



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

**ANÁLISIS DE OBSERVABILIDAD GLOBAL
DEL MOTOR DE RELUCTANCIA CONMUTADA**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

P R E S E N T A:

ISAÍ PACHECO TEJEDA

TUTOR:

DR. PAUL ROLANDO MAYA ORTIZ

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

MÉXICO, D.F. ENERO DE 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Jurado asignado

Presidente: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto
Secretario: Dr. Espinosa Pérez Gerardo Rene
Vocal: Dr. Maya Ortiz Paul Rolando
1^{er} Suplente: Dr. Guerrero Ramirez Gerardo Vicente
2^{do} Suplente: Dr. Hernández Guzmán Victor Manuel

Tesis realizada en el Laboratorio de Control de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. México, Distrito Federal.

Asesor de tesis:

Dr. Maya Ortiz Paul Rolando

*A mis padres, Moy y Rosy,
por su esmero en educarme,
su palabras sabias y precisas,
por enseñarme un camino
aun más excelente.*

Agradecimientos

A Dios, por darme una segunda oportunidad. Porque aún no se para qué es todo esto, pero estoy seguro que él si y que todavía tiene planes reservados para mi.

Al Dr. Paul, por su confianza brindada, sus conocimientos regalados, su paciencia hacia mi persona, pero sobre todo por su camaradería que puedo resumir con esta frase: *“gracias por los 7439 cigarros que nos fumamos”*.

A los cuates que encontré en esta aventura, que hicieron dibujar una sonrisa en mi cara e hicieron que cada día fuera diferente: Genaro, Fer, Hoover, Rafa, Quino, Tona, Chuchin, Ed, César,... Servino, Remi y el güero.

A mi Bro, que me enseñó a ser responsable de mis actos y enfrentar las consecuencias, cuales quiera que sean, con humildad y valentía.

A Mari, por su apoyo y cariño.

A Olga, porque nunca ha dudado de mi.

A la UNAM, por permitirme estudiar y cumplir una de mis metas planteada hace mas de 8 años.

Al CONACyT por el apoyo económico No. 39398 otorgado durante los primeros dos años de mi posgrado.

Resumen

En ciertas aplicaciones es requerido emplear máquinas eléctricas en condiciones ambientales extremas, tales como alta presión, humedad, temperatura y un amplio rango de velocidades. Para este tipo de situaciones el Motor de Reluctancia Conmutada ha demostrado ser una muy buena alternativa.

Para llevar a cabo el control de este motor es necesario el conocimiento de sus variables mecánicas, lo que generalmente se hace por medio de sensores. Sin embargo, el uso de equipo de medición hace que se presenten problemas de fiabilidad y robustez en aplicaciones como las antes mencionadas, por lo que es deseable el uso de Observadores de Estados para reconstruir las variables.

Para determinar las condiciones bajo las cuales un Observador de Estados funcionará de manera adecuada es necesario llevar a cabo un análisis de observabilidad, de preferencia global, por lo que en este trabajo se plantea un camino para ello.

En este trabajo se llevó a cabo un análisis de observabilidad global del Motor de Reluctancia Conmutada. Este análisis hace uso de las definiciones de dinámica indistinguible y observabilidad global, y se basó en las suposiciones de que todos los parámetros del sistema son conocidos y que el estado no medible es la velocidad angular de la flecha del rotor.

En primera instancia se realizó un análisis físico del motor, se determinó su representación matemática y se demostraron algunas propiedades importantes, como la de pasividad y la de que la máquina no es Blondel-Park transformable. Posteriormente se detalló la metodología empleada, que explota conceptos como el de indistinguibilidad, detectabilidad y observabilidad. La aplicación de la metodología al motor se llevó a cabo a continuación y se concluyó su observabilidad global.

Abstract

In some applications it is required to use electrical equipment in extreme environmental conditions, such as high pressure, humidity, temperature and a wide speed range. For such situations the Switched Reluctance Motor has proven to be a good alternative.

To drive this motor is necessary to know its mechanical variables, which is usually done by sensors. However, the use of measuring equipment causes problems in reliability and robustness in aforementioned applications, so that it is desirable the use States Observers for this variables.

To determine the conditions under which a state observer works properly it is necessary to carry out an analysis of observability, global preferably, so in this document such analysis is presented.

The analysis uses the definitions of indistinguishable dynamics and observability, and was based on the assumptions that all system parameters are known and that the angular velocity of the rotor shaft is the state not measurable.

Firstly, a physical analysis was performed to the motor, its mathematical representation was determined and some important properties were shown such as passivity and that the machine is not Blondel - Park transformable. Subsequently,

the methodology used was detailed, exploiting concepts such as indistinguishability, detectability and observability, then the application of the methodology to the motor is carried out and its global observability was determined.

Índice general

1. Introducción	1
I. Antecedentes	1
II. Descripción cualitativa del problema	2
III. Problema a resolver	3
IV. Estado del arte	3
V. Contribución	5
VI. Organización de la tesis	5
2. El motor de reluctancia conmutada	7
I. Descripción física de la máquina	8
I.1. Ventajas y desventajas del SRM	9
II. Propiedades de los conmutadores para el SRM	11
II.1. Configuraciones de los conmutadores	12
III. Representación matemática	18
III.1. Modelo completo	18
III.2. Modelo simplificado	21
IV. Transformación Blondel-Park	23

V. Propiedades de pasividad del SRM	34
3. Observabilidad	41
I. Observabilidad no lineal	42
I.1. Condiciones geométricas de observabilidad	43
I.2. Condiciones analíticas de observabilidad	46
II. Metodología de observabilidad	52
II.1. Modelo de error y dinamica indistinguible (DI)	52
4. Análisis de Observabilidad del SRM	59
I. Consideraciones	59
II. Análisis	61
II.1. Análisis del modelo simplificado	61
II.2. Análisis del modelo completo	65
5. Conclusiones y problemas abiertos	75
Bibliografía	89

Índice de figuras

2.1. Secuencia de excitación de fases del SRM	9
2.2. Clasificación de conmutadores para el SRM	13
2.3. Conmutador de medio puente asimétrico	14
2.4. Conmutador bifilar	14
2.5. Conmutador con volcado por condensador	15
2.6. Conmutador con variable de enlace de dc	16
2.7. Conmutador con modulo de puente trifásico	17
2.8. Inductancia de estator y su derivada respecto a la posición	22
2.9. Transformación para circuitos estacionarios proyectados por relaciones trigonométricas	25
2.10. Transformación del eje coordenado abc al $\alpha\beta$	26
2.11. Transformación del eje coordenado $\alpha\beta$ al $dq0$	27
2.12. Descomposición Pasiva del motor de reluctancia conmutada	38

*Para escribir un buen libro no
considero imprescindible conocer
París ni haber leído el Quijote.
Cervantes, cuando escribió el
Quijote, aún no lo había leído.*

Delibes

1

Introducción

I. Antecedentes

En 1838 Robert Davidson diseñó el primer motor de reluctancia conmutada del que se tiene referencia, este fue utilizado para impulsar una locomotora férrea. Para ese tiempo las limitaciones del motor debidas a la conmutación hicieron que éste quedara en segundo plano ya que la conmutación de las bobinas se realizaba de forma manual mientras que a mediados del siglo XIX los motores de corriente continua hicieron a un lado a cualquier otro motor.

La primera referencia al término reluctancia conmutada en máquinas eléctricas esta en (Nasar, 1969) y las primeras patentes sobre estos motores fueron registradas por Bedford y Holf en 1971 y 1972, pero la base de la teoría y la práctica para este tipo de máquinas fue puntualizada por (Lawrenson *et al.*, 1980) a finales de la década de los setenta a partir de los trabajos de investigación sobre vehículos eléctricos

alimentados por baterías, realizados en las universidades de Leeds y Nottingham.

Durante los últimos 40 años se ha desarrollado una revolución en la aplicación de motores eléctricos. El desarrollo de accionamientos para motores de estado sólido ha progresado hasta el punto en que prácticamente cualquier problema de control de potencia se puede resolver por medio de su utilización. Además, los costos de accionamiento de estado sólido han decrecido de manera considerable, mientras que su confiabilidad se ha incrementado. La versatilidad y relativamente bajo costo de los controles y accionamientos de estado sólido han originado el desplazamiento de las limitaciones del motor de reluctancia conmutada poniéndolo de frente como candidato a diversas tareas de la actualidad para motores eléctricos (Chapman, 2005).

En la actualidad el motor de reluctancia conmutada se aplica en trabajos orientados a diversos rubros que van desde ambientes tan hostiles como la industria minera según reportes de minas en Chile (Interamericana, 2011), ambientes industriales en general como lo reporta la compañía ABB (Revista, 2011), entornos domésticos varios (Emotron, 2012) y (LTDA, 2011), hasta en nuevas tecnología “experimentales” como los son los autos híbridos y eléctricos que apuestan con desplazar los autos con motores de combustion interna (Powertrain, 2012).

II. Descripción cualitativa del problema

A pesar sus grandes ventajas y de su penetración en la industria, el motor de reluctancia conmutada solo es parte de un mercado incipiente debido a que es difícil controlarlo. Se requieren elaborados métodos digitales para su control, sobre todo cuando se considera la presencia de la saturación magnética. La principal limitación al explotar la estructura simple de un motor de reluctancia conmutada es su com-

portamiento electromagnético altamente no lineal, ya que el par desarrollado es una función no lineal de las corrientes de estator y de la velocidad del rotor. Además, con el fin de maximizar la tasa par/masa se necesita operar en la región de saturación magnética. Por otra parte, el uso de sensores para medir las variables mecánicas (posición y velocidad angulares) puede conducir a problemas de confiabilidad en ambientes severos y pueden ser una parte importante del costo del *driver*.

Antes de proponer observadores de estados es importante conocer las propiedades de observabilidad de la máquina por lo que es necesario llevar a cabo el análisis respectivo. Hasta el conocimiento del autor, no se ha llevado a cabo un análisis de observabilidad global para el motor, pero, existen suposiciones de que el motor es observable sin embargo no se sabe bajo que condiciones estas suposiciones son ciertas ni los regímenes de operación de la observabilidad.

III. Problema a resolver

Dado el modelo matemático del motor de reluctancia conmutada que tiene como estados la posición y velocidad angulares del rotor y las corrientes de estator, con todos los parámetros conocidos y se supone que el único estado no conocido (no medible) es la velocidad angular, llevar a cabo un análisis de observabilidad que formalice las condiciones bajo las cuales el sistema sea globalmente observable.

IV. Estado del arte

Con respecto al diseño de observadores de estados para el motor de reluctancia conmutada existen diferentes propuestas reportadas en la literatura científica. Por ejemplo, en (Ehsani y Fahimi, 2002) se presenta una pequeña colección de trabajos

de control sin sensores mecánicos reportados en la década de los 90 y principios del 2000 que pueden ser clasificados como: 1) métodos hardware-intensivos los cuales requieren circuitería externa para la inyección de señal, 2) métodos dato-intensivos tales como la técnica de flujo que integra una gran colección de tablas de almacenamiento de características del motor y 3) métodos basados en modelo tales como los observadores de estado, el método de medición de señal de potencia, el método basado en el modelo de inductancia, redes neuronales y lógica difusa, entre otros, los cuales necesitan un microprocesador potente como un procesador digital de señales con capacidad de procesamiento de millones de instrucciones por segundo (MIPS). En (Gao *et al.*, 2004) y (Komatsuzaki *et al.*, 2008) se reportan métodos de estimación de posición, la suposición principal es que el motor trabaja a bajas velocidades por lo que la fuerza contraelectromotriz puede despreciarse, bajo esta suposición se puede obtener una relación directa de las inductancias, único término que depende de la posición, lo que hace posible una igualdad y una estimación de variable que resulta en función de una tangente. En (Tan *et al.*, 2009) se reporta un estimador de posición y un observador por modos deslizantes cuyo principal problema es la estimación de la posición al momento del arranque; el diseño se hace mediante el uso de la técnica de inyección de pulso para la operación con velocidad cero. En (De La Guerra Carrasco, 2011) se reporta el único trabajo encontrado donde se aborda un análisis de observabilidad con características locales del motor de reluctancia conmutada en donde la representación matemática empleada no considera la saturación magnética y el único estado no medible es la velocidad angular. Así, mediante un método geométrico se concluye que el motor es localmente observable siempre que no se trabaje a velocidad cero.

V. Contribución

Suponiendo un motor de reluctancia conmutada que tiene como estados las corrientes de estator y la posición y velocidad angulares del rotor, con todos los parámetros conocidos y asumiendo que el único estado no conocido es la velocidad angular de la flecha del rotor y que no hay existencia de inductancias mutuas; se presentó que no es Blondel-Park transformable lo que implica una dependencia de los parámetros con respecto a la posición angular y se realizó un trabajo de análisis para formalizar las condiciones bajo las cuales el motor es observable globalmente. Se originaron dos artículos arbitrados a partir del análisis mencionado.

VI. Organización de la tesis

El trabajo está organizado de la siguiente manera: El Capítulo 2 es de gran importancia porque ilustra la complejidad del modelo y la dependencia de algunos parámetros con respecto a la posición angular, así mismo, hace referencia a la importancia de elegir de manera adecuada el conmutador. Su necesidad será evidente en capítulos posteriores; el Capítulo 3 determina, primeramente, conceptos interesantes de observabilidad y enseguida se describe la metodología para realizar el análisis de observabilidad de sistemas no lineales; en el Capítulo 4 se aplica la metodología explicada para el análisis de observabilidad del motor, utilizando el modelo simplificado primeramente y posterior el modelo completo; los resultados alcanzados y las conclusiones que se determinaron se presentan en el Capítulo 5.

Si me dieran ocho horas para cortar un árbol, me pasaría seis afilando el hacha...

Abraham Lincoln

2

El motor de reluctancia conmutada

El motor de reluctancia conmutada (por sus siglas en inglés SRM, Switched Reluctance Motor) es una máquina eléctrica diseñada para obtener gran eficiencia en la conversión de energía. Debido a que su construcción no requiere de imanes permanentes o devanados en el rotor, este motor es de bajo costo y de alta fiabilidad. Si se diseña con varios polos es posible obtener un par elevado a bajas velocidades excluyendo así el uso de engranajes lo que le hace buen candidato para aplicaciones de transmisión directa (Krishnan, 2001).

Estas, entre otras, son algunas características del SRM las cuales lo hacen atractivo. A continuación se estudiarán a detalle algunas otras características que podrían ser interesantes y que hasta ahora han sido poco comentadas.

I. Descripción física de la máquina

El SRM a diferencia de otros motores eléctricos genera par a través de la variación de la reluctancia en lugar de la acción de inducción, esto es, el mecanismo de producción de par es idéntico al observado en el desplazamiento producido al alinear dos imanes con polaridad diferente, así, el par es producido por la propensión del rotor a moverse hacia la posición de mayor inductancia del estator, esto es, donde la reluctancia es mínima y de ahí el nombre de motor de reluctancia conmutada¹. La concentración de devanados en el estator y la ausencia de imanes permanentes o devanados en el rotor dan lugar a varias características interesantes: construcción simple, estructura sin escobillas y mayor generación de par. Paradójicamente, la principal desventaja de este tipo de máquinas eléctricas viene, también, de su estructura simple, ya que para generar par, las corrientes de estator deben ser conmutadas secuencialmente de acuerdo a la posición del rotor como se ejemplifica en la Figura 2.1 para un motor de tres fases, donde se observa que para conseguir un movimiento anti-horario se energiza la fase j_1 (azul) seguida de j_2 (rojo) y j_3 (verde) respectivamente para cerrar nuevamente con j_1 y así continuar el ciclo.

La restricción, en el sentido de que las corrientes de estator deben ser encendidas y apagadas de acuerdo a la posición angular del rotor, asigna el requerimiento de la existencia de un conmutador electrónico con el fin de que la forma de onda requerida para las corrientes de estator sea garantizada. La función principal del conmutador es coordinar el proceso de conmutación además que debe garantizar una transición suave de acuerdo a las necesidades de operación (Wang y Lan, 2004).

¹Para empaparse más del tema se recomienda el Capítulo 1 de (Krishnan, 2001) y el Capítulo 3 de (Miller, 2001)

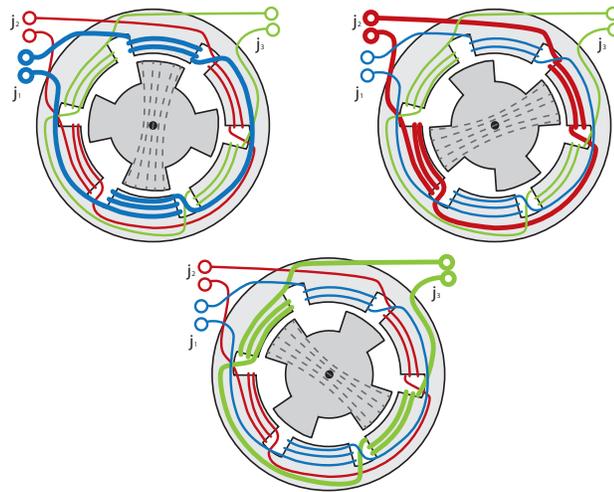


Figura 2.1: Secuencia de excitación de fases del SRM

I.1. Ventajas y desventajas del SRM

El SRM ofrece varios beneficios en comparación con otros motores (Villegas Nuñez, 2009):

- a) *Par Máximo*: el motor tiene la capacidad de producir mayor par máximo en comparación con algunos otros motores eléctricos tales como motores de inducción (Kline, 1999), principalmente a bajas velocidades. Aunque los valores obtenidos siguen siendo más bajos que los alcanzados con una máquina equivalente de imanes permanentes.
- b) *Eficiencia*: el motor ofrece alta densidad de potencia, e igual o mayor eficiencia que los motores *ca* comunes (Harris *et al.*, 1986)(van der Broeck *et al.*, 1993)(Gorasson *et al.*, 2001).
- c) *Fiabilidad*: debido a la independencia de los circuitos de cada fase y la inexistencia de imanes permanentes, en caso de corto circuito este tipo de motor esta mejor

protegido que muchos otros. En adición, el motor puede trabajar ante la falla de una o más fases (reduciendo, obviamente, su rendimiento).

- d) *Velocidad*: el motor puede ser operado en un rango de velocidades muy amplio. La curva par-velocidad asociada al SRM es similar a un motor *ca* controlado vectorialmente, en la que el par máximo es constante a bajas velocidades, y para velocidades altas es la potencia la que se mantiene constante. Es posible alcanzar velocidades de hasta 100,000 rpm sin necesidad de modificación mecánica alguna. Al mismo tiempo, éste puede operarse a bajas velocidades obteniendo un par máximo hasta velocidad cero.
- e) *Momento de inercia*: el motor posee un momento de inercia pequeño debido a la ausencia de devanados e imanes permanentes en el rotor.
- f) *Refrigeración*: el motor presenta bajas perdidas en comparación con motores con corrientes inducidas en el rotor, además se sabe que la mayor parte del calor se genera en el estator el cual por estar fijo es relativamente fácil de refrigerar, de aquí que el motor puede operar a mayores temperaturas.
- g) *Razón potencia/peso*: para una misma potencia de salida, un SRM puede resultar hasta un 40% mas pequeño y ligero que un motor *ca* (Harris *et al.*, 1986).
- h) *Costo*: para la misma potencia de salida y siendo producidos en grandes cantidades, los SRM junto con sus conmutadores, son más baratos que los motores de *ca* o los motores de imanes permanentes (van der Broeck *et al.*, 1993)(Hendershot, 1991).

Sin embargo el SRM posee algunos inconvenientes:

- a) *Posición del rotor*: la operación del motor exige el conocimiento de la posición angular del rotor para la sincronización de éste con la energización de las distintas

fases. Para ello usualmente se utilizan sensores que pueden incrementar el costo y la complejidad del sistema, reduciendo su fiabilidad.

- b) *Rizado de par y ruido acústico*: el rizo de par es mayor en el SRM que en otro tipo de motores lo cual da lugar a vibración y ruido acústico que no pueden ser admisibles para cierto tipo de aplicaciones, siendo requeridos una mecánica y un control mejores para la reducción de dichos casos.
- c) *No linealidad*: la estructura doblemente saliente que el SRM precisa para producir par reluctante y el régimen de saturación en el que suelen operar producen características magnéticas altamente no lineales. Esto complica su análisis y accionamiento. La inversión en fase de investigación puede entonces resultar mayor debido a que las estrategias de control son más complejas y no están ampliamente estudiadas como en el caso de otros motores.

II. Propiedades de los conmutadores para el SRM

El diseño e implementación del conmutador electrónico es una de las partes fundamentales para el control de motores de reluctancia conmutada ya que parte del buen funcionamiento del motor así como del desempeño del controlador implantado depende de la forma que trabaje el conmutador. El hecho de que el par no dependa de la polaridad de la corriente de excitación hace que los controladores del SRM solo dependan de un interruptor por fase protegiendo, así, de daños las fases vecinas. En caso de fallas, la inductancia de la bobina limita la tasa de crecimiento en la corriente y da tiempo para proteger las fallas aisladas. Las fases del SRM son independientes, en caso que una bobina llegue a fallar el SRM seguirá en operación aunque, claro, con una reducción en la potencia de salida. A continuación se presentan algunas configuraciones de los conmutadores usados para el SRM.

II.1. Configuraciones de los conmutadores

Un acoplamiento mutuo de las fases del SRM puede ser prescindible, sin embargo, una falta de acoplamiento mutuo requiere una manipulación cuidadosa de la energía del campo magnético almacenado. La energía del campo magnético ha sido provista de una trayectoria durante la conmutación de fase; por otro lado, dará lugar a un exceso de voltaje en los devanados y por lo tanto en los interruptores de potencia ocasionará fallas. La forma en que esta energía es controlada da lugar a *un conmutador único* para el SRM pero con numerosas topologías. La energía podría ser liberada, una parte en la conversión de energía mecánica en energía eléctrica y otra parte en la disipación en las bobinas del estator. Otra opción es regresar la energía hacia una fuente de *cd* por medios electrónicos o electromagnéticos. Estas entre otras opciones son las topologías del conmutador para el SRM presentadas en la Figura 2.2 en donde n es el número de fases de la máquina. En todas las topologías, excepto en la configuración con dos etapas de potencia, se asume que una fuente de voltaje de *cd* esta disponible para sus entradas.

El trabajo de (Zhu y Cheung, 2008), toma en cuenta cinco topologías del conmutador que se consideran como las más representativas: conmutador de medio puente asimétrico, conmutador bifilar, conmutador con volcado por capacitor, conmutador con variable de enlace de *cd* y conmutador de puente trifásico. Se hacen comparaciones en diferentes configuraciones del conmutador para el SRM con base en sus características eléctricas y el rendimiento general con el objetivo de encontrar la mejor topología de accionamiento en diferentes aplicaciones.

1 *Conmutador de medio puente asimétrico* Figura 2.3. Es la topología de conmutador más popular. Consiste de dos interruptores y dos diodos volantes² por

²Diodo freewheeling: Diodo que se pone en paralelo con cargas reactivas como la bobina de relés.

