunto de flechas es $B \subseteq A$, donde $xy \in B$ si y sólo si $xy \in A$ y $yx \notin A$, es decir, que tiene a las flechas de A que no son simétricas (las flechas asimétricas).

De manera análoga al caso de las gráficas, se define la *digráfica inducida* por $B \subseteq V$ como la digráfica $G[B]$ tal que su conjunto de vértices es B y su conjunto de flechas es $F \subseteq A$ donde $uv \in F$ si y sólo si $u \in B$ y $v \in B$.

Siempre es posible construir una gráfica a partir de una digráfica D al cambiar cada flecha de la digráfica por una arista, de modo que la flecha (u, v) se cambia por la arista $\{u, v\}$. A la gráfica obtenida de ese modo se le llama *gráfica subyacente* de D . Por otro lado, si tenemos una gráfica $G(V, E)$, una *biorientación* de G es una digráfica $D(V, A)$ tal que, si la arista $uv \in E$ entonces la flecha uv , la flecha vu o ambas están en A .



Figura 1.5: La parte asimétrica de la gráfica de la figura 1.4 y su gráfica subyacente.

Hay un concepto que relaciona el Álgebra Lineal con la Teoría de Gráficas: la *matriz de adyacencia* de una gráfica o digráfica. Es una matriz de $|V| \times |V|$ que tiene en la entrada i, j el número 1 si la arista (flecha) $v_i v_j$ está en la gráfica (digráfica) y 0 en otro caso. Las siguientes son las matrices de adyacencia de la digráfica y la gráfica de la figura 1.5, llamadas M_1 y M_2 respectivamente. Es importante notar que, debido a que en las gráficas se usan aristas y no flechas, la matriz de adyacencia de una gráfica siempre es simétrica, mientras que la matriz de adyacencia de una digráfica es simétrica solamente cuando todas las flechas de la digráfica son simétricas. Una gráfica es *no singular* si su matriz de adyacencia es no singular.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Más información sobre gráficas puede encontrarse en [5] y en [6], mientras que para digráficas puede revisarse [4].

1.2. *Lights Out*: Solución con Álgebra Lineal

El juego *Lights Out* (luces apagadas) es un juego electrónico que fue lanzado al mercado a mediados de los años noventa por la empresa *Tiger*

Electronics. Consiste en un tablero de 5×5 en donde en cada casilla hay un botón y una lámpara, que puede estar encendida o apagada al inicio del juego. Un *movimiento* consiste en presionar uno de los botones, provocando que el botón presionado y las lámparas adyacentes (arriba, abajo y a cada lado, salvo que no tenga alguna de ellas) cambien su estado, es decir, si estaban apagadas se encienden y viceversa. El objetivo del juego es que una vez dada una configuración inicial de luces, se presionen en secuencia botones de modo que se logre apagar todas las luces del tablero.

Lo primero que haremos es determinar cuándo es posible ganar en el juego dada una configuración inicial y cómo encontrar la secuencia de botones correspondiente. Una vez hecho eso, se revisarán algunas generalizaciones del juego en gráficas y se harán observaciones acerca de qué condiciones deben cumplirse para que sea posible encontrar una secuencia de botones ganadora en dichas generalizaciones del juego, así como algunas relaciones entre ellas. Es interesante ver que en el tablero clásico de *Lights Out* es posible determinar la solubilidad de un juego, así como encontrar una secuencia ganadora, usando únicamente álgebra lineal. Para hacerlo hay que usar algunos resultados sobre el algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan y sobre el espacio nulo de una matriz. Antes de empezar, es conveniente hacer algunas observaciones:

1. Presionar un mismo botón dos veces equivale a no haberlo presionado nunca, por lo que si hay una solución, ésta no necesita presionar más de una vez cada botón.
2. El estado de una lámpara no depende del orden en el que son presionados los botones del tablero, sino que depende únicamente del número de veces que se presionaron los botones correspondientes a la lámpara y sus vecinas. Esto quiere decir que el orden en el que se presionan los botones en una sucesión no es importante.

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5

Figura 1.6: El tablero de *Lights Out*

En lo sucesivo denotaremos el estado de una lámpara con 1 si está encendida y con 0 si está apagada. Diremos que dos botones del tablero son vecinos si comparten un lado, es decir, los vecinos de un botón son los botones que se encuentran a su derecha, izquierda, arriba y abajo respectivamente (si un botón no tiene vecino en una o dos direcciones es porque ese botón está en una orilla o esquina del tablero). Además, para hacer referencia al estado del vértice de la i -ésima fila y la j -ésima columna usaremos $b_{i,j}$ (ver la Figura 1.6), y usaremos al vector columna \vec{b} para hacer referencia a un vector de 25×1 cuyas entradas son:

$$\vec{b} = (b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{1,5}, b_{2,1}, \dots, b_{5,4}, b_{5,5})^t$$

Como \vec{b} indica el estado de todas las luces en el tablero, le llamaremos *vector de configuración* del tablero o simplemente *configuración*. Si tomamos las operaciones en \mathbb{Z}_2 , la acción de presionar un botón en el tablero puede verse como sumarle a \vec{b} un vector \vec{x} de 25×1 que tenga 1 en las entradas correspondientes al botón presionado y sus vecinos, y 0 en las demás entradas. Como se consideran las operaciones en \mathbb{Z}_2 , el vector $\vec{x} + \vec{b}$ sigue teniendo entradas en \mathbb{Z}_2 , y las entradas que corresponden al botón presionado y sus vecinos cambiaron de estado (es decir, de 1 a 0 o bien de 0 a 1, según su estado inicial) mientras que las demás entradas quedaron igual.

Ya hemos dicho que si la configuración del tablero tiene solución, entonces no es necesario presionar botón alguno más de una vez, además de que el orden en el que se presionen los botones es irrelevante. A una sucesión de botones se le llama *estrategia* y puede representarse como un vector columna \vec{y} de 25×1 , donde la entrada i,j (numerando las entradas de \vec{y} como las de \vec{b}) es 1 si hay que presionar el botón i,j y es 0 en otro caso. Diremos que una configuración \vec{b} es *soluble* (se puede ganar) si existe una estrategia \vec{y} tal que, al aplicar la estrategia \vec{y} en el tablero con configuración \vec{b} , se gana el juego, es decir, todas las luces quedan apagadas. Del mismo modo, si \vec{y} es una estrategia con la que se gana desde una configuración \vec{b} , diremos que \vec{y} es una estrategia ganadora para \vec{b} .

Supongamos que empezamos con el tablero de juego completamente apagado (al que corresponde la configuración del vector cuyas entradas son todas iguales a 0) y que tenemos una estrategia \vec{y} . El vector \vec{y} nos define, por ser una estrategia, un conjunto de botones a presionar en el tablero. Cada que presionemos un botón cambiará la configuración del tablero. Dicho cambio corresponde a sumar un vector a la configuración del tablero que depende

de la posición del botón (si está en una esquina, sobre los lados del tablero y no es una esquina, o si es algún otro botón), pues de su posición depende el número de vecinos que tenga. Un ejemplo de las sumas para un vector de cada tipo es el siguiente:

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= x_{1,1} + x_{1,2} + x_{2,1} \\ b_{2,1} &= x_{2,1} + x_{1,1} + x_{2,2} + x_{3,1} \\ b_{2,2} &= x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,1} + x_{1,2} + x_{3,2} \end{aligned}$$

donde el vector $x_{i,j}$ es un vector que tiene todas las entradas iguales a 0 salvo la entrada i, j , que es igual a 1, y el vector $b_{i,j}$ es el que corresponde al botón i, j .

En general, notemos que $A\vec{x} = \vec{b}$, donde la matriz A es una matriz de 25×25 de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} B & I & O & O & O \\ I & B & I & O & O \\ O & I & B & I & O \\ O & O & I & B & I \\ O & O & O & I & B \end{pmatrix}$$

en donde I es la identidad de 5×5 , O es la matriz de ceros de 5×5 y B es una matriz de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que al multiplicar esa matriz A por un vector \vec{y} , lo que ocurre es que la entrada i, j de \vec{b} corresponde a la suma (en \mathbb{Z}_2) de una cantidad de unos que coincide con el número vecinos que se presionan en la estrategia \vec{y} del botón ij , por lo que el resultado de esa suma indicará el estado del botón i, j .

Por ejemplo, si multiplicamos A por el vector que tiene 1 en la primera entrada (lo que corresponde a presionar la casilla $(1, 1)$) y 0 en las demás, obtenemos el vector

$$z = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Al sumar ese vector a un vector de ceros (correspondiente a tener todos los vértices apagados) obtenemos de nuevo z . Los unos de ese vector indican que las casillas que quedan encendidas son $(1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 1)$, lo que corresponde al efecto de presionar el botón correspondiente a la casilla $(1, 1)$.

La observación con la que cobra sentido la definición de la matriz A y lo dicho acerca de la solubilidad de una configuración \vec{b} , es la siguiente: si tenemos el tablero apagado y se presionan los botones del tablero siguiendo una estrategia \vec{y} , llegamos a una configuración \vec{b} en el tablero. Si ahora presionamos los mismos botones que indica \vec{y} , el tablero regresa a su posición original. Es decir, si conocemos los botones con los que se llega a una configuración \vec{b} desde el tablero apagado, presionar esos mismos botones llevará la configuración \vec{b} al tablero apagado, por lo que esa configuración \vec{b} tendría como estrategia ganadora a \vec{y} . Esto es muy fácil de pensar si imaginamos que, desde un tablero apagado, empezamos a presionar botones hasta llegar a una configuración \vec{b} y grabamos el proceso con una cámara. Al ver el video en reversa encontraremos una estrategia para ganar desde la configuración \vec{b} .

Entonces, para encontrar una estrategia que apague todas las luces de una configuración \vec{b} , basta con encontrar un vector \vec{y} que sea solución de $A\vec{x} = \vec{b}$. Podemos decir que una configuración \vec{b} es soluble si y solamente si pertenece a $\mathbf{R}(A)$, el rango de la matriz A . Eso gracias a que si la configuración es soluble, entonces tiene al menos una estrategia ganadora y, como notamos antes, la entrada i, j del producto $A\vec{y}$ es la suma del número de veces que presionamos al botón i, j o a uno de sus vecinos desde un tablero apagado para llegar a \vec{b} , así que el vector \vec{b} es una combinación lineal de las columnas de A , por lo que $\vec{b} \in \mathbf{R}(A)$. Recíprocamente, si $\vec{b} \in \mathbf{R}(A)$ entonces existe un vector \vec{y} tal que $A\vec{y} = \vec{b}$, por lo que al empezar desde un tablero apagado y aplicar la estrategia asociada a \vec{y} , llegamos a una configuración $\vec{c} = A\vec{y}$, y dado el producto de una matriz por un vector es una función, tenemos que $\vec{b} = \vec{c}$.

Sin embargo, hay que notar que la matriz A es una matriz singular, por lo que no podemos garantizar la existencia de una estrategia ganadora para cualquier \vec{b} . Como lo que nos interesa es que $\vec{b} \in \mathbf{R}(A)$, podemos analizar fácilmente al $\mathbf{R}(A)$ si transformamos la matriz A en una matriz E que sea escalonada. Sabemos que por ser A una matriz, existe una matriz M tal que $MA = E$, donde E es una matriz escalonada y M es la matriz que resulta del producto de las matrices de operaciones elementales usadas para llevar A en E . Es importante recordar que las matrices elementales son invertibles,

por lo que M es invertible, así que $R(A) = R(E)$. Ya en su forma escalonada se puede ver fácilmente que E tiene rango 23, es decir, hay dos variables dependientes $x_{5,4}$ y $x_{5,5}$ en las dos últimas columnas, que son:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)^t \\ \vec{v}_2 &= (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)^t\end{aligned}$$

Además, sabemos que el complemento ortogonal del núcleo de A es $R(A)$ por ser A una matriz simétrica, y como M es no singular, el núcleo de E es el mismo que el de A , por lo que para poder describir a $R(A)$, basta con encontrar una base para el núcleo de E . Encontrar dicha base se simplifica al ser E una matriz en su forma escalonada, pues si nos fijamos en las últimas dos columnas de E , y definimos:

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= (0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0)^t \\ \vec{n}_2 &= (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)^t\end{aligned}$$

Esos dos vectores forman una base para el núcleo de E , así que podemos llegar al siguiente resultado:

Teorema 1.2.1. *Una configuración \vec{b} es soluble si y sólo si \vec{b} es ortogonal a \vec{n}_1 y \vec{n}_2 .*

Demostración. Supongamos primero que \vec{b} es soluble, entonces sabemos que existe una estrategia \vec{y} tal que $A\vec{y} = \vec{b}$, por lo que $\vec{b} \in R(A)$ y por lo tanto $\vec{b} \in R(E)$. Sabemos además que el núcleo de E es el complemento ortogonal de $R(E)$, así que \vec{b} puede expresarse como combinación lineal de las primeras 23 columnas de E , por lo que si E_i denota la i -ésima columna de E , entonces $\vec{b} = \sum_{i=1}^{23} c_i E_i$ donde $c_i \in \mathbb{Z}_2$ y $\vec{b} \cdot (\alpha \vec{n}_1 + \beta \vec{n}_2) = 0$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$, es decir \vec{b} es ortogonal a \vec{n}_1 y \vec{n}_2 .

Si ahora tomamos que \vec{b} es ortogonal a \vec{n}_1 y \vec{n}_2 , entonces \vec{b} es un elemento del complemento ortogonal del subespacio generado por \vec{n}_1 y \vec{n}_2 y entonces \vec{b} es soluble. ■

Con esto se vuelve fácil verificar si una configuración \vec{b} es soluble, pues se reduce a verificar el producto interior de la configuración \vec{b} con los vectores \vec{n}_1 y \vec{n}_2 . Además podemos notar que las configuraciones solubles son aquellas que, cuando son vistas como combinación lineal de los vectores columna de E , no tienen en la suma a los vectores \vec{n}_1 y \vec{n}_2 . Tomando esto en cuenta, y

recordando que el campo sobre el que estamos trabajando es \mathbb{Z}_2 , podemos ver que dada una configuración inicial arbitraria \vec{f} , la probabilidad de que sea soluble es de $\frac{1}{4}$.

Corolario 1.2.2. *La probabilidad de que una configuración inicial \vec{f} sea soluble es de $\frac{1}{4}$.*

Demostración. Como el campo sobre el que estamos trabajando es \mathbb{Z}_2 y una configuración \vec{f} tiene 25 entradas, entonces hay 2^{25} configuraciones posibles del tablero. Por 1.2.1 sabemos que las configuraciones solubles son aquellas que se pueden ver como combinación lineal de las primeras 23 columnas de E . Puesto que para cualquier combinación lineal de esos 23 vectores tenemos únicamente dos escalares que asignar a cada vector, el 1 y el 0, podemos ver cada combinación lineal como una suma de algunos de esos 23 vectores, donde cada uno está o no está en la suma (es decir, aparece con coeficiente 1 ó 0). De esta forma, tenemos 2^{23} configuraciones solubles entre 2^{25} configuraciones posibles, es decir, que la probabilidad de que \vec{f} sea soluble es $\frac{2^{23}}{2^{25}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. ■

Además, podemos decir otra cosa de las configuraciones solubles, y es que su solución no es única, hay de hecho cuatro soluciones para cada configuración soluble, y se encuentran sumando los vectores de la base del núcleo de E a una estrategia ganadora conocida.

Lema 1.2.3. *Si \vec{b} es soluble y \vec{x} es una estrategia ganadora para \vec{b} , entonces $\vec{x} + \vec{n}_1$, $\vec{x} + \vec{n}_2$, $\vec{x} + \vec{n}_1 + \vec{n}_2$ son las estrategias ganadoras para \vec{b} .*

Demostración. Dado que \vec{x} es estrategia ganadora para \vec{b} , entonces cumple que $A\vec{x} = \vec{b}$. Veamos que $\vec{x} + \vec{n}_1 + \vec{n}_2$ es estrategia ganadora, y las demás son análogas. Como A es lineal se cumple que:

$$A(\vec{x} + \vec{n}_1 + \vec{n}_2) = A\vec{x} + A\vec{n}_1 + A\vec{n}_2.$$

Y como sabemos que \vec{n}_1 y \vec{n}_2 están en el núcleo de A , entonces $A\vec{n}_1 = 0$ y $A\vec{n}_2 = 0$, por lo que tenemos que

$$A(\vec{x} + \vec{n}_1 + \vec{n}_2) = A(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Para ver que no tenemos otra estrategia ganadora además de las cuatro que hemos encontrado hay que hacer algunas observaciones con respecto a

\vec{x} . Como \vec{x} cumple que $A\vec{x} = \vec{b}$, podemos pedir que \vec{x} tenga sus últimas dos entradas iguales a 0, con lo que su expresión como combinación lineal de los primeros 23 vectores de E es única, por lo que si tuviéramos otra estrategia ganadora \vec{y} , si tiene las últimas dos entradas iguales a cero, será la misma estrategia que \vec{x} , y si no, podemos sumarle alguna combinación lineal de \vec{n}_1 y \vec{n}_2 de modo que las últimas dos entradas sean 0 y llegar a \vec{x} . ■

A pesar de que ya sabemos varias cosas sobre la solubilidad de una configuración dada y su solución, pareciera que no tenemos un modo de encontrar la estrategia ganadora para ella. Sin embargo, por el Teorema 1.2.1 y el Lema 1.2.3 sabemos que si \vec{b} es soluble, podemos pedir que \vec{x} tenga en sus últimas dos entradas iguales a cero, así que tenemos que $E\vec{x} = \vec{x}$, lo que nos lleva al siguiente corolario que nos da explícitamente una estrategia ganadora para una configuración soluble \vec{b} .

Teorema 1.2.4. *Si \vec{b} es soluble con estrategia ganadora \vec{x} , entonces $M\vec{b}$, $M\vec{b} + \vec{n}_1$, $M\vec{b} + \vec{n}_2$ y $M\vec{b} + \vec{n}_1 + \vec{n}_2$ son las estrategias ganadoras de \vec{b} .*

Demostración. Veamos que podemos pedir siempre que una estrategia ganadora cumpla $E\vec{x} = \vec{x}$. Como la matriz E está en su forma escalonada de Gauss-Jordan, entonces es una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} I & S \\ O_1 & O_2 \end{pmatrix}$$

en la que para el caso que estamos estudiando, I es la identidad de 23×23 , S es la matriz de 23×2 que corresponde a los vectores columna v_1 y v_2 , y O_1 y O_2 son matrices de ceros de 2×23 y 2×2 respectivamente. Entonces solamente necesitamos que las últimas dos entradas de \vec{x} sean 0 para que tengamos que $E\vec{x} = \vec{x}$. Esa estrategia \vec{x} existe pues, por ser \vec{b} soluble con estrategia ganadora \vec{x} , si \vec{x} no tiene sus dos últimas entradas iguales a cero, sumamos n_1 o n_2 o ambos para hacer esas entradas iguales a cero. Así, con \vec{x} que cumpla que $E\vec{x} = \vec{x}$, tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\vec{x} = E\vec{x} = MA\vec{x} = M(A\vec{x}) = M\vec{b}$$

Teniendo ya que $M\vec{b}$ es una estrategia ganadora para \vec{b} , por 1.2.3 tenemos el resultado. ■

Con esto hemos terminado el análisis del juego *Lights Out* en su forma original, pues ya podemos determinar la solubilidad de una configuración inicial, y encontrar explícitamente las estrategias ganadoras para ella. Es posible generalizar de varias maneras el juego, por ejemplo, puede aplicarse el mismo razonamiento aquí dado para un juego con las mismas reglas en un tablero de $n \times n$ simplemente construyendo una matriz A_n de $n^2 \times n^2$ de manera análoga a la construcción de A para el caso de 5×5 , y analizando su rango. Otra generalización natural es considerar que el tablero está en un toro, es decir, cuando se presiona una casilla en una "orilla" del tablero (por ejemplo, en la parte superior), se cambia el estado de las luces que son adyacentes en el mismo sentido que para el tablero usual, pero también se cambia el estado de la casilla que está en la parte inferior del tablero que corresponde a la misma columna de la que presionamos (o en la fila correspondiente si tomamos una casilla en uno de los lados del tablero).

