UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Invariancia de Poincaré de la Relatividad General y de la Teoría de Einstein-Cartan

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

GUILLERMO D'OLIVO CORDERO

DIRECTOR DE TESIS:

MIGUEL SOCOLOVSKY VAJOVSKY

2013

1.Datos del alumno	1.Datos del alumno
Apellido paterno:	D'Olivo
Apellido materno	Cordero
Nombre	Guillermo
Teléfono	5531997465
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad	Facultad de Ciencias
Carrera	Física
Número de cuenta	402073921
2.Datos del tutor	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Miguel
Apellido paterno	Socolovsky
Apellido materno	Vajovsky
3.Datos del sinodal 1	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Darío
Apellido paterno	Nuñez
Apellido materno	Zúñiga
4.Datos del sinodal 2	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Manuel
Apellido paterno	Torres
Apellido materno	Labansat
5.Datos del sinodal 3	
Grado	Dr.
Nombre(s)	José David
Apellido paterno	Vergara
Apellido materno	Oliver
6.Datos del sinodal 4	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Erick Leonardo
Apellido paterno	Patiño
Apellido materno	Jaidar
7.Datos del trabajo escrito.	
Título	Invariancia de Poincaré de la Relatividad General y de la Teoría de Einstein-Cartan
Subtitulo	
Número de páginas	58
Año	2013

Agradecimientos.

De manera muy especial doy gracias a mis padres y a mi hermano por su apoyo incondicional y por su cariño, los quiero infinitamente, a todos mis familiares y amigos por tantos momentos memorables, por quererme y por estar conmigo siempre que les he necesitado, a mis gatos, a mis profesores por su tiempo y disposición de compartir sus conocimientos, a mis sinodales por sus útiles comentarios, a Miguel por su paciencia y por toda su ayuda, a la UNAM por ser una institución y un espacio que permite y fomenta el crecimiento y desarrollo personal y social en todas sus facetas, por ser abanderada de la cultura, las artes, la ciencia y en la defensa de los principios mas nobles de nuestra sociedad.

A

Juan Carlos
Ana Silvia
Juan Pablo
Sebastián

Invariancia de Poincaré de la Relatividad General y teoría de Einstein-Cartan.

Guillermo D'Olivo Cordero.

18 de octubre de 2012

Resumen

Se sabe que la relatividad general (RG) y su extensión con torsión, la teoria de Einstein-Cartan (E-C), son invariantes bajo transformaciones locales de Lorentz ($\mathcal{L}_4$), si la conexión de espín $\omega_{\mu ab}$ y las tetradas $e_\mu{}^a$ (comarcos) (o mas bien los campos desplazados $B_\mu{}^a = \delta_\mu{}^a - e_\mu{}^a$) son respectivamente los potenciales de gauge (norma) rotacionales y traslacionales gravitacionales (Hehl, 1985; Hayashi, 1977), entonces el grupo de simetría de ambas teorias es la suma semidirecta $\mathcal{L}_4 \odot \mathcal{D}$, con $\mathcal{D}$ el grupo de transformaciones generales de coordenadas (O'Raifertaigh, 1997).

Sinembargo, el grupo de simetria es de hecho mas grande, ya que las traslaciones $\mathcal{T}_4$ se incluyen de manera natural, resultando en $\mathcal{P}_4 = \mathcal{T}_4 \odot \mathcal{L}_4$, el grupo de Poincaré. Por lo que el grupo total de simetría de RG y E-C como teorias de gauge, resulta ser $\mathcal{P}_4 \odot \mathcal{D}$ (Feynman, 1963; Hehl et al, 1976; Mc Innes, 1984; Hammond, 2002). Históricamente el problema con la prueba de este hecho, ha sido la aparente dificultad de tratar las traslaciones como parte del grupo de gauge, esto es, como transformaciones verticales de un haz. Si para una traslación se escribe $x^\mu \longrightarrow x'^{\,\mu} = x^\mu + \xi^\mu(x)$, no se está considerando como una transformación de gauge $\mathcal{P}_4$, sino como un elemento de $\mathcal{D}$. El tratamiento apropiado para las traslaciones de gauge es en el contexto de haces de marcos de Poincaré en el espacio-tiempo, $\mathcal{F}^P_{M^4} : \mathcal{P}_4 \to A^P M^4 \xrightarrow{\pi P} M^4$.

Esto ha sido discutido por varios autores (Smrz, 1977; Gronwald, 1997, 1998) y el propósito de esta tesis es el de presentar una prueba mas sencilla de este hecho. Por un lado a nivel global, usando teoremas generales sobre conexiones (Kobayashi-Nomizu, 1963), se muestra que existe una correspondencia 1-1 entre conexiones de Poincaré ω_P en $\mathcal{F}^P_{M^4}$ y parejas (θ_L, ω_L), siendo θ_L la forma canónica y ω_L una conexión en el haz de marcos de Lorentz $\mathcal{F}^L_{M^4} : \mathcal{L}_4 \to F^L M^4 \xrightarrow{\pi L} M^4$. Por otro lado, localmente se muestra la invariancia ante transformaciones de gauge $\mathcal{P}_4$ de la acción de Einstein-Hilbert para gravedad pura y de la acción de Dirac-Einstein para el acoplamiento de la gravedad al campo de Dirac.

Índice

1 Introducción.

1.1 Teorías de gauge.

Actualmente son reconocidas en la física cuatro fuerzas fundamentales que generan las interacciónes de las partículas elementales conocidas en el universo. Uno de los mayores esfuerzos en la física teórica de los ultimos tiempos ha consistido en la búsqueda de alguna teoría que pueda unificar estas cuatro fuerzas. Este esfuerzo ha rendido frutos ya que tres de las cuatro fuerzas ya se han podido unificar, lo cual ha sido posible al expresar estas como teorías de campo de gauge (norma). Sin embargo la gravedad ha escapado a los intentos realizados para para unificarla con las demás fuerzas, en parte por que no se ha logrado formular la gravedad como una teoría de campo.

En una teoría de campo en la cual los campos y los potenciales son descritos por un grupo de simetria, la invariancia de gauge significa que el lagrangiano que describe el campo es invariante bajo la acción de un grupo de Lie que se aplica sobre las componentes de los campos. Cuando se aplica la misma transformación a todos los puntos del espacio, se dice que la teoría tiene invariancia gauge global. Las teorías de gauge usan lagrangianos, tales que en cada punto del espacio es posible aplicar transformaciones ligeramente diferentes en cada punto del espacio y aun así el lagrangiano permanece invariante, en ese caso se dice que el lagrangiano presenta también invariancia de norma local.

Para formular una teoría de campo de gauge es necesario que la dinámica de los campos fermiónicos de la teoría venga descrita por un lagrangiano que tenga alguna simetría interna "local" dada por un grupo de Lie, llamado grupo de transformaciones de gauge. Físicamente una transformación de gauge es una transformación de algún grado de libertad que no modifica ninguna propiedad física observable.

Los campos de gauge aparecen en el lagrangiano que rige la dinámica del campo en forma de conexión, por tanto, matemáticamente están asociadas a 1-formas que toman valores sobre una cierta álgebra de Lie y puede ser visto como el resultado de aplicar a los puntos del espacio diferentes transformaciones dentro del grupo de simetría asociado a los campos fermiónicos de la teoría.

En una teoría de campo de gauge, una transformación de gauge es una aplicación diferenciable:

$$T_N : M \longrightarrow G \tag{1}$$

Donde:

M : variedad diferenciable, como podría ser el espacio-tiempo.

G: Grupo de Lie o de simetría, que consiste en el conjunto de transformaciones que dejan invariable el lagrangiano que define la dinámica del campo.

En una transformación de gauge infinitesimal se sustituye el grupo de Lie por su álgebra de Lie:

$$T_N : M \longrightarrow \mathfrak{g} \tag{2}$$

Donde:

$\mathfrak{g}$: Álgebra de Lie del grupo de Lie G.

Esto se extiende a cualquier elemento sobre un haz fibrado tangente a una variedad M, de tal modo que están definidas las transformaciones de gauge infinitesiamales de cualquier tipo de campo tensorial.

Las transformaciones de gauge inifinitesimales definen el número de campos bosónicos de la teoría y la forma en que estos intereactúan. El conjunto de todas las transformaciones de gauge infinitesimales forman un álgebra de Lie, que se caracteriza por un escalar diferenciable a valores en un álgebra de Lie, ε. Bajo tal transformación de gauge infinitesimal:

$$A \longrightarrow A + \delta_\epsilon A \tag{3}$$

Con:

$\delta_\epsilon A := [\epsilon, A] - d\epsilon$

Donde $[a, b]$ es el corchete de Lie.

Estas tansformaciones infinitesimales tienen las siguientes propiedades :

- Las transformaciones de gauge infinitesimales conmutan con la derivada covariante definida por la conexión:

$\delta_\epsilon = \epsilon X \longrightarrow \delta_\epsilon(D_\alpha X) = \epsilon D_\alpha X$

Donde:

$D_\alpha = \partial_\alpha + A_\alpha$ es la derivada covariante.

- $\delta_\epsilon F = \epsilon F$ quiere decir que F se transforma covariantemente.

2 Formalismos matemáticos.

2.1 Variedad diferenciable.

Una variedad diferenciable es un conjunto que localmente es difeomorfo al espacio euclideano. Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión k, si para cada $x \subset M$ existen abiertos $U \subset \mathbb{R}^k$ y V$\subset \mathbb{R}^n$ y una función continua $f : U \longrightarrow V$ tal que:

1. $x \in U$
2. $f(U) = V \cap M$, f es inyectiva y $f^{-1} : V \cap M \longrightarrow U$ es continua
3. Para cada $y \in U$, el Jacobiano $f'(y)$ tiene rango k.

A la función f se le conoce como sistema de coordenadas alrededor de x.

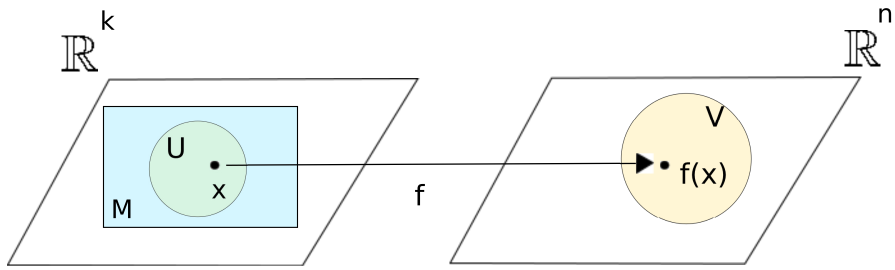

Figura 1: Variedad diferenciable M.

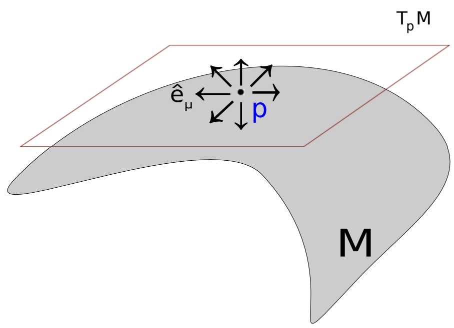

Figura 2: Espacio Tangente.

2.2 Espacio tangente.

Para cada punto de una variedad diferencial, se asocia el conjunto de todos los vectores que se encuentren en un plano con origen en el punto y que sean tangentes a la variedad, este conjunto forma un espacio vectorial de dimensión n igual que la variedad M^n y se denota como espacio tangente a la variedad M en el punto p esto es: T_pM^n. En este espacio vectorial existen un número infinito de vectores base $\hat{e}_\mu$ tales que $A = A^\mu \hat{e}_\mu$, con regla de transformación entre bases: $\hat{e}_{\nu'} = \Lambda^\mu_{\nu'} \hat{e}_\mu$.

2.3 Espacio dual.

A el espacio vectorial tangente podemos a su vez asociarle otro espacio vectorial conocido como espacio dual y se denota por T^*_p , el cual consiste en el conjunto de todos los mapeos lineales del espacio vectorial T_pM^n en los reales, es decir, es el conjunto de funciones lineales tales que $f : V \longrightarrow a$, donde $V \in T_pM^n$ y $a \in \mathbb{R}$.

2.4 Espacio Afín.

Un espacio afín es una tripleta (V, φ, A) donde V es un espacio vectorial, A es un conjunto, y φ es una acción izaquierda libre y transitiva de V como un grupo

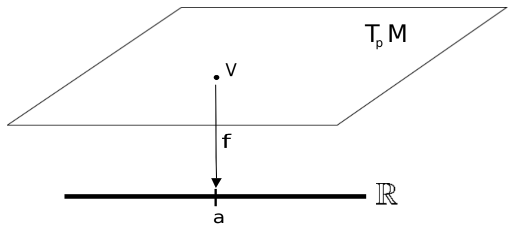

Figura 3: Espacio Dual.

aditivo en A:

$$\varphi : V \times A \to A,\ (v, a) \mapsto v + a \tag{4}$$

con

$$0 + a = a\, y\, (v_1 + v_2) + a = v_1 + (v_2 + a),\ para\, toda\, a \in A\, y\, todo\, v_1, v_2 \in V \tag{5}$$

Entonces, dado $a, a' \in A$, existe un único $v \in V$ tal que $a' = v + a$. También , si v_0 esta fijo en V, $\varphi_{v0} : A \to A$, $\varphi_{v0}(a) = \varphi(v_0, a)$ es una biyección.

Ejemplo. $A = V$: El espacio vectorial en si mismo es considerado como el conjunto en el cual actua V. En particular, cuando $V = T_x M^n$ y $A = T_x M^n$, el espacio tangente es llamado *espacio afín tangente* y se denota como $A_x M^n$. Los puntos "a" de $A_x M^n$ son los vectores tangentes en x.

2.5 Métrica.

Una métrica es una función g tal que:

$$g : T_x M \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R} \tag{6}$$

$$(X, Y) \longmapsto g(X, Y) : M \longrightarrow \mathbb{R} \tag{7}$$

Esto es :

$$x \longrightarrow g(X, Y)(x) := g_x(X_x, Y_x) = X_x \cdot Y_x \tag{8}$$

(producto punto).

Donde $X_x, Y_x \in T_x M$

La función métrica g tiene las siguientes propiedades:

- Bilineal y simétrica:

$g_x(\lambda v, w) = g_x(v, \lambda w) = \lambda g_x(v, w)$

$g_x(v + v', w) = g_x(v, w) + g_x(v', w)$

$g_x(v, w) = g_x(w, v)$

- Para una variedad riemanniana vale que:

$g_x(v_x, v_x) = ||v_x||^2 \geq 0 \qquad \forall\, v_x \in T_xM$

con $g_x(v_x, v_x) = 0 \qquad sii\, v_x = 0$

Esto no vale en el caso pseudoriemanniano, en particular para el caso Lorentziano.

- $g_x(v, w) = 0\, \forall\, w \in T_xM\; si\, v = 0$ (el vector $\perp$ a todos los vectores en T_xM es el vector nulo i.e. g es no degenerada).

Localmente:

$$g(\partial_i, \partial_j) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \equiv g_{ij} \tag{9}$$

$X = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$

$Y = \partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$

Para $x \in U$

$g_x(\partial_i\mid_x, \partial_j\mid_x) = g_{xij} = g_{xji}$

$v_x \cdot w_x = w_x \cdot v_x = g_x(v_x, w_x) = g_x(v_x^i \partial_i\mid_x, w_j \partial_j\mid_x)$

$= v_x^i w_x^j g_x(\partial_i\mid_x, \partial_j\mid_x)$

$= g_{xij} v_x^i w_x^j$

$\therefore$

$$g(X, Y) = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu \tag{10}$$

$g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico que al elegir una base aparece como una matriz, la notación $g_{\mu\nu}$ se utiliza convencionalmente para los componentes del tensor.

2.6 Haz fibrado.

Un haz fibrado es un conjunto de elementos (E, B, F, π), donde E, B, F, son espacios topológicos y $\pi : E \to B$ es una proyección sobreyectiva, E se denota como espacio total. Localmente un haz fibrado puede ser descrito como un producto $B \times F$ (B representa un espacio base y F representa una fibra) , pero que globalmente puede tener una estructura topológica diferente.

Se requiere que $\forall\, x \in E$, $\exists\, U \subset B$ tal que $\pi^{-1}(U)$ es un homeomorfismo del espacio producto $U \times F$, de manera tal que el siguiente diagrama debe conmutar.

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{proy}_1"] \\
U &
\end{tikzcd}$$

2.7 Haz fibrado principal.

Es un objeto matemático que generaliza las propiedades esenciales del producto cartesiano $B \times G$ de un espacio B con un grupo G. De igual manera que el producto cartesiano, el haz fibrado principal P tiene las siguientes propiedades:

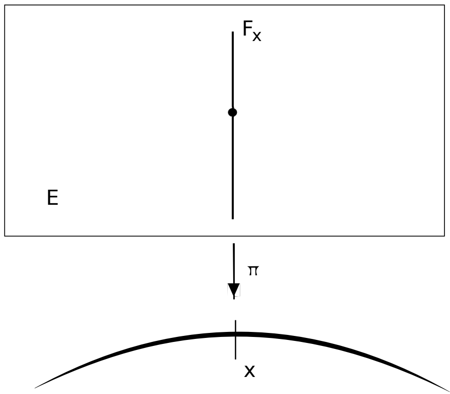

Figura 4: Haz Fibrado.

1. Una acción derecha continua de G sobre P, $P \times G \longrightarrow P$, tal que G preserva las fibras de P y actua libre y transitivamente sobre ellas. Esto implica la existencia de un homeomorfismo entre la fibra de P y el grupo G. Dado que la acción es libre, las fibras tienen estructuras de G-torsores que son espacios homeomorfos a G pero que carecen de estructura de grupo debido a que no hay una elección preferente de un elemento identidad.

2. Una proyección $\pi :\ P \underset{\pi}{\longrightarrow} B$, tal que π es sobreyectiva.

2.8 Haz vectorial.

Precisa la idea de espacios vectoriales parametrizados por algún otro espacio B. Supongamos que a cada punto x_i de B le asociamos un espacio vectorial $V(x_i)$, de manera tal que el conjunto de los $V(x_i)$ forman a su vez otro espacio del mismo tipo que B, al cual llamamos haz vectorial sobre B. El caso mas simple de haz vectorial, es aquel en que los espacios vectoriales $V(x_i)$ son constantes i.e. $V(x_i) = V$, esto significa que a cada punto $x \in B$ se asocia una copia del mismo espacio vectorial, para formar el haz vectorial $V \times B$ sobre B, entonces decimos que el haz vectorial es trivial. Si el haz vectorial es localmente trivial, constituye entonces un ejemplo de haz fibrado.

2.9 Haz de marcos.

Un haz de marcos es un haz fibrado principal $F(E)$, asociado a un haz vectorial E. La fibra de $F(E)$ en un punto x es el conjunto de todas las bases ordenadas (marcos) para E_x. El grupo general lineal actua naturalmente sobre $F(E)$ por medio de de un cambio de base, dandole al haz de marcos la estructura de un haz principal. El haz fibrado de una variedad diferenciable suave es aquel que

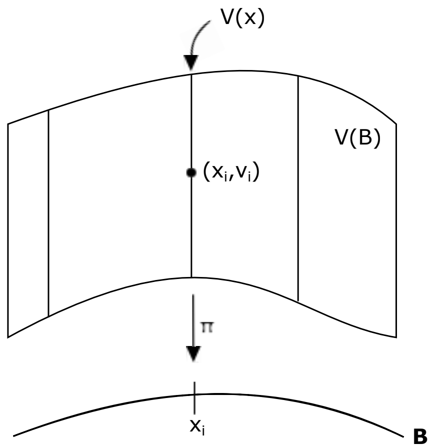

Figura 5: Haz Vectorial.

está asociado a su haz tangente y es por esto que se le suele llamar haz de marco tangente.

Sea $M = M^n$ una variedad diferenciable, $\forall\ x \in M$, $\exists\ !\ T_xM$. $\therefore\ \forall\ x \in M\ \exists$! el conjunto:

[1] $F_xM^n = \{(e_{1x}, \ldots, e_{nx}) \equiv e_a : \textit{base ordenada de}\, T_xM\} \equiv (FM^n)_x$, por lo que:

$FM^n = \underset{x\in M}{\cup} \{x\} \times (FM^n)_x = \underset{x\in M}{\amalg} (FM^n)_x$.

Esto es un haz fibrado principal, donde la fibra es un grupo G, por ejemplo si $G = GL_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow e_a \longrightarrow g^a_b e_a = e_b$.

Con lo que queda tambien definida la proyección $\pi : FM \underset{\pi}{\longrightarrow} M$, tal que $\pi(x, (e_{1x}, \ldots, e_{nx})) := x$

2.10 Conexiones en haces vectoriales reales suaves.

Sea $\xi : \mathbb{R}^m - E \xrightarrow{\pi} M^n$ un haz vectorial real suave de dimensión m sobre $M^n \equiv M$, una variedad diferenciable de dimensión n. Sean $\Gamma(TM)$ las secciones de E, con E una variedad diferenciable de dimensión $m + n$.