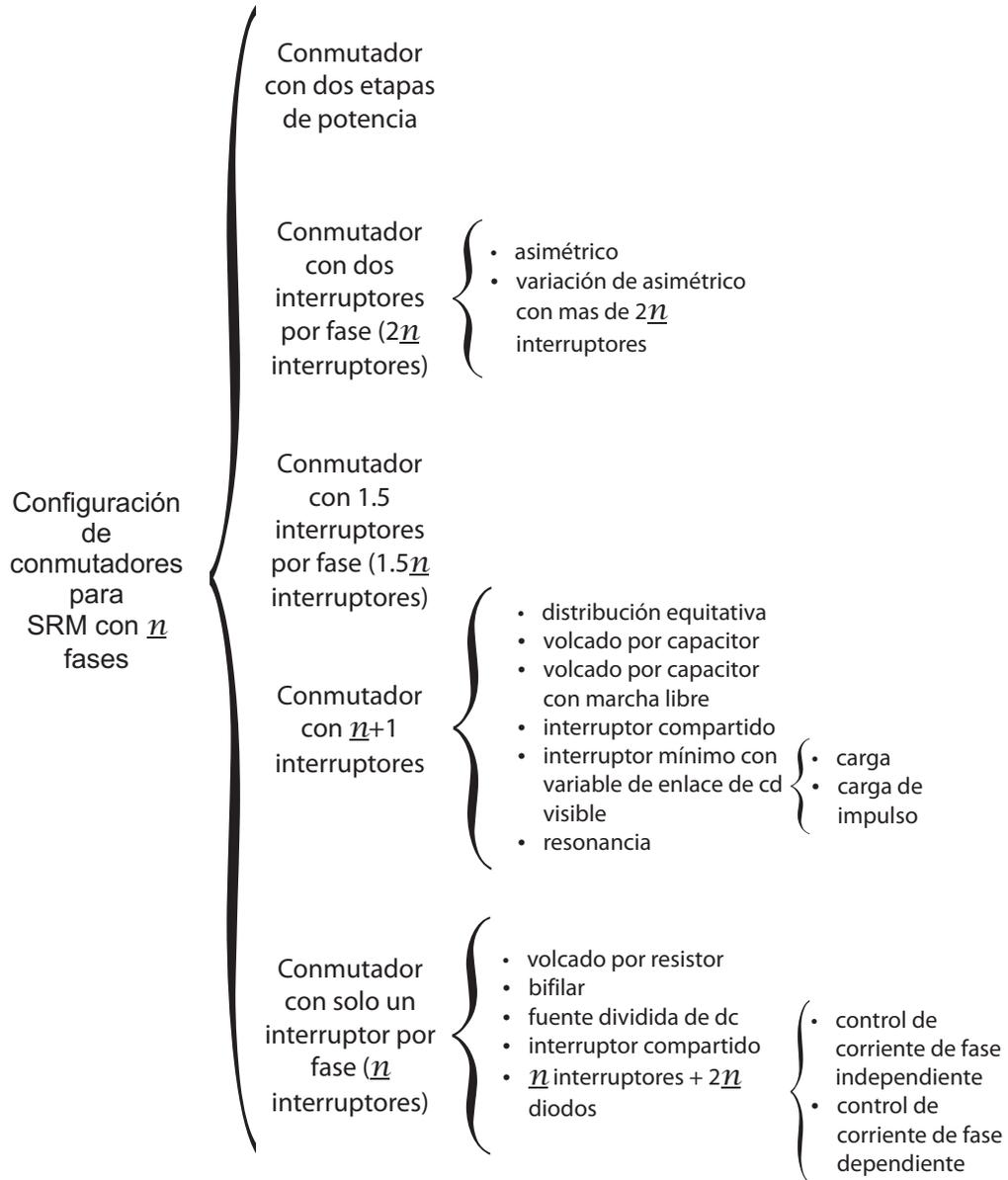


Figura 2.2: Clasificación de conmutadores para el SRM

fase. Cada fase del conmutador es independiente de las otras, así el control de corriente independiente puede ser aplicado y es eficiente tolerante a fallas, aún si una fase se estropea no influiría en las otras.

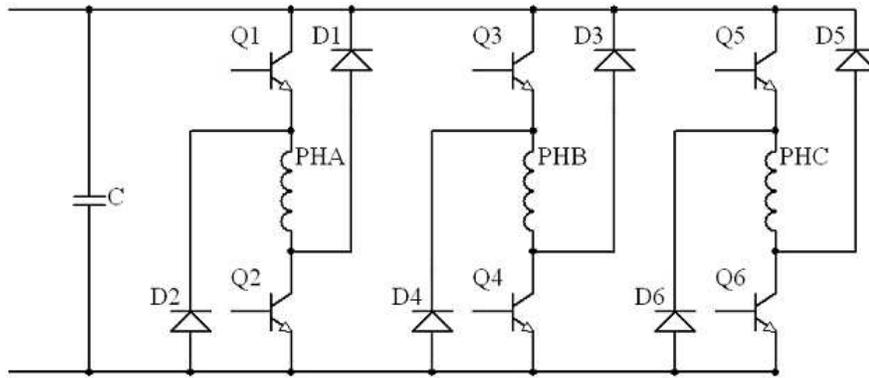


Figura 2.3: Conmutador de medio puente asimétrico

II *Conmutador Bifilar* Figura 2.4. Una de las características del SRM es la operación unipolar la cual requiere una corriente unipolar para cuatro cuadrantes de operación lo que implica que se requiera un solo dispositivo de conmutación por fase. El conmutador bifilar, maneja la primera topología que usa un solo interruptor por fase. Además, un devanado bifilar y un diodo se añaden a cada fase para devolver la energía a la fuente de *cd*.

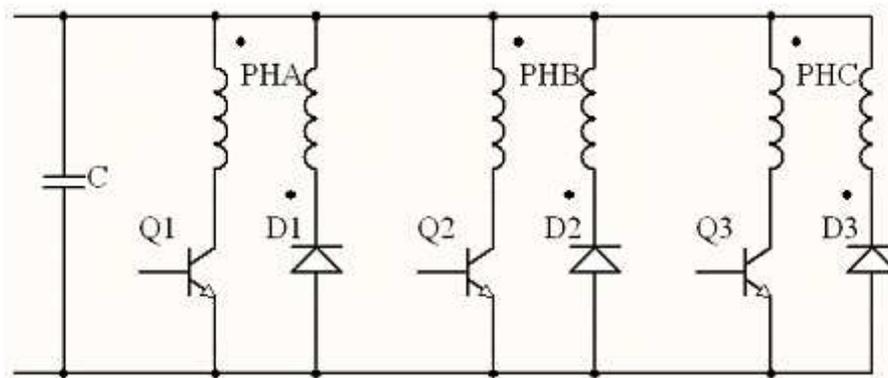


Figura 2.4: Conmutador bifilar

III *Conmutador con volcado por capacitor* Figura 2.5. Esta topología tiene un solo

interruptor por fase y un circuito de recuperación de energía el cual requiere un interruptor adicional y un diodo. La operación de esta topología es relativamente más complicada debido al circuito de recuperación de energía. Este conmutador permite el control independiente de las fases de corriente con un mínimo de interruptores y, además, tiene otro mérito con respecto a otros de un solo interruptor por fase, que no requiere amortiguadores para los interruptores de fase ya que su voltaje pico está sujeto por el condensador de almacenamiento de energía. El principal inconveniente de este convertidor es que la conmutación de corriente se ve afectada por la diferencia de tensión entre el condensador de almacenamiento de energía y la tensión del circuito intermedio.

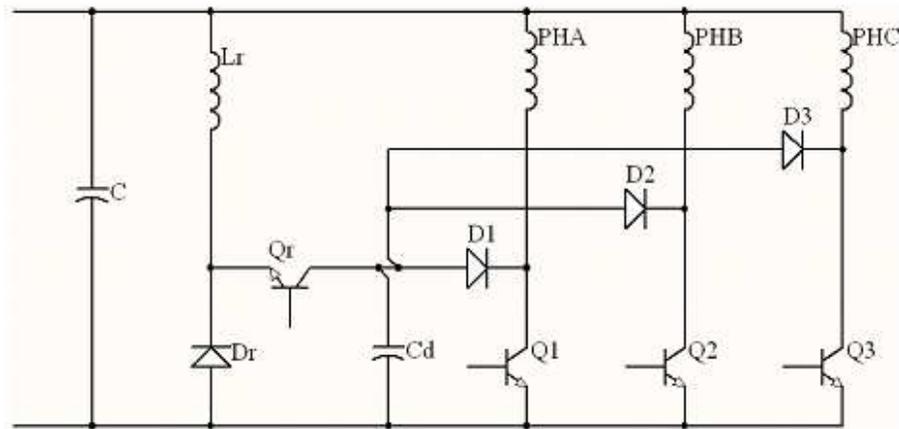


Figura 2.5: Conmutador con volcado por condensador

IV *Conmutador con variable de enlace de cd* Figura 2.6. Este conmutador también se aplica para el motor *cd* sin escobillas. Al controlar el interruptor *chopper*, se obtiene un voltaje de entrada diferente. Cuando el interruptor de fase se enciende, el devanado de fase se activa por el voltaje de entrada modificado. El circuito *chopper* también determina el volcado del devanado de fase y la tensión

de conmutación cuando el interruptor de fase no está en funcionamiento, lo que afecta a la respuesta actual. La mayor ventaja de esta topología es la entrada de voltaje controlable la cual puede reducir la frecuencia de conmutación de los interruptores de fase y por tanto minimizar las pérdidas de conmutación y núcleo.

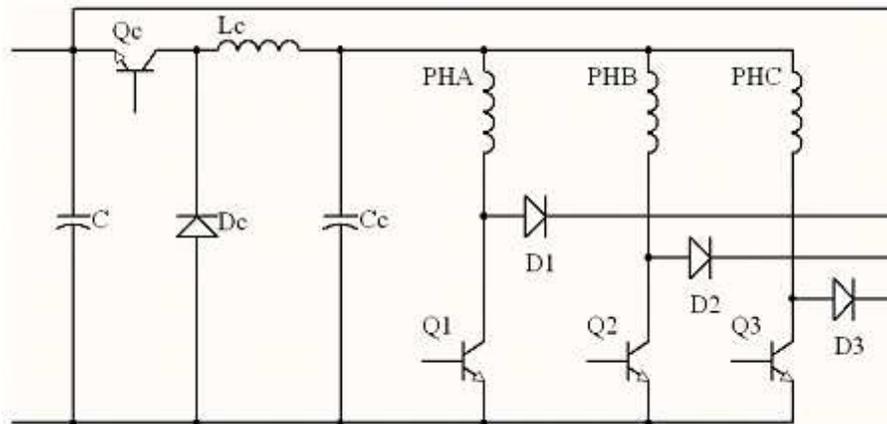


Figura 2.6: Conmutador con variable de enlace de *dc*

v *Conmutador con modulo de puente trifásico* Figura 2.7. Consiste de un módulo de puente trifásico y tres diodos. Cada diodo es puesto en serie con el devanado de fase con el objetivo de asegurar la circulación unidireccional de la corriente en conexión delta. El mérito más evidente de esta topología es el uso del modulo de puente trifásico, que no solo comparten la misma configuración del convertidor con el motor de inducción, sino que también reduce el volumen y el costo del conmutador. Sin embargo, el módulo de puente también trae una desventaja inherente a esta topología: no hay protección implícita en *shoot-through*.

Como resultado de la comparación y apuntando hacia la elección de una topología sobresaliente es difícil determinar cual es la mejor ya que cada una tiene sus ventajas

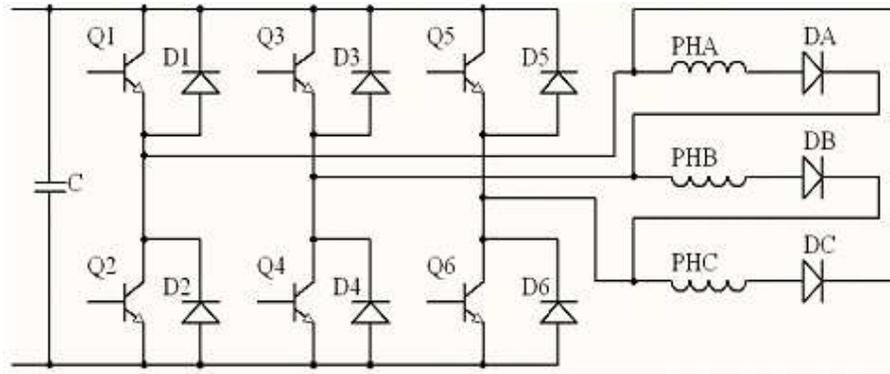


Figura 2.7: Conmutador con modulo de puente trifásico

y desventajas según la aplicación. Un resumen de la comparación se presenta en la Tabla 2.1:

Conmutador	a	b	c	d	e	f
Asimétrico	Vdc	2n	si	si	rápida	no
Bifilar	(1+a)Vdc	n	si	no	rápida	no
Volcado por Capacitor	>2Vdc	n + 1	si	no	lenta	no
Variable de enlace de dc	Vdc	n + 1	si	si	lenta	si
Puente trifásico	Vdc	2n	no	si	rápida	si

Tabla 2.1: Comparación de conmutadores

con

a → Voltaje nominal

b → Numero de componentes de conmutación

c → Control de corriente independiente

d → Voltaje de lazo cero

e → Corriente de respuesta

f → Falla de *shoot-through*

III. Representación matemática

En el trabajo de (Espinosa-Pérez *et al.*, 2002), el cual se utiliza como base en la presente sección, se muestra al SRM modelado bajo dos opciones: tomando en cuenta características magnéticas lineales ó contemplando las no linealidades magnéticas. De este modo se presentan dos modelos para el SRM a saber: modelo simplificado, el cual contempla al motor cuando las inductancias trabajan en un área lineal, es decir, sin saturación magnética de las corrientes de fase. Y modelo completo que considera al motor en toda el área trabajo.

Para la obtención de estos modelos se aplican las ecuaciones de Euler-Lagrange tomando en cuenta ciertas suposiciones:

- Se puede prescindir de la inductancia mutua entre fases.
- La inductancia puede ser modelada mediante una función no lineal continua de la posición del rotor y de la corriente en los devanados de la fase respectiva.
- La corriente en cada fase es tal que $i_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \dots, n$. Lo que trae como ventaja que se reduzcan los costos del conmutador.
- No existen efectos capacitivos en los devanados del estator ni efectos torsionales en la flecha, con lo que se asegura que la función de energía total en el motor es cero.

Considerando estas suposiciones de aquí en adelante, se presentan lo modelos:

III.1. Modelo completo

Primeramente se plantea el modelo del flujo, tomando en cuenta dos no linealidades importantes existentes en el motor: la saturación del circuito magnético y el

efecto de *slot leakage*³ (flujo de dispersión)

$$\psi_j(\theta, i_j) = \psi_s(1 - e^{-i_j f_j(\theta)}) \quad (2.1)$$

donde, ψ_s es el flujo saturado, θ la posición angular del rotor, i_j es el vector de corrientes de estator con $j = 1, 2, 3, \dots$ como el número de fase y

$$f_j(\theta) = a + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ b_m \sin \left[m N_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{n} \right] + c_m \cos \left[m N_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{n} \right] \right\} \quad (2.2)$$

una expansión en series de Fourier estrictamente positiva, con n como el número de fases de estator y N_r el numero de polos de rotor.

Tomando en cuenta las ecuaciones (2.1), (2.2), las funciones de energía (magnética y cinética) del motor y haciendo uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene el modelo del SRM:

$$u_j = \psi_s f_j(\theta) e^{-i_j f_j(\theta)} \frac{di_j}{dt} + \psi_s e^{-i_j f_j(\theta)} \frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta} i_j + r i_j \quad (2.3)$$

$$J \ddot{\theta} = T - T_L \quad (2.4)$$

con (2.3) como modelo del subsistema eléctrico y (2.4) el modelo del subsistema

³En las máquinas eléctricas giratorias, el flujo total no participa en la conversión de energía electromagnética como un todo: la proporción del flujo que participa en la conversión de energía se denomina el flujo principal (flujo del entrehierro) ψ_m de la máquina, y los componentes de flujo que no actúan en este proceso se definen como el flujo de dispersión ψ_j . El flujo principal tiene que atravesar el entrehierro de las máquinas rotativas, una función importante del flujo principal siendo así para conectar electromagnéticamente el estator y el rotor. En este sentido, un flujo entrehierro crea un flujo de encadenamiento ϕ_m entre el entrehierro y la bobina en turno y, en consecuencia, se conectan diferentes partes de la máquina. Los flujos de dispersión del estator y el rotor generalmente no cruzan el entrehierro. Estos contribuyen a la generación del flujo total de encadenamiento del bobinado produciendo un flujo de dispersión de encadenamiento ϕ_j . EL flujo de dispersión se produce tanto en devanados estator y el devanados del rotor. Se produce un flujo de dispersión también en las máquinas de imán permanente.

mecánico, con J la inercia, T_L el par de carga, y T el par generado de origen eléctrico total de la forma

$$T(\theta, i_1, i_2, \dots, i_n) = \sum_{j=1}^n T_j(\theta, i_j)$$

donde T_j es el par generado de origen eléctrico por fase, el cual es determinado por la derivada parcial de la co-energía magnética por fase respecto a la posición angular (θ), esto es

$$T_j(\theta, i_j) = \frac{\partial W'_j}{\partial \theta}$$

con

$$W'_j(\theta, i_j) = \psi_s i_j + \frac{\psi_s}{f_j(\theta)} [e^{-i_j f_j(\theta)} - 1]$$

quedando entonces como

$$T_j(\theta, i_j) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \psi_s i_j + \frac{\psi_s}{f_j(\theta) [e^{-i_j f_j(\theta)} - 1]} \right\}$$

dando como resultado la expresión matemática para el par generado

$$T_j(\theta, i_j) = \frac{\psi_s}{f_j^2(\theta)} \frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta} \{1 - [1 + i_j f_j(\theta)] e^{-i_j f_j(\theta)}\} \quad (2.5)$$

El par generado es un función no lineal de i_j aún si el circuito magnético se considera lineal. El hecho de que la característica de los flujos de encadenamiento sea periódica se observa gracias a la función periódica $f_j(\theta)$. El efecto de saturación se observa en la expresión del par (2.5) donde $0 < \{1 - [1 + i_j f_j(\theta)] e^{-i_j f_j(\theta)}\} < 1$ para cualquier valor de corriente. También, de esta misma expresión, se observa que el signo de T_j esta determinado únicamente por el signo de $\frac{\partial f_j}{\partial \theta}$ lo que indica que no

existe generación de par si no hay variación de f_j con respecto de θ y que el signo del par generado depende del signo de este término, por lo que también se puede concluir que solo se requiere corrientes positivas para generar un par de signo que se desee.

III.2. Modelo simplificado

Ya que la relación no lineal entre los flujos y las corrientes en el modelo completo del SRM complica el análisis matemático, se considera una aproximación del comportamiento no lineal de las inductancias por su primera armónica, esto es, puede ser aproximado por un comportamiento cosenoidal. En cuyo caso se obtiene una relación lineal entre flujos y corrientes dada por la expresión

$$\psi_j(\theta, i_j) = L_j(\theta)i_j \quad (2.6)$$

donde $\psi_j(\theta, i_j)$ es el flujo magnético de dispersión de la j -ésima fase, i_j es la corriente de la j -ésima fase de estator y la j -ésima inductancia de fase está dada por

$$L_j(\theta) = l_0 - l_1 \cos \left[N_r \theta - (j - 1) \frac{2\pi}{n} \right] \quad (2.7)$$

en esta expresión l_0 y l_1 son constantes positivas tales que $l_0 > l_1$ haciendo de esta manera que la ecuación (2.7) sea definida positiva. Bajo estas condiciones el modelo puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} u_j &= L_j(\theta) \frac{di_j}{dt} + G_j(\theta) \omega i_j + r i_j \\ J \dot{\omega} &= T_e(\theta, i_1, i_2, \dots, i_n) - T_L \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde u_j es el voltaje aplicado a la j -ésima terminal de fase del estator, i_j es la j -ésima corriente de fase del estator, r es la resistencia de los devanados del estator, θ es la posición angular del rotor, T_L es el par de carga, J la inercia total del rotor y

$$G_j(\theta) = \frac{\partial L_j(\theta)}{\partial \theta} = N_r l_1 \sin \left[N_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{n} \right] \quad (2.9)$$

es variación de la inductancia, por fase, con respecto a la posición angular. Es de notar que el par mecánico de origen eléctrico $T_e(\theta, i_1, i_2, i_3)$, depende tanto de la posición angular del rotor como de todas las corrientes del estator.

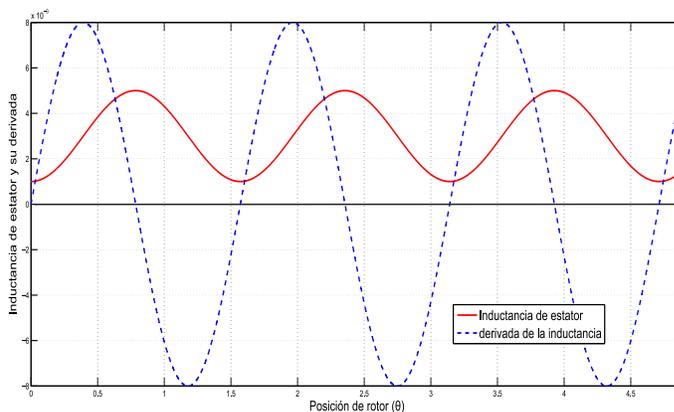


Figura 2.8: Inductancia de estator y su derivada respecto a la posición

Con base en las ecuaciones dadas, el par mecánico de origen eléctrico es de la forma:

$$T_e(\theta, i_1, i_2, \dots, i_n) = \sum_{j=1}^n T_j(\theta, i_j) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} G_j(\theta) i_j^2 \quad (2.10)$$

Se observa, al igual que en el modelo completo, que el par de cada fase aparece como una función cuadrática de la corriente de fase respectiva y que su signo es determinado por la derivada parcial de la inductancia de fase respecto a la posición

del rotor, $G_j(\theta)$.

En la Figura 2.8 se muestra el comportamiento de la inductancia de estator y su respectiva deriva parcial respecto a la posición, contra la posición del rotor. En ella es posible observar que de acuerdo a la ecuación (2.10), se producirá par positivo de la función $G_j(\theta)$, esto es, en el perfil de subida de la curva de inductancia. Esta condición indica que las fases del estator deben ser conmutadas de manera secuencial atendiendo en todo momento a la posición del rotor. Un ejemplo de esto se muestra en la Figura 2.1, para un motor trifásico, en donde se aprecia una secuencia $j_1 - j_2 - j_3 - j_1 - \dots$ para obtener un movimiento en sentido anti-horario.

IV. Transformación Blondel-Park

En general, las ecuaciones diferenciales que describen a los máquinas eléctricas son altamente no lineales y dependientes de la posición del rotor. Se sabe que las ecuaciones de ciertas máquinas eléctricas con características magnéticas lineales pueden ser transformados a una forma más simple en la cual la dependencia de la posición desaparece.

A finales de los años 20, R. H. Park introdujo un enfoque innovador al análisis de máquinas eléctricas. Formuló un cambio de variables el cual sustituye las variables relacionadas con las bobinas del estator de una máquina síncrona (voltajes, corrientes, flujos de encadenamiento) con variables relacionadas a bobinas ficticias que giran con el rotor, esto es, transformó las variables de estator a un marco de referencia fijo al rotor. La transformación de Park tiene la propiedad de prescindir de las inductancias variantes en el tiempo de las ecuaciones de voltaje de la máquina síncrona lo cual ocurre debido a circuitos en movimiento relativo y a circuitos con reluctancia magnética variable. A finales de los años 30, H. C. Stanley manejo un

cambio de variables en el análisis de la máquina de inducción. Demostró que las inductancias variantes en el tiempo en la ecuaciones de voltaje de una máquina de inducción debido a los circuitos eléctricos en movimiento relativo pueden ser descartadas por la transformación de variables asociadas con las bobinas del rotor a variables asociadas con bobinas estacionarias ficticias, que para el caso, las variables del rotor son transformadas a un marco de referencia fijo al estator. G. Kron introdujo un cambio de variables que descartan la posición o las inductancias mutuas variantes en el tiempo de una máquina de inducción transformado tanto las variables de estator como del rotor a un marco de referencia girando en sincronía con el campo magnético de rotación. D. S. Brereton, D. G. Lewis y C. G. Young utilizaron un cambio de variables que también descarta las inductancias variantes en el tiempo de una máquina de inducción transformando las variables de estator a un marco de referencia fijo al rotor. Esto es fundamentalmente lo que se conoce como la transformación de Park aplicada a máquinas de inducción. Park, Stanley, Kron, Brereton, Lewis y Young diseñaron y desarrollaron cambios de variables, los cuales cada uno parecía ser especialmente adaptado a una aplicación particular, por tanto, cada transformación fue derivada y tratada por separado hasta que en 1965 se observó que todas estas eran utilizadas en el análisis de la máquina de inducción cuya principal meta era prescindir de las inductancias variantes en el tiempo refiriendo las variables del rotor y del estator a un marco de referencia que puede girar de acuerdo con alguna velocidad angular o permanecer fijo. Estas transformaciones pueden ser cómodamente obtenidas asignando una velocidad de rotación apropiada, incluso cero, refiriendo todas ellas a un *marco de referencia arbitrario*. Más adelante se observó que las variables del estator de una máquina síncrona también podrían ser referidas a un marco de referencia arbitrario, aunque, las inductancias variantes en el tiempo de una máquina síncrona son descartadas sólo si el marco de referencia

esta fijo al rotor; por tanto el marco de referencia arbitrario no ofrece ventajas en el análisis de la máquina síncrona como si lo hace con la máquina de inducción.

