



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FORMULACIÓN HAMILTONIANA DE LA  
RELATIVIDAD GENERAL EN  
(2+1)-DIMENSIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:  
CÉSAR ALBERTO AGUILLÓN BARRERA

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. JUAN MANUEL GARCÍA ISLAS



2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Aguillón

Barrera

César Alberto

62 59 06 79

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

099019154

2. Datos del tutor

Dr

Juan Manuel

García

Islas

3. Datos del sinodal 1

Dr

Hernando

Quevedo

Cubillos

4. Datos del sinodal 2

Dr

Jerónimo Alonso

Cortez

Quezada

5. Datos del sinodal 3

Dr

Ricardo

Berlanga

Zubiaga

6. Datos del sinodal 4

Dr

Óscar Alfredo

Palmas

Velasco

7. Datos del trabajo escrito

Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General en  $(2 + 1)$ -dimensiones

190p

2013



---

***A mi madre María Isabel.***

*Por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada, por su amor.*

***A mis abuelos.***

*María Guadalupe (QEPD) y Ascensión (QEPD), por quererme y apoyarme siempre, esto también se lo debo a ustedes.*

***A Nancy.***

*La mujer a la que evoco en los momentos de descreimiento, que son los más. Sin ella, nunca habría tenido fuerzas para terminar este trabajo. Y aunque habría merecido algo mejor, aun así, con todas sus imperfecciones, a ella le pertenece.*

***A mis hermanas.***

*Brigitte Isabel y Paulette Monserrat, por estar conmigo y apoyarme siempre, las quiero mucho.*



# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Elementos de Geometría Diferencial</b>	<b>15</b>
2.1. <i>Variedades diferenciables</i>	15
2.2. <i>Vectores tangentes</i>	20
2.3. <i>Álgebra tensorial</i>	26
2.4. <i>Campos tensoriales y conmutadores</i>	31
2.5. <i>Conexiones lineales</i>	36
2.6. <i>Métrica Pseudo-Riemanniana</i>	39
2.7. <i>Curvatura y torsión</i>	46
<b>3. Geometría Extrínseca</b>	<b>57</b>
3.1. <i>Geometría en variedades Lorentzianas</i>	57
3.2. <i>Encajes</i>	65
3.3. <i>Curvatura extrínseca</i>	72
3.4. <i>La descomposición ortogonal</i>	80
3.5. <i>Ecuación de Gauss</i>	87
3.6. <i>Ecuaciones de Gauss-Codazzi</i>	91
<b>4. Geometría de Foliaciones</b>	<b>101</b>
4.1. <i>Foliaciones</i>	101
4.2. <i>Evolución de la 2-métrica y del proyector tangente</i>	106
4.3. <i>El escalar de curvatura</i>	109
<b>5. El Formalismo Canónico de la Relatividad General</b>	<b>115</b>
5.1. <i>Descomposición 2+1 de las ecuaciones de Einstein</i>	116
5.2. <i>Coordenadas adaptadas a la foliación</i>	119
5.3. <i>Forma 2+1 de la acción de Einstein-Hilbert</i>	130
5.4. <i>Gravitación canónica</i>	136
5.5. <i>Aplicaciones del formalismo canónico</i>	154

<b>A. La Derivada de Lie</b>	<b>167</b>
A.1. <i>Derivada de Lie de campos tensoriales</i> . . . . .	167
<b>A. Teorías Parametrizadas</b>	<b>173</b>
A.1. <i>Mecánica parametrizada</i> . . . . .	173
A.2. <i>Mecánica canónica</i> . . . . .	175
<b>Bibliografía</b>	<b>177</b>



# Índice de figuras

---

2.1.1. <i>Dos cartas que se traslapan suavemente. Aquí <math>U = \text{Dom}\varphi</math> y <math>V = \text{Dom}\psi</math></i> . . . . .	18
2.2.1. <i>Vector tangente</i> . . . . .	26
2.5.1. <i>Interpretación geométrica de la derivada covariante</i> . . . . .	36
3.2.1. <i>Foliación por una familia uni-paramétrica de encajes</i> . . . . .	67
3.2.2. <i>El push-forward</i> . . . . .	68
3.3.1. <i>Mapeo de Weingarten</i> . . . . .	74
3.4.1. <i>La geometría de la descomposición ortogonal</i> . . . . .	81
3.5.1. <i>Interpretación geométrica de la ecuación de Gauss</i> . . . . .	89
4.1.1. <i>Foliación del espacio-tiempo <math>M</math></i> . . . . .	102
4.1.2. <i>Vector de evolución normal</i> . . . . .	104
5.2.1. <i>Coordenadas adaptadas, función lapse y vector shift</i> . . . . .	120
5.2.2. <i>Teorema de Pitágoras Lorentziano.</i> . . . . .	123
A.1.1. <i>Interpretación geométrica de <math>h</math></i> . . . . .	168
A.1.2. <i>Derivada de Lie de un campo vectorial</i> . . . . .	170



---

# *Capítulo 1*

## *Introducción*

---

En este último siglo el panorama de la Física ha sufrido un profundo cambio, debido fundamentalmente a dos teorías innovadoras, la Relatividad Especial (RE) y la Mecánica Cuántica (MC). Ambas teorías presentan una visión de la realidad diferente a lo establecido hasta entonces y en cada caso se plantean retos intelectuales muy atractivos. Por lo tanto, no es de extrañar que estas teorías hayan acaparado la atención de los físicos durante gran parte del siglo pasado y aun en el siglo actual.

Por un lado la MC gobierna los fenómenos que ocurren a escala atómica. Se ha trabajado mucho en este campo y está respaldada por grandes éxitos experimentales. En el otro extremo tenemos la Relatividad General (RG), que gobierna los fenómenos a escalas macroscópicas y superiores, es una teoría relativista de la interacción gravitacional. Desde un punto de vista práctico en la mayoría de los casos podemos seguir utilizando la Mecánica Newtoniana, las correcciones relativistas sólo son necesarias en algunos cálculos que requieren mucha precisión. Sin embargo, la RG también es una teoría del espacio-tiempo y en este último aspecto difiere radicalmente de la teoría Newtoniana de la gravitación. Al contrario que la MC la RG está avalada experimentalmente tan sólo por unas pocas pruebas.

La RG nos muestra la geometría del mundo en el que vivimos como una propiedad física, íntimamente ligada a la materia. Siempre hemos trabajado con una geometría continua, y quizá ahora haya llegado el momento de cuestionar la validez de este postulado. Es posible que al mirar en una escala suficientemente pequeña descubramos que los objetos geométricos son discretos y que la visión continua de la geometría tan solo es una aproximación. En este caso encontraríamos que cantidades geométricas como áreas, volúmenes, longitudes, etc. tendrían un espectro discreto, es decir, la geometría estaría cuantizada. Esta visión puede no ser más sorprendente que lo que ocurre en un átomo de hidrógeno, donde las cantidades físicas como la energía, el

momento angular, etc. también están cuantizadas.

Si tomamos las constantes fundamentales de ambas teorías podemos obtener una constante de longitud, la longitud de Planck

$$l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} = 1,6 \times 10^{-35} m$$

donde  $\hbar = 1,1 \times 10^{-34} J \cdot s$  es la constante reducida de Planck,  $G = 6,7 \times 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$  es la constante de Newton y  $c = 3.00 \times 10^8 m \cdot s^{-1}$  es la velocidad de la luz. Como ocurre en otros casos, la presencia de una escala característica indica un comportamiento diferente en las regiones por encima y por debajo de esta escala.<sup>1</sup> Entonces, para distancias del orden de la longitud de Planck o inferiores, los aspectos discretos de la geometría jugarían un papel importante y es posible que aparezcan nuevos fenómenos físicos, seguramente algunos inesperados porque por ahora no tenemos resultados experimentales en este campo.

La gravedad es una de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza. Una característica importante que la distingue de las demás interacciones es que afecta a toda forma de materia y energía de la naturaleza. Más aún, actúa con la misma intensidad sobre todas las formas de materia y energía. Incluso la luz siente su efecto: se ha observado que su trayectoria es desviada en los alrededores de un cuerpo muy masivo. Nada escapa a su alcance y, a pesar de ser la interacción fundamental más débil de la naturaleza, es la fuerza dominante a grandes distancias.

La RG es hasta el momento la teoría que mejor explica el comportamiento de los cuerpos bajo la interacción gravitacional, pues ella recoge esa propiedad del campo gravitacional: todos los cuerpos caen del mismo modo bajo la acción de la gravedad independientemente de su naturaleza. Localmente el campo gravitacional es indistinguible de un sistema con aceleración constante, lo cual lleva al Principio de Equivalencia: “Las leyes de la Física son independientes del estado de movimiento del observador” [1]. Esto condujo a A. Einstein a la idea de que el campo gravitacional puede ser descrito geométricamente a través de la estructura del espacio-tiempo. Nuestra comprensión de la gravedad identifica las ecuaciones del campo gravitacional con las ecua-

---

<sup>1</sup>Otra situación en la que se espera que los efectos cuánticos sean importantes es cuando la curvatura escalar de Ricci sea del orden del inverso del cuadrado de la longitud de Planck:

$$R \approx l_p^{-2} \approx 3,828 \cdot 10^{69} m^{-2}$$

ciones geométricas para el espacio y el tiempo. El Principio de Equivalencia implica que dichas leyes deben ser descritas de manera covariante, es decir, independiente del sistema de coordenadas. Es claro entonces que la formulación covariante es natural y permite expresar a la interacción de la materia con la geometría de manera elegante:

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}$$

La forma covariante de las ecuaciones de Einstein tiene una característica importante, es que algunas de estas ecuaciones representan constricciones (o ligaduras) en las variables dinámicas, estas se relacionan con las identidades de Bianchi

$$\nabla_{\nu} G^{\mu\nu} = 0$$

que expresan que las constricciones se preservan cuando se satisfacen las ecuaciones dinámicas.

Bajo ciertas condiciones generales acerca de la materia puede demostrarse la existencia de singularidades en el tiempo, o en el pasado o en el futuro. Esto está demostrado con rigor matemático en los famosos teoremas de singularidad de R. Penrose y S.W. Hawking. Observaciones como las reflejadas por el fondo cósmico de microondas indican que el Universo tiene la suficiente materia como para haber producido una singularidad, de acuerdo con los teoremas, en el pasado que podría interpretarse como el comienzo del mismo. El rango de energías de los procesos físicos que tuvieron lugar en los momentos cercanos posteriores al comienzo del Universo están por encima del rango de validez de la teoría clásica de la Relatividad General. Normalmente cuando se llegan a energías tan elevadas la intuición física induce a considerar la teoría cuántica de la interacción. Esto ocurre en todas las interacciones conocidas. Por eso el Universo en sus primeros momentos debería ser descrito a través de una teoría cuántica de la gravedad donde la Relatividad General pueda aparecer como el límite clásico de esta teoría. Los intentos de describir la gravedad mediante una teoría cuántica han sido numerosos. Los primeros tuvieron lugar en los años 30, cuando los postulados y objetivos de la Mecánica Cuántica estaban muy recientes.

La idea más difundida entre la comunidad científica es que todas las interacciones fundamentales deben ser descritas por una teoría cuántica de campos. Hoy en día tres de las cuatro interacciones fundamentales (interacción electromagnética, interacción fuerte e interacción débil) vienen descritas por un modelo cuántico que las engloba. Este modelo se llama modelo estándar y fue presentado por S.L. Glashow, S. Weinberg y A. Salam a principios de

1970. La teoría unificada de la interacción electromagnética y la interacción débil fue descrita por S. Weinberg y A. Salam; la interacción fuerte descrita por la teoría de la Quantum Chromodynamics (Cromodinámica Cuántica) se debe a H. Georgi y S.L. Glashow. La única interacción que se resiste a ser descrita en una teoría unificada completa es la gravedad.

Los primeros intentos de construir una teoría cuántica para el campo gravitacional fueron presentados entre 1930 y 1932 en dos artículos debidos a L. Rosenfeld. Curiosamente son anteriores a los primeros intentos de cuantizar el campo electromagnético debidos también a L. Rosenfeld junto con N. Bohr.

Por otro lado, en 1932 E. Schrödinger estudió los efectos de la gravedad sobre campos cuánticos. Fue el primer intento de hacer una teoría semiclásica de la gravedad como ya se conocía, a falta de una teoría cuántica completa, para la interacción electromagnética. El objeto de estudio en un modelo semiclásico es el efecto que produce un campo externo clásico, que no será objeto de cuantización (electromagnetismo o gravedad), sobre otros campos cuánticos de materia como por ejemplo campos escalares (de espín cero) o campos de Dirac (de espín semientero). Además W. Pauli y M.E. Fierz establecieron que el espín del cuanto de gravedad (gravitón) debía ser igual a 2.

Durante los años posteriores a la segunda guerra mundial la idea dominante consistía en imitar los procedimientos que habían tenido éxito en la construcción de las teorías cuánticas de otras interacciones. El electromagnetismo se había cuantizado con éxito mediante dos procedimientos: el formalismo canónico y el formalismo de integrales de trayectoria. Para la interacción electromagnética los dos métodos son equivalentes.

Sin embargo en Relatividad General la diferencia entre los dos procedimientos es profunda. La razón es la misma que separa la Relatividad General de las demás teorías de campos en el espacio de Minkowski y complica el análisis de todos los resultados: en Relatividad General no tenemos una geometría que sustente la teoría, es la teoría la que define la geometría. El espacio no está dado a priori, es el producto final de su evolución. El campo gravitacional (la métrica del espacio-tiempo) describe tanto los aspectos dinámicos de la gravedad como la estructura geométrica del espacio-tiempo en sí mismo. De hecho para introducir los conceptos básicos de causalidad, tiempo y evolución deben resolverse primero las ecuaciones dinámicas y construir el espacio-tiempo. Por ejemplo para encontrar si un dato inicial dado lleva a la aparición de un agujero negro debe obtenerse primero su evolución maximal y, usando la estructura causal determinada por esa solución, preguntarse

si el futuro infinito nulo tiene un límite pasado. En la teoría cuántica, los problemas son más serios, cuantizar el campo gravitacional es equivalente a cuantizar la estructura del espacio-tiempo. En la teoría cuántica de una sola partícula, debido al principio de incertidumbre, su trayectoria no puede ser conocida ya que la evolución temporal produce sólo una amplitud de probabilidad de presencia de la partícula en una región del espacio más que una trayectoria. Similarmente puede decirse en gravedad cuántica: después de evolucionar desde un estado inicial con una geometría bien determinada no se estará en un espacio-tiempo fijo. Sólo podrá decirse que hay una cierta amplitud de probabilidad respecto a una geometría. Por lo tanto, en ausencia de una geometría determinada, es una contradicción introducir nociones básicas como causalidad, tiempo, etc. Además hay un problema relativo al distinto papel que juega el tiempo en la formulación hamiltoniana de una teoría cuántica de campos y en Relatividad General. En Relatividad General no existe una elección del tiempo privilegiada. Esto significa que dicha elección no debe reflejarse en las predicciones físicas de la teoría. Sin embargo en la teoría cuántica de campos sólo se pueden hacer predicciones físicas cuando el tiempo pueda separarse del resto de las variables de configuración.