Una conexión en ξ es una función:

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E), \tag{11}$$

$$(X, s) \mapsto \nabla(X, s) \equiv \nabla_X s \tag{12}$$

Que tiene las siguientes propiedades:

i) $\nabla_{X+X'} s = \nabla_X s + \nabla_{X'} s$

[1] $e_a \in T_xM$, $x \in U$: dominio de una carta con coordenadas x^μ, la base coordenada en x es $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} |_x \right\}$,$\therefore$ podemos escribir $e_a = e^\mu_a \frac{\partial}{\partial x^\mu} |_x$

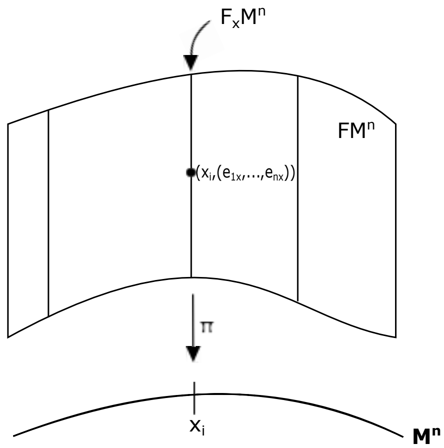

Figura 6: Haz de Marcos.

ii) $\nabla_{fX}s = f\nabla_X s$, con $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$: funciones reales en M

iii) $\nabla_X(s+s') = \nabla_X s + \nabla_X s'$

iv) $\nabla_X(fs) = X(f) = X(f)s + f\nabla_X s$ (Regla de Leibnitz).

El valor de la conexión en (X,s) es llamada derivada covariante de s en la dirección de X. $\nabla_X s :\ M \to E,\ x \mapsto \nabla_X s(x) = (x, (\nabla_X s)_x \in E_x$: la fibra en E sobre x. E_x es una variedad vectorial de dimension m.

Una conexión lineal en M es una conexión en su haz tangente. Con $E = TM$ se tiene que:

$$\nabla :\ \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) \tag{13}$$

$$(X,Y) \mapsto \nabla(X,Y) \equiv \nabla_X Y \tag{14}$$

Localmente tenemos que:
$\nabla_X s = \nabla_{X^\mu \partial_\mu}(s^i\sigma^i) = X^\mu((\partial_\mu s^i)\sigma_i + s^i\nabla\partial_\mu\sigma_i)$
y como $\nabla_{\partial_\mu}\sigma_i \in \Gamma(E_\alpha)$, entonces:

$$\nabla_{\partial_\mu}\sigma_i := \Gamma^j_{\mu i}\sigma_j \tag{15}$$

Para un unico conjunto de $n \times m^2$ funciones $\Gamma^j_{\mu i} : U_\alpha \to \mathbb{R}$ llamadas simbolos de Christoffel de la conexión ∇ en el atlas U, bajo un cambio de coordenadas locales (cartas) em M los coeficientes $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ se transforman como:

$$\Gamma^\gamma_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}\Gamma'^\lambda_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{16}$$

Para un haz vectorial lineal, m=1, con lo que solo hay n símbolos: $\Gamma^j_{\mu i} \equiv \Gamma_\mu$, entonces se puede escribir:

$$\nabla_X s = X^\mu((\partial_\mu s^i)\sigma_i + s^i\Gamma^j_{\mu i}\sigma_j) = X^\mu(\partial_\mu s^j + s^i\Gamma^j_{\mu i})\sigma_j \tag{17}$$

$$= X^\mu(\partial_\mu\delta^j_i + \Gamma^j_{\mu i})s^i\sigma_j = X^\mu D^j_{\mu i}s^i\sigma_j$$

donde se ha definido el operador de derivada covariante

$$D^j_{\mu i} = \partial_\mu\delta^j_i + \Gamma^j_{\mu i} \tag{18}$$

ó:

$$\nabla_X s = X^\mu s^j_{;\mu}\sigma_j \tag{19}$$

con

$$D_\mu s^j \equiv s^j_{;\mu} = D^j_{\mu i}s^i = s^j_{,\mu} + \Gamma^j_{\mu i}s^i \tag{20}$$

y

$$s^j_{,\mu} = \partial_\mu s^j \tag{21}$$

donde el término $s^j_{,\mu}$ es debido a la regla de Leibnitz.

La derivada totalmente covariante en ξ: ∇s es un elemento del conjunto de 1-formas diferenciables con valores en $E : \Gamma(T^*M \otimes E)$, donde $T^*M \otimes E$ es un haz vectorial en M:

$$\mathbb{R}^{n\times m} - T^*M \otimes E \to M,\ with\, T^*M \otimes E = \coprod_{x\in M} T^*_x M \otimes E_x \tag{22}$$

La sección ∇s se define como:

$$\nabla s :\ \Gamma(TM) \to \Gamma(E),\ X \to \nabla_s(X) := \nabla_X s \tag{23}$$

Como todas las conexiones en M, ∇s es $C^\infty(M,\mathbb{R})$-lineal, i.e. $\nabla_s(fX) = f\nabla_s(X)$; pero $\nabla(fs) = sdf + f\nabla_s$

Localmente podemos escribir:

$$\nabla s = dx^\mu \otimes \nabla_{\partial_\mu} s \tag{24}$$

De hecho:

$$\nabla s(X) = (dx^\mu \otimes \nabla_{\partial_\mu} s)X = dx^\mu(X)\nabla_{\partial_\mu} s = X^\nu dx^\mu(\partial_\nu)\nabla_{\partial_\mu} s \tag{25}$$

$$= X^\nu \delta^\mu_\nu \nabla\partial_\mu s = X^\mu \nabla_{\partial_\mu} s = \nabla_X s$$

Con lo que:

$$\nabla s = dx^\mu \otimes (\partial_\mu\delta^j_i + \Gamma^j_{\mu i})s^i\sigma_j = dx^\mu \otimes (\partial_\mu s^j\sigma_j + \Gamma^j_{\mu i}s^i\sigma_j) \tag{26}$$

$$= dx^\mu \otimes \partial_\mu s^j\sigma_j + dx^\mu \otimes \Gamma^j_{\mu i}s^i\sigma_j = ds^j \otimes \sigma_j + \Gamma^j_i \otimes s^i\sigma_j$$

Donde la Γ^j_i es una matriz de 1-formas de $m \times m$ en U_α dada por:

$$\Gamma^j_i = dx^\mu \Gamma^j_{\mu i} \tag{27}$$

Si hacemos $\Gamma^j_i \otimes s^i\sigma_j = \Gamma^j_i s^i \otimes \sigma_j = (\Gamma s)^j \otimes \sigma_j$ entonces:

$$\nabla s = ds^j \otimes \sigma_j + (\Gamma s)^j \otimes \sigma_j = (ds^j + \Gamma s)^j) \otimes \sigma_j = ((d+\Gamma)s)^j \otimes \sigma_j \tag{28}$$

Entonces:

$$\nabla s = (d+\Gamma)s \in \Gamma(T^*U \otimes E). \tag{29}$$

Localmente:

$$\nabla = d + \Gamma \tag{30}$$

Si hacemos que $s^i_{;\mu(x)} = 0$, entonces:

$$s^i_{,\mu}(x) + \Gamma^i_{\mu j}(x) s^j(x) = 0 \tag{31}$$

Multiplicando por $dx^\mu \mid_x \Longrightarrow$

$$s^i_{,\mu}(x) dx^\mu \Big|_x = -\Gamma^i_{\mu j}(x) s^j(x) dx^\mu \mid_x \in T^*_x U \tag{32}$$

El lado derecho de la ecuación:

$$-\Gamma^i_{\mu j}(x) s^j(x) dx^\mu \Big|_x \equiv (\delta_\parallel s)^i \mid_x \tag{33}$$

Es llamado el transporte paralelo infinitesimal de la sección s^i por la conexión ∇ a lo largo de la 1-forma $dx^i \mid_x$.

2.11 Conexiones en variedades con métrica.

Una conexión ∇ en una variedad con métrica (M,g) es métrica o compatible con la métrica si dados X, Y, Z, campos vectoriales en VM (campos vectoriales en M) si:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \tag{34}$$

Localmente:

$$\langle Y, Z \rangle = \langle Y^\mu \partial_\mu, Z^\nu \partial_\nu \rangle = Y^\mu Z^\nu \langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle = Y^\mu Z^\nu g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu} Y^\mu Z^\nu \tag{35}$$

Si ∇ es una conexión no necesariamente simétrica en (M,g) $\Longrightarrow$ Localmente:

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} g^{mk}(\partial_i g_{ik} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) + T^m_{ij} - g_{il} g^{mk} T^l_{jk} + g_{il} g^{mk} T^l_{ki} \tag{36}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} m \\ ij \end{array} \right\} + T^m_{ij} - g_{il} g^{mk} T^l_{jk} + g_{il} g^{mk} T^l_{ki}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} m \\ ij \end{array} \right\} + C^m_{ij}$$

Donde:
$\left\{ \begin{array}{c} m \\ ij \end{array} \right\} = \underset{LC ij}{\Gamma}{}^m$ es la gama de Levi-Civita.
y
$C^m_{ij} = T^m_{ij} - g^{mk}(g_{il} T^l_{jk} - g_{jl} T^l_{ki}) \equiv K^m_{ij}$ es el tensor de contorsión.
$\left\{ \begin{array}{c} m \\ ij \end{array} \right\}$ es simétrico en ij, y $K^m_{ij} = K^m_{[i,j]}(simétrico) + K^m_{\{i,j\}}(a - simetrico)$.
$\Longrightarrow$
Γ^m_{ij} tiene una parte simétrica y una antisimétrica.

2.12 Tensores.

Dada una carta U_α ($x^\mu_\alpha \equiv x^\mu$) de M^n, un tensor r contravariante y s covariante es un conjunto de n^{r+s} funciones en U_α con valores en $\mathbb{R}$,

$$\left\{ T^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_s}, \mu_k, \nu_l = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots r, l = 1, \ldots, s \right\} \tag{37}$$

tal que en una carta U_β ($x^{'\nu}_\beta \equiv x^{'\nu}$) que se traslapa con $U_\alpha(x^\mu_\alpha)$ se convierte en el conjunto:

$$\left\{ T'^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_s} = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\alpha_r}}{\partial x^{\mu_r}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial x'^{\beta_s}} T^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_s} \right\} \tag{38}$$

para $x' = x'(x) \in U_\alpha \cap U_\beta$.

La idea de índices covariantes y contravariantes sólo tiene sentido si existe una métrica en la variedad.

Un tensor s covariante y r contravariante puede ser considerado como un mapeo $C^\infty(M, \mathbb{R})$ desde el producto tensorial de s factores de $\Gamma(TM)$ y r factores de $\Gamma(T * M)$ con valores en $C^\infty(M, \mathbb{R})$, en una carta U_α.

$$T = T^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_s} dx^{\nu_1}_\alpha \otimes \ldots \otimes dx^{\nu_s}_\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}_\alpha} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}_\alpha} \tag{39}$$

$$: (\otimes_s \Gamma(TU_\alpha)) \otimes (\otimes_r \Gamma(T * U_\alpha)) \to C^\infty(U_\alpha, \mathbb{R})$$

$$V_1^{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x^{\rho_1}_\alpha} \otimes \ldots \otimes V_s^{\rho_s} \frac{\partial}{\partial x^{\rho_s}_\alpha} \otimes A_{1\sigma_1} dx^{\sigma_1}_\alpha \otimes \ldots \otimes A_{r\sigma_r} dx^{\sigma_r}_\alpha \longmapsto T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_s} dx^{\nu_1}_\alpha \tag{40}$$

$$\times (V_1^{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x^{\rho_1}_\alpha}) \ldots dx^{\nu_s}_\alpha (V_s^{\rho_s} \frac{\partial}{\partial x^{\rho_s}_\alpha}) \times \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}_\alpha}(A_{1\alpha_1} dx^{\sigma_1}_\alpha) \ldots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}_\alpha}(A_{r\sigma_r} dx^{\sigma_r}_\alpha)$$

$$= T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} V_1^{\rho_1} \delta^{\nu_1}_{\rho_1} \dots V_s^{\rho_s} \delta^{\nu_s}_{\rho_s} A_{1\sigma_1} \delta^{\sigma_1}_{\mu_1} \dots A_{r\sigma_r} \delta^{\sigma_r}_{\mu_r}$$

$$= T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} V_1^{\nu_1} \dots V_s^{\nu_s} A_{1\mu_1} \dots A_{r\mu_r}$$

2.13 Curvatura de una conexión.

Sea ∇ una conexión en M.

Su curvatura R es una función R tal que:

$$R : VM \times VM \times VM \longrightarrow R(X, Y, Z) := (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})(Z) \quad (41)$$

$$= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$= ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})(Z)$$

Localmente:
$X = X^\mu \partial_\mu$, $Y = Y^\nu \partial_\nu$, $Z = Z^\sigma \partial_\sigma$
$\Longrightarrow$

$$R(X^\mu \partial_\mu, Y^\nu \partial_\nu, Z^\sigma \partial_\nu) = X^\mu Y^\nu Z^\sigma (\partial_\mu, \partial_\nu, \partial_\sigma) \quad (42)$$

$$= X^\mu Y^\nu Z^\sigma (\nabla_{\partial_\mu}(\nabla_{\partial_\nu \partial_\sigma}) - \nabla_{\partial_\nu}(\partial_\sigma) - \nabla_{[\partial_\mu, \partial_\nu]} \partial_\sigma)$$

Ya que:
$\nabla_{\partial_\nu} \partial_\rho = \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\rho$ y $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$
$= X^\mu Y^\nu Z^\sigma (\nabla_{\partial_\mu}(\Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\rho) - \nabla_{\partial_\nu}(\Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\rho)$
$= X^\mu Y^\nu Z^\sigma ((\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) \partial_\rho + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \partial_\lambda - \partial_\nu (\Gamma^\rho_{\mu\sigma}) \partial_\rho - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \partial_\lambda)$
$= X^\mu Y^\nu Z^\sigma (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \Gamma^\rho_{\nu\lambda}) \partial_\rho$
$\Longrightarrow$

$$R(X, Y, Z) = X^\mu Y^\nu Z^\sigma R^\rho_{\sigma\mu\nu} \partial_\rho \quad (43)$$

Con:
$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma})$
$= -R^\rho_{\sigma\nu\mu}$
$R(\partial_\mu, \partial_\nu, \partial_\sigma) = R^\rho_{\sigma\mu\nu} \partial_\rho \in VU$
y es un tensor ya que:

$$R'^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\nu} R^\rho_{\sigma\mu\nu} \quad (44)$$

2.14 Torsión de una conexión.

Dada una conexión ∇ en una variedad M. Una torsión T se define como:

$$T: VM \times VM \longrightarrow VM \tag{45}$$

, tal que:
$(X,Y) \longrightarrow T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$
Tenemos que:

- $T(X,Y) = -T(Y,X)$
- Sea $f \in C^\infty M : T(fX,Y) = \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX,Y]$

$= f\nabla_X Y - Y(f)X - f\nabla_Y X - fXY + Y(fX)$
$= f\nabla_X Y - Y(f)X - f\nabla_Y X - fXY + Y(f)X + fYX$
$= f(\nabla_X Y - \nabla_Y X - (XY - YX))$
$= fT(X,Y)$

- $T(X+X^{'},Y) = T(X,Y) + T(X^{'},Y)$

Localmente:
$X = X^\mu \partial_\mu \qquad Y = Y^\nu \partial_\nu$
$\Longrightarrow$

$$T(X,Y) = T(X^\mu \partial_\mu, Y^\nu \partial_\nu) = X^\mu Y^\nu T(\partial_\mu, \partial_\nu) \tag{46}$$

$$T(\partial_\mu, \partial_\nu) = \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu - \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu - [\partial_\mu, \partial_\nu] \tag{47}$$

$$= \Gamma^\rho_{\mu\nu} \partial_\rho - \Gamma^\rho_{\nu\mu} \partial_\rho$$

$$= (\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}) \partial_\rho$$

$$= 2\Gamma^\rho_{\mu\nu} \partial_\rho$$

Donde:
$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}) = -\Gamma^\rho_{\nu\mu}$
$\therefore$

$$T(X,Y) = 2X^\mu Y^\nu T^\rho_{\mu\nu} \partial_\rho \tag{48}$$

El número de componentes de tensor de torsión es:
$\left|T^\rho_{\mu\nu}\right|(n) = \frac{n^2(n-1)}{2}$
Si $n = 4 \Longrightarrow$
$\left|T^\rho_{\mu\nu}\right|(4) = 24$

2.15 Haz tensorial como haz asociado al haz de marcos de M^n.

$T_s^r M^n$ es el espacio total del haz vectorial real de dimensión $(n + n^{r+s})$, de los r-contravariantes y s-covariantes tensores en M^n, con fibra

$\mathbb{R}^{n^{r+s}} \simeq \{\lambda^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \in \mathbb{R}, i_k, j_l \in \{1, \ldots n\}, k = 1, \ldots, r, l = 1, \ldots, s\} \equiv \left\{\vec{\lambda}\right\}$.

El haz de marcos de M^n, $\mathcal{F}_{M^n}$, es el haz principal con grupo de estructura $GL_n(\mathbb{R})$ (la fibra del haz) en M^n (el espacio base), y con el espacio total FM^n consistente en el conjunto de todas las bases ordenadas del espacio tangente en cada punto de M^n, i.e.

$$\begin{aligned} FM^n &= \coprod_{x \in M^n} \{r_x \equiv (v_{1x}, \ldots, v_{nx}), \{v_{kx}\}_{k=1}^n : base\ de\ T_x M^n\} \\ &= \cup_{x \in M^n} \{x\} \times \{(v_{1x}, \ldots, v_{nx})\} = \coprod_{x \in M^n} (FM^n)_x \end{aligned} \tag{49}$$

donde $(FM^n)_x$ es la fibra sobre x de dimensión $dim_{\mathbb{R}} = n^2$. Los haces de marcos ortogonales, marcos de Lorentz, marcos de Lorentz restringidos, etc. de M^n, son obtenidos al reducir el grupo $GL_n(\mathbb{R})$ respectivamente a $O(n)$, $O(n-1,1)$, $SO^0(n-1,1)$, etc. Si $x \in U_\alpha \equiv U$, entonces $v_{kx} = \sum_{\mu=1}^{n} v_k^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_x$; también con $dim_{\mathbb{R}} FM^n = n + n^2$. Las $n + n^2$ coordenadas locales en $\mathcal{F}_{U_\alpha}$ es el conjunto (x^ρ, X_ν^μ) con $x^\rho(x, r_x) = x^\rho(x)$ y $X_\nu^\mu(x, r_x) = v^\mu_{\nu x}$, $\rho, \mu, \nu \in \{1, \ldots, n\}$.

La estructura de haz de $\mathcal{F}_{M^n}$ se representa por:

$$\mathcal{F}_{M^n} : GL_n(\mathbb{R}) \to FM^n \xrightarrow{\pi F} M^n \tag{50}$$

Donde πF es la proyección $\pi F(x, (v_{1x}, \ldots, v_{nx})) = x$ y $GL_n(\mathbb{R}) \to FM^n$ representa la acción derecha de $GL_n(\mathbb{R})$ en FM^n dada por

$$FM^n \times GL_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\psi} FM^n, ((v_{1x}, \ldots, v_{nx}), a) \mapsto (v_{1x} a_1^1 + \cdots + a_1^n, \ldots \tag{51}$$

$$, v_{1x} a_n^1 + \ldots + v_{nx} a_n^n) \equiv (v_{1x}, \ldots, v_{nx})$$

La acción izquierda de $GL_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{n^{r+s}}$ dada por:

$$GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n^{r+s}} \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{n^{r+s}}, (a, \vec{\lambda}) \mapsto (a\vec{\lambda})^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_n} \tag{52}$$

$$= a^{i_1}_{k_1} \ldots a^{i_r}_{k_r} a^{-1^{l_1}}_{j_1} \ldots a^{-1^{l_s}}_{j_s} \lambda^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s}$$

induce el marco asociado $FM^n \times_{GL_n(\mathbb{R})} \mathbb{R}^{n^{r+s}}$ que resulta ser isomorfo por medio de φ a $T_s^r M^n$.

Se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} FM^n \times_{GL_n(\mathbb{R})} \mathbb{R}^{n^{r+s}} & \xrightarrow{\varphi} & T_s^r M^n \\ \pi'_F \downarrow & & \downarrow \pi_s^r \\ M^n & \xrightarrow{Id_{M^n}} & M^n \end{array}$$

Donde:

$$\varphi(\Big[((v_{1x},\ldots,v_{nx}),\vec{\lambda})\Big]) = \sum_{i_k,j_l=1}^{n} \lambda^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} v_{i1x}\otimes\ldots v_{i_r x}\otimes\omega^{j_1}_x\otimes\ldots\otimes\omega^{j_s}_x \qquad (53)$$

,

con: $\Big[((v_{1x},\ldots,v_{nx}),\vec{\lambda})\Big] = \Big\{((v_{1x},\ldots,v_{nx})a, a^{-1}\vec{\lambda})\Big\}_{a\in GL_n(\mathbb{R})}$; $\{\omega^1_x,\ldots,\omega^n_x\}$, que es la base dual de $\{v_{1x},\ldots,v_{nx}\}$ i.e. $\omega^i_x(v_{jx}) = \delta^i_j$; y $\pi'_F(\Big[((v_{1x},\ldots,v_{nx}),\vec{\lambda}\Big]) = \pi_F(x,(v_{1x},\ldots,v_{nx})) = x$. Dado los que los vectores de la base dual w^j_x se transforman con a^{-1}, se verifica facilmente que φ está bien definida i.e. es independiente del elemento representativo de la clase $\Big[((v_{1x},\ldots,v_{nx}),\vec{\lambda}\Big]$.