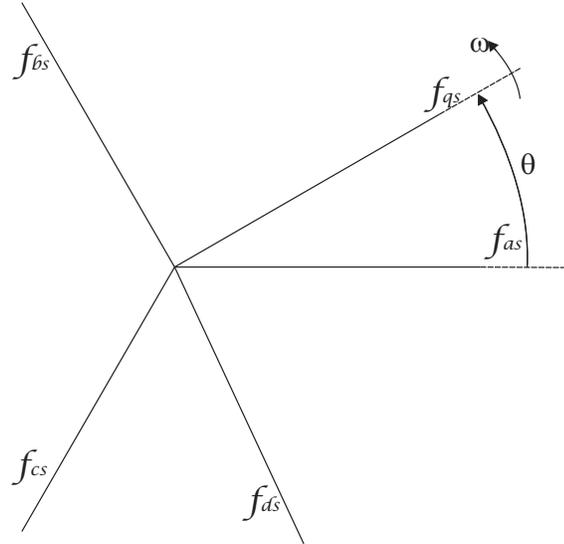


Figura 2.9: Transformación para circuitos estacionarios proyectados por relaciones trigonométricas

Aunque la transformación del marco de referencia arbitrario es un cambio de variables y no necesita un vínculo físico, a menudo es conveniente visualizar las ecuaciones de transformación como relaciones trigonométricas como se muestra en la Figura 2.9. Particularmente las ecuaciones de transformación pueden ser consideradas como si las variables f_{qs} y f_{ds} están dirigidas a lo largo de las trayectorias ortogonales entre sí y que giran a una velocidad angular ω , entonces f_{as} , f_{bs} y f_{cs} pueden ser consideradas como variables dirigidas a lo largo de trayectorias estacionarias, cada cual desplazada 120° . Esta transformación es particularmente aplicada a máquinas de *ca* donde la dirección de f_{as} , f_{bs} y f_{cs} puede, también, ser considerada como la dirección de los ejes magnéticos de las bobinas del estator. Se encontrará que la dirección de f_{qs} y f_{ds} puede ser considerada como la dirección de los ejes magnéti-

cos de las nuevas bobinas creadas por el cambio de variables (Krause *et al.*, 2002).

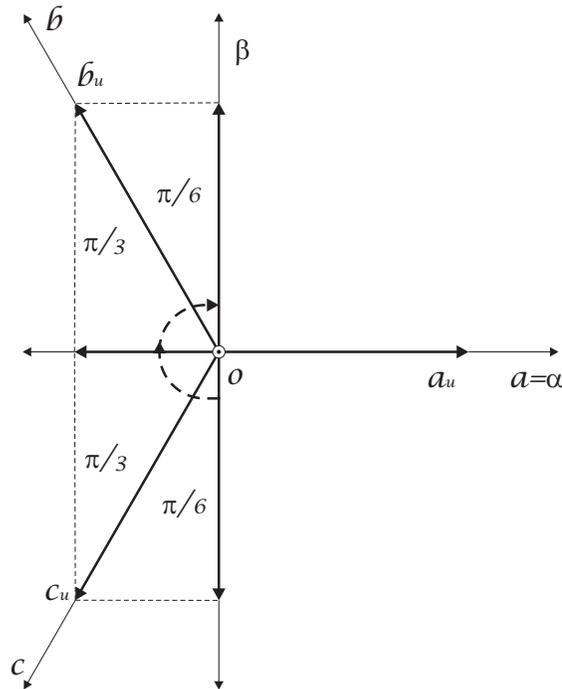


Figura 2.10: Transformación del eje coordenado abc al $\alpha\beta$

Una transformación desde el sistema coordenado estacionario trifásico (abc) a un sistema coordenado estacionario denominado $\alpha\beta$ es mostrada en la figura 2.10, con

$$f_{\alpha\beta} = P(0)f_{abc}$$

donde la matriz de transformación $P(0)$ esta dada por:

$$P(0) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$f_{\alpha\beta}$ contiene tres componentes, f_a , f_b y f_0 y representa la descomposición de cada

una de las componentes del f_{abc} sobre los ejes $\alpha\beta$

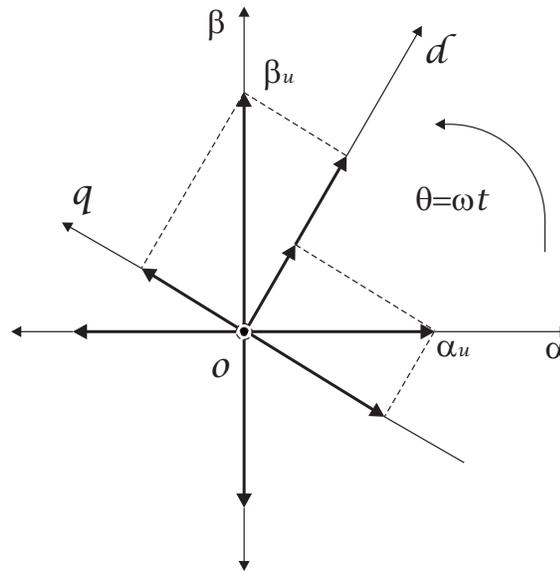


Figura 2.11: Transformación del eje coordenado $\alpha\beta$ al $dq0$

Una transformación desde el sistema coordenado estacionario $\alpha\beta$ al sistema giratorio $dq0$ se muestra en la figura 2.11, con

$$f_{0dq} = R(\theta_r) f_{\alpha\beta}$$

y $R(\theta_r)$ como la matriz que permite la transformación al eje giratorio,

$$R(\theta_r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_r) & -\sin(\theta_r) \\ 0 & \sin(\theta_r) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix}$$

donde $\theta_r = \omega_r + \frac{v_i}{2} + \delta$

El modelo presentado en el marco histórico está basado y probado en máquinas

ideales simétricas con devanados sinusoidales distribuidos por fase, pero ¿que hay de las máquinas que no cumplen estos requisitos? ¿Hay una transformación más amplia? La clásica transformación de Blondel-Park fue extendida a un modelo completo de una máquina eléctrica generalizada, esto es, incluyendo la dinámica mecánica. Se trata una máquina giratoria en general con un total de n bobinas en estator y rotor. Ahora, sea el flujo de encadenamiento y la corriente en la k -ésima bobina denotados por λ_k e i_k respectivamente. Asumiendo materiales magnéticos lineales, aplicando la ley de Gauss y la ley de Ampere permiten la siguiente relación afín entre el vector flujo $\lambda = [\lambda_1 \cdots \lambda_n]^T$ y el vector de corriente $i = [i_1 \cdots i_n]^T$:

$$\lambda = L(\theta)i + \mu(\theta) \quad (2.11)$$

donde θ es la posición mecánica del rotor, $L(\theta)$ es la matriz $n \times n$ de inductancias de las bobinas y $\mu(\theta)$ el vector de flujos de encadenamiento debido a imanes permanentes (notar que cuando $\mu(\theta) = 0$, (2.11) se reduce al caso de la máquina con magnética lineal sin imanes permanentes como es el caso del SRM y se aprecia en la ecuación 2.6).

Ahora, sea $\psi = L(\theta)i$ el vector de flujo producido sólo por las corrientes en las bobinas, y sea $k(\theta) = \frac{d\mu(\theta)}{d\theta}$ una cantidad que aparece en las ecuaciones de estado de la máquina. Por el modelo constitutivo de (2.11), las ecuaciones de estado que describen los subsistemas mecánico y eléctrico de la máquina pueden ser derivadas de su forma física y tomar la forma

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -RL^{-1}(\theta)\psi - \omega k(\theta) + v(t) \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{\mathcal{T}} \left[-\frac{1}{2}\psi^T \frac{dL^{-1}(\theta)}{d\theta} \psi + \psi^T L^{-1}(\theta)k(\theta) + \eta(\theta) + \tau(\omega, \theta, t) \right] \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (2.12)$$

con

- ω velocidad angular del rotor,
- v el vector de la fuente de voltaje,
- τ el par externo neto en el rotor,
- R la matriz de resistencias de estator,
- \mathcal{T} la inercia del rotor,
- $\eta(\theta)$ el par debido sólo a los imanes permanentes.

La primera ecuación (subsistema eléctrico) resulta de la aplicación de las leyes de Faraday y Ohm. La segunda ecuación (subsistema mecánico) viene de la forma rotacional de la ley de Newton, con el par electromagnético derivado por los argumentos de conservación de energía, viendo un imán permanente como una bobina equivalente con una corriente constante apropiada y ajustando la fórmula de par para una máquina sin imanes permanentes. Cabe observar que $k(\theta)$ y $\eta(\theta)$ desaparecen en caso que la máquina no contenga imanes permanentes.

El hecho que $L^{-1}(\theta)$, $k(\theta)$ y $\eta(\theta)$ en el lado derecho de (2.12) son dependientes de θ suscita dificultades para el análisis de cada máquina, es difícil determinar de (2.12), las condiciones para la existencia de una velocidad constante de operación del sistema, calcular el estado estacionario y analizar su estabilidad. Por lo que es factible utilizar la transformación de Blondel-Park Extendida para facilitar el análisis eliminando la dependencia de θ , pero surge una pregunta ¿es posible realizar la transformación? para responder esta pregunta se presenta un teorema que contiene las condiciones necesarias y suficientes a cumplir por la máquina eléctrica que se desea transformar.

Teorema 1 ■ *La máquina eléctrica representada en (2.12) es Blondel-Park transformable en su forma extendida si y sólo si existe una matriz constante $V_{n \times n}$ tal que*

$$\begin{aligned}
VL(\theta) + L(\theta)V^T &= -\frac{dL(\theta)}{d(\theta)} \\
VR + RV^T &= 0 \\
Vk(\theta) &= -\frac{dk(\theta)}{d(\theta)}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

con

$$L = \begin{bmatrix} L_s I & Me^{\mathbb{J}\theta} \\ Me^{-\mathbb{J}\theta} & L_r I \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de inductancias}$$

$$\text{Matriz de resistencias} \quad R = \begin{bmatrix} R_s I & 0 \\ 0 & R_r I \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz antisimétrica}$$

$$\text{Matriz exponencial} \quad e^{\mathbb{J}\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

- *Sí la máquina eléctrica es Blondel-Park transformable en su forma extendida, una transformación simple esta dada por*

$$P(\theta) = P_0 e^{V\theta} \tag{2.14}$$

donde V es cualquier matriz constante que satisface (2.13), $e^{V\theta}$ denota la matriz exponencial común y P_0 es cualquier matriz constante $n \times n$ no singular.

- *El sistema completo es Blondel-Park transformable si y solo sí su subsistema eléctrico es Blondel-Park transformable.*

Es sabido que el SRM no es Blondel-Park transformable, a continuación la formalización a dicha declaración.

Tomando el modelo simplificado del SRM, ecuación (2.8)

$$\begin{aligned} u_j &= L_j(\theta) \frac{di_j}{dt} + G_j(\theta) \omega i_j + r i_j; \quad j = 1, 2, \dots \\ J\dot{\omega} &= T_e(\theta, i_1, i_2, i_3) - T_L \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned}$$

se definen las matrices de inductancias y resistencias de estator como

$$L(\theta) = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & L_n \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & r \end{bmatrix}$$

debido a que el SRM se diseña para evitar la existencia de inductancias mutuas o que estas sean muy pequeñas, la matriz de inductancias es diagonal al igual que la matriz de resistencias del estator.

Entonces aplicando el Teorema 1 a un SRM trifásico (sin pérdida de generalidad) se tiene

$$\begin{aligned} VL(\theta) + L(\theta)V^T &= -\frac{dL(\theta)}{d(\theta)} \\ VL(\theta) + L(\theta)V^T &= -G_j(\theta) \end{aligned}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_0 + l_1 \cos(N_r \theta) & 0 & 0 \\ 0 & l_0 + l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & l_0 + l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} l_0 + l_1 \cos(N_r \theta) & 0 & 0 \\ 0 & l_0 + l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & l_0 + l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \\
 = & - \begin{bmatrix} N_r l_1 \sin(N_r \theta) & 0 & 0 \\ 0 & N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
 v_{11} &= -\frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta)}{2l_0 - 2l_1 \cos(N_r \theta)} \\
 v_{12} &= 0 \\
 v_{13} &= 0 \\
 v_{21} &= 0 \\
 v_{22} &= -\frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})}{2l_0 - 2l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} \\
 v_{23} &= 0 \\
 v_{31} &= 0 \\
 v_{32} &= 0 \\
 v_{33} &= -\frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})}{2l_0 - 2l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})}
 \end{aligned}$$

$$V = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta)}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} \end{bmatrix}$$

Ahora, esta misma V ha de cumplir con

$$VR + RV^T = 0$$

sustituyendo se tiene

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta)}{l_0 + l_1 \cos(N_r \theta)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})}{l_0 + l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})}{l_0 + l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \\ & + \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta)}{l_0 + l_1 \cos(N_r \theta)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})}{l_0 + l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})}{l_0 + l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta) r}{l_0 + l_1 \cos(N_r \theta)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) r}{l_0 + l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) r}{l_0 + l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Analizando la igualdad anterior, se sabe que el término

$$l_0 + l_1 \cos \left[N_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right]$$

denominador en la diagonal no tiene cruce por cero, así que este termino queda descartado para hacer efectiva la igualdad. Para el término del numerador

$$N_r l_1 \sin \left[N_r \theta - (j - 1) \frac{2\pi}{3} \right] r$$

se sabe que los términos N_r , l_1 y r son positivos de manera que el único termino que puede satisfacer la igualdad es la posición angular θ . Esto se puede ser satisfecho pero únicamente un término de la diagonal a la vez, esto es, que no es posible que la diagonal completa sea igual a cero, de aquí que la igualdad no se puede satisfacer y que no se cumpla así la segunda condición del Teorema 1 con la V encontrada anteriormente.

Por tanto se concluye, a través del Teorema 1, que el motor de reluctancia conmutada no es Blondel-Park transformable. Este hecho, el cual había sido afirmado con anterioridad pero no se había formalizado, muestra que el SRM siempre tendrá parámetros que dependan de la posición angular, lo que complica el análisis matemático hasta el punto de vista de influir en el resultado, como se verá en capítulos posteriores.

V. Propiedades de pasividad del SRM

En el estudio de sistemas dinámicos, tales como una red eléctrica y máquinas eléctricas, el concepto de energía resulta de gran beneficio para inducir el comportamiento del sistema. En análisis de estabilidad, es provechoso manejar este concepto para estudiar las propiedades del modelo matemático de un proceso general, como es el caso de sistemas disipativos, lo cuales se definen como sistemas para los cuales pueden ser halladas tanto una función de energía de entrada como una función de energía almacenada, con la propiedad de que siempre disipará energía. Existen

diferentes tipos de sistemas disipativos, los cuales se definen de acuerdo al tipo de suministro de entrada del sistema. Un tipo importante de sistemas disipativos son los sistemas pasivos, en los cuales, la energía de entrada está proporcionada por el producto de la entrada y la salida del sistema (Ortega *et al.*, 1998).

Definición 1 *Considere un sistema no lineal de la forma*

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y = h(x) & y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

con suministro de energía w , se dice que el sistema es disipativo si y sólo si $V(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, llamada función de energía almacenada, es una función definida positiva en el estado, para toda u , x soluciones del sistema de ecuaciones y para todo $t > 0$, se tiene

$$\int_0^t w(\tau) d\tau \geq V(x(t)) - V(x(0))$$

El sistema se dice será pasivo si éste es disipativo con suministro de energía dado por el producto interno $w = \langle u, y \rangle = y^T u$ y la función de energía V satisface $V(0) = 0$.

■

Definición 2 *Una función $\beta : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ se dice que pertenece a la clase \mathcal{K} si es estrictamente creciente y $\beta(0) = 0$.*

■

Definición 3 *Considere el sistema no lineal de la forma Σ , se dice que la aplicación $H : u \rightarrow y$ es estrictamente pasiva en relación con las funciones $V(x)$ y $\beta(x)$ si y sólo si $V(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida positiva en el estado, $\beta(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$*

es una función de clase \mathcal{K} para toda u, y, x soluciones del sistema de ecuaciones y para todo $t > 0$, se tiene

$$\int_0^t y^T u \geq V(x(t)) - V(x(0)) + \int_0^t \beta(|x|) dt$$

■

Proposición 1 *El modelo del motor de reluctancia conmutada reportado en (Espinosa-Pérez et al., 2002) define dos mapeos estrictamente pasivos para el subsistema eléctrico: 1) entre los voltajes de estator y las corrientes de estator, 2) entre la velocidad angular negativa del rotor y el par de origen eléctrico. Define también un mapeo estrictamente pasivo para el subsistema mecánico: entre la diferencia del par de origen eléctrico menos el par de carga y la velocidad angular negativa del rotor; cumpliendo así con la ecuación:*

$$\begin{aligned} \Sigma_e & : u = \begin{bmatrix} u_s \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \rightarrow y = \begin{bmatrix} i \\ T(\theta, i) \end{bmatrix} \\ \Sigma_m & : u = (T_L - T) \rightarrow y = -\dot{\theta} \end{aligned}$$

Demostración 1 *Basándose en la propiedad de los sistemas electromecánicos que establece que la suma de la energía y co-energía magnéticas es igual al producto de los enlaces de flujo y las corrientes de las bobinas, para el motor de reluctancia conmutada se tiene*

$$W(\theta, \psi) + W'(\theta, i) = \psi^T i$$

donde $\psi = [\psi_1, \psi_2, \psi_3]^T$ es el vector de flujos de encañamiento,

$$W(\theta, \psi) = \sum_{j=1}^3 W_j(\theta, \psi_j) = \sum_{j=1}^3 \int_0^{\bar{\psi}_j} i_j(\theta, \psi_j) d\psi_j$$

es la función de energía magnética total y

$$W'(\theta, \mathbf{i}) = \sum_{j=1}^3 W_j(\theta, i_j) = \sum_{j=1}^3 \int_0^{\bar{i}_j} i_j(\theta, i_j) di_j$$

es la función de co-energía magnética total. Así, la función de energía magnética puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} W(\theta, \psi) &= \psi^T \mathbf{i} - W'_j(\theta, i_j) \\ &= \psi^T \mathbf{i} - \sum_{j=1}^3 W'_j(\theta, i_j) \end{aligned}$$

Se puede mostrar que su derivada respecto al tiempo es

$$\begin{aligned} \dot{W}(\theta, \psi) &= \left[\psi - \frac{\partial W'(\theta, \mathbf{i})}{\partial \mathbf{i}} \right]^T \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^T \mathbf{i} - T_e(\theta, \mathbf{i}) \dot{\theta} \\ &= \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^T \mathbf{i} - T_e(\theta, \mathbf{i}) \dot{\theta} \end{aligned}$$

Entonces evaluando la última expresión a lo largo de las trayectorias del subsistema eléctrico del modelo del motor de reluctancia conmutada, se obtiene

$$\dot{W}(\theta, \psi) = -\mathbf{i}^T \mathbf{R} \mathbf{i} + \mathbf{u}^T \mathbf{i} - T_e(\theta, \mathbf{i}) \dot{\theta}$$

con $\mathbf{R} = \text{diag}[r, r, r]$, lo cual, después de la integración en el tiempo, demuestra una primera parte.

La segunda parte se ataca de una forma similar considerando la función de co-

energía cinética de la máquina dada por

$$K'(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

de la cual la derivada de esta función evaluada a lo largo de las trayectorias del subsistema mecánico queda

$$\dot{K}'(\dot{\theta}) = -\dot{\theta}(T_L - T_e)$$

a lo que de nuevo integrando en el tiempo se completa la demostración. \square

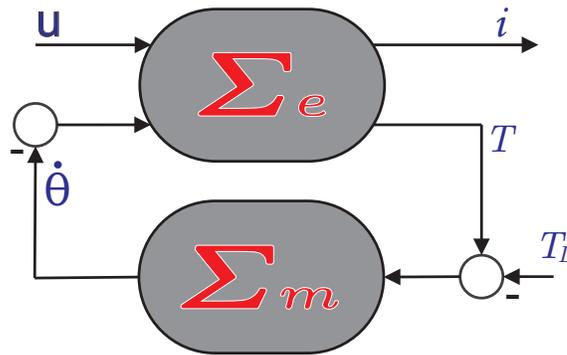


Figura 2.12: Descomposición Pasiva del motor de reluctancia conmutada

Desde el punto de vista de control se sabe que los sistemas pasivos son estables en el sentido de Lyapunov cuando su entrada es cero, además de contar con la dinámica cero también estable, es decir, son sistemas de fase mínima y de allí la importancia que el motor de reluctancia conmutada tenga propiedades de pasividad e incluso de pasividad estricta. Otra de las propiedades atractivas de estos sistemas, y que también es resultado de la demostración de la Proposición 1, es la interconexión por retroalimentación negativa entre ellos que da como resultado un sistema también pasivo y, por lo tanto, estable. Para el motor de reluctancia conmutada, la propie-

dad básica de que se hace uso es que su modelo puede ser descompuesto como la interconexión por retroalimentación de dos subsistemas pasivos, uno eléctrico y otro mecánico, como se muestra en Figura 2.12, considerando para el subsistema eléctrico: las entradas u_s como los voltajes de estator, $\dot{\theta}$ como la velocidad angular del rotor, y las salidas i como las corrientes de estator, T como el par electromecánico generado; y para el subsistema mecánico: las entradas T_L como el par de carga menos T como el par electromecánico generado y, la salida $\dot{\theta}$ como la velocidad angular del rotor.

*Los pollitos dicen pío, pío, pío
cuando tienen hambre y cuando
tienen frío.*

Anónimo

3

Observabilidad

Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde x denota el vector de estados, tomando valores en X una variedad conectada de dimensión n , el vector de entradas externas conocidas denotado por u , tomando valores en algún subconjunto abierto $U \in \mathbb{R}^m$, y el vector de salidas medibles y tomando valores en algún subconjunto $Y \in \mathbb{R}^p$. Las funciones f y h se asume serán \mathcal{C}^∞ con referencia a sus argumentos, las funciones de entrada $u(\cdot)$ locales y esencialmente acotadas y funciones medibles en un conjunto \mathcal{U} (Besançon, 2007).

Dado el modelo (3.1), el propósito de actuar sobre el sistema, o monitorearlo, en general necesita el conocimiento de $x(t)$, mientras que en práctica uno sólo tiene acceso a u y y . El problema de observación puede entonces formularse como sigue: *Dado un sistema descrito por una representación (3.1), encontrar un estimado $\hat{x}(t)$ para $x(t)$ a partir del conocimiento de $u(\tau)$, $y(\tau)$ para $0 \leq \tau \leq t$.*

I. Observabilidad no lineal

Para encontrar posibles soluciones al problema de observador se requiere el uso de algunas condiciones llamadas comúnmente *condiciones de observabilidad*. Dichas condiciones muestran la posibilidad de recuperar el estado $x(t)$ a partir del conocimiento de la entrada u y la salida y en un intervalo de tiempo t , esto es posible sólo si $y(t)$ tiene la información suficiente. Sin embargo, se pueden encontrar soluciones al problema de observador aún cuando y no tiene la información completa del vector estado.

Considerar el sistema simple:

$$\dot{x} = -x + u, \quad y = 0$$

uno no puede obtener información de x a partir de y , aunque el sistema:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{x} + u$$

satisface

I) $\hat{x}(0) = x(0) \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t), \forall t \geq 0;$

II) $\|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

Las cuales son condiciones que rigen un observador¹ y además proporciona un estimado de x , pues:

$$\widehat{\dot{x}} - x = -(\widehat{x} - x)$$

Esto corresponde a una noción de *detectabilidad*. Cabe notar que en este caso el tiempo de convergencia no puede ser sintonizado².

Restringiéndonos al caso de observadores en el sentido de observadores sintonizados, entonces la observabilidad llega a ser una condición necesaria y tal condición puede ser especificada de una manera geométrica.

I.1. Condiciones geométricas de observabilidad

Para el posible diseño de un observador (sintonizable), se debe ser capaz de recuperar la información del vector de estado a partir de la salida medida del tiempo inicial, y particularmente recuperar el valor inicial correspondiente al estado. Esto significa que la observabilidad se caracteriza por el hecho que de una salida medida, uno es capaz de distinguir entre varios estados iniciales, o equivalentemente, no se puede admitir estados indistinguibles:

Definición 4 *Indistinguibilidad (Hermann y Krener, 1977)*

Considere una entrada $u(\cdot)$ para el sistema (3.1) y una condición inicial $x_0 \in X$. Si otra condición inicial $x_1 \in X$ es tal que $y(t, x_0, u(\cdot)) = y(t, x_1, u(\cdot))$ para todo $t \in [0, T)$, para algún $T > 0$ entonces x_1 es un estado $u(\cdot)$ -indistinguible de x_0 en el

1

- si II se mantiene para cualquier $x(0)$, $\widehat{x}(0)$, el observador será global.
- si II se mantiene con convergencia exponencial el observador será exponencial.
- si II se mantiene con una tasa de convergencia sintonizable el observador será sintonizable.

²Sintonizado - que puede elegirse de antemano o establecerse de manera arbitraria el tiempo de convergencia

intervalo $[0, T)$. El conjunto de todos los estados $u(\cdot)$ -indistinguibles de x_0 será denotado por $\mathcal{I}_{(u,x)}$.

dicho de otro forma:

Definición 5 *Indistinguibilidad*

Un par $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es indistinguible para el sistema (3.1) si:

$$\forall u \in \mathcal{U}, \quad \forall t \geq 0, \quad h(\xi_u(t, x_0)) = h(\xi_u(t, x_1)).$$

Un estado x es indistinguible de x_0 si el par (x, x_0) es indistinguible.

De aquí que la observabilidad puede ser definida:

Definición 6 *Observabilidad (respecto a x_0)*

EL sistema (3.1) es observable (respecto a x_0) si este no admite algún par indistinguible (respecto a cualquier estado indistinguible de x_0).