Por ejemplo, para el caso de un tablero de 5×5 sobre un toro, la matriz A_T tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} B' & I & O & O & I \\ I & B' & I & O & O \\ O & I & B' & I & O \\ O & O & I & B' & I \\ I & O & O & I & B' \end{pmatrix}$$

Donde I es la identidad de 5×5 , O es la matriz de ceros de 5×5 y B' es la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En ella, los renglones que corresponden a botones que no están en las orillas del tablero son iguales a la matriz A del problema original, y los botones que están en las orillas tienen unas pequeñas modificaciones que corresponden al hecho de que sobre el toro tienen nuevos vecinos. Del mismo modo que se hizo antes, veamos cuáles son con algunas de las entradas del vector \vec{b} al aplicar una estrategia \vec{x} :

$$b_{1,1} = x_{1,1} + x_{1,2} + x_{2,1} + x_{5,1} + x_{1,5}$$

$$b_{2,1} = x_{2,1} + x_{1,1} + x_{2,2} + x_{3,1} + x_{2,5}$$

$$b_{2,2} = x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,1} + x_{1,2} + x_{3,2}$$

Al encontrar la forma escalonada de la matriz A_T se puede verificar que la dimensión del núcleo es 8, y que las columnas linealmente dependientes son las que corresponden a los botones $b_{5,2}, b_{5,3}, b_{5,4}, b_{5,5}, b_{4,2}, b_{4,3}, b_{4,4}$ y $b_{4,5}$, los vectores que forman las columnas correspondientes son los siguientes, donde $n_{i,j}$ corresponde al vector columna del botón $b_{i,j}$ en la matriz E_T , que es la forma escalonada de A_T :

$$\vec{n}_{5,5} = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t$$

$$\vec{n}_{5,4} = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t$$

$$\vec{n}_{5,3} = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t$$

$$\vec{n}_{5,2} = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t$$

$$\vec{n}_{4,5} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t$$

$$\vec{n}_{4,4} = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t$$

$$\vec{n}_{4,3} = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t$$

$$\vec{n}_{4,2} = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t$$

De manera análoga al caso plano, se siguen los siguientes resultados para el toro:

1. Si \vec{x} es una estrategia ganadora para la configuración inicial \vec{b}_T , entonces $\vec{x} + \sum_{i,j} c_{i,j} n_{i,j}$ con $i \in \{4, 5\}$ y $j \in \{2, 3, 4, 5\}$ y $c_{i,j} \in \mathbb{Z}_2$ también es una estrategia ganadora.
2. Si $M_T A_T = E_T$, con M_T la matriz que resulta del producto de las matrices de las operaciones elementales usadas para pasar a A_T a su forma escalonada E_T , y \vec{b} es el vector de configuración inicial del juego, entonces se cumple que el vector $\vec{x} = M_T \vec{b}$ es una estrategia ganadora para \vec{b} .
3. La probabilidad de que una configuración inicial del tablero en el toro sea soluble es de $\frac{1}{256}$.

Capítulo 2

Lights Out

2.1. Solución con Teoría de Gráficas

Para estudiar el problema anterior de apagar las luces en un tablero era suficiente (y de hecho práctico) usar únicamente álgebra lineal, ya que permitía bastante generalidad en cuanto a las configuraciones del tablero y para aplicar los mismos razonamientos al juego sobre el toro o la banda de Möbius basta hacer algunas modificaciones del tamaño de la matriz A o cambiar algunas entradas, aunque el hecho de estar jugando sobre un “tablero” hace que las modificaciones sean bastante simétricas y fáciles de hacer. Sin embargo, si extendemos el juego *Lights Out* a una gráfica algo más complicada que la que se puede asociar a un tablero como el que se revisó, es posible encontrar resultados usando herramientas de Teoría de Gráficas.

El problema puede entenderse como sigue: un conserje entra a trabajar en un museo, y una de sus tareas es que por la mañana antes de abrir, tiene que encender las luces de todas las salas, cada una de las cuales tiene un interruptor propio. El problema no sería tan interesante si las conexiones eléctricas funcionaran a la perfección, pero en este museo en particular no es el caso. Resulta que cada vez que el conserje mueve un interruptor no solamente cambia el estado de la sala en la que se encuentra (es decir, se enciende o apaga la luz) sino que las salas adyacentes también lo hacen. La pregunta interesante en este caso es si logrará el conserje encender todas las luces del museo.

El problema puede modelarse como una digráfica del siguiente modo: a cada sala del museo (junto con su interruptor) se le asigna un vértice, y se

pone una uv -flecha si al presionar el vértice u se cambia el estado del vértice v . Si resulta, como es el caso del problema del museo que planteamos originalmente, que al presionar un vértice cambia el estado de todos los vértices adyacentes, como para las habitaciones de un edificio ser adyacente es una relación de equivalencia, basta con poner en la digráfica las flechas simétricas. Además a cada vértice le asignamos un lazo para que, al accionar el interruptor de un cuarto, también cambie el estado de la luz en ese cuarto. Tomando el modelo como se ha descrito, y tomando como estado inicial de la digráfica el que todas las luces estén apagadas, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.1.1. *Si D es una digráfica sobre un conjunto de vértices V , con $d^+(v) > 0$ para cada $v \in V$ y tal que para cada subconjunto de cardinalidad impar $U \subseteq V$ hay un vértice con exgrado impar en $D[U]$, entonces es posible encender todas las luces de D .*

Demostración. Se procede por inducción sobre la cardinalidad de V . Por comodidad, nos referiremos a un conjunto de cardinalidad impar simplemente como un conjunto impar. Es claro que si V tiene solamente un vértice u , se cumple el resultado, pues el único subconjunto impar que podemos tomar es justamente u , que para tener exgrado impar debe de tener un lazo, y si presionamos u , se encienden todas las luces de D . Supongamos entonces que el resultado es válido para una digráfica con n vértices, y sea D con $n + 1$ vértices. Si tomamos un vértice cualquiera u y tomamos a $D' = D[V - \{u\}]$, notemos que D' cumple las hipótesis del teorema, pues todo subconjunto impar de D' es a su vez un subconjunto impar de D , por lo que por hipótesis de inducción es posible encender todas las luces de D' . A la secuencia de vértices que hay que presionar en D' para encender las luces la llamaremos una n -estrategia respecto a u . Si al aplicar esa n -estrategia en D el vértice u puede encenderse (en cuyo caso hemos terminado, pues se pueden encender todas las luces de D) o permanecer apagado. Si para cualquier vértice u que removemos de D , al aplicar la n -estrategia respecto a u , éste queda siempre sin encenderse, hay que analizar los dos casos siguientes:

1. Si $n + 1$ es par, entonces aplicamos todas las n -secuencias sobre D , como tenemos una n -estrategia por cada vértice de D (tenemos exactamente $n + 1$ distintas n -estrategias) entonces cada vértice cambia de estado n veces, pues cambia de estado una vez por cada n -estrategia encontrada sobre una subdigráfica inducida de n vértices que contiene a ese vértice.

Como todos los vértices están inicialmente apagados, y n es impar, entonces todos los vértices se encienden.

2. Si $n + 1$ es impar y como D es inducida de si misma, por hipótesis tenemos un vértice u de exgrado impar. Accionemos el interruptor de u , y llamemos U al conjunto de vértices de D que se encienden. Como U tiene cardinalidad impar, entonces $V - U$ tiene un número k par de vértices. Apliquemos ahora todas las n -estrategias asociadas a los vértices de $V - U$ (es decir si $v \in V - U$, se aplican las n -estrategias que se encuentran al analizar la digráfica $D[V - \{v\}]$). Al hacer esto, hemos logrado encender todos los vértices de $V - U$, pues cada n -estrategia enciende todos los vértices de $V - U$ a excepción de un vértice, por lo que al aplicar las n -estrategias respecto a los k vértices de $V - U$, cada vértice cambia su estado un número impar de veces, y como originalmente los vértices de $V - U$ estaban apagados, al finalizar ese proceso quedan todos encendidos. Por otro lado, los vértices de U estaban encendidos, pero como se aplican un número par de n -estrategias que cambian el estado de los vértices de U , entonces esos vértices terminan encendidos pues al inicio del proceso ya lo estaban.

■

Además, podemos probar que el Teorema 2.1.1 vale para una digráfica D con algunas flechas simétricas y algunas que van solamente en un sentido si la gráfica subyacente de $Asim(D)$ es una gráfica bipartita completa.

Corolario 2.1.2. *Si D es una digráfica, con V su conjunto de vértices y A su conjunto de flechas, tiene un lazo en cada vértice y la gráfica subyacente de $Asim(D)$ es una bipartita completa, entonces es posible encender todas las luces.*

Demostración. Es claro que una gráfica bipartita completa sobre un conjunto impar de vértices tiene un número par de aristas, pues uno de los dos elementos de la partición debe tener un número par de vértices. Entonces, si tomamos a $U \subseteq V(D)$ con un número impar de vértices, entonces $D[U]$ tiene un número impar de flechas, puesto que:

- El conjunto U tiene un número impar de vértices, así que tiene un número impar de lazos.

- Las flechas simétricas valen cada una por dos flechas, por lo que esas aportan un número par al total de flechas de $D[U]$
- Las flechas asimétricas son un número par, puesto que si tenemos una gráfica bipartita completa sobre un conjunto impar de vértices U , si X y Y son las clases de la partición, una de las dos partes de la gráfica tiene un número impar de vértices. Sin pérdida de generalidad, supongamos que es X , por lo que cada vértice $x \in X$ tiene un número par de vecinos (los vértices en Y), como hay $|X||Y|$ aristas, entonces en $D'[U]$, donde $D'[U] = \text{Asim}(D)$ hay un número par de aristas, que corresponden a un número par de flechas en D .

Entonces tenemos un número impar de flechas en $D[U]$, así que la suma de los exgrados de sus vértices es impar, con lo que tenemos al menos un vértice de exgrado impar, por lo que por el Teorema 2.1.1 tenemos que en D se pueden encender las luces. ■

Un problema interesante que se resuelve con el Corolario 2.1.2 es el siguiente. Modifiquemos un poco el museo del problema inicial: supongamos que las luces funcionan igual que antes pero algunas de las salas de exhibición fueron modificadas para que sean oficinas y además agregamos un nuevo cuarto especial llamado “el corredor”, que tiene la propiedad de que su botón cambia el estado de todas las salas que siguen siendo de exhibición, mientras que los botones de las oficinas cambian el estado de la luz del corredor. En la digráfica asociada al problema, la digráfica inducida por las aristas asimétricas tiene como gráfica subyacente a $K_{1,|V|-1}$ que es una gráfica bipartita completa, por lo que las luces también pueden encenderse.

Toda esta discusión sobre la posibilidad de encender las luces en una digráfica se ha hecho sobre digráficas cuyas subdigráficas cumplen ciertas propiedades, como tener lazos en los vértices o que apareciera cierta estructura en la parte asimétrica. Sin embargo puede que el sistema eléctrico del museo esté en un estado tal que no cumpla ni siquiera con tales requerimientos. ¿Qué pasaría si lo único que sabemos del sistema eléctrico del museo es que para cada lámpara hay algún botón que la enciende? Quizá el poder encender todas las luces sea demasiado, pero es fácil de verificar que bajo tales condiciones siempre es posible encender más de la mitad de las lámparas. Si tenemos $|V|$ lámparas y pensamos que cada botón es presionado de manera

arbitraria e independiente de los demás botones, cada botón se acciona con probabilidad de $\frac{1}{2}$, por lo que el promedio del número de lámparas que se encenderá es de $\frac{|V|}{2}$. Como sabemos que hay una configuración tal que el número de luces encendidas es estrictamente menor que $\frac{|V|}{2}$ (la configuración cuando todas las lámparas están apagadas, resultado de no presionar ningún botón), entonces podemos asegurar que al menos hay una configuración posible en la que hay más de $\frac{|V|}{2}$ luces encendidas.

2.2. Juegos Dirigidos vs. Juegos No Dirigidos

A primera vista puede parecer que los juegos dirigidos (es decir, aquellos que modelamos usando digráficas) son más generales que los juegos no dirigidos. Sin embargo resulta que, de cierto modo, los juegos son equivalentes, pues para toda digráfica podemos encontrar una gráfica sobre los mismos vértices tal que es posible encender los mismos conjuntos de lámparas que en la digráfica. Es interesante ver también que el número máximo de lámparas que pueden encenderse está relacionado con el número de lazos de la digráfica. Para la demostración denotamos como \tilde{z}_i al i -ésimo renglón de una matriz Z .

Teorema 2.2.1. *Sea D una digráfica y k el máximo número de lámparas que pueden encenderse en D , entonces existe una gráfica G con $V(G) = V(D)$ y con k lazos tal que los mismos conjuntos de lámparas que se pueden encender en D se pueden encender en G .*

Demostración. Sea $A = (a_{i,j})$ la matriz de adyacencia de D y tomemos a \tilde{a}_i . Sabemos ya que el vector de configuración inicial \vec{b} de la gráfica (que se construye de manera análoga al del tablero inicial) que corresponde a tener todas las lámparas apagadas tiene cero en todas las entradas, y al presionar el botón i lo que hacemos es sumar \tilde{a}_i al vector de configuración del tablero. Lo anterior implica que las configuraciones que se pueden obtener en D son las que se encuentran en el rango por renglones de A , con las operaciones en \mathbb{Z}_2 . Las gráficas tienen una matriz de adyacencia simétrica, por lo que lo que haremos será construir una matriz A' que sea simétrica con k unos en la diagonal (que corresponden a los lazos) que tenga el mismo rango por renglones de la matriz A .

Por comodidad numeremos de nuevo los vértices de $V(D)$ (es decir, las columnas de A) de modo que las primeras k columnas de A correspondan a

un conjunto máximo de lámparas que pueden encenderse en D . Aplicando eliminación de Gauss-Jordan a la matriz A llegamos a una matriz de la que, al reordenar las primeras k columnas, obtenemos una matriz C que sea de la forma:

$$C = \begin{pmatrix} I & B \\ O_1 & O_2 \end{pmatrix}$$

donde I es la identidad de $r \times r$ con $r \leq k$, B es una matriz arbitraria de $(n - r)$ columnas, con O_1 y O_2 matrices de ceros. Es claro que el vector $1_k = (1, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$, que tiene 1 en las primeras k entradas y 0 en las demás, está en el rango por renglones de la matriz, pues corresponde a encender las primeras k lámparas. Por la forma de la matriz, la única manera en que podemos obtener los unos que aparecen en las primeras r entradas de 1_k como combinación lineal de los renglones es sumar los primeros r renglones de la matriz, y como los demás renglones son ceros, el resultado de esa suma debe de ser el vector 1_k , de lo que tenemos que las primeras $k - r$ columnas de B tienen un número impar de unos, y el resto tiene un número par de unos. Lo último debido a que la suma módulo 2 de las entradas de cada una de las primeras $k - r$ columnas de B tiene que ser 1, pues la entrada de 1_k correspondiente a esa columna de B debe ser 1, y la suma de las entradas de cada una de las $n - k$ columnas restantes de B tiene que ser 0, pues la entrada correspondiente de 1_k debe ser 0.

La observación importante que hay que hacer ahora es que la matriz C es equivalente por renglones a la matriz:

$$A' = \begin{pmatrix} I & B \\ B^t & F \end{pmatrix}$$

Para ver lo anterior, simplemente hagamos las operaciones por renglones necesarias para que debajo de la identidad aparezca la matriz B^t . Es claro que la i -ésima columna de B^t es \tilde{b}_i^t . Si queremos construir esa columna, tenemos que sumar el i -ésimo renglón de C en cada uno de los renglones en los que aparece 1 en \tilde{b}_i^t . Si procedemos así para cada i es fácil ver que obtenemos la matriz B^t en el lugar que queremos y obtenemos una matriz F que resulta de sumar los renglones de B de acuerdo a las operaciones por renglones que hicimos, sin embargo lo que es realmente interesante es ver que la matriz F corresponde a una matriz muy conveniente.

Al fijarnos en \tilde{f}_i vemos que por la manera en que procedimos para obtener la matriz B^t , \tilde{f}_i corresponde a la suma de los renglones \tilde{b}_j tales que la j -ésima entrada de la i -ésima columna de B es 1. De modo que podemos ver a \tilde{f}_i como el siguiente producto (*):

$$(b_{1,i}, b_{2,i}, b_{3,i}, \dots, b_{(n-r-1),i}, b_{n-r,i}) \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-r} \end{pmatrix}$$

De este modo podemos observar que de hecho, la entrada $(1, 1)$ de la matriz F es el resultado de multiplicar el primer renglón de B^t con la primera columna de B , la entrada $(1, 2)$ es el resultado de multiplicar el primer renglón de B^t con la segunda columna de B , siguiendo ese razonamiento para cada entrada de la matriz F , tenemos que $F = B^t B$, así que la matriz A' es en realidad

$$A' = \begin{pmatrix} I & B \\ B^t & B^t B \end{pmatrix}$$

Que sabemos que es una matriz simétrica, con lo que corresponde a la matriz de adyacencia de una gráfica. Notemos que en $B^t B$, la diagonal corresponde al producto (*) de una columna de B con ella misma. Como las primeras $k-r$ columnas de B hay un número impar de unos y en las restantes hay un número par de unos, los primeros $k-r$ elementos de la diagonal son 1 y los últimos $n-k$ son ceros. Como I es la identidad de orden r , tenemos en total $r + k - r = k$ unos en la diagonal, con lo que la demostración queda concluida. ■

Para una digráfica en la que todas las lámparas pueden encenderse tenemos $k = n$, y por el teorema anterior hay una gráfica sobre el mismo conjunto de vértices en la que pueden encenderse todas las lámparas.

2.3. Una nueva restricción: sólo-encendidos

Hasta ahora hemos hecho un estudio del juego *Lights Out* sobre gráficas y digráficas, y hemos trabajado asumiendo que en cualquier momento podemos

presionar el vértice que queramos. Sin embargo, si pensamos en el conserje del museo, puede ser que en principio le parezca extraño (o inclusive sin sentido) el activar el interruptor de una sala cuya luz ya está encendida, puesto que el conserje sabe que lo que está tratando de lograr es que todas las luces del museo se enciendan. Sin embargo, si activa el interruptor de algunos cuartos vecinos a éste último y cuando regresa, se encuentra con que la luz se ha apagado, seguramente no tendrá ningún inconveniente en activar de nuevo el interruptor.

Ahora imaginemos que de algún modo nuestro querido conserje logró su cometido y encendió todas las luces del museo, pero como es de esperarse, unas horas después el museo debe cerrar y hay que apagar las luces. Del mismo modo, como el objetivo del conserje es apagar las luces, es probable que no quiera presionar el interruptor de una sala que ya está apagada. Es claro que el problema “empezar con las luces apagadas y lograr encenderlas” es equivalente al problema “empezar con las luces encendidas y apagarlas”. Es por esa razón que en términos matemáticos es equivalente pedir que se presionen solamente los que están encendidos a presionar solamente los que están apagados.

Pensando en esto se vuelve interesante agregar la nueva restricción al juego que hemos estudiado hasta ahora, que es lo que se conoce como la restricción *lit-only*, que en adelante usaremos como *sólo-encendidos*, que consiste simplemente en que tenemos permitido presionar sólo los vértices cuyo estado sea encendido.

En [2] se enuncia y demuestra un teorema afirmando que, para gráficas bipartitas con un lazo en cada vértice, es posible encender todas las luces presionando sólo vértices apagados. Además, se propone como contraejemplo para gráficas arbitrarias la gráfica que aparece en la Figura 2.1.

A partir de ahora en las figuras que aparezcan, los vértices apagados serán de color blanco y los vértices encendidos de color negro.

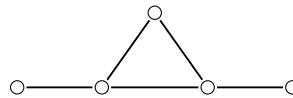


Figura 2.1: El "contraejemplo" de *Note on the Lamp Lighting Problem*

El argumento que se usa para verificar que funciona es que para encender todas las lámparas es necesario presionar todos los vértices del triángulo, pero

que una vez que se ha presionado uno, se enciende todo el triángulo. Este argumento es falso como se muestra en [3]. A partir de ahora en las figuras que aparezcan, los vértices apagados serán de color blanco y los vértices encendidos de color negro. A continuación, aparece el procedimiento usando en dicho artículo. Se pone un * junto al vértice que se presiona en cada paso:

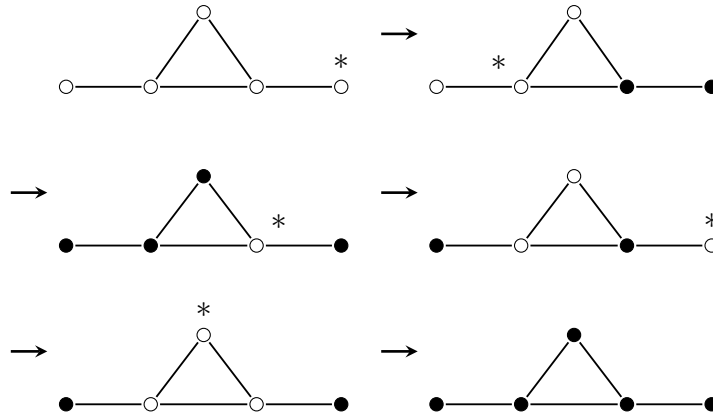


Figura 2.2: La solución a la Figura 2.1

Una vez observado eso, viene al caso preguntarse si es equivalente el juego con la regla *sólo-encendidos* al juego sin ella.

Para lo siguiente tendremos que introducir algunos conceptos nuevos que además de ser interesantes por sí mismos, simplifican el entendimiento y escritura de los próximos resultados, y nos permiten analizar los problemas que estudiaremos en el juego usando algunas herramientas adicionales de la matemática.