2.16 Haz vertical de un haz fibrado principal.

Sea η un haz fibrado principal, $\eta = (P^{r+s}, B^s, \pi, G^r, \psi, \mathcal{U}) : G^r \to P^{r+s} \xrightarrow{\pi} B^s$, donde B^s es el espacio base y $P^{r+s}\equiv P$ es el espacio total, ambos variedades diferenciables de dimensiones s y $r+s$ respectivamente, $G^r\equiv G$ es un grupo de Lie r-dimensional con acción derecha en P, $P\times G\to P, (p,g)\mapsto pg$, y $\mathcal{U}$ es un sistema de trivializaciones locales $\pi^{-1}(U_\alpha)\xrightarrow{\varphi_\alpha} U_\alpha\times G$ con $\pi_1\circ\varphi_\alpha = \pi$.

Para cada $p\in P$ existe un isomorfismo canónico φ_p de espacio vectorial entre $\mathcal{G} = Lie(G)$: el álgebra de Lie de G, y$V_p = T_pP_{\pi(p)}$: el espacio tangente a la fibra sobre $\pi(p)$ en p, i.e. el espacio vertical en p:

$$\varphi_p : \mathcal{G}\to V_p, A\to\varphi_p(A)\equiv A^*_p \qquad (54)$$

con:

$$A^*_p : C^\infty(P,\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ f\mapsto \frac{d}{dt}f(pe^{tA})|_{t=0} \qquad (55)$$

Se usó el hecho de que $T_pP_{\pi(p)}\subset T_pP$; si A_i, $i=1,\ldots,r$ es una base de $\mathcal{G}$, entonces $\varphi_P(A_i)$ es una base de V_p; en general, ni A_i o $\varphi_p(A_i)$ son bases canónicas.

Dados p y $p'\in P$, ya que $\varphi_p:\mathcal{G}\to V_p$ y $\varphi_{p'}:\mathcal{G}\to V_{p'}$ son isomorfismos, hay un isomorfismo canónico de espacios vectoriales entre V_p y $V_{p'}$, para todo p,p' $\in P$:

$$V_p \xrightarrow{\varphi_{p'}\circ\varphi_p^{-1}} V_{p'} \qquad (56)$$

La existencia de φ_p en cada $p\in P$, es independiente de cualquier conexión, lo cual implica la trivialidad del haz vectorial V_n del haz fibrado principal η :

$$V_n : \mathbb{R}^r - V^{2r+s} \xrightarrow{\pi V_n} P \qquad (57)$$

con $V^{2r+s} = \amalg_{p\in P}V_p = \cup_{p\in P}\{p\}\times V_p$ y $\pi V_n(p,v_p) = p$

De hecho, V_n admite r secciones independientes globales $\sigma_i : P\to V^{2r+s}$, $\sigma_i(p) = (p,\varphi_p(A_i))$; con lo que se da el siguiente diagrama de isomorfismo de haces vectoriales.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^r & & \mathbb{R}^r \\
| & & | \\
V^{2r+s} & \xrightarrow{\phi} & P \times \mathbb{R}^r \\
\pi_{V_\eta} \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\
P & \xrightarrow{Id} & P
\end{array}
$$

Con $\phi(p, v_p) = \phi(p, \sum_{i=1}^{r} \lambda^i \varphi_p(A_i)) = (p, (\lambda^1, \ldots, \lambda^r))$. ϕ no es canónica ya que depende de la base A_i de $\mathcal{G}$.

Sea ω una conexión en η, i.e. $\omega \in \Gamma(T^*P \otimes \mathcal{G})$ con $\omega : P \to T^*P \otimes \mathcal{G}$, p$\mapsto$ $\omega(p) = (p, \omega_p)$, $\omega_p : T_pP \to \mathcal{G}$, $v_p \mapsto \omega_p(v_p) = \varphi_p^{-1}(ver(v_p))$. Dado que $ker(\omega_p) = H_p^s \equiv H_p$: es el espacio vectorial horizontal en p, entonces ω_p es $|H_p| = \infty \to 1$. Sinembargo, $\omega_p|_{V_p} : V_p \to \mathcal{G}$, $\omega_p|_{V_p}(v_p) = \varphi_p^{-1}(v_p)$ es un isomprfismo de espacios vectoriales i.e.

$$\omega_p|_{V_p} = \varphi_p^{-1} \tag{58}$$

En otras palabras, si ω es una conexión en η, entonces en cada $p \in P$, ω da la inversa de φ_p. Por lo que, para el isomorfismo entre V_p y $V_{p'}$, se tiene que:

$$V_p \overset{\omega_{p'}|_{V_{p'}} \circ \omega_p|_{V_p}}{\longrightarrow} V_{p'} \tag{59}$$

En particular, estamos interesados en el caso $P = \mathcal{F}_{M^n}$, el haz de marcos de una variedad diferenciable M^n, donde $(P, B, \pi, G, \psi, \mathcal{U}) = (FM^n, M^n, \pi_F, GL_n(\mathbb{R}), \psi, \mathcal{U})$; $p = (x, r_x) \in FM^n$,y $r_x = v_{1x} \ldots v_{nx})$. Su haz vertical es isomorfo al haz producto $FM^n \times \mathbb{R}^{n^2}$:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^{n^2} & & \mathbb{R}^{n^2} \\
| & & | \\
V_{\mathcal{F}_{M^n}} & \xrightarrow{\phi_c} & FM^n \times \mathbb{R}^{n^2} \\
\pi_V & & \downarrow \pi_1 \\
FM^n & \xrightarrow{Id} & FM^n
\end{array}
$$

Donde ϕ_c es el isomorfismo canónico determinado por la base canónica de $gl_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}(n)$ dada por las n^2 matrices $(A_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Un resultado similar es válido para las reducciones de $GL_n(\mathbb{R})$ a $O(n)$, $SO^0(n-1, 1)$, etc.

En particular, para el caso $n = 4$ y $G = SO^0(3, 1)$, con $dim_{\mathbb{R}}(SO^0(3, 1)) = dim_{\mathbb{R}}(so(3, 1)) = dim_{\mathbb{R}}(o(3, 1)) = 6$, caso relevante en Relatividad General, FM^4 es el haz de marcos de Lorentz $\mathcal{F}^L_{M^4}$, y tenemos el isomorfismo de haces vectoriales:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \\
| & & | \\
V_{F^L_{M^4}} & \xrightarrow{\phi_c^L} & F_LM^4 \times \mathbb{R}^6 \\
\pi_V \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\
F_LM^4 & \xrightarrow{Id} & F_LM^4
\end{array}
$$

Donde $dim_{\mathbb{R}}(F_L M^4) = 4+6 = 10$ y $dim_{\mathbb{R}}(V_{\mathcal{F}^L_{M^4}}) = 16$. En este caso, la base canónica de $so(3,1)$ es el conjunto de matrices:

$$\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\} \text{ respectivamente:}$$

$\{l_{23} \equiv a_1, l_{31} \equiv a_2, l_{12} \equiv a_3, l_{01} \equiv b_1, l_{02} \equiv b_2, l_{03} \equiv b_3\}$.

Las 3 primeras matrices generan rotaciones en los ejes x, y, y z, y las ultimas 3 matrices generan boosts en los mismos ejes. La derivación de la base canónica se da como sigue: se empieza por la definición de las transformaciones de Lorentz $\Lambda : \eta_L := \Lambda^T \eta_L \Lambda$, con $\eta_L \equiv \eta = (\eta_{00}, \eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{33}) = (1, -1, -1, -1)$ o $(-1, 1, 1, 1)$ y $\eta_{ab} = 0$ si $a \neq b$; si $\Lambda(\lambda)$ es un camino suave que cruza por la identidad $\Lambda(0) = I$, el correspondiente vector tangente en I, $\dot{\Lambda}(0) = L$, obedece la ecuación $L^T_\eta = -\eta L$. Los generadores a_i y b_i obedecen $[a_i, a_j] = \epsilon_{ijk} a_k$, $[b_i, b_j] = -\epsilon_{ijk} a_k, [a_i, b_j] = \epsilon_{ijk} b_k$. Si $l = \sum\limits_{i=1}^{3} (\beta_i b_i + \alpha_i a_i)$ y $l' = \sum\limits_{i=1}^{3} (\beta_i^{'} b_i + \alpha_i^{'} a_i)$ están en o(3,1), con $\alpha_i^{'}, \beta_i^{'} \in \mathbb{R}$, con lo que su corchete de Lie queda como: $[l, l'] = l'' = \sum\limits_{i=1}^{3} (\beta_i^{''} b_i + \alpha_i^{''} a_i) \in o(3,1)$ con $\beta_1^{''} = \beta_2 \alpha_3^{'} + \alpha_2 \beta_3^{'} - \beta_3 \alpha_2^{'} - \alpha_3 \beta_2^{'}, \beta_2^{''} = \beta_3 \alpha_1^{'} + \alpha_3 \beta_1^{'} - \beta_1 \alpha_3^{'} - \alpha_1 \beta_3$, $\beta_3^{''} = \beta_1 \alpha_2^{'} + \alpha_1 \beta_2^{'} - \beta_2 \alpha_1^{'} - \alpha_2 \beta_1^{'}$, $\alpha_1^{''} = -\beta_2 \beta_3^{'} + \alpha_2 \alpha_3^{'} + \beta_3 \beta_2^{'} - \alpha_3 \alpha_2^{'}$, $\alpha_2^{''} = -\beta_3 \beta_1^{'} + \alpha_3 \alpha_1^{'} + \beta_1 \beta_3^{'} - \alpha_1 \alpha_3$, $\alpha_3^{''} = -\beta_1 \beta_2^{'} + \alpha_1 \alpha_2^{'} + \beta_2 \beta_1^{'} - \alpha_2 \alpha_1^{'}$.

2.17 Forma de soldadura en $\mathcal{F}_{M^n}$.

Dada una variedad diferenciable M^n, la forma canónica o de soldadura θ es la 1-forma diferencial valuada en $\mathbb{R}^n$ en FM^n i.e. $\theta \in \Gamma(T^* FM^n \otimes \mathbb{R}^n)$ definida como:

$$\theta : FM^n \to T^* FM^n \otimes \mathbb{R}^n, \, (x, r_x) \mapsto \theta((x, r_x)) = ((x, r_x), \theta_{(x, r_x)}) \tag{60}$$

$$\theta_{(x,r_x)} : T_{(x,r_x)} FM^n \to \mathbb{R}^n, \, v_{(x,r_x)} \mapsto \theta_{(x,r_x)}(v_{(x,r_x)}) \tag{61}$$

$$= \tilde{r}_x^{-1} \circ \pi_{\mathsf{F}_{*(x,r_x)}}(v_{(x,r_x)})$$

i.e.

$$\theta_{(x,r_x)} = \tilde{r}_x^{-1} \circ d\pi_{F|(x,r_x)} \tag{62}$$

donde π_F es la proyección en el haz $\mathcal{F}_{M^n}$ y $\tilde{r}_x$ es el isomorfismo de espacios vectoriales:

$$\tilde{r}_x : \mathbb{R}^n \to T_xM,\ (\lambda^1, \ldots, \lambda^n) \mapsto \tilde{r}_x(\lambda^1, \ldots, \lambda^n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_{ix} \tag{63}$$

con inversa:

$$\tilde{r}_x^{-1}(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_{ix}) = (\lambda^1, \ldots, \lambda^n) \tag{64}$$

Con lo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Id} & \mathbb{R}^n \\ \theta_{(x,r_x)} \uparrow & & \uparrow \tilde{r}_x^{-1} \\ T_{(x,r_x)}FM^n & \xrightarrow{d\pi_{F|(x,r_x)}} & T_xM^n \end{array}$$

Notese que $dim_{\mathbb{R}}(T_{(x,r_x)}FM^n) = n + n^2$. Dado que $d\pi_F|(x, r_x)$ es suprayectiva, $\theta_{(x,r_x)}$ es un epimorfismo de espacios vectoriales, con $ker(\theta_{(x,r_x)}) = V_{(x,r_x)}$ el espacio vertical del haz FM^n en (x, r_x) y $dim_{\mathbb{R}}ker(\theta_{(x,r_x)}) = n^2$.

La existencia de θ es independiente de cualquier conexión.

$(\vec{e}_\mu)_j = \delta_{\mu j}, \mu, j = 1, \ldots, n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n \Longrightarrow$

$$\theta_{(x,r_x)} = \sum_{i=1}^{n} \theta^\mu_{(x,r_x)} \otimes \vec{e}_\mu \tag{65}$$

donde $\theta^\mu_{(x,r_x)} \in T^*_{(x,r_x)}FM^n$.

En coordenadas locales en $\mathcal{F}_{U_\alpha}$,

$$\theta^\mu = \sum_{\nu=1}^{n} (X^{-1})^\mu_\nu dx^\nu \tag{66}$$

con $(X^{-1})^\mu_\nu(x, r_x) = (X^\mu_\nu(x, r_x))^{-1}$.

De hecho, si $v_{(x,r_x)} \in T_{(x,r_x)}FU_\alpha$ entonces

$$v_{(x,r_x)} = \sum_{\mu=1}^{n} \lambda^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_{(x,r_x)} + \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \lambda^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial X^\mu_\nu}|_{(x,r_x)} \tag{67}$$

con $d\pi_F|_{(x,r_x)}(v_{(x,r_x)}) = \sum_{\mu=1}^{n} \lambda^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_x \in T_xU_\alpha$; entonces

$$\theta_{(x,r_x)}(v_{(x,r_x)}) = \tilde{r}_x^{-1} \circ d\pi_F|_{(x,r_x)}(v_{(x,r_x)}) = \tilde{r}_x^{-1}(\sum_{\mu=1}^{n} \lambda^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_x) \tag{68}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} \lambda^\mu \tilde{r}_x^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_x) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \lambda^\lambda (X_\mu^\nu(x,r_x))^{-1}\vec{e}_\nu$$

; por otro lado,

$$\theta_{(x,r_x)}(v_{(x,r_x)}) = (\sum_{\mu=1}^{n} \theta^\mu_{(x,r_x)} \otimes \vec{e}_\mu)(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}|_{(x,r_x)} + \sum_{\nu,\rho=1}^{n} \lambda^\nu_\rho \frac{\partial}{\partial X^\nu_\rho}|_{(x,r_x)} \tag{69}$$

$$= (\sum_{\mu,\alpha=1}^{n} (X^{-1})^\mu_\alpha(x,r_x) dx^\alpha|_{(x,r_x)} \otimes \vec{e}_\mu)(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}|_{(x,r_x)} + \sum_{\nu,\rho=1}^{n} \lambda^\nu_\rho \frac{\partial}{\partial X^\nu_\rho}|_{(x,r_x)}$$

$$= \sum_{\nu,\mu\alpha=1}^{n} (X^\mu_\alpha(x,r_x))^{-1}\delta^\alpha_\nu \lambda^\nu \vec{e}_\mu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} (X^\mu_\nu(x,r_x))^{-1}\lambda^\nu \vec{e}_\mu$$

.

Por lo que una sección local $s_\alpha : U_\alpha \to FU_\alpha$, $x \to s_\alpha(x) = (x, r_x)$ en $\mathcal{F}_{M^n}$, da lugar a un conjunto de n 1-formas diferenciales locales $\theta^\mu_\alpha \equiv \theta^\mu$ en FU_α.

Si w es una conexión en $\mathcal{F}_{M^n}$, y $H_{(x,r_x)}$ es el espacio horizontal en (x, r_x), $\Longrightarrow$

$$\theta_{(x,r_x)}|_{H_{(x,r_x)}} = \tilde{r}_x^{-1} \circ d\pi_F|_{(x,r_x)}|_{H_{(x,r_x)}} \tag{70}$$

Es un isomorfismo del espacio vectorial, ya que $d\pi_F|_{(x,r_x)}$ es un isomorfismo canónico entre $H_{(x,r_x)}$ y T_xM^n:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Id} & \mathbb{R}^n \\ \theta_{(x,r_x)}|_{H_{(x,r_x)}} \uparrow & & \uparrow \tilde{r}_x^{-1} \\ H_{(x,r_x)} & \xrightarrow{d\pi_F|_{(x,r_x)}} & T_xM^n \end{array}$$

$\theta_{(x,r_x)}|_{H_{(x,r_x)}}$ depende en el marco en $x(r_x)$ y en la conexión ω.

Cualquier conexión ω en el haz de marcos $\mathcal{F}_{M^n}$, en conjunto con la forma canónica de soldadura θ, trivializa el haz tangente de $\mathcal{F}_{M^n}$. Este hecho se conoce como paralelismo absoluto. El isomorfismo canónico del haz (que solo depende de ω) está dado por el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+n^2} & & \mathbb{R}^{n+n^2} \\ | & & | \\ (TFM^n)^{2(n+n^2)} & \xrightarrow{\phi_c} & (FM^n)^{n+n^2} \times \mathbb{R}^{n+n^2} \\ \pi_{F_*}\downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ (FM^n)^{n+n^2} & \xrightarrow{Id} & (FM^n)^{n+n^2} \end{array}$$

Con:

$$\phi_c(((x,r_x), v_{(x,r_x)})) = ((x,r_x), (\theta_{(x,r_x)}|_{H_{(x,r_x)}} \times \omega_{(x,r_x)}|_{V_{(x,r_x)}}) \tag{71}$$

$$\times(hor(v_{(x,r_x)}), ver(v_{(x,r_x)}))),$$

donde $v_{(x,r_x)} \in T_{(x,r_x)}FM^n$ y $gl_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}(n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

El paralelismo absoluto en el haz de marcos de Lorentz $\mathcal{F}^L_{M^n}$ está dado por:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} & & \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
| & & | \\
(TF^LM^n)^{n(n+1)} & \xrightarrow{\phi_c^L} & (F^LM^n)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
\pi_{L_*}\downarrow & & \downarrow \pi_1 \\
(F^LM^n)^{\frac{n(n+1)}{2}} & \xrightarrow{Id} & (F^LM^n)^{n+n^2}
\end{array}$$

con:

$$\phi_c^L(((x,e_x), v_{(x,e_x)})) = ((x,e_x), (\theta_{(x,e_x)}|_{H_{(x,e_x)}} \times \omega^L_{(x,e_x)}|_{V_{(x,e_x)}}) \tag{72}$$

$$\times(hor(v_{(x,e_x)}), ver(v_{(x,e_x)})))$$

donde:

$e_x = (e_{1x}, \ldots, e_{nx})$, y $H_{(x,e_x)} = ker(\omega^L_{(x,e_x)})$

En particular para el caso en que $n = 4$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^{10} & & \mathbb{R}^{10} \\
| & & | \\
(TF^LM^4)^{20} & \xrightarrow{\phi_c^L} & (F^LM^4)^{10} \times \mathbb{R}^{10} \\
\pi_{L_*}\downarrow & & \downarrow \pi_1 \\
(F^LM^4)^{10} & \xrightarrow{Id} & (F^LM^4)^{10}
\end{array}$$

2.18 Conexión lineal en una variedad M^n en $\mathcal{F}_{M^n}$.

Una conexión lineal gl_n-valuada ∇ en M^n esta dada localmente por:

$$\omega_U = \Gamma^\mu_{\nu\rho} dx^\nu \otimes E^\rho{}_\mu \tag{73}$$

donde $(E^\rho{}_\mu)_{\alpha\beta} = \delta^\rho{}_\alpha \delta_{\mu\beta}$ con $\rho, \mu, \alpha, \beta = 1, \ldots, n$ es la base canónica de $\mathbb{R}(n) = gl_n(\mathbb{R}) = Lie(GL_n(\mathbb{R}))$ y $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ son los símbolos de Christoffel.

En FU, la conexión ω_{FU} tal que $w_U = \sigma^*(w_{FU})$ con $\sigma : U \to FU$ la sección local $x^\mu \mapsto \sigma(x^\mu) = (x^\mu, \delta^\nu_\rho))$ esta dada por:

$$\omega_{FU} = (X^{-1})^\mu_\sigma (dX^\sigma_\rho + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} X^\lambda_\rho dx^\nu) \otimes E^\rho{}_\mu \tag{74}$$

$w_U \in \Gamma(T^*U \otimes gl_n(\mathbb{R}))$ y $w_{FU} \in \Gamma(T^*FU \otimes gl_n(\mathbb{R}))$.