ó de otra manera (Ibarra-Rojas *et al.*, 2004):

Definición 7 *El sistema (3.1) es observable en $x_0 \in X$ si $\mathcal{I}_{(u,x_0)} = \{x_0\}$ y el sistema (3.1) es observable si $\mathcal{I}_{(u,x)} = \{x\}$ para todo $x \in X$*

Esta definición es bastante general, esto es, observabilidad global. Aunque cabe la posibilidad de estar interesado sólo principalmente en distinguibilidad de estados en una vecindad de ellos, entonces considerando una noción más débil de observabilidad:

Definición 8 *Observabilidad débil (respecto a x_0)*

El sistema (3.1) es débilmente observable (respecto a x_0) si existe una vecindad μ de cualquier x (respecto de x_0) tal que no hay estados indistinguibles de x (respecto a x_0) en μ .

Es de notar que habrá casos en que las trayectorias se alejen de μ antes que puedan ser distinguibles entre dos estados de μ , así que una definición aún más local debe ser considerada:

Definición 9 *Observabilidad local débil (respecto a x_0)*

El sistema (3.1) es débil y localmente observable (respecto a x_0) si existe una vecindad μ de cualquier x (respecto a x_0) tal que para cualquier vecindad ν de x (respecto a x_0) contenida en μ , no hay estado indistinguible de x (respecto a x_0) en ν cuando se consideran intervalos de tiempo para el cual las trayectorias permanecen en ν .

Esta definición aproxima al hecho que se pueden distinguir todos los estados de sus vecindades sin alejarse demasiado. Esta noción es de mayor interés en la práctica. Dicha condición se basa en la noción de espacio de observación que corresponde al espacio de todos los estados observables:

Definición 10 *Espacio de observación*

El espacio de observación del sistema (3.1) está definido como el espacio vectorial real más pequeño (denotado por $\mathcal{O}(h)$) de funciones \mathcal{C}^∞ conteniendo los componentes de h y cerrado bajo derivación de Lie a lo largo de $f_u := f(\cdot, u)$ para cualquier constante $u \in \mathbb{R}^m$ (tal que para cualquier $\varphi \in \mathcal{O}(h)$, $L_{f_u}\varphi(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u)$)

Definición 11 *Condición de rango de observabilidad (respecto a x_0)*

El sistema (3.1) se dice que satisface la condición de rango de observabilidad (res-

pecto a x_0) si:

$$\forall x, \dim \{d\mathcal{O}(h)|_x\} = n \quad (\text{respectivamente } \dim \{d\mathcal{O}(h)|_{x_0}\} = n)$$

donde $d\mathcal{O}(h)$ es el conjunto de $d\varphi(x)$ con $\varphi \in \mathcal{O}(h)$

De aquí se tiene:

Teorema 2 Si el sistema (3.1) satisface la condición de rango de observabilidad en x_0 es local y débilmente observable en x_0 .

Siendo más general, si el sistema (3.1) satisface la condición de rango de observabilidad es local y débilmente observable.

Conversamente, el sistema (3.1) es local y débilmente observable si satisface la condición de rango de observabilidad en un subconjunto abierto y denso de X .

Una noción aún más débil a las anteriores es la detectabilidad (Ibarra-Rojas et al., 2004):

Definición 12 El sistema (3.1) es detectable si para cualquier $x_0 \in X$, y algún $u(\cdot) \in U$ se satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, u(\cdot)) - x(t, x_1, u(\cdot))\| = 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{I}_{(u, x)}$$

I.2. Condiciones analíticas de observabilidad

Existen condiciones adicionales, relacionadas con las entradas, las cuales se requieren para el diseño de observadores. Ahora se introducen nociones como *entradas universales* y *observabilidad uniforme*, y nociones más fuertes de *persistencia* y *regularidad*, las cuales son usualmente definidas para sistemas de estados afines se presentan para el caso mas general de sistemas.

Definición 13 *Entradas universales (en $[0, t]$)*

Una entrada u es universal (en $[0, t]$) para el sistema (3.1) si $\forall x_0 \neq x'_0, \exists \tau \geq 0$ ($\exists \tau \in [0, t]$) tal que $h(\mathcal{X}_u(\tau, x_0)) \neq h(\mathcal{X}_u(\tau, x'_0))$.

Una entrada u es una entrada singular si no es universal.

Por ejemplo, considerar el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned} \quad (3.2)$$

en donde se observa que $u(t) = 0$ es una entrada singular. Cabe notar que, en general, la caracterización de una entrada singular no es trabajo fácil, aunque existen sistemas los cuales no admiten entradas singulares:

Definición 14 *Sistemas uniformemente observables (localmente)*

Un sistema se dice ser uniformemente observable (UO) si cada entrada es universal (en $[0, t]$).

Esto significa que la observabilidad es independiente de las entradas por que es posible el diseño de un observador también independiente de estas, como en el caso de sistemas lineales invariantes en el tiempo.

Proposición 2 *Una entrada u es una entrada universal en $[0, t]$ para el sistema (3.1) si y sólo si*

$$\int_0^t \| h(\mathcal{X}_u(t, x_0)) - h(\mathcal{X}_u(t, x'_0)) \|^2 d\tau > 0 \forall x_0 \neq x'_0$$

Sea el caso de sistemas no uniformemente observables, en general es posible el diseño de observadores pero estos dependerán de las entradas, y no todas las entradas serán admisibles.

Considerar el sistema:

$$\dot{x} = \begin{Bmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{Bmatrix} x; \quad y = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

La entrada definida por $u(t) = 1$ para $t < t_1$ y $u(t) = 0$ para $t \geq t_1$ es universal, pero si aparece una perturbación después de t_1 entonces x no será correctamente reconstruido.

De aquí que la universalidad debe ser garantizada en todo tiempo, esto es, debe ser *persistente*.

Definición 15 *Entradas persistentes*

Una entrada u es una entrada persistente para el sistema (3.1) si

$$\exists t_0, T : \forall t \geq t_0, \forall x_t \leq x'_t, \int_t^{t+T} \| h(\chi_u(t, x_0)) - h(\chi_u(t, x'_0)) \|^2 d\tau > 0$$

Esto básicamente garantiza observabilidad sobre un intervalo de tiempo dado. Aunque esto no prevé la posibilidad de desvanecimiento cuando $t \rightarrow \infty$. Si esto llegara a suceder, la efectividad de los observadores tendría que compensar esto a través de una ganancia de corrección muy grande.

Para evitar esto, es necesario una garantía de observabilidad, llamada *persistencia regular*:

Definición 16 *Entradas regularmente persistentes*

Una entrada u es una entrada regularmente persistente para el sistema (3.1) si:

$$\exists t_0, T : \forall x_{t-T}, x'_{t-T}, \forall t \geq t_0 \int_{t-T}^t \| h(\chi_u(t, x_0)) - h(\chi_u(t, x'_0)) \|^2 d\tau > \beta (\| x_{t-T} - x'_{t-T} \|)$$

para alguna β de clase \mathcal{K} .

Proposición 3 Para sistemas lineales, las entradas regularmente persistentes son entradas u tales que:

$$\exists t_0, T, \alpha : \int_{t-T}^t \Phi_u^T(\tau, t-T) C^T C \Phi_u(\tau, t-T) d\tau \geq \alpha I > 0 \forall t \geq t_0, \quad (3.3)$$

con la matriz de transmisión $\Phi_u(\tau, t)$ definida por:

$$\frac{d\Phi_u(\tau, t)}{d\tau} = A(u(\tau))\Phi_u(\tau, t), \quad \Phi_u(t, t) = I$$

La parte izquierda de la ecuación (3.3) corresponde al llamado *Gramiano de observabilidad*, definido comúnmente para sistemas lineales variantes en el tiempo, para cualquier $t_1 < t_2 \in \mathbb{R}$, como:

$$\Gamma(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \Phi^T(\tau, t_1) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_1) d\tau \quad (3.4)$$

donde Φ es la matriz de transmisión para la parte autónoma del sistema.

Observación 1 ■ Las entradas regularmente persistentes para sistemas con estados afines son aquellas que hacen que los sistemas lineales variantes en el tiempo sean “completa y uniformemente observables” en el sentido de Kalman.

■ Para sistemas no lineales, la definición no es de uso fácil, mientras que para sistemas lineales variantes en el tiempo, es independiente de estados iniciales.

En caso de estar interesado en una estimación “a corto plazo”, es necesaria una propiedad de observabilidad más fuerte correspondiendo llamada *entrada regular localmente* con base a sistemas de estado afín. Esta propiedad puede ser formulada como:

Definición 17 *Entradas regulares localmente.*

Una entrada u es una entrada regular localmente si el sistema (3.1) es:

$$\exists T_0, \alpha : \forall x_{t-T}, x'_{t-T}, \forall T \leq T_0, \forall t \geq T, \\ \int_{t-T}^t \| h(\chi_u(\tau, x_{t-T})) - h(\chi_u(\tau, x'_{t-T})) \|^2 d\tau \geq \beta(\| x_{t-T} - x'_{t-T} \|, \frac{1}{T})$$

para alguna función β de clase \mathcal{KL}

Esta propiedad caracteriza, en cierto sentido, observabilidad en un tiempo arbitrariamente corto. Se observa que cuando $T = 0$ la observabilidad no puede ser garantizada, por tanto es necesario considerar una β apropiada:

Proposición 4 *Para sistemas con estado afín, las entradas regulares localmente son entradas u tales que:*

$$\exists T_0, \alpha : T \leq T_0, t \geq T,$$

$$\int_{t-T}^t \Phi_u^T(\tau, t-T) C^T C \Phi_u(\tau, t-T) d\tau \geq \alpha \frac{1}{T} \begin{bmatrix} T & & & 0 \\ & T^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T^n \end{bmatrix}^2 \quad (3.5)$$

con la matriz de transmisión $\Phi_u(\tau, t-T)$ como en la proposición (3).

Donde β esta dado por el lado derecho de (3.5) multiplicado por $\|x_{t-T} - x'_{t-T}\|$: esto es motivado por el Gramiano de la parte lineal de un sistema uniformemente

observable el cual puede ser acotado por la parte de abajo por una α suficientemente pequeña. Tomando en cuenta que para un sistema lineal observable, cada entrada es regular localmente.

Al momento se han aportado algunas definiciones de observabilidad para sistemas no lineales y sus análogos en sistemas lineales, desde la más general hasta ciertas definiciones puntuales. Cabe mencionar que no son todas las que existen ya que faltan algunas definiciones para casos como técnicas de alta ganancia, aproximaciones algebraicas etc., pero las definidas hasta ahora son suficientes, según el caso de estudio, para resolver el problema planteado.

Para finalizar, algunas observaciones:

Observación 2 ■ *Si un sistema es no observable en el sentido de condición de rango, este puede ser descompuesto en subsistemas, observable y no observable:*

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= f_1(\xi_1, \xi_2) + g_1(\xi_1, \xi_2)u \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(\xi_2) + g_2(\xi_2)u \\ y &= h_2(\xi_2)\end{aligned}$$

donde el subsistema ξ_2 satisface la condición de rango de observabilidad. En cuyo caso hay que trabajar con él.

■ *Considerando el sistema no observable, es tal que satisface $\forall u$ tal que x_0 y x'_0 son indistinguibles por u :*

$$\chi_u(t, x_0) - \chi_u(t, x'_0) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

satisface una propiedad de detectabilidad, y en tal caso es posible el diseño de un observador.

- *Las condiciones analíticas de observabilidad, arriba presentadas, han sido definidas en términos de entradas para el control de sistemas no lineales de la forma (3.1), pero estas definiciones también son aplicables para sistemas variantes en el tiempo ya que están definidas por salidas que evolucionan con respecto a condiciones iniciales. En otras palabras, estas nociones podría haber sido definida como propiedades de observabilidad diferentes, parametrizada por la entrada en el caso controlado*

II. Metodología de observabilidad

Sea el sistema no lineal

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} &= f(x, u); & x(0) = x_0 \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (3.6)$$

donde $x \in D_x \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entradas, $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salidas y f y h son funciones suficientemente suaves definidas en \mathbb{R}^{n+p} , y \mathbb{R}^n , respectivamente. La solución de Σ en $t \geq 0$ que pasa a través de x_0 en $t = 0$, correspondiendo la función de entrada $u \in \mathcal{U}$ (una clase de funciones de tiempo) es $x(t) = \phi(t, x_0, u)$. La salida esta dada por $y(t) = \lambda(t, x_0, u) = h(\phi(t, x_0, u))$.

II.1. Modelo de error y dinamica indistinguible (DI)

El objetivo de presentar un modelo de error para el sistema es desarrollar una herramienta que permita localizar y estudiar las trayectorias indistinguibles con el fin de determinar si éstas son detectables o no; de ser detectables, es posible observar el sistema, en caso contrario se puede concluir no observabilidad del sistema. Sea caso de no encontrar trayectorias indistinguibles entonces se puede determinar que

el sistema es globalmente observable.

Si se considera un sistema dinámico de la forma (3.6) con las variables de entrada y salida (u, y) medibles. Asumir que la estructura del sistema es conocida, incluyendo parámetros. Determinar si para el sistema (3.6) existe un modelo dinámico de error que represente el comportamiento indistinguible de trayectorias, esto es:

- I) Determinar un modelo dinámico del error que represente todas las trayectorias indistinguibles.

Esto con el objeto de que se obtenga un resultado global. En caso que todas las trayectorias indistinguibles sean las mismas trayectorias del sistema se concluye observabilidad y no es necesario proceder a la sección II.

- II) Determinar si éstas trayectorias indistinguibles son convergentes o no.

Con el objeto de determinar observabilidad o no observabilidad; si existen trayectorias indistinguibles divergentes entonces ningún observador que se diseñe para el sistema podrá converger para toda trayectoria del sistema.

Para llevar a cabo el procedimiento de la mejor manera es importante el uso de los conceptos: indistinguibilidad (Definición 4), observabilidad (Definición 7) y detectabilidad (Definición 12).

Construcción del modelo dinámico del error

Considerando la Definición 4 y el modelo (3.6) se suponen dos sistemas dinámicos idénticos, mismo modelo y mismos parámetros, considerando las mejores condiciones de operación para la observabilidad (si el sistema no es observable para estas condiciones mucho menos lo será para condiciones diferentes): parámetros bien co-

nocidos, entrada medible, conocimiento de los estados medibles y los no medibles³.

Entonces se suponen los modelos Σ_1 y Σ_2 con condiciones iniciales diferentes

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= f(x_1, u); \quad x_1(0) = x_{10} \\ y &= h(x_1) \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 &= f(x_2, u); \quad x_2(0) = x_{20} \\ y &= h(x_2) \end{cases}$$

y surge la pregunta ¿qué se podría esperar de las trayectorias de estado internas de estos dos sistemas, en concreto de las trayectorias de la dinámica del error?

1. Que las trayectorias de estados internos sean diferentes para todo $t > 0$

Esto implica que existe indistinguibilidad debido a que con las mismas condiciones de entrada-salida se tienen estados internos diferentes. Esta condición de indistinguibilidad es provocada por la entrada $u(\cdot)$ y de aquí el nombre de u -indistinguible de la Definición 4, además, esta condición de indistinguibilidad provoca que el sistema no sea observable.

2. Que las trayectorias de estados internos sean diferentes pero que converjan entre si cuando $t \rightarrow \infty$

En este caso también existe indistinguibilidad, pero cuando $t \rightarrow \infty$ ésta se pierde, lo cual implica que el sistema es detectable.

3. Que las trayectorias de estados internos sean 0 para todo $t > 0$

Esto implica que no existe indistinguibilidad debido a que no importa cuales sean las trayectorias de la planta, sólo existe una solución para la dinámica

³En el análisis nombrados como conocidos y no conocidos

guible (DI) para el sistema. Para lo cual, se considera que existen las *condiciones de indistinguibilidad*, es decir, que existe una entrada $u(\cdot)$ igual para ambos sistemas y un conjunto de condiciones iniciales (para los estados medibles) tales que la salida de ambos sistemas es igual para todo $t \geq 0$, esto es:

$$x_k = x_{1k} = x_{2k} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_k = 0; \quad \frac{d\epsilon_k}{dt} = 0$$

Las condiciones iniciales de los estados no medibles no se cambian.

Sustituyendo $\epsilon_k = 0$ en el sistema Ξ se obtiene un conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que será llamado *dinámica indistinguible del sistema*, vista como la conexión en cascada de Σ y Ξ , como se muestra:

$$DI : \begin{cases} \Sigma \\ \Xi \end{cases} \quad (3.7)$$

Es importante remarcar que esta *dinámica indistinguible* tiene naturaleza global, ya que esta representa todas las trayectorias indistinguibles del sistema. Estas trayectorias indistinguibles corresponden a un subconjunto de trayectorias de (Σ, Ξ) que tiene una salida cero, esto es, $\epsilon_k = 0$. Estas se pueden describir por una familia de sistemas dinámicos que viven en sub-variedades de \mathbb{R}^{2n} del espacio de estados, así, las ecuaciones algebro-diferenciales se pueden interpretar como ecuaciones diferenciales definidas sobre variedades.

Es necesario el conocimiento de las soluciones de la DI del sistema para concluir observabilidad. Determinar soluciones de sistemas algebro-diferenciales es, en general, más complicado que obtener las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Usando un procedimiento similar al utilizado para encontrar la *dinámica cero* de un sistema, se puede mostrar que la DI del sistema 3.7 se puede representar por un sistema de ecuaciones diferenciales definido en una subvariedad del espa-

cio de estados, es decir, considerando la(s) ecuación(es) igualada(s) a cero⁴ como la(s) ecuación(es) de salida se busca obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales en función de variables de error únicamente. De no ser esto posible difícilmente se podrá concluir la observabilidad del sistema a través de este método. Por último, si es posible encontrar el conjunto de soluciones del sistema, se determina si las trayectorias de estados internos son diferentes para $t > 0$, ó convergen cuando $t \rightarrow \infty$ ó son iguales a cero para $t > 0$, y así determinar la observabilidad del sistema.

El método presentado en este Capítulo será aplicado a los modelos del motor de reluctancia conmutada en el Capítulo 4.

⁴aquella(s) en la(s) que las condiciones iniciales se modificaron

Tanto si piensas que puedes, como si piensas que no puedes, estás en lo cierto. Pensar es el trabajo más difícil que existe. Quizá esa sea la razón por la que haya tan pocas personas que lo practiquen.

Henry Ford

4

Análisis de Observabilidad del SRM

Una vez que se ha explicado y se tiene noción de las definiciones de observabilidad y se ha elegido el método para el análisis de observabilidad del SRM se procede a hacer la aplicación de dicho análisis. En este capítulo se presentan primeramente las consideraciones del motor para el análisis, enseguida se presenta el análisis de modelo simplificado y del modelo completo para terminar con algunas observaciones.

I. Consideraciones

Se considerarán ambos modelos matemáticos descritos en el Capítulo 2, primeramente el modelo simplificado, por comodidad y cierta facilidad proporcionada por el modelo, y enseguida el modelo completo que conlleva un grado de complejidad de análisis mayor. Para ambos modelos se considera lo siguiente:

- Se considera un SRM trifásico, esto es $j = 1, 2, 3$ (sin pérdida de generalidad).

Como se demostró en la sección IV del Capítulo 2, el SRM no es Blondel-Park transformable, por lo que no se puede eliminar la dependencia de los parámetros respecto a un estado, en este caso concretamente, la dependencia de la inductancia L respecto a la posición angular θ y por tanto tener un grado de dificultad de análisis un poco mayor al de una máquina transformable por Blondel-Park.

- Los estados considerados conocidos (medibles) son las corrientes de estator i_j y la posición angular θ , y el estado desconocido (no medible) es la velocidad angular ω .
- Se consideran condiciones apropiadas para la observabilidad: parámetros conocidos, u y T_L medibles. Esto es simplemente por practicidad ya que si el motor no es observable en estas condiciones mucho menos lo será en condiciones más limitadas.
- En los modelos a utilizar no se toma en cuenta el coeficiente de fricción viscosa, en parte para ser consistente con los modelos planteados en (Espinosa-Pérez *et al.*, 2002) y en parte porque para el caso de estudio no es un término relevante.

II. Análisis

II.1. Análisis del modelo simplificado

Proposición 5 *Dado el modelo matemático del SRM (2.8), se asume que:*

- *los parámetros del modelo son conocidos,*
- *las corrientes de fase y la posición angular se consideran estados medibles, y*
- *no se mide la velocidad angular.*

Bajo estas condiciones el SRM, descrito por el modelo simplificado, es globalmente observable.

Demostración

Considerando la metodología anterior es posible obtener un modelo dinámico del error utilizando el modelo (2.8) considerando las condiciones apropiadas de operación para la observabilidad, esto es, parámetros del motor conocidos, u, T_L, i, θ son señales medibles y ω la señal no medible, y sustituyendo los respectivos valores de $L_j(\theta)$, $G_j(\theta)$ y $T_e(\theta, i_j)$ se obtiene

$$\Omega : \begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} [(\sin(N_r \theta) i_1^2 + \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) i_2^2 + \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) i_3^2)] - \frac{T_L}{J} \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta) \omega i_1 - r i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) \omega i_2 - r i_2}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) \omega i_3 - r i_3}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} \end{cases}$$

Tomando como partida dos motores idénticos y sus modelos dinámicos con condiciones iniciales arbitrariamente diferentes

$$\Omega_a : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_a}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[(\sin(N_r \theta_a) i_{1a}^2 + \sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) i_{2a}^2 + \sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) i_{3a}^2) \right] - \frac{T_L}{J}, \\ \omega_a(0) = \omega_{0a} \\ \frac{d\theta_a}{dt} = \omega_a, \\ \theta_a(0) = \theta_{0a} \\ \frac{di_{1a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a) \omega_a i_{1a} - r i_{1a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)}, \\ i_{1a}(0) = i_{10a} \\ \frac{di_{2a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{2a} - r i_{2a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3})}, \\ i_{2a}(0) = i_{20a} \\ \frac{di_{3a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{3a} - r i_{3a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3})}, \\ i_{3a}(0) = i_{30a} \end{array} \right.$$

$$\Omega_b : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_b}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[(\sin(N_r \theta_b) i_{1b}^2 + \sin(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}) i_{2b}^2 + \sin(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}) i_{3b}^2) \right] - \frac{T_L}{J}, \\ \omega_b(0) = \omega_{0b} \\ \frac{d\theta_b}{dt} = \omega_b, \\ \theta_b(0) = \theta_{0b} \\ \frac{di_{1b}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_b) \omega_b i_{1b} - r i_{1b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b)}, \\ i_{1b}(0) = i_{10b} \\ \frac{di_{2b}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}) \omega_b i_{2b} - r i_{2b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3})}, \\ i_{2b}(0) = i_{20b} \\ \frac{di_{3b}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}) \omega_b i_{3b} - r i_{3b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3})}, \\ i_{3b}(0) = i_{30b} \end{array} \right.$$

se definen variables de error las cuales corresponden a la diferencia entre las dinámicas de los motores Ω_a y Ω_b .