A principios de los años 50 se comenzó a construir la formulación hamiltoniana de la Relatividad General para que a partir del hamiltoniano se pudiera hacer la cuantización de la teoría. A partir de entonces P.A.M. Dirac en la Universidad de Cambridge por un lado y P.G.Bergmann en la Universidad de Syracuse por otro, comenzaron a desarrollar un método de cuantizar la gravedad mediante el procedimiento canónico a pesar de los problemas mencionados en el apartado anterior. Definieron los operadores fundamentales de la teoría, y a través de sus relaciones de conmutación llegaron a obtener el principio de incertidumbre para este sistema. La noción de causalidad viene dada en este procedimiento por el hecho de que ciertos operadores conmutan sobre una variedad espacial de 3 dimensiones fija, es decir, el espacio tridimensional para un instante de tiempo dado. En contextos donde la geometría espacial tridimensional es asintóticamente plana, es decir, en los casos donde no hay fuentes de campo en el infinito, el movimiento generado por el hamiltoniano puede interpretarse como la evolución temporal del sistema. Dirac y Bergman hicieron énfasis en el carácter geométrico de la Relatividad General, manteniendo la fusión de la geometría y la gravedad.

Asociado al hecho de que no se puedan separar los grados de libertad dinámicos de las variables de configuración aparece el siguiente problema en este método de cuantizar la gravedad: las ecuaciones de la Relatividad General no son todas independientes sino que existen ecuaciones que las relacionan.

Definen por lo tanto un sistema ligado y hasta entonces, a principios de los 50, no se conocía un método general que desarrollara una teoría cuántica para sistemas con ligaduras. Dirac se dedicó durante esta década a desarrollar una teoría cuántica general adecuada a sistemas ligados [2].

Un aspecto importante es que, a pesar del alto grado estético que da la formulación covariante a las ecuaciones de Einstein, en la práctica el aislar a las ecuaciones con contenido dinámico de las que son constricciones se ve oscurecido precisamente por esta forma covariante de expresarlas. Una manera de desentrañar la dinámica de la Relatividad General consiste en verla como un problema de Cauchy, es decir, analizar la dinámica como la evolución de una superficie tridimensional donde estén definidos los campos.

En 1962 R. Arnowitt, S. Deser y C.W. Misner, usando los métodos pioneros de Dirac y Bergmann obtuvieron una formulación hamiltoniana (conocida como formulación ADM [3]) satisfactoria de la Relatividad General. Los intentos de cuantizar la teoría clásica de la Relatividad General a partir de esta formulación hamiltoniana fueron realizados a partir de 1965 por B.S. DeWitt y K. Kuchar. Antes de explicar los éxitos y problemas de esta teoría vamos a sintetizar el programa de cuantización en el procedimiento canónico.

La formulación ADM de la Relatividad General desarrollada por R. Arnowitt, S. Deser y C. Misner tomó su forma completa a principios de los años 60. En el procedimiento canónico inicialmente se escribe la teoría clásica en su forma hamiltoniana y se identifican las variables canónicas conjugadas. Una vez identificadas se sustituyen las variables canónicas por operadores que cumplan las relaciones canónicas de conmutación. Los estados cuánticos del sistema vendrán descritos por un espacio lineal de funciones de onda y por el álgebra de operadores definido sobre este espacio. El hamiltoniano clásico, después de sustituir las variables canónicas por sus operadores asociados, se convierte en un operador sobre el espacio de las funciones de onda de modo que se obtiene una ecuación dinámica similar a la ecuación de Schrödinger para la función de una partícula. Para finalizar se define un producto interno sobre el espacio de las funciones de onda, soluciones de la ecuación citada anteriormente; esto define un espacio de Hilbert, que lleva a una interpretación probabilística de las funciones de onda.

El procedimiento de cuantización es complicado debido a la presencia de ligaduras. Estas ligaduras son tratadas en el método ADM según la teoría desarrollada por Dirac [2]. Se separa el espacio-tiempo (supuesto globalmente hiperbólico) en una familia de superficies de Cauchy de 3 dimensiones es-



paciales y en una coordenada temporal. Se elige como variable dinámica fundamental la métrica asociada a estas geometrías tridimensionales. Con esta separación  $3 + 1$  del espacio-tiempo se calculan todos los objetos relevantes en la Relatividad General como la curvatura extrínseca, el tensor de Weyl, etc. separando explícitamente la parte temporal de la parte dependiente de las geometrías tridimensionales, como mencionamos anteriormente se plantea ahora la cuestión de si la Relatividad reformulada de este modo tiene respuesta al típico problema de Cauchy, a saber, si con datos iniciales adecuados existe una única solución para las ecuaciones relativistas que depende de forma continua de dichos datos. La respuesta, en principio, es negativa a causa de la covariancia bajo difeomorfismos en el espacio-tiempo y de las distintas formas en que un espacio-tiempo puede escindirse en un espacio y tiempo (es decir, la separación  $3 + 1$  no es única). Sin embargo, cumpliendo ciertos requisitos bastante razonables resulta posible construir soluciones de las ecuaciones gravitacionales relativistas que satisfagan el problema de Cauchy, como se desprende de los teoremas de Choquet-Bruhat [4].

A partir de la acción de Einstein-Hilbert se calcula el momento canónico conjugado de la métrica tridimensional. Con estas dos variables, la métrica tridimensional y su momento canónico conjugado, se escribe el hamiltoniano de la gravedad de modo que las ecuaciones de Einstein describen tanto las ligaduras entre la 3-métrica y su momento canónico conjugado, como las ecuaciones de evolución de estos campos. La teoría de la Relatividad se interpreta ahora como la teoría dinámica de las geometrías tridimensionales.

Debido a las ligaduras, el sistema tiene menos grados de libertad que los que presentan las diferentes 3-geometrías (las geometrías espaciales) ya que éstas están relacionadas a través de la libertad gauge del campo gravitacional: la invariancia bajo el grupo de difeomorfismos. Por lo tanto el espacio de configuración es el conjunto de las clases de equivalencia bajo el grupo de difeomorfismos de las métricas riemannianas sobre esas 3-geometrías. A este espacio se le llamó superespacio. Esta descripción hamiltoniana fue bautizada por J.A. Wheeler como Geometrodynamics [5] y constituye el punto de partida de la cuantización canónica. Las variables y sus momentos conjugados se sustituyen por operadores. Sobre estos operadores se imponen las relaciones de conmutación que llevan al principio de incertidumbre. La ecuación dinámica que cumplen los funcionales de las 3-geometrías es la ecuación de Wheeler-DeWitt (ecuación correspondiente a la de Schrödinger para la gravedad [6]). Ecuación que sólo se ha podido resolver en unos pocos casos con un alto grado de simetría (llamados modelos de minisuperespacios).

La mayoría del trabajo en este procedimiento ha sido realizado de manera meramente formal ya que las ecuaciones cuánticas de la geometrodinámica involucran productos no regularizados de operadores de valor distribucional. Incluso a nivel formal, algunos de los principales resultados que se esperaba obtener permanecen ocultos porque las ecuaciones de ligadura son demasiado difíciles de resolver. El principal problema que presenta esta forma de trabajar es que la teoría de Dirac no da una prescripción general para separar las variables cinemáticas (tiempo, variables que definen las 3-geometrías) de las variables dinámicas (grados de libertad del sistema), separación indispensable para poder encontrar los estados físicos del campo gravitacional.

Durante muchos años se ha trabajado en la construcción de una teoría del “todo” que incluya todas las interacciones que conocemos, aunque por el momento esta teoría fundamental se resiste. Un paso más modesto hacia este objetivo es construir una teoría que proporcione una descripción cuántica de los fenómenos gravitacionales.

Entre 1986 y 1987 A. Ashtekar propuso un nuevo procedimiento canónico basado en la Geometrodinámica. La principal diferencia con la teoría ADM es que A. Ashtekar consideró como variables dinámicas fundamentales las conexiones en vez de las métricas de las geometrías tridimensionales (teoría conocida como Connection Dynamics [7]). Esto añadió nuevas herramientas conceptuales a la teoría que no aparecían en la geometrodinámica. Las nuevas variables canónicas simplifican las ecuaciones de campo tanto en la teoría cuántica como en la estructura hamiltoniana clásica de la Relatividad General. Con estas simplificaciones pueden resolverse de forma exacta las ecuaciones cuánticas de ligadura. Este es uno de los principales éxitos del método de Ashtekar.

La idea de formular la teoría de la gravedad en términos de las conexiones no era nueva. Las demás interacciones fundamentales entre partículas elementales tienen lugar a través de partículas intermediarias (bosones gauge), descritas clásicamente por una conexión. Era natural por lo tanto, intentar formular la gravedad de forma similar a las demás interacciones considerando una conexión. En los primeros intentos se consideraron nuevas teorías de la gravedad basadas en una acción de tipo Yang-Mills [8]. Como esta acción es cuadrática en la curvatura, las ecuaciones que aparecen son de orden cuártico en la métrica mientras que las ecuaciones de Einstein clásicas son de orden inferior en la métrica. Se sabe que existen soluciones de las ecuaciones obtenidas a través de la acción de tipo Yang-Mills que no lo son de las ecuaciones de Einstein.

En el procedimiento seguido por Ashtekar, sin embargo, no cambian las ecuaciones del campo gravitacional. La teoría subyacente es la Relatividad General de Einstein. Las ecuaciones de Einstein son reinterpretadas como las ecuaciones que gobiernan la dinámica de una conexión. La estrategia es viable al menos en Relatividad General en el vacío: como el tensor de Riemann y el tensor de Ricci pueden construirse usando sólo la conexión, la ecuación de Einstein en el vacío puede tomarse como una ecuación para la conexión. En la forma hamiltoniana, se utiliza la acción de Palatini del formalismo de tétradas y unas conexiones autoduales complejas definidas a través de las conexiones de Lorentz sobre la variedad espacio-tiempo (véase la Parte III del Capítulo 5 de [8]). Definiendo como variables de configuración estas conexiones autoduales y sus momentos conjugados, las ecuaciones de Einstein se simplifican considerablemente, ya que las ecuaciones de ligadura y las ecuaciones dinámicas son polinomios de estas variables canónicas. Aún así aparece una ligadura como consecuencia de que las variables utilizadas son complejas. Las ecuaciones de ligadura, escritas de esta forma, pueden resolverse exactamente constituyendo un avance considerable frente a la geometrodinámica.

La cuantización de la teoría de Ashtekar fue llevada a cabo por T. Jacobson, L. Smolin, C. Rovelli y por el propio A. Ashtekar a finales de los 80. No discutiremos aquí el programa de cuantización, sólo diremos que no ha sido completado aún, debido a que algunos problemas no han podido solucionarse hasta ahora. Sin embargo el avance frente al programa de cuantización canónica desarrollado a partir de la geometrodinámica ha sido muy grande.

En gravedad  $2 + 1$ , es decir, considerando que la geometría del espacio-tiempo es tal que su parte espacial tiene sólo 2 dimensiones, E. Witten consiguió cuantizar completamente la gravedad [9]. Esta es la única teoría que lo ha conseguido hasta ahora. A. Achúcarro y P.K. Townsend demostraron que las teorías de gravedad en  $2 + 1$  dimensiones pueden ser interpretadas como una teoría de Chern-Simons. En este caso los grados de libertad del tensor de Riemann y los del tensor de Ricci coinciden de manera que no existen ondas gravitacionales como solución de las ecuaciones de campo con estas dimensiones del espacio físico. Con ello E. Witten escribe la acción de Einstein-Hilbert de forma topológica, es decir, describiendo el espacio de forma global, al estilo de las teorías de Chern-Simons que sí se saben cuantizar. Reduce las ecuaciones de ligadura y obtiene un espacio de soluciones con el que se puede continuar el mecanismo de cuantización. Este espacio

de soluciones está constituido por los lazos de Wilson, pero al estar considerando sólo 2 dimensiones espaciales se tiene la ventaja de que todas las geometrías son planas bajo una transformación conforme. El desarrollo de la teoría cuántica de la gravedad no ha finalizado ya que no se sabe si es posible la generalización de estos resultados, obtenidos en  $2 + 1$  dimensiones, al caso físico de dimensión  $3 + 1$ . A pesar de ello se espera que este tipo de teorías en dimensiones diferentes a las dimensiones físicas ayuden a entender el comportamiento del Universo real.

El enfoque canónico cuenta con la ventaja de que se trata de un método no perturbativo y esto es importante en el caso de la cuantización de la gravedad porque esta teoría presenta problemas insalvables. La tarea de obtener una teoría general que englobe ambas teorías (RG y MC) es muy compleja. Sin embargo, los físicos en lugar de atacar el problema en general introducen algunas simplificaciones para obtener un problema manejable. Si se es capaz de resolver este problema simplificado se obtiene una teoría que describa efectos cuánticos gravitacionales. En este caso, los resultados que se obtienen pueden no ser válidos para la teoría completa, y entonces uno se pregunta si ha servido de algo este proceso. La respuesta es afirmativa porque en el modelo simplificado se tienen problemas similares a los de la teoría completa y al solucionar estas dificultades se desarrolla una cierta intuición para tratar de atacar la teoría general, tanto para resolver las dificultades matemáticas como las conceptuales.

Después de los comentarios anteriores podemos decir que la formulación hamiltoniana de la R.G. fue desarrollada para poder lograr la cuantización de la gravedad mediante el método de Dirac y debido a las dificultades presentadas por éste se debieron desarrollar otros formalismos como el de Ashtekar, lo importante aquí es que el formalismo canónico forma parte de los fundamentos de muchos temas de investigación en la Física actual. Este formalismo ha tenido un desarrollo continuo a lo largo de sus más de 50 años de existencia; sin embargo, el interés por parte de la comunidad de físicos teóricos en la realización de investigaciones sobre aplicaciones del formalismo canónico ha sufrido altibajos. Desde mediados de los años ochenta ha habido nuevamente un creciente interés tanto en el formalismo mismo, como en sus aplicaciones en diferentes áreas. Por mencionar algunos ejemplos: ha servido como base para el desarrollo de las variables de Ashtekar [7]; se ha utilizado en problemas relacionados con la cuantización de la gravedad por medio de integrales de trayectoria [6]; ha servido como medio para determinar, por métodos numéricos, soluciones a las ecuaciones de Einstein [10]; ha sido la base para el desarrollo de la teoría del espacio de espacios (conocida como

geometrodinámica [5]), la fijación del gauge para espacios-tiempos con dos vectores de Killing y las soluciones a sistemas gravitacionales con simetrías como son las ondas gravitacionales planas, aparece en la teoría de la gravedad de Hořava, además de una forma totalmente análoga se puede hacer la separación  $3 + 1$  de las ecuaciones de Maxwell [11].