Tomemos primero un conjunto V y sea W una sucesión finita de elementos de V , diremos que W es una *palabra* sobre el *alfabeto* V . Denotaremos con ϵ a la sucesión vacía, por lo que le daremos a ϵ el nombre de palabra *vacía*. Si tenemos V un alfabeto, W una palabra sobre V y $u, v \in V$, usaremos la siguiente notación:

- $|W|_u$ es el número de apariciones de u en W
- $|W|_{u,v}$ es el número de apariciones de u en W antes de la primera aparición de v

- $\alpha(W)$ es el conjunto de las letras de V que aparecen en W , es decir $\alpha(W) = \{v \in V : |W|_v > 0\}$
- $|W|$ es la longitud de la palabra W , es decir, el número de términos de la sucesión.
- Si tomamos $1 \leq i \leq j \leq |W|$, definimos a $W_{[i,j]}$ como la *subpalabra* de W que se obtiene de W al borrar las primeras $i - 1$ y las últimas $|W| - j$ letras de W . Si $i > j$ entonces $W_{[i,j]} = \epsilon$.

Al tomar el conjunto de todas las palabras sobre un alfabeto V , podemos construir un monoide libre, al que llamaremos V^* , si usamos la concatenación que asocia a dos palabras W_1 y W_2 , la palabra $W = W_1W_2$, que tiene longitud $|W_1W_2| = |W_1| + |W_2|$ y tal que:

$$\begin{cases} W_1 & \text{si } W_2 = \epsilon \\ W_2 & \text{si } W_1 = \epsilon \\ W_{[1,|W_1|]} = W_1 \text{ y } W_{[|W_1|+1,|W_1|+|W_2|]} = W_2 & \text{si } W_1, W_2 \neq \epsilon \end{cases}$$

Con la observación anterior, cuando nos estemos refiriendo a una palabra $W = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de longitud n la denotaremos simplemente como $v_1v_2\dots v_n$ pues la pensaremos como la concatenación de n palabras de longitud 1. A veces diremos que se *aplica* una palabra para decir que se presiona la secuencia de vértices que dicha palabra indica.

Además, a partir de ahora será muy importante distinguir cuando estemos hablando del juego de *Lights Out* con las diferentes restricciones que hemos usado, es decir, si estamos usando la restricción de sólo-encendidos, y si consideramos que al presionar un vértice cambia su estado o si sólo lo hacen sus vecinos. Así, llamaremos a cada variante del juego sobre una gráfica del siguiente modo:

- σ -juego si al presionar un vértice v sólo cambiamos el estado de los vecinos del vértice v .
- σ^+ -juego si al presionar un vértice v cambiamos también el estado del vértice v .
- σ -juego *sólo-encendidos* si al σ -juego se le agrega la restricción de sólo-encendidos.

- σ^+ -juego *sólo-encendidos* si al σ^+ -juego se le agrega la restricción de sólo-encendidos.

Si tenemos una gráfica G y $v \in V(G)$, denotaremos a partir de ahora a la vecindad abierta de v con $N_G(v)$ y a la vecindad cerrada con $N_G[v]$. Notemos además que los juegos σ -juego, σ^+ -juego, σ -juego *sólo-encendidos* y σ^+ -juego *sólo-encendidos* corresponden a cuatro tipos de autómatas en el alfabeto V .

Un *autómata* es formalmente una quinteta ordenada $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ donde Q denota el conjunto finito de estados posibles para el autómata (las configuraciones posibles de la gráfica en cada juego), Σ un alfabeto (el conjunto V), $q_0 \in Q$ es el estado inicial (una de las configuraciones de la gráfica que tomamos como inicial), δ es una función de transición (la acción de presionar un vértice, lo que nos lleva de una configuración a otra), $F \subseteq Q$ el conjunto de estados finales o de aceptación (las configuraciones de la gráfica a las que queremos llegar). Esta definición, si bien informal, es suficiente para seguir analizando las variantes del juego *Lights Out*.

Con esa idea, llamemos \mathcal{A}_σ , \mathcal{A}_{σ^+} , \mathcal{A}_{σ_0} y $\mathcal{A}_{\sigma_0^+}$ a los autómatas asociados a los juegos σ -juego, σ^+ -juego, σ -juego *sólo-encendidos* y σ^+ *sólo-encendidos* respectivamente. Claramente el conjunto de estados posibles Q para los cuatro autómatas es $\mathbb{Z}_2^{V(G)}$.

Al presionar un vértice, lo que se hace al vector de configuración del juego es sumarle la vecindad de un vértice, que puede ser cerrada o abierta dependiendo de las reglas de cada juego en particular. De ese modo podemos identificar las vecindades (abiertas o cerradas) de un vértice con un vector en $\mathbb{Z}_2^{V(G)}$. Así, para cada autómata podemos definir el siguiente conjunto de funciones de transición, en las que el signo $+$ denota la suma de vectores usual y el A denota un estado posible.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \{(A, A + N_G(v)) : A \subseteq V(G)\} & \text{para } \mathcal{A}_\sigma \\ \{(A, A + N_G[v]) : A \subseteq V(G)\} & \text{para } \mathcal{A}_{\sigma^+} \\ \{(A, A + N_G(v)) : v \in A \subseteq V(G)\} & \text{para } \mathcal{A}_{\sigma_0} \\ \{(A, A + N_G[v]) : v \in A \subseteq V(G)\} & \text{para } \mathcal{A}_{\sigma_0^+} \end{array} \right.$$

Notemos que cada autómata \mathcal{A}_i puede representarse con una digráfica $D_{\mathcal{A}_i}$, en la que cada vértice corresponde a un estado de G y las flechas están etiquetadas con una de las funciones de transición descritas arriba. Esto puede entenderse como sigue: al estar “parado” en un vértice (un estado A de G), si se camina por una de las flechas que salen de él (si se presiona

un vértice de G) llegamos a otro vértice de $D_{\mathcal{A}_i}$ determinado por la flecha que tomamos (cambiamos el estado A de la gráfica G por el que indica la transición correspondiente en \mathcal{A}_i). Lo anterior puede verse en la Figura 2.3, donde A es un estado inicial de la gráfica, y u, v, w son vértices que pueden presionarse en el juego.

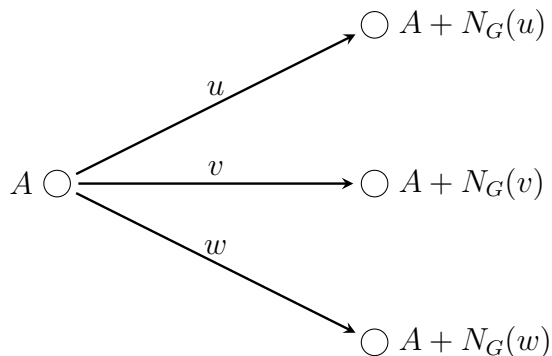


Figura 2.3: Las flechas representan la acción de presionar el vértice indicado en el σ -juego.

Consideremos G una gráfica y definamos de manera recursiva dos homomorfismos σ y σ^+ del monoide libre V^* al monoide de las transformaciones afines en el espacio de las configuraciones $\mathbb{Z}_2^{V(G)}$ de la gráfica G de la siguiente manera:

- Tanto $\sigma(\epsilon)$ como $\sigma^+(\epsilon)$ actúan como la identidad.
- Para cada $W \in V^*(G)$ con $|W| = n > 0$ y cada $A \subseteq V(G)$, definimos

$$A^{\sigma(W)} = A^{\sigma(W_{[1, n-1]})} + N_G(v)$$

$$A^{\sigma^+(W)} = A^{\sigma^+(W_{[1, n-1]})} + N_G[v]$$

donde en ambos casos $v = W_{[n, n]}$.

La razón de introducir el lenguaje anterior queda clara al notar que el resultado de presionar una serie de botones (que corresponden a las letras

de una palabra $W \in V^*(G)$ en la gráfica G a partir de una configuración A con las reglas de alguno de los juegos (ya sea σ , σ^+ o uno de ellos con la restricción de *sólo-encendidos*), es justamente la imagen bajo el homomorfismo correspondiente de A con la palabra W , es decir, es $A^{\sigma(W)}$ o $A^{\sigma^+(W)}$.

Además, para cada palabra $W \in V^*(G)$ y $u \in V(G)$ definamos:

$$\mathcal{F}_u^G(W) = \sum_{v \in N_G(u)} |W|_{v,u}.$$

El número $\mathcal{F}_u^G(W)$ denota cuántas veces ha sido presionado algún vecino v del vértice u antes de la primera vez que se presiona u en la palabra W , así que si nos fijamos en esa suma en \mathbb{Z}^2 lo que denota es si el vértice cambió de estado o no (si la suma es 1 o es 0) al aplicar la palabra W hasta antes de que se tenga que presionar u . De este modo para cualquier $A \subseteq V(G)$ y $W \in V^*(G)$ diremos que:

- W es *buena* para G y A si $\mathcal{F}_u^G(W)$ es par para cualquier $u \in A \cap \alpha(W)$ y $\mathcal{F}_u^G(W)$ es impar para cada $u \in \alpha(W) - A$.
- W es *permitida para σ sólo-encendidos* para G si entre dos ocurrencias cualesquiera de u en W hay un número par de vértices $v \in N_G(u)$ en la palabra W .
- W es *permitida para σ sólo-encendidos* para G y A si es permitida para σ sólo-encendidos para G y W es buena para G y A . Diremos, para abreviar, que W es σ -*p.s.e.*
- W es *permitida para σ^+ sólo-encendidos* para G si entre dos ocurrencias cualesquiera de u en W hay un número impar de vértices $v \in N_G(u)$ en la palabra W .
- W es *permitida para σ^+ sólo-encendidos* para G y A si es *permitida para σ^+ sólo-encendidos* para G y W es buena para G y A . Diremos que W es σ^+ -*p.s.e.*

Con esto podemos hacer algunas observaciones acerca de cuáles configuraciones pueden obtenerse a partir de una configuración dada. El conjunto de las configuraciones de G que pueden alcanzarse desde una configuración $A \subseteq V(G)$ en el σ -juego es el conjunto $\{A^{\sigma(W)} : W \in V^*(G)\}$. El conjunto de las configuraciones de G que pueden alcanzarse desde una configuración $A \subseteq V(G)$ en el σ^+ -juego es el conjunto $\{A^{\sigma^+(W)} : W \in V^*(G)\}$.

Para las variantes *sólo-encendidos* tenemos que el conjunto de las configuraciones de G que pueden alcanzarse desde $A \subseteq V(G)$ en el σ -juego es el conjunto $\{A^{\sigma(W)} : W \in V^*(G), W \text{ es } \sigma\text{-p.s.e.}\}$. El conjunto de las configuraciones de G que pueden alcanzarse desde una configuración $A \subseteq V(G)$ en el σ^+ -juego es el conjunto $\{A^{\sigma^+(W)} : W \in V^*(G), W \text{ es } \sigma^+\text{-p.s.e.}\}$.

Si tomamos dos configuraciones $A, B \subseteq V(G)$, será interesante pensar si es posible pasar de la configuración A a la B mediante alguna palabra de $V^*(G)$ en alguno de los juegos que tenemos. Pensando en eso, el *lenguaje* respecto a A y B que reconoce cada uno de los autómatas que definimos es

- $L^*(\mathcal{A}_\sigma, A, B) = \{W : A^{\sigma(W)} = B\}$
- $L^*(\mathcal{A}_{\sigma^+}, A, B) = \{W : A^{\sigma^+(W)} = B\}$
- $L^*(\mathcal{A}_{\sigma_0}, A, B) = \{W : A^{\sigma(W)} = B, W \text{ } \sigma\text{-p.s.e.}\}$
- $L^*(\mathcal{A}_{\sigma_0^+}, A, B) = \{W : A^{\sigma^+(W)} = B, W \text{ } \sigma^+\text{-p.s.e.}\}$

Definimos al conjunto $O_i^G(A) = \{B \subseteq V(G) : L^*(\mathcal{A}_i, A, B) \neq \emptyset\}$, mismo que llamamos la *órbita* de A en el juego correspondiente, es decir, la órbita de A son todas las configuraciones a las que se puede llegar desde A bajo las reglas del juego correspondiente. La relación $A \sim_i B$ si y sólo si $B \in O_i^G(A)$ es claramente una relación de equivalencia para $i \in \{\sigma, \sigma^+, \sigma\text{-p.s.e.}\}$, puesto que en ellas si aplicamos una palabra W , podemos aplicar en reversa esa palabra W , de modo que regresamos a la configuración que se tenía al inicio. Diremos por esto que esos juegos son *reversibles*, por lo que tenemos que si se puede llegar a A desde B , también se puede llegar a B desde A .

Lo que es ahora importante ver es si hay algún efecto significativo en agregar la restricción *sólo-encendidos* a los juegos que tenemos, es decir, averiguar si hay alguna equivalencia entre los juegos con y sin la restricción, si las configuraciones solubles en el juego sin la restricción lo son en el juego con ella.

Capítulo 3

El efecto de la nueva restricción

3.1. Relaciones entre σ^+ y σ^+ *sólo-encendidos*

Es claro que el juego correspondiente a \mathcal{A}_4 no es posible aplicar ninguna palabra en sentido inverso (salvo por la palabra vacía) puesto que al aplicar la última letra, esa queda apagada, así que no puede aplicarse inmediatamente después. Por lo tanto, no es claro que \sim_4 sea una relación de equivalencia.

Con eso en mente, probaremos cuatro lemas un poco técnicos, herramientas necesarias para demostrar el resultado principal de esta sección: para una gráfica conexa G , si excluimos como configuraciones a \emptyset y $V(G)$, entonces \sim_4 es de equivalencia. Estos cuatro lemas tienen la misma finalidad: demostrar que en algunos casos podemos “presionar botones apagados”. De manera más precisa, si en la gráfica encontramos cierta subestructura con algunas luces encendidas y otras apagadas, hay palabras que se pueden usar con la restricción de *sólo-encendidos* que tienen sobre la gráfica el mismo efecto de presionar algún vértice apagado sin esa restricción.

Lema 3.1.1. *Si G es una gráfica con una trayectoria inducida $vx_1x_2\dots x_t$ con $t \in \mathbb{N}$, $t > 2$, donde todos los vértices de la trayectoria están apagados excepto x_t , entonces hay una palabra $W \in V^*(G)$, tal que W es σ^+ -p.s.e. que tiene el mismo efecto en G que solamente presionar v en el σ^+ -juego.*

Demostración. Consideremos las siguientes palabras:

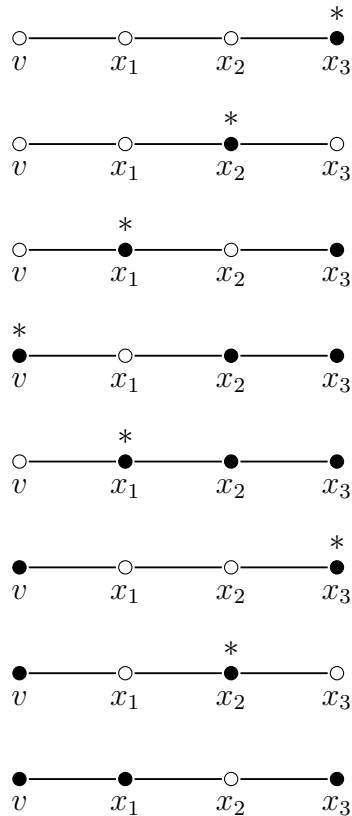
$$W_1 = x_{2m-1}x_{2m-2}x_{2m-3}\dots x_2x_1$$

$$W_2 = x_1x_3x_5\dots x_{2m-3}x_{2m-1}$$

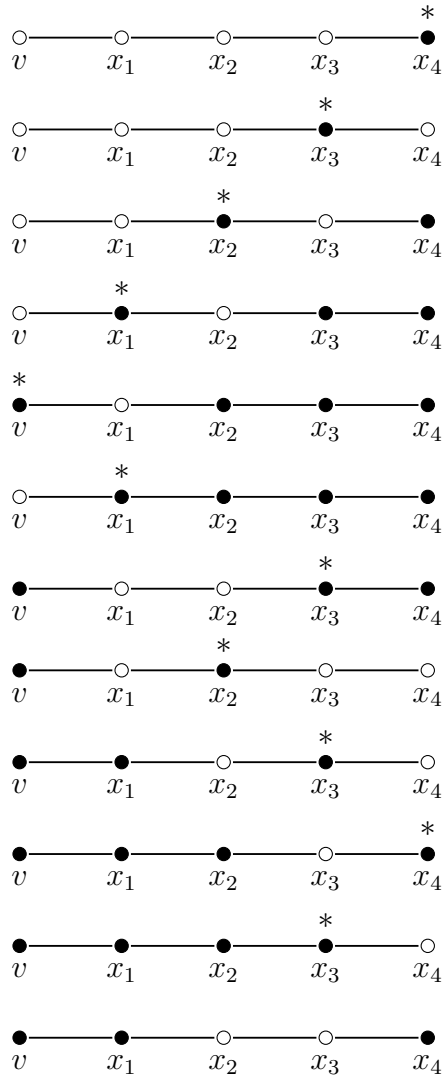
$$W_3 = x_2x_4x_6\dots x_{2m-4}x_{2m-2}$$

Hay que revisar dos casos: si $t = 2m - 1$ la palabra $W = W_1vW_2W_3$ funciona, y si $t = 2m$ la palabra $W = x_{2m}W_1vW_2W_3x_{2m-1}x_{2m}x_{2m-1}$ es la que funciona, donde $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. La prueba se hace por inducción sobre m . Hagamos primero la base para el caso impar, es decir, para $t = 3$.

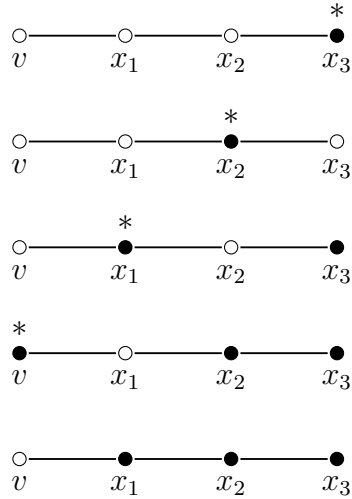
Aplicando la palabra $W = x_3x_2x_1vx_1x_3x_2$, veamos lo que pasa en la trayectoria, donde cada renglón corresponde a presionar el vértice indicado con *:



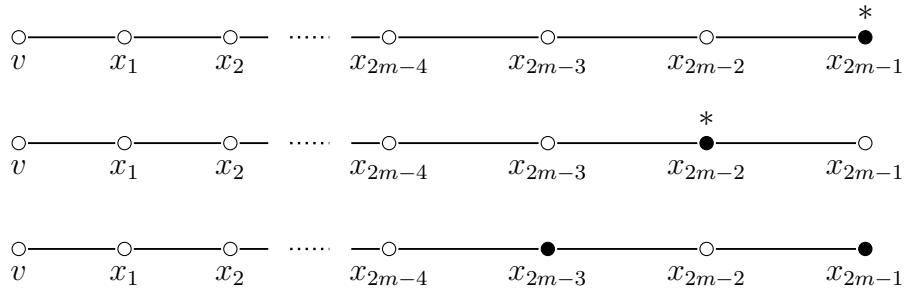
Para $t = 4$ tenemos $W = x_4x_3x_2x_1vx_1x_3x_2x_3x_4x_3$, por lo que:



Supongamos que vale para $k < t$ y consideremos una trayectoria de longitud t . Para el caso $t = 2m - 1$, haremos varias observaciones sobre el efecto que tiene aplicar cada palabra W_i en la trayectoria que deja la palabra $W_{[1,k]}$ donde k es tal que es la última letra de W que se aplica antes de la palabra W_i . Primero probaremos por inducción que la palabra $W_1 v$ enciende a todos los vértices de la trayectoria excepto a v . El caso base es:

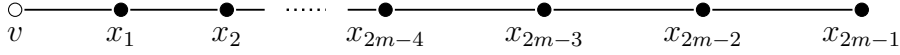


Para el paso inductivo, supongamos que vale para $k < t$ y también que $t = 2m - 1$, apliquemos la palabra $x_{2m-1}x_{2m-2}$:



Entonces, por hipótesis de inducción la palabra $W'_1 = x_{2m-3}x_{2m-4}\dots x_2x_1v$ enciende todas las luces de la trayectoria $vx_1x_2\dots x_{2m-4}x_{2m-3}$, además de que como se presiona una vez el vértice x_{2m-3} , encendemos también el vértice

x_{2m-2} y como no tocamos ni al vértice x_{2m} , ni al x_{2m-1} no apagamos a x_{2m-1} , llegando a la configuración siguiente:



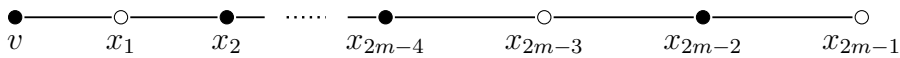
Al final, lo que hicimos fue aplicar la palabra

$$x_{2m-1}x_{2m}W'_1 = x_{2m-1}x_{2m}x_{2m-3}x_{2m-4}\dots x_2x_1v = W_1,$$

lo que prueba lo que queríamos sobre la palabra W_1 . Ahora, aplicar la palabra W_2 a la configuración anterior significa presionar en orden ascendente los vértices x_j con j impar, que están encendidos en la configuración y además, como la distancia entre cualesquiera dos vértices x_{j_1} y x_{j_2} con j_1 y j_2 impares es al menos 2, presionar uno no afecta el estado del otro, por lo que puede aplicarse la palabra W_2 , así que supongamos que la aplicamos y observemos el estado de un vértice x_j de la trayectoria:

- Si j es impar, al aplicar W_2 lo presionamos una única vez, y no presionamos ninguno de sus vecinos, por lo que el vértice x_j queda apagado.
- Si j es par, al aplicar W_2 no lo presionamos, y como presionamos una vez a cada uno de sus dos vecinos, su estado no cambia, es decir, termina encendido.