Las conexiones 1-formas valuadas en los reales $\omega_{U^\mu{}_\rho}$ y $\omega_{FU^\mu{}_\rho}$ están definidas por:

$$\omega_U = \omega_{U^\mu{}_\rho} \otimes E^\rho{}_\mu \tag{75}$$

y

$$\omega_{FU} = \omega_{FU^\mu{}_\rho} \otimes E^\rho{}_\mu \tag{76}$$

El levantamiento horizontal local de un campo vectorial $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ por la conexión w en $\mathcal{F}_{M^n}$ es entonces dado por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^\dagger = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} X^\nu_\sigma \frac{\partial}{\partial X^\rho_\sigma} \tag{77}$$

De hecho,

$$w_{FU^\alpha{}_\beta}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^\dagger\right) = (X^{-1})^\alpha_\lambda (dX^\lambda_\beta + \Gamma^\lambda_{\gamma\xi} X^\xi_\beta dx^\gamma)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} X^\nu_\sigma \frac{\partial}{\partial X^\rho_\sigma}\right) \tag{78}$$

$$= (X^{-1})^\alpha_\lambda (-\Gamma^\rho_{\mu\nu} X^\nu_\sigma dX^\lambda_\beta \left(\frac{\partial}{\partial X^\rho_\sigma}\right) + \Gamma^\lambda_{\gamma\xi} X^\xi_\beta dx^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)) \tag{79}$$

$$= (X^{-1})^\alpha_\lambda (-\Gamma^\rho_{\mu\nu} X^\nu_\sigma \delta^\lambda_\rho \delta^\sigma_\beta + \Gamma^\lambda_{\gamma\xi} X^\xi_\beta \delta^\gamma_\mu) = (X^{-1})^\alpha_\lambda (-\Gamma^\lambda_{\mu\nu} X^\nu_\beta + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} X^\nu_\beta) = 0 \tag{80}$$

2.19 Tetradas y conexión de espín.

1. En cada carta $U \subset M^n$ podemos tomar como base de $\Gamma(TU)$ a los campos vectoriales locales
$$e_a = e_a{}^\mu \partial_\mu,\ a = 1, \ldots, n \tag{81}$$
con $r_x = (e_{1x}, \ldots, e_{nx}) \in (FU)_x$. Dado que las $n \times n$ matrices $(e_a{}^\mu(x)) \in GL_n(\mathbb{R})$, existen los campos vectoriales inversos $e_x^{-1} \equiv e^a = e^a_\mu dx^\mu$: 1-formas con $e^a_\mu = (e^\mu_a)^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ y
$$e_a{}^\mu e_\mu{}^b = \delta^b_a \tag{82}$$
y
$$e_a{}^\mu e_\nu{}^a = \delta^\mu_\nu \tag{83}$$
$\Longrightarrow e_\nu{}^a e_a = e_\nu{}^a e_a{}^\mu \partial_\mu = \delta^\mu_\nu \partial_\mu$ i.e.
$$\partial_\nu = e_\nu{}^a e_a \tag{84}$$
En general los $e_a{}'s$ son llamados bases no coordenadas y los $e^a{}'s$ coordenadas anholonomicas. Para $n = 4$ los campos vectoriales locales son llamados *tetradas*.

2. Mientras que $[\partial_\nu, \partial_\mu] = 0$, los corchetes de Lie de las tetradas no son cero. Al aplicar los conmutadores $[e_a, e_b]$ a una función $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ se obtiene:
$$[e_a, e_b] = \lambda^c_{ab} e_c \tag{85}$$
con $\lambda^c_{ab} = e_\mu{}^c (e_a{}^\nu(\partial_\nu e_b{}^\mu) - e_b{}^\nu(\partial_\nu e_a{}^\mu)) = -\lambda^c_{ab}$

3. Para un campo vectorial local, $V = V^\mu \partial_\mu = V^\mu e_\mu{}^a e_a = V^a e_a$, con
$$V^a = e_\mu{}^a V^\mu,\ V^\mu = e_a{}^\mu V^a \tag{86}$$

4. En cada $x \in M^n$, la fibra del haz de co-marcos de M^n,

$$\mathcal{F}^*_{M^n} : GL_n(\mathbb{R}) \to (FM^n)^* \xrightarrow{\pi_*} M^n \tag{87}$$

es el conjunto

$$(FM^n)^*_x = \{bases\ ordenadas\ de\ T^*_x M\} \tag{88}$$
$$= \left\{(f^1_x, \ldots, f^n_x),\ f^a_x = f_\nu{}^a(x) dx^\nu|_x\right\}$$

5. de nuevo, $(f_\nu{}^a(x)) \in GL_n(\mathbb{R})$ y localmente, $(f_\nu{}^a)^{-1} = f_a{}^\nu$, con

$$f_a{}^\nu f_\nu{}^b = \delta^b_a \tag{89}$$

y

$$f_a{}^\nu f_\mu{}^a = \delta^\nu_\mu \tag{90}$$

también,

$$f^a = f_\nu{}^a dx^\nu \tag{91}$$

y

$$dx^\nu = f_a{}^\nu f^a \tag{92}$$

De la relación de dualidad $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$ se obtiene que $\delta^\mu_\nu = f_a{}^\mu f^a(e_\nu{}^b e_b) = f_a{}^\mu e_\nu{}^b f^a(e_b)$; imponiendo la relación de dualidad entre $f's$ y $e's$,

$$f^a(e_b) = \delta^a_b \tag{93}$$

se obtiene que

$$f_\mu{}^d = e_\mu{}^d \tag{94}$$

y

$$f_a{}^\nu = e_a{}^\nu \tag{95}$$

$\Longrightarrow$

$$f^a = e_\nu{}^a dx^\nu \tag{96}$$

y

$$dx^\nu = e_a{}^\nu f^a \tag{97}$$

También se suele denotar a f^a como θ^a.

6. Dado un tensor (r, s) en M^n,

$$T = T^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_s} \partial_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\nu_s} \tag{98}$$

se obtiene que:

$$T = T^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_s} e_{\mu_1}{}^{a_1} e_{a_1} \otimes \ldots \otimes e_{\mu_r}{}^{a_r} e_{a_r} \otimes f_{b_1}{}^{\nu_1} f^{b_1} \otimes \ldots \otimes f_{b_s}{}^{\nu_s} f^{b_s} \tag{99}$$
$$= T^{a_1 \ldots a_r}_{b_1 \ldots bs} e_{a_1} \otimes \ldots \otimes e_{a_r} \otimes f^{b_1} \otimes \ldots \otimes f^{b_s}$$

con:

$$T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s} = e_{\mu_1}{}^{a_1}\dots e_{\mu_r}{}^{a_r} f_{b_1}{}^{\nu_1}\dots f_{b_s}{}^{a_s} T^{\mu_1\dots\mu_r}_{\nu_1\dots\nu_s} \tag{100}$$

Por ejemplo:

$$T = T^\mu{}_\nu \partial_\mu \otimes dx^\nu = T^\mu{}_\nu e_\mu{}^a e_a \otimes dx^\nu = T^a{}_\nu e_a \otimes dx^\nu = T^\mu{}_\nu \partial_\mu \otimes f_b{}^\nu f^b \tag{101}$$

$$\begin{aligned} &= T^\mu{}_b \partial_\mu \otimes f^b = T^\mu{}_\nu e_\mu{}^a e_a \otimes f_b{}^\nu f^b \\ &= T^a{}_b e_a \otimes f^b \end{aligned} \tag{102}$$

6. Sea $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ una métrica en M^n, g tiene una signatura dada por la métrica diagonal η_{ab}, igual a δ_{ab} en el caso euclideano ($\eta = \eta_E$), para el caso riemanniano general con $-1's$ y $+1's$ y para el caso lorentziano, relevante para RG, tiene $\eta = \eta_L$, siendo $g_{\mu\nu}$ una matriz simétrica, en cualquier punto $x \in M^n$ puede ser diagonalizada a η_{ab}. La métrica y su signatura distinguen el subconjunto de tetradas que obedecen la siguiente condición de ortonormalidad:

$$g(e_a, e_b) = \eta_{ab} \tag{103}$$

En detalle:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu (e_a{}^\rho \partial_\rho, e_b{}^\sigma \partial_\sigma) = g_{\mu\nu} e_a{}^\rho e_b{}^\sigma dx^\mu(\partial_\rho) dx^\nu(\partial_\sigma) \tag{104}$$

$$= g_{\mu\nu} e_a{}^\rho e_b{}^\sigma \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma = g_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu$$

i.e.

$$g_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu = \eta_{ab} \tag{105}$$

Esta relación puede ser invertida:

$$g_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu e_\rho{}^a e_\sigma{}^b = g_{\mu\nu} \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{106}$$

i.e.

$$\eta_{ab} e_\mu{}^a e_\nu{}^b = g_{\mu\nu} \quad o \quad g = \eta_{ab} e^a \otimes e^b \tag{107}$$

La única solución de $g_{\mu\nu}(\bar{x}) = \eta_{ab} e_\mu{}^a(\bar{x}) e_\nu{}^b(\bar{x}) = \eta_{\mu\nu}$ es $e_\mu{}^a(\bar{x}) = \delta^a_\mu$. Dicho marco es llamado inercial en x.

La fórmula (107) es fundamental ya que vale en todas las cartas en M^n, con lo que hasta salvedades topologicas se ha trivializado la métrica en todas partes i.e. globalmente, a expensas de la dependencia en x de los co-marcos e^a.

Es común que se afirme de manera burda que los duales de las tetradas son "las raices cuadradas" de la métrica. En particular, para el caso lorentziano $n = 4$, $det(g_{\mu\nu}) = -(det(e_\nu{}^a))^2$. También, la ecuación (106) permite interpretar las $n \times n$ matrices $e_c{}^\rho$ como las matrices que diagonalizan la métrica $g_{\mu\nu}$ a la métrica lorentziana η_{ab}. La ecuación (107) dice que las $e^a{}'s$ son más fundamentales que la métrica.

7. La ecuación (107) aparece de manera natural al describir campos espinores en un espacio-tiempo curvo. Si $\gamma_\mu(x)$ son las matrices de Dirac en M^n, entonces:

$$\{\gamma_\mu(x), \gamma_\nu(x)\} = 2g_{\mu\nu}(x)I \tag{108}$$

La solución:

$$\gamma_\mu(x) = E_\mu{}^a(x)\gamma_a \tag{109}$$

En conjunto con γ_a (las matrices de Dirac "planas") que obedecen: $\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}I$, conducen a que:

$$\eta_{ab}E_\mu{}^a(x)E_\nu{}^b(x) = g_{\mu\nu} \tag{110}$$

que dice que los $E_\mu{}^a{}'s$ son los duales de las tetradas $e_\mu{}^a$. Se puede probar que la solución (109) es única (O'Raifertaigh, 1997).

8. De (107) es claro que las n^2 cantidades debidas a las tetradas, determinan de manera única una métrica $g_{\mu\nu}$; sin embargo, el conjunto de $\frac{n(n+1)}{2}$ componentes de una métrica determina una tetrada solo hasta una relación de equivalencia i.e. determina una clase de tetrada, cuyos elementos están relacionados por un grupo G de $\frac{n(n-1)}{2}$ elementos.

Sea $e_a{}^\mu = h_a{}^c e_c'{}^\mu$; entonces:

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu}h_a{}^c e_c'{}^\mu h_b{}^d e_d'{}^\nu = g_{\mu\nu}e_c'{}^\mu e_d'{}^\nu h_a{}^c h_b{}^d = \eta_{cd}h_a{}^c \eta_{cd} h_b{}^d \tag{111}$$

i.e.

$$\eta = h\eta h^T \tag{112}$$

Por lo que si $\eta = \eta_L$ entonces $h \in \mathcal{L}_n = O(1, n-1)$; si $\eta = \eta_E$ entonces $h \in O_n = O(n)$; etc.

En lo que sigue nos restringiremos al caso de marcos ortonormales en el sentido definido en el punto 6., por lo que se tiene un haz principal G sobre M^n:

$$G^{\frac{n(n-1)}{2}} \to F_G \to M^n \tag{113}$$

Con $G = \mathcal{L}_n$ o O_n, y $F_G \subset FM^n$. El interés en RG es para $G = \mathcal{L}_4$ y se tiene el haz lorentziano:

$$\mathcal{L}_4 \to F_{\mathcal{L}_4} \to M^4 \tag{114}$$

y la reducción del haz:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}_4 & \xrightarrow{\iota} & GL_4(\mathbb{R}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
F_{\mathcal{L}_4} & \xrightarrow{\iota} & FM^4 \\
\pi_{\mathcal{L}_4}\downarrow & & \downarrow \pi_F \\
M^4 & \xrightarrow{Id} & M^4
\end{array}$$

Donde ι es la inclusión.

Se hace hincapié en que el haz es trivial, esto es, $F_{\mathcal{L}_4} \simeq M^4 \times \mathcal{L}_4$, si M^4 es contraible i.e. si es de la misma homotopia que un punto.

En cada $U \subset M$ uno tiene un grupo local de Lorentz $\mathcal{L}_U$ que en $x \in U$, toma el valor $\mathcal{L}(x)$. Ya que las tetradas son una base natural de $\Gamma(TU)$, y la métrica tiene necesariamente una signatura η_{ab}, los haces principales $\mathcal{L}_n$ sobre M^n también son naturales. También debe notarse la aparición natural de un nuevo grupo en cada $x \in M^n$, además del grupo general de transformación de coordenadas en la intersección de conjuntos abiertos: el grupo de Lorentz.

9. En la sección (2.10), la derivada covariante de una sección local σ_i de un haz vectorial arbitrario E fué definido como: $\nabla_{\partial_\mu}\sigma_i = \Gamma^j_{\mu i}\sigma_j$. Sea $\sigma_i = e_a$; entonces

$$\nabla_\mu e_a = \nabla_\mu(e_a{}^\nu \partial_\nu) = (\partial_\mu e_a{}^\nu)\partial_\nu + e_a{}^\nu \nabla_\mu \partial_\nu = (\partial_\mu e_a{}^\rho + e_a{}^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu})\partial_\rho \tag{115}$$

Ahora se definen los coeficientes de la conexión de espín $\omega^b_{\mu a}$ por medio de

$$\nabla_\mu e_a := \omega^b_{\mu a} e_b \quad y \quad \nabla_\mu e^a := \omega^a_{\mu b} e^b \tag{116}$$

(Los $\omega^b_{\mu a}\,'s$ en el caso presente no son otra cosa que los $\Gamma^j_{\mu i}\,'s$) Entonces, $\omega^b_{\mu a} e_b{}^\rho \partial_\rho = (\partial_\mu e_a{}^\rho + e_a{}^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu})\partial_\rho$: de la independencia lineal de las bases coordenadas y multiplicando por $e_\rho{}^c$ se obtiene que:

$$\omega^c_{\mu a} = e_\rho{}^c \partial_\mu e_a{}^\rho + e_\rho{}^c e_a{}^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} \tag{117}$$

o

$$\omega^c_{ab} = -e_b{}^\rho e_{\rho,a}{}^c + e_a{}^\mu e_b{}^\nu e_\rho{}^c \Gamma^\rho_{\mu\nu} \tag{118}$$

con:

$$\omega^c_{ab} = e_\mu{}^c \omega^\mu_{ab}, \quad \omega^\mu_{ab} = g^{\mu\nu}\omega_{\nu ab}, \quad e_{\rho,a}{}^c = \partial_a e_\rho{}^c, \quad \partial_a = e_a{}^\nu \partial_\nu = e_a \tag{119}$$

Multiplicando por $e_c{}^\sigma e_\lambda{}^a$ se tiene la relación inversa:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} = e_a{}^\sigma \partial_\mu e_\lambda{}^a + e_c{}^\sigma e_\lambda{}^a \omega^c_{\mu a} \tag{120}$$

o

$$\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} = \omega^c_{da} e_c{}^\sigma e_\lambda{}^a e_\mu{}^d - e_{a,d}{}^\sigma e_a{}^\lambda e_\mu{}^d \tag{121}$$

con $e_{a,d}{}^\sigma = \partial_d e_a{}^\sigma$

Multiplicando (117) por $e_c{}^\sigma$ y (120) por $e_\sigma{}^b$ se obtiene respectivamente:

$$\partial_\mu e_a{}^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} e_a{}^\nu - \omega^c_{\mu a} e_c{}^\sigma \tag{122}$$

y

$$\partial_\mu e_\lambda{}^b - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} e_\sigma{}^b + \omega^b_{\mu a} e_\lambda{}^a = 0 \tag{123}$$

La derivada covariante de tensores con indices superiores e inferiores "internos" (Lorentz) y "externos" (espacio-tiempo) está definido por:

$$\mathcal{D}_\mu T^{\mu_1\ldots\mu_r a_1\ldots a_t}_{\nu_1\ldots\nu_s b_1\ldots b_u} = \partial_\mu T^{\mu_1\ldots a_t}_{\nu_1\ldots b_u} + \Gamma^{\mu_1}_{\mu\lambda_1} T^{\lambda_1\mu_2\ldots a_t}_{\nu_1\ldots b_u} + \ldots \tag{124}$$

$$+\omega^{a_t}_{\mu c_t} T^{\mu_1\ldots a_{t-1}c_t}_{\nu_1\ldots b_u} - \Gamma^{\lambda_1}_{\mu\nu_1} T^{\mu_1\ldots a_t}_{\lambda_1\nu_2\ldots b_u} - \ldots - \omega^{c_u}_{\mu b_u} T^{\mu_1\ldots a_t}_{\nu_1\ldots b_{u-1}c_u}$$

Con esta definición, las ecuaciones (122) y (123) quedan como:

$$\mathcal{D}_\mu e_a{}^\sigma = 0 \; y \; \mathcal{D}_\mu e_\lambda{}^b = 0 \tag{125}$$

respectivamente. (También se puede denotar $\mathcal{D}_\mu T^{\mu_1\ldots a_t}_{\nu_1\ldots b_u} = T^{\mu_1\ldots a_t}_{\nu_1\ldots b_u\,;\mu}$)

De las transformaciones de Lorentz de las tetradas $e_a{}^\mu$ y sus inversas, $e_\mu{}^a = e'_\mu{}^c h^{-1}_c{}^a$ se obtiene:

$$e_\sigma{}^c \partial_\mu e_a{}^\sigma = e'_\sigma{}^r h^{-1}_r{}^c \partial_\mu (h_a{}^d e'_d{}^\sigma) \tag{126}$$

$$= e'_\sigma{}^r h^{-1}_r{}^c \partial_\mu (h_a{}^d) e'_d{}^\sigma + e'_\sigma{}^r h^{-1}_r{}^c h_a{}^d \partial_\mu e'_d{}^\sigma$$

$$= \partial_\mu (h_a{}^d) h^{-1}_d{}^c + h_a{}^d (e'_\sigma{}^r \partial_\mu e'_d{}^\sigma) h^{-1}_r{}^c$$

y

$$e_a{}^c e_a{}^\nu \Gamma^\sigma_{\mu\nu} = e'_\sigma{}^r h^{-1}_r{}^c h_a{}^d e'_d{}^\nu \Gamma^\sigma_{\mu\nu} = h_a{}^d (e'_\sigma{}^r e'_d{}^\nu \Gamma^\sigma_{\mu\nu}) h^{-1}_r{}^c \tag{127}$$

Entonces:

$$\omega^c_{\mu a} = h_a{}^d (e'_\sigma{}^r \partial_\mu e'_d{}^\sigma + e'_\sigma{}^r e'_d{}^\nu \Gamma^\sigma_{\mu\nu}) h^{-1}_r{}^c + \partial_\mu (h_a{}^d) h^{-1}_d{}^c \tag{128}$$

$$= h_a{}^d \omega'^r_{\mu d} h^{-1}_r{}^c + \partial_\mu (h_a{}^d) h^{-1}_d{}^c$$

i.e.

$$\omega = h\omega' h^{-1} + (dh)h^{-1} \tag{129}$$

o equivalentemente:

$$\omega' = h^{-1}\omega h - h^{-1}dh \tag{130}$$

Así, la 1-forma $\omega^a{}_b := \omega^a_{\mu b} dx^\mu$ no es un $\mathcal{L}$-tensor 1-1, ya que se transforma como un término inhomogeneo.

Se debe notar que de (117), ω tiene la estructura:

$$\omega = e^{-1}(\partial + \Gamma)e \tag{131}$$

y por (120), la estructura de Γ es:

$$\Gamma = e(\partial + \omega)e^{-1} \tag{132}$$

Se puede mostrar que para una conexión métrica ∇, para la cual

$$D_\rho g_{\mu\nu} = 0 \tag{133}$$

la conexión de espín con índices de Lorentz:

$$\omega_{\mu bc} = \omega^a_{\mu c}\eta_{ab} \tag{134}$$

es antisimétrica en estos índices. De hecho, usando (122) y (123):

$$0 = g_{\mu\nu;\rho} = (\eta_{ab}e_\mu{}^a e_\nu{}^b)_{;\rho} = \eta_{ab;\rho}e_\mu{}^a e_\nu{}^b + \eta_{ab}e_\mu{}^a{}_{;\rho}e_\nu{}^b + \eta_{ab}e_\mu{}^a e_\nu{}^b{}_\rho \quad (135)$$

$$= \eta_{ab;\rho}e_\mu{}^a e_\nu{}^b = (-\omega^c_{\rho a}\eta_{cb} - \omega^c_{\rho b}\eta_{ac})e_\mu{}^a e_\nu{}^b = -(\omega_{\rho ba} + \omega_{\rho ab})e_\mu{}^a e_\nu{}^b$$

Entonces:

$$0 = -(\omega_{\rho ba}+\omega_{\rho ab})e_\mu{}^a e_\nu{}^b e_c{}^\mu e_d{}^\nu = -(\omega_{\rho ba}+\omega_{\rho ab})\delta^a_c\delta^b_d = -(\omega_{\rho dc}+\omega_{\rho cd}) \quad (136)$$

i.e.

$$\omega_{\rho dc} = -\omega_{\rho cd} \quad (137)$$

De aqui se ve que esta es la condición de compatibilidad de la métrica que reduce el álgebra de Lie del grupo de gauge de $gl_n(\mathbb{R})$ a $o(1, n-1)$ o $o(n)$, donde la 1-forma $\omega_{bc} = \omega_{\mu bc}dx^\mu$. El grupo de gauge reducido puede ser $O(1, n-1)$, $O(n)$ o , para el caso $n = 4$, $SL(2,\mathbb{C})$ si $h_a{}^c \in \mathcal{L}^\uparrow_+ = SO^0(1,3)$ en cada $x \in M^4$ (Randono, 2010).