Por tanto, dada la importancia que ha adquirido la formulación canónica, aunado al hecho de que aún no se tiene, hasta donde pude investigar, una exposición introductoria clara y completa del formalismo y de algunas de sus aplicaciones, es que decidí elaborar el presente trabajo que pretende ser una base introductoria para que las nuevas generaciones entiendan las bases de dicha teoría y puedan realizar trabajos de investigación en esta área de manera temprana. De este modo, en las páginas siguientes se tratará de dar una introducción lo más accesible posible a la formulación hamiltoniana de la Relatividad General tratando de ordenar lo mejor posible los resultados más importantes y realizando la gran mayoría de los cálculos (los cuales no se exponen en los artículos sobre el tema a excepción del artículo de Corichi [12]) para llegar a las ecuaciones más importantes en esta teoría. Los artículos de Giulini [13], de Bertin [14] y el Capítulo 4 de la Sección 3 del libro de Baez y Muniain [8] sirvieron de base para la elaboración de este trabajo.

Abordaremos el estudio de la teoría hamiltoniana de la Relatividad General en tres dimensiones debido a mi interés en la cuantización de la gravedad ( $2 + 1$ ), aunque los resultados valen para cuatro dimensiones simplemente cambiando el término superficie por el de hipersuperficie, es claro que el objetivo final será escribir el hamiltoniano gravitacional y mencionar los problemas al intentar cuantizar la teoría mediante el formalismo de Dirac.

A continuación vamos a explicar como está organizado el material de esta tesis:

- En el Capítulo 2 daremos los conceptos básicos de Geometría Diferencial necesarios para una mejor comprensión de los temas desarrollados en los capítulos subsecuentes. Se darán las definiciones de variedad diferenciable, espacio tangente y espacio dual y los conceptos de curvatura y torsión en una variedad con métrica.

Este capítulo se incluye debido a que se pretende que el texto sea autocontenido (aunque ningún texto lo es) y aunque en general se presenta un resumen de los resultados más importantes, incluimos la bibliografía necesaria para profundizar más en los conceptos si así se desea.

- En el tercer Capítulo se presenta la geometría de las superficies. Iniciamos definiendo lo que es una variedad espacio-tiempo, después presentamos la

definición de un encaje de una superficie en una variedad de dimensión 3, se definen los mapeos pull-back y push-forward. Definimos el operador de forma y la curvatura extrínseca, después se hace la descomposición ortogonal del espacio tangente a la variedad 3-dimensional y se definen los operadores de proyección ortogonal y tangente, fundamentales para extender los objetos geométricos definidos en la superficie a la variedad. Encontramos la ecuación que relaciona la conexión de la superficie con la de la variedad, conocida como ecuación de Gauss.

Terminamos este capítulo dando la descomposición del tensor de Riemann del espacio-tiempo en términos de cantidades relativas a la superficie, estas son las ecuaciones de Gauss-Codazzi y de Codazzi-Mainardi.

- En el Capítulo 4 estudiamos la geometría de las foliaciones, definimos la función lapse y mediante la derivada de Lie se encuentran las ecuaciones que “arrastran” a la métrica de la superficie y al proyector tangente a través de todas las superficies de la foliación, finalmente se escribe el escalar de Ricci del espacio-tiempo en términos de cantidades relativas a la superficie.
- Por último dedicaremos el Capítulo cinco a la aplicación de las ecuaciones desarrolladas en los capítulos anteriores para escribir la descomposición 2+1 de las ecuaciones de Einstein, daremos una breve introducción a las coordenadas adaptadas lo cual nos llevará a definir el vector shift, escribiremos la métrica del espacio tiempo y el escalar de curvatura en términos de la función lapse y del vector shift para escribir la acción de Einstein-Hilbert en términos de las variables ADM y con ello obtener el lagrangiano gravitacional, después mediante una transformación de Legendre llegamos a la expresión final del hamiltoniano gravitacional en función de la métrica de la superficie y los momentos generalizados.

Finalmente mencionaremos de manera breve los problemas que se enfrentan al intentar cuantizar la gravedad por el método de Dirac y mencionaremos algunas de las aplicaciones más importantes de la teoría canónica de la Relatividad General.

- Se agregan dos Anexos, el primero de ellos está dedicado a la derivada de Lie de campos tensoriales y el otro está dedicado a la forma de pasar de una teoría parametrizada a una canónica en el formalismo hamiltoniano.







---

# Capítulo 2

## Elementos de Geometría Diferencial

---

El objetivo de este capítulo sobre cuestiones de geometría diferencial no es enseñar éstas a quien se las tope por primera vez: si éste es el caso, resulta preferible saltárselas. Su modesto objetivo es permitir, a quien ya las ha estudiado alguna vez (aunque, probablemente, con un lenguaje muy diferente) ubicarlas en el contexto geométrico apropiado.

En el presente capítulo daremos una introducción de los conceptos de topología y geometría diferencial necesarios para construir la formulación canónica de la relatividad, si se quiere profundizar más en los conceptos de topología se puede revisar [15], para la geometría diferencial ver [16], y para la geometría riemanniana intrínseca ver [8], [17], [18] y [16].

### 2.1. Variedades diferenciables

Intuitivamente la Topología es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los objetos que se conservan cuando estos se deforman sin “cortar” ni “pegar” (con la excepción de que es posible “cortar” si luego se “pega” por el mismo sitio). Por ejemplo, la superficie de una bola es topológicamente equivalente a la de una pelota de fútbol o la de una barra, aunque no lo es a la de un toro, puesto que este último tiene un agujero. En la presente sección estudiaremos algunos preliminares topológicos, que pueden encontrarse en cualquier libro elemental de topología [15].

**Definición 2.1.1** Sea  $M$  un conjunto arbitrario y  $\tau \subset 2^M$  una colección de subconjuntos de  $M$ , entonces  $(M, \tau)$  se llama **espacio topológico**, si y sólo si:

1.  $\emptyset \in \tau$  y  $M \in \tau$ .

2. Si  $U_1, \dots, U_n \in \tau \implies \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$ .

$$3. \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \tau \quad \implies \quad \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \in \tau.$$

**Definición 2.1.2** Si  $(M, \tau)$  es un espacio topológico, entonces:

1.  $\tau$  se llama **topología** en  $M$ .
2.  $U \in \tau$  se llama **abierto** en  $M$ .
3.  $V \subset M$  se llama **cerrado**  $\iff V' := M - V \in \tau$ .<sup>1</sup>
4. Si  $x \in U \in \tau$  entonces  $U$  se llama **vecindad de  $x$** .

El concepto de homomorfismo es la forma rigurosa de expresar la idea de cuando dos espacios topológicos son “equivalentes” y que tratábamos de apuntar con ideas intuitivas al principio de esta sección, como las de que dos espacios topológicos son “equivalentes” si cada espacio se puede obtener uno de otro deformando sin cortar ni pegar.<sup>2</sup> Dos espacios topológicos homeomorfos poseen las mismas propiedades topológicas.

**Definición 2.1.3** Sean  $(M_1, \tau_1)$ ,  $(M_2, \tau_2)$  espacios topológicos, sea  $U \in \tau_1$ ,  $V \in \tau_2$  y  $\varphi : U \rightarrow V$  continua, entonces  $\varphi$  se llama **homomorfismo** de  $U$  a  $V$ , si y sólo si:

$$\varphi^{-1} : V \rightarrow U \text{ existe y es continua.}$$

Si  $U = M$  y  $V = N$  entonces  $M$  y  $N$  se llaman **homomorfos**.<sup>3</sup>

El concepto de variedad diferenciable [16] es la generalización del concepto de superficie en  $\mathbf{R}^3$ .

**Definición 2.1.4** Una variedad diferenciable de dimensión  $n$  es un conjunto  $M$  y una colección de funciones inyectivas  $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbf{R}^n \rightarrow M$  de abiertos  $U_\alpha$  a  $M$  tales que:

1.  $\bigcup_{\alpha} \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$
2. Para cada par  $\alpha, \beta$  con  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , los conjuntos  $\varphi_\alpha^{-1}(W)$  y  $\varphi_\beta^{-1}(W)$  son abiertos de  $\mathbf{R}^n$  y las funciones  $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  son diferenciables.

<sup>1</sup> $V'$  denota el complemento de  $V$ .

<sup>2</sup>Otro concepto relevante en este contexto es el de equivalencia homotópica, en el que no entraremos.

<sup>3</sup>Como  $\varphi^{-1}$  es uno a uno, cada abierto se mapea en un abierto, entonces ambas topologías son equivalentes.

3. La familia  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  que cumple 1 y 2 es llamada estructura diferenciable y es maximal relativo a las condiciones 1 y 2.

Una estructura diferenciable en un conjunto  $M$  induce una topología natural en  $M$ . Es suficiente definir  $A \subset M$  como un abierto en  $M$  si y sólo si  $\varphi_\alpha^{-1}(A \cap \varphi_\alpha(U_\alpha))$  es un abierto de  $\mathbf{R}^n \quad \forall \alpha$ . Es fácil verificar que estos abiertos cumplen los axiomas de espacio topológico. Por supuesto que la topología natural de  $M$  puede ser completamente extraña, esto puede pasar si uno (o ambos) axiomas siguientes no se cumplen.

**Axioma 2.1.5 Axioma de Hausdorff.** *Dados dos puntos distintos de  $M$  existen vecindades de esos dos puntos que no se intersectan, es decir*

$$\forall x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2 \quad \exists U_1, U_2 \in \tau \text{ tales que } x_1 \in U_1, x_2 \in U_2 \text{ y}$$

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Se dice entonces que  $M$  es un **espacio  $T_2$**  o **espacio de Hausdorff**

**Axioma 2.1.6 Axioma de la base contable.**  *$M$  puede cubrirse por un número contable de vecindades coordenadas (se dice que  $M$  tiene una base contable), es decir, puede cubrirse por medio de una cubierta abierta  $U$  de  $M$ , que es una colección de abiertos de  $M$  cuya unión es todo  $M$ .*

El axioma de Hausdorff es esencial para la unicidad del límite de una sucesión y el axioma de la base contable es esencial para la existencia de una partición de la unidad. Estos axiomas son esenciales, por ejemplo, para saber si una variedad puede ser inmersa o encajada en algún espacio euclidiano. Un resultado fundamental en esta dirección es el teorema de Whitney que establece lo siguiente: cada variedad diferenciable (que cumple los axiomas anteriores) de dimensión  $n$  puede ser inmersa en  $\mathbf{R}^{2n}$  y encajada en  $\mathbf{R}^{2n+1}$  [17]. Para la definición de una métrica riemanniana (que haremos en una sección posterior) es necesario que nuestra definición de variedad cumpla estos dos axiomas<sup>4</sup>, por ello establecemos la definición clásica de variedad diferenciable que será la que ocuparemos en el resto de este trabajo.

---

<sup>4</sup>Esto es para no complicar las cosas pues se puede demostrar que toda variedad diferenciable (definición 2.1.4) tiene una métrica riemanniana, para ello se toma una partición de la unidad de  $M$

**Definición 2.1.7 Variedad Diferenciable.**

1.  $(M, \tau)$  Se llama **variedad diferenciable** de clase  $C^k$  y  $\dim M = n$  si y sólo si:
  - a)  $M$  es un espacio de Hausdorff.
  - b)  $\Phi$  es una colección de funciones (fig. 2.1.1) tales que:
    - 1)  $\{Dom\varphi/\varphi \in \Phi\}$  es una cubierta abierta de  $M$ .
    - 2)  $\forall \varphi \in \Phi$ ,  $\varphi$  es un homomorfismo a un abierto de  $\mathbf{R}^n$
    - 3)  $\forall \varphi, \psi \in \Phi$  tal que  $(Dom\varphi) \cap (Dom\psi) \neq \emptyset \implies \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(Dom\varphi \cap Dom\psi) \in \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$  es de clase  $C^k$ .
2.  $\Phi$  se llama **Atlas** y sus elementos se llaman **cartas**.

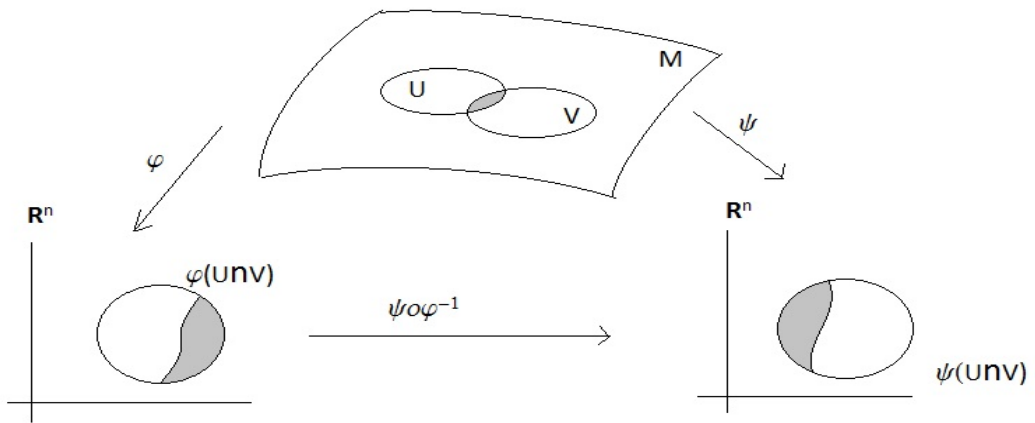


Figura 2.1.1: Dos cartas que se traslapan suavemente. Aquí  $U = Dom\varphi$  y  $V = Dom\psi$

Un concepto fundamental en la teoría de variedades diferenciables es el de orientación.

**Definición 2.1.8** Una variedad diferenciable  $M$  es **orientable** si y sólo si admite un atlas tal que para cada par de abertos  $U, V$  no disjuntos de coordenadas  $\{x^\alpha\}$  y  $\{y^\alpha\}$ , el jacobiano  $\mathbf{J} = \det(\partial x^\mu / \partial y^\nu)$  es positivo.