El vértice v estaba apagado inicialmente, pero como presionamos a x_1 , su único vecino en la trayectoria, el vértice v termina encendido. Al observar eso, vemos que la trayectoria tiene la siguiente configuración:

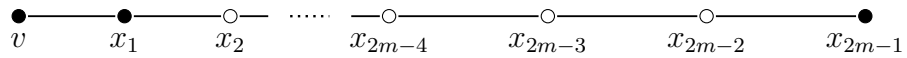


De manera análoga, la palabra W_3 presiona los vértices x_j con j par, que en la configuración que quedó están encendidos y como cualesquiera x_{j_1} y x_{j_2} con j_1 y j_2 pares distan entre sí al menos 2, presionar uno no afecta a otro, entonces podemos aplicar la palabra W_3 , y observemos el estado de un vértice x_j de la trayectoria:

- Si j es impar $j \notin \{1, 2m-1\}$, al aplicar W_3 no lo presionamos, y presionamos a sus dos vecinos, por lo que el vértice x_j queda apagado.

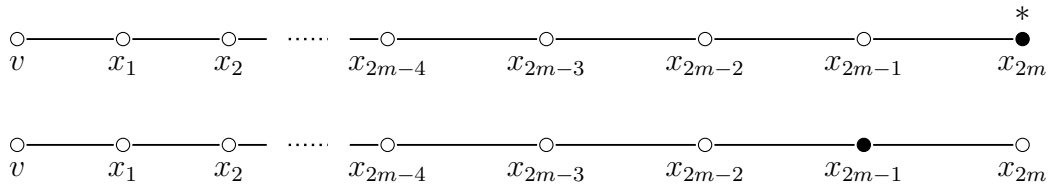
- Si j es par, al aplicar W_3 lo presionamos una única vez, y como no presionamos ninguno de sus vecinos, x_j termina apagado.

El vértice v dista de los vértices pares al menos 2 por lo que su estado no cambia y queda encendido. El vértice x_1 termina encendido, pues antes de aplicar W_3 estaba apagado y presionamos uno de sus vecinos (el vértice x_2). El vértice x_{2m-1} termina encendido, pues estaba apagado antes de aplicar W_3 y presionamos a uno de sus vecinos (el vértice x_{2m-2}). Así llegamos a que la configuración final tras aplicar la palabra $W_1vW_2W_3$ es:

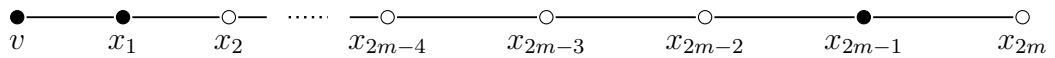


Eso prueba que la palabra W tiene el efecto deseado sobre la trayectoria. Para ver que no afecta el estado del resto de la gráfica basta observar que para cualquier vértice y en la trayectoria $|W|_y \equiv 0 \pmod{2}$ si $y \neq v$, es decir, el vértice y es presionado un número par de veces, mientras que $|W|_y \equiv 1 \pmod{2}$ si $y = v$.

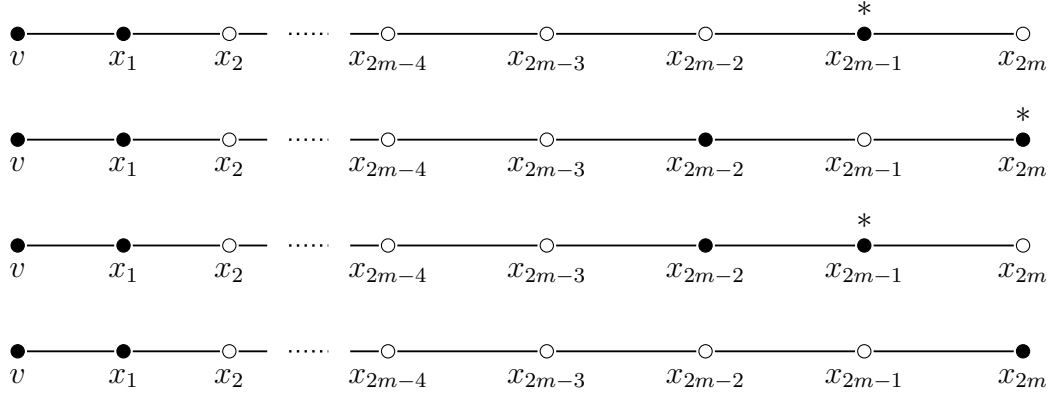
Si $t = 2m$, entonces, observemos que al aplicar la palabra x_{2m} , queda el vértice x_{2m-1} encendido, así que tenemos una trayectoria inducida de longitud impar menor que t , así que por hipótesis de inducción la palabra tenemos que $W' = W'_1vW'_2W'_3$ (donde cada W'_i es la restricción a la nueva trayectoria de la palabra W_i definida al inicio) tiene el efecto deseado en esa trayectoria.



Con lo que, al aplicar la palabra W' , llegamos a la siguiente configuración:



Si aplicamos ahora la palabra $x_{2m-1}x_{2m}x_{2m-1}$ tenemos:



Concatenando las palabras que aplicamos, tenemos la palabra

$$W = x_{2m}W'_1vW'_2W'_3x_{2m-1}x_{2m}x_{2m-1},$$

que siguiendo las definiciones de las W_i originales, puede escribirse del siguiente modo $W_1 = W'_1$, $W_2 = W'_2$, $W_3 = W'_3$. Así, tenemos la palabra $W = x_{2m}W_1vW_2W_3x_{2m-1}x_{2m}x_{2m-1}$, que es la que queríamos. ■

El siguiente lema nos garantiza la existencia de una palabra que sólo presiona vértices encendidos y que es equivalente a presionar un vértice apagado, sin embargo ahora se aplica sobre trayectorias que tienen otro tipo de configuración de luces.

Lema 3.1.2. *Si G es una gráfica con una trayectoria inducida $vx_1x_2\dots x_t$ con $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 3$, donde todos los vértices de la trayectoria están encendidos excepto v, x_1 y x_t , entonces hay una palabra $W \in V^*(G)$, W es σ^+ -p.s.e. que tiene el mismo efecto en G que solamente presionar v en el σ^+ -juego.*

Demostración. Consideremos las palabras

$$W_1 = x_{2m-2}x_{2m-4}\dots x_4x_2,$$

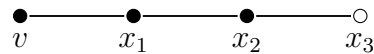
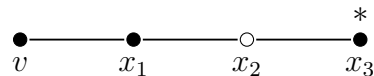
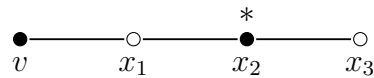
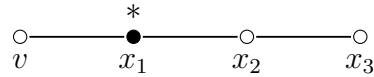
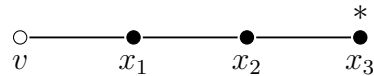
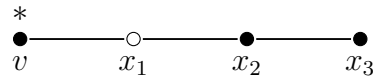
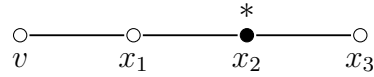
$$W_2 = x_{2m+1}x_{2m-1}x_{2m-3}\dots x_5x_3,$$

$$W_3 = x_1x_2x_3\dots x_{2m-1}x_{2m}$$

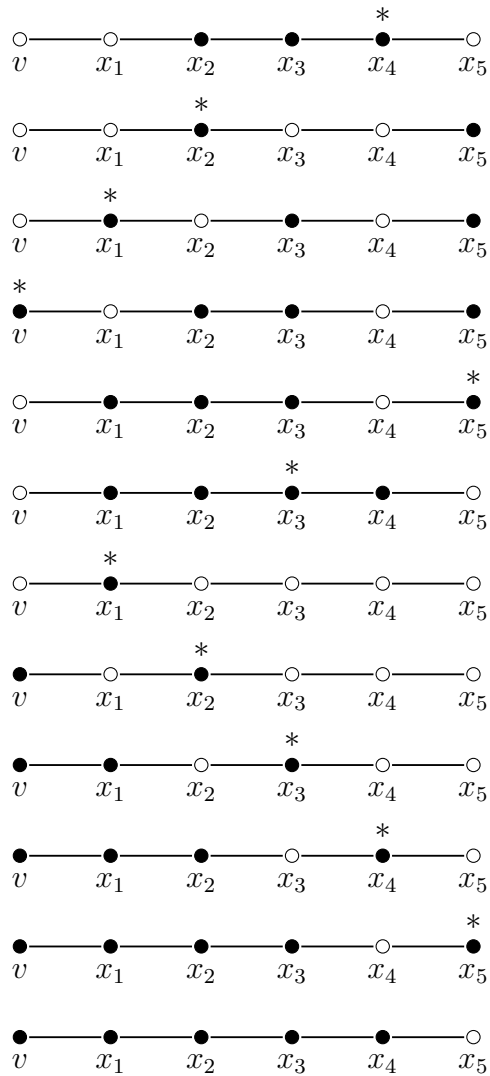
$$W_4 = x_3x_5x_7\dots x_{2m-3}x_{2m-1}.$$

Si $t = 2m + 1$, entonces la palabra $W = x_{2m}W_1x_1vW_2W_3x_{2m+1}$ funciona, si $t = 2m$ entonces aplicar la palabra $W = x_{2m-1}x_{2m}x_{2m-1}W_1x_1vW_4W_3$ funciona.

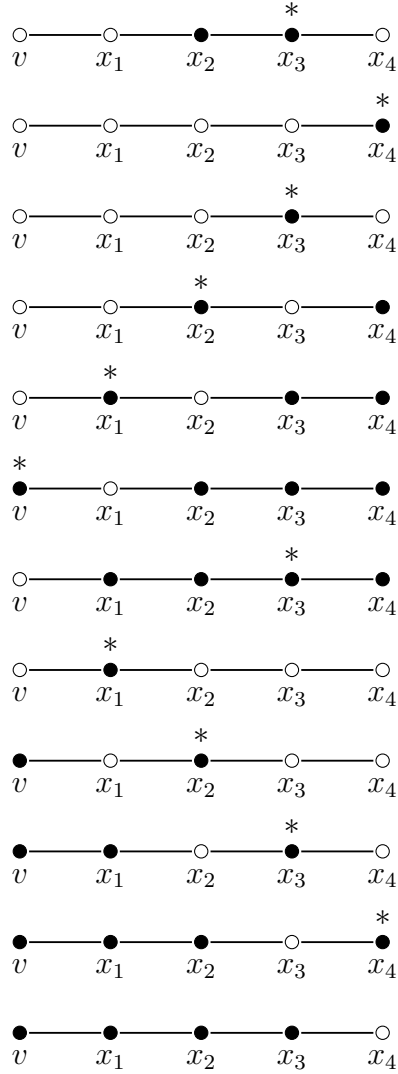
Para verificar que esas palabras son las que necesitamos, revisaremos los casos en los que $t \in \{3, 4, 5\}$, y para los casos generales haremos un análisis similar al de la segunda parte del lema anterior. Para $t = 3$, la palabra que funciona es $W = x_2x_1vx_3x_1x_2x_3$:



El defecto del caso $t = 3$ es que la palabra W_1 es vacía, por lo que ahora veremos el caso $t = 5$, al que corresponde la palabra $W_1 = x_2$ y en el que $W = x_4x_2x_1vx_5x_3x_1x_2x_3x_4x_5$:



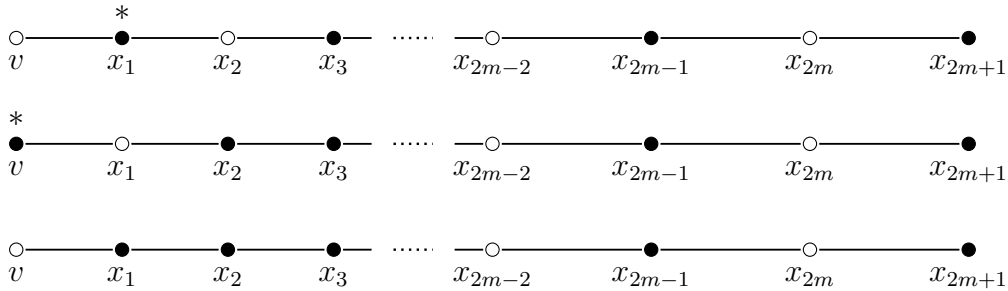
Para el caso $t = 4$ tenemos que la palabra $W = x_3x_4x_3x_2x_1vx_3x_1x_2x_3x_4$ es la que funciona:



Ahora procedamos con los casos generales, si $t = 2m + 1$ al aplicar la palabra $x_{2m}W_1$ lo que hacemos es recorrer en orden descendente los vértices x_j con j par, como inicialmente todos los vértices con j par están encendidos, y cualesquiera dos de ellos distan entre sí al menos 2, el presionar uno no afecta a los demás, por lo que esa palabra puede aplicarse sin problema, así que veamos que efecto tiene sobre los vértices x_i de la trayectoria:

- Si i es par, el vértice x_i queda apagado, puesto que se presiona una vez y no se presiona ninguno de sus vecinos.
- Si i es impar distinto de $2m + 1$, el vértice queda encendido, pues se presionan sus dos vecinos.

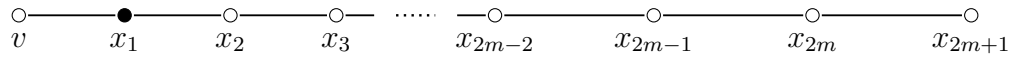
El vértice x_{2m+1} queda encendido, ya que se presiona su único vecino x_{2m} . El vértice v queda apagado pues no es presionado ni se presiona el vértice x_1 . Al aplicar después la palabra x_1 se enciende el vértice v y se apaga el vértice x_2 , y después presionamos v , quedando la trayectoria como sigue:



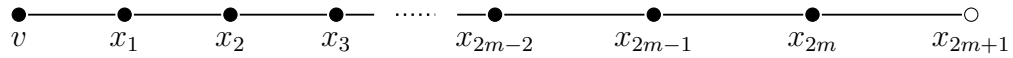
Sobre esa configuración aplicamos W_2 , que consiste en presionar los x_j con $j \neq 1$ impar en orden descendente. Notemos que en la configuración anterior todos los vértices con j impar están encendidos y distan entre sí al menos 2 por lo que presionar uno no afecta a los demás. Veamos el estado de los vértices de la trayectoria tras aplicar W_2 :

- Si i es par, el vértice x_i queda apagado, puesto que es presionado y se presionan sus dos vecinos.
- Si i es impar distinto de 1, el vértice se apaga, pues es presionado y no se presiona a ninguno de sus vecinos.

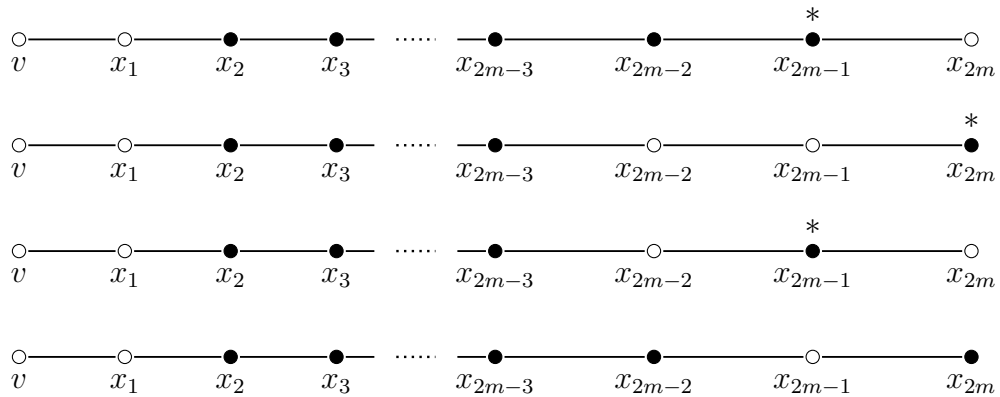
El vértice x_1 queda encendido y el vértice v queda apagado, pues no se presiona a ninguno de sus vecinos, quedando la trayectoria como sigue:



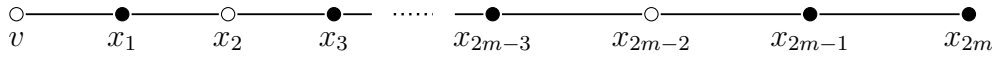
Ahora hay que aplicar la palabra $W_3 x_{2m+1}$ que recorre todos los vértices x_j en orden ascendente. Observemos que con el mismo argumento que se usó para la palabra W_1 del lema anterior, la palabra W_3 enciende todos los vértices de la trayectoria excepto el vértice x_{2m+1} , dejando la trayectoria como sigue:



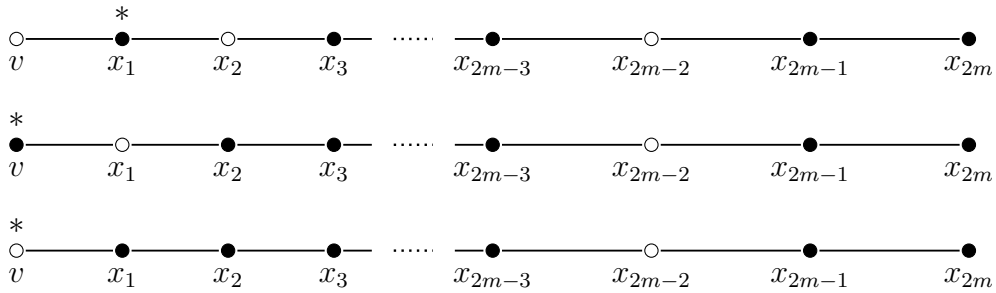
De esta forma, al aplicar $W = x_{2m} W_1 x_1 v W_2 W_3 x_{2m+1}$, obtenemos la configuración buscada. Para el caso $t = 2m$, aplicamos primero la palabra $x_{2m-1} x_{2m} x_{2m-1}$:



Podemos ahora aplicar sin problema la palabra W_1 , ya que todos los vértices x_j con $j \neq 2m$ par están encendidos y distan entre si al menos 2, dejando la trayectoria como sigue:



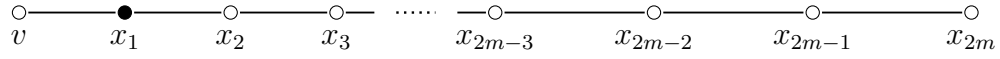
Dado que x_1 queda encendido podemos presionarlo, a su vez eso enciende el vértice v y apaga x_2 , por lo que si presionamos después v tenemos lo siguiente:



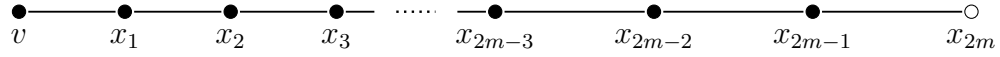
Como todos los vértices x_j con j impar están encendidos y distan entre si al menos 2, podemos ahora aplicar la palabra W_4 que recorre todos los vértices x_j con $j \neq 1$ impar en orden ascendente. Veamos el estado de los vértices x_i de la trayectoria:

- Si i es impar con $i \neq 1$, el vértice queda apagado, pues es presionado y no se presiona ninguno de sus vecinos.
- Si i con $i \notin \{2, 2m\}$ es par se queda apagado, ya que estaba inicialmente apagado y se presiona a sus dos vecinos.
- Los vértices x_2 y x_{2m} quedan también apagados, ya que estaban encendidos y se presionó a uno de sus vecinos.