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \omega_a - \omega_b \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\omega_a}{dt} - \frac{d\omega_b}{dt} \\ \Delta &= \theta_a - \theta_b \Rightarrow \frac{d\Delta}{dt} = \frac{d\theta_a}{dt} - \frac{d\theta_b}{dt} \\ e &= i_a - i_b \Rightarrow \frac{de}{dt} = \frac{di_a}{dt} - \frac{di_b}{dt} \end{aligned}$$

Ordenando las ecuaciones de Ω_a y las obtenidas a través de las variables de error se obtiene el modelo del error del motor de reluctancia conmutada

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_a \\ DI : \\ E \end{array} \right\} \begin{cases} \frac{d\omega_a}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} [(\text{sen}(N_r \theta_a) i_{1a}^2 + \text{sen}(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) i_{2a}^2 + \text{sen}(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) i_{3a}^2)] - \frac{T_L}{J}, \\ \frac{d\theta_a}{dt} = \omega_a, \\ \frac{di_{1a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \text{sen}(N_r \theta_a) \omega_a i_{1a} - r i_{1a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)}, \\ \frac{di_{2a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \text{sen}(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{2a} - r i_{2a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3})}, \\ \frac{di_{3a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \text{sen}(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{3a} - r i_{3a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3})}, \end{cases} \begin{array}{l} \omega_a(0) = \omega_{0a} \\ \theta_a(0) = \theta_{0a} \\ i_{1a}(0) = i_{10a} \\ i_{2a}(0) = i_{20a} \\ i_{3a}(0) = i_{30a} \\ \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} [\text{sen}(N_r \theta_a) i_{1a}^2 - \text{sen}(N_r \theta_b) i_{1b}^2 + \text{sen}(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) i_{2a}^2 - \text{sen}(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}) i_{2b}^2 \\ + \text{sen}(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) i_{3a}^2 - \text{sen}(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}) i_{3b}^2] \\ \varepsilon(0) = \omega_{0a} - \omega_{0b} \\ \frac{d\Delta}{dt} = \omega_a - \omega_b, \\ \Delta(0) = \theta_{0a} - \theta_{0b} \\ \frac{de_1}{dt} = \frac{N_r l_1 \text{sen}(N_r \theta_b) \omega_b i_{1b} + r i_{1b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b)} - \frac{N_r l_1 \text{sen}(N_r \theta_a) \omega_a i_{1a} + r i_{1a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)}, \\ e_1(0) = i_{10a} - i_{10b} \\ \frac{de_2}{dt} = \frac{N_r l_1 \text{sen}(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}) \omega_b i_{2b} + r i_{2b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b)} - \frac{N_r l_1 \text{sen}(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{2a} + r i_{2a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)}, \\ e_2(0) = i_{20a} - i_{20b} \\ \frac{de_3}{dt} = \frac{N_r l_1 \text{sen}(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}) \omega_b i_{3b} + r i_{3b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b)} - \frac{N_r l_1 \text{sen}(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{3a} + r i_{3a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)}, \\ e_3(0) = i_{30a} - i_{30b} \end{array}$$

Tomando en cuenta el modelo del error encontrado, es posible obtener la dinámica indistinguible del motor de reluctancia conmutada, la cual es un conjunto de ecuaciones diferenciales sobre una variedad y que caracteriza todas las trayectorias que hacen no observable al motor de reluctancia conmutada. Para lo que es necesario tomar en cuenta las condiciones de indistinguibilidad¹ del motor, esto es, entradas $u(\cdot)$ y par de carga T_L iguales para ambos motores Ω_a y Ω_b , y un conjunto de condiciones iniciales tales que la salida de ambos motores sea igual: $i_j = i_{aj} = i_{bj}$ y $\theta = \theta_a = \theta_b$ para todo $t \geq 0$. Así que tomando en cuenta estas consideraciones es posible mostrar que

$$e_j = 0, \quad \frac{de_j}{dt} = 0, \quad \Delta = 0, \quad \frac{d\Delta}{dt} = 0$$

¹Ver observaciones al final del capítulo

por tanto la dinámica indistinguible del motor de reluctancia conmutada queda como sigue:

$$DI : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[(\sin(N_r \theta) i_1^2 + \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) i_2^2 + \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) i_3^2) \right] - \frac{T_L}{J} \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta)] \omega i_1 - r i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})] \omega i_2 - r i_2}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})] \omega i_3 - r i_3}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \\ 0 = \varepsilon \\ 0 = -\frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta) \varepsilon i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} \\ 0 = -\frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) \varepsilon i_2}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} \\ 0 = -\frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) \varepsilon i_3}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} \end{array} \right.$$

donde se aprecia que los errores de estados son todos 0

$$e_j = 0, \quad \frac{de_j}{dt} = 0, \quad \Delta = 0, \quad \frac{d\Delta}{dt} = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = 0$$

satisfaciendo, así, la declaración que si las trayectorias de estados internos son 0 para todo $t > 0$ implica que no existe indistinguibilidad debido a que no importa cuales sean las trayectorias de la planta, sólo existe una solución para la dinámica del error y es trivial. Esto permite determinar que el sistema es observable globalmente.

Para llegar a esta conclusion es justo observar que en el modelo dinámico del error (E) en su primera ecuación tiene, en su parte derecha, solo variables conocidas por lo cual en la sexta ecuación de la dinámica indistinguible la derivada temporal de ε se iguala a cero. En la séptima ecuación de la dinámica indistinguible (DI), $0 = \varepsilon$,

se tiene el resultado favorable para el análisis ya que muestra que la diferencia de las velocidades es cero, lo que implica que ω_a y ω_b son iguales y por tanto no existen dos trayectorias de ω diferentes con entrada $u(\cdot)$. Con este resultado se tiene a las trayectorias propias del SRM como soluciones de la dinámica indistinguible ya que no importando el comportamiento que estas tomen, siempre se satisface que la dinámica del error tiene una única solución trivial.

Por tanto el conjunto de todas las trayectorias indistinguibles del modelo dinámico del SRM queda

$$\mathcal{I}_{(u,\omega,\theta,i_1,i_2,i_3)} = \{\omega, \theta, i_1, i_2, i_3\}$$

Entonces por la Definición 7 se determina observabilidad global del SRM.

II.2. Análisis del modelo completo

Proposición 6 *Dado el modelo matemático del SRM (2.3) y (2.4), se asume que:*

- *se conocen los parámetros del modelo,*
- *se consideran estados medibles a las corrientes de fase y la posición angular,*
y
- *se considera estado no medible a la velocidad angular.*

Bajo estas condiciones el SRM, descrito por el modelo completo, es observable con regimen de operación global.

Demostración

A partir de las ecuaciones (2.3) y (2.4) el sistema puede ser escrito como:

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= \frac{1}{J}(T - T_L) \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \frac{di_j}{dt} &= \frac{u_j - ri_j - \psi_s e^{-i_j f_j(\theta)} \frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta} i_j}{\psi_s f_j(\theta) e^{-i_j f_j(\theta)}}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}f_j(\theta) &= a + \sum_{m=1}^3 \left\{ b_m \sin \left[mN_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right] + c_m \cos \left[mN_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right] \right\} \\ T(\theta, i_1, i_2, i_3) &= \sum_{j=1}^3 T_j(\theta, i_j) \\ T_j(\theta, i_j) &= \frac{\psi_s}{f_j^2(\theta)} \frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta} \{ 1 - [1 + i_j f_j(\theta)] e^{-i_j f_j(\theta)} \}\end{aligned}$$

definiendo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_j(\theta, i_j) &\triangleq \psi_s f_j(\theta) e^{-i_j f_j(\theta)} \\ \mathcal{G}_j(\theta, i_j) &\triangleq \psi_s e^{-i_j f_j(\theta)} \frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta} \\ \delta(\theta, i_j) &\triangleq 1 - [1 + i_j f_j(\theta)] e^{-i_j f_j(\theta)}\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= \frac{1}{J} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\psi_s}{f_j^2(\theta)} \frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta} \delta(\theta, i_j) - T_L \right) \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \frac{di_j}{dt} &= \frac{u_j - ri_j - \mathcal{G}_j(\theta)\dot{\theta}i_j}{\mathcal{L}_j(\theta)}\end{aligned}$$

Tanto $\mathcal{L}_j(\theta)$ como $\mathcal{G}_j(\theta)$ son funciones de i_j y θ que son los estados medibles del SRM al igual que en el modelo simplificado. Entonces, tomando en cuenta las mismas consideraciones: parámetros conocidos, i_j y θ estados medibles, ω estado no medible y condiciones iniciales; es posible realizar un análisis del SRM y obtener los mismos resultados que los obtenidos con el modelo simplificado.

El modelo completo del motor puede ser presentado como:

$$\Lambda : \begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} \left[\frac{\psi_s}{f_1^2(\theta)} \frac{\partial f_1(\theta)}{\partial \theta} \delta(\theta, i_1) + \frac{\psi_s}{f_2^2(\theta)} \frac{\partial f_2(\theta)}{\partial \theta} \delta(\theta, i_2) + \frac{\psi_s}{f_3^2(\theta)} \frac{\partial f_3(\theta)}{\partial \theta} \delta(\theta, i_3) \right] - \frac{T_L}{J} \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{u_1 - ri_1 - \mathcal{G}_1(\theta)\dot{\theta}i_1}{\mathcal{L}_1(\theta)} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{u_2 - ri_2 - \mathcal{G}_2(\theta)\dot{\theta}i_2}{\mathcal{L}_2(\theta)} \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{u_3 - ri_3 - \mathcal{G}_3(\theta)\dot{\theta}i_3}{\mathcal{L}_3(\theta)} \end{cases}$$

Nuevamente se proponen motores iguales, *motor a* y *motor b*, con mismos modelos pero condiciones iniciales diferentes los cuales son restados, *motor a* menos *motor b*, termino a termino para lo que se definen variables de error:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \omega_a - \omega_b \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\omega_a}{dt} - \frac{d\omega_b}{dt} \\ \Delta &= \theta_a - \theta_b \Rightarrow \frac{d\Delta}{dt} = \frac{d\theta_a}{dt} - \frac{d\theta_b}{dt} \\ e &= i_a - i_b \Rightarrow \frac{de}{dt} = \frac{di_a}{dt} - \frac{di_b}{dt}\end{aligned}$$

con lo que se obtiene el modelo del error del SRM en términos de los estados del motor y de error

$$\Lambda : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_a}{dt} = \frac{1}{J} \left[\frac{\psi_s}{f_1^2(\theta_a)} \frac{\partial f_1(\theta_a)}{\partial \theta_a} \delta(\theta_a, i_{1a}) + \frac{\psi_s}{f_2^2(\theta_a)} \frac{\partial f_2(\theta_a)}{\partial \theta_a} \delta(\theta_a, i_{2a}) + \frac{\psi_s}{f_3^2(\theta_a)} \frac{\partial f_3(\theta_a)}{\partial \theta_a} \delta(\theta_a, i_{3a}) \right] - \frac{T_L}{J} \\ \omega_a(0) = \omega_{0a} \\ \frac{d\theta_a}{dt} = \omega_a \\ \theta_a(0) = \theta_{0a} \\ \frac{de_1}{dt} = \frac{u_1 - ri_{1a} - \psi_s e^{-i_{1a}} f_1(\theta_a) \frac{\partial f_1(\theta_a)}{\partial \theta_a} \dot{\theta}_a i_{1a}}{\psi_s f_1(\theta_a) e^{-i_{1a}} f_1(\theta_a)} \\ i_{1a}(0) = i_{10a} \\ \frac{de_2}{dt} = \frac{u_2 - ri_{2a} - \psi_s e^{-i_{2a}} f_2(\theta_a) \frac{\partial f_2(\theta_a)}{\partial \theta_a} \dot{\theta}_a i_{2a}}{\psi_s f_2(\theta_a) e^{-i_{2a}} f_2(\theta_a)} \\ i_{2a}(0) = i_{20a} \\ \frac{de_3}{dt} = \frac{u_3 - ri_{3a} - \psi_s e^{-i_{3a}} f_3(\theta_a) \frac{\partial f_3(\theta_a)}{\partial \theta_a} \dot{\theta}_a i_{3a}}{\psi_s f_3(\theta_a) e^{-i_{3a}} f_3(\theta_a)} \\ i_{3a}(0) = i_{30a} \end{array} \right.$$

$$\xi : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{J} \left[\frac{\psi_s}{f_1^2(\theta_a)} \frac{\partial f_1(\theta_a)}{\partial \theta_a} \delta(\theta_a, i_{1a}) + \frac{\psi_s}{f_2^2(\theta_a)} \frac{\partial f_2(\theta_a)}{\partial \theta_a} \delta(\theta_a, i_{2a}) + \frac{\psi_s}{f_3^2(\theta_a)} \frac{\partial f_3(\theta_a)}{\partial \theta_a} \delta(\theta_a, i_{3a}) - T_L \right] \\ \quad - \frac{1}{J} \left[\frac{\psi_s}{f_1^2(\theta_b)} \frac{\partial f_1(\theta_b)}{\partial \theta_b} \delta(\theta_b, i_{1b}) + \frac{\psi_s}{f_2^2(\theta_b)} \frac{\partial f_2(\theta_b)}{\partial \theta_b} \delta(\theta_b, i_{2b}) + \frac{\psi_s}{f_3^2(\theta_b)} \frac{\partial f_3(\theta_b)}{\partial \theta_b} \delta(\theta_b, i_{3b}) - T_L \right] \\ \varepsilon(0) = \omega_{0a} - \omega_{0b} \\ \frac{d\Delta}{dt} = \omega_a - \omega_b \\ \Delta(0) = \theta_{0a} - \theta_{0b} \\ \frac{de_1}{dt} = \frac{u_1 - ri_{a1} - \psi_s e^{-i_{a1}} f_1(\theta_a) \frac{\partial f_1(\theta_a)}{\partial \theta_a} \dot{\theta}_a i_{a1}}{\psi_s f_1(\theta_a) e^{-i_{a1}} f_1(\theta_a)} - \frac{u_1 - ri_{b1} - \psi_s e^{-i_{b1}} f_1(\theta_b) \frac{\partial f_1(\theta_b)}{\partial \theta_b} \dot{\theta}_b i_{b1}}{\psi_s f_1(\theta_b) e^{-i_{b1}} f_1(\theta_b)} \\ e_1(0) = i_{10a} - i_{10b} \\ \frac{de_2}{dt} = \frac{u_2 - ri_{a2} - \psi_s e^{-i_{a2}} f_2(\theta_a) \frac{\partial f_2(\theta_a)}{\partial \theta_a} \dot{\theta}_a i_{a2}}{\psi_s f_2(\theta_a) e^{-i_{a2}} f_2(\theta_a)} - \frac{u_2 - ri_{b2} - \psi_s e^{-i_{b2}} f_2(\theta_b) \frac{\partial f_2(\theta_b)}{\partial \theta_b} \dot{\theta}_b i_{b2}}{\psi_s f_2(\theta_b) e^{-i_{b2}} f_2(\theta_b)} \\ e_1(0) = i_{10a} - i_{10b} \\ \frac{de_3}{dt} = \frac{u_3 - ri_{a3} - \psi_s e^{-i_{a3}} f_3(\theta_a) \frac{\partial f_3(\theta_a)}{\partial \theta_a} \dot{\theta}_a i_{a3}}{\psi_s f_3(\theta_a) e^{-i_{a3}} f_3(\theta_a)} - \frac{u_3 - ri_{b3} - \psi_s e^{-i_{b3}} f_3(\theta_b) \frac{\partial f_3(\theta_b)}{\partial \theta_b} \dot{\theta}_b i_{b3}}{\psi_s f_3(\theta_b) e^{-i_{b3}} f_3(\theta_b)} \\ e_1(0) = i_{10a} - i_{10b} \end{array} \right.$$

Considerando el modelo dinámico del error, se puede obtener un sistema de ecuaciones algebro-diferenciales, conocido como la dinámica indistinguible para el SRM, para lo cual se considera que se presentan las condiciones de indistinguibilidad², es

²Ver observaciones al final del capítulo

decir, que existe una entrada $u(\cdot)$ y un par de carga T_L iguales para ambos motores, y un conjunto de condiciones iniciales tales que la salida de ambos motores sea igual: $i_j = i_{aj} = i_{bj}$ y $\theta = \theta_a = \theta_b$ para todo $t \geq 0$.

Con esta consideración se puede mostrar (de las ecuaciones de error) que

$$e_j = 0, \quad \frac{de_j}{dt} = 0, \quad \Delta = 0, \quad \frac{d\Delta}{dt} = 0$$

por tanto la dinámica indistinguible del motor de reluctancia conmutada queda

$$DI : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} \left[\frac{\psi_s}{f_1^2(\theta)} \frac{\partial f_1(\theta)}{\partial \theta} \delta(\theta, i_1) + \frac{\psi_s}{f_2^2(\theta)} \frac{\partial f_2(\theta)}{\partial \theta} \delta(\theta, i_2) + \frac{\psi_s}{f_3^2(\theta)} \frac{\partial f_3(\theta)}{\partial \theta} \delta(\theta, i_3) \right] - \frac{T_L}{J} \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{de_1}{dt} = \frac{u_1 - ri_1 - \psi_s e^{-i_1 f_1(\theta)} \frac{\partial f_1(\theta)}{\partial \theta} \omega i_1}{\psi_s f_1(\theta) e^{-i_1 f_1(\theta)}} \\ \frac{de_2}{dt} = \frac{u_2 - ri_2 - \psi_s e^{-i_2 f_2(\theta)} \frac{\partial f_2(\theta)}{\partial \theta} \omega i_2}{\psi_s f_2(\theta) e^{-i_2 f_2(\theta)}} \\ \frac{de_3}{dt} = \frac{u_3 - ri_3 - \psi_s e^{-i_3 f_3(\theta)} \frac{\partial f_3(\theta)}{\partial \theta} \omega i_3}{\psi_s f_3(\theta) e^{-i_3 f_3(\theta)}} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \\ 0 = \varepsilon \\ 0 = -\frac{\psi_s e^{-i_1 f_1(\theta)} \frac{\partial f_1(\theta)}{\partial \theta} \varepsilon i_1}{\psi_s f_1(\theta) e^{-i_1 f_1(\theta)}} \\ 0 = -\frac{\psi_s e^{-i_2 f_2(\theta)} \frac{\partial f_2(\theta)}{\partial \theta} \varepsilon i_2}{\psi_s f_2(\theta) e^{-i_2 f_2(\theta)}} \\ 0 = -\frac{\psi_s e^{-i_3 f_3(\theta)} \frac{\partial f_3(\theta)}{\partial \theta} \varepsilon i_3}{\psi_s f_3(\theta) e^{-i_3 f_3(\theta)}} \end{array} \right.$$

con los errores de estados todos 0

$$e_j = 0, \quad \frac{de_j}{dt} = 0, \quad \Delta = 0, \quad \frac{d\Delta}{dt} = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = 0$$

satisfaciendo, nuevamente, que las trayectorias de estados internos son 0 para todo $t > 0$, lo que implica que no existe indistinguibilidad, esto debido a que no importa como sea el comportamiento de las trayectorias de la planta, sólo existe una solución para la dinámica del error y es trivial. Esto permite concluir que el sistema es observable globalmente.

Es justo observar que la dinámica indistinguible del SRM (tanto para el modelo simplificado como para el modelo completo) arroja los mismos resultados, bajo las diferencias entre modelos, y que el conjunto de todas las trayectorias indistinguibles del modelo dinámico no cambia para ambos casos:

$$\mathcal{I}_{(u,\omega,\theta,i_1,i_2,i_3)} = \{\omega, \theta, i_1, i_2, i_3\}$$

De igual manera que para el modelo completo, por la Definición 7 se concluye observabilidad con régimen global para el SRM.

Observaciones:

- Dado que no hay restricciones sobre la velocidad angular, el análisis indica que los modelos del SRM son observables para todo rango de velocidades.
- El hecho de trabajar con un solo estado no medible (velocidad angular) parece un trabajo trivial, ya que como es visto en los modelos (2.3), (2.4) y (2.8) del Capítulo 2 en los subsistemas mecánicos se tiene $\dot{\theta} = \omega$, entonces siendo estrictos se puede reconstruir la velocidad a través de la simple derivada temporal de la posición (estado conocido) sin tener que diseñar un observador. Pero ubicando el trabajo en un ejemplo práctico, el hecho de aplicar una derivada

en presencia de ruido (el cual siempre esta presente en este tipo problemas) provoca que éste se amplifique, de igual forma provocará que el motor se vea limitando a cierto tipo de trabajos. En (Mujica-Ortega, 2012) se presenta un trabajo detallado, acerca del motor de inducción, que permite tener una idea de lo mala que puede resultar esta opción.

- Si se considera el problema *sensorless*, es decir, bajo la suposición de que ni la posición ni velocidad angulares estan disponibles para medición, las condiciones de indistinguibilidad (para ambos modelos) son modificadas. Así, se considera que $i_j = i_{ja} = i_{jb}$ y entonces $e_j = 0$, $\frac{de_j}{dt} = 0$ lo que conduce a la siguiente forma de la dinámica indistinguible, según 3.7

$$DI_{ss} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[(\sin(N_r \theta) i_1^2 + \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) i_2^2 + \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) i_3^2) \right] - \frac{T_L}{J} \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta)] \omega i_1 - r i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})] \omega i_2 - r i_2}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})] \omega i_3 - r i_3}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left\{ [\sin(N_r \theta_a) - \sin(N_r \theta_b)] i_1^2 + [\sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) - \sin(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3})] i_2^2 \right. \\ \left. + [\sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) - \sin(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3})] i_3^2 \right\} \\ \frac{d\Delta}{dt} = \varepsilon \\ 0 = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta)] \omega i_1 - r i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} - \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r (\theta - \Delta))] (\omega - \varepsilon) i_1 - r i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r (\theta - \Delta))} \\ 0 = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})] \omega i_2 - r i_2}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} - \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r (\theta - \Delta) - \frac{2\pi}{3})] (\omega - \varepsilon) i_2 - r i_2}{l_0 - l_1 \cos(N_r (\theta - \Delta) - \frac{2\pi}{3})} \\ 0 = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})] \omega i_3 - r i_3}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} - \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r (\theta - \Delta) + \frac{2\pi}{3})] (\omega - \varepsilon) i_3 - r i_3}{l_0 - l_1 \cos(N_r (\theta - \Delta) + \frac{2\pi}{3})} \end{array} \right.$$

para el modelo simplificado y

$$DI_{sc} : \left\{ \begin{array}{l}
\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} \left[\frac{\psi_s}{f_1^2(\theta)} \frac{\partial f_1(\theta)}{\partial \theta} \delta(\theta, i_1) + \frac{\psi_s}{f_2^2(\theta)} \frac{\partial f_2(\theta)}{\partial \theta} \delta(\theta, i_2) + \frac{\psi_s}{f_3^2(\theta)} \frac{\partial f_3(\theta)}{\partial \theta} \delta(\theta, i_3) \right] - \frac{T_L}{J} \\
\frac{d\theta}{dt} = \omega \\
\frac{de_1}{dt} = \frac{u_1 - ri_1 - \psi_s e^{-i_1 f_1(\theta)} \frac{\partial f_1(\theta)}{\partial \theta} \omega i_1}{\psi_s f_1(\theta) e^{-i_1 f_1(\theta)}} \\
\frac{de_2}{dt} = \frac{u_2 - ri_2 - \psi_s e^{-i_2 f_2(\theta)} \frac{\partial f_2(\theta)}{\partial \theta} \omega i_2}{\psi_s f_2(\theta) e^{-i_2 f_2(\theta)}} \\
\frac{de_3}{dt} = \frac{u_3 - ri_3 - \psi_s e^{-i_3 f_3(\theta)} \frac{\partial f_3(\theta)}{\partial \theta} \omega i_3}{\psi_s f_3(\theta) e^{-i_3 f_3(\theta)}} \\
\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\psi_s}{f_1^2(\theta)} \frac{\partial f_1(\theta)}{\partial \theta} \delta(\theta, i_1) - \frac{\psi_s}{f_1^2(\theta - \Delta)} \frac{\partial f_1(\theta - \Delta)}{\partial (\theta - \Delta)} \delta[(\theta - \Delta), i_1] \right. \\
\left. + \frac{\psi_s}{f_2^2(\theta)} \frac{\partial f_2(\theta)}{\partial \theta} \delta(\theta, i_2) - \frac{\psi_s}{f_2^2(\theta - \Delta)} \frac{\partial f_2(\theta - \Delta)}{\partial (\theta - \Delta)} \delta[(\theta - \Delta), i_2] \right. \\
\left. + \frac{\psi_s}{f_3^2(\theta)} \frac{\partial f_3(\theta)}{\partial \theta} \delta(\theta, i_3) - \frac{\psi_s}{f_3^2(\theta - \Delta)} \frac{\partial f_3(\theta - \Delta)}{\partial (\theta - \Delta)} \delta[(\theta - \Delta), i_3] \right\} \\
\frac{d\Delta}{dt} = \varepsilon \\
0 = \frac{u_1 - ri_1 - \psi_s e^{-i_1 f_1(\theta)} \frac{\partial f_1(\theta)}{\partial \theta} \omega i_1}{\psi_s f_1(\theta) e^{-i_1 f_1(\theta)}} - \frac{u_1 - ri_1 - \psi_s e^{-i_1 f_1(\theta - \Delta)} \frac{\partial f_1(\theta - \Delta)}{\partial (\theta - \Delta)} (\omega - \varepsilon) i_1}{\psi_s f_1(\theta - \Delta) e^{-i_1 f_1(\theta - \Delta)}} \\
0 = \frac{u_2 - ri_2 - \psi_s e^{-i_2 f_2(\theta)} \frac{\partial f_2(\theta)}{\partial \theta} \omega i_2}{\psi_s f_2(\theta) e^{-i_2 f_2(\theta)}} - \frac{u_2 - ri_2 - \psi_s e^{-i_2 f_2(\theta - \Delta)} \frac{\partial f_2(\theta - \Delta)}{\partial (\theta - \Delta)} (\omega - \varepsilon) i_2}{\psi_s f_2(\theta - \Delta) e^{-i_2 f_2(\theta - \Delta)}} \\
0 = \frac{u_3 - ri_3 - \psi_s e^{-i_3 f_3(\theta)} \frac{\partial f_3(\theta)}{\partial \theta} \omega i_3}{\psi_s f_3(\theta) e^{-i_3 f_3(\theta)}} - \frac{u_3 - ri_3 - \psi_s e^{-i_3 f_3(\theta - \Delta)} \frac{\partial f_3(\theta - \Delta)}{\partial (\theta - \Delta)} (\omega - \varepsilon) i_3}{\psi_s f_3(\theta - \Delta) e^{-i_3 f_3(\theta - \Delta)}}
\end{array} \right.$$

para el modelo completo.