**Definición 2.1.9** Sea  $(M, \Phi)$  una variedad diferenciable de clase  $C^k$  y de  $\dim M = n$ . Si para cada homomorfismo,  $\psi : U \subset M \longrightarrow \mathbf{R}^n$  tal que  $\forall \varphi \in \Phi$ :

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(Dom\varphi \cap Dom\psi) \longrightarrow \mathbf{R}^n \in C^k$$

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \psi(\text{Dom}\varphi \cap \text{Dom}\psi) \longrightarrow \mathbf{R}^n \in C^k$$

con  $\text{Dom}\varphi \cap \text{Dom}\psi \neq \emptyset$ . Resulta que  $\psi \in \Phi$ , entonces a  $\Phi$  se le llama **atlas maximal**.

A una carta  $\varphi \in \Phi$  en  $M$ , también se le llama **sistema local de coordenadas** en  $M$  o **parametrización** de  $M$  en  $p$ .

### Ejemplo 2.1.10 *Proyección estereográfica de la esfera.*

La esfera  $S^2$  con su topología heredada de  $\mathbf{R}^3$ , es una variedad diferenciable 2-dimensional real que tiene dos cartas,

$C_1 = (U_1, \Phi_+)$ , con  $U_1 = \{S^2/\{0, 0, 1\}\}$ , el homomorfismo y su inverso son:

$$\Phi_+(x, y, z) = \frac{1}{1-z}(x, y) \quad \Phi_+^{-1}(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, x^2+y^2-1)$$

La otra carta (que elimina el polo sur) es  $C_2 = (U_2, \Phi_-)$ , el homomorfismo y su inversa son

$$\Phi_-(x, y, z) = \frac{1}{1+z}(x, y) \quad \Phi_-^{-1}(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, -x^2-y^2+1)$$

entonces  $U_1 \cup U_2 = S^2$  y  $\Phi_+, \Phi_-$  son homomorfismos. A  $\Phi_+$  se le llama **proyección estereográfica** desde el norte y a  $\Phi_-$  desde el sur.

### Notas al concepto de variedad diferenciable.

1. Si en lugar de considerar espacios localmente homomorfos a  $\mathbf{R}^n$  los consideramos localmente homomorfos al semiplano superior  $\mathbf{R}_+^n = \{(x^0, \dots, x^n) \mid x^\mu \geq 0\}$  entonces podemos hablar de una variedad diferenciable con frontera [17]. De los puntos que, en alguna vecindad coordinada, tienen su última coordenada nula se dice que están en la frontera. Obsérvese que el concepto de diferenciability entre abiertos de  $\mathbf{R}^n$  se extiende naturalmente a abiertos de  $\mathbf{R}_+^n$ . Análogamente, si se toman homomorfismos con abiertos de  $\{(x^0, \dots, x^n) \mid x^\mu \geq 0 \ \forall \mu \in \{0, \dots, n\}\}$  y con cambios de carta diferenciables entonces hablamos de variedad diferenciable con frontera a pedazos.
2. Si en lugar de considerar espacios localmente homomorfos a  $\mathbf{R}^n$  los consideramos localmente homomorfos a  $\mathbf{C}^n$ , con cambios de cartas diferenciables, entonces tendremos una variedad compleja de dimensión (compleja)  $n$ .

3. En general, los posibles estados de un sistema físico (no cuántico y discreto) tienen intrínsecamente una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $n$  (= número de “grados de libertad” del sistema). Más concretamente, en Física (Mecánica, Termodinámica, Relatividad, etc.) es frecuente suponer, al menos implícitamente, que el conjunto  $M$  de los estados de un sistema físico<sup>5</sup> admite para cada estado un subconjunto  $U \subseteq M$  que contiene a dicho estado y una función biyectiva  $\varphi : U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbf{R}^n$ , esto es, podemos describir ese estado en función de coordenadas en un abierto  $V$  de  $\mathbf{R}^n$ . Más aún, se supone que los cambios de coordenadas son diferenciables.

**Definición 2.1.11** Sea  $(M, \Phi)$  una variedad diferenciable de clase  $C^k$  y de dimensión  $n$ , sea  $\varphi \in \Phi$  un sistema local de coordenadas en  $U \subset M$ , definimos:

1. La  $\mu$ -ésima función coordenada en  $\mathbf{R}^n$ :

$$r^\mu : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \text{ tal que } (a^0, \dots, a^n) \mapsto a^\mu$$

2. La  $\mu$ -ésima función coordenada del sistema de coordenadas  $\varphi$  como:

$$x^\mu := r^\mu \circ \varphi.$$

**Definición 2.1.12** Sea  $(M, \Phi)$  una variedad diferenciable de clase  $C^k$  y dimensión  $n$ . Sea  $W \subset M$  un abierto y  $f : W \rightarrow \mathbf{R}$ , entonces  $f$  se llama **función diferenciable de clase  $C^l$**  ( $l \leq k$ ) si y sólo si:

$$\forall p \in W \exists U_p \text{ y } \varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^n \in \Phi \text{ tal que } f \circ \varphi^{-1}|_{W \cap U} \in C^l.$$

## 2.2. Vectores tangentes

En esta sección vamos a construir los vectores tangentes a una variedad diferenciable. Esta construcción tiene varios objetivos, pero el más importante es que con los vectores tangentes podemos construir un espacio vectorial en

<sup>5</sup>En el caso de la Relatividad el sistema físico sería el espacio-tiempo, y sus “estados” los “eventos”.

cada punto de la variedad, a este espacio se le llama el espacio tangente. Es necesario construir tantos vectores base del espacio tangente a la variedad como la dimensión de ésta, es decir, tantos como la dimensión del espacio  $\mathbf{R}^n$  al cual la variedad diferenciable es homomorfa. Ya construido el espacio tangente podemos construir el dual a este espacio vectorial, es decir, el espacio de las transformaciones lineales en el espacio tangente, a este espacio se le llama el espacio dual (cotangente) de la variedad.

**Definición 2.2.1** Una *curva* de clase  $C^k$  en una variedad  $M$ , es una función:

$$\alpha : (a, b) \subset \mathbf{R} \longrightarrow M \quad \text{tal que} \quad \forall \varphi \in \Phi \quad \varphi \circ \alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}^n \quad \text{es de clase } C^k$$

Sea la función  $f : M \longrightarrow \mathbf{R}$  de clase  $C^k$  con  $k \geq 1$ , entonces la función compuesta  $f \circ \alpha : I = (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}$  (tal que:  $t \mapsto f(\alpha(t))$ ) tiene derivada bien definida, ésta es la razón de cambio de  $f$  a lo largo de la curva. Dada otra curva  $\beta(s)$  que pase por un punto en común  $p = \alpha(t_0) = \beta(s_0)$ , decimos que  $\alpha$  y  $\beta$  tienen la misma velocidad en  $p$  si y sólo si:

$$\forall f : M \longrightarrow \mathbf{R} \quad \text{tal que} \quad \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{ds}(f \circ \beta) \right|_{s=s_0} \quad (2.2.1)$$

Consideremos en adelante una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y fijemos un punto  $p \in M$ . Sea

$$\mathcal{C}_p := \{ \gamma : [-\epsilon_\gamma, \epsilon_\gamma] \longrightarrow M \mid \epsilon_\gamma > 0, \gamma(0) = p \text{ y } \gamma \text{ es diferenciable} \}$$

esto es,  $\mathcal{C}_p$  es el conjunto de curvas contenidas en  $M$  que pasan por  $p$  donde, para simplificar el lenguaje, suponemos que cada curva pasa por  $p$  en  $0$  y está definida en alguna vecindad abierta simétrica de  $0$ .

Establecemos en  $\mathcal{C}_p$  una relación de equivalencia como sigue. Diremos que dos curvas  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_p$  son equivalentes si para alguna vecindad coordenada  $(U, \varphi = (x^0, \dots, x^n))$  de  $p$  se verifica (2.2.1), es decir, las curvas son equivalentes si coinciden los vectores tangentes en  $\mathbf{R}^n$  de ambas curvas vistas en coordenadas.

**Lema 2.2.2** Sea  $\varphi$  una carta coordenada arbitraria cuyo dominio incluye a  $p$ , donde las coordenadas de  $p$  son  $\varphi(p) = x^\mu(p)$ , entonces la ecuación (2.2.1) se satisface, si y sólo si

$$\forall \mu = 0, \dots, n \quad \left. \frac{d}{dt}(x^\mu \circ \alpha) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{ds}(x^\mu \circ \beta) \right|_{s=s_0} \quad (2.2.2)$$

**Demostración.**

$\implies$ ) es trivial.

$\impliedby$ ) Escribimos  $f \circ \alpha = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha)$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) &= \sum_{\mu=0}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \varphi^{-1}) \right] \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha) = \sum_{\mu=0}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f(\varphi^{-1}(x^\mu))) \right] \frac{d}{dt}(\varphi(\alpha(t))) \\ &= \sum_{\mu=0}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f(\varphi^{-1}(x^\mu))) \right] \frac{d}{dt}x^\mu(\alpha(t)) \end{aligned}$$

similarmente:

$$\frac{d}{ds}(f \circ \beta) = \sum_{\mu=0}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f(\varphi^{-1}(x^\mu))) \right] \frac{d}{ds}x^\mu(\beta(s))$$

por lo tanto,  $\frac{d}{dt}x^\mu(\alpha(t)) = \frac{d}{ds}x^\mu(\beta(s)) \quad \blacksquare$

**Teorema 2.2.3** Si  $\dim M = n$ ,<sup>6</sup> entonces  $T_p M$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ .

**Demostración.**

1. P.D.  $T_p M$  es un espacio vectorial.

Sean  $X_p, Y_p \in T_p M$ ,  $a \in \mathbf{R} \implies$  por definición  $\exists_n \alpha, \beta : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow M$  tales que:  $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = p$ ,  $\dot{\alpha}_p = X_p$  y  $\dot{\beta}_p = Y_p$ .

Definimos:

a)  $\bar{\nu} : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ , tal que:  $t \mapsto \varphi \circ \alpha + \varphi \circ \beta$

b)  $\nu : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow M$ , tal que:

$$t \mapsto (\varphi^{-1} \circ \bar{\nu})(t) = \varphi^{-1}[\varphi(\alpha(t)) + \varphi(\beta(t))]$$

---

<sup>6</sup>Denotamos la dimensión  $n$  de una variedad diferenciable  $M$  como  $\dim M = n$



entonces:

$$\begin{aligned}
 \dot{\nu}_p[f] &= \frac{d}{dt}(f \circ \nu)_p = \frac{d}{dt}[f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \nu]_p = \sum_{\mu=0}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f(\varphi^{-1}(x^\mu))) \frac{d}{dt}x^\mu(\nu(t)) \right] \\
 &= \sum_{\mu=0}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f(\varphi^{-1}(x^\mu))) \right] \frac{d}{dt}x^\mu \varphi^{-1}[\varphi(\lambda(t)) + \varphi(\mu(t))] \\
 &= \sum_{\mu=0}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f(\varphi^{-1}(x^\mu))) \right] \frac{d}{dt}[\varphi(\lambda(t)) + \varphi(\mu(t))] \\
 &= \sum_{\mu=0}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f(\varphi^{-1}(x^\mu))) \right] \left[ \frac{d}{dt}\varphi(\lambda(t)) + \frac{d}{dt}(\varphi(\mu(t))) \right]
 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\dot{\nu}_p[f] = \frac{d}{dt}(f \circ \lambda)_p + \frac{d}{dt}(f \circ \mu)_p = X_p f + Y_p f \quad (2.2.3)$$

es decir,  $\exists \nu : I \subset \mathbf{R} \rightarrow M$  que pasa por  $p$ , tal que:

$$\dot{\nu}_p[f] = (X_p + Y_p)f$$

lo cual implica que  $X_p + Y_p \in T_p M$ .

Es trivial demostrar que si  $a \in \mathbf{R}$ , entonces  $aX_p \in T_p M$ . Lo cual demuestra que  $T_p M$  es un espacio vectorial.

## 2. P.D. $\dim(T_p M) = n$

a) P.D.  $\dim(T_p M) \geq n$ , es decir que los  $\dot{\lambda}_\sigma$  son linealmente independientes (l.i.).

Sea  $\varphi$  una carta de coordenadas  $x^\mu$  y definimos  $n$  curvas  $\lambda_\sigma(t)$  ( $\sigma = 0, \dots, n$ ) de la siguiente manera:

$$\varphi(\lambda_\sigma(t)) = (x^0(p), \dots, x^{\sigma-1}(p), x^\sigma(p) + t, x^{\sigma+1}(p), \dots, x^n(p))$$

con el punto  $p \in \lambda_\sigma(0)$ , entonces:

$$(\dot{\lambda}_\sigma f)_p = \frac{d}{dt}(f \circ \lambda_\sigma)_p = \frac{d}{dt}[(f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \lambda_\sigma)]_p$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu=0}^n \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \varphi^{-1}) \frac{d}{dt} (x^\mu \circ \lambda_\sigma) = \sum_{\mu=0}^n \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \varphi^{-1}) \delta_\sigma^\mu \\
&= \left[ \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (f \circ \varphi^{-1}) \right]_p
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$(\dot{\lambda}_\sigma f)_p = \left[ \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (f \circ \varphi^{-1}) \right]_p \quad (2.2.4)$$

Esta última ecuación justifica utilizar la notación:

$$\dot{\lambda}_\mu(t=0) := \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p := \partial_\mu \quad (2.2.5)$$

Esto muestra que las  $\dot{\lambda}_{\sigma,s}$  son l.i., es decir, tenemos al menos  $n$  vectores l.i. lo cual implica que  $\dim(T_p M) \geq n$ .

b) P.D. Cualquier vector se puede escribir como combinación lineal de estos vectores base.

Sean  $X_p \in T_p M$ ,  $\lambda(0) = p$ , entonces:

$$\begin{aligned}
X_p(f) &= (f \circ \lambda)'(0) = (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda)'(0) = \sum_{\mu=0}^n \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \varphi^{-1}) (x^\mu \circ \lambda)'(0) \\
&= \sum_{\mu=0}^n \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) [f] X^\mu
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$X_p[f] = \sum_{\mu=0}^n \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p [f] X^\mu \quad (2.2.6)$$

entonces podemos escribir a  $X_p$  como:

$$X_p = \sum_{\mu} X^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \quad (2.2.7)$$

donde  $X^\mu \in \mathbf{R}$  son las componentes del vector. Por lo tanto  $\dim(T_p M) \leq n$ , entonces  $\dim(T_p M) = n$  ■

De la ecuación (2.2.7) sabemos que  $X^\mu$  son las componentes de  $X_p$  con respecto a la base  $\dot{\lambda}_p$ .