Hasta este punto, el contenido de esta sección no depende de las propiedades de simetría de los indices de $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$. En particular, si la conexión de Levi-Civita se inserta en (109), usando (117), se obtienen los coeficientes de la conexión de espín $\omega^c_{\mu a}$ en términos de las tetradas, sus derivadas y la métrica de Lorentz η_{ab}:

$$\omega^c_{\mu a} = e_\rho{}^c\partial_\mu e_a{}^\rho + \frac{1}{2}e_\rho{}^c e_a{}^\nu \eta^{fd} e_f{}^\rho e_d{}^\sigma \eta_{hk}(\partial_\mu(e_\sigma{}^h e_\nu{}^k) \quad (138)$$

$$+\partial_\nu(e_\sigma{}^h e_\mu{}^k) - \partial_\sigma(e_\mu{}^h e_\nu{}^k)$$

Por lo que se tiene el resultado análogo al de la dependencia de la conexión de Levi-Civita en la métrica: la dependencia en las tetradas de la conexión de espín.

10. Explicitamente, en cada carta (U, x^μ) en M, la conexión de espín (metrica), con valores en $so(3,1)$, se construye de la siguiente manera:

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}dx^\mu \otimes l_{ab} \in \Gamma(T^*U \otimes so(3,1)),\ x \to \omega(x) = (x, \omega_x) \quad (139)$$

con $\omega_x = \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}(x)dx^\mu|_x \otimes l_{ab} \in T^*_xU \otimes so(3,1)$

i.e.

$$\omega_x : T_xU \to so(3,1),\ v_x \mapsto \omega_x(v_x) = \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}(x)dx^\mu|_x(v_x)l_{ab} \quad (140)$$

$$= \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}(x)v^\mu_x l_{ab} = \frac{1}{2}\omega'_{ab}(x)l_{ab}$$

con $\omega'_{ab}(x) = -\omega'_{ba}(x) := \omega_{\mu ab}(x)v^\mu_x \quad y \quad \omega_x(v_x) = \omega'_{01}l_{01} + \ldots + \omega'_{31}l_{31}$

Si se considera la componente conexa del grupo de Poincaré $\mathcal{P}_4$, la suma semidirecta del grupo de traslaciones $\mathcal{T}_4$ y la componente conexa del grupo de Lorentz $\mathcal{L}_4$:

$$\mathcal{P}_4 = \mathcal{T}_4 \odot SO^0(3,1),\ (a',\Lambda')(a,\Lambda) = (a' + \Lambda' a, \Lambda'\Lambda) \tag{141}$$

Con álgebra de Lie:

$$p_4 = \mathbb{R}^4 \odot so(3,1),\ (\vec{\lambda}', l')(\vec{\lambda}, l) = (l'\vec{\lambda} - l\vec{\lambda}', [l', l]) = -(\vec{\lambda}, l)(\vec{\lambda}', l') \tag{142}$$

($\mathcal{P}_4$ es un subgrupo del grupo afín A_4; para una n arbitraria, $A_n = \mathbb{R}^n \odot GL_n(\mathbb{R})$ con álgebra de Lie $a_n = \mathbb{R}^n \odot \mathbb{R}(n)$)

También, en cada carta (U, x^n) en M, la tetrada (1-forma) $\tilde{e}^a$ con valores en $Lie(\mathcal{T}_4) = \mathbb{R}^4$ i.e. $\tilde{e}^a \in \Gamma(T^*U \otimes \mathbb{R}^4)$ se construye de la siguente manera:

$$\tilde{e}^a = e^a_\mu dx^\mu \otimes \vec{\lambda} :\ U \to T^*U \otimes \mathbb{R}^4,\ \tilde{e}^a(x) = (x, \tilde{e}^a_x),\ \tilde{e}^a_x \tag{143}$$

$$= e^a_\mu(x) dx^\mu|_x \otimes \vec{\lambda} \in T^*_x U \otimes \mathbb{R}^4$$

$$\tilde{e}^a_x :\ T_x U \to \mathbb{R}^4,\ e^a_\mu(x) dx^\mu|_x(v_x)\vec{\lambda} = \epsilon_x \vec{\lambda}\ con\ \epsilon_x = e^a_\mu(x) v^\mu_x \in \mathbb{R} \tag{144}$$

11. El haz de Lorentz $\mathcal{L}_4 \to F_{\mathcal{L}_4} \to M^4$ extiende el grupo de simetría de RG, de el grupo de transformaciones generales de coordenadas de M^4, a la suma semidirecta:

$$G_{RG} = \mathcal{L}_4 \odot \mathcal{D} \tag{145}$$

con ley de composición dada por:

$$(h', g')(h, g) = (h'(g' h g'^{\,-1}), g' g) \tag{146}$$

de hecho, se puede verificar que $\mathcal{D}$ tiene una acción izquierda sobre $\mathcal{L}_4$ en cada fibra $F_{\mathcal{L}_{4x}}$ de el haz, dado por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F_{\mathcal{L}_{4x}} & \xrightarrow{h} & F_{\mathcal{L}_{4x}} \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ F_{\mathcal{L}_{4x}} & \xrightarrow{h'} & F_{\mathcal{L}_{4x}} \end{array}$$

Que define:

$$h' = g h g^{-1} \equiv L_g(h) \tag{147}$$

(acción de conjugación), con

$$g(x, (e_1(x), \ldots, e_4(x))) = g(e_a(x)) = g(e_a{}^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_x) \tag{148}$$

$$= e'_a{}^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x'^{\,\mu}}|_x,\ e'_a{}^\mu(x) = \frac{\partial x'^{\,\mu}}{\partial x^\nu} e_a{}^\nu(x)$$

La acción es izquierda ya que:

$$h' \mapsto h'' = g' h' g'^{-1} = g'(g h g^{-1}) g'^{-1} = (g' g) h (g' g)^{-1} \tag{149}$$

.

2.20 Curvatura y torsión en términos de la conexión de espín y las tetradas. Ecuaciones de estructura de Cartan; identidades de Bianchi.

En lo que sigue se designará como $\Omega^k(L^r_s)$ a el espacio vectorial real de k formas diferenciales en M, con valores en los tensores (r,s) de Lorentz.

Dada la tetrada $e_\mu{}^a$ y la conexión de espín $\omega^a_{\mu b}$ en la carta (U,x^μ) en M, se tienen las siguientes formas diferenciales:

$$e^a = e_\mu{}^a dx^\mu \in \Omega^1(L^1) \quad y \quad \omega^a{}_b = \omega^a_{\mu b} dx^\mu \tag{150}$$

$\omega^a{}_b \notin \Omega^1(L^1_1)$ ya que $\omega^a{}_b$ no es un tensor L^1_1, sino una conexión en el haz de Lorentz $\mathcal{L}_4 \to F_{\mathcal{L}_4} \to M^4$.

Las 2-formas están dadas por:

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = \frac{1}{2} T^a_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \in \Omega^2(L^1) \tag{151}$$

con

$$T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega^a_{\mu b} e_\nu{}^b - \omega^a_{\nu b} e_\mu{}^b = -T^a{}_{\nu\mu} \tag{152}$$

y

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{b\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \in \Omega^2(L^1_1) \tag{153}$$

con

$$R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \omega^a_{\nu b} - \partial_\nu \omega^a_{\mu b} + \omega^a_{\mu c}\omega^c_{\nu b} - \omega^a_{\nu c}\omega^c_{\mu b} \tag{154}$$

(151) y (153) son conocidas como ecuaciones de estructura de Cartan. Como se muestra mas adelante, T^a y $R^a{}_b$ son, respectivamente, las 2-formas de torsión y curvatura.

Para de^a se tiene:

$$de^a = d(e_\nu{}^a dx^\nu) = \partial_\mu e_\nu{}^a dx^\mu \wedge dx^\nu = \Omega^a_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \equiv \Omega^a \tag{155}$$

con:

$$\Omega^a_{\mu\nu} = (de^a)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(e_{\nu,\mu}{}^a - e_{\mu,\nu}{}^a) = -\Omega^a_{\nu\mu} \tag{156}$$

Y también:

$$\Omega^a_{bc} = (de^a)_{bc} = e_b{}^\mu e_c{}^\nu \Omega^a_{\mu\nu} = \frac{1}{2} e_\nu{}^a (e_c{}^\mu \partial_\mu e_b{}^\nu - e_b{}^\mu \partial_\mu e_c{}^\nu) \tag{157}$$

$$= \frac{1}{2} e_\mu{}^a (e_{b,c}{}^\mu - e_{c,b}{}^\mu) = -\Omega^a_{cb}$$

Si comparamos esta ecuación con la obtenida para λ^a_{bc} en (1.16.2), se tiene que:

$$\Omega^a_{bc} = -\frac{1}{2}\lambda^a_{bc} \tag{158}$$

Por lo que

$$[e_b, e_c] = -2\Omega^a_{bc} e_a = -2(de^a)_{bc} e_a \tag{159}$$

Así que Ω^a_{bc} también mide la no-conmutatividad de las tetradas. Por la identidad de Jacobi,

$$\Omega^f_{ad}\Omega^d_{bc} + \Omega^f_{bd}\Omega^d_{ca} + \Omega^f_{cd}\Omega^d_{ab} = 0 \tag{160}$$

Se puede mostrar con facilidad que para una conexión métrica, el tensor de curvatura con indices de Lorentz:

$$R_{ab} = \eta_{ad} R^d{}_b \tag{161}$$

Es antisimétrico i.e.

$$R_{ab} = -R_{ba} \tag{162}$$

De hecho,

$$R_{ab} = \eta_{ad}(d\omega^d{}_b + \omega^d{}_c \wedge \omega^c{}_b) = \eta_{ad} d\omega^d{}_b + \eta_{ad}\omega^d{}_c \wedge \omega^c{}_b = d\omega_{ab} + \omega_{ac} \wedge \omega^c{}_b \tag{163}$$

$$= -(d\omega_{ba} + \omega_{ca} \wedge \omega^c{}_b) = -(d\omega_{ba} - \omega^c{}_b \wedge \omega_{ca}) = -(d\omega_{ba} - \omega_{cb} \wedge \omega^c{}_a)$$

mientras que

$$R_{ba} = \eta_{bc} R^c{}_a = \eta_{bc}(d\omega^c{}_a + \omega^c{}_d \wedge \omega^d{}_a) = d\omega_{ba} + \omega_{bd} \wedge \omega^d{}_a \tag{164}$$

$$= d\omega_{ba} - \omega_{db} \wedge \omega^d{}_a$$

Simbólicamente se esctibe:

$$\mathbf{T} = de + \omega \wedge e \quad y \quad \mathbf{R} = d\omega + \omega \wedge \omega \tag{165}$$

Es decir, la torsión está relacionada con las tetradas y la curvatura a la conexión de espín. Sinembargo, mientras que la curvatura únicamente contiene a ω mientras que la torsión contiene tanto a e como a ω, esto se debe a que el grupo de Poincaré es la suma semidirecta de $\mathbb{R}^4$ (traslaciones) y $SO^0(3,1)$ (rotaciones en el espacio-tiempo)

Una variedad equipada cón una métrica $g_{\mu\nu}$ y una conexión $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ compatible con la métrica pero con torsión diferente de 0, es llamada una variedad de Einstein-Cartan. La métrica induce una conexión de Levi-Civita $(\Gamma_{LC})^\mu_{\nu\rho}$ con $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = (\Gamma_{LC})^\mu_{\nu\rho} + K^\mu_{\nu\rho}$, donde $K^\mu_{\nu\rho}$ es el tensor de contorsión.

En la teoría gravitatoria de Einstein-Cartan (E-C), las 1-formas:

$$\{e^a, \omega_{ab}\} \tag{166}$$

Son llamadas potenciales de gauge o gravitacionales, respectivamente traslacional y rotacional, mientras que las 2-formas:

$$\{T^a, R^a_b\} \tag{167}$$

son llamadas intensidades de campo de gauge o gravitacionales, respectivamente traslacional y rotacional. En un punto cualquiera, siempre es posible decir que $e_{pt} = 1$ y $\omega_{pt} = 0$, i.e respectivamente $e_\mu{}^a = \delta_\mu{}^a$ (16 condiciones) y $\omega_{\mu ab} = 0$ (24 condiciones) (Hehl, 1985; Hartley, 1995). El número total de condiciones i.e.

40, coincide con el correspondiente de hacer 0 los simbolos de Christoffel para el caso de la conexión de Levi-Civita ($|\left\{(\Gamma_{LC})^{\mu}_{\nu\rho}\right\}| = 40$).

En resumen, se tienen las siguientes relaciones esquematicas:

$$curvatura \longleftrightarrow conexión\ de\ espín \longleftrightarrow rotaciones\ de\ espacio - tiempo$$

$$torsión \longleftrightarrow tetradas \longleftrightarrow traslaciones\ espaciotemporales$$

Por otra parte, por el teorema de Noether, se tiene que:

$$rotaciones\ espaciotemporales \longleftrightarrow momento\ angular$$

$$traslaciones\ espaciotemporales \longleftrightarrow energía - momento$$

En la teoría de Einstein-Cartan, basada en una conexión métrica no simetrica, las fuentes de curvatura y torsión son respectivamente enrergía-momento y y momento angular de espín. i.e.

$$curvatura \longleftrightarrow energía - momento$$

$$torsión \longleftrightarrow momento\ angular\ de\ espín$$

Este "cruce" de relaciones se debe a teoremas de holonomia (Trautman, 1973).

En teorías de campos relativistas(tcr), los campos pertenecen a representaciones irreducibles del grupo de Poincaré $\mathcal{P}_4$, que se caracterizan por dos parámetros: masa y espín. La invariancia bajo traslaciones ($\mathcal{T}_4$) y rotaciones ($\mathcal{L}_4$) respectivamente conducen, por el teorema de Noether a la conservación de energía-momento ($T_{\mu\nu}$) y momento angular: orbital + intrinseco (espín, con densidad $S^{\mu}_{\nu\rho}$). Por otra parte, la geometría diferencial (g.d.), por medio de teoremas de holonomia, relaciona a la curvatura ($R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$) con el grupo de Lorentz y a la torsión ($T^{\rho}_{\mu\nu}$) con las traslaciones. Finalmente, las ecuaciones de Einstein (E) hacen a la enregia-momento la fuente de la curvatura, mientras que las ecuaciones de Cartan (C) hacen al espín la fuente de la torsión.

Esto se sintetiza en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{L}_4 & \\
d.g. \nearrow & \downarrow & \nwarrow t.c.r \\
R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} & \delta_{\omega} \searrow & S^{\mu}_{\nu\rho} \\
\uparrow E & & C \downarrow \\
T^{\mu}_{\nu} & \nwarrow \delta_e & T^{\rho}_{\mu\nu} \\
t.c.r \nwarrow & \uparrow & \swarrow g.d. \\
 & \mathcal{T}_4 &
\end{array}$$

En la formulación de la teoría de Einstein-Cartan basada en las tetradas y la conexión de espín, las ecuaciones de Einstein se obtienen al variar la acciòn con respecto a las tetradas (δ_e), en relación con las traslaciones, y las ecuaciones de Cartan se obtienen al hacer la variación respecto a la conexión de espín (δ_{ω}), en relación a las rotaciones.

Localmente, como 2-formas diferenciales con valores en $so(3,1)$ y $Lie(\mathcal{T}_4) = \mathbb{R}^4$, $\mathbf{R}$ y T^a están dados de la siguiente manera:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} R_{ab\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma \otimes l_{ab} \in \Gamma(\Lambda^2 U \otimes so(3,1)),\ R_{ab\rho\sigma} \tag{168}$$
$$= \eta_{ad} R^d{}_{b\rho\sigma},\ \mathbf{R}(x) = (x, \mathbf{R}_x)$$
$$\mathbf{R}_x = \frac{1}{2} R_{ab\rho\sigma}(x) dx^\rho|_x \wedge dx^\sigma|_x \otimes l_{ab} \in \Lambda^2_x U \otimes so(3,1), \tag{169}$$
$$\mathbf{R}_x : T_x U \otimes T_x U \to so(3,1),\ R_x(v_x, w_x)$$
$$= \frac{1}{4} R_{ab\rho\sigma}(x)(v_x^\rho w_x^\sigma - v_x^\sigma w_x^\rho) l_{ab} \tag{170}$$

y

$$T^a = T^a{}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \otimes \vec{\lambda} \in \Gamma(\Lambda^2 U \otimes \mathbb{R}^4),\ T^a(x) \tag{171}$$
$$= (x, T_x^a),\ T_x^a = T^a_{\mu\nu}(x) dx^\mu|_x \wedge dx^\nu|_x \otimes \vec{\lambda}$$
$$T_x^a : T_x U \otimes T_x U \to \mathbb{R}^4,\ T_x^a(v_x, w_x) = \frac{1}{2} T^a_{\mu\nu}(x)(v_x^\mu w_x^\nu - v_x^\nu w_x^\mu)\vec{\lambda} \tag{172}$$

De la definición de $\mathbf{T}$, se tiene que al ser $d^2 = 0$, $d\mathbf{T} = d\omega \wedge$e -$\omega \wedge de = d\omega \wedge e - \omega \wedge (\mathbf{T} - \omega \wedge e) = d\omega \wedge e - \omega \wedge \mathbf{T} + \omega \wedge \omega \wedge e$, i.e. $d\mathbf{T} + \omega \wedge \mathbf{T} = (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge e$ esto es:

$$d\mathbf{T} + \omega \wedge \mathbf{T} = \mathbf{R} \wedge e \in \Omega^3(L^1) \tag{173}$$

En componentes de Lorentz:

$$dT^a + \omega^a{}_b \wedge T^b = R^a{}_b \wedge e^b \tag{174}$$

Para $\mathbf{R}$ se tiene que $d\mathbf{R} = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega = (\mathbf{R} - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\mathbf{R} - \omega \wedge \omega) = \mathbf{R} \wedge \omega - \omega \wedge \mathbf{R}$, i.e.

$$d\mathbf{R} + \omega \wedge \mathbf{R} - \mathbf{R} \wedge \omega = 0 \in \Omega^3(L^1_1) \tag{175}$$

En componentes:

$$dR^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge R^c{}_b - R^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = 0 \tag{176}$$

(12) y (14) son las llamadas identidades de Bianchi.

El operador de derivada exterior covariante que actua sobre formas diferenciables valuadas en tensores de Lorentz se define como:

$$\mathcal{D}_\omega = d + \omega \wedge \tag{177}$$

con lo que se tienen las ecuaciones:

$$\mathbf{T} = \mathcal{D}_\omega e, \quad \mathcal{D}_\omega \mathbf{T} = \mathbf{R} \wedge e, \quad \mathcal{D}_\omega \mathbf{R} = \mathbf{R} \wedge \omega \tag{178}$$

Aunque ω no es un tensor de Lorentz, se tiene que $\mathbf{R} = \mathcal{D}_\omega \omega$.