El vértice x_1 queda encendido, pues ni fue presionado, ni se presionó alguno de sus vecinos, por la misma razón el vértice v queda apagado. La trayectoria queda así:



Por el mismo argumento que en el caso impar, podemos aplicar ahora la palabra W_3 y encenderemos todos los vértices de la trayectoria excepto el vértice x_{2m} llegando a la siguiente configuración:

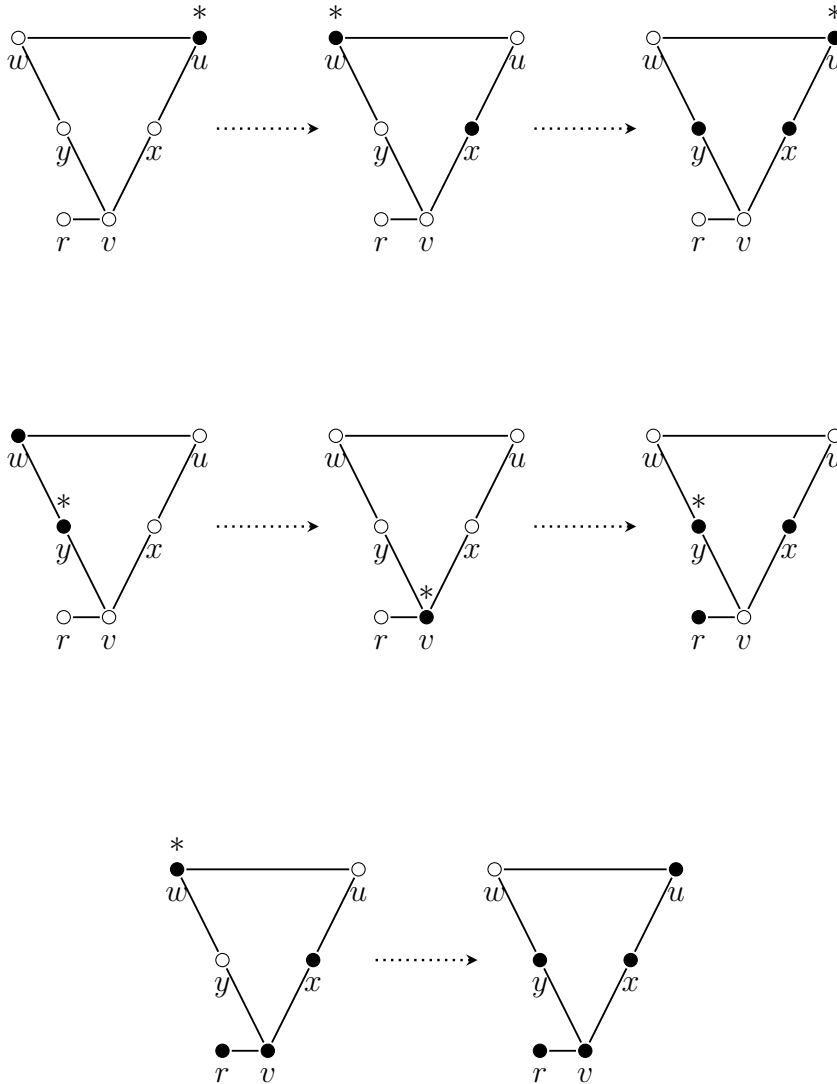


Que es la configuración a la que queríamos llegar, y lo hicimos aplicando la palabra $W = x_{2m-1}x_{2m}x_{2m-1}W_1x_1vW_4W_3$. Al igual que antes, para verificar que los vértices de la gráfica fuera de la trayectoria no son afectados hay que observar solamente que $|W|_y \equiv 0 \pmod{2}$ con y cualquier vértice de la trayectoria distinto de v , y si $y = v$ tenemos $|W|_y \equiv 1 \pmod{2}$. ■

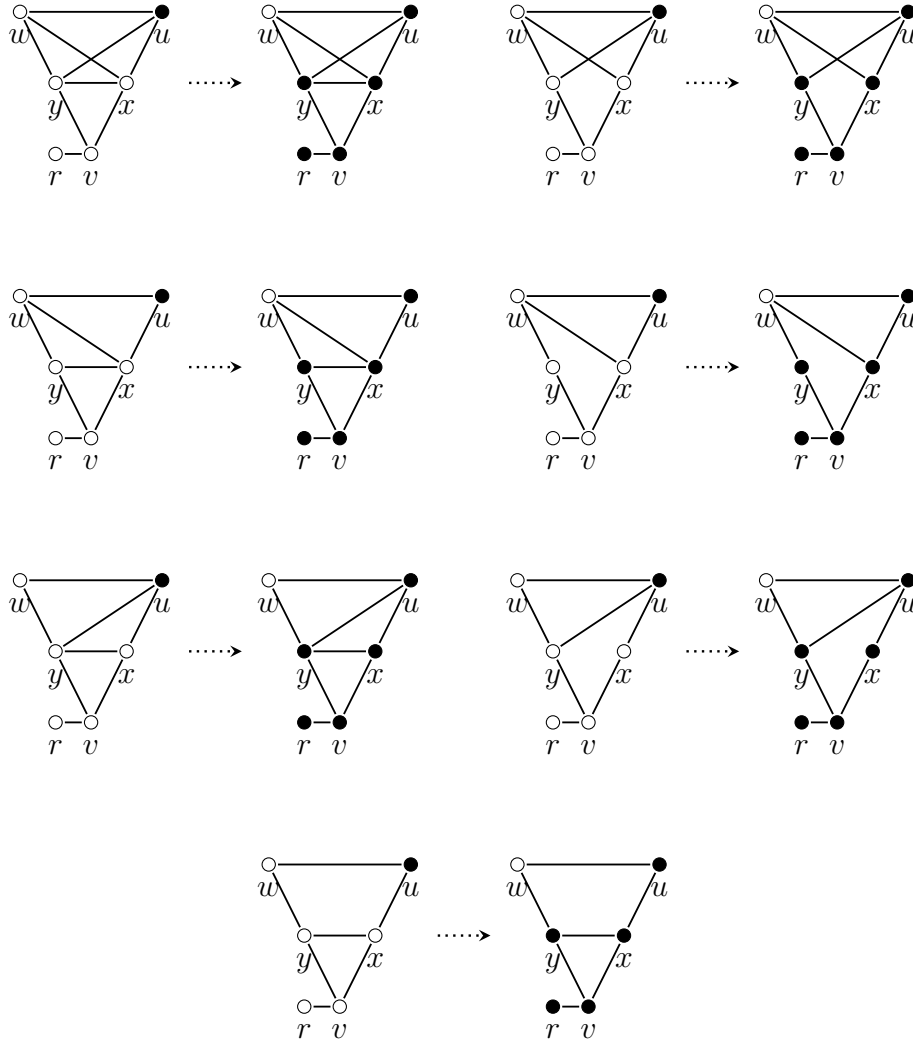
Lema 3.1.3. *Si G es una gráfica donde hay un vértice $v \in V(G)$ tal que todos los vértices de $N[v]$ están apagados y hay dos vértices u y w a distancia 2 de v tales que u está encendido y w apagado, entonces hay una palabra W que es σ^+ -p.s.e. que tiene el mismo efecto en la gráfica que sólo presionar v .*

Demostración. Hay que revisar varios casos, en todos el vértice r indica el estado de los vecinos de v , que pueden o no ser vecinos de u o w :

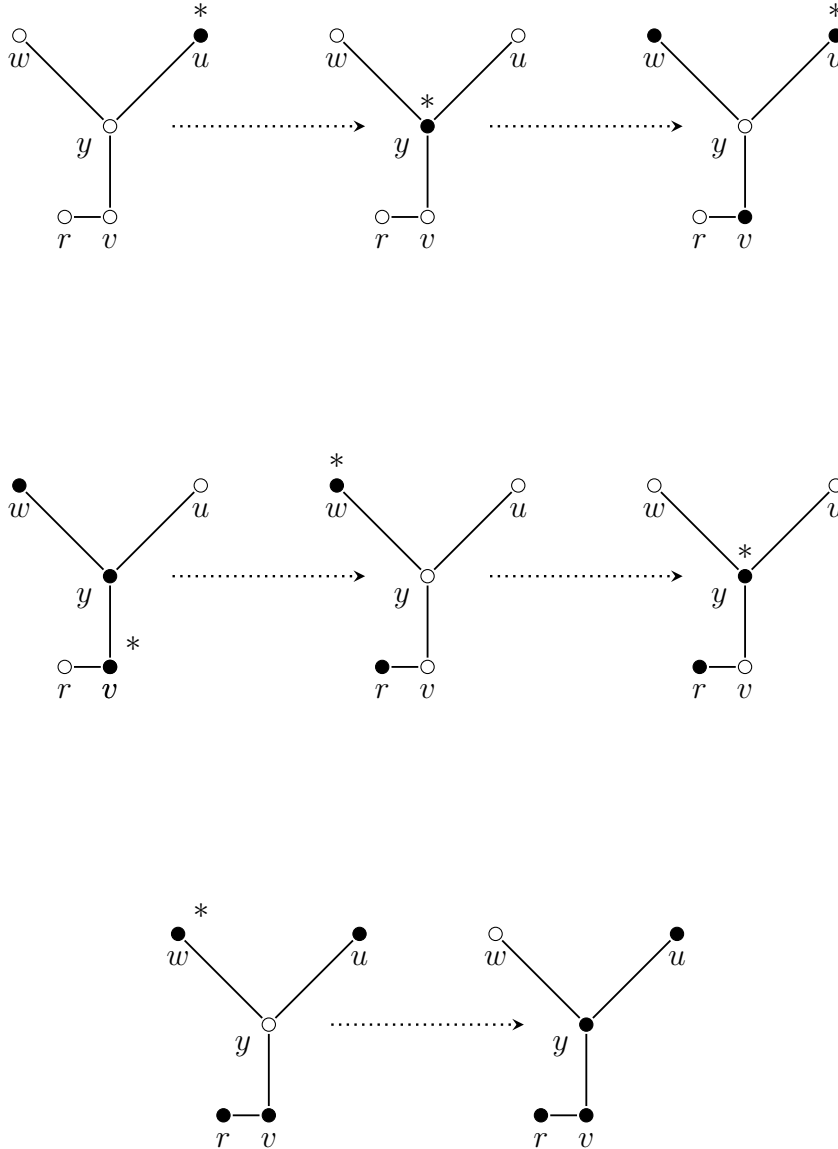
- Si $uw \in E(G)$. Sea $y \in N(v) \cap N(w)$, entonces la palabra $wuyvyw$ logra lo que queremos, sin importar si las aristas uy, wx o yx están o no en $E(G)$. Se desarrolla el caso en el que ninguna de esas aristas está en la gráfica, de los 7 restantes aparece únicamente la configuración inicial y la final.



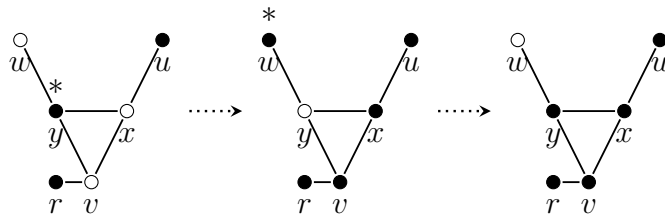
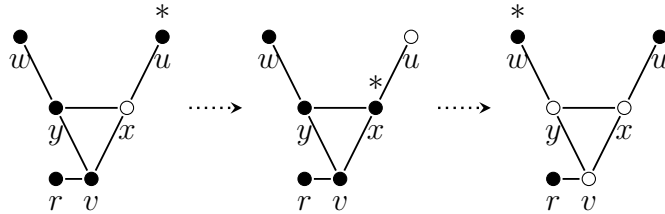
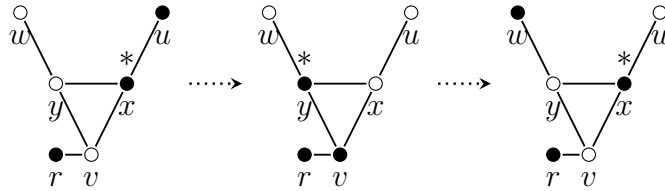
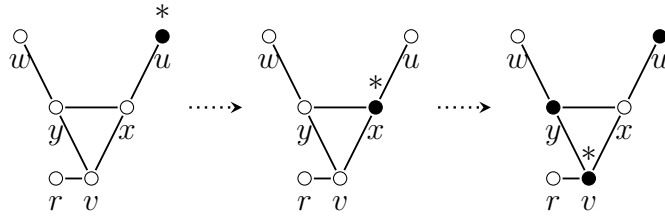
Estos son los casos restantes, en todos se aplica la palabra $uwuyvyw$ para llegar a la configuración deseada:



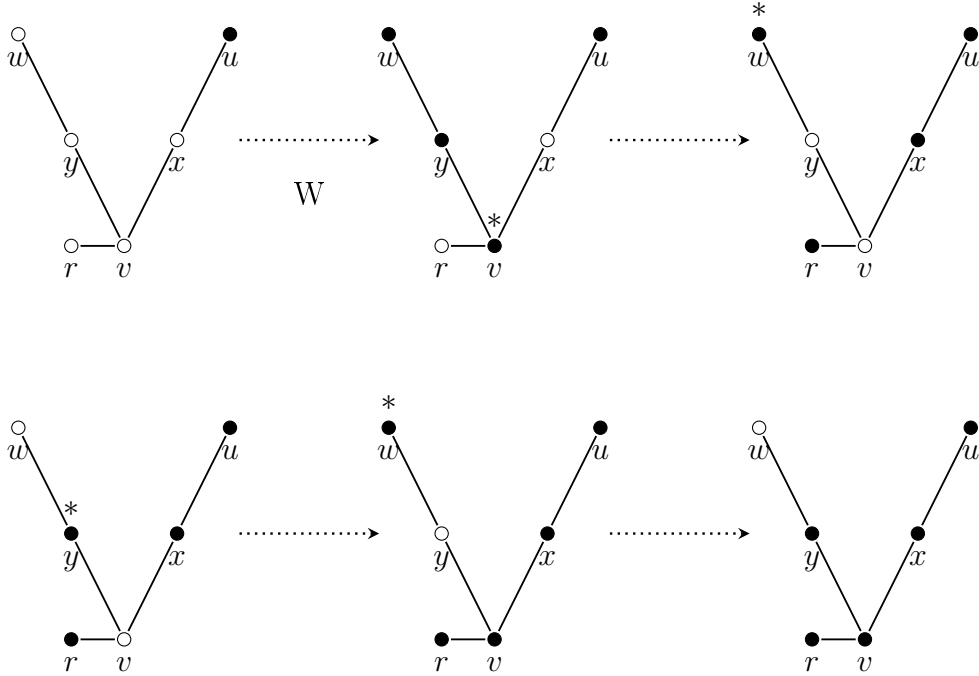
2. Si $uw \notin E(G)$ y $N_G(v) \cap N_G(u) \cap N_G(w) \neq \emptyset$, entonces si y es un elemento común de las vecindades, entonces la palabra $uyuvwyw$ funciona:



3. Si $uw \notin E(G)$, $N_G(v) \cap N_G(u) \cap N_G(w) = \emptyset$ y G contiene los caminos inducidos $uxyw$, uxv y wyv , entonces la palabra $uxvxyxuxwv$ funciona:



4. Si $uw \notin E(G)$, $N_G(v) \cap N_G(u) \cap N_G(w) = \emptyset$ y G contiene a la trayectoria inducida $uxvyw$, entonces por el Lema 3.1.1 hay una palabra W , que es p.s.e., que tiene el mismo efecto que presionar el vértice y , después de eso aplicamos la palabra $vwyw$ y terminamos:



Eso cubre todos los casos. Notemos que, efectuando las operaciones en módulo 2, $|W|_v = 1$ y $|W|_z = 0$ para $a \in W$ con $a \neq v$, por lo que el efecto neto es el mismo que el que tiene presionar sólo el vértice v , con lo que hemos terminado. ■

El siguiente lema trata sobre el proceso de moverse de una configuración a otra.

Lema 3.1.4. *Si G es una gráfica conexa y existe una palabra W que lleva a la configuración B en la configuración C en el σ^+ -juego, entonces existe una palabra W_0 que lleva a la configuración B en la configuración C en el σ^+ -juego tal que ninguna de las configuraciones intermedias es $V(G)$ ni \emptyset , es decir, no deja toda la gráfica encendida ni toda apagada.*

Demostración. Si G es una gráfica completa, el resultado se sigue fácilmente, pues sin importar qué vértice se presione, todos los vértices de la gráfica cambian su estado, por lo que la única manera de que se pase por las configuraciones $V(G)$ o \emptyset es que justamente alguna de ellas sea la configuración inicial y la otra la final, y como llegamos de una a otra en un sólo paso, ninguna de las configuraciones intermedias fue $V(G)$ ni \emptyset .

Supongamos que G no es completa, por lo que al menos le falta una arista, así que tiene tres vértices con vecindades cerradas distintas. Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que para cualquier $W \in V^*(G)$ tal que $B^{\sigma^+}(W) = C$ existe un entero $t \in [1, |W| - 1]$ tal que $B^{\sigma^+}(W_{[1,t]}) \in \{\emptyset, V(G)\}$, por lo que denotemos a la mínima t que cumple lo anterior para la palabra W como $t(W)$. Sea $W \in L^*(\mathcal{A}_2, B, C)$, $W = x_1x_2\dots x_{|W|}$ tal que $|W| - t(W)$ toma el mínimo valor posible. En adelante denotaremos a $t(W)$ como t . Hay que revisar dos casos:

1. Si $N_G[x_t] + N_G[x_{t+1}] \neq V(G)$. Sea $W' = W_{[1,t-1]}x_{t+1}x_tW_{[t+2,|W|]}$ y notemos que $W' \in L^*(\mathcal{A}_2, B, C)$, puesto que lo que determina el estado de la gráfica es el conjunto de vértices que se presionan, no el orden (ya que no consideramos la restricción *sólo-encendidos*). Además $B^{\sigma^+}(W'_{[1,k]}) \notin \{\emptyset, V(G)\}$ para $k \in [1, t]$. Como $B^{\sigma^+}(W_{[1,k]}) = B^{\sigma^+}(W'_{[1,k]})$ si $k \in [1, t-1]$, basta verificar que $B^{\sigma^+}(W'_{[1,t]}) \notin \{\emptyset, V(G)\}$. Para ver lo anterior supongamos sin pérdida de generalidad que $B^{\sigma^+}(W'_{[1,t]}) = \emptyset$. Entonces, como $B^{\sigma^+}(W_{[1,t-1]}) = B^{\sigma^+}(W'_{[1,t-1]})$ al presionar x_{t+1} se apagan los vértices correspondientes a $N_G[x_{t+1}]$, pero sabemos además que $B^{\sigma^+}(W_{[1,t]}) \in \{\emptyset, V(G)\}$:
 - Si $B^{\sigma^+}(W_{[1,t]}) = \emptyset$, al presionar x_t apagamos los mismos vértices que al presionar x_{t+1} , así que $N_G[x_t] = N_G[x_{t+1}]$ y la palabra $W^0 = W_{[1,t-1]}W_{[t+2,|W|]} \in L^*(\mathcal{A}_2, B, C)$ cumple que $|W^0| = |W| - 2$ y $t(W^0) \geq t(W)$, por lo que $|W^0| - t(W^0) < |W| - t(W)$ lo que no puede ocurrir puesto que elegimos W como la que minimizaba ese valor.
 - Si $B^{\sigma^+}(W_{[1,t]}) = V(G)$, entonces x_t enciende justamente los vértices que x_{t+1} no apaga, por lo que $N_G[x_t] + N_G[x_{t+1}] = V(G)$, contrario a lo que supusimos.
2. Si $N_G[x_t] + N_G[x_{t+1}] = V(G)$, entonces $N_G[x_t] = V(G) - (N_G[x_{t+1}])$, y además existe un vértice $y \in V(G)$ tal que $N_G[y]$ es distinta de las

vecindades de x_t y x_{t+1} . Si ocurre que $N_G[y] = V(G)$, entonces la palabra $W'' = W_{[1,t-1]}yW_{[t+2,|W|]} \in L^*(\mathcal{A}_2, B, C)$ y $|W''| = |W| - 1$, con lo que $|W''| - t(W'') \leq (|W| - 1) - t(W) < |W| - t(W)$, que es una contradicción. Supongamos pues que $N_G[y] \neq V(G)$ y consideremos la palabra $W''' = W_{[1,t-1]}yx_tx_{t+1}yW_{[t+2,|W|]}$. Claramente, ésta cumple $W''' \in L^*(\mathcal{A}_2, B, C)$ y $|W'''| = |W| + 2$. Lo que ahora debemos verificar es que $t(W''') \geq t(W) + 3$, así que verificar que $B^{\sigma^+(W'''_{[1,k]})} \notin \{\emptyset, V(G)\}$ para $k \in \{t, t+1, t+2\}$ es suficiente:

- Para $k = t$. Es claro que $B^{\sigma^+(W'''_{[1,t-1]})} \in \{N_G[x_t], N_G[x_{t+1}]\}$, y como $N_G[y] \notin \{N_G[x_t], N_G[x_{t+1}]\}$, si $B^{\sigma^+(W'''_{[1,k]})} \in \{\emptyset, V(G)\}$, entonces $N_G[y] \in \{N_G[x_t], N_G[x_{t+1}]\}$ puesto que cambia de estado al conjunto de vértices tal que deja a todos los vértices de la gráfica con el mismo estado. Debido a lo anterior, podemos asegurar que $N_G[y] \in \{N_G[x_t], V(G) - (N_G[x_t])\} = \{N_G[x_t], N_G[x_{t+1}]\}$, lo que es una contradicción.
- Para $k = t + 1$, si $B^{\sigma^+(W'''_{[1,k]})} \in \{\emptyset, V(G)\}$, entonces podemos asegurar que $B^{\sigma^+(W'''_{[1,t]})} \in \{N_G[x_t], V(G) - (N_G[x_t])\}$, pero en ese caso tendríamos que $B^{\sigma^+(W'''_{[1,t-1]})} \in \{N_G[x_t], N_G[x_{t+1}]\}$, por lo que y debe de cambiar el estado de todos los vértices de la gráfica para conservar eso, así que $N_G[y] \in \{\emptyset, V(G)\}$. Claramente $y \neq \emptyset$ puesto que $y \in N_G[y]$, y por hipótesis $y \neq V(G)$, lo que deriva en una contradicción.
- Para $k = t + 2$, si tenemos que $B^{\sigma^+(W'''_{[1,k]})} \in \{\emptyset, V(G)\}$, entonces $B^{\sigma^+(W'''_{[1,t+1]})} \in \{N_G[x_{t+1}], V(G) - (N_G[x_{t+1}])\}$, en cuyo caso $B^{\sigma^+(W'''_{[1,t]})} \in \{\emptyset, V(G)\}$, lo cual no puede ocurrir como vimos en el caso $k = t$.