No hay que confundir el operador diferencial  $\partial_\mu$  en  $\mathbf{R}^n$  con el vector  $(\partial_\mu)_p \in T_pM$ , la ecuación(2.2.4) nos da la relación entre ellos.

**Lema 2.2.4 (Regla de Leibnitz)** Sean  $f, g : M \rightarrow \mathbf{R}$  y definimos  $fg : M \rightarrow \mathbf{R}$  tal que:  $p \mapsto f(p)g(p)$  y sea  $X_p \in T_pM$ , entonces:

$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g)$$

**Demostración.** Sea  $\lambda$  una curva en  $M$  tal que  $X_p$  sea tangente a  $\lambda$  en  $t = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned} X_p(fg) &= [(fg) \circ \lambda]'_{t=0} = \frac{d}{dt} [(fg) \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda]_{t=0} \\ &= \sum_{\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} (fg) \circ \varphi^{-1} \right] \left( \frac{d}{dt} x^\mu \circ \lambda \right)_{t=0} = \sum_{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} (fg) \right) \left( \frac{d}{dt} x^\mu \circ \lambda \right)_{t=0} \\ &= \sum_{\mu} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} f \right)_p g(p) + f(p) \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} g \right)_p \right] \left( \frac{d}{dt} x^\mu \circ \lambda \right)_{t=0} \\ &= \sum_{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} f \circ \varphi^{-1} \right)_p \left( \frac{d}{dt} x^\mu \circ \lambda \right) g(p) + \sum_{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} g \circ \varphi^{-1} \right)_p \left( \frac{d}{dt} x^\mu \circ \lambda \right) f(p) \\ &= (X_p f)g(p) + f(p)X_p(g). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de establecer nuestra última definición de vector tangente.

**Definición 2.2.5** Sea  $M$  una variedad diferenciable, entonces para cada punto  $p \in M$  un **vector tangente** en  $p$  a  $M$  es un mapeo:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_p &: C^k(M, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R} \\ f &\mapsto \left[ \frac{d}{dt} (f \circ \alpha) \right]_p := (f \circ \alpha)'_p \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

tal que:

1. Es  $\mathbf{R}$ -lineal.
2. Verifica la regla de Leibnitz para el producto en  $p$ .

Llamamos **vector tangente**, a la curva  $\alpha(t)$  en  $p$ , a  $\dot{\alpha}_p$  (fig. 2.2.1) y lo denotamos por:

$$\dot{\alpha}_p = \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_p$$

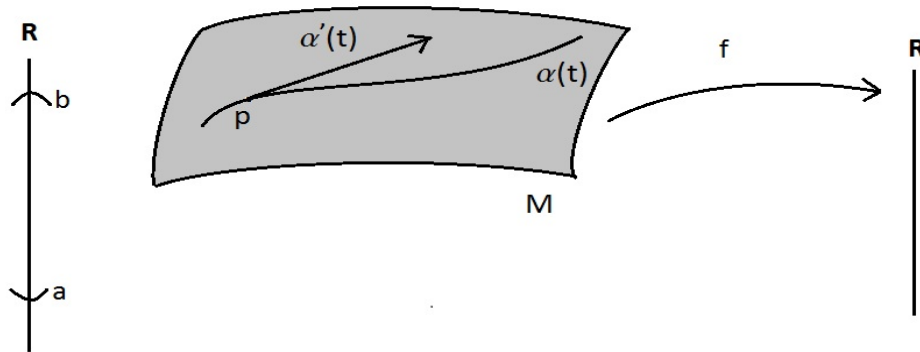


Figura 2.2.1: Vector tangente

Podemos hacer las siguientes observaciones:

- I. Dada una carta  $\varphi$  con coordenadas  $x^\mu$ , las componentes de  $\dot{\alpha}_p$  con respecto a la carta son:

$$\dot{\alpha}_p(x^\mu) = (x^\mu \circ \alpha)'_p = \left. \frac{d}{dt} x^\mu(\alpha(t)) \right|_p$$

- II. Dadas dos curvas  $\alpha(t)$ ,  $\beta(s)$  que pasan por un punto común p,  
 $\dot{\alpha}_p = \dot{\beta}_p \iff$  La Ecuación (2.2.1) se satisface  $\iff$  La Ecuación  
Lema 2,2,2  
 (2.2.2) se satisface  $\iff$  las componentes de  $\dot{\alpha}_p$  y  $\dot{\beta}_p$  son iguales.

- III. Al conjunto de todos los vectores tangentes a M en un punto P se le llama espacio tangente a M en P y se le denota por  $T_p M$ .

## 2.3. Álgebra tensorial

En todo espacio vectorial se pueden definir transformaciones lineales que forman a la vez un espacio vectorial de la misma dimensión, llamado el espacio dual. Entonces podemos formar el conjunto de transformaciones lineales en el espacio tangente a una variedad y formar el espacio dual. A este espacio se le llama espacio cotangente el cual sirve como dominio natural de la Mecánica Hamiltoniana y a sus elementos, las transformaciones lineales, se les llama formas.

**Definición 2.3.1** El espacio dual de  $T_p M$ , denotado por  $T_p^* M$ , es el espacio de funciones lineales:

$$\lambda : T_p M \longrightarrow \mathbf{R}$$

El espacio  $T_p^* M$  es también un espacio vectorial de dimensión  $n$ . A los elementos del espacio dual se les llama 1-formas.

**Ejemplo 2.3.2** Sea  $f : M \mapsto \mathbf{R}$  una función arbitraria, tomemos  $X_p \in T_p M$  y como  $X_p[f] \in \mathbf{R}$  podemos definir:

$$df : T_p M \longleftarrow \mathbf{R}$$

tal que:

$$df(X_p) = X_p[f] \quad (2.3.1)$$

Como  $X_p$  es un operador lineal, entonces  $df$  hereda la linealidad, es decir,  $df \in T_p^* M$ . A  $df$  se le llama diferencial de  $f$  o gradiente de  $f$ .

**Lema 2.3.3** Sea  $\varphi$  una carta de coordenadas  $\{x^\mu\}$ , entonces  $\{dx^\mu\}$  forma una base de  $T_p^* M$  con la propiedad de que:

$$dx^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \delta_\nu^\mu \quad (2.3.2)$$

**Demostración.**

1.  $dx^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)_p = \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)_p x^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (x^\mu \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = \delta_\nu^\mu$

2. P.D. Los  $dx^\mu$  generan.

- a) P.D. Los  $\{dx^\mu\}$  son l.i.

Supongamos que  $\omega_\mu dx^\mu = 0 \implies (\omega_\mu dx^\mu)(\partial_\nu)_p = 0 \implies \omega_\mu [dx^\mu(\partial_\nu)_p] = 0 \implies$  por (2.3.2)  $\omega_\mu \delta_\mu^\nu = 0 \implies \omega_\nu = 0$  lo cual implica que los  $dx^\mu$  son l.i.

- b) P.D. Cualquier 1-forma se puede escribir como combinación lineal de las  $\{dx^\mu\}$ .

Sea  $\lambda \in T_p^* M$ , definimos:

$$\mu = \lambda - \lambda \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p dx^\mu \quad (2.3.3)$$

entonces  $\forall \nu = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)_p &= \lambda \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)_p - \left( \lambda \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p dx^\mu \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)_p \\ &= \lambda \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)_p - \lambda \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \delta_\nu^\mu = \lambda \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)_p - \lambda \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)_p = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\lambda = \lambda \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p dx^\mu \quad (2.3.4)$$

■

Para la acción de una 1-forma sobre un vector utilizaremos la notación:

$$\langle \lambda, X_p \rangle := \lambda(X_p)$$

De (2.3.4) toda 1-forma se puede escribir como:

$$\lambda = \langle \lambda, \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \rangle dx^\mu$$

en particular, para  $\lambda = df$

$$\langle df, \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \rangle = \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) (f \circ \varphi^{-1}) \Big|_p$$

A continuación comprobamos que toda el álgebra tensorial sobre un espacio vectorial induce los correspondientes campos y operaciones tensoriales sobre la variedad.

**Definición 2.3.4** Sean  $V_1, \dots, V_r$  espacios vectoriales sobre  $\mathbf{R}$ . **Un tensor de orden  $r$**  en  $V_1 \times \dots \times V_r$  es una transformación  $T : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbf{R}$   $r$ -lineal, es decir, para cada  $i = 1, \dots, r$ ;  $X_i, Y_i \in V_i$  y  $a \in \mathbf{R}$  se tiene

$$T(X_1, \dots, aX_i + Y_i, \dots, X_r) = aT(X_1, \dots, X_i, \dots, X_r) + T(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_r)$$

Los tensores de orden 1 son el espacio dual (que definimos al principio de esta sección), por ello denotamos como  $V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$  al espacio vectorial de los tensores de orden  $r$  en  $V_1 \times \dots \times V_k$ . A este espacio se le llama producto tensorial de  $V_1^*, \dots, V_k^*$ .

**Definición 2.3.5** Si  $T \in V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$  y  $S \in V_{r+1}^* \otimes \cdots \otimes V_{r+s}^*$ , definimos el **producto tensorial** de  $T$  y  $S$  como la transformación  $T \otimes S \in V_1^* \otimes \cdots \otimes V_{r+s}^*$  dada por

$$T \otimes S(X_1, \dots, X_{r+s}) = T(X_1, \dots, X_r)S(X_{r+1}, \dots, X_{r+s})$$

Se puede demostrar que dados  $V, W$  espacios vectoriales con bases  $\{u_i\}$  y  $\{v_i\}$  y si  $\{u_i^*\}$  y  $\{v_i^*\}$  son bases de  $V^*$  y  $W^*$ , entonces  $\{u_i \otimes v_j\}$  forman una base para  $V^* \otimes W^*$  [17].

En las variedades consideraremos el caso del producto tensorial sobre un solo espacio vectorial  $V$  (en este caso  $T_p M$ ), o sobre su espacio dual  $V^*$  (en este caso  $T_p^* M$ ), o sobre productos cartesianos de ambos. Para fijar ideas usaremos la siguiente terminología para tensores de rango  $\binom{1}{2}$ :

**Definición 2.3.6** Sea  $S : (T_p M) \times (T_p M) \times (T_p^* M) \rightarrow \mathbf{R}$  una transformación lineal en cada uno de sus argumentos, entonces  $S$  se llama **tensor de rango  $\binom{1}{2}$**  en  $M$ .

**Lema 2.3.7** Sea  $S$  un tensor de rango  $\binom{1}{2}$  en  $M$ ,  $\{\partial_\mu\}$  la base de  $T_p M$  y  $\{dx^\mu\}$  su base dual. Si definimos

$$S_{\mu\nu}^\rho := S(\partial_\mu, \partial_\nu, dx^\rho) \in \mathbf{R}, \text{ entonces}$$

$$\forall X, Y \in T_p M, \omega \in T_p^* M \quad S(X, Y, \omega) = S_{\mu\nu}^\rho X^\mu Y^\nu \omega_\rho$$

**Demostración.** Sean  $X = X^\mu \partial_\mu, Y = Y^\nu \partial_\nu \in T_p M$  y  $\omega = \omega_\rho dx^\rho \in T_p^* M$ , entonces

$$S(X, Y, \omega) = S(X^\mu \partial_\mu, Y^\nu \partial_\nu, \omega_\rho dx^\rho) = X^\mu Y^\nu \omega_\rho S(\partial_\mu, \partial_\nu, dx^\rho) = X^\mu Y^\nu \omega_\rho S_{\mu\nu}^\rho$$

■

El producto tensorial resulta útil para estudiar tensores de rango  $\binom{r}{s}$  a partir de tensores de rango inferior en  $r$  o  $s$ . El objetivo final será poder estudiar todos los tensores a partir de los tensores  $\binom{1}{0}$  (vectores) y los tensores  $\binom{0}{1}$  (1-formas). Definimos el producto de un tensor de rango  $\binom{1}{2}$  con uno de rango  $\binom{1}{1}$  llamado el producto tensorial.

**Definición 2.3.8 Producto tensorial**

- 1) Sea  $S$  un tensor de rango  $\binom{1}{2}$  y  $T$  un tensor de rango  $\binom{1}{1}$ , entonces definimos:

$$U : (T_p M) \times (T_p M) \times (T_p M^*) \times (T_p M) \times (T_p^* M) \longrightarrow \mathbf{R}$$

tal que:

$$(X, Y, \omega, Z, \mu) \longmapsto S(X, Y, \omega)T(Z, \mu)$$

$U$  se llama **el producto tensorial** de  $S$  y  $T$ , y se denota por:

$$U = S \otimes T$$

En general el producto de un tensor  $\binom{r}{s}$  con uno de rango  $\binom{p}{q}$  es un tensor de rango  $\binom{r+p}{s+q}$ .

- 2) Denotamos al conjunto de tensores de rango  $\binom{r}{s}$  por  $\tau^{(r \ s)}$
- 3) Sea  $U$  un tensor de rango  $\binom{2}{3}$  y sea  $V_{\mu\nu}^\rho = U_{\mu\nu}^\sigma \sigma^\rho$ , entonces el tensor  $V$  de rango  $\binom{1}{2}$  y componentes  $V_{\mu\nu}^\rho$  es único y se llama **contracción** de  $U$  en el tercer y cuarto índices.
- 4) Sea  $S$  un tensor de rango  $\binom{1}{2}$ , entonces

$$S_{(\mu\nu)}^\rho = \frac{1}{2!}(S_{\mu\nu}^\rho + S_{\nu\mu}^\rho)$$

$$S_{[\mu\nu]}^\rho = \frac{1}{2!}(S_{\mu\nu}^\rho - S_{\nu\mu}^\rho)$$

definen nuevos tensores llamados respectivamente, **la parte simétrica** de  $S$  y **la parte antisimétrica** de  $S$  (en los primeros dos índices).