Se puede verificar que T^a es simplemente dos veces el tensor de torsión de la sección (1.14)

$$\begin{aligned} e_a{}^{\lambda} T^a{}_{\mu\nu} &= e_a{}^{\lambda}((de^a)_{\mu\nu} + (\omega^a{}_b \wedge e^b)_{\mu\nu}) \\ &= e_a{}^{\lambda}(\partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega^a_{\mu b} e_\nu{}^b - \omega^a_{\nu b} e_\mu{}^b) \end{aligned} \tag{179}$$

$$= (e_a{}^{\lambda}\partial_\mu e_\nu{}^a + e_a{}^{\lambda} e_\nu{}^b \omega^a_{\mu b}) - (e_a{}^{\lambda}\partial_\nu e_\mu{}^a + e_a{}^{\lambda} e_\mu{}^b \omega^a_{\nu b}) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 2T^\lambda_{\mu\nu}$$

Mediante un cálculo similar se ve que:

$$e_a{}^{\rho} e_\sigma{}^b R^a{}_{b\mu\nu} = e_a{}^{\rho} e_\sigma{}^b (d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b)_{\mu\nu} \tag{180}$$

$$= e_a{}^{\rho} e_\sigma{}^b(\partial_\mu \omega^a{}_{\nu b} - \partial_\nu \omega^a{}_{\mu b} + \omega^a{}_{\mu c}\omega^c{}_{\nu b} - \omega^a{}_{\nu c}\omega^c{}_{\mu b}) = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$$

Para el tensor de Ricci y el escalar de Ricci no restringidos a las conexión de Levi-Civita, se tiene respectivamente:

$$\begin{aligned} R_{\sigma\nu} = R^\mu{}_{\sigma\mu\nu} &= e_a{}^{\mu} e_\sigma{}^b R^a{}_{b\mu\nu} \quad y \quad R = R^\nu{}_\nu \\ &= e_a{}^{\mu} e_\sigma{}^b R^a{}_{b\mu\nu} g^{\sigma\nu} = e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu} R^{ab}{}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{181}$$

2.21 Conexión de espín en bases no coordenadas.

Los símbolos de Christoffel para una conexión métrica con torsión son:

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = (\Gamma_{LC})^\mu_{\nu\rho} + K^\mu_{\nu\rho} \tag{182}$$

donde el tensor de contorsión depende en la métrica y en la torsión; mientras que $(\Gamma_{LC})^\mu_{\nu\rho}$ solo depende en la métrica y en sus derivadas. Contrayendo con $e^a{}'s$ y $e'_b s$ se obtiene:

$$e_a{}^{\nu} e_b{}^{\rho} e_\mu{}^c (\Gamma_{LC})^\mu_{\nu\rho} + e_a{}^{\nu} e_b{}^{\rho} e_\mu{}^c K^\mu_{\nu\rho} = e_a{}^{\nu} e_b{}^{\rho} e_\mu{}^c T^\mu_{\nu\rho} \tag{183}$$

que usando (5) da:

$$\omega^c_{ab} + e_b{}^{\rho} e_{\rho,a}{}^c = e_a{}^{\nu} e_b{}^{\rho} e_\mu{}^c (\Gamma_{LC})^\mu_{\nu\rho} + K^c_{ab} \tag{184}$$

usando la expresión $g_{\mu\nu}$, $\partial_\rho g_{\mu\nu}$, etc. en la expresión para Γ_{LC} en términos de $e's$ y sus derivadas se obtiene:

$$\omega_{dab} = \gamma_{abd} + K_{dab} \quad (espacio\, U_4) \tag{185}$$

donde

$$\gamma_{bad} = -\Omega_{dab} + \Omega_{abd} - \Omega_{bda} = -\gamma_{adb} \tag{186}$$

son los coeficientes de rotaciones de Ricci, con $|\{\gamma_{abd}\} = \frac{n^2(n-1)}{2}$, (24 para n=4) y:

$$X_{abc} = \eta_{ad} X^d_{bc}, \quad X = \omega, \gamma, \Omega, K; \quad X^d_{cb} = -X^d_{bc}, \quad X = \omega, \gamma, \Omega \tag{187}$$

Si $T^a = 0$, entonces

$$\omega_{dab} = \gamma_{abd} \quad (espacio\, V_4) \tag{188}$$

Las $\gamma'_{abd}s$ provienen de la métrica, las tetradas, sus inversas y derivadas de estas dos ultimas. Por lo que el transporte paralelo y las rotaciones asociadas de vectores, por (16) tiene 2 fuentes: métrica (g) y torsión (τ): de

$$\omega_{\nu ab} = \gamma_{ab\nu} + K_{\nu ab} \tag{189}$$

se tiene que:

$$(\delta_{||}A)_a|_x = -\omega_{\nu ab}(x)A^b(x)dx^\nu|_x = (\delta_{||}^{(g)}A)_a|_x + (\delta_{||}^{(\tau)}A)|_x \tag{190}$$

con

$$(\delta_{||}^{(\tau)}A)_a|_x = -\gamma_{ab\nu}(x)A^b(x)dx^\nu|_x \tag{191}$$

y

$$(\delta_{||}^{(\tau)}A)_a|_x = -K_{\nu ab}(x)A^b(x)dx^\nu|_x \tag{192}$$

($A_a = e_a{}^\mu A_\mu$, $A^b = \eta^{bc}A_c$).

2.22 Coordenadas localmente inerciales.

Sea (M^n, g, Γ) un espacio U^n, $x \in M^n$ y $(U, \varphi) = (x^\mu)$ una carta en M^n con $x \in U$ y $x^\mu(x) = 0$, $\mu = 0, \ldots, n-1$. Sea $(U', \varphi') = (x'^{\,\mu})$ una carta con $x'^{\,\mu} = 0$ y:

$$x^\mu = x'^{\,\mu} - \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{(\nu\rho)}(x)x'^{\,\nu}x'^{\,\rho} \tag{193}$$

donde $(\nu\rho)$ significa simetrización. La parte antisimétrica $\Gamma^\mu_{[\nu\rho]} = T^\mu_{\nu\rho} = -T^\mu_{\rho\nu}$ (torsión) no contribuye al cambio de coordenadas.

La condición de metricidad en x:

$$0 = g_{\mu\nu;\lambda}(x) = g_{\mu\nu,\lambda}(x) - \Gamma^\rho_{\lambda\mu}(x)g_{\nu\rho}(x) - \Gamma^\rho_{\lambda\nu}(x)g_{\mu\rho}(x) \tag{194}$$

que, siendo un tensor también es válido en la carta U', la fórmula de transformación de tensores para $g_{\mu\nu}$, y la diagonalización de $g_{\mu\nu}$ en $\eta_{\mu\nu}$ en x (determinado hasta una transformación de Lorentz), conduce a las ecuaciones:

$$g'_{\ \mu\nu}(x'^{\,\lambda}) = \eta_{\mu\nu} + (\eta_{\mu\rho}T^\rho_{\lambda\nu}(x) + \eta_{\nu\rho}T^\rho_{\lambda\mu}(x))x'^{\,\lambda} + O(x'^{\,\mu^2}) \tag{195}$$

$$= \eta_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x'^{\,\lambda}}g'_{\mu\nu}(x)x'^{\,\lambda} + O(x'^{\,\mu^2})$$

y

$$(\Gamma'_{LC})^\mu_{\nu\rho}(x) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(\partial'_\nu(g'_{\rho\sigma})(x) + \partial'_\rho(g'_{\sigma\nu})(x) - \partial'_\sigma(g'_{\nu\rho})(x) \tag{196}$$

por lo que

$$T^\mu_{\nu\rho}(x) = 0 \Rightarrow \partial'_\lambda(g'_{\mu\nu})(x) = 0 \quad y \quad (\Gamma'_{LC})^\mu_{\nu\rho}(x) = 0 \tag{197}$$

i.e. el desvanecimiento de la torsión en x es condición suficiente para tener un sistema inercial local en x.

Sin embargo, la condición no es necesaria, de hecho:

$$\eta_{\mu\rho}T^{\rho}_{\lambda\nu}(p) + \eta_{\nu\rho}T^{\rho}_{\lambda\mu}(p) = T_{\lambda\nu\mu}(p) + T_{\lambda\mu\nu}(p) = 0 \tag{198}$$

implica que $T_{\mu\nu\rho}$ es también antisimétrico en su segundo y tercer índice, por lo que es entonces totalmente antisimétrico ya que $T_{\mu\nu\lambda} = -T_{\mu\lambda\nu} = T_{\lambda\mu\nu} = -T_{\lambda\nu\mu}$

Se tiene que para:

$n = 2$

$$T^0_{01} = T^1_{01} = 0$$

$n = 3$

$$T^0_{01} = T^0_{02} = T^1_{01} = T^1_{12} = T^2_{02} = T^2_{12} = 0$$
$$T^0_{12} = T^2_{10} = T^1_{02}$$

$n = 4$

$$T^0_{01} = T^0_{02} = T^0_{03} = T^1_{01} = T^1_{12} = T^1_{13} = T^2_{02} = T^2_{12} = T^2_{32} = T^3_{03} = T^3_{13} = T^3_{23} = 0$$
$$T^0_{12} = T^2_{10} = T^1_{02}$$
$$T^0_{13} = T^3_{10} = T^1_{03}$$
$$T^0_{23} = T^3_{20} = T^2_{03}$$
$$T^1_{23} = T^2_{31} = T^3_{12}$$

En cada caso, el número de componentes independientes pero no necesariamente cero del tensor de teorsión coincide con el número de componentes independientes del tensor totalmente antisimétrio de torsión con índices covariantes, número que resulta así de el hecho de que la definición de las geodésicas como "lineas de mundo de partículas" (velocidades transportadas paralelamente) coinciden con su definición como trayecorias de longitud de arco extrema. Esto último se puede ver como:

$$\frac{d^2x^a}{d\lambda^2} + \Gamma^{\alpha}_{(\nu\mu)}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = 0 \tag{199}$$

donde solamente contribuye la parte antisimétrica de $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$:

$$\begin{aligned}\Gamma^{\alpha}_{(\nu\mu)} = (\Gamma_{LC})^{\alpha}_{\nu\mu} - g^{\alpha\rho}(T^{\lambda}_{\mu\rho}g_{\lambda\nu} + T^{\lambda}_{\nu\rho}g_{\lambda\mu}) &= (\Gamma_{LC})^{\alpha}_{\nu\mu} - (T_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu} + T_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu}) \\ &= (\Gamma_{LC})^{\alpha}_{\nu\mu} - 2T_{(\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu)}\end{aligned} \tag{200}$$

con $g^{\delta\gamma}T^{\alpha}_{\beta\gamma}g_{\alpha\sigma} = g^{\delta\gamma}T_{\beta\gamma\sigma} = T_{\beta}{}^{\delta}{}_{\sigma}$; nótese que la forma covariante del tensor de torsión $T_{\beta\gamma\delta}$, es antisimétrico en los dos primeros indices: $T_{\beta\gamma\delta} = -T_{\gamma\beta\delta}$. Con esta definición de $T_{\alpha\beta\gamma}$, la forma covariante del tensor de contorsión es:

$$K_{\mu\nu\rho} = g_{\rho\alpha}K^{\alpha}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu\rho} - T_{\nu\rho\mu} + T_{\rho\mu\nu} \tag{201}$$

que es antisimétrica en los últimos dos índices i.e. $K_{\mu\nu\rho} = -K_{\mu\rho\nu}$

Por otra parte, la ecuación de las geodésicas definidas como longitudes de arco extremas:

$$0 = \delta \int ds = \delta \int (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{\frac{1}{2}} \tag{202}$$

resulta ser (Carroll, 2004, pp 106-109):

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + (\Gamma_{LC})^\alpha_{\nu\mu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0 \tag{203}$$

Por lo que para que las definiciones coincidan, $T_{(\mu\ \ \nu)}^{\ \ \alpha}$ debe anularse i.e. $T_{\mu\ \ \nu}^{\ \ \alpha} = -T_{\nu\ \ \mu}^{\ \ \alpha} \Leftrightarrow g^{\alpha\rho} T_{\mu\rho\nu} = -g^{\alpha\rho} T_{\nu\rho\mu} \Leftrightarrow T_{\mu\sigma\nu} = -T_{\nu\sigma\mu}$ i.e. $T_{\alpha\beta\gamma}$ de be se antisimétrico en los índices 1-3; pero esto implica que $T_{\alpha\beta\gamma}$ también es antisimétrico en los índices 2-3: $T_{\mu\sigma\nu} = -T_{\nu\sigma\mu} = T_{\sigma\nu\mu} = -T_{\mu\nu\sigma}$. Dado que por definición, $T_{\mu\nu\rho}$ es antisimétrico en los dos primeros índices, entonces resulta ser totalmente antisimétrico; en n dimensiones, su número de componentes independientes es $\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \equiv N$. Algunos valores son:

n	2	3	4
N	0	1	4

El conjunto permitido de componentes que no se anulan para el tensor de torsión conducen a efectos físicos. Que no se cierre un paralelogramo de lados ϵ^μ y δ^ν infinitesimales se mide por el vector:

$$\triangle^\mu = 2T^\mu_{\beta\alpha} \delta^\beta \epsilon^\alpha = T^\mu_{\beta\alpha} (\delta^\beta \epsilon^\alpha - \delta^\alpha \epsilon^\beta) \tag{204}$$

Para $n = 4$ sus componentes son:

2.23 Forma de soldadura ó forma canónica.

La forma de soldadura ó forma canónica de una variedad diferenciable de dimensión n en un haz de marcos $\mathcal{F}_{M^n}$, es la 1-forma diferencial con valores en $\mathbb{R}^n$ en FM^n dada por:

$$\theta : FM^n \to T^*FM^n \otimes \mathbb{R}^n,\ (x, r_x) \to \theta((x, r_x)) = ((x, r_x), \theta_{(x,r_x)}) \tag{205}$$

con

$$\begin{aligned} \theta_{(x,r_x)} : T_{(x,r_x)} FM^n \to \mathbb{R}^n,\ v_{(x,r_x)} &\mapsto \theta_{(x,r_x)}(v_{(x,r_x)}) \\ &= \tilde{r}_x^{-1} \circ d\pi_F|_{(x,r_x)}(v_{(x,r_x)}) \end{aligned} \tag{206}$$

i.e.

$$\theta_{(x,r_x)} = \tilde{r}_x^{-1} \circ d\pi_F|_{(x,r_x)} \tag{207}$$

donde π_F es la proyección en el haz $\mathcal{F}_{M^n} : GL_n(\mathbb{R}) \to FM^n \xrightarrow{\pi_F} M^n$ y $\tilde{r}_x$ es el isomorfismo de espacios vectoriales:

$$\tilde{r}_x : \mathbb{R}^n \to T_x M,\ (\lambda^1, ..., \lambda^n) \mapsto \tilde{r}_x(\lambda^1, ..., \lambda^n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_{ix} \tag{208}$$

con inversa:

$$\tilde{r}_x^{-1}(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_{ix}) = (\lambda^1, ..., \lambda^n) \tag{209}$$

En coordenadas locales (x^ρ, X^μ_ν) en $\mathcal{F}_U$,

$$\theta^\mu = \sum_{\nu=1}^{n} (X^{-1})^\mu_\nu dx^\nu \tag{210}$$

con $(X^{-1})^\mu_\nu(x, r_x) = (X^\mu_\nu(x, r_x))^{-1} = (v^\mu_{\nu x})^{-1}$, donde $r_x = (v_{1x}, ..., v_{nx})$ y $v_{\nu x} = \sum_{\mu=1}^{n} v^\mu_{\nu x} \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_x$. Entonces $\theta^a = e_\mu{}^a \theta^\mu = e_\mu{}^a (X^{-1})^a{}_\nu dx^\nu = e_\nu{}^a dx^\nu = e^a$; asi que, si ω_F es una conexión en $\mathcal{F}_{M^n}$, entonces $D^{\omega_F}\theta^a = d\theta^a + \omega^a_{Fb} e^b = T^a_F$ es la torsión de ω_F.

3 Ecuaciones de Einstein-Cartán.

Para el caso de gravedad pura (vacio). La acción de Einstein-Hilbert es

$$S_G = \int d^4x\, eR \tag{211}$$

donde $e = \sqrt{-det\, g_{\mu\nu}} = det(e_\nu{}^a)$, y el escalar de Ricci es:

$$R = \eta^{bc} R^a_{b\mu\nu} e_a{}^\mu e_c{}^\nu \tag{212}$$

La variación de S_G respecto de la conexión de espín $\omega^a_{\mu b}$ y las tetradas $e_a{}^\mu$ conducen respectivamente, a la ecuación de Cartan para la torsión y a la ecuación de Einstein:

$\delta_\omega S_G = 0 \Longrightarrow$

$$T^\nu_{ac} + e_a{}^\nu T_c - e_c{}^\nu T_a = 0 \tag{213}$$

o

$$T^\nu_{\rho\sigma} + \delta^\nu_\rho T_\sigma - \delta^\nu_\sigma T_\rho = 0 \tag{214}$$

$\delta_e S_G = 0 \Longrightarrow$

$$G^a{}_\mu = 0 \tag{215}$$

con

$$G^a{}_\mu = R^a{}_\mu - \frac{1}{2} R e_\mu{}^a \tag{216}$$

donde $R^a{}_\mu = \eta^{ab} R_{b\mu} = \eta^{ab} R^c{}_{b\nu\mu} e_c{}^\nu$. En vacio $R = 0, \Longrightarrow$

$$R^a{}_\mu = 0 \tag{217}$$

En este caso, la torsión se anula, tomando la traza $\nu - \sigma$ en la ec. (24), para el tensor de torsión se obtiene que $T_\rho = T^\nu_{\rho\nu} = 0$, por lo que por (24) nuevamente se tiene que:

$$T^\mu_{\nu\rho} = 0 \tag{218}$$

Por lo que para el caso meramente gravitacional, la teoría de E-C se reduce a RG.

El acoplamiento de la gravedad a los fermiones de Dirac está descrito por:

$$S_{D-E} = k \int d^4x \, e L_{D-E} = k \int d^4x \, e (\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^a (D_a \psi) - (\bar{D}_a \bar{\psi}) \gamma^a \psi) - m \bar{\psi} \psi) \tag{219}$$

donde:

$$D_a \psi = (e_a - \frac{i}{4} \omega_{abc} \sigma^{bc}) \psi = e_a{}^\mu (\partial_\mu - \frac{i}{4} \omega_{\mu bc} \sigma^{bc}) \psi = e_a{}^\mu D_\mu \psi \tag{220}$$

y

$$D_a \bar{\psi} = e_a \bar{\psi} + \frac{i}{4} \omega_{abc} \bar{\psi} \sigma^{bc} = e_a{}^\mu (\partial_\mu \bar{\psi} + \frac{i}{4} \omega_{\mu bc} \bar{\psi} \sigma^{bc}) = e_a{}^\mu \bar{D}_\mu \bar{\psi} \tag{221}$$

son las derivadas covariantes del campo de Dirac ψ y su conjugado $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ respecto a la conexión de espín, que da el acoplamiento mínimo entre gravedad y fermiones. $\sigma^{bc} = \frac{i}{2} \left[\gamma^b, \gamma^c \right]$, las $\gamma^a{}' s$ són las usuales matrices gamma de Dirac (constantes) que satisfacen que $\left\{ \gamma^a, \gamma^b \right\} = 2\eta^{abI}$, $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ y $\gamma^{j\dagger} = -\gamma^j$. $k = -16\pi \frac{G}{c^4}$. Variando respecto de la conexión de espín:

$$\delta_\omega S_{D-E} = \frac{k}{8} \int d^4x \, e \bar{\psi} \left\{ \gamma^\mu, \sigma^{bc} \right\} \psi \delta\omega_{\mu bc} = \frac{k}{2} \int d^4x \, e S^{\mu bc} \delta\omega_{\mu bc} \tag{222}$$

con $S^{\mu bc} = e_a{}^\mu S^{abc}$, donde

$$S^{abc} = \frac{1}{4} \bar{\psi} \left\{ \gamma^a, \sigma^{bc} \right\} \psi \tag{223}$$

es la densidad tensorial de espín del campo de Dirac. S^{abc} es totalmente antisimétrico por lo que tiene 4 componentes independientes: S^{012}, S^{123}, S^{230} y S^{301}.

Si se combina este resultado con la correspondiente variación para el caso de unicamente el campo gravitacional, se obtiene:

$$0 = \delta_\omega (S_G + S_{D-E}) = \int d^4x \, e \delta\omega_\nu{}^{ac} (T^\nu_{ac} + e_a{}^\nu T_c - e_c{}^\nu T_a + \frac{k}{2} S^\nu_{ac}) \tag{224}$$

y entonces:

$$T^{\nu}_{ac} + e_a{}^{\nu} T_c - e_c{}^{\nu} T_a = -\frac{k}{2} S^{\nu}_{ac} \tag{225}$$

que es la ecuación de Cartan. Multiplicando por $e_\rho{}^a e_\sigma{}^c$ se obtiene:

$$T^{\nu}_{\rho\sigma} + \delta^{\nu}_{\rho} T_\sigma - \delta^{\nu}_{\sigma} T_\rho = -\frac{k}{2} S^{\nu}_{\rho\sigma} \tag{226}$$

con

$$S^{\nu}_{\rho\sigma} = \frac{1}{4} \bar{\psi} \left\{ \gamma^\mu, \sigma_{\rho\sigma} \right\} \psi \tag{227}$$

La solución de (34) da la torsión en términos del tensor de espín:

$$T^{\nu}_{\rho\sigma} = \frac{8\pi G}{c^4} (S^{\nu}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} (\delta^{\nu}_{\rho} S_\sigma - \delta^{\nu}_{\sigma} S_\rho)) \tag{228}$$

con $S_\rho = S^{\nu}_{\rho\nu}$. (en unidades naturales, $G = c = \hbar = 1$ por lo que $T^{\nu}_{\rho\sigma} = 8\pi (S^{\nu}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} (\delta^{\nu}_{\rho} S_\sigma - \delta^{\nu}_{\sigma} S_\rho))$.