Por lo anterior tenemos que $t(W''') > t(W) + 3$, de modo que tenemos que $|W'''| - t(W''') \leq |W| + 2 - (t(W) + 3)$, de donde podemos deducir que $|W'''| - t(W''') \leq |W| - t(W) - 1$ y finalmente que $|W'''| - t(W''') < |W| - t(W)$, que es una contradicción a la elección de W . ■

Con los lemas anteriores podemos demostrar el siguiente teorema, que afirma que hay una estrecha relación entre σ^+ y σ^+ sólo-encendidos.

Teorema 3.1.5. Sean $B \neq \emptyset$ y $C \neq V(G)$ configuraciones en una gráfica. Entonces podemos llegar de B a C en el juego σ^+ sólo-encendidos si y sólo si podemos hacerlo en el juego σ^+ .

Demostración. Claramente si hay una palabra que funciona para la restricción sólo-encendidos, esa misma palabra funciona para el juego sin la restricción, así que basta con demostrar la otra implicación.

Supongamos que hay una palabra W tal que $B^{\sigma^+(W)} = C$, por el Lema 3.1.4 hay una palabra W' tal que $B^{\sigma^+(W')} = C$ no tiene a \emptyset o $V(G)$ como configuraciones intermedias. Supongamos pues que W' indica que el k -ésimo vértice que debe presionarse es un vértice v que está apagado, demostraremos que en cualquier caso hay una palabra U , que es σ^+ -p.s.e., que tiene el mismo efecto que presionar v , así que tomando $W'' = W'_{[1,k-1]} U W'_{[k+1,|W|]}$ resuelve el problema de presionar v . En lo sucesivo denotaremos al conjunto de vértices a distancia i de v por $N^i(v)$:

1. Si hay un vértice z encendido en $N^1(v)$, la palabra $z v z$ resuelve el problema.
2. Si todos los vértices en $N^1(v)$ están apagados y en $N^2(v)$ hay al menos un vértice apagado y uno encendido, entonces U existe por el Lema 3.1.3.
3. Si todos los vértices en $N^1(v)$ están apagados y todos los vértices de $N^2(v)$ están encendidos y hay algún vértice apagado en $N^k(v)$ para alguna $k \geq 3$, U existe por el Lema 3.1.2.
4. Si todos los vértices en $N^1(v)$ están apagados y los vértices del conjunto $\bigcup_{k \geq 2} N^k(v)$ están encendidos, tendríamos una contradicción, puesto que al presionar v en el juego σ^+ pasaríamos por la configuración $V(G)$, lo que no ocurre por la elección de W' .
5. Si todos los vértices en $N^1(v)$ están apagados y todos los vértices de $N^2(v)$ están apagados, y existe un vértice $u \in N^k(v)$ encendido, el Lema 3.1.1 garantiza la existencia de U .
6. Si todos los vértices están apagados tendríamos una contradicción a la elección de W' .

Eso cubre todos los casos y demuestra el teorema. ■

Para terminar la sección se probarán dos corolarios del teorema anterior y del Corolario 2.1.2, el primero de los cuales afirma que sobre cualquier gráfica se puede pasar de la configuración $V(G)$ a la configuración \emptyset en el juego σ^+ , y el segundo extiende el resultado al juego σ^+ -p.s.e..

Corolario 3.1.6. *Para cualquier gráfica G siempre se puede llegar de la configuración $V(G)$ a la configuración \emptyset en el juego σ^+ .*

Demostración. Sea D la biorientación de G con todas las flechas simétricas. Claramente el subconjunto $S \subseteq A(D)$ de las flechas asimétricas de D es vacío, con lo que la gráfica subyacente de $Asim(D)$ es la gráfica $K_{|V|,0}$, que es una bipartita completa sobre $V(D)$. Por usar las reglas del juego σ^+ , al presionar un vértice en el tablero éste se enciende, que es el efecto que se tiene cuando, en cada vértice, hay un lazo. Por el Corolario 2.1.2, sabemos que hay una palabra $W = v_1v_2 \dots v_{k-1}, v_k$ que lleva a la configuración \emptyset en $V(G)$, por lo que si comenzamos con todas las luces encendidas, la palabra $W' = v_kv_{k-1} \dots v_2v_1$ cumple que $V(G)^{\sigma^+(W')} = \emptyset$. ■

Corolario 3.1.7. *Para cualquier gráfica G siempre se puede llegar de la configuración $V(G)$ a la configuración \emptyset en el juego σ^+ -p.s.e..*

Demostración. Por el corolario anterior, hay una palabra W' que apaga todas las luces en el juego σ^+ , y por el Teorema 3.1.5 hay una palabra W'' que apaga las luces en el juego σ^+ -p.s.e.. ■

3.2. Relaciones entre σ y σ sólo-encendidos

El siguiente teorema es el principal resultado de la presente sección, que permitirá probar varios resultados que muestran que hay una mayor diferencia entre σ y σ sólo-encendidos que la que hay entre σ^+ y σ^+ sólo-encendidos:

Teorema 3.2.1. *Sean G una gráfica, $W \in V^*(G)$, $S, Q \subseteq V(G)$ conjuntos ajenos tales que:*

- (I) S es independiente.
- (II) Para cada $v \in Q$ tenemos que $N_G(v) \subseteq S$.
- (III) $S \cup Q = \{v \in V(G) \mid |W|_v \text{ es impar}\}$.

Si W es p.s.e. para G , entonces $\sum_{u \in S \cup Q} \mathcal{F}_u^G(W)$ tiene la misma paridad que $|\{v \in Q \mid |N_G(v)| \text{ es impar}\}|$.

Demostración. Sea $m = |W|$ y $[m] = \{1, 2, 3, \dots, m\}$. En adelante usaremos W_i para hacer referencia a $W_{[i,i]}$ para cada $i \in [m]$. Para una pareja $P \in \binom{[m]}{2}$, llamaremos a sus elementos P_{Min} y P_{Max} donde $P_{Min} < P_{Max}$. Consideremos ahora los siguientes conjuntos:

- $\mathcal{I} = \{i \in [m] : W_i \in V(G) - S\}$.
- $\mathcal{J} = \{j \in [m] : W_j \in S\}$.

Además, dotemos a $V(G)$ de un orden total \triangleleft que cumpla que

$$u \triangleleft v \triangleleft w \text{ para cualesquiera } u \in (V(G) - (S \cup Q)), v \in Q, w \in S.$$

Tal orden existe, por ejemplo puede asignarse un orden del siguiente modo:

- Se numeran los vértices de $V(G) - (S \cap Q)$ de manera arbitraria con los enteros del 1 al $|V(G) - (S \cap Q)|$.
- Luego se numeran los vértices de Q de manera arbitraria con los enteros del $|V(G) - (S \cap Q)| + 1$ al $|V(G) - S|$.
- Finalmente se asignan los enteros del $|V(G) - S| + 1$ al $|V(G)|$ a los vértices del S .
- Se dice que un vértice v es menor que otro u respecto a ese orden si el entero asignado a v es menor que el asignado a u .

Claramente, ese orden cumple lo que queremos. Diremos que una pareja $P \in \binom{[m]}{2}$ es *buena* si $W_{P_{Min}} W_{P_{Max}} \in E(G)$ y además $W_{P_{Min}} \triangleleft W_{P_{Max}}$. Una pareja buena es llamada *azul* si intersecta a los conjuntos \mathcal{I} y \mathcal{J} . Denotemos al conjunto de las parejas *buenas* con \mathcal{G} y al de las azules con \mathcal{B} . Los cálculos que realizaremos de ahora en adelante para el cálculo de $f(u)$ serán en \mathbb{Z}_2 .

Sea $u \in V(G)$ y definamos

$$f(u) = |\{P \in \mathcal{G} : \text{existe } i \in P, W_i = u\}| = |\{P \in \mathcal{G} : W_{P_{Min}} = u\}| + |\{P \in \mathcal{G} : W_{P_{Max}} = u\}|$$

Calculemos ahora el valor de $f(u)$ dependiendo de si el vértice u está en S , en Q o en $V(G) - (S \cup Q)$. Si $u \in V(G) - (S \cup Q)$, entonces tenemos que $f(u) = 0$. Claramente basta revisar la afirmación anterior para $\alpha(W)$, ya que si $u \notin \alpha(W)$, el conjunto $\{P \in \mathcal{G} : \exists i \in P, W_i = u\} = \emptyset$. Por (III), los elementos de $\{i : W_i = u\}$ pueden numerarse como $i_1 < i_2 < \dots < i_{2k}$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$. Consideremos ahora los siguientes conjuntos:

$$U_0 = \{j : j < i_1, \{j, i_1\} \in \mathcal{G}\}.$$

$$U_{2k} = \{j : j > i_{2k}, \{i_{2k}, j\} \in \mathcal{G}\}.$$

y para $t \in \{1, 2, 3, \dots, 2k - 1\}$ sean

$$U_t^1 = \{j : i_t < j < i_{t+1}, W_j \triangleleft u, W_j u \in E(G)\}.$$

$$U_t^2 = \{j : i_t < j < i_{t+1}, u \triangleleft W_j, u W_j \in E(G)\}.$$

Notemos que la siguiente igualdad se da por el hecho de que todas las parejas del conjunto $\{P \in \mathcal{G} : \text{existe } i \in P, W_i = u\}$ cumplen una de las siguientes dos condiciones:

- El elemento $P_{Min} = j$ y $W_{P_{Max}} = u$.
- El elemento $P_{Max} = j$ y $W_{P_{Min}} = u$.

Claramente, las dos condiciones anteriores son mutuamente excluyentes, por lo que tenemos que el conjunto $\{P \in \mathcal{G} : \text{existe } i \in P, W_i = u\}$ puede verse como $\bigcup_{j=1}^m \{P \in \mathcal{G} : (P_{Min} = j, W_{P_{Max}} = u) \text{ o } (P_{Max} = j, W_{P_{Min}} = u)\}$.

Como los conjuntos que se unen son ajenos dos a dos, podemos ver a $f(u)$ de la siguiente manera:

$$f(u) = \sum_{j=1}^m |\{P \in \mathcal{G} : (P_{Min} = j, W_{P_{Max}} = u) \text{ o } (P_{Max} = j, W_{P_{Min}} = u)\}|$$

Notemos que para $j \in U_0$ se cumple que $W_{P_{Min}} \neq u$, ya que $j < i_1$. Las parejas del conjunto $\{P \in \mathcal{G} : P_{Min} = j, P_{Max} = i_r, r \in \{1, 2, \dots, 2k\}\}$ son las que se consideran en este caso, así que hay $2k$ parejas por cada $j \in U_0$, por lo que $|\{P \in \mathcal{G} : P_{Min} \in U_0\}| = 2k|U_0|$. Análogamente, para $j \in U_{2k}$ tenemos que $W_{P_{Max}} \neq u$, pues $j > i_{2k}$, y en este caso las parejas consideradas son $\{P \in \mathcal{G} : P_{Max} = j, P_{Min} = i_r, r \in \{1, 2, \dots, 2k\}\}$, así que tenemos $2k$ parejas por cada $j \in U_{2k}$, por lo que $|\{P \in \mathcal{G} : P_{Max} \in U_{2k}\}| = 2k|U_{2k}|$.

Sean $D_1 = \bigcup_{j=1}^m \{P \in \mathcal{G} : (P_{Min} = j, W_{P_{Max}} = u) \text{ o } (P_{Max} = j, W_{P_{Min}} = u)\}$
y $D_2 = U_0 \cup U_{2k} \cup \bigcup_{t=1}^{2k-1} U_t^1 \cup \bigcup_{t=1}^{2k-1} U_t^2$.

Definamos al conjunto

$$D = \{P \in \mathcal{G} \mid P_{Min} \in D_2, W_{P_{Max}} = u\} \cup \{P \in \mathcal{G} \mid P_{Max} \in D_2, W_{P_{Min}} = u\},$$

y verifiquemos que $D = D_1$. Para hacerlo, tomemos $P \in D_1$ y revisemos los dos casos posibles.:

1. Si $P_{Min} = j$ y $W_{P_{Max}} = u$, entonces:
 - si $j < i_1$, tenemos que $P_{Min} \in U_0$ y así $P \in D$.
 - si $i_t < j < i_{t+1}$ para alguna $t \in \{1, 2, 3, \dots, 2k-1\}$, entonces se tiene que $P_{Min} \in U_t^1$ y, por lo tanto, $P \in D$.
2. Si $P_{Max} = j$ y $W_{P_{Min}} = u$, entonces:
 - si $i_t < j < i_{t+1}$ para alguna $t \in \{1, 2, 3, \dots, 2k-1\}$, entonces ocurre que $P_{Max} \in U_t^2$ y así $P \in D$.
 - si $j > i_{2k}$, tenemos que $P_{Max} \in U_{2k}$ y en consecuencia $P \in D$.

Con eso tenemos que $D_1 \subseteq D$. Para la otra contención tomemos $P \in D$, entonces $P \in U_t$ para alguna $t \in [m]$, por lo que se cumple una de las siguientes condiciones:

1. Si $P_{Min} \in U_0$ tenemos $P_{Min} = j$ y $P_{Max} = i_t$ para alguna $t \in [m]$, con lo que $W_{P_{Max}} = u$ así que $P \in D_1$.
2. Si $P_{Max} \in U_{2k}$ tenemos $P_{Max} = j$ y $P_{Min} = i_t$ para alguna $t \in [m]$, con lo que $W_{P_{Min}} = u$ así que $P \in D_1$.
3. Si $P_{Min} \notin U_0$ y $P_{Max} \notin U_{2k}$, entonces para alguna $t \in [m]$ ocurre una de las siguientes condiciones:
 - $P_{Min} = i_t$ y $P_{Max} = j, i_s < j < i_{s+1}$ con $t \leq s \leq 2k-1$, así que $W_{P_{Min}} = u$ y $j \in U_s^2$ y entonces $P \in D_1$.
 - $P_{Max} = i_{t+1}$, con lo que $P_{Min} = j, i_s < j < i_{s+1}$, con $1 \leq s \leq t$, así que $W_{P_{Max}} = u$ y $j \in U_s^1$ entonces $P \in D_1$.

Eso verifica el hecho de que $D_1 = D$ y se sigue que $f(u) = |D_1| = |D|$. Por otro lado, notemos que por ser \triangleleft un orden total, los conjuntos U_t^1 y U_t^2 son ajenos. De no serlo tendríamos una $j \in U_t^1 \cap U_t^2$ para alguna t . Así $W_j \triangleleft u$ y $u \triangleleft W_j$, por lo que $W_j = u$, lo cual es una contradicción pues por el modo que escogimos t tenemos que W_j está entre dos apariciones consecutivas de u en la palabra W , es decir, $i_t < j < i_{t+1}$, así que $W_j \neq u$.

Además, notemos que para cada $j \neq i_t$, para cualquier $t \in [m]$ hay exactamente $2k$ parejas buenas, repartidas dependiendo de j del siguiente modo:

- Si $j < i_1$, entonces hay $2k$ parejas buenas que cumplen que $P_{Min} = j$ y $W_{P_{Max}} = u$, donde $P = \{j, i_t\}$ para $t \in [m]$.
- Si $j > i_{2k}$, entonces hay $2k$ parejas buenas que cumplen que $P_{Max} = j$ y $W_{P_{Min}} = u$, donde $P = \{i_t, j\}$ para $t \in [m]$.
- Si $i_t < j < i_{t+1}$ con $t \in \{1, 2, 3, \dots, 2k-1\}$, entonces hay t parejas buenas que cumplen $P_{Max} = j$ y $W_{P_{Min}} = u$ y $2k-t$ parejas buenas tales que $P_{Min} = j$ y $W_{P_{Max}} = u$.

Por lo que para todo $t \in \{1, 2, 3, \dots, 2k-1\}$ se cumple que

$$\begin{aligned} 2k(|U_t^1| + |U_t^2|) &= 2k|U_t^1| + 2k|U_t^2| \\ &= |\{P \in \mathcal{G} : W_{P_{Min}} = u, P_{Max} \in U_t^2\}| \\ &\quad + |\{P \in \mathcal{G} : W_{P_{Max}} = u, P_{Min} \in U_t^1\}| \end{aligned}$$

Con las observaciones anteriores podemos reescribir $f(u)$ de la siguiente forma:

$$f(u) = \sum_{j \in U_o \cup U_{2k}} 2k + \sum_{t=1}^{2k-1} [(2k-t)|U_t^1| + t|U_t^2|].$$

Como hacemos los cálculos en \mathbb{Z}_2 , entonces $\sum_{j \in U_o \cup U_{2k}} 2k = 0$ y

$$f(u) = \sum_{t=1}^{2k-1} [(2k-t)|U_t^1| + t|U_t^2|] = \sum_{t=1}^{2k-1} [2k|U_t^1| - t|U_t^1| + t|U_t^2|],$$

puesto que $\sum_{t=1}^{2k-1} 2k|U_t^1| = 0$, tenemos

$$f(u) = \sum_{t=1}^{2k-1} [t|U_t^2| - t|U_t^1|].$$

Ahora, si $x, y \in \mathbb{Z}$, entonces $x + y \equiv x - y \pmod{2}$, y como los conjuntos U_t^1 y U_t^2 son ajenos, tenemos que

$$\sum_{t=1}^{2k-1} [t(|U_t^2| - |U_t^1|)] \quad \text{y} \quad \sum_{t=1}^{2k-1} t|U_t^1 \cup U_t^2|$$

tienen la misma paridad.

Dado que

$$U_t^1 \cup U_t^2 = \{j \mid i_t < j < i_{t+1}, W_j u \in E(G)\}$$

tenemos

$$\sum_{t=1}^{2k-1} t|U_t^1 \cup U_t^2| = \sum_{t=1}^{2k-1} |\{j \mid i_t < j < i_{t+1}, W_j u \in E(G)\}|.$$

Finalmente, como por hipótesis la palabra W es σ -p.s.e., tenemos que para toda $t \in \{1, 2, \dots, 2k-1\}$ el número $|\{j : i_t < j < i_{t+1}, W_j u \in E(G)\}|$ es par. De no serlo, habría una primera t tal que entre dos apariciones de u , las correspondientes a i_t y a i_{t+1} respectivamente, en la palabra W se presiona un número impar de vecinos, así que el estado del vértice u al aplicar la palabra $W_{[1, i_t]}$ es encendido, y al aplicar $W_{[1, i_{t+1}-1]}$ es apagado, así que la palabra W no es σ -p.s.e., lo cual es una contradicción, por lo que $f(u) = 0$.