Todos los puntos anteriores se pueden generalizar para tensores de cualquier rango y para cualesquiera índices. Por ejemplo para un tensor de rango  $\binom{0}{3}$ :

$$W_{[\mu\nu\rho]} = \frac{1}{3!}(W_{\mu\nu\rho} + W_{\nu\rho\mu} + W_{\rho\mu\nu} - W_{\nu\mu\rho} - W_{\rho\nu\mu} - W_{\mu\rho\nu})$$

**Propiedades del producto tensorial.** Se comprueba fácilmente:



1. Para  $T$  un tensor  $r$ -lineal,  $T \otimes T$  es  $r$ -lineal.
2. La operación producto tensorial es lineal en cada variable en el siguiente sentido:

$$(aT + bU) \otimes V = a(T \otimes V) + b(U \otimes V) \quad \forall T, U \in \tau^{(r \ s)} \text{ y } W \in \tau^{(p \ q)}$$

$$T \otimes (aV + bW) = a(T \otimes V) + b(T \otimes W) \quad \forall T \in \tau^{(r \ s)} \text{ y } V, W \in \tau^{(p \ q)}$$

3. La operación producto tensorial es asociativa (aunque no conmutativa).

**Definición 2.3.9** *Un tensor (anti)simétrico en todos sus índices se llama tensor (anti)simétrico.*

**Ejemplo 2.3.10** 1. *La ley de transformación de un tensor es:*

$$S_{\alpha_1 \alpha_2, \dots}^{\beta_1 \beta_2, \dots} = A_{\alpha_1}^{\gamma_1} A_{\alpha_2}^{\gamma_2} \cdots (A^{-1})_{\delta_1}^{\beta_1} (A^{-1})_{\delta_2}^{\beta_2} \cdots \hat{S}_{\gamma_1 \gamma_2, \dots}^{\delta_1 \delta_2, \dots}$$

2. *Si las componentes de dos tensores son iguales en una base dada, entonces son iguales en todas las bases,<sup>7</sup> esto es:*

*Si  $S_{\gamma_1 \gamma_2, \dots}^{\delta_1 \delta_2, \dots} = T_{\gamma_1 \gamma_2, \dots}^{\delta_1 \delta_2, \dots}$  en una base  $\{\partial_\alpha, \partial_\beta\}$ , entonces*

$$\hat{S}_{\alpha_1 \alpha_2, \dots}^{\beta_1 \beta_2, \dots} = \hat{T}_{\alpha_1 \alpha_2, \dots}^{\beta_1 \beta_2, \dots}$$

## 2.4. Campos tensoriales y conmutadores

En lo que sigue vamos a introducir un nuevo concepto en variedades, el paréntesis de Lie. Con el paréntesis de Lie los espacios tangentes pueden tener estructura de álgebra. Esta estructura puede ser muy importante para caracterizar a la variedad, si por ejemplo, los vectores están asociados a alguna simetría de la variedad. Comenzamos estableciendo algunas definiciones.

---

<sup>7</sup>Esta propiedad es la que permite la covariancia de las leyes de la física, por ello las ecuaciones de ésta deben escribirse en forma tensorial.

**Definición 2.4.1 Haz Tangente y Cotangente**

- 1) Definimos el **haz tangente** (fibrado tangente o variedad tangente) a  $M$  como

$$TM := \{(p, X)/p \in M, X \in T_p M\} = \bigcup_{p \in M} T_p M^8$$

- 2) Definimos el **haz cotangente** (fibrado cotangente o variedad cotangente) a  $M$  como

$$T^*M := \{(p, \omega)/p \in M, \omega \in T_p^* M\} = \bigcup_{p \in M} T_p^* M^9$$

- 3)  $X : M \mapsto TM$  se llama **campo vectorial** en  $M$ .

- 4)  $\chi(M) := \{X \mid X \text{ es un campo vectorial en } M\}$

Dado un sistema de coordenadas  $\{x^\mu\}$  y su base asociada  $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p$ , entonces:

$$X_p = X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p = X^\mu \partial_\mu \quad (2.4.1)$$

donde  $X^\mu : M \mapsto \mathbf{R}$  es la  $\mu$ -ésima coordenada del vector en la base dada y ésta depende de la carta.

**Definición 2.4.2** Si  $X^\mu(p) \in C^k$  para alguna  $k$ , decimos que el campo vectorial  $X$  es de clase  $C^k$ .

Ahora tomemos dos campos vectoriales  $X, Y$  en  $M$  y  $f \in C(\mathbf{R})$ , entonces  $\forall p \in M \quad Y_p(f) \in \mathbf{R}$ , es decir:

$$Yf : M \longrightarrow \mathbf{R}$$

es una función tal que a cada  $p \in M$  le asocia el real  $Y_p[f]$ , entonces tiene sentido la expresión  $X_p(Yf)$ , en coordenadas:

$$X_p(Yf) = X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p (Yf) = X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p Y^\nu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\nu}\right)_p$$

<sup>8</sup>A cada  $T_p M$  se le suele llamar fibra del haz.

<sup>9</sup>Se puede demostrar fácilmente que el haz tangente y el haz cotangente son variedades de dimensión  $2n$  [17].

$$= X^\mu Y^\nu \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right)_p + X^\mu \left( \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} \right)_p \left( \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right)_p$$

por tanto:

$$X_p(Yf) = X^\mu Y^\nu \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right)_p + X^\mu \left( \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} \right)_p \left( \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right)_p \quad (2.4.2)$$

como esta cantidad contiene segundas derivadas de  $f$ , entonces no pertenece a  $TM$ , sin embargo la diferencia siguiente si es un vector:

$$X_p(Yf) - Y_p(Xf) = X^\mu \left( \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} \right)_p \left( \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right)_p - Y^\mu \left( \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} \right)_p \left( \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right)_p \quad (2.4.3)$$

Esto nos lleva a definir:

**Definición 2.4.3** Sean  $X, Y$  campos vectoriales en  $M$  y  $f \in C(\mathbf{R})$ , definimos la aplicación:

$$[X, Y]_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbf{R}$$

tal que

$$[X, Y]_p f := X_p(Yf) - Y_p(Xf) \quad (2.4.4)$$

se llama **conmutador** (o **corchete de Lie**) de  $X$  y  $Y$  y sus componentes son:

$$[X, Y]^\mu = X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu \quad (2.4.5)$$

Observemos que de esta definición se puede deducir fácilmente la identidad de Leibniz para el producto:

$$[X, Y]_p(fg) = f(p)[X, Y]_p(g) + g(p)[X, Y]_p(f).$$

Puesto que  $[X, Y]_p$  es también  $\mathbf{R}$ -lineal, se tiene que (2.4.4) define un vector tangente a  $M$  en cada punto  $p$  como derivación. Resumiendo:

**Proposición 2.4.4** Si  $X, Y \in \chi(M) \implies [X, Y]_p \in T_p M$ . Además,

$$[X, Y] : M \longrightarrow TM \quad \text{tal que } p \longmapsto [X, Y]_p$$

es un campo vectorial sobre  $M$ .

**Propiedades del corchete de Lie.** El corchete de Lie de campos es un corchete de Lie “abstracto”. Esto quiere decir que es una aplicación

$$[\ , \ ] : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \mapsto [X, Y]$$

Se puede probar directamente de la definición anterior que cumple las siguientes propiedades:

1. Es bilineal:

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z], \quad [X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z]$$

2. Es antisimétrico:  $[X, Y] = -[Y, X]$
3. Es distributivo:  $[X + Z, Y] = [X, Y] + [Z, Y]$
4. Cumple la identidad de Jacobi:

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$$

**Definición 2.4.5** *Un espacio vectorial dotado de una operación que verifique las propiedades anteriores (1)-(4) recibe el nombre de **álgebra de Lie**. En consecuencia,  $(\chi(M), [\ , \ ])$  es un álgebra de Lie (de dimensión  $\infty$  si  $\dim M > 0$ ).*

Si  $\{\partial_\mu\}$  es un campo de bases en  $M$ , podemos escribir el conmutador como una combinación lineal de los elementos de la base, esto es:

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = \gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho \tag{2.4.6}$$

donde se puede demostrar que las  $\gamma_{\mu\nu}^\rho$  no son las componentes de un tensor, a éstas se les llama funciones de estructura.

**Definición 2.4.6** *Sean  $\{v_0, \dots, v_n\}$  base de  $\chi(M)$  (es decir  $v_{0p}, \dots, v_{np}$  base de  $T_p M$ ) se llama **base coordinada** si y sólo si,  $\forall \mu = 0, \dots, n$  el vector  $v_\mu$  se puede escribir como la derivada con respecto a una coordenada.*

**Teorema 2.4.7** La base  $v_0, \dots, v_n$  de  $\chi(M)$  es una base coordenada, si y sólo si

$$\forall \mu, \nu = 0, \dots, n \quad [v_\mu, v_\nu] = 0 \quad (2.4.7)$$

**Demostración.** Sean  $v, w \in \{v_0, \dots, v_n\}$  y sea  $\{x^\mu\}$  un sistema local de coordenadas, entonces  $\{\partial_\mu\}$  es una base de  $\chi(M)$ , por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} [v, w] &= v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} w^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - w^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ &= v^\mu w^\nu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) + v^\mu \frac{\partial w^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - v^\mu w^\nu \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) - w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ &= \left( v^\mu \frac{\partial w^\nu}{\partial x^\mu} - w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \end{aligned}$$

supongamos que  $\exists \{u_\mu\}_{\mu=0, \dots, n}$  tal que  $v = \frac{\partial}{\partial u^0}$  y  $w = \frac{\partial}{\partial u^1} \implies v^\mu_{\{u\}} = \delta_0^\mu, w^\mu_{\{u\}} = \delta_1^\mu \implies$

$$v^\mu = A_\nu^\mu v_{\{u\}}^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^0} \delta_0^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^0}$$

análogamente:  $w^\nu = A_\rho^\nu w_{\{u\}}^\rho = \frac{\partial x^\nu}{\partial u^1} \delta_1^\rho = \frac{\partial x^\nu}{\partial u^1} \implies$

$$v^\mu \frac{\partial w^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^0} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial u^1} = \frac{\partial}{\partial u^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial u^1} = \frac{\partial^1 x^\nu}{\partial u^0 \partial u^1}$$

$$w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial u^0} = \frac{\partial}{\partial u^1} \frac{\partial x^\mu}{\partial u^0} = \frac{\partial^1 x^\mu}{\partial u^1 \partial u^0} = \frac{\partial^1 x^\mu}{\partial u^0 \partial u^1}$$

$$\implies [v, w] = 0 \quad \blacksquare$$

Cabe mencionar que no todos los campos vectoriales dan lugar a bases coordenadas.

## 2.5. Conexiones lineales

Cuando se considera el cambio de un campo vectorial o tensorial al moverse en una variedad, debemos tomar en cuenta que al movernos de un punto a otro no sólo las componentes de dichos objetos pueden cambiar, sino que también la base en las que dichas componentes se miden cambia de un punto a otro. En efecto, cuando consideramos las componentes de un objeto geométrico (vector o tensor), dichas componentes siempre están dadas con respecto a una base específica, por lo que es necesario el concepto de derivada covariante. En esta sección introducimos un elemento nuevo sobre una variedad: el concepto de conexión. A partir de él se pueden definir varios conceptos de interés geométrico: la derivada covariante a lo largo de una curva, el transporte paralelo, las geodesías, la aplicación exponencial y la curvatura.

**Definición 2.5.1** Sean  $X, Y, Z \in \chi(M)$  y sea  $f \in C(M, \mathbf{R})$  con  $a \in \mathbf{R}$ , al operador  $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  tal que  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  que satisface las siguientes propiedades:

1.  $\nabla_X(aY + Z) = a\nabla_X Y + \nabla_X Z$ .
2.  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X[f]Y$ .
3.  $\nabla_{(fX+aY)}Z = f\nabla_X Z + a\nabla_Y Z$ .

se llama **conexión lineal** en  $M$  (fig. 2.5.1) y definimos a la derivada covariante de  $Y$  respecto a  $X$  como:

$$\nabla(X, Y) := \nabla_X Y \quad (2.5.1)$$

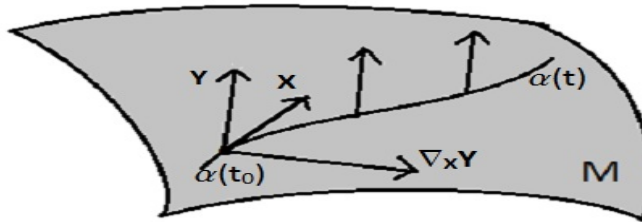


Figura 2.5.1: Interpretación geométrica de la derivada covariante

**Definición 2.5.2** Sean  $X, Y \in \chi(M)$  tal que  $\nabla_X Y = 0$ . Se dice entonces que  $Y$  está **transportado paralelamente** a lo largo de  $X$ .

**Definición 2.5.3** Sea  $\{\partial_\mu\}$  base de  $\chi(M)$ . Como  $\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu \in \chi(M)$  entonces  $\exists_n \Gamma_{\nu\mu}^\rho \in \mathbf{R}$  tales que:

$$\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \Gamma_{\nu\mu}^\rho \partial_\rho \quad (2.5.2)$$

los escalares  $\Gamma_{\nu\mu}^\rho$  se llaman **coeficientes de la conexión**.

Podemos escribir a la derivada covariante como:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^\mu \partial_\mu} (Y^\nu \partial_\nu) = X^\mu \nabla_{\partial_\mu} (Y^\nu \partial_\nu) = X^\mu (\partial_\mu Y^\nu) \partial_\nu + X^\mu (\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu) Y^\nu \\ &= (X(Y^\rho) + \Gamma_{\nu\mu}^\rho X^\mu Y^\nu) \partial_\rho \end{aligned}$$

por lo tanto la derivada covariante se puede escribir como:

$$\nabla_X Y = (X(Y^\rho) + \Gamma_{\nu\mu}^\rho X^\mu Y^\nu) \partial_\rho \quad (2.5.3)$$

Así la derivada covariante queda completamente especificada por los coeficientes de la conexión  $\Gamma_{\nu\mu}^\rho$ . Así la derivada covariante en componentes es:

$$\nabla_{\partial_\nu} X^\mu = \partial_\nu X^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu X^\rho \text{<sup>10</sup>} \quad (2.5.4)$$

La derivada covariante nos dice como cambian las componentes de un vector al movernos en una variedad, e incluye el cambio de los elementos de la base. Nótese que la derivada covariante se reduce a la derivada parcial cuando los símbolos de Christoffel son cero, lo que ocurre en un espacio plano en coordenadas cartesianas, pero no en coordenadas esféricas. Sin embargo, siempre es posible encontrar una transformación de coordenadas para la cual los símbolos de Christoffel son iguales a cero en un punto dado (pero no en otros puntos excepto si el espacio es plano). Esto se debe a que todo espacio curvo es “localmente plano”: en una región infinitesimalmente cercana a todo punto, la geometría se aproxima a la plana (es por eso que los mapas de una ciudad en un plano son muy buenos, mientras que los mapas del mundo entero introducen distorsiones serias).