Como se muestra en (Ibarra-Rojas *et al.*, 2004), las trayectorias indistinguibles del SRM se pueden describir por una familia de sistemas dinámicos que viven en sub-variedades del espacio de estados de por lo que las ecuaciones algebro-diferenciales se pueden interpretar como ecuaciones diferenciales definidas sobre variedades. Determinar soluciones de ecuaciones algebro-aiferenciales es, en general, más complicado que obtener las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Primeramente es necesario expresar las ecuaciones únicamente en términos de variables de error. Este paso esencial no se ha podido resolver ni

para el sistema DI_{ss} ³ ni para el sistema DI_{sc} ⁴, dada su complejidad debida, en parte, a que el motor no es Blondel-Park transformable.

³ DI_{ss} - Dinámica indistinguible del análisis *sensorless* del modelo simplificado

⁴ DI_{sc} - Dinámica indistinguible del análisis *sensorless* del modelo completo

*El trabajo que nunca se empieza
es el que tarda más en finalizarse.*

J. R. R. Tolkien

5

Conclusiones y problemas abiertos

En este trabajo se abordó el problema de observabilidad del motor de reluctancia conmutada. Para el estudio, se trabajó con dos modelos dinámicos del motor descritos en (Espinosa-Pérez *et al.*, 2002). El primero de ellos, llamado de baja corriente (modelo simplificado), no considera la saturación magnética y, el segundo (modelo completo), sí toma en cuenta este fenómeno.

Se demostró que el SRM no es Blondel-Park transformable, cosa que se afirmaba pero que no tenía una demostración formal, por lo que la dependencia de algunos de sus parámetros respecto a la posición angular no puede ser evitada. Con la finalidad de mostrar el funcionamiento del motor y determinar si las suposiciones hechas eran válidas o no, también se presentó un breve estudio de los conmutadores que se usan regularmente para poner en funcionamiento el motor.

Para llevar a cabo un análisis de observabilidad global, se empleó la metodología reportada en (Ibarra-Rojas *et al.*, 2004), la cual se ha aplicado de manera exitosa a

otro tipo de máquinas eléctricas.

El análisis se llevó a cabo para el problema *sensorless*, esto es cuando la posición y la velocidad angulares no están disponibles para medición. Sin embargo, no fue posible determinar las soluciones de la dinámica indistinguible, dada la complejidad de la representación matemática obtenida y dada la dependencia de algunos parámetros con respecto a la posición angular.

Con el fin de resolver de manera parcial el problema propuesto, se consideró como único estado no medible a la velocidad angular. Bajo esta suposición sí fue posible determinar el conjunto de soluciones de la dinámica indistinguible de los dos modelos matemáticos estudiados. Dado que no hay restricciones sobre la velocidad angular, el análisis permitió demostrar que los modelos del motor de reluctancia conmutada son observables para todo rango de velocidades del motor.

Cabe mencionar que como resultado del presente trabajo se originaron dos artículos arbitrados que se presentaron 1) en el Congreso Nacional de Control Automático de la Asociación de México de Control Automático AMCA 2012 (Pacheco-Tejeda y Maya-Ortiz, 2012) y 2) en el Congreso Latinoamericano de Control Automático CLCA 2012 (Maya-Ortiz *et al.*, 2012), ambos en el mes de octubre. Estos artículos se presentan anexados al final de esta sección.

Problemas abiertos:

Llevar a cabo el análisis de observabilidad considerando los dos estados mecánicos como no medibles. Para esto, dadas las limitaciones que se tienen con los modelos matemáticos empleados en este trabajo de tesis, se propone que se utilicen representaciones alternativas, o bien, que se empleé otra técnica de análisis.

Análisis de Observabilidad Global del Motor de Reluctancia Conmutada

Isaí Pacheco-Tejeda

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México
ipacheco@comunidad.unam.mx

Paul R. Maya-Ortiz

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México
paulm@dctrl.fi-b.unam.mx

Resumen—En este trabajo se presenta un análisis que permite demostrar las propiedades de observabilidad global del motor de reluctancia conmutada considerando que la velocidad angular del rotor no está disponible para medición. Este análisis se realiza utilizando los conceptos básicos de indistinguibilidad y observabilidad de trayectorias de estado de los sistemas dinámicos y haciendo uso de la metodología de comparación de modelos idénticos de sistemas dinámicos iguales, con la finalidad de obtener una dinámica de error que revele la posibilidad de observación, obteniendo resultados satisfactorios con la finalidad de obtener una dinámica del error que permita adquirir información sobre la observabilidad de la máquina.

Palabras clave: Indistinguibilidad, observabilidad, motor de reluctancia conmutada.

I. INTRODUCCIÓN

El motor de reluctancia conmutada (SRM, Switched Reluctance Motor) es una máquina eléctrica diseñada para obtener gran eficiencia en la conversión de energía. Debido a que su construcción no requiere de imanes permanentes o devanados en el rotor este motor es de bajo costo y de alta fiabilidad. Si se diseña con varios polos es posible obtener un par elevado a bajas velocidades excluyendo así el uso de engranajes lo que le hace buen candidato para aplicaciones de transmisión directa (Krishnan, 2001).

Con el objetivo de reducir los costos de mantenimiento e infraestructura en este tipo de máquinas es deseable el uso de esquemas de control que no requieran del conocimiento de todas las variables. Como esta situación no siempre puede ocurrir se hace uso de esquemas de estimación de estados para recuperar variables. Además, con este tipo de estrategias es posible trabajar en situaciones donde el motor es sometido a condiciones ambientales extremas tales como alta presión, humedad, temperatura y velocidades extremadamente altas; el uso de un sensor mecánico puede conducir a problemas de fiabilidad y robustez los cuales son precisos para este tipo de aplicaciones (Miller, 2001). Antes de realizar el diseño de un observador es recomendable llevar a cabo el análisis de observabilidad que permita concluir la viabilidad del diseño e identificar, de haberlos, comportamientos indistinguibles. Con respecto al diseño de observadores para el SRM existen diferentes propuestas reportadas en la literatura científica. Por ejemplo, en

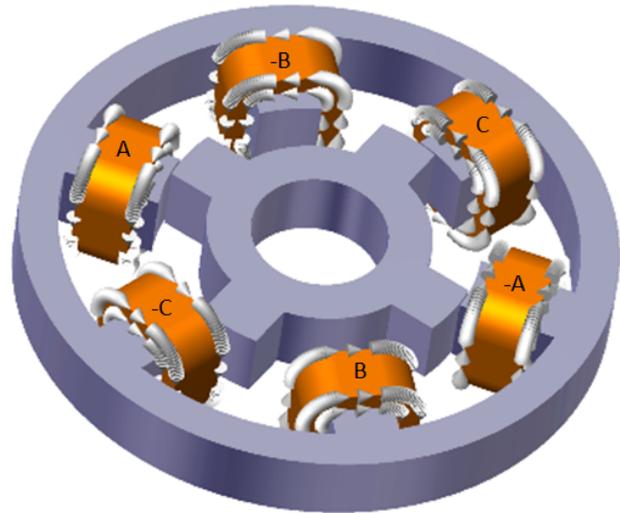


Figura 1. SRM trifásico con 6 polos de estator y 4 de rotor

(Ehsani y Fahimi, 2002) se presenta una pequeña colección de trabajos de control sin sensores mecánicos reportados en la década de los 90 y principios del 2000 que pueden ser clasificados como: 1) métodos hardware-intensivos los cuales requieren circuitería externa para la inyección de señal, 2) métodos dato-intensivos tales como la técnica de flujo que integra una gran colección de tablas de almacenamiento de características del SRM y 3) métodos basados en modelo tales como los observadores de estado, el método de medición de señal de potencia, el método basado en el modelo de inductancia, redes neuronales y lógica difusa, entre otros, los cuales necesitan un microprocesador potente como un procesador digital de señales con capacidad de procesamiento de millones de instrucciones por segundo (MIPS).

En (Gao *et al.*, 2004) y (Komatsuzaki *et al.*, 2008) se reportan métodos de estimación de posición, la suposición principal es que el motor trabaja a bajas velocidades por lo que la fuerza contraelectromotriz puede despreciarse, bajo esta suposición se puede obtener una relación directa de las inductancias, único término que depende de la posición, lo que hace posible una igualdad y una estimación de variable

que resulta en función de una tangente.

En (Tan *et al.*, 2009) se reporta un estimador de posición y un observador por modos deslizantes cuyo principal problema es la estimación de la posición al momento del arranque; el diseño se hace mediante el uso de la técnica de inyección de pulso para la operación con velocidad cero.

En (De La Guerra Carrasco, 2011) se reporta el único trabajo encontrado donde se aborda un análisis de observabilidad con características locales del motor de reluctancia en donde la representación matemática empleada no considera la saturación y el único estado no medible es la velocidad angular. Así, mediante un método geométrico se concluye que el motor es localmente observable siempre que no se trabaje a velocidad cero.

En este trabajo se presenta un método para llevar a cabo un análisis de las propiedades de observabilidad global del motor de reluctancia conmutada sin considerar la saturación y sin medición de velocidad. Este análisis explota en un nivel fundamental el concepto de trayectorias indistinguibles es decir, las trayectorias internas de un sistema que son diferentes bajo el mismo comportamiento entrada/salida.

La principal contribución que se presenta en este trabajo es la declaración de un sistema dinámico cuyo comportamiento, llamado dinámica indistinguible, caracteriza todas las trayectorias que hacen no observable al motor de reluctancia conmutada. El análisis para este sistema, como es habitual con sistemas dinámicos no lineales, es complejo y no es posible presentar explícitamente todas las trayectorias mencionadas, sin embargo, es preciso señalar que incluso en estas condiciones varios resultados importantes pueden obtenerse con respecto a la dinámica indistinguible:

- Se puede proporcionar una respuesta formal a la pregunta fundamental acerca de la existencia de trayectorias indistinguibles para el SRM sin saturación.
- En caso de existir trayectorias indistinguibles, también existirían algunas trayectorias siempre divergentes con lo que se deduce que hay regímenes de operación para los que cualquier observador no converge, es decir, sería imposible construir un observador para toda trayectoria del motor.
- Si llegaran a existir dinámicas indistinguibles estas serían dependientes de la entrada, por lo tanto, el sistema no se podría descomponer en una parte observable y una no observable.
- Una vez que la estructura del sistema dinámico que genera la dinámica indistinguible esté a la mano, las herramientas estándar de análisis pueden ser aplicadas con el fin de obtener una comprensión más profunda sobre las propiedades de observabilidad del SRM.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En la Sección II se presenta el modelo matemático del SRM y algunas de sus propiedades. En la Sección III se presenta, de

manera general, la metodología que se seguirá para hacer el análisis de observabilidad del SRM, el cual se presenta en la Sección IV. Para finalizar, en la Sección V se presentan las conclusiones del trabajo y algunos puntos indicativos del trabajo futuro.

II. MOTOR DE RELUCTANCIA CONMUTADA: CARACTERÍSTICAS Y MODELO

El SRM a diferencia de otros motores genera par a través de la variación de la reluctancia en lugar de la acción de inducción, esto es, el mecanismo de producción de par es idéntico al observado en el desplazamiento producido al alinear dos imanes con polaridad diferente, así, el par es producido por la propensión del rotor a moverse hacia la posición de mayor inductancia del estator, esto es, donde la reluctancia es mínima y de ahí el nombre de motor de reluctancia conmutada. La concentración de devanados en el estator y la ausencia de imanes permanentes o devanados en el rotor dan lugar a varias características interesantes: construcción simple, estructura sin escobillas y mayor generación de par. Paradójicamente, la principal desventaja de este tipo de máquinas eléctricas viene, también, de su estructura simple, ya que para generar par, las corrientes de estator deben ser secuencialmente conmutadas encendido/apagado de acuerdo a la posición del rotor como se ejemplifica en la Figura 2 para un motor de tres fases.

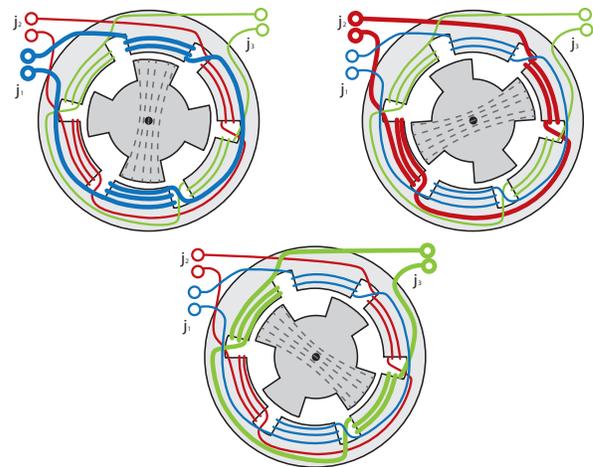


Figura 2. Secuencia de excitación de fases del SRM

La restricción, en el sentido de que las corrientes de estator deben ser encendidas y apagadas de acuerdo a la posición angular del rotor, asigna el requerimiento de la existencia de un conmutador electrónico con el fin de que la forma de onda requerida para las corrientes de estator sea garantizada. La función principal del conmutador es coordinar el proceso de conmutación además que debe garantizar una transición suave de acuerdo a las necesidades

de operación (Wang y Lan, 2004).

El modelo descrito en el presente trabajo esta basado en (Espinosa-Pérez *et al.*, 2002). Se considera que las fases del estator están desacopladas magnéticamente por lo que la inductancia mutua puede ser despreciada, sin pérdida de generalidad y por practicidad, se considera el caso de un motor trifásico. Bajo estas consideraciones, la dinámica del SRM es de la forma

$$\begin{aligned} u_j &= \dot{\psi}_j + r i_j; \quad j = 1, 2, 3 \\ J \ddot{\theta} &= T_e(\theta, i_1, i_2, i_3) - T_L \end{aligned} \quad (1)$$

donde u_j es el voltaje aplicado a la j -ésima terminal de fase del estator, i_j es la j -ésima corriente de fase del estator, $\psi_j(\theta, i_j)$ es el flujo magnético de dispersión de la j -ésima fase, r es la resistencia de los devanados del estator, θ es la posición angular del rotor, T_L es el par de carga y J la inercia total del rotor. Es de notar que el par mecánico de origen eléctrico $T_e(\theta, i_1, i_2, i_3)$, depende tanto de la posición angular del rotor como de todas las corrientes del estator. Se asume que el flujos magnético de dispersión tiene la estructura

$$\psi_j(\theta, i_j) = L_j(\theta) i_j \quad (2)$$

donde la j -ésima inductancia de fase está dada por

$$L_j(\theta) = l_0 - l_1 \cos \left[N_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right] \quad (3)$$

en esta expresión l_0 y l_1 son constantes positivas tales que $l_0 > l_1$ haciendo de esta manera que la ecuación (3) sea definida positiva. Bajo estas condiciones el modelo (1) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} u_j &= L_j(\theta) \frac{di_j}{dt} + G_j(\theta) \omega i_j + r i_j; \quad j = 1, 2, 3 \\ J \dot{\omega} &= T_e(\theta, i_1, i_2, i_3) - T_L \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (4)$$

donde

$$G_j(\theta) = \frac{\partial L_j(\theta)}{\partial \theta} = N_r l_1 \sin \left[N_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right] \quad (5)$$

es la variación de la inductancia, por fase, con respecto a la posición angular.

Con base en las definiciones dadas en (3) y (5) el par mecánico de origen eléctrico es de la forma

$$T_e(\theta, i_1, i_2, i_3) = \sum_{j=1}^3 T_j(\theta, i_j) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} G_j(\theta) i_j^2 \quad (6)$$

donde se puede observar que el par de cada fase aparece como una función cuadrática de la corriente de fase respectiva y que su signo es determinado por la derivada parcial de

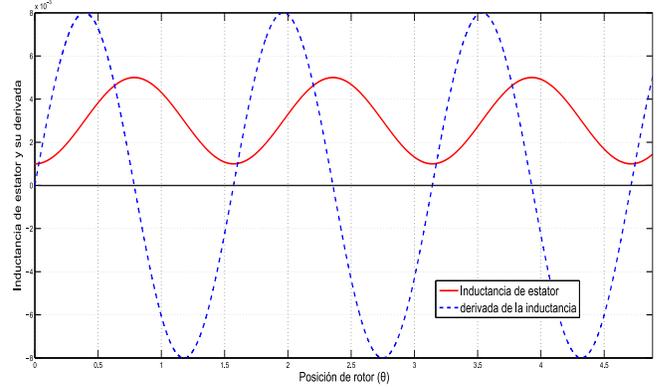


Figura 3. Inductancia de estator y su derivada respecto a la posición

la inductancia de fase con respecto a la posición del rotor, $G_j(\theta)$.

En la Figura 3 se muestra el comportamiento de la inductancia de estator y su respectiva deriva parcial respecto a la posición, contra la posición del rotor. En ella es posible observar que de acuerdo a la ecuación 6, se producirá par positivo en el área positiva de la gráfica de la función $G_j(\theta)$, esto es, en el perfil de subida de la curva de inductancia. Esta condición indica que las fases del estator deben ser conmutadas de manera secuencial atendiendo en todo momento a la posición del rotor. Un ejemplo de esto se muestra en la Figura 2 en donde se aprecia una secuencia $j_1 - j_2 - j_3 - j_1 - \dots$ para obtener un movimiento en sentido anti-horario.

III. METODOLOGÍA

La metodología que se presenta es obtenida de (Ibarra-Rojas *et al.*, 2004).

Sea el sistema no lineal

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u); & x(0) = x_0 \\ y = h(x) \end{cases} \quad (7)$$

donde $x \in D_x \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entrada, $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida y f y h son funciones suficientemente suaves definidas en \mathbb{R}^{n+p} y \mathbb{R}^n respectivamente. La solución de (7) en $t \geq 0$ que pasa a través de x_0 en $t = 0$, correspondiendo la función de entrada $u \in \mathcal{U}$ (una clase de funciones de tiempo) es $x(t) = \phi(t, x_0, u)$. La salida esta dada por $y(t) = \lambda(t, x_0, u) = h(\phi(t, x_0, u))$.

Se considera un sistema dinámico de la forma (7) con las variables de entrada y salida (u, y) medibles y se asume que la estructura del sistema es conocida, incluyendo parámetros.

El fin de la metodología es determinar si es posible construir un modelo dinámico del error, a partir del sistema dado por (7), que proporcione las trayectorias indistinguibles del sistema original y de determinar si éstas son convergentes o no; de serlo, es posible observar el sistema, en caso contrario se puede concluir no

observabilidad del sistema. En el caso de no encontrar trayectorias indistinguibles entonces se puede determinar que el sistema es globalmente observable.

Los pasos a seguir para emplear esta metodología son:

- A Determinar un modelo dinámico del error que genere las trayectorias indistinguibles. En caso que las trayectorias sean las mismas trayectorias del sistema original se concluye observabilidad y no es necesario proceder al paso B.
- B Determinar si las trayectorias indistinguibles son convergentes o no. Con el objeto de determinar observabilidad o no observabilidad; si existen trayectorias indistinguibles divergentes entonces ningún observador que se diseñe para el sistema podrá converger para toda trayectoria del sistema.

Para llevar a cabo el procedimiento de manera óptima es imprescindible el conocimiento los conceptos indistinguibilidad, observabilidad y detectabilidad obtenidos de (Hermann y Krener, 1977) e (Ibarra-Rojas *et al.*, 2004).

Definición 1: Considerando una entrada $u(\cdot)$ para el sistema (7) y una condición inicial $x^0 \in D_x$. Si otra condición inicial $x^1 \in D_x$ es tal que $y(t, x^0, u(\cdot)) = y(t, x^1, u(\cdot))$ para todo $t \in [0, T]$, para algún $T > 0$ entonces x^1 es un estado $u(\cdot)$ -indistinguible de x^0 en el intervalo $[0, T]$. El conjunto de todos los estados $u(\cdot)$ -indistinguibles de x^0 será denotado por $\mathcal{I}_{(u, x)}$.

Definición 2: El sistema (7) es observable en $x^0 \in D_x$ si $\mathcal{I}_{(u, x^0)} = \{x^0\}$ y el sistema (7) es observable si $\mathcal{I}_{(u, x)} = \{x\}$ para todo $x \in D_x$.

Definición 3: El sistema (7) es detectable si para cualquier $x^0 \in D_x$, y algún $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ se satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \bar{x}, u(\cdot)) - x(t, x^0, u(\cdot))\| = 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{I}_{(u, x)}$$

Considerando la Definición 1 y el modelo (7) se suponen dos sistemas dinámicos idénticos, mismo modelo y mismos parámetros, considerando condiciones óptimas de operación para la observabilidad (si el sistema no es observable para estas condiciones mucho menos lo será para condiciones diferentes): parámetros bien conocidos, entrada medible, conocimiento de los estados medibles y los no medibles. Entonces se suponen los modelos Σ_1 y Σ_2 con condiciones iniciales diferentes

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= f(x_1, u); & x_1(0) = x_{10} \\ y &= h(x_1) \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 &= f(x_2, u); & x_2(0) = x_{20} \\ y &= h(x_2) \end{cases}$$

Algunas hipótesis: ¿Que se podría esperar de las trayectorias de estado internas de estos dos sistemas?

1. Que las trayectorias de estados internos sean diferentes para todo $t > 0$

Esto implica que existe indistinguibilidad debido a que con las mismas condiciones de entrada-salida se tienen estados internos diferentes. Esta condición de es provocada por la entrada $u(\cdot)$ y de aquí el nombre de u -indistinguible de la Definición 1, además, esta condición de indistinguibilidad provoca que el sistema no sea observable.

2. Que las trayectorias de estados internos sean diferentes pero que converjan entre si cuando $t \rightarrow \infty$

En este caso también existe indistinguibilidad, pero cuando $t \rightarrow \infty$ está se pierde, lo cual implica que el sistema es detectable.

3. Que las trayectorias de estados internos sean idénticas para todo $t \rightarrow \infty$

Esto implica que no existe indistinguibilidad debido a que con las mismas condiciones de entrada-salida se muestran idénticas trayectorias internas del sistema. Esto permite determinar que el sistemas es observable globalmente.

Es preciso obtener un modelo dinámico de error del sistema a través de la diferencia de los modelos esto es

$$\Xi = \Sigma_1 - \Sigma_2$$

por tanto es necesario asignar también variables (estados) de error para cada estado las cuales representaran las trayectorias del modelo dinámico de error, esto es:

$$\begin{array}{lclcl} \epsilon_1 & = & x_{11} - x_{21} & \Rightarrow & \frac{d\epsilon_1}{dt} & = & \frac{x_{11}}{dt} - \frac{dx_{21}}{dt} \\ \epsilon_2 & = & x_{12} - x_{22} & \Rightarrow & \frac{d\epsilon_2}{dt} & = & \frac{x_{12}}{dt} - \frac{dx_{22}}{dt} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \epsilon_n & = & x_{1n} - x_{2n} & \Rightarrow & \frac{d\epsilon_n}{dt} & = & \frac{x_{1n}}{dt} - \frac{dx_{2n}}{dt} \end{array}$$

obtenido el modelo de error, se igualan las condiciones iniciales de todos los estados conocidos del sistema, esto es:

$$x_1 = x_{11} = x_{21} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_1 = 0; \quad \frac{d\epsilon_1}{dt} = 0$$

mientras que las condiciones iniciales de los estados no medibles no se cambian.

Ahora, se prosigue a encontrar un conjunto de ecuaciones llamado dinámica indistinguible vista como la conexión en cascada de (7) y Ξ . Cabe remarcar que esta dinámica indistinguible tiene naturaleza global, ya que este representa todas las trayectorias indistinguibles del sistema.

$$DI : \begin{cases} \Sigma \\ \Xi \end{cases}$$

Repasando las hipótesis planteadas llega al momento de establecer, de acuerdo a la dinámica indistinguible, el comportamiento de las trayectorias.