Revisemos ahora el caso donde $u \in Q$. En éste, el valor de la función que definimos es $f(u) = \mathcal{F}_u^G(W) + |N_G(u)|$. Por la condición III, podemos pensar a los elementos de $\{i : W_i = u\}$ como $i_1 < i_2 < \dots < i_{2k-1}$ para algún valor de $k \in \mathbb{Z}$. Consideremos los conjuntos ajenos $V_t = \{j \mid i_t < j < i_{t+1}, W_j \in N_G(u)\}$ para $t \in \{1, 2, 3, \dots, 2k-2\}$, $V_0 = \{j \mid j < i_1, W_j \in N_G(u)\}$ y por último $V_{2k-1} = \{j \mid j > i_{2k-1}, W_j \in N_G(u)\}$. Como la palabra W es σ -p.s.e., sabemos que si $t \in \{1, 2, \dots, 2k-2\}$ entonces $|V_t|$ es un número par, pues entre cualesquiera dos apariciones de u en la palabra W deben presionarse un número par de sus vecinos, por lo que las siguientes igualdades son válidas realizando los cálculos en \mathbb{Z}_2 :

$$\mathcal{F}_u^G(W) = |V_0| = |V_0| + \sum_{t=1}^{2k-2} |V_t|.$$

Sumando $|V_{2k-1}| + |V_{2k-1}|$ no alteramos la paridad de $\mathcal{F}_u^G(W)$, y si incluimos a uno de los dos sumandos y a $|V_0|$ en la suma, podemos escribir:

$$|V_{2k-1}| + |V_{2k-1}| + |V_0| + \sum_{t=1}^{2k-2} |V_t| = |V_{2k-1}| + \sum_{t=0}^{2k-1} |V_t|$$

Además, notemos que $|\bigcup_{t=0}^{2k-1} V_t|$ es el número de veces que se presionan vecinos de u en la palabra W , por lo que $\sum_{t=0}^{2k-1} |V_t| = \sum_{v \in N_G(u)} |W|_v$ así que tenemos

$$|V_{2k-1}| + \sum_{t=0}^{2k-1} |V_t| = |V_{2k-1}| + \sum_{v \in N_G(u)} |W|_v.$$

Por la condición (II) sabemos que $V \in S$, y por (III) sabemos que $|W|_v$ es un número impar. Al hacer los cálculos en \mathbb{Z}_2 y como $\sum_{v \in N_G(u)} 1 = |N_G(u)|$ tenemos lo siguiente:

$$|V_{2k-1}| + \sum_{v \in N_G(u)} |W|_v = |V_{2k-1}| + \sum_{v \in N_G(u)} 1 = |V_{2k-1}| + |N_G(u)|.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\{P \in \mathcal{G} : \text{existe } i \in P, W_i = u\} = \{P \in \mathcal{G} : W_{P_{Min}} = u, W_{P_{Max}} \in S\}$$

y es claro que el conjunto $\{P \in \mathcal{G} : \text{existe } i \in P, W_i = u\}$ es igual a

$$\{P \in \mathcal{G} : W_{P_{Min}} = u, W_{P_{Max}} \in S\} \cup \{P \in \mathcal{G} : W_{P_{Max}} = u, W_{P_{Min}} \in S\}.$$

Para ver que $\{P \in \mathcal{G} | W_{P_{Max}} = u, W_{P_{Min}} \in S\} = \emptyset$ es necesario recordar que $u \in Q$, por lo que la condición (II) implica que $N_G(u) \subseteq S$. Además, sabemos que $u \triangleleft s$ para cada $s \in S$, con lo que si tuviéramos una pareja $P^* \in \{P \in \mathcal{G} | W_{P_{Max}} = u, W_{P_{Min}} \in S\}$ tendríamos que $W_{P_{Min}} \triangleleft W_{P_{Max}}$, y como tenemos $P^* \in \mathcal{G}$ sabemos que la arista $W_{P_{Min}} W_{P_{Max}} \in E(G)$. Así, $W_{P_{Min}} \in S$ por lo que $W_{P_{Max}} \triangleleft W_{P_{Min}}$. Por ser \triangleleft un orden total tenemos $W_{P_{Max}} = W_{P_{Min}}$, por lo tanto $u \in S$ y $S \cap Q \neq \emptyset$, lo que resulta en una contradicción ya que por hipótesis S y Q son ajenos.

Notemos también que toda pareja $P = \{P_{Min}, P_{Max}\} \in \mathcal{G}$ tal que tenemos $W_{P_{Min}} = u$ y $W_{P_{Max}} \in S$ cumple también que $1 \leq P_{Min} < P_{Max} \leq m$ y además que $W_{P_{Min}} W_{P_{Max}} \in E(G)$. Por otro lado, si tomamos $\{i, j\}$ tales que $1 \leq i < j \leq m$ que cumplan que $W_i = u$ y $W_j \in N_G(u)$, el conjunto $\{i, j\} \in \mathcal{G}$, puesto que $W_i W_j \in E(G)$, $N_G(u) \subseteq S$ y \triangleleft es un orden total. Lo anterior prueba que el conjunto $\{P \in \mathcal{G} : W_{P_{Min}} = u, W_{P_{Max}} \in S\}$ es, de hecho, igual al conjunto $\{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq m, W_i = u, W_j \in N_G(u)\}$. Como $\{i : W_i = u\} = \{i_1, i_2, \dots, i_{2k-1}\}$, obtenemos que

$$|\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq m, W_i = u, W_j \in N_G(u)\}|$$

es igual a la suma

$$\sum_{s=1}^{2k-1} |\{j : i_s < j, W_j \in N_G(u)\}|,$$

ya que a cada $i_s \in \{i_1, i_2, \dots, i_{2k-1}\}$ le corresponde un número de parejas igual a $|\{j : i_s < j, W_j \in N_G(u)\}|$. Además, tenemos que

$$\{j : i_s < j, W_j \in N_G(u)\} = \bigcup_{t=s}^{2k-1} V_t.$$

Tomando en cuenta las afirmaciones anteriores, podemos escribir la siguiente igualdad:

$$f(u) = \sum_{s=1}^{2k-1} |\{j : j > i_s, W_j \in N_G(U)\}| = \sum_{s=1}^{2k-1} \sum_{t=s}^{2k-1} |V_t|.$$

Como $|V_t|$ es un número par para $t \in \{1, 2, 3, \dots, 2k-2\}$ y $|V_{2k-1}|$ es sumada $2k-1$ veces, tenemos que

$$f(u) = \sum_{s=1}^{2k-1} \sum_{t=s}^{2k-1} |V_t| = (2k-1)|V_{2k-1}| = -|V_{2k-1}|,$$

que tiene la misma paridad que $|V_{2k-1}|$, por lo que

$$f(u) = |V_{2k-1}| = (|V_{2k-1}| + |N_G(u)|) + |N_G(u)| = \mathcal{F}_u^G(W) + |N_G(u)|.$$

Para el caso $u \in S$ veremos que $f(u) = \mathcal{F}_u^G(W)$. Por la condición (III), sabemos que $\{i | W_i = u\} = \{i_1, i_2, \dots, i_{2k-1}\}$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$ y definamos $\mathfrak{F}_u := \{j | j < i_1, W_j u \in E(G)\}$. Claramente $|\mathfrak{F}_u| = \mathcal{F}_u^G(W)$. Por la condición (I) el conjunto $\{P \in \mathcal{G} | W_{P_{Min}} = u\} = \emptyset$, ya que si existiera $P^* \in \{P \in \mathcal{G} | W_{P_{Min}} = u\}$, entonces $W_{P_{Min}} W_{P_{Max}} \in E(G)$ y $W_{P_{Min}} \triangleleft W_{P_{Max}}$ por lo que $W_{P_{Max}} \in S$ y entonces S no sería independiente. Por la misma razón, tenemos que el conjunto $\{j | i_{2k-1} < j, \exists P \in \mathcal{G}, P_{Max} = j, P_{Min} = i_{2k-1}\} = \emptyset$. Por lo tanto se tiene que:

$$f(u) = \sum_{j=1}^m |\{P \in \mathcal{G} | P_{Min} = j, W_{P_{Max}} = u\}|.$$

Notemos que

$$\{j : \text{existe } P \in \mathcal{G}, P_{Min} = j, W_{P_{Max}} = u\} = \{j : W_j \triangleleft u, W_j u \in E(G)\}$$

y definamos $U_t = \{j : i_t < j < i_{t+1}, \text{ existe } P \in \mathcal{G}, P_{Min} = j, W_{P_{Max}} = u\}$ para cada $t \in \{1, 2, 3, \dots, 2k-2\}$.

Es claro que $U_t = \{j : i_t < j < i_{t+1}, W_j \triangleleft u, W_j u \in E(G)\}$. Además, el conjunto $\{j : i_t < j < i_{t+1}, u \triangleleft W_j, W_j u \in E(G)\} = \emptyset$ ya que de no ser así, $W_j \notin V(G) - S$ por ser \triangleleft un orden total, así que $W_j \in S$ y en ese caso S no es independiente, lo que contradice las hipótesis, de ese modo tenemos que

$$U_t = \{j : i_t < j < i_{t+1}, W_j u \in E(G)\}$$

y, como W es σ -p.s.e., sabemos que para $t \in \{1, 2, 3, \dots, 2k-2\}$, $|U_t|$ es un número par. Observemos que si tenemos $P^* \in \{P \in \mathcal{G} : P_{Min} = j, W_{P_{Max}} = u\}$, entonces:

- Si $P_{Min} < i_1$, entonces $j \in \mathfrak{F}_u$. Además, para cada $s \in \{1, 2, 3, \dots, 2k-1\}$ hay una única pareja de la forma $\{j, i_s\}$, por lo que para cada $j \in \mathfrak{F}_u$ hay exactamente $2k-1$ parejas buenas.
- Si existe $t \in \{1, 2, 3, \dots, 2k-2\}$ tal que $i_t < P_{Min} < i_{t+1}$, entonces $j \in U_t$. Como $P^* \in \mathcal{G}$, para cada $j \in U_t$ hay exactamente $2k-1-t$ parejas, las parejas de la forma $\{j, i_s\}$ con $s \in \{t+1, t+2, \dots, 2k-1\}$.

Por lo que si $\mathbb{J} = \mathfrak{F}_u \cup \bigcup_{t=1}^{2k-2} U_t$, tenemos que

$$\sum_{j=1}^m |\{P \in \mathcal{G} : P_{Min} = j, W_{P_{Max}} = u\}| = \sum_{j \in \mathbb{J}} |\{P \in \mathcal{G} : P_{Min} = j, W_{P_{Max}} = u\}|.$$

Y por ser los conjuntos \mathfrak{F}_u y cada U_t ajenos dos a dos, y ser $|U_t|$ par para todo t , tenemos

$$\begin{aligned} f(u) &= \sum_{j \in \mathbb{J}} |\{P \in \mathcal{G} : P_{Min} = j, W_{P_{Max}} = u\}| \\ &= \sum_{j \in \mathfrak{F}_u} (2k-1) + \sum_{j \in U_t} (2k-1-t)|U_t| \\ &= |\mathfrak{F}_u| \\ &= \mathcal{F}_u^G(W). \end{aligned}$$

Con lo que concluimos el cálculo de $f(u)$ para todos los casos posibles de $u \in V(G)$. Para terminar calculemos el valor de $|\mathcal{B}|$ en \mathbb{Z}_2 . Por un lado tenemos que si $P \in \mathcal{B}$ entonces $P = \{P_{Min}, P_{Max}\}$ donde $P \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ y $P \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$, con lo que $P_{Max} \in \mathcal{J}$, pues de otro modo $P_{Max} \in \mathcal{I}$ y $P_{Min} \in \mathcal{J}$, y entonces $W_{P_{Max}} \triangleleft W_{P_{Min}}$ lo cual contradice el hecho de que $P \in \mathcal{B}$. Podemos ver también que $P_{Min} \in \mathcal{I}$, pues si $P_{Min} \in \mathcal{J}$, entonces $W_{P_{Max}}, W_{P_{Min}} \in S$ y $W_{P_{Max}} W_{P_{Min}} \in E(G)$ lo cual contradice el hecho de que S es un conjunto independiente. Como cada $P \in \mathcal{B}$ tiene solamente un elemento P_{Min} y un elemento P_{Max} , tenemos que para cada $P \in \mathcal{B}$, $1 = |P \cap \mathcal{I}| = \sum_{i \in P \cap \mathcal{I}} 1$, de modo que la siguiente cadena de igualdades es válida:

$$|\mathcal{B}| = \sum_{P \in \mathcal{B}} 1 = \sum_{P \in \mathcal{B}} \sum_{i \in P \cap \mathcal{I}} 1.$$

Notemos ahora que si tomamos $P \in \mathcal{G} - \mathcal{B}$, entonces ocurre una de las siguientes dos posibilidades:

- $P \cap \mathcal{J} = \emptyset$, en cuyo caso $|P \cap \mathcal{I}| = 2$ que es un número par.
- $P \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$, en cuyo caso $|P \cap \mathcal{I}| = 0$ que es un número par.

Hecha la observación anterior, vemos que la paridad de $|\mathcal{B}|$ no se altera si hacemos la primera suma sobre \mathcal{G} , de modo que

$$\sum_{P \in \mathcal{B}} \sum_{i \in P \cap \mathcal{I}} 1 = \sum_{P \in \mathcal{G}} \sum_{i \in P \cap \mathcal{I}} 1.$$

Tomemos ahora al conjunto $H = \{P \in \mathcal{G} : \text{existe } i \in P, W_i = u\}$, en el que $u \in V(G) - S$. Si $P = \{i, j\}$ con $W_i = u$ notemos que se cumple una de las siguientes condiciones:

- $j \in \mathcal{J}$ y por lo tanto P cumple que $\sum_{i \in P \cap \mathcal{I}} 1 = 1$.
- $j \in \mathcal{I}$ y por lo tanto P cumple que $\sum_{i \in P \cap \mathcal{I}} 1 = 2$.

Además, como S es un conjunto independiente, no hay parejas buenas que no tengan menos de un elemento en $V(G) - S$, por lo que por la observación anterior y por la definición de $f(u)$ tenemos:

$$\sum_{P \in \mathcal{G}} \sum_{i \in P \cap \mathcal{I}} 1 = \sum_{u \in V(G) - S} \sum_{P \in H} 1 = \sum_{u \in V(G) - S} f(u).$$

Como los conjuntos S y Q son ajenos, y $S \cup Q$ es un subconjunto de $V(G)$, tenemos que $V(G) - S = Q \cup (V(G) - (Q \cup S))$. Por los valores de $f(u)$ en esos conjuntos tenemos:

$$\sum_{u \in V(G) - S} f(u) = \sum_{u \in Q \cup (V(G) - (Q \cup S))} f(u) = \sum_{u \in Q} (\mathcal{F}_u^G(W) + |N_G(u)|).$$

Por otro lado, como cada $P \in \mathcal{B}$ tiene solamente un elemento P_{Max} , tenemos que para cada $P \in \mathcal{B}$, $1 = |P \cap \mathcal{J}| = \sum_{j \in P \cap \mathcal{J}} 1$, de modo que la siguiente cadena de igualdades es válida:

$$|\mathcal{B}| = \sum_{P \in \mathcal{B}} 1 = \sum_{P \in \mathcal{B}} \sum_{j \in P \cap \mathcal{J}} 1.$$

Notemos ahora que si tomamos $P \in \mathcal{G} - \mathcal{B}$, entonces no puede ocurrir que $P \cap \mathcal{I} = \emptyset$, pues, en ese caso $W_{P_{Min}}, W_{P_{Max}} \in S$ y también ocurriría que $W_{P_{Min}} W_{P_{Max}} \in E(G)$, contradiciendo la independencia del conjunto S . Lo que implica que los conjuntos \mathcal{I} y P no son ajenos, en cuyo caso $|P \cap \mathcal{I}| = 1$. Así tenemos que:

$$\sum_{P \in \mathcal{B}} \sum_{j \in P \cap \mathcal{J}} 1 = \sum_{P \in \mathcal{G}} \sum_{j \in P \cap \mathcal{J}} 1.$$

Tomemos ahora $u \in S$ y al conjunto $H = \{P \in \mathcal{G} \mid \exists j \in P, W_j = u\}$. Si $P = \{i, j\}$ con $W_j = u$, entonces $i \in \mathcal{I}$ por lo que $\sum_{P \in \mathcal{G}} \sum_{j \in P \cap \mathcal{J}} 1 = 1$, y por lo tanto P cumple que $\sum_{i \in P \cap \mathcal{I}} 1 = 1$, con lo que:

$$\sum_{P \in \mathcal{G}} \sum_{j \in P \cap \mathcal{J}} 1 = \sum_{u \in S} \sum_{P \in H} 1$$

y por la definición de $f(u)$ y el cálculo de $f(u)$ con $u \in S$ tenemos:

$$\sum_{u \in S} \sum_{P \in H} 1 = \sum_{u \in S} f(u) = \sum_{u \in S} \mathcal{F}_u^G(W).$$

Por último, definamos los conjuntos

$$Q_e = \{u \in Q \mid |N_G(u)| \text{ es par}\} \text{ y } Q_o = \{u \in Q \mid |N_G(u)| \text{ es impar}\}.$$

Es claro que $Q = Q_e \cup Q_o$ y $Q_e \cap Q_o = \emptyset$, así que

$$\begin{aligned}
 |\{v \in Q \mid |N_G(v)| \text{ es impar}\}| &= \sum_{u \in Q_e} 1 \\
 &= \sum_{u \in Q_e} |N_G(u)| \\
 &= \sum_{u \in Q_e} |N_G(u)| + \sum_{u \in Q_o} |N_G(u)| \\
 &= \sum_{u \in Q} |N_G(u)|.
 \end{aligned}$$

Así tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
 0 &= 2|\mathcal{B}| \\
 &= |\mathcal{B}| + |\mathcal{B}| \\
 &= \sum_{u \in Q} (\mathcal{F}_u^G(W) + |N_G(u)|) + \sum_{u \in S} \mathcal{F}_u^G(W) \\
 &= \sum_{u \in Q} \mathcal{F}_u^G(W) + \sum_{u \in Q} |N_G(u)| + \sum_{u \in S} \mathcal{F}_u^G(W) \\
 &= \sum_{u \in S \cup Q} \mathcal{F}_u^G(W) + \sum_{u \in Q} |N_G(u)| \\
 &= \sum_{u \in S \cup Q} \mathcal{F}_u^G(W) + |\{v \in Q \mid |N_G(v)| \text{ es impar}\}|.
 \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\sum_{u \in S \cup Q} \mathcal{F}_u^G(W) \text{ y } |\{v \in Q \mid |N_G(v)| \text{ es impar}\}|$$

tienen la misma paridad. ■

Para ver que no puede quitarse la hipótesis de que S sea independiente consideremos la trayectoria de longitud 1 formada por los vértices v_1 y v_2 y la arista v_1v_2 . Entonces, $W = v_1v_2$ es σ -p.s.e. y $\mathcal{F}_{v_1}^G(W) + \mathcal{F}_{v_2}^G(W) = 1$, lo cual es consistente con el lema anterior si consideramos los conjuntos $S = \{v_1\}$ y $Q = \{v_2\}$. Sin embargo si tomamos $S = \{v_1, v_2\}$ y $Q = \emptyset$ el resultado falla,

por lo que la hipótesis de que S tiene que ser independiente no puede ser removida del teorema anterior.

Para los siguientes resultados será necesario extender la noción usada en el primer capítulo de los vectores de configuración, de modo que podamos asociar a conjuntos de vértices ciertos vectores. Si tenemos una gráfica G con $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $A \subseteq V(G)$, podemos asociar a A un vector $A \in \mathbb{Z}_2^n$ de modo que si $v_k \in A$, entonces la k -ésima entrada del vector $A \in \mathbb{Z}_2^n$ es 1 y si $v_k \notin A$, entonces la k -ésima es 0. Si tenemos un conjunto de subconjuntos de $V(G)$, equivale a tener un conjunto de vectores en \mathbb{Z}_2^n , por lo que diremos que un conjunto de subconjuntos de $V(G)$ es linealmente independiente si el conjunto de vectores asociado lo es. Con lo anterior podemos probar un corolario del Teorema 3.2.1:

Corolario 3.2.2. *Sea G una gráfica bipartita con bipartición $\{V_1, V_2\}$ donde $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k-1}\}$ para $k \geq 1$. Supóngase que $\{N_G(v) \mid v \in V_1\}$ es un conjunto linealmente independiente, y que existen $U \subseteq V_1$ y $B \subseteq V_2$ tales que*

$$(*) \quad |U \cap N_G(v)| \text{ es par si } v \in B \text{ y es impar si } v \in V_2 - B$$

Entonces, no hay una sucesión de movimientos sólo encendidos que empiece en B y termine en $B^{\sigma(v_1 v_2 \dots v_{2k-1})}$ en el σ -juego sobre G .

Demostración. Supongamos que existe una palabra $W = w_1 w_2 \dots w_{|W|}$ que es σ -p.s.e. para G y B , y tal que $B^W = B^{v_1 v_2 v_3 \dots v_{2k-1}}$. Consideremos al conjunto $\mathfrak{D} = \{u \mid |W|_u \text{ es impar}\}$ y sean $S = V_1 \cap \mathfrak{D}$ y $Q = V_2 \cap \mathfrak{D}$. Notemos primero que, debido a que los vectores $N_G(v)$ son linealmente independientes para cada $v \in V_1$, el conjunto V_1 es independiente (por ser G bipartita) y como $B^W = B^{v_1 v_2 v_3 \dots v_{2k-1}}$, entonces todos los vértices de V_1 son presionados un número impar de veces en W . Lo anterior puede verse al pensar la configuración $B^{v_1 v_2 v_3 \dots v_{2k-1}}$ como la combinación lineal que resulta al sumar los vectores $N_G(v_1), N_G(v_2), \dots, N_G(v_{2k-1})$. Por otro lado, dicha configuración coincide también con la combinación lineal de los vectores $N_G(w_1), N_G(w_2), \dots, N_G(w_{|W|})$, por lo que la siguiente igualdad es válida:

$$N_G(v_1) + N_G(v_2) + \dots + N_G(v_{2k-1}) = N_G(w_1) + N_G(w_2) + \dots + N_G(w_{|W|}).$$

Así, si alguno de los vértices de V_1 fuera presionado un número par de veces del lado derecho de la igualdad, al sumar sobre \mathbb{Z}_2 , sería equivalente (en la suma) a no haberlo sumado, por lo que tendríamos que del lado izquierdo

aparecen los $2k - 1$ vectores de V_1 y del lado derecho aparecen a lo más $2k - 2$. El conjunto V_2 es independiente dado que G es una gráfica bipartita. Eso quiere decir que si se presiona un vértice del conjunto V_2 , no se afecta el estado de los vértices de dicho conjunto, por lo que el estado resultante de los vértices de V_2 sólo depende de los vértices de V_1 que se presionen en la palabra W , de ese modo, para que se cumpla que $B^W = B^{v_1 v_2 v_3 \dots v_{2k-1}}$, tendría que haber una combinación de vectores de un subconjunto propio $A \subset V_1$ que dieran como resultado el vector asociado a otro vector de $V_1 - A$, lo que contradice la hipótesis de que sean linealmente independientes. Con esa observación tenemos que $S = V_1$.