**Lema 2.5.4** Bajo un cambio de coordenadas  $\hat{\partial}_\mu = A_\mu^\nu \partial_\nu$ , tenemos:

$$\hat{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu = (A^{-1})_\sigma^\mu (A)_\nu^\lambda (A)_\rho^\theta \Gamma_{\lambda\theta}^\sigma + (A^{-1})_\sigma^\mu (A)_\rho^\theta \partial_\theta (A)_\nu^\sigma \quad (2.5.5)$$

<sup>10</sup>En textos de Física es común usar la notación  $X_{;\nu}^\mu := X_{,\nu}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu X^\rho$   
Donde  $X_{;\nu}^\mu := \nabla_{\partial_\nu} X^\mu := \nabla_\nu X^\mu$  y  $X_{,\nu}^\mu := \partial_\nu X^\mu$

**Demostración.** Sabemos que:

$$\nabla_{\hat{\partial}_\rho} \hat{\partial}_\nu = \Gamma_{\nu\rho}^{\hat{\mu}} \partial_\mu = \Gamma_{\nu\rho}^{\hat{\mu}} A_\mu^\sigma \partial_\sigma$$

por otro lado:

$$\nabla_{\hat{\partial}_\rho} \hat{\partial}_\nu = \nabla_{(A)^\theta_\rho \partial_\theta} (A_\nu^\lambda \partial_\lambda) = A_\rho^\theta A_\nu^\lambda \nabla_{\partial_\theta} \partial_\lambda + A_\nu^\theta \partial_\theta (A_\nu^\mu) \partial_\lambda = A_\nu^\lambda A_\rho^\theta \Gamma_{\lambda\theta}^\sigma \partial_\sigma + A_\rho^\theta \partial_\theta (A_\nu^\sigma) \partial_\sigma$$

por lo tanto:

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\hat{\mu}} = (A^{-1})_\sigma^\mu (A)_\nu^\lambda (A)_\rho^\theta \Gamma_{\lambda\theta}^\sigma + (A^{-1})_\sigma^\mu (A)_\rho^\theta \partial_\theta (A)_\nu^\sigma \quad \blacksquare$$

**Lema 2.5.5** Si  $\nabla, \nabla^*$  son conexiones en  $M$ , entonces  $\nabla - \nabla^*$  es un tensor.

**Demostración.** Definimos  $D(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_X^* Y$  y sea  $f \in (M, \mathbf{R})$  de clase  $C^1$ . Es claro que  $D$  hereda de  $\nabla$  y  $\nabla^*$  la linealidad en su primer argumento.

Para su segundo argumento:

$$\begin{aligned} D(X, fY) &= \nabla_X(fY) - \nabla_X^*(fY) = f\nabla_X Y + X[f]Y - f\nabla_X^* Y - X[f]Y \\ &= f(\nabla_X Y - \nabla_X^* Y) = fD(X, Y) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Definición 2.5.6** Si  $f \in C(M, \mathbf{R})$ ,  $X \in \chi(M)$ , entonces:

$$\nabla_X f := X[f] \quad (2.5.6)$$

**Lema 2.5.7** Sea  $\omega \in \chi^*(M)$  y definimos  $\nabla_\mu := \nabla_{\partial_\mu}$  entonces la regla de Leibnitz nos permite extender  $\nabla_\mu$  a 1-formas como:

$$(\nabla_\mu \omega)_\nu = \partial_\mu(\omega_\nu) - \Gamma_{\nu\mu}^\rho \omega_\rho \quad (2.5.7)$$

**Demostración.** Sea  $\{\partial_\mu\}$  base de  $\chi(M)$  y  $\{dx^\mu\}$  la base dual de  $\chi^*(M)$ , entonces

$$\omega = \omega_\rho dx^\rho \quad y \quad \nabla_\mu(\omega_\nu) = \partial_\mu[\omega(\partial_\nu)]$$

y de la regla de Leibnitz,

$$\nabla_\mu(\omega(\partial_\nu)) = (\nabla_\mu \omega)_\nu + \omega \nabla_\mu \partial_\nu$$



por lo tanto:

$$(\nabla_\mu \omega) \partial_\nu = \partial_\mu(\omega(\partial_\nu)) - \omega \nabla_\mu \partial_\nu = \partial_\mu(\omega_\nu) - \Gamma_{\nu\mu}^\rho \omega_\rho = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\rho \omega_\rho \quad (2.5.8)$$

pero  $(\nabla_\mu \omega) \partial_\nu = (\nabla_\mu \omega)_\nu$  ■

**Lema 2.5.8** Sea  $T$  un tensor de rango  $\binom{1}{1}$  en  $M$  entonces la regla de Leibnitz nos permite extender  $\nabla_\mu$  a tensores:

$$(\nabla_\mu T)_\nu^\rho = \partial_\mu(T_\nu^\rho) + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho T_\nu^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\theta T_\theta^\rho \quad (2.5.9)$$

**Demostración.** Sea  $\{\partial_\mu\}$  base de  $\chi(M)$  y  $\{dx^\mu\}$  su base dual, entonces

$$\nabla_\mu(T(\partial_\nu, dx^\rho)) = \partial_\mu[T(\partial_\nu, dx^\rho)]$$

y de la regla de Leibnitz:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu(T(\partial_\nu, dx^\rho)) &= (\nabla_\mu T)(e_b, w^c) + T(\nabla_\mu \partial_\nu, \omega^\rho) + T(\partial_\nu, \nabla_\mu \omega^\rho), \implies \\ (\nabla_\mu T)(\partial_\nu, \omega^\rho) &= \nabla_\mu(T(\partial_\nu, dx^\rho)) - T(\nabla_\mu \partial_\nu, \omega^\rho) - T(\partial_\nu, \nabla_\mu \omega^\rho) \end{aligned}$$

es decir:

$$(\nabla_\mu T)_\nu^\rho = \partial_\mu T_\nu^\rho - T(\Gamma_{\nu\mu}^\theta \partial_\theta, dx^\rho) + T(\partial_\nu, \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \omega^\sigma) = \partial_\mu(T_\nu^\rho) + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho T_\nu^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\theta T_\theta^\rho. \quad \blacksquare$$

## 2.6. Métrica Pseudo-Riemanniana

El principio de equivalencia llevó a Einstein a pensar que la gravedad podía identificarse con la curvatura del espacio-tiempo. Matemáticamente esto quiere decir que la teoría de la gravedad debería ser lo que se conoce como una “teoría métrica”, en la cual la gravedad se manifiesta única y exclusivamente a través de una distorsión en la geometría del espacio-tiempo. Sea  $M$  una variedad tres dimensional y sean  $\{x^\alpha\}$  las coordenadas de un evento en  $M$ , donde  $\alpha = 0, 1, 2$ ; estos números indican en que momento del tiempo y espacio ocurre este evento. Entre dos eventos infinitesimalmente cercanos con coordenadas  $\{x^\alpha\}$  y  $\{x^\alpha + dx^\alpha\}$  es posible definir una distancia invariante<sup>11</sup>  $ds^2$  de la siguiente forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \text{12}$$

<sup>11</sup>Es decir, que es independiente del sistema de coordenadas.

<sup>12</sup>Surge de extender el grupo de las transformaciones de Lorentz a todas las transformaciones continuas.

donde  $g_{\mu\nu}$  se conoce como el **tensor métrico**, el cual definiremos en las siguientes líneas.

**Definición 2.6.1** *El tensor  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbf{R}$  de rango  $\binom{0}{2}$  en  $M$ <sup>13</sup> se llama **producto interno** en  $T_p M$ , si y sólo si*

1. *Es simétrico, es decir  $\forall X, Y \in T_p M \quad \langle X, Y \rangle_p = \langle Y, X \rangle_p$*
2. *Es no degenerado, es decir  $\forall Y \in T_p M \quad \langle X, Y \rangle_p = 0 \implies X = 0$*

Si  $\{\partial_\mu\}$  es base de  $T_p M$  y  $\{dx^\mu\}$  es la base dual, podemos escribir:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (2.6.1)$$

donde  $\{dx^\mu \otimes dx^\nu\}$  es base de los tensores de rango  $\binom{0}{2}$ , donde:

$$g_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle_p \quad (2.6.2)$$

La simetría de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  implica que  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ . La no degeneración de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  implica que  $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ , entonces se puede definir  $(g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu}$  (la inversa existe), es decir se cumple que:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu \quad (2.6.3)$$

Una métrica es degenerada en el punto  $p$  si y sólo si existe algún vector de  $T_p M$  perpendicular a todos los vectores de  $T_p M$  si y sólo si la matriz  $g_{\mu\nu}$  de las componentes de la métrica es singular en cualquier base. A partir de ahora supondremos que la métrica es no degenerada, es decir, existe un único tensor de rango  $\binom{0}{2}$  cuyas componentes en una base arbitraria son  $g^{\mu\nu}$  tal que  $g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu$ .

Es usual usar indistintamente la notación  $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ , lo cual hace referencia explícita de que el producto interno depende de la métrica del espacio  $M$ .

**Definición 2.6.2** *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , sea  $\tau^{(0, 2)}$  el espacio de campos tensoriales  $\binom{0}{2}$  en  $M$ , entonces:*

1.  *$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : M \rightarrow \tau^{(0, 2)}$  tal que  $p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p$  se llama **métrica** o **tensor métrico** en  $M$ .*
2. *Los  $g_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle$  se llaman **coeficientes de la métrica**.*

<sup>13</sup>Llamado también tensor 2-covariante.

3.  $sgn :=$  *signatura* de  $g_{\mu\nu} :=$  (número de eigenvalores positivos de  $g_{\mu\nu}$ ) +  
 -(número de eigenvalores negativos de  $g_{\mu\nu}$ )

4. Si  $sgn(g_{\mu\nu}) = n$ , entonces la métrica se llama **riemanniana** y  $(M, g_{\mu\nu})$  se llama **variedad riemanniana**.

Si  $sgn(g_{\mu\nu}) = n - 2$ , entonces la métrica se llama **lorentziana** o **pseudo-riemanniana** y a  $(M, g_{\mu\nu})$  se llama **variedad lorentziana** o **variedad pseudo-riemanniana**.

En Relatividad General la métrica varía de un punto a otro. Supongamos que  $n = 3$ , del álgebra lineal sabemos que en un punto  $p$  siempre podemos (mediante una transformación de coordenadas) expresar una métrica lorentziana como:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1) \quad \text{en } p$$

Podemos clasificar a los vectores según su carácter causal. Dado  $X \in T_p M$  decimos que  $X$  es un vector:

1. Temporal  $\iff g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu < 0$  (equivalentemente  $g(X, X) < 0$ )
2. Nulo  $\iff g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = 0$  ( $g(X, X) = 0$ )
3. Espacial  $\iff g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu > 0$  ( $g(X, X) > 0$ )
4. Causal  $\iff g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \leq 0$  ( $g(X, X) \leq 0$ )

Las transformaciones de Lorentz (que son un caso particular de las transformaciones continuas de coordenadas) garantizan que el intervalo  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  es un invariante. Esto es consecuencia directa del postulado (o mejor dicho, del hecho empírico) de la invariancia de la velocidad de la luz. Nótese que debido a la presencia de un eigenvalor negativo, la distancia invariante no es positiva definida. De hecho, a partir de la métrica uno puede distinguir entre eventos relacionados entre sí de cuatro formas distintas:

1.  $ds^2 < 0$       intervalo temporal
2.  $ds^2 = 0$       intervalo nulo
3.  $ds^2 > 0$       intervalo espacial
4.  $ds^2 \leq 0$       intervalo causal

Los intervalos espaciales corresponden a eventos tales que un objeto tendría que moverse más rápido que la luz para llegar de uno a otro (están separados principalmente en el “espacio”), los temporales a eventos donde un objeto tiene que moverse más lento que la luz para llegar de uno a otro (están separados principalmente en el “tiempo”), y los nulos a eventos que pueden alcanzarse viajando precisamente a la velocidad de la luz (la frontera entre separación espacial y temporal). Todo objeto material se mueve siguiendo trayectorias de rango temporales, y la luz se mueve siguiendo trayectorias nulas. Las trayectorias nulas definen lo que se conoce como el **cono de luz**. El cono de luz indica los eventos que pueden tener influencia física entre sí y por lo tanto, define la causalidad.

En cada punto  $p \in M$  se puede llamar “futuro” a la mitad superior del cono de luz. Si es posible hacer tal asignación de forma continua en todos los puntos de la variedad, entonces diremos que la variedad es orientable temporalmente y, si tal es el caso, entonces existe un campo vectorial  $t^\mu$  de clase  $C^\infty$  que no se anula en ningún punto y que es de tipo temporal en toda la variedad. Diremos que una curva es de género luz, espacio o tiempo dependiendo de si su vector tangente es nulo, espacial o temporal en todos los puntos de la misma.<sup>14</sup>

En general, cada producto escalar  $\langle , \rangle$  induce un isomorfismo canónico entre  $V(\mathbf{R})$  y  $V^*(\mathbf{R})$ . En efecto,

**Definición 2.6.3** *Llamamos aplicación bemol  $\flat$  (“bajar índices”) entre  $V(\mathbf{R})$  y  $V^*(\mathbf{R})$  asociada al producto escalar  $\langle , \rangle$  a la aplicación*

$$\begin{aligned} \flat : V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto v^\flat := \langle v, \rangle, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \langle v, \rangle : V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ w &\longmapsto \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

**Teorema 2.6.4** 1. *La aplicación bemol  $\flat$  es un isomorfismo entre los espacios vectoriales  $V(\mathbf{R})$  y  $V^*(\mathbf{R})$ .*

2. *La aplicación inversa  $\sharp$  de  $\flat$ , conocida como aplicación sostenido (subir índices), queda caracterizada por la relación  $\langle \phi^\sharp, w \rangle = \phi(w)$ ,  $\forall \phi \in V^*$ ,  $\forall w \in V$ .*

<sup>14</sup>En el Capítulo 3 discutiremos de forma más cuidadosa estos conceptos.