IV. DINÁMICA INDISTINGUIBLE DEL MOTOR DE RELUCTANCIA CONMUTADA

Considerando la metodología anterior es posible obtener un modelo dinámico de error utilizando el modelo (3) considerando las condiciones apropiadas de operación para la observabilidad, esto es, parámetros del motor conocidos, u, T_L, i, θ son señales medibles y ω la señal no medible. Haciendo uso del sistema (3) sustituyendo los respectivos valores de $L_j(\theta)$, $G_j(\theta)$ y $T_e(\theta, i_j)$ se obtiene:

$$\Omega : \begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[(\sin(N_r \theta) i_1^2 + \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) i_2^2 + \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) i_3^2) \right] - \frac{T_L}{J} \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta) \omega i_1 - r i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) \omega i_2 - r i_2}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) \omega i_3 - r i_3}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} \end{cases}$$

Tomando como partida dos motores idénticos y sus modelos dinámicos con condiciones iniciales arbitrarias

$$\Omega_a : \begin{cases} \frac{d\omega_a}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[(\sin(N_r \theta_a) i_{1a}^2 + \sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) i_{2a}^2 + \sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) i_{3a}^2) \right] - \frac{T_L}{J}, \\ \omega_a(0) = \omega_{0a} \\ \frac{d\theta_a}{dt} = \omega_a, \quad \theta_a(0) = \theta_{0a} \\ \frac{di_{1a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a) \omega_a i_{1a} - r i_{1a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)}, \\ i_{1a}(0) = i_{10a} \\ \frac{di_{2a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{2a} - r i_{2a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3})}, \\ i_{2a}(0) = i_{20a} \\ \frac{di_{3a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{3a} - r i_{3a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3})}, \\ i_{3a}(0) = i_{30a} \end{cases}$$

$$\Omega_b : \begin{cases} \frac{d\omega_b}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[(\sin(N_r \theta_b) i_{1b}^2 + \sin(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}) i_{2b}^2 + \sin(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}) i_{3b}^2) \right] - \frac{T_L}{J}, \\ \omega_b(0) = \omega_{0b} \\ \frac{d\theta_b}{dt} = \omega_b, \quad \theta_b(0) = \theta_{0b} \\ \frac{di_{1b}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_b) \omega_b i_{1b} - r i_{1b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b)}, \\ i_{1b}(0) = i_{10b} \\ \frac{di_{2b}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}) \omega_b i_{2b} - r i_{2b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3})}, \\ i_{2b}(0) = i_{20b} \\ \frac{di_{3b}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}) \omega_b i_{3b} - r i_{3b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3})}, \\ i_{3b}(0) = i_{30b} \end{cases}$$

Se definen variables de error las cuales corresponden a la diferencia entre las dinámicas de los motores Ω_a y Ω_b

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \omega_a - \omega_b \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\omega_a}{dt} - \frac{d\omega_b}{dt} \\ \Delta &= \theta_a - \theta_b \Rightarrow \frac{d\Delta}{dt} = \frac{d\theta_a}{dt} - \frac{d\theta_b}{dt} \\ e &= i_a - i_b \Rightarrow \frac{de}{dt} = \frac{di_a}{dt} - \frac{di_b}{dt} \end{aligned}$$

Ordenando las ecuaciones de Ω_a y las obtenidas a través de las variables de error se obtiene el modelo de error del motor de reluctancia conmutada

$$\Omega_a : \begin{cases} \frac{d\omega_a}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[(\sin(N_r \theta_a) i_{1a}^2 + \sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) i_{2a}^2 + \sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) i_{3a}^2) \right] - \frac{T_L}{J}, \\ \omega_a(0) = \omega_{0a} \\ \frac{d\theta_a}{dt} = \omega_a, \quad \theta_a(0) = \theta_{0a} \\ \frac{di_{1a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a) \omega_a i_{1a} - r i_{1a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)}, \\ i_{1a}(0) = i_{10a} \\ \frac{di_{2a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{2a} - r i_{2a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3})}, \\ i_{2a}(0) = i_{20a} \\ \frac{di_{3a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{3a} - r i_{3a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3})}, \\ i_{3a}(0) = i_{30a} \end{cases}$$

$$E : \begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[\sin(N_r \theta_a) i_{1a}^2 - \sin(N_r \theta_b) i_{1b}^2 + \sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) i_{2a}^2 - \sin(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}) i_{2b}^2 + \sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) i_{3a}^2 - \sin(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}) i_{3b}^2 \right] \\ \varepsilon(0) = \omega_{0a} - \omega_{0b} \\ \frac{d\Delta}{dt} = \omega_a - \omega_b, \quad \Delta(0) = \theta_{0a} - \theta_{0b} \\ \frac{de_1}{dt} = \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta_b) \omega_b i_{1b} + r i_{1b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b)} - \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta_a) \omega_a i_{1a} + r i_{1a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)} \\ e_1(0) = i_{10a} - i_{10b} \\ \frac{de_2}{dt} = \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}) \omega_b i_{2b} + r i_{2b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b)} - \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{2a} + r i_{2a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)} \\ e_2(0) = i_{20a} - i_{20b} \\ \frac{de_3}{dt} = \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}) \omega_b i_{3b} + r i_{3b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b)} - \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{3a} + r i_{3a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)} \\ e_3(0) = i_{30a} - i_{30b} \end{cases}$$

$$DI : \begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[(\sin(N_r \theta) i_1^2 + \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) i_2^2 + \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) i_3^2) \right] - \frac{T_L}{J} \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta)] \omega i_1 - r i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})] \omega i_2 - r i_2}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})] \omega i_3 - r i_3}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \\ 0 = \varepsilon \\ 0 = -\frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta) \varepsilon i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} \\ 0 = -\frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) \varepsilon i_2}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} \\ 0 = -\frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) \varepsilon i_3}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} \end{cases}$$

Tomando en cuenta el modelo de error encontrado, es posible obtener el conjunto llamado dinámica indistinguible del motor de reluctancia conmutada. Para lo que es necesario tomar en cuenta las condiciones de indistinguibilidad del motor, esto es, entradas $u(\cdot)$ y par de carga T_L iguales para ambos motores Ω_a y Ω_b , y un conjunto de condiciones iniciales tales que la salida de ambos motores sea igual: $i_j = i_{aj} = i_{bj}$ y $\theta = \theta_a = \theta_b$ para todo $t \geq 0$.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores es posible mostrar que

$$e_j = 0, \quad \frac{de_j}{dt} = 0, \quad \theta = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0$$

por tanto la dinámica indistinguible del motor de reluctancia conmutada queda

Observando el modelo dinámico del error, se aprecia que su primera ecuación tiene, en su parte derecha, solo variables conocidas por lo cual en la sexta ecuación de la dinámica indistinguible la derivada temporal de ε se iguala a cero. En la séptima ecuación de la dinámica indistinguible, $0 = \varepsilon$, se tiene el resultado favorable para el análisis ya que muestra que la diferencia de las velocidades es cero, lo que implica que ω_a y ω_b son iguales y por tanto no existen dos trayectorias de ω diferentes con entrada $u(\cdot)$. Con este resultado se tiene a las trayectorias propias del sistema del SRM como soluciones de la dinámica indistinguible ya que estas satisfacen, al mismo tiempo, el propio sistema del SRM como el modelo dinámico del error y esto se aprecia en las tres últimas ecuaciones de la dinámica indistinguibles; donde no importa que valores tomen θ, i_1, i_2 e i_3 por que $\varepsilon = 0$ las satisface.

Por tanto el conjunto de todas las trayectorias indistinguibles del modelo dinámico del SRM queda

$$\mathcal{I}_{(u, \omega, \theta, i_1, i_2, i_3)} = \{\omega, \theta, i_1, i_2, i_3\}$$

V. CONCLUSIONES

Se formuló un modelo dinámico de error haciendo uso de la comparación entre dos sistemas dinámicos idénticos, bajo ciertas condiciones de trabajo del motor, esto es, considerando que las fases de estator están desacopladas magnéticamente, despreciando el fenómeno de saturación en las bobinas y estableciendo como estados medibles las corrientes de estator y la posición del rotor se determinó la existencia del modelo de ecuaciones álgebra-diferenciales de donde procede la dinámica indistinguible del SRM que a la vez proporciona el resultado principal del análisis: existencia de observabilidad global para el motor de reluctancia conmutada basado en la Definición 2:

$$\varepsilon = \omega_a - \omega_b = 0 \Rightarrow \mathcal{I}_{(u, \omega)} = \{\omega\}$$

esto es, el error de velocidades igual a cero hace que el conjunto de todas las dinámicas indistinguibles del SRM sea el mismo estado.

Como extensiones de este trabajo pueden considerarse dos casos 1) determinar la observabilidad global considerando la dinámica completa del SRM, esto es, tomando en cuenta la saturación y 2) considerando como únicos estados medibles las corrientes de estator.

REFERENCIAS

- De La Guerra Carrasco, Alejandra Icxihuh (2011). Observabilidad de motores de reluctancia conmutada. Tesis de maestría.
- Ehsani, M. y B. Fahimi (2002). Elimination of position sensors in switched reluctance motor drives: state of the art and future trends. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* **49**(1), 40 –47.
- Espinosa-Pérez, G., P. Maya-Ortiz, M. Velasco-Villa y H. Sira-Ramírez (2002). Passivity-based control of switched reluctance motors with nonlinear magnetic circuits. En: *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*. Vol. 1. pp. 468 – 473.

- Gao, Hongwei, F.R. Salmasi y M. Ehsani (2004). Inductance model-based sensorless control of the switched reluctance motor drive at low speed. *Power Electronics, IEEE Transactions on* **19**(6), 1568 – 1573.
- Hermann, R. y A. Krener (1977). Nonlinear controllability and observability. *Automatic Control, IEEE Transactions on* **22**(5), 728 – 740.
- Ibarra-Rojas, Sebastian, Jaime Moreno y Gerardo Espinosa-Pérez (2004). Global observability analysis of sensorless induction motors. *Automatica* **40**(6), 1079 – 1085.
- Komatsuzaki, A., T. Bamba y I. Miki (2008). A position estimation for switched reluctance motor at standstill. En: *Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion, 2008. SPEEDAM 2008. International Symposium on*. pp. 290 –295.
- Krishnan, R. (2001). *Switched reluctance motor drives: modeling, simulation, analysis, design, and applications*. Industrial electronics series.
- Miller, T.J.E. (2001). *Electronic Control of Switched Reluctance Machines*. Newnes Power Engineering Series.
- Tan, Guojun, Zhenglan Ma, Songyan Kuai y Xulong Zhang (2009). Four-quadrant position sensorless control in switched reluctance motor drives based on sliding mode observer. En: *Electrical Machines and Systems, 2009. ICEMS 2009. International Conference on*. pp. 1 –5.
- Wang, Shun-Chung y Wen-Han Lan (2004). Turn-on angle searching strategy for optimized efficiency drive of switched reluctance motors. En: *Industrial Electronics Society, 2004. IECON 2004. 30th Annual Conference of IEEE*. Vol. 2. pp. 1873 – 1878 Vol. 2.

Análisis de Observabilidad y diseño de Observador para el Motor de Reluctancia Conmutada

Paul R. Maya–Ortiz* I. Pacheco–Tejeda, A. De la Guerra**

* *Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, DF, 04510, México, (Tel: (+52)-55-56223125, e-mail:paulm@dctrl.fi-b.unam.mx).*

** *Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería-UNAM e-mail: ipacheco@comunidad.unam.mx, icxihguerra@gmail.com*

Resumen: El Motor de Reluctancia Conmutada es analizado en este artículo. En primera instancia, se hace un análisis de observabilidad global empleando el concepto de dinámicas indistinguibles y se concluye que, si se consideran como salidas las corrientes de estator y la posición angular, el motor es observable globalmente. En segundo lugar, se presenta el diseño de un observador de orden reducido, empleando argumentos tipo Lyapunov, que recupera la velocidad angular y las corrientes de estator. Se presenta la demostración de convergencia y su desempeño es mostrado vía simulaciones numéricas.

Palabras clave: Motor de Reluctancia Conmutada, observador, observabilidad global.

1. INTRODUCCIÓN

El motor de reluctancia conmutada (MRC) es una máquina eléctrica doble saliente con un rotor sin devanados o imanes permanentes. Sus fases son bobinas concentradas que se encienden de forma secuencial para producir par, por medio de pulsos de voltaje de CD que resultan en una corriente controlada unipolar. El MRC puede manejar rangos de potencia desde unos pocos watts hasta MW. Debido a su topología simple y robusta, puede seguir funcionando, sin que su desempeño se vea deteriorado de manera significativa, cuando una de las fases ha fallado. Al MRC se le ha puesto especial atención en las dos últimas décadas con la esperanza de que sea una alternativa a los motores de CD sin escobillas con un costo menor y un desempeño equivalente comparado con las máquinas de CA. Entre sus múltiples aplicaciones, recientemente se ha investigado la posibilidad de emplear este tipo de máquinas en vehículos eléctricos, debido a sus bondades para ser aplicado en estos sistemas (Bilgin et al. [2011], Hennen et al. [2012], Chen and Lin [2010]), y puede emplearse para aplicaciones de baja velocidad así como también en aplicaciones de alto desempeño, especialmente en ambientes térmica y químicamente adversos. Si un MRC es diseñado con un alto número de polos, puede producir un par muy alto a bajas velocidades, lo que permite evitar el uso de cajas reductoras y lo hace una segura alternativa para aplicaciones de tracción directa (Boldea and Nasar [2006]).

A pesar sus grandes ventajas y de su penetración en la industria, el MRC solo es parte de un mercado incipiente debido a que es difícil controlarlo. Se requieren elaborados métodos digitales para su control, sobre todo cuando se considera la presencia de la saturación magnética.

La principal limitación al explotar la estructura simple de un MRC es su comportamiento electromagnético altamen-

te no lineal, ya que el par desarrollado es una función no lineal de las corrientes de estator y de la velocidad del rotor. Además, con el fin de maximizar la tasa par/masa se necesita operar en la región de saturación magnética.

Por otra parte, el uso de sensores para medir las variables mecánicas (posición y velocidad angulares) puede conducir a problemas de confiabilidad en ambientes severos y pueden ser una parte importante del costo del *driver*.

Para evitar el uso de sensores para las variables mecánicas, en la literatura científica se han presentado diferentes técnicas para estimar de manera indirecta la posición y la velocidad angulares, algunas de ellas emplean la relación que existe entre el flujo, la posición del rotor y la corriente de fase. Sin embargo, estos enfoques requieren de conocer de manera muy precisa las curvas de magnetización del motor, lo que requiere de mediciones fuera de línea y cálculos complejos (Mese and Torrey [2002], Ehsani M. [2002], Koblara et al. [2010], Panda D. [1990]).

También es posible conocer las variables mecánicas empleando observadores de estados, como el presentado en (Solsona et al. [1996]), donde se presenta un observador de orden reducido y la convergencia del error de estimación a cero se demuestra usando argumentos de Lyapunov. También se han desarrollado variaciones del observador tipo Luenberger, donde generalmente la dinámica del error se linealiza para hacer la demostración de convergencia del error de estimación. Otras técnicas estiman primero los flujos en lazo abierto suponiendo que la condición inicial del flujo es conocida, estos estimados se consideran una buena representación de los flujos reales, por lo que son usados para generar un error de flujo en un observador basado en modos deslizantes que estima los flujos magnéticos y las variables mecánicas.

Antes de proponer observadores de estados es importante conocer las propiedades de observabilidad de la máquina por lo que es necesario llevar a cabo el análisis respectivo. Hasta el conocimiento de los autores, no se ha llevado a cabo un análisis de observabilidad global para el MRC y solo se tiene un análisis local presentado en (De la Guerra A. [2011]). En este trabajo se muestra que el MRC es localmente observable si se consideran como salidas las corrientes de estator y la posición angular.

Así, la contribución de este trabajo es doble. En primera instancia, se presenta un análisis de observabilidad global, donde se demuestra que si son consideradas como salidas las corrientes de estator y la posición angular, el MRC es observable globalmente. Este análisis se llevó a cabo con base en las ideas presentadas en (Ibarra-Rojas et al. [2004]) donde se realiza el análisis para el motor de inducción. En segundo lugar se presenta el diseño de un observador de orden reducido para estimar la velocidad angular y el análisis de convergencia se hace mediante ideas de Lyapunov.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se detallan el motor y su funcionamiento; en la Sección 3 se introducen los conceptos de observabilidad y se lleva a cabo el análisis; la Sección 4 está dedicada al diseño del observador y a su análisis de convergencia. En la Sección 5 se presentan las simulaciones que muestran el buen comportamiento del observador propuesto. Finalmente las conclusiones de este trabajo se presentan en la Sección 6.

2. DESCRIPCIÓN Y MODELO DEL MRC

El MRC presenta un comportamiento no lineal que se refleja en un modelo matemático para el que se hacen las siguientes consideraciones: 1) Se desprecian las inductancias mutuas entre devanados del estator i.e., las fases están desacopladas magnética y eléctricamente; 2) Se considera que las inductancias dependen sólo de la posición angular, no de la corriente y los flujos de encadenamientos de flujo son,

$$\lambda_j = L_j(\theta) i_j \quad (1)$$

3) Las inductancias son como

$$L_j(\theta) = l_0 - l_1 \cos \left(N_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right)$$

donde N_r es el número de polos del rotor y l_0, l_1 , con $l_0 > l_1$, son constantes positivas obtenidas de forma experimental.

El modelo por fase, con $j = 1, 2, 3 \dots m$, es entonces:

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{d\lambda_j}{dt} + R i_j \\ J\dot{\omega} &= T_c(\theta, i_1, i_2, \dots, i_m) - T_L - d\omega \\ \omega &= \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad (2)$$

donde θ y ω son la posición y velocidad del rotor, i_1, i_2, \dots, i_m son las corrientes de estator y u_1, u_2, \dots, u_m son los voltajes de entrada, con m el número de fases de estator. Sustituyendo (1) en (2), y considerando $T_e = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i}$, se obtiene el modelo matemático ¹, donde

los parámetros son las resistencias de fase, R , la inercia rotacional J y el coeficiente de amortiguamiento d ,

$$\mathbf{D}(\theta) \frac{d\mathbf{i}}{dt} = -\omega \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \mathbf{R} \mathbf{i} + \mathbf{u} \quad (3)$$

$$J\dot{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - d\omega - T_L \quad (4)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (5)$$

con $\mathbf{i} = [i_1, i_2, i_3]^T$, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$, $\mathbf{R} = \text{diag}[R, R, R]$, $\mathbf{D}(\theta) = \text{diag}[L_1(\theta), L_2(\theta), L_3(\theta)] = \mathbf{D}(\theta)^T > 0$ y $\mathbf{C}(\theta) = \text{diag}[k_1(\theta), k_2(\theta), k_3(\theta)]$.

3. ANÁLISIS DE OBSERVABILIDAD

La metodología que se emplea en este trabajo es la descrita en (Ibarra-Rojas et al. [2004]), y consiste en la búsqueda y determinación de un modelo dinámico del error representado por un conjunto de ecuaciones álgebra-diferenciales, para el cual el conjunto de soluciones (si existen) representan las trayectorias indistinguibles. Se abordará el tema con una serie de definiciones necesarias para el proceso del método según (Hermann and Krener [1977]).

Sea el sistema no lineal

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u); & x(0) = x_0 \\ y = h(x) \end{cases} \quad (6)$$

donde $x \in D_x \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entrada, $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida y f y h son funciones suficientemente suaves definidas en \mathbb{R}^{n+p} y \mathbb{R}^n respectivamente. La solución de (6) en $t \geq 0$ que pasa a través de x_0 en $t = 0$, correspondiendo la función de entrada $u \in \mathcal{U}$ (una clase de funciones de tiempo) es $x(t) = \phi(t, x_0, u)$. La salida esta dada por $y(t) = \lambda(t, x_0, u) = h(\phi(t, x_0, u))$.

Definición 1. Considerando una entrada $u(\cdot)$ para el sistema (6) y una condición inicial $x^0 \in D_x$. Si otra condición inicial $x^1 \in D_x$ es tal que $y(t, x^0, u(\cdot)) = y(t, x^1, u(\cdot))$ para todo $t \in [0, T)$, para algún $T > 0$ entonces x^1 es un estado $u(\cdot)$ -indistinguible de x^0 en el intervalo $[0, T)$. El conjunto de todos los estados $u(\cdot)$ -indistinguibles de x^0 será denotado por $\mathcal{I}_{(u, x^0)}$.

Definición 2. El sistema (6) es observable en $x^0 \in D_x$ si $\mathcal{I}_{(u, x^0)} = \{x^0\}$ y el sistema (6) es observable si $\mathcal{I}_{(u, x)} = \{x\}$ para todo $x \in D_x$.

Definición 3. El sistema (6) es detectable si para cualquier $x^0 \in D_x$, y algún $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ se satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \bar{x}, u(\cdot)) - x(t, x^0, u(\cdot))\| = 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{I}_{(u, x)}$$

Con base en las definiciones anteriores, en (Ibarra-Rojas et al. [2004]) se propone una metodología para determinar la dinámica indistinguible. Esta metodología consta de cuatro pasos que se describen a continuación

¹ Por facilidad de representación y sin pérdida de generalidad en este trabajo se estudia una máquina trifásica.

Primero, considérese el sistema (6). Supónganse dos sistemas idénticos (mismo modelo y mismos parámetros) considerando condiciones óptimas de operación para la observabilidad: parámetros bien conocidos, entrada medible, definición de estados medibles y no medibles. Se suponen los modelos Σ_1 y Σ_2 con condiciones iniciales diferentes

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, u); & x_1(0) = x_{10} \\ y = h(x_1) \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = f(x_2, u); & x_2(0) = x_{20} \\ y = h(x_2) \end{cases}$$

Segundo, se obtiene el modelo dinámico de error del sistema $\Xi = \Sigma_1 - \Sigma_2$. Tercero, encontrar un conjunto de ecuaciones llamado dinámica indistinguible vista como la conexión en cascada del sistema (6) y Ξ . Cabe remarcar que esta dinámica indistinguible tiene naturaleza global, ya que representa todas las trayectorias indistinguibles del sistema.

$$DI : \begin{cases} \Sigma \\ \Xi \end{cases}$$

El cuarto paso es determinar la existencia de soluciones de la dinámica indistinguible. De no existir soluciones a esta dinámica, o que las soluciones conforman el conjunto de las trayectorias propias del sistema, se afirma que el sistema es observable globalmente. En caso contrario el sistema no es observable y es necesario llevar a cabo un análisis adicional que permita demostrar, al menos, detectabilidad.