Por otro lado, si tomamos $v \in V_1$ notemos que para que se cumpla que $B^W = B^{v_1 v_2 v_3 \dots v_{2k-1}}$, es necesario que su estado final no sea alterado por los vértices de V_2 que se presionan en W . Si un vértice de V_2 es presionado un número par de veces no afecta el estado de los vértices de V_1 , sin embargo si son presionados un número impar de veces puede que lo afecten, por lo que cada $v \in V_1$ debe tener un número par de vecinos en Q , así que $|N_G(v) \cap Q|$ es par para cada $v \in V_1$.

Con lo anterior tenemos que cada vértice de V_1 tiene un número par de vecinos en Q , es decir, que hay un número par de aristas con un extremo en Q , así tenemos que:

$$\sum_{v \in Q} d_G(v) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Lo que implica que hay un número par de vértices en Q con grado impar. Esto tiene dos consecuencias importantes:

- Por el Teorema 3.2.1 tenemos que $\sum_{u \in S \cup Q} \mathcal{F}_u^G \equiv 0 \pmod{2}$.
- Como $U \subseteq V_1$, tenemos que $\sum_{u \in U} |N_G(u) \cap Q| \equiv 0 \pmod{2}$ que quiere decir que entre Q y U hay un número par de aristas, por lo que $\sum_{v \in Q} |N_G(v) \cap U| \equiv 0 \pmod{2}$, que es otra manera de contar las aristas entre U y Q .

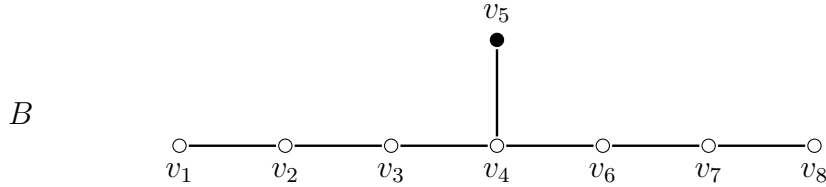
Por la condición (*) tenemos que hay un número par de vértices en el conjunto $Q \cap (V_2 - B)$, pues los vértices de $V_2 - B$ tienen un número impar de vecinos en U . Como W es σ -p.s.e. para G y B , y como $B \subseteq V_2$, tenemos que \mathcal{F}_u^G es impar para cada $u \in V_1 = S$. Entonces $\sum_{u \in S} \mathcal{F}_u^G$ es impar, por lo que $\sum_{u \in Q} \mathcal{F}_u^G$ es un número impar. Por ser W buena para B , tenemos que

si $u \in B$, entonces $\mathcal{F}_u^G \equiv 0 \pmod{2}$, así tenemos que:

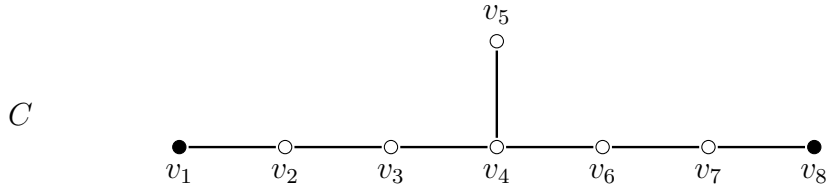
$$\sum_{u \in Q} \mathcal{F}_u^G = \sum_{u \in Q \cap B} \mathcal{F}_u^G + \sum_{u \in Q \cap (V_2 - B)} \mathcal{F}_u^G = 0 + \sum_{u \in Q \cap (V_2 - B)} \mathcal{F}_u^G.$$

Por lo que $\sum_{u \in Q \cap (V_2 - B)} \mathcal{F}_u^G \equiv 1 \pmod{2}$, lo que implica que hay un número impar de vértices en $Q \cap (V_2 - B)$ que son presionados un número impar de veces de acuerdo a la palabra W y como $Q = V_2 \cap \mathfrak{D}$, entonces todos los vértices de $Q \cap (V_2 - B)$ son presionados un número impar de veces, por lo que $|Q \cap (V_2 - B)|$ es impar, pero anteriormente vimos que (*) implicaba que $|Q \cap (V_2 - B)|$ es par, lo cual es una contradicción, por lo que la palabra W no existe, probando el resultado. ■

La utilidad del corolario anterior es que nos da un criterio para saber si una configuración que puede ser alcanzada en el juego σ no puede ser alcanzada en σ -sólo encendidos. Por ejemplo, consideremos la siguiente gráfica G :



Aplicando la palabra $v_2v_4v_7$ en el juego σ tenemos lo siguiente



La gráfica anterior es bipartita. Consideremos ahora $V_1 = \{v_2, v_4, v_7\}$, $V_2 = \{v_1, v_3, v_5, v_6, v_8\}$, $U = \{v_2, v_7\}$ y $B = \{v_5\}$. Veamos que se cumplen las hipótesis del corolario:

- G es bipartita y $|V_1| \equiv 1 \pmod{2}$, y $U \subseteq V_1$ y $B \subseteq V_2$

- Los vectores asociados a V_1 son

$$\{(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)\},$$

que claramente son linealmente independientes.

- $|U \cap N_G(v_5)| = 0$ y todos los vértices de la gráfica son adyacentes a alguno de los vértices de U excepto v_4, v_2 y v_7 , pero como el conjunto $V_1 = \{v_2, v_4, v_7\}$, tenemos que si $v \in B$, entonces $|U \cap N_G(v)|$ es par y si $v \in (V_2 - B)$ tenemos que $|U \cap N_G(v)|$ es impar.

Por el Corolario 3.2.2 tenemos que es imposible ir de la configuración B a la configuración C con la regla *sólo encendidos*.

Corolario 3.2.3. *Sea G una gráfica, $B \subseteq V(G)$ y $W \in V(G)^*$ que sea σ -p.s.e. para G y B . Si $S = \{v \in V(G) \mid |W_v| \text{ es impar}\}$ es un conjunto independiente, entonces $|S - B|$ es par.*

Demostración. Consideremos $Q = \emptyset$ y veamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 3.2.1:

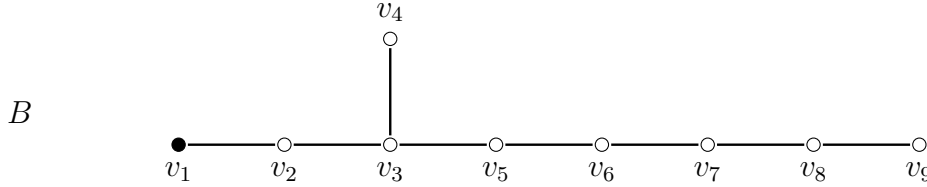
- $S \cap Q = \emptyset$
- S es independiente
- $N_G(u) \subseteq S$ si $u \in Q$
- $\{v \in V(G) : |W_v| \text{ es impar}\} = S = S \cup Q$

Por lo tanto, $\sum_{u \in S \cup Q} \mathcal{F}_u^G(W) \equiv |\{v \in Q : |N_G(v)| \text{ es impar}\}| \pmod{2}$, es decir, es un número par. Por ser W buena para B , sabemos que $\mathcal{F}_u^G(W)$ es par para $u \in B$, y como $S \cup Q = S$ tenemos que:

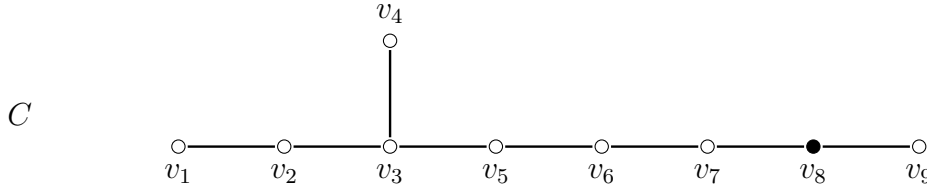
$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{u \in S \cup Q} \mathcal{F}_u^G(W) \\ &= \sum_{u \in S} \mathcal{F}_u^G(W) \\ &= \sum_{u \in S - B} \mathcal{F}_u^G(W) + \sum_{u \in B} \mathcal{F}_u^G(W) \\ &= \sum_{u \in S - B} \mathcal{F}_u^G(W). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{F}_u^G(W)$ es impar para los vértices en $S - B$ por ser W una palabra σ -p.s.e., debe de haber un número par de vértices en $S - B$. ■

Consideremos ahora a G la siguiente gráfica, donde $B = \{v_1\}$



y la configuración $C = \{v_8\}$ sobre la misma gráfica



Notemos que $B^{\sigma(v_2v_5v_7)} = C$, por lo que B y C están en la misma órbita en el juego σ . Es fácil verificar que el único conjunto de vectores linealmente dependientes (en el sentido de que cualquier otro conjunto linealmente dependiente lo contiene) de los vectores asociados a los vértices de G es $\{N(v_4), N(v_5), N(v_7), N(v_9)\}$ y que si $B^{\sigma(W)} = C$ entonces el conjunto $S = \{v : |W|_v \text{ es impar}\}$ es $\{v_2, v_5, v_7\}$ o es $\{v_2, v_4, v_9\}$. Como ambos son conjuntos independientes y en ambos casos $|S - B|$ es impar, el Corolario 3.2.3 implica que B y C están en órbitas distintas de σ -p.s.e.. El siguiente lema usa el Corolario 3.2.3, y se usará para probar el último resultado de la sección que mostrará lo fácil que es construir configuraciones que pueden ser obtenidas en el juego σ y no en el σ -p.s.e. en gráficas no singulares.

Lema 3.2.4. *Sea G una gráfica tal que hay dos conjuntos $R, T \subseteq V(G)$ tales que $R \cup T = V(G)$, $R \cap T = \emptyset$ y R es independiente. Consideremos los conjuntos $\mathfrak{R} = \{N_G(v) \mid v \in R\}$ y $\mathfrak{T} = \{N_G(v) \mid v \in T\}$. Supongamos que \mathfrak{T} es linealmente independiente y que $\langle \mathfrak{T} \rangle \cap \langle \mathfrak{R} \rangle = \{0\}$. Supongamos también que hay un conjunto $U \subseteq V(G)$ tal que $|U \cap N_G(v)|$ es impar si $v \in R$.*

Si empezamos desde cualquier configuración $B \subseteq T$, entonces no hay una palabra W que sea p.s.e. cuyo efecto neto sea el mismo que presionar un número impar de vértices de R .

Demostración. Supongamos por el contrario que existe $W \in V(G)^*$ que es σ -p.s.e. para G y B , tal que $B^{\sigma(W)} - B = \sum_{i=1}^{2k-1} N(r_i)$ donde los vértices $r_1, r_2, \dots, r_{2k-1} \in R$ forman un conjunto independiente. Consideremos ahora $S = \{v \in R \mid |W|_v \text{ es impar}\}$ y $S' = \{v \in T \mid |W|_v \text{ es impar}\}$. Como lo que nos interesa es el efecto neto que produce la palabra en la gráfica, podemos ignorar los vértices que son presionados un número par de veces, por lo que podemos escribir

$$B^{\sigma(W)} - B = \sum_{v \in S} N_G(v) + \sum_{v \in S'} N_G(v).$$

Así tenemos que

$$\sum_{i=1}^{2k-1} N(r_i) = \sum_{v \in S} N_G(v) + \sum_{v \in S'} N_G(v)$$

y como $\langle \mathfrak{T} \rangle \cap \langle \mathfrak{R} \rangle = \{0\}$ tenemos las siguientes dos igualdades:

$$\sum_{i=1}^{2k-1} N(r_i) = \sum_{v \in S} N_G(v),$$

$$\sum_{v \in S'} N_G(v) = 0.$$

Al ser \mathfrak{T} linealmente independiente, se sigue que $S' = \emptyset$. Notemos ahora que como para cada $v \in R$ tenemos que $|U \cap N_G(v)|$ es impar, entonces U tiene un número impar de 1's en común con cada vector $N_G(v)$, por lo que $U \bullet N_G(v) = 1$ para cada $v \in R$, por lo que al hacer el producto punto con U de ambos lados de la ecuación $\sum_{i=1}^{2k-1} N(r_i) = \sum_{v \in S} N_G(v)$ llegamos a que del lado izquierdo es 1, por lo que hay un número impar de elementos en S .

Como $S \subseteq R$ tenemos que S es independiente. Por el Corolario 3.2.4 podemos ver que $|S - B|$ es par. Como $R \cap T = \emptyset$, entonces $S \cap T = \emptyset$, con lo que $S \cap B = \emptyset$. Así, $|S - B| = |S|$, lo que resulta en una contradicción, por lo que la palabra W no existe. ■

Finalmente, podemos probar el siguiente resultado

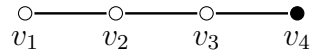
Teorema 3.2.5. *Sea B un subconjunto propio de $V(G)$, donde G es una gráfica no singular, y sea $v \in V(G) - B$. Sea C la configuración obtenida de la configuración B al presionar v en la gráfica G en el juego σ . Entonces C no puede obtenerse desde B en el juego σ -p.s.e.*

Demostración. Sean $R = \{v\}$ y $T = V(G) - R$, y sea $U = u$ donde $uv \in E(G)$, veamos que se cumplen las hipótesis del Lema 3.2.4:

- $R \cup T = V(G)$ y $R \cap T = \emptyset$ y R es independiente.
- La gráfica G es no singular, es decir, la matriz de adyacencia de G es no singular, por lo que \mathfrak{T} es linealmente independiente y $\langle \mathfrak{T} \rangle \cap \langle \mathfrak{A} \rangle = \{0\}$.
- $|U \cap N_G(v)| = 1$, pues $U \subseteq N_G(v)$ y $|U| = 1$

Por el Lema 3.2.4 no hay ninguna palabra W que sea σ -p.s.e. que cumpla que $B^{\sigma(W)} = C$, por lo tanto, la configuración C no puede obtenerse desde B en el juego σ -p.s.e. ■

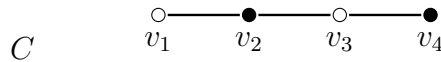
Para ilustrar el Teorema 3.2.5, consideremos la siguiente gráfica G :

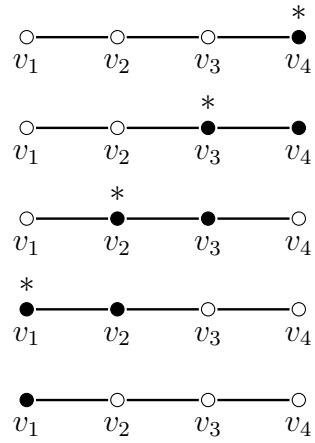


Su matriz de adyacencia es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es 1, por lo que G es no singular. La configuración B es $\{v_4\}$, y la configuración $C = \{v_2, v_4\}$ se obtiene de B al presionar el vértice v_1 en el juego σ . Verifiquemos que C no puede ser obtenida, en el juego σ -p.s.e., desde B .





Como no tiene sentido presionar dos veces el mismo vértice de forma consecutiva en σ -p.s.e., es fácil ver que la única sucesión de movimientos válidos a partir de B es la siguiente:

Es fácil convencerse, gracias a la simetría de la gráfica, que hemos encontrado todos los elementos de la órbita de B en σ , y ninguna de las configuraciones corresponde a la configuración C , probando así que C no está en la órbita de B y verificando el resultado.

Conclusiones

En el primer capítulo se presentó el modelo del juego *Lights Out* en su forma original. La importancia de ese primer capítulo radica principalmente en dos cosas:

- La formulación matemática del problema, es decir, la presentación del modelo básico del juego, dando a su vez los lineamientos esenciales para comprender el juego en tableros más generales.
- El análisis de dicho modelo al determinar la existencia de soluciones y el método para hallarlas.

El método algebraico empleado en el primer capítulo tiene la gran virtud de que puede usarse para estudiar cualquier gráfica (o digráfica) cuya matriz de adyacencia sea conocida. Sin embargo, el defecto de ese método para conseguir resultados más generales es que las matrices de adyacencia tienen formas muy variadas, así que efectuar dicho análisis se vuelve poco práctico para obtener resultados generales.

En el segundo capítulo se emplearon, además de las ideas del primer capítulo, herramientas de Teoría de Gráficas. El modelo era esencialmente el mismo, pero las técnicas fueron diferentes. Se introdujo la idea de *juego dirigido* y se probó que los juegos con y sin dirección tienen una relación muy estrecha. También se definen conceptos de invaluable utilidad para el tercer capítulo, la mayoría de ellos relacionados con el concepto de *palabra*, así como la regla *sólo-encendidos*, que es el elemento que da sentido al estudio realizado en el último capítulo.

El tercer capítulo se conforma mayormente de resultados que, aunque algo técnicos, estudian ideas y algoritmos sencillos para determinar el efecto que tiene la restricción *sólo-encendidos* en dos variantes del juego: una en la que el estado de un botón cambia cuando éste es presionado y otra en la que no,

mostrando que la restricción casi no tiene efecto en el primero, mientras que en el segundo altera de manera importante las configuraciones que pueden resolverse.

Bibliografía

- [1] M. Anderson, T. Feil. *Turning Lights Out with Linear Algebra*. Mathematics Magazine, Vol.71, No.4, (Oct., 1998), pp.300-303
- [2] H. Erickson, K. Erickson, J. Sjöstrand. *Note on the Lamp Lighting Problem*. Advances in Applied Mathematics 27, (2001) pp. 357-366
- [3] J.Goldwasser, X. Wang, Y. Wu. *Does the lit-only restriction make any difference for the σ -game and σ^+ -game?*. European Journal of Combinatorics 30, (2009) pp. 774-787
- [4] J.Bang-Jensen, G.Gutin. *Digraphs Theory, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, 2007.
- [5] J.A.Bondy, U.S.R.Murty. *Graph Theory with Applications*. London: Macmillan, 1976.
- [6] R.Diestel *Graph Theory*. Springer-Verlag, 2000.
- [7] S.H.Friedberg, A.J.Insel, L.E.Spence. *Álgebra Lineal*. Publicaciones Cultural, S.A., 1982.

Índice alfabético

- Lights Out*, 12
- alfabeto, 31
- aristas, 7
- autómata, 33
- campo, 2
- configuración, 14
- digráfica, 10
 - flechas, 10
 - inducida, 11
 - lazo, 10
 - parte asimétrica, 11
- escalar, 3
- espacio vectorial, 3
 - dimensión, 4
 - subespacio generado, 4
- estrategia, 14
- función lineal, 3
- gráfica
 - no singular, 12
- gráfica, 7
 - biorientación, 11
 - bipartita completa, 8
 - bipartita, 8
 - completa, 8
 - conexa, 9
 - inducida, 10
 - lazo, 8
- homomorfismo, 6
- isomorfismo, 4
- lenguaje, 36
- lit-only*, 30
- matriz, 5
 - identidad, 5
 - invertible, 5
 - operaciones elementales, 6
 - producto de matrices, 5
 - rango, 6
 - singular, 5
 - suma de matrices, 5
 - transpuesta, 6
- monoide, 2
- movimiento, 13
- n*-estrategia, 24
- palabra, 31
 - σ - p.s.e., 35
 - σ^+ - p.s.e., 35
 - buena, 35
 - permitida para σ sólo-encendidos, 35
 - permitida para σ^+ sólo-encendidos, 35
 - subpalabra, 32
- pareja
 - azul, 60
 - buena, 60
- sólo-encendidos, 30
- soluble, 14
- transformación afín, 7
- trayectoria, 9
 - longitud, 9

vértices, 7

adyacentes, 8

distancia entre, 9

exvecindad, 11

grado, 8

independientes, 8

invecindad, 11

vecindad abierta, 8

vecindad cerrada, 8

vecinos, 8

vector de configuración, 14

vector, 3

combinación lineal de vectores, 4

vectores linealmente independientes, 4

Restricciones

σ , 32

σ sólo-encendidos, 32

σ^+ , 32

σ^+ sólo-encendidos, 33