Finalmente, variando respecto de las tetradas:

$$\delta_e S_{D-E} = k \int d^4x \, e (\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^a (D_\mu \psi) - (\bar{D}_\mu \bar{\psi}) \gamma^a \psi) - e_\mu{}^a L_{D-E}) \delta e_a{}^\mu \tag{229}$$

Para el campo de Dirac que obedece la siguiente ecuación de movimiento:

$$\frac{\delta S_{D-E}}{\delta \bar{\psi}} = \frac{\delta S_{D-E}}{\delta \psi} = 0 \tag{230}$$

i.e.

$$i\gamma^a (\bar{D}_a \bar{\psi}) + m\bar{\psi} = i\gamma^a D_a \psi - m\psi = 0 \tag{231}$$

el lagrangiano de Dirac-Einstein se anula i.e. $L_{D-E}|_{ec.mov.} = 0$. Por lo que combinando este resultado con la correspondiente variación para el caso del puro campo gravitacional, se tiene que:

$$0 = \delta_e (S_G + S_{D-E}) = \int d^4x \, e (2R^a{}_\mu - R e_\mu{}^a + k \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^a (D_\mu \psi) - (\bar{D}_\mu \bar{\psi} \gamma^a \psi)) \delta e_a{}^\mu \tag{232}$$

y de la arbitrariedad de $\delta e_a{}^\mu$

$$R^a{}_\mu - \frac{1}{2} R e_\mu{}^a = -\frac{k}{2} T^a{}_\mu \tag{233}$$

con

$$T^a{}_\mu = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^a (D_\mu \psi) - (\bar{D}_\mu \bar{\psi}) \gamma^a \psi \tag{234}$$

que es el tensor de energía-momento de el campo de Dirac. Al multiplicar la ecuación (37) por $e_a{}^\nu$ se obtiene:

$$R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2} R \delta^\nu_\mu = -\frac{k}{2} T^\nu{}_\mu \quad o \quad R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} R g_{\lambda\mu} = -\frac{k}{2} T_{\lambda\mu} \tag{235}$$

la ecuación de Einstein en coordenadas locales.

Nota: Para L_{D-E} se tiene que :

$$L_{D-E} = e_a{}^{\mu} T^a{}_{\mu} - m\bar{\psi}\psi \tag{236}$$

i.e. $T^a{}_{\mu}$ se acopla a las tetradas. Por otro lado

$$T^a{}_{\mu} = \theta^a{}_{\mu} + \omega_{\mu bc} S^{abc} \tag{237}$$

donde

$$\theta^a{}_{\mu} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^a \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^a \psi) \tag{238}$$

es el tensor de energía-momento canónico del campo de Dirac. Entonces:

$$L_{D-E} = e_a{}^{\mu}\theta^a{}_{\mu} + e_a{}^{\mu}\omega_{\mu bc}S^{abc} - m\bar{\psi}\psi = e_a{}^{\mu}\theta^a{}_{\mu} + \omega_{abc}S^{abc} - m\bar{\psi}\psi \tag{239}$$

Así que $\theta^a{}_{\mu}$ se acopla a las tetradas mientras que el espín se acopla a la conexión de espín; mas aún, ya que S^{abc} es totalmente antisimétrico, el campo de Dirac solamente interactua con la parte totalmente antisimétrica de la conexión.

4 Relatividad General.

4.1 Espacio-tiempo.

El espacio tiempo en Relatividad General es la variedad Lorentziana diferenciable de 4 dimensiones conocido como espacio de Minkowski $\mathbb{R}^4$, con coordenadas cartesianas $x^\mu = x^0, x^1, x^2, x^3$, donde la coordenada x^0 está asociada con el tiempo t, constituyendo un sistema coordenado orientado con métrica $\eta_{\nu\mu} = g(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu})$, $\eta = diag(-1,1,1,1)$. Tiene una conexión Γ compatible con la métrica i.e. $D^\Gamma_\mu g_{\nu\rho} = 0$, pero no necesariamente simétrica: un espacio-tiempo U_4.

Entonces

$$\Gamma^\alpha_{\nu\mu} = (\Gamma_{LC})^\alpha_{\nu\mu} + K^\alpha_{\nu\mu} \tag{240}$$

con Γ_{LC} es la conexión de Levi-Civita con componentes coordenadas $(\Gamma_{LC})^\alpha_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\mu})$, y

$$K^\alpha_{\nu\mu} = (K_A)^\alpha_{\nu\mu} + (K_S)^\alpha_{\nu\mu} \tag{241}$$

es el tensor de contorsión, donde $(K_A)^\alpha_{\nu\mu} = T^\alpha_{\nu\mu} = -T^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}) = \Gamma^\alpha_{[\mu,\nu]}$ es el tensor de torsión, con K_S su parte simétrica, con componentes:

$$(K_S)^\alpha_{\mu\nu} = g^{\alpha\rho}(T^\lambda_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} + T^\lambda_{\rho\nu} g_{\lambda\mu}) \tag{242}$$

.

En términos de las tetradas $e_a = e_a{}^{\mu}\partial_\mu$ y sus duales co-marcos $e^a = e_\mu{}^a dx^\mu$, que se transforman como: $e_a{}^{\mu} e_\mu{}^b = \delta^b_a$ y $e_a{}^{\mu} e_\nu{}^a = \delta^\mu_\nu$, y la 1-forma conexión de espín $\omega^a{}_b = \omega^a_{\mu b} dx^\mu$, la Γ está dada por $\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} = e_a \partial_\mu e_\lambda{}^a + e_c{}^\sigma e_\lambda{}^a \omega^c_{\mu a}$ con inversa $\omega_\mu = e_\rho{}^c \partial_\mu e_a{}^\rho + e_\rho{}^c e_a{}^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu}$ (Carroll, 2004). Para la métrica, se tiene que $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} e_\mu{}^a(x) e_\nu{}^b(x)$, donde $x \in M^4$ y $\eta_{ab} = diag(1, -1, -1, -1)$ es la métrica de Lorentz. Cada métrica $g_{\mu\nu}$ está en correspondencia 1-1 con una clase de equivalencia de marcos $[e_a{}^\mu]$: si $e'_c{}^\mu$ está en la clase, entonces $e_a{}^\mu = h_a{}^c e'_c{}^\mu$ con $h_a{}^c \in \mathcal{L}_4$; para los co-marcos $e_\mu{}^a = e'_\mu{}^c h^{-1}_c{}^a$. Por lo que tanto $e_a{}^\mu{}'s$ como los $e_\mu{}^a{}'s$ son ambos vectores de Lorentz en los indices internos o de gauge (latinos), y respectivamente vectores y 1-formas en los índices de coordenadas locales (de mundo). El caracter métrico de la conexión implica que $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$ (para índices latinos, $X_a = \eta_{ab} X^b$ y $X^b = \eta^{ba} X_a$).

La torsión y la curvatura de la conexión están dadas por:

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = \frac{1}{2} T^a{}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{243}$$

con:

$$T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega^a_{\mu b} e_\nu{}^b - \omega^a_{\nu b} e_\mu{}^b \tag{244}$$

y

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{b\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{245}$$

con

$$R^a_{b\mu\nu} = \partial_\mu \omega^a_{\nu b} + \omega^a_{\mu c} \omega^c_{\nu b} - \omega^a_{\nu c} \omega^c_{\mu b} \tag{246}$$

4.2 Ecuaciones de Einstein.

4.2.1 Conexión de Levi-Civita.

Segun el teorema fundamental de la geometria riemanniana o pseudo-riemanniana, dada una variedad riemanniana o pseudo-riemanniana $(M^n, g_{\mu\nu})$, existe y es única una conexión métrica lineal y simétrica (la conexión de Levi-Civita) dada por:

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}) = g^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma\nu\rho} \tag{247}$$

Con:
$\Gamma_{\sigma\nu\rho} = \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho})$
$\Longrightarrow$

$$g_{\lambda\mu} \Gamma^\mu_{\nu\rho} = g_{\lambda\mu} g^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma\nu\rho} = \Gamma_{\lambda\nu\rho} \tag{248}$$

Que cumple con las siguientes propiedades:

- $D_\mu g_{\nu\rho} = g_{\nu\rho;\mu} = 0$, también: $D_\mu g^{\nu\rho}{}_{;\mu} = 0 \Longrightarrow$ Para cualquier camino suave $c : (a, b) \to M^n$ el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es transportado de manera paralela a lo largo de esta curva c:

$$\left(\frac{Dg}{d\lambda}\right)_{\mu\nu} = \frac{dx^\rho}{d\lambda} D_\rho g_{\mu\nu} = 0 \tag{249}$$

Con: $\frac{dx^\mu}{d\lambda}\dot{c}^\mu$. De esto se sigue que el producto escalar de dos vectores transportados de manera paralela a lo largo de c por la conexión de Levi-Civita, también es transportado paralelamente y por lo tanto es covariantemente constante.

$$\frac{D}{d\lambda}(g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu) = \left(\frac{Dg}{d\lambda}\right)_{\mu\nu} V^\mu W^\nu + g_{\mu\nu}\left(\frac{DV}{d\lambda}\right)^\mu W^\nu + g_{\mu\nu}V^\mu\left(\frac{DW}{d\lambda}\right)^\nu = 0 \tag{250}$$

- $D_\mu V_\rho = D_\mu(g_{\rho\nu}V^\nu) = g_{\rho\nu}D_\mu V^\nu$ i.e. la derivada covariante al subir o bajar indices.

Se puerde demostrar que si $c : (a,b) \to M^n$ es un camino suave que extremiza el tiempo propio (o la longitud de camino) $\tau = \int_c d\lambda f^{\frac{1}{2}}$, con $f = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$, entonces c es una geodésica de la conexón de Levi-Civita.

4.2.2 Componentes covariantes del tensor de curvatura.

El tensór de curvatura esta dado por:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\sigma\mu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} \tag{251}$$

Que para la conexión de Levi-Civita nos queda como:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\lambda}R^\lambda_{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial_\sigma g_{\nu\rho} + \partial_\nu\partial_\rho g_{\mu\sigma} - \partial_\mu\partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma g_{\mu\rho}\right) \tag{252}$$

$$+g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\Gamma^\beta_{\nu\rho} - \Gamma^\alpha_{\mu\rho}\Gamma^\beta_{\nu\sigma}\right)$$

Que es un tensór de cuarto rango, con n^4 componentes y que cumple las siguientes propiedades algebráicas.

1. $R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(\partial_\rho\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\sigma\partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho\partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma\partial_\nu g_{\rho\mu}\right) + g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{\rho\nu}\Gamma^\beta_{\sigma\mu} - \Gamma^\alpha_{\rho\mu}\gamma^\beta_{\sigma\nu})$, que nos indica simetria bajo el intercambio de los dos primeros indices con las segundos, i.e. $R_{AB} = R_{BA}$, con $A = \rho\sigma$ y $B = \mu\nu$

2. $R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\rho\sigma}$, $R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$, entonces $R_{\nu\mu\sigma\rho} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$ que puede resumirse como :
$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}$$

3. $R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0$

El número de componentes linealmente independientes de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ para m dimensiones es:
$N(R_{\mu\nu\rho\sigma}; m) = \frac{m^2(m^2-1)}{12}$

4.2.3 Tensór de Ricci para la conexión de Levi-Civita.

Se define como el 2-tensor covariante:

$$R_{\nu\sigma} := g^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv R^{\rho}_{\nu\rho\sigma} \tag{253}$$

$R_{\nu\sigma}$ es simétrico:
$R_{\sigma\nu} = g^{\mu\rho} R_{\mu\sigma\rho\nu} = g^{\mu\rho} R_{\rho\nu\mu\sigma} = g^{\rho\mu} R_{\rho\nu\mu\sigma} = R_{\nu\sigma}$ entonces:
$N(R_{\mu\nu}; m) = \frac{m(m+1)}{2}$
También se puede escribir:

$$R_{\nu\sigma} = g^{\mu\rho} g_{\mu\lambda} R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma} = \delta^{\rho}_{\lambda} R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma} = R^{\rho}_{\nu\rho\sigma} = \langle dx^{\rho}, \mathcal{R}(\partial_{\rho}, \partial_{\sigma}, \partial_{\nu}) \rangle \tag{254}$$

$$= \langle dx^{\rho}, \mathcal{R}(\partial_{\rho}, \partial_{\nu}, \partial_{\sigma}) \rangle$$

4.2.4 Escalar de Ricci para la conexión de Levi-Civita.

Se define como:

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \equiv R^{\mu}_{\mu} \tag{255}$$

$R \in C^{\infty}(U_{\alpha}; \mathbb{R})$
En espacio-tiempo vacio:

$$R = 0 \tag{256}$$

4.2.5 Tensor de Einstein.

El tensor de Einstein está definido por:

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{257}$$

El cual es simétrico y $G_{\mu\nu} \in C^{\infty}(U_{\alpha}; \mathbb{R})$ y se cumple que: $G_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow R_{\mu\nu} = 0$

4.2.6 Ecuaciones de Einstein para espacio-tiempo vacio y en presencia de materia.

a) Para el caso de espacio-tiempo vacio:

Para todas las cartas de la variedad i.e. para todos los marcos de referencia: $R_{\mu\nu} = 0 \Longrightarrow G_{\mu\nu} = 0$.
$N(R_{\mu\nu}) = N(g_{\mu\nu})$
Y $R_{\mu\nu} = 0$ no implica que $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$, lo cual se interpreta como que el espacio-tiempo vacio puede tener curvatura.

b) En presencia de materia:

Para todas las cartas de la variedad i.e. para todos los marcos de referencia:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Donde G es la constante gravitacional de Newton, c es la velocidad de la luz y $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía momento, el cual es simétrico i.e. $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ y se conserva de manera covariante:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

5 Invariancia de gauge ante el grupo de Lorentz.

Bajo transformaciones locales de Lorentz $h_a{}^b(x)$, las tetradas y los comarcos se transforman como se indica en la sección (1.17); como consecuencia, el elemento de volumen invariante de coordenadas $d^4x\, e$ es también invariante de gauge, de hecho:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} e_\mu{}^a(x) e_\nu{}^b(x) = \eta_{ab} e'_\mu{}^c h_c^{-1\,a} e'_\nu{}^d h_d^{-1\,b} = e'_\mu{}^c e'_\nu{}^d h_c^{-1\,a} \eta_{ab} h_d^{-1\,b} \\ = e'_\mu{}^c e'_\nu{}^d \eta_{cd} = g'_{\mu\nu}(x) \end{aligned} \tag{258}$$

que implica $e'(x) = e(x)$, y ya que $x'^{\,\mu} = x^\mu$, entonces $d^4x\, e = d^4x' e'$.

Por otro lado, la transformación de la conexión de espín está dada por:

$$\omega^c{}_a = h_c{}^d \omega'^{\,r}{}_d h_r^{-1\,c} + (dh_a{}^d) h_d^{-1\,c} \tag{259}$$

que no es tu tensor de Lorentz. Su curvatura en cambio, si es un tensor de Lorentz:

$$R^a{}_b = h_b{}^d h_c^{-1\,a} R'^{\,c}{}_d \tag{260}$$

El escalar de Ricci esta dado por:

$$\begin{aligned} R = \eta^{bd} e_a{}^\mu e_d{}^\nu (\partial_\mu \omega^a_{\nu b} - \partial_\nu \omega^a_{\mu b} + \omega^a_{\mu c}\omega^c_{\nu b} - \omega^a_{\nu c}\omega^c_{\mu b}) \\ \equiv \eta^{bd} e_a{}^\mu e_d{}^\nu ((\gamma) - (\delta) + (\alpha) - (\beta)) \end{aligned} \tag{261}$$

con $(\gamma) = \partial_\mu \omega^a_{\nu b}$, $(\delta) = \partial_\nu \omega^a_{\mu b}$, $(\alpha) = \omega^a_{\mu c}\omega^c_{\nu b}$, y $(\beta) = \omega^a_{\nu c}\omega^c_{\mu b}$.

Bajo la transformación:

$$\omega^a_{\mu c} = h_c{}^l \omega'^{\,r}_{\mu l} h_r^{-1\,a} + (\partial h_c{}^l) h_l^{-1\,a} \tag{262}$$

tenemos:

$(\alpha) = (a) + (b) + (c) + (d)$ con:

$$(a) = h_c{}^l \omega'^{\,r}_{\mu l} h_r^{-1\,a} h_b{}^g \omega'^{\,s}_{\nu g} h_s^{-1\,c},\ (b) = h_c{}^l \omega'^{\,r}_{\mu l} h_r^{-1\,a} (\partial_\nu h_b{}^g) h_g^{-1\,c} \tag{263}$$

$$(c) = h_b{}^g \omega'^{\,s}_{\nu g} h_s^{-1\,c} (\partial_\mu h_c{}^l) h_l^{-1\,a},\ (d) = (\partial_\mu h_c{}^l) h_l^{-1\,a} (\partial_\nu h_b{}^g) h_g^{-1\,c} \tag{264}$$

$(\beta) = (e) + (f) + (g) + (h)$ con:

$$(e) = h_c{}^g \omega'{}^s_{\nu g} h_s^{-1\,a} h_b{}^l \omega'{}^r_{\mu l} h_r^{-1\,c},\ (f) = h_c{}^g \omega'{}^s_{\nu g} h_s^{-1\,a} (\partial_\mu h_b{}^l) h_l^{-1\,c} \tag{265}$$

$$(g) = h_b{}^l \omega'{}^r_{\mu l} h_r^{-1\,c} (\partial_\nu h_c{}^g) h_g^{-1\,a},\ (h) = (\partial_\nu h_c{}^l) h_l^{-1\,a} (\partial_\mu h_b{}^g) h_g^{-1\,c} \tag{266}$$

$(\gamma) = [1] + [2] + [3] + [4]$ con:

$$[1] = h_b{}^n h_t^{-1\,a} (\partial_\mu \omega'{}^t_{\nu\mu}),\ [2] = \omega'{}^t_{\nu n} \partial_\mu (h_b{}^n h_t^{-1\,a}),\ [3] = (\partial_\mu \partial_\nu h_b{}^n) h_n^{-1\,a}, \quad [4] = (\partial_\nu h_b{}^n)(\partial_\mu h_n^{-1\,a}) \tag{267}$$

y $(\delta) = [5] + [6] + [7] + [8]$ con:

$$[5] = h_b{}^l h_s^{-1\,a} (\partial_\nu \omega'{}^s_{\mu l}),\ [6] = \omega'{}^s_{\mu l} \partial_\nu (h_b{}^l h_s^{-1\,a}),\ [7] = (\partial_\nu \partial_\mu h_b{}^l) h_l^{-1\,a}, \quad [8] = (\partial_\mu h_b{}^l)(\partial_\nu h_l^{-1\,a}) \tag{268}$$

Ahora bien:

$$[3] - [7] = (\partial_\mu \partial_\nu h_b{}^n) h_n^{-1\,a} - (\partial_\nu \partial_\mu h_b{}^l) h_l^{-1\,a} = 0 \tag{269}$$

$$(b) + (c) = \omega'{}^r_{\mu l} h_r^{-1\,a} \partial_\nu h_b{}^l - \omega'{}^s_{\nu g} h_b{}^g \partial_\mu h_s^{-1\,a} \tag{270}$$

$$(f) + (g) = \omega'{}^s_{\nu g} h_s^{-1\,a} \partial_\mu h_b{}^g - \omega'{}^r_{\mu l} h_b{}^l \partial_\nu h_r^{-1\,a} \tag{271}$$

entonces:

$$((b) + (c)) - ((f) + (g)) = \omega'{}^r_{\mu l} \partial_\nu (h_r^{-1\,a} h_b{}^l) - \omega'{}^s_{\nu g} \partial_\mu (h_s^{-1\,a} h_b{}^g) \tag{272}$$

también:

$$[2] - [6] = \omega'{}^s_{\nu g} \partial_\mu (h_b{}^g h_s^{-1\,a}) - \omega'{}^r_{\mu l} \partial_\nu (h_b{}^l h_r^{-1\,a}) \tag{273}$$

entonces:

$$((b) + (c)) - ((f) + (g)) + ([2] - [6]) = 0 \tag{274}$$

también:

$$[4] - [8] = (\partial_\nu h_b{}^l)(\partial_\mu h_l^{-1\,a}) - (\partial_\mu h_b{}^l)(\partial_\nu h_l^{-1\,a}) \tag{275}$$

y

$$(d) - (h) = (\partial_h h_l^{-1\,a})(\partial_\mu h_b{}^l) - (\partial_\mu h_l^{-1\,a})(\partial_\nu h_b{}^l) \tag{276}$$

entonces:

$$([4]-[8])+((d)-(h))=0 \tag{277}$$

Finalmente:

$$[1]-[5]+(a)-(e)=h_b{}^l h_s^{-1\,a}(\partial_\mu \omega'{}^s_{\ \nu l}-\partial_\nu \omega'{}^s_{\ \mu l}+\omega'{}^s_{\ \mu r}\omega'{}^r_{\ \nu l}-\omega'{}^s_{\ \nu r}\omega'{}^r_{\ \mu l}) \tag{278}$$

Por lo tanto:

$$R=\eta^{bd}e_a{}^\mu e_d{}^\nu h_b{}^l h_s^{-1\,a}(\partial_\mu \omega'{}^s_{\ \nu l}-\partial_\nu \omega'{}^s_{\ \mu l}+\omega'{}^s_{\ \mu r}\omega'{}^r_{\ \nu l}-\omega'{}^s_{\ \nu r}\omega'{}^r_{\ \mu l}) \tag{279}$$

$$=\eta^{lt}e'_s{}^\mu e'_t{}^\nu(\partial_\mu \omega'{}^s_{\ \nu l}-\partial_\nu \omega'{}^s_{\ \mu l}+\omega'{}^s_{\ \mu r}\omega'{}^r_{\ \nu l}-\omega'{}^s_{\ \nu r}\omega'{}^r_{\ \mu l}=R' \tag{280}$$

La parte de la acción que corresponde al acoplamiento de la gravedad con el campo de Dirac, S_{D-E} es automáticamente localmente invariante de Lorentz, ya que está escrito en términos de derivadas covariantes $D_a\psi$ y $\bar{D}_a\bar{\psi}$.