Considerando la metodología expuesta se obtiene un modelo dinámico de error, utilizando el modelo (2), considerando las condiciones apropiadas de operación para la observabilidad, esto es, parámetros del motor conocidos, tomando u, T_L, i, θ como señales conocidas y ω no medible. Se reescribe (2) como:

$$\Omega : \begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[(\text{sen}(N_r \theta) i_1^2 + \text{sen} \left(N_r \theta - \frac{2\pi}{3} \right) i_2^2 + \text{sen} \left(N_r \theta + \frac{2\pi}{3} \right) i_3^2 \right] - \frac{T_L}{J} - \frac{d}{J} \omega \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \text{sen}(N_r \theta) \omega i_1 - r i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \text{sen} \left(N_r \theta - \frac{2\pi}{3} \right) \omega i_2 - r i_2}{l_0 - l_1 \cos \left(N_r \theta - \frac{2\pi}{3} \right)} \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \text{sen} \left(N_r \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \omega i_3 - r i_3}{l_0 - l_1 \cos \left(N_r \theta + \frac{2\pi}{3} \right)} \end{cases}$$

Tomando como partida dos motores idénticos con condiciones iniciales arbitrarias y diferentes

$$\Omega_a : \begin{cases} \frac{d\omega_a}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[(\text{sen}(N_r \theta_a) i_{1a}^2 + \text{sen} \left(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3} \right) i_{2a}^2 + \text{sen} \left(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3} \right) i_{3a}^2 \right] - \frac{T_L}{J} - \frac{d}{J} \omega_a, \\ \omega_a(0) = \omega_{0a} \\ \frac{d\theta_a}{dt} = \omega_a, \\ \theta_a(0) = \theta_{0a} \\ \frac{di_{1a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \text{sen}(N_r \theta_a) \omega_a i_{1a} - r i_{1a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)}, \\ i_{1a}(0) = i_{10a} \\ \frac{di_{2a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \text{sen} \left(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3} \right) \omega_a i_{2a} - r i_{2a}}{l_0 - l_1 \cos \left(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3} \right)}, \\ i_{2a}(0) = i_{20a} \\ \frac{di_{3a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \text{sen} \left(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3} \right) \omega_a i_{3a} - r i_{3a}}{l_0 - l_1 \cos \left(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3} \right)}, \\ i_{3a}(0) = i_{30a} \end{cases}$$

$$\Omega_b : \begin{cases} \frac{d\omega_b}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[(\text{sen}(N_r \theta_b) i_{1b}^2 + \text{sen} \left(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3} \right) i_{2b}^2 + \text{sen} \left(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3} \right) i_{3b}^2 \right] - \frac{T_L}{J} - \frac{d}{J} \omega_b, \\ \omega_b(0) = \omega_{0b} \\ \frac{d\theta_b}{dt} = \omega_b, \\ \theta_b(0) = \theta_{0b} \\ \frac{di_{1b}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \text{sen}(N_r \theta_b) \omega_b i_{1b} - r i_{1b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b)}, \\ i_{1b}(0) = i_{10b} \\ \frac{di_{2b}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \text{sen} \left(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3} \right) \omega_b i_{2b} - r i_{2b}}{l_0 - l_1 \cos \left(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3} \right)}, \\ i_{2b}(0) = i_{20b} \\ \frac{di_{3b}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \text{sen} \left(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3} \right) \omega_b i_{3b} - r i_{3b}}{l_0 - l_1 \cos \left(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3} \right)}, \\ i_{3b}(0) = i_{30b} \end{cases}$$

Al definir las variables de error, las cuales corresponden a la diferencia entre las dinámicas de los motores Ω_a y Ω_b , como

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \omega_a - \omega_b \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\omega_a}{dt} - \frac{d\omega_b}{dt} \\ \Delta &= \theta_a - \theta_b \Rightarrow \frac{d\Delta}{dt} = \frac{d\theta_a}{dt} - \frac{d\theta_b}{dt} \\ e &= i_a - i_b \Rightarrow \frac{de}{dt} = \frac{di_a}{dt} - \frac{di_b}{dt} \end{aligned}$$

Ordenando las ecuaciones de Ω_a y las obtenidas a través de las variables de error se obtiene el modelo de error del motor de reluctancia conmutada

$$\Omega_a : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_a}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[(\sin(N_r \theta_a) i_{1a}^2 + \sin\left(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}\right) i_{2a}^2 + \sin\left(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}\right) i_{3a}^2 \right] - \frac{T_L}{J} - \frac{d}{J} \omega_a, \\ \omega_a(0) = \omega_{0a} \\ \frac{d\theta_a}{dt} = \omega_a, \\ \theta_a(0) = \theta_{0a} \\ \frac{di_{1a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a) \omega_a i_{1a} - r i_{1a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)}, \\ i_{1a}(0) = i_{10a} \\ \frac{di_{2a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin\left(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}\right) \omega_a i_{2a} - r i_{2a}}{l_0 - l_1 \cos\left(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}\right)}, \\ i_{2a}(0) = i_{20a} \\ \frac{di_{3a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin\left(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}\right) \omega_a i_{3a} - r i_{3a}}{l_0 - l_1 \cos\left(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}\right)}, \\ i_{3a}(0) = i_{30a} \end{array} \right.$$

$$E : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[\sin(N_r \theta_a) i_{1a}^2 - \sin(N_r \theta_b) i_{1b}^2 + \sin\left(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}\right) i_{2a}^2 - \sin\left(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}\right) i_{2b}^2 + \sin\left(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}\right) i_{3a}^2 - \sin\left(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}\right) i_{3b}^2 \right] - \frac{d}{J} (\omega_a - \omega_b) \\ \varepsilon(0) = \omega_{0a} - \omega_{0b} \\ \frac{d\Delta}{dt} = \omega_a - \omega_b \\ \Delta(0) = \theta_{0a} - \theta_{0b} \\ \frac{de_1}{dt} = \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta_b) \omega_b i_{1b} + r i_{1b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b)} - \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta_a) \omega_a i_{1a} + r i_{1a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)} \\ e_1(0) = i_{10a} - i_{10b} \\ \frac{de_2}{dt} = \frac{N_r l_1 \sin\left(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}\right) \omega_b i_{2b} + r i_{2b}}{l_0 - l_1 \cos\left(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}\right)} - \frac{N_r l_1 \sin\left(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}\right) \omega_a i_{2a} + r i_{2a}}{l_0 - l_1 \cos\left(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}\right)} \\ e_2(0) = i_{20a} - i_{20b} \\ \frac{de_3}{dt} = \frac{N_r l_1 \sin\left(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}\right) \omega_b i_{3b} + r i_{3b}}{l_0 - l_1 \cos\left(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}\right)} - \frac{N_r l_1 \sin\left(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}\right) \omega_a i_{3a} + r i_{3a}}{l_0 - l_1 \cos\left(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}\right)} \\ e_3(0) = i_{30a} - i_{30b} \end{array} \right.$$

Tomando en cuenta las condiciones de indistinguibilidad del motor, esto es, entradas $u(\cdot)$ y par de carga T_L iguales para ambos motores Ω_a y Ω_b , y un conjunto de condiciones iniciales tales que la salida de ambos motores sea igual. Con este modelo, la dinámica indistinguible se obtiene al tomar en cuenta $i_j = i_{aj} = i_{bj}$ y $\theta = \theta_a = \theta_b$ para todo $t \geq 0$.

Bajo estas consideraciones anteriores es posible mostrar que

$$e_j = 0, \frac{de_j}{dt} = 0, \theta = 0, \frac{d\theta}{dt} = 0$$

y la dinámica indistinguible, dada por

$$DI_{MRC} : \begin{cases} \Omega \\ E \end{cases}$$

es de la forma

$$DI_{MRC} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} \left[(\sin(N_r \theta) i_1^2 + \sin\left(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}\right) i_2^2 + \sin\left(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}\right) i_3^2 \right] - \frac{T_L}{J} - \frac{d}{J} \varepsilon \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta)] \omega i_1 - r i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin\left(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}\right)] \omega i_2 - r i_2}{l_0 - l_1 \cos\left(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}\right)} \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin\left(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}\right)] \omega i_3 - r i_3}{l_0 - l_1 \cos\left(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}\right)} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \\ \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon \\ 0 = -\frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta) \varepsilon i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} \\ 0 = -\frac{N_r l_1 \sin\left(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}\right) \varepsilon i_2}{l_0 - l_1 \cos\left(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}\right)} \\ 0 = -\frac{N_r l_1 \sin\left(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}\right) \varepsilon i_3}{l_0 - l_1 \cos\left(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}\right)} \end{array} \right.$$

Cabe observar el conjunto de ecuaciones que conforman la dinámica indistinguible del MRC; primeramente la sexta ecuación de DI_{MRC} , donde la dinámica del error esta compuesta en su parte derecha solo por variables medibles que por lo tanto se iguala a cero y con esto se sabe que el error de velocidades es al menos constante, en la séptima ecuación se observa el resultado más importante que se buscaba ya que el error de velocidades es igual a cero; con este resultado, por un lado, se satisfacen las ultimas tres ecuaciones de DI_{MRC} ya que es la única variables que podría establecer la igualdad a cero al mismo tiempo, y por ultimo se muestra que el conjunto de trayectorias indistinguibles son las mismas dinámicas del motor

$$\mathcal{I}_{(u, \omega, \theta, i_1, i_2, i_3)} = \{\omega, \theta, i_1, i_2, i_3\}$$

entonces basados en la Definición 2 se concluye que el motor de reluctancia conmutada, bajo las condiciones anteriormente señaladas, es globalmente observable.

4. OBSERVADOR

En esta sección se presenta el observador de orden reducido que se diseñó con base en la elección de una función candidata de Lyapunov en los errores de estimación. La función está inspirada en la expresión de la energía total del sistema que es la suma de la energía magnética y de la energía cinética.

4.1 Proposición

Proposition 1. Dado el modelo matemático del MRC (3-4), se asume que

- S.1** se conocen todos los parámetros del modelo matemático y el par de carga T_L ,
- S.2** se miden la posición angular, las corrientes de fase y los voltajes de fase y
- S.3** no se mide la velocidad angular.

Bajo estas condiciones el observador dado por

$$D(\theta) \frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} = -\hat{\omega} \mathbf{C}(\theta) \hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2} \hat{\omega} \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} - \mathbf{R} \hat{\mathbf{i}} + \mathbf{G} \tilde{\mathbf{i}} + \mathbf{u} \quad (7)$$

$$\mathbf{J} \dot{\hat{\omega}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{i}}^T \mathbf{C}(\theta) \hat{\mathbf{i}} - d \hat{\omega} - T_L \quad (8)$$

donde $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T > 0$, recupera asintóticamente la velocidad del rotor, garantizando que el error de estimación tiende a cero.

4.2 Demostración

Se definen los errores de corrientes y de velocidad como $\tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{i} - \hat{\mathbf{i}}$ y $\tilde{\omega} = \omega - \hat{\omega}$ respectivamente. Al restar del modelo dado por (3) y (4) la expresión del observador dada por (7) y (8), respectivamente, se obtiene la siguiente expresión para la dinámica del error de observación,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\theta) \frac{d\tilde{\mathbf{i}}}{dt} &= -\omega \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} + \hat{\omega} \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} + \frac{1}{2} \hat{\omega} \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} - \mathbf{R} \tilde{\mathbf{i}} - \mathbf{G} \tilde{\mathbf{i}} \\ \mathbf{J} \tilde{\dot{\omega}} &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} - d \tilde{\omega} + \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{C}(\theta) \hat{\mathbf{i}} \end{aligned} \quad (9)$$

Se propone la función candidata de Lyapunov,

$$V(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\omega}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{D}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} + \frac{\mathbf{J}}{2} \tilde{\omega}^2$$

cuya derivada con respecto al tiempo es,

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\omega}) = \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{D}(\theta) \frac{d\tilde{\mathbf{i}}}{dt} + \frac{\omega}{2} \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} + \mathbf{J} \tilde{\omega} \dot{\tilde{\omega}}$$

que evaluada a lo largo de las trayectorias de (9) es de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\omega}) &= \tilde{\mathbf{i}}^T \left[-(\mathbf{R} + \mathbf{G}) \tilde{\mathbf{i}} - \omega \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} + \hat{\omega} \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} + \frac{1}{2} \hat{\omega} \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} \right] \\ &\quad + \frac{\omega}{2} \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} + \tilde{\omega} \left[-d \tilde{\omega} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} + \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{C}(\theta) \hat{\mathbf{i}} \right] \end{aligned}$$

Lo que conduce a,

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\omega}) = -\tilde{\mathbf{i}}^T (\mathbf{R} + \mathbf{G}) \tilde{\mathbf{i}} - d \tilde{\omega}^2$$

con $(\mathbf{R} + \mathbf{G}) = (\mathbf{R} + \mathbf{G})^T > 0$. Por lo tanto la dinámica del error de estimación tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen. ∇

Es importante notar que:

- Este resultado, cómo se menciona en S.1, depende del conocimiento de los parámetros del modelo del MRC.
- Aunque se asume el conocimiento de la posición angular, suposición S.2, este resultado puede utilizarse cuando no se quiera reconstruir la velocidad con métodos numéricos.
- La velocidad de convergencia del observador depende del término de corrección lineal, en particular de la matriz $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T > 0$.

5. SIMULACIONES

Para mostrar el desempeño de observador propuesto, se llevaron a cabo simulaciones numéricas considerando la ley de control propuesta en (Espinosa-Pérez G. R. [2000]). La máquina que se simula es un MRC trifásico de 12 polos en el estator y 8 polos en el rotor con parámetros $R = 2,2 [\Omega]$,

$J = 0,09 [\text{Kg}/\text{m}^2]$, $d = 0,001 [\text{Kgs}/\text{rad}]$, $l_0 = 0,052$ y $l_1 = 0,0095$ además con $\mathbf{G} = \text{diag}\{2000, 2000, 2000\}$ y las ganancias del controlador son $K_{vj} = 20$. En todos los casos se consideró un par de $T_L = 0,1 [N - m]$. Se hicieron dos ejercicios de seguimiento de un perfil de velocidad que permanecía en velocidad cero durante 5 segundos.

En la primera simulación se cambio el valor de las inductancias mínima y máxima y de las resistencia de fase en un 50 %, en la Figura 1 se presenta la velocidad angular real y la velocidad angular estimada. En la Figura 2 se muestra el error de estimación de la velocidad angular que es menor al 1% de la magnitud de la velocidad real, a pesar de la variación paramétrica.

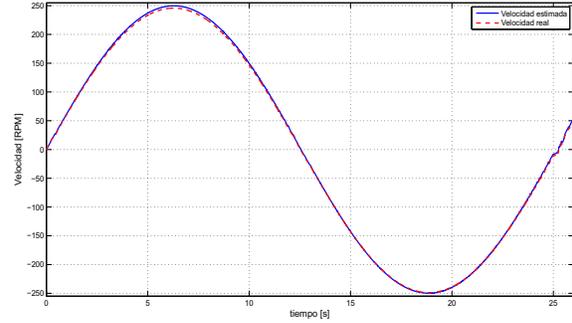


Figura 1. Velocidades real y estimada

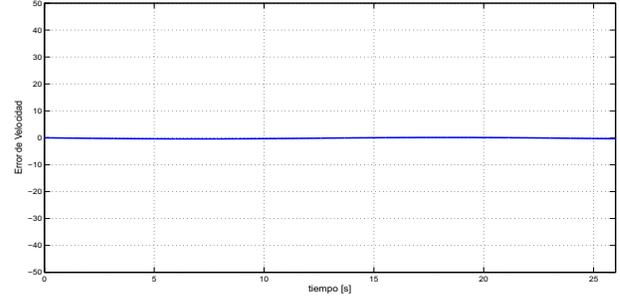


Figura 2. Error de velocidad

En el segundo ejercicio se sigue una referencia que permanece en cero durante 5 segundos, también se supone una variación de más del 50% del valor nominal de la resistencia de fase, en la Figura 3 se presenta la velocidad angular real y la velocidad angular estimada, donde se aprecia la degradación del desempeño, sin embargo en la Figura 4 se muestra que el error de estimación de velocidad sigue siendo menor al 1% de la magnitud de la velocidad real.

Los resultados anteriores muestran que el observador propuesto puede lidiar con cambios en los parámetros eléctricos, de más de 50% del valor nominal en el caso presentado. Además se muestra que se pueden incluso hacer frente a perfiles que incluyen operación a velocidad cero, lo que habla de las propiedades de observabilidad del MRC con medición de corrientes de fase y posición angular. Es interesante mencionar que el desempeño del observador es mejor si la referencia tiene una aceleración diferente de cero.

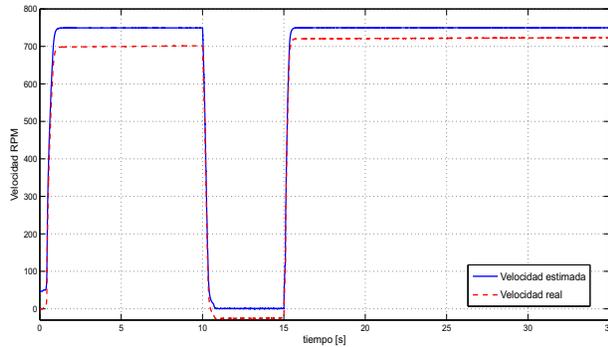


Figura 3. Velocidades real y estimada con variación paramétrica

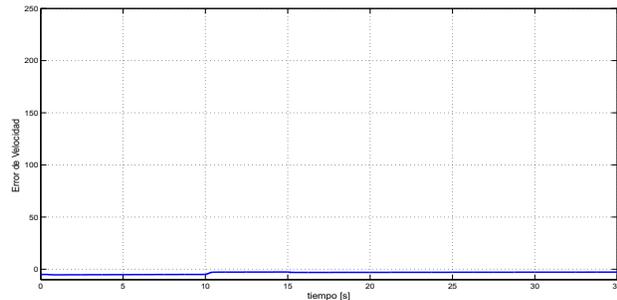


Figura 4. Error de velocidad con variación paramétrica

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron el análisis de observabilidad global y el diseño de un observador de orden reducido para el motor de reluctancia conmutada. Con base en el análisis realizado es posible afirmar que, si se consideran como salidas las corrientes de estator y la posición angular, el MRC es observable de manera global. Así mismo, el observador diseñado presenta un buen desempeño cuando se llevan a cabo tareas de regulación y seguimiento de la velocidad angular, con un controlador basado en pasividad previamente reportado en la literatura. Cabe señalar que se supuso un conocimiento total de los parámetros del sistema. Las extensiones a este trabajo se dan en diferentes vertientes, como: el análisis de observabilidad considerando como salidas sólo las corrientes de estator; el diseño de observadores para las variables mecánicas; el diseño de leyes de control por retroalimentación de salida, ya sea pura o basada en observador.

REFERENCIAS

- Bilgin, B., Emadi, A., and Krishnamurthy, M. (2011). Comparative evaluation of 6/8 and 6/10 switched reluctance machines for traction application in plug-in hybrid electric vehicles. In *Electric Machines Drives Conference (IEMDC), 2011 IEEE International*, 1300–1305.
- Boldea, I. and Nasar, S. (2006). *Electric Drives*. Electric Power Engineering Series. CRC/Taylor & Francis.
- Chen, C.G. and Lin, M.T. (2010). Implementation of sensorless techniques for switched reluctance motor drive systems. In *Industrial Electronics (ISIE), 2010 IEEE International Symposium on*, 1321–1326.

- De la Guerra A., Espinosa-Pérez G. R., M.O.P. (2011). Análisis de observabilidad para el motor de reluctancia conmutada. *Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático 2011*.
- Ehsani M., B.F. (2002). Elimination of position sensors in switched reluctance motor drives: State of the art and future trends. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49, 40.
- Espinosa-Pérez G. R., Maya-Ortiz P., V.V.M.S.R.H. (2000). On the Control of Switched Reluctance Motors. *Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 2000. ISIE 2000.*, 2, 413–418.
- Hennen, M., Niessen, M., Heyers, C., Brauer, H., and De Doncker, R. (2012). Development and control of an integrated and distributed inverter for a fault tolerant five-phase switched reluctance traction drive. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, 27(2), 547–554.
- Hermann, R. and Krener, A. (1977). Nonlinear controllability and observability. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 22(5), 728–740.
- Ibarra-Rojas, S., Moreno, J., and Espinosa-Pérez, G. (2004). Global observability analysis of sensorless induction motors. *Automatica*, 40(6), 1079–1085.
- Ilic-Spong, M., Marino, R., Peresada, S., and Taylor, D. (1987). Feedback linearizing control of switched reluctance motors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(5), 371–379.
- Koblara, T., Sorandaru, C., Musuroi, S., and Svoboda, M. (2010). A low voltage sensorless switched reluctance motor drive using flux linkage method. In *Optimization of Electrical and Electronic Equipment (OPTIM), 2010 12th International Conference on*, 665–672.
- Mese, E. and Torrey, D. (2002). An approach for sensorless position estimation for switched reluctance motors using artificial neural networks. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, 17(1), 66–75.
- Panda D., R.V. (1990). Sensorless control of switched reluctance motor drive with self-measured flux-linkage characteristics. *Power Electronics Specialists Conference, 2000. PESC 00. 2000 IEEE 31st Annual*, 3, 1569–1574.
- Solsona, J., Valla, M., and Muravchik, C. (1996). A nonlinear reduced order observer for permanent magnet synchronous motors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 43(4), 492–497.

Bibliografía

Besançon, Gildas (2007). *Nonlinear Observers and Applications*. Springer-Verlag.

Chapman, Stephen J. (2005). *Máquinas Eléctricas*. McGraw Hill.

De La Guerra Carrasco, Alejandra Icxihuah (2011). Observabilidad de motores de reluctancia conmutada. Tesis de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México.

Ehsani, M. y B. Fahimi (2002). Elimination of position sensors in switched reluctance motor drives: state of the art and future trends. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* **49**(1), 40 –47.

Emotron (2012). Tecnología sr. <http://www.emotron.es/empresa/tecnologia/tecnologia-sr/>.

Espinosa-Pérez, G., P. Maya-Ortiz, M. Velasco-Villa y H. Sira-Ramírez (2002). Passivity-based control of switched reluctance motors with nonlinear magnetic circuits. En: *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*. Vol. 1. pp. 468 – 473 vol.1.

- Gao, Hongwei, F.R. Salmasi y M. Ehsani (2004). Inductance model-based sensorless control of the switched reluctance motor drive at low speed. *Power Electronics, IEEE Transactions on* **19**(6), 1568 – 1573.
- Gonzalez-Longatt, Francisco M. (2004). Entendiendo la transformación de park. Tesis de maestría. Universidad Nacional Experimental Politécnica de la Fuerza Armada Nacional, Venezuela.
- Gorasson, G., L. Sjoberg y J. Reinert (2001). A cost optimised direct drive for low-speed industrial applications. En: *Power Electronics and Applications, 2001., Thirteenth European Conference on.*
- Harris, Martyn R., John W. Finch, John A. Mallick y Timothy J. E. Miller (1986). A review of the integral-horsepower switched reluctance drive. *Industry Applications, IEEE Transactions on* **IA-22**(4), 716 –721.
- Hendershot, J.R. (1991). Ac brushless and switched reluctance motors comparison. *Motion Control 1991* pp. 1–12.
- Hermann, R. y A. Krener (1977). Nonlinear controllability and observability. *Automatic Control, IEEE Transactions on* **22**(5), 728 – 740.
- Ibarra-Rojas, Sebastian, Jaime Moreno y Gerardo Espinosa-Pérez (2004). Global observability analysis of sensorless induction motors. *Automatica* **40**(6), 1079 – 1085.
- Interamericana, Electricidad (2011). Alta eficiencia es el norte. recambio de motores en minería. http://www.revistaei.cl/revistas/imprimir_noticia_neo.php?id=1199.

- Kline, J.A. (1999). Opportunities for switched reluctance motor-drives. En: *Pulp and Paper, 1999. Industry Technical Conference Record of 1999 Annual*. pp. 42–47.
- Komatsuzaki, A., T. Bamba y I. Miki (2008). A position estimation for switched reluctance motor at standstill. En: *Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion, 2008. SPEEDAM 2008. International Symposium on*. pp. 290–295.
- Krause, Paul C., Oleg Wasynczuk y Scott D. Sudhoff (2002). *Analysis of electric machinery and drive systems*. Wiley-IEEE Press.
- Krishnan, Ramu (2001). *Switched reluctance motor drives: modeling, simulation, analysis, design, and applications*. Industrial electronics Series, CRC Press, Boca Raton.
- Lawrenson, P.J., J.M. Stephenson, N.N. Fulton, P.T. Blenkinsop y J. Corda (1980). Variable-speed switched reluctance motors. *Electric Power Applications, IEE Proceedings B* **127**(4), 253–265.
- LTDA, Sinergy Ingeniería (2011). Noticias. <http://www.synergy-eng.com/spanish/news.html>. [Accesado 21-Nov-2012].
- Maya-Ortiz, Paul R., Isaí Pacheco-Tejeda y Alejandra De la Guerra (2012). Análisis de observabilidad global del motor de reluctancia conmutado. *Congreso Latinoamericano de Control Automático 2012*.
- Miller, T.J.E. (2001). *Electronic Control of Switched Reluctanced Machines*. Newnes Power Engineering Series, Newnes, Oxford.

- Mujica-Ortega, Hoover (2012). Control no lineal basado en pasividad del motor de inducción: Análisis de desempeño e implementación. Tesis de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México. CU, México D.F.
- Nasar, S.A. (1969). D.c.-switched reluctance motor. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of* **116**(6), 1048 –1049.
- Ortega, Romeo, Julio Antonio Loría Perez, Per Johan Nicklasson, Hebertt J. Sira-Ramirez y Herbert Sira-Ramirez (1998). *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications (Communications and Control Engineering)*. Springer-Verlag London Limited.
- Pacheco Arteaga, Maria del Carmen (1994). Tecnicas de control basadas en pasividad aplicadas al motor de inducción. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Nuevo León.
- Pacheco-Tejeda, Isaí. y Paul R. Maya-Ortiz (2012). Análisis de observabilidad global del motor de reluctancia conmutado. *Congreso Nacional de la Asociación Mexicana de Control Automático 2012*.
- Powertrain, Punch (2012). Punch powertrain n. v. gear of de future. <http://www.punchpowertrain.com/en/>.
- Revista, ABB (2011). Los motores que vienen p.57. <http://http://search.abb.com/library/Download.aspx?DocumentID=9AKK105152A9990&LanguageCode=es&DocumentPartId=&Action=Launch>.
- Schaum, Alexander. y Jaime A. Moreno (2007). Dynamical analysis of global observability properties for a class of biological reactors. *Computer Applications in Biotechnology, IFAC Symposium on*.

- Tan, Guojun, Zhenglan Ma, Songyan Kuai y Xulong Zhang (2009). Four-quadrant position sensorless control in switched reluctance motor drives based on sliding mode observer. En: *Electrical Machines and Systems, 2009. ICEMS 2009. International Conference on*. pp. 1 –5.
- van der Broeck, H., D. Gerling y E. Bolte (1993). Switched reluctance drive and pwm induction motor drive compared for low cost applications. En: *Power Electronics and Applications, 1993., Fifth European Conference on*. pp. 71 –76 vol.6.
- Villegas Nuñez, Javier (2009). Diseño de un sistema de control predictio para el accionamiento de la máquina de reluctancia conmutada de un sistema de almacenamiento cinético para la mejora de la eficiencia en la edificación. Tesis de maestría. Escuela Técnica Superior de Ingenieros, Sevilla, España.
- Wang, Shun-Chung y Wen-Han Lan (2004). Turn-on angle searching strategy for optimized efficiency drive of switched reluctance motors. En: *Industrial Electronics Society, 2004. IECON 2004. 30th Annual Conference of IEEE*. Vol. 2. pp. 1873 – 1878 Vol. 2.
- Zhu, Zhang y N.C. Cheung (2008). Investigation and comparison on different switching circuit topologies for linear switched reluctance motors. En: *Power Engineering Conference, 2008. AUPEC '08. Australasian Universities*. pp. 1 –5.