6 Invariancia de gauge ante el grupo de Poincaré.

6.1 Análisis global.

El grupo afín $GA_4(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} g & \xi \\ 0 & 1\end{pmatrix},\ g\in GL_4(\mathbb{R}),\ \xi\in\mathbb{R}^4\right\}$ actua en el espacio afín $\mathbb{A}^4=\left\{\begin{pmatrix}\lambda \\ 1\end{pmatrix},\ \lambda\in\mathbb{R}^4\right\}$ en la forma:

$$GA_4(\mathbb{R})\times\mathbb{A}^4\to\mathbb{A}^4,\ \left(\begin{pmatrix} g & \xi \\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda \\ 1\end{pmatrix}\right)\to\begin{pmatrix} g\lambda+\xi \\ 1\end{pmatrix} \tag{281}$$

Entonces, uno tiene el siguiente diagrama de breves secuencias exactas (b.s.e.'s) de grupos y homeomorfismos de grupos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\mu} & GA_4(\mathbb{R}) & \overset{\nu}{\underset{\rho}{\rightleftarrows}} & Gl_4(\mathbb{R}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & Id\uparrow & & \uparrow\iota & & \uparrow\iota & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\mu|} & \mathcal{P}_4 & \overset{\nu|}{\underset{\rho|}{\rightleftarrows}} & \mathcal{L}_4 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

con $\mu(\xi)=\begin{pmatrix} I_4 & \xi \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $\nu\left(\begin{pmatrix} g & \lambda \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=g$, μ es una función suprayectiva 1-1 y $ker(\nu)=Im(\mu)=\left\{\begin{pmatrix} I_4 & \xi \\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \xi\in\mathbb{R}^4\right\}$.

ν y μ también están restringidas respectivamente a la componente conexa de los grupos de Lorentz $\mathcal{L}_4$ y Poincaré $\mathcal{P}_4$.

Ambas b.s.e.'s se dividen, i.e. existe el homeomorfismo de grupos $\rho : GL_4(\mathbb{R}) \to GA_4(\mathbb{R})$, $g \to \rho(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y su restricción $\rho|$ a $\mathcal{L}_4$, tal que $\nu \circ \rho = Id_{GL_4(\mathbb{R})}$ y $\nu| \circ \rho| = Id_{\mathcal{L}_4}$. Asi que

$$GA_4(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4 \odot GL_4(\mathbb{R}),\ \mathcal{P}_4 = \mathbb{R}^4 \odot \mathcal{L}_4 \tag{282}$$

con ley de composición:

$$(\lambda', g')(\lambda, g) = (\lambda' + g'\lambda, g'g) \tag{283}$$

Los b.s.e.'s de arriba pasan a ser los de las correspondientes álgebras de Lie:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & ga_4(\mathbb{R}) & \substack{\xrightarrow{\tilde{\nu}} \\ \xleftarrow{\tilde{\rho}}} & gl_4(\mathbb{R}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & Id\uparrow & & \uparrow\iota & & \uparrow\iota & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\tilde{\mu}|} & p_4 & \substack{\xrightarrow{\tilde{\nu}|} \\ \xleftarrow{\tilde{\rho}|}} & l_4 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

con $gl_4(\mathbb{R}) = \mathbb{R}(4)$, $ga_4(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4 \odot gl_4(\mathbb{R})$ con producto de Lie:

$$(\lambda', R')(\lambda, R) = (R'\lambda - R\lambda', [R', R]) \tag{284}$$

donde $[R', R]$ es el producto de Lie en $gl_4(\mathbb{R})$ y $[\lambda', \lambda] = 0$ en $\mathbb{R}^4$, $\bar{\mu}(\xi) = (\xi, 0)$, $\bar{\nu}(\xi, R) = R$, y $\bar{\rho}(R) = (0, R)$. $\bar{\mu}, \bar{\nu}\, y\, \bar{\rho}$ (y sus correspondientes restricciones $\bar{\mu}|$, $\bar{\nu}|$ y $\bar{\rho}|$ son homeomorfismos de álgebras de Lie, con $\bar{\nu} \circ \bar{\rho} = Id_{gl_4(\mathbb{R})}$ y $\bar{\nu}| \circ \bar{\rho} = Id_{l_4}$. Los b.s.e.'s se dividen solamente a nivel de espacios vectoriales i.e. si $(\lambda, R) \in ga_4(\mathbb{R})$, entonces $(\lambda, R) = \bar{\mu}(\lambda) + \bar{\rho}(R)$, pero $(\lambda, R) \neq \bar{\mu}(\lambda)\bar{\rho}(R)$.

Si $\mathcal{F}_{M^4} : GL_4 \to FM^4 \xrightarrow{\pi F} M^4$ y $\mathcal{A}_{M^4} : GA_4 \to AM^4 \xrightarrow{\pi A} M^4$ son respectivamente los haces de marcos lineales y afines sobre M^4, donde $FM^4 = \cup_{x \in M^4}(\{x\} \times (FM^4)_x)$ donde $(FM^4)_x$ es el conjunto de bases ordenadas $r_x = (v_{1_x}, \ldots, v_{4_x})$ de T_xM^4, y $AM^4 = \cup_{x \in M^4}(\{x\} \times AM^4_x)$.
Con $AM^4_x = \left\{(v_x, r_x)\,,\, v_x \in A_xM^4,\, r_x \in (FM^4)_x\right\}$ donde A_xM^4 es el espacio tangente en x considerado como espacio afín, entonces se tiene el sguiente homeomorfismo de haces:

$$\begin{array}{ccc}
AM^4 \times GA_4 & \substack{\xrightarrow{\beta \times \nu} \\ \xleftarrow{\gamma \times \rho}} & FM^4 \times GL_4 \\
\psi_A \downarrow & & \downarrow \psi_F \\
AM^4 & \substack{\xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\gamma}} & FM^4 \\
\pi_A \downarrow & & \downarrow \pi_F \\
M^4 & \xrightarrow{Id} & M^4
\end{array}$$

donde:
$\beta(x,(v_x,r_x)) = (x,r_x)$, $\gamma(x,r_x) = (x,(0_x,r_x))$, $0 \in T_xM^n$, $\psi_F((x,r_x),g) = (x,r_xg)$, y:

$$\psi_A((x,(v_x,r_x)),(\xi,g)) = (x,(v_x + r_x\xi, r_xg)) \tag{285}$$

Una conexión afín general (c.a.g.) en M^4 es una conexión en el haz de marcos afines $\mathcal{A}_{M^4}$; sea ω_A la 1-forma de esta conexión, entonces $\omega_A \in \Gamma(T^*AM^4 \otimes ga_4)$. De la suavidad de γ, el pull-back $\gamma^*(\omega_A)$ es una 1-forma en FM^n valuada en ga_4:

$$\{\omega_A\}_{c.a.g.} \longleftrightarrow \{(\omega_F,\varphi)\} \tag{286}$$

ω_A es una conexión afín (c.a.) en M^4 si φ es la forma (canónica) de soldadura θ_{FM^4} en FM^4. Entonces, si ω_A es una c.a. en AM^4,

$$\gamma^*(\omega_A) = \theta_{FM^4} \odot \omega_F \tag{287}$$

Hay una correspondencia 1-1

$$\{\omega_A\}_{c.a.} \longleftrightarrow \{\omega_F\} \tag{288}$$

ya que θ_{FM^4} es fija. También, si Ω_A es la curvatura de ω_A, entonces:

$$\gamma^*(\Omega_A) = D^{\omega_F}\theta \odot \Omega_F = T_F \odot \Omega_F \tag{289}$$

ya que $D^{\omega_F}\theta_{FM^4} = T_F$: la torsión de la conexión ω_F en FM^4

Se tiene ahora el siguiente diagrama de homeomorfismos de haces:

$$\begin{array}{ccccccc}
AM^4 \times GA_4 & \stackrel{\iota\times\iota}{\longleftarrow} & A^PM^4 \times \mathcal{P}_4 & \begin{array}{c}\stackrel{\beta|\times\nu|}{\longrightarrow}\\ \stackrel{\gamma|\times\rho|}{\longleftarrow}\end{array} & F^LM^4 \times \mathcal{L}_4 & \stackrel{\iota\times\iota}{\longrightarrow} & FM^4 \times GL_4 \\
\psi_A \downarrow & & \psi_A| \downarrow & & \downarrow \psi_F| & & \downarrow \psi_F \\
AM^4 & \stackrel{\iota}{\longleftarrow} & A^PM^4 & \begin{array}{c}\stackrel{\beta}{\longrightarrow}\\ \stackrel{\gamma}{\longleftarrow}\end{array} & F^LM^4 & \stackrel{\iota}{\longrightarrow} & FM^4 \\
\pi_A \downarrow & & \pi_A| \downarrow & & \downarrow \pi_F| & & \downarrow \pi_F \\
M^4 & \stackrel{Id}{\longrightarrow} & M^4 & \stackrel{Id}{\longrightarrow} & M^4 & \stackrel{Id}{\longrightarrow} & M^4
\end{array}$$

donde $\pi_A| = \pi_P$, $\pi_F| = \pi_L$, $\psi_A| = \psi_P$ y $\psi_F| = \psi_L$, donde ψ_P y ψ_L son las acciones en los haces de Poincaré y Lorentz respectivamente.

Los hechos de que A^PM^4 sea un subhaz de AM^4 y F^LM^4 sea un subhaz de FM^4, con grupos de estructura y álgebras de Lie los correspondientes subgrupos y sub-álgebras de Lie, y la existencia de las restricciones $\beta| : A^PM^4 \to F^LM^4$ y $\gamma| : F^LM^4 \to A^PM^4$, permite obtener conclusiones similares para las relaciones entre conexiones afines en el haz de Poincaré y conexiones lineales en el haz de Lorentz:

Hay una correspondencia 1-1 entre conexiones afines de Poincaré ω_P en $F^P M^4$ y conexiones de Lorentz en $F^L M^4$:

$$\{\omega_P\} \longleftrightarrow \{\omega_L\} \tag{290}$$

con

$$\gamma|^*(\omega_P) = \theta_L \odot \omega_L \tag{291}$$

donde $\theta_L = \theta_{FM^4}|_{F^L M^4}$ es la forma canónica en $F^L M^4$. También:

$$\gamma|^*(\Omega_P) = D^{\omega L}\theta_L \odot \Omega_L = T_L \odot \Omega_L \tag{292}$$

Así que existe una correspondencia 1-1 entre curvaturas de conexiones afines en $F^P M^4$ y parejas de torsión y curvatura en $F^L M^4$:

$$\{\Omega_P\} \longleftrightarrow \{(T_L, \Omega_L)\} \tag{293}$$

Si se considera solamente a la gravedad gobernada por la acción de Einstein-Hilbert, $T_L = 0$

6.2 Análisis local: invariancia de las acciones S_G y S_{D-E}.

Para probar explícitamente la invariancia de gauge ante el grupo de Poincaré de las teorias RG y E-C, se deben considerar como transformaciones de gauge tanto a la parte de Lorentz, como la parte traslacional. Esto ùltimo debe hacerse utilizando el haz de marcos de Poincaré $\mathcal{F}^P_{M^4}$.

Una transformación de gauge (automorfismo vertical en un haz principal arbitrario G, $\xi : G \to P \xrightarrow{\pi} B$) es un difeomorfismo $\alpha : P \longrightarrow P$ tal que:

i) $\alpha(pg) = \alpha(p)g$

ii) $\pi(\alpha(g)) = \pi(p)$, para todo $p \in P$ and $g \in G$.

Por lo tanto, de ii), $\alpha(p) = pk$ para algun $k \in G$. Entonces hay una biyección $Aut_{vert}(P) \xrightarrow{\phi} \Gamma_{eq}(P, G)$, $\Phi(\alpha) = \gamma_\alpha$ con $\alpha(p) = p\gamma_\alpha(p)$ y $\gamma_a(pg) = g^{-1}\gamma_\alpha(p)g$; para la inversa, $\gamma \longrightarrow \alpha_\gamma$ con $\alpha_\gamma(p) = p\gamma(p)$.

La acción de $\mathcal{P}_4$ sobre $A^P M^4$ esta dada por:

$$\psi_P : A^P M^4 \times \mathcal{P}_4 \to A^P M^4,\ \psi_P((x, (v_x, r_x)), (\xi, h)) \equiv (x, (v_x, r_x))(\xi, h) \tag{294}$$

$$= (x, (v_x + r_x\xi, r_x h))$$

$$= (x, (v'_x, r'_x) \tag{295}$$

donde $r_x = (e_{ax})$, $a = 1, 2, 3, 4$, es un haz de Lorentz, $h \in \mathcal{L}_4$, y $\xi \in \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^{1,3}$ es una traslación de gauge de Poincaré. Para uns traslación pura , $h = I_L$ i.e. $h^b_a = \delta^b_a$ por lo tanto

$$(x, (v_x, r_x))(\xi, I_L) = (x, (v_x + r_x\xi, r_x I_L)) = (x, (v_x + r_x\xi, r_x)) \tag{296}$$

i.e.

$$r_x' = r_x \tag{297}$$

Por lo tanto $e_{ax}' = e_{ax}$, $a = 1, 2, 3, 4$, por lo que debido a la definición de $\omega^a_{\mu b}$ $\Longrightarrow$

$$\omega^a_{\mu b}{}' = \omega^a_{\mu b} \tag{298}$$

Ya que $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = (\Gamma_{LC})^\mu_{\nu\rho} + K^\mu_{\nu\rho}$ no cambia (en el caso de gravedad pura $K^\mu_{\nu\rho} = 0$). Por lo que el escalar coordenado de Ricci R es también un escalar de gauge, por lo tanto S_G es invariante.

Por la misma razon que en el caso de la invariancia de Lorentz, S_{D-E} es también invariante bajo traslaciones: en un G-haz arbitrario P con conexión ω, una sección s de un haz asocioado y su derivada covariante $D^\omega s$ se transforman de la misma manera.

El haz de Poincaré extiende el grupo de simetria de RG y de la teoria E-C a la suma semidirecta:

$$G_{GR/E-C} = \mathcal{P}_4 \odot \mathcal{D} \tag{299}$$

con ley de composición:

$$((\xi', h'), g')((\xi, h), g) = ((\xi', h')(g'(\xi, h)g'^{-1}), g'g) \qquad (55a)$$

La acción izquierda de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{P}_4$ está dada por el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A^P M^4 & \xrightarrow{(\xi,h)} & A^P M^4 \\ g\downarrow & & \downarrow g \\ A^P M^4 & \xrightarrow{(\xi',h')} & A^P M^4 \end{array}$$

con:

$$g: \, A^P M^4 \to A^P M^4 \tag{300}$$

localmente:

$$(x, (v^\mu_x \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^\mu}|_x, (e_{ax}{}^\nu \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^\nu}|_x))) \mapsto (x, (v^\mu_x{}' \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^\mu{}'}|_x, (e_{ax}{}^\nu{}' \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^\nu{}'}))) \tag{301}$$

donde $v^\mu_x{}' = \frac{\partial \mathrm{x}^\mu}{\partial \mathrm{x}^\alpha}|_x v^\alpha_x$ y $e_{ax}{}^\nu{}' = \frac{\partial x^\nu{}'}{\partial \mathrm{x}^\beta}|_x e_{ax}{}^\beta$

7 Discusión.

Para poder pensar en una teoría de unificación que incluya a la Relatividad General o a la teoría E-C, es necesario por un lado poder expresarlas como teorias de campo y por otro lado es necesario que sean teorias invariantes de norma, como ya se ha visto esta última condición se cumple y lo que se ha escapado a los físicos es la representación de estas teorias como teorias de campo, comunmente se ha dicho que los comarcos $e^a = e_\mu{}^a dx^\mu$ son los potenciales gravitacionales de traslación (Hehl, 1985; Hehl et al, 1976; Hammond, 2002). Esto no es estrictamente cierto ya que estos campos no son potenciales de gauge, sino tensores, tanto en sus índices de Lorentz tanto en los de mundo: ver (Hayahsi, 1977). Los potenciales traslacionales de gauge son los campos $B_\mu{}^a$ de 1-formas definidos (Hayashi and Nakano, 1967; Aldrovandi and Pereira, 2007) como:

$$B_\mu{}^a = e_\mu{}^\mu - \frac{\partial v_x^a}{\partial \mathrm{x}^\mu} \text{ ó } B^a = e^a - dv_x^a \tag{302}$$

donde $v_x = \sum_{a=0}^{3} v_x^a e_{ax} \in A_x M^4$; los $v_x^a{}' s$ son considerados como las coordenadas de el espacio tangente en x. Un càlculo simple conduce a las siguientes propiedades de transformación:

Lorentz internas:

$$B_\mu{}^{a\,\prime} = h_a{}^b B_\mu{}^b - \partial_\mu(h_b{}^a) v_x^b \text{ ó } B'{}^a = h_b{}^b B^b - (dh_b{}^a) v_x^b \tag{303}$$

Transformación de coordenadas generales:

$$B'_\mu{}^a = \frac{\partial x^\nu}{\partial \mathrm{x}'{}^\mu} B_\nu{}^a \tag{304}$$

Traslaciones internas:

$$B'^a_\mu = B_\mu{}^a - \partial_\mu \xi^a \text{ or } B'{}^a = B^a - d\xi^a \tag{305}$$

Entonces $B = B_\mu dx^\mu = B_\mu{}^a dx^\mu b_a$, donde b_a, $a = 0, 1, 2, 3$, es la base canónica de $\mathbb{R}^4$, es la 1-forma de conexión correspondiente a las traslaciones.

En términos de los campos $B_\mu{}^a$ y de la conexión de espín, el escalar de Ricci esta dado por:

$$R = (\frac{\partial v_x^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial v_x^b}{\partial \mathrm{x}^\nu} + \frac{\partial v_x^a}{\partial \mathrm{x}^\mu} B_\nu{}^b + \frac{\partial v_x^b}{\partial x^\nu} B_\mu{}^a + B_\mu{}^a B_\nu{}^b)(\partial^\mu \omega^\nu_{ab} - \partial \omega^\mu_{ab} + \omega^\mu_{ac}\omega_b^{\nu c} - \omega^\nu_{ac}\omega_b^{\mu c}) \tag{306}$$

Si se intenta usar esta densidad lagrangiana como describiendo una interacción $(B_\mu{}^a, \omega^\nu_{bc})$ (o $(e_\mu{}^a, \omega^\nu_{bc})$) (Randono, 2010), se enfrenta inmediatamente con la dificultad de que $B_\mu{}^a$ (ó $e_\mu{}^a$) no tiene una parte libre (parte cinemática), ya que todas sus potencias están multiplicadas por $\omega' s$ o $\partial\omega$. Por lo que una interpretación en términos de interacciones de campos requiere de algun cambio de perspectiva o de encontrar algun error en los razonamientos.

Referencias

[1] Carroll, S. (2004). *Spacetime and Geometry. An introduction to General Relativity*, *Addison Wesley*, *San Fr*

[2] Carroll, S. (1997). *Lecture notes on General Relativity* arXiv:gr-qc/9712019.

[3] Feynman, R. P., Morinigo, F. B., and Wagner, W. G. (2003). *Feynman lectures on Gravitation*, Westview Press, Boulder, Colorado.

[4] Gronwald, F. (1997). *Metric affine gauge theory of gravity. I. Fundamental structure and field equations*, International Journal of Modern Physics D6, 263-303.

[5] Gronwald, F. (1998). *Anote on gauge covariant translations in the gauge approach to gravity.* Acta Physica Polonica B 29, 1121-1129.

[6] Hammond, R. T. (2002). *Torsion gravity*, Reports on Progress in Physics 65, 599-649.

[7] Hayashi, K. (1977). *The gauge theory of the translation group and underlying geometry.* Physics Letters 69B, 441-444.

[8] Hayashi, K. and Nakano, T. (1967). *Extended Translation Invariance and Associated Gauge Fields*, Progress of Theoretical Physics 38, 491-507.

[9] Hehl, F. W., von der Heyde, P., Kerlick, G. D., and Nester, J. M. (1976). *General relativity with spin and torsion : Foundations and prospects*, Review of Modern Physics 48, 393-416.

[10] Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1963). *Foundations of Differential Geometry*, Volume I, J. Wiley, New York.

[11] O'Raifearteigh, L. (1997). *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton University Press, Princeton.

[12] Randono, A. (2010). *Gauge Gravity : a forward looking introduction*, arXiv: gr-qc/1010.5822.

[13] Smrz, P. K. (1977). *Translations as Gauge Transformations*, Journal of Australian Mathematical Society 20, 38-45.

[14] Socolovsky, M. (2011). *Fiber Bundles, Connections, General Relativity, and the Einstein − Cartan Theory* Advances in Applied Clifford Algebras (por ser publicado).