**Demostración.**

1. La linealidad es inmediata. Para la inyectividad nótese que son equivalentes: (i) tiene núcleo 0, (ii) el tensor métrico  $\langle , \rangle$  es no degenerado.
2. En efecto,  $(\phi^{\sharp})^{\flat}(w) = \langle \phi^{\sharp}(w) \rangle = \phi(w) \forall w \in V$ . Además, esta igualdad caracteriza a  $\phi^{\sharp}$  por ser  $\langle , \rangle$  no degenerada. ■

Para dar sus expresiones en coordenadas consideremos una base  $B = \{\partial_{\mu}\}$  de  $V(\mathbf{R})$  y su correspondiente base dual  $B^* = \{dx^{\mu}\}$ . Entonces podemos suponer que  $a^{\mu}\partial_{\mu} \in V$  y  $v^{\flat} = a_{\nu}dx^{\nu}$ . Ahora bien  $a_{\nu} = v^{\flat}(v_{\nu}) = \langle v, v_{\nu} \rangle$  y

$$a_{\nu} = v^{\flat}(v_{\nu}) = \langle v, v_{\nu} \rangle = g_{\mu\nu}a^{\mu} \quad (2.6.4)$$

donde  $g_{\mu\nu} = \langle v_{\mu}, v_{\nu} \rangle$ . Por tanto,  $v^{\flat} = a^{\mu}g_{\mu\nu}dx^{\nu}$ . Sea  $g^{\mu\nu}$  la matriz inversa de  $g_{\mu\nu}$  entonces multiplicando ambos miembros de la igualdad (2.6.4) por  $g^{\nu\rho}$  y sumando en  $\nu$  obtenemos:

$$a^{\rho} = a_{\nu}g^{\nu\rho}$$

En conclusión, si  $\phi = b_{\mu}dx^{\mu} \in V^*$  y suponemos  $\phi^{\sharp} = b^{\nu}\partial_{\nu}$ , entonces

$$\phi^{\sharp} = b_{\mu}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}$$

**Nota:** Si  $\langle , \rangle$  es euclidiano y  $B$  es una base ortonormal entonces  $a_{\nu} = a^{\nu}$  para todo  $\nu \in \{0, \dots, n\}$  (en el caso lorentziano la única diferencia es  $a^0 = -a_0$ ).

Este isomorfismo entre  $V(\mathbf{R})$  y  $V^*(\mathbf{R})$  induce isomorfismos entre tensores rango  $\binom{2}{0}$ ,  $\binom{0}{2}$  y  $\binom{1}{1}$  (en general, entre tensores rango  $\binom{r}{s}$  y  $\binom{t}{u}$ ). Por ejemplo, supongamos que  $T$  es un tensor  $\binom{2}{0}$  y queremos construir a partir de él un tensor  $T$  que sea  $\binom{0}{2}$ . Entonces basta con definir  $\hat{T}(\phi, \psi) := T(\phi^s, \psi^s)$ . Obsérvese que la relación correspondiente en coordenadas queda como

$$T = t_{\mu\nu}dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}, \quad \hat{T} = t^{\rho\sigma}\partial_{\rho} \otimes \partial_{\sigma}$$

donde

$$t_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}t^{\rho\sigma}, \quad t^{\rho\sigma} = g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}t_{\mu\nu}$$

Tenemos que  $T^*M$  es un espacio vectorial para cada punto  $p \in M$ . Su dual en cada punto será isomorfo a  $TM$  en ese punto. Nosotros vamos a identificar ambos espacios.

**Definición 2.6.5** Como  $(T^*M)^* = TM$  para todo  $x \in M$ . Se tiene que si  $\omega \in T^*M$  y  $X \in TM$ , entonces  $X(\omega) \in \mathbf{R}$ , con  $X(\omega) = \omega(X) = \langle \omega, X \rangle$ .

En resumen, la introducción de una métrica supone la presencia de una estructura adicional en la variedad diferenciable que permite establecer un isomorfismo canónico entre los espacios tangente  $T_p M$  y cotangente  $T_p^* M$ . Así, se establece también un isomorfismo entre cualquier espacio tensorial definido sobre  $M$  mediante el cual podemos «subir y bajar índices» con la métrica y su inversa. Por lo tanto dado que  $(g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,\dots,n}$  es no-singular, existe un isomorfismo entre los espacios  $T_p M$  y  $T_p^* M$  de la siguiente manera:

$$T_p M \longleftrightarrow T_p^* M \text{ tal que } \forall x \in T_p M, \quad X^\mu = g^{\mu\nu} \omega_\nu \quad (2.6.5)$$

Por tanto podemos identificar  $x \longleftrightarrow \omega$ .

**Definición 2.6.6** Sea  $\nabla$  una conexión lineal definida en el haz tangente  $TM$  sobre una variedad  $M$  con métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Entonces se dice que  $\nabla$  es compatible con la métrica si y sólo si para todo  $X, Y, Z \in \chi(M)$  se tiene que

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle \nabla_X Y, Z \rangle$$

**Definición 2.6.7** Sea  $\nabla$  una conexión lineal en  $M$ , entonces  $\nabla$  se llama **simétrica**<sup>15</sup> si y sólo si:

$$\forall X, Y \in \chi(M) \quad [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

El siguiente lema es una justificación de la definición anterior.

**Lema 2.6.8**  $\nabla$  es una conexión simétrica si y sólo si

$$\Gamma_{\nu\mu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho$$

**Demostración.** Por definición de la derivada covariante, tenemos

$$(\nabla_X Y - \nabla_Y X)^\rho = (\partial_\alpha Y^\rho + \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho) X^\alpha Y^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\rho Y^\nu X^\mu - (\partial_\alpha Y^\rho X^\lambda + \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho) Y^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\rho X^\nu Y^\mu$$

de donde:

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y - \nabla_Y X)^\rho &= [X, Y]^\rho \iff \\ \Gamma_{\nu\mu}^\rho Y^\nu X^\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho X^\nu Y^\mu &= (\Gamma_{\nu\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho) Y^\nu X^\mu = 0 \iff \Gamma_{\nu\mu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En una variedad diferenciable pueden coexistir una conexión y una métrica sin relación alguna. Sin embargo, existe una única conexión simétrica, llamada conexión de Levi-Civita compatible con la métrica, es decir, tal que la derivada covariante de la métrica se anula  $\nabla g = 0$ . Esto lleva a definir los símbolos de Christoffel, esto es lo que muestra el siguiente teorema.

<sup>15</sup>En la siguiente sección veremos que esta condición equivale a pedir que la torsión sea cero.

**Teorema 2.6.9** Sea  $M$  una variedad diferenciable con métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Entonces existe una única conexión lineal en  $TM$ , simétrica y compatible con la métrica tal que:

$$\nabla g = 0 \tag{2.6.6}$$

En una base coordenada sus componentes son:

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\{\partial_{\nu}g_{\sigma\rho} + \partial_{\rho}g_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\nu\rho}\} \tag{2.6.7}$$

A esta conexión se le llama **conexión riemanniana** (o **conexión de Levi-Civita**) y a sus componentes  $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$  se les llama **símbolos de Christoffel**.

**Demostración.** Denotemos  $g := \langle \cdot, \cdot \rangle$  y sean  $X, Y, Z \in \chi(M)$ , notemos que  $g(Y, Z) : M \mapsto \mathbf{R}$  y como  $\nabla g = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= \nabla_X(g(Y, Z)) = (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{i}$$

análogamente se tienen las siguientes relaciones:

$$Y(g(Z, X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \tag{ii}$$

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \tag{iii}$$

haciendo (i) + (ii) - (iii), entonces

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) &= 2g(Z, \nabla_X Y) + g(Y, [X, Z]) + g(X, [Y, Z]) + \\ &\quad + g(Z, [Y, X]) \end{aligned}$$

es decir, tenemos:

$$\begin{aligned} g(Z, \nabla_X Y) &= \frac{1}{2}\{-Z(g(X, Y)) + Y(g(Z, X)) + X(g(Y, Z)) + g(Z, [X, Y]) + \\ &\quad + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z])\} \end{aligned}$$

Sea  $\{\partial_\mu\}$  base de  $\chi(M)$ , y pongamos  $Z = Z^\mu\partial_\mu$ ,  $X = X^\nu\partial_\nu$ ,  $Y = Y^\rho\partial_\rho$ , entonces

$$g(\partial_\mu, \nabla_\nu\partial_\rho) = \frac{1}{2}\{\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} + \gamma_{\nu\rho}^\delta g_{\mu\delta} + \gamma_{\mu\nu}^\delta g_{\rho\delta} - \gamma_{\rho\mu}^\delta g_{\nu\delta}\}$$

por otro lado:

$$g(\partial_\mu, \nabla_\nu\partial_\mu) = g(\partial_\mu, \Gamma_{\rho\nu}^\delta\partial_\delta) = \Gamma_{\rho\nu}^\delta g(\partial_\mu, \partial_\delta) = \Gamma_{\rho\nu}^\delta g_{\mu\delta}$$

para una base coordenada se tiene que:

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\{\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}\}$$

Esto demuestra la unicidad, ya con esta expresión para la conexión se comprueba de manera sencilla que ésta es simétrica y compatible con la métrica ■

## 2.7. Curvatura y torsión

En Relatividad Especial, en ausencia de fuerzas externas los objetos se mueven en líneas rectas en el espacio-tiempo (correspondientes a movimiento rectilíneo uniforme). La línea recta corresponde a una trayectoria de longitud extrema de acuerdo a la métrica de Minkowski (no necesariamente la más corta debido al signo negativo de uno de los eigenvalores). La idea de Einstein fue precisamente pensar que en la presencia de un campo gravitacional, los objetos aún se mueven siguiendo las trayectorias más rectas posibles, es decir trayectorias extremas, pero ahora en una métrica distinta. A esa trayectoria extrema se le llama “geodésica”. De esta forma, la gravedad no se ve como una fuerza externa, sino como una distorsión en la métrica. Dada esta distorsión, los objetos se mueven simplemente siguiendo una geodésica. Hasta ahora, para una curva diferenciable  $\alpha(t)$  en  $M$ , hemos definido su velocidad  $\alpha'(t)$  pero no su aceleración. A continuación veremos como la conexión permite definir esta última y, con ella, el concepto de geodésica.

**Definición 2.7.1** Sea  $X \in \chi(M)$ , entonces las curvas integrales<sup>16</sup> de  $X$  se llaman **geodésicas** si y sólo si:

$$\nabla_X X = 0 \tag{2.7.1}$$

<sup>16</sup>Ver el Apéndice 5.5.



**Observación 2.7.2** Si tomamos un sistema local de coordenadas  $\{x^\mu\}$  en una vecindad de  $p$ , entonces:

$$\frac{dX^\mu(t)}{dt} = X^\mu(x(t)), \quad X^\mu(0) = X_p^\mu \quad \dots\dots\dots(*)$$

la condición de que la curva sea geodésica es:

$$0 = (\nabla_X X)^\mu = (\partial_\nu X^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu X^\rho)X^\nu = \partial_\nu X^\mu X^\nu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu X^\rho X^\nu$$

por lo tanto:

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu X^\rho X^\nu = -\partial_\nu X^\mu X^\nu$$

por (\*) tenemos que:

$$\frac{d^2 X^\mu}{dt^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dX^\nu(t)}{dt} \frac{dX^\rho(t)}{dt} \tag{2.7.2}$$

Para encontrar la geodésica tendríamos que resolver (2.7.2) sujeta a las condiciones iniciales  $\frac{dX^\mu(t)}{dt} = X_p^\mu$ . El teorema de existencia y unicidad de la teoría de ecuaciones diferenciales garantiza que, en una vecindad de  $p$ , existe una única solución, es decir, la geodésica existe y es única. Dado un campo gravitacional, es decir, dada la métrica de la variedad lorentziana, la ecuación de las geodésicas nos da la trayectoria de los objetos: el espacio-tiempo le dice a los objetos cómo moverse.

Es fácil ver que las componentes de la parte simétrica de la conexión en una base de coordenadas normales centradas en  $p$  se anulan en este punto.

**Teorema 2.7.3**  $\forall p \in M \exists \{x^\mu\}$  sistema de coordenadas, llamadas **coordenadas normales**, tal que

$$\Gamma_{(\nu\rho)}^\mu = 0 \quad \text{en } p.$$

Este teorema dice que para un sistema de coordenadas normales la simetrización de los símbolos de Christoffel es cero.

En una curva plana  $\alpha(t) \subset \mathbf{R}^3$ , la curvatura es una función real de variable real que nos describe completamente la curva salvo movimientos rígidos. Para curvas en el espacio, necesitamos un segundo concepto de curvatura, descrito por otra función real de variable real: la torsión, y ambas funciones también determinan la curva salvo movimientos del espacio. Para superficies tenemos varios conceptos de curvatura: la curvatura normal, las curvaturas principales, la curvatura de Gauss y la curvatura media. En una variedad métrica

con dimensión mayor, también tendremos varias nociones de curvatura, unas tensoriales y otras escalares. A lo largo de la sección,  $M$  será una variedad con métrica (con la conexión de Levi-Civita).

**Definición 2.7.4** Sea  $\{\partial_\mu\}$  base de  $\chi(M)$ , definimos  $\forall \mu, \nu, \rho = 0, \dots, n$

$$\nabla_\mu \partial_\nu - [\partial_\mu, \partial_\nu] := T_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho$$

los  $T_{\mu\nu}^\rho$  se llaman **coeficientes de torsión**.

**Observación 2.7.5** Las componentes  $T_{\mu\nu}^\rho$  son las componentes de un tensor, el **tensor de torsión**. Para demostrar este acerto simplemente se define el tensor  $T : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ , tal que

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

Con esta definición se debe comprobar que es bilineal.

Por lo tanto el mapeo  $\hat{T} : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi^*(M) \longrightarrow \mathbf{R}$ , tal que:

$$(X, Y, w) \longmapsto w[T(X, Y)]$$

Es lineal pues  $T$  es lineal, entonces  $\hat{T}$  es un tensor y por construcción sus componentes son  $T_{\mu\nu}^\rho$ ,  $\hat{T}$  es el tensor de torsión, aunque abusando del lenguaje es usual llamar a  $T$  tensor de torsión.

**Lema 2.7.6** Sea  $\{\partial_\mu\}$  base de  $\chi(M)$  y  $\gamma_{\nu\rho}^\mu$  las funciones de estructura. Si  $[\partial_\mu, \partial_\nu] = \gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho$  entonces

$$T_{\mu\nu}^\rho = -2\Gamma_{[\mu\nu]}^\rho - \gamma_{\mu\nu}^\rho \quad (2.7.3)$$

**Demostración.**

$$T(\partial_\mu, \partial_\nu) = \nabla_\mu \partial_\nu - \nabla_\nu \partial_\mu - [\partial_\mu, \partial_\nu] = (\Gamma_{\nu\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \gamma_{\mu\nu}^\rho) \partial_\rho = (-2\Gamma_{[\mu\nu]}^\rho - \gamma_{\mu\nu}^\rho) \partial_\rho \quad \blacksquare$$

El [teo. 2.7.3, pág. 47], dice que las geodésicas fijan la parte simétrica de la conexión. El lema 2.7.6 nos dice que la torsión representa esa parte de la conexión que no queda determinada por las geodésicas.<sup>17</sup>

<sup>17</sup>La Relatividad General presupone que la conexión se introduce para, precisamente, describir ciertas curvas como geodésicas y por lo tanto supone que la torsión es cero, las teorías en las que la torsión no se anula se conocen como teorías de Einstein-Cartan.

Como hemos visto, la métrica de una variedad nos permite obtener la trayectoria de los objetos en un campo gravitacional. Sin embargo, el tensor métrico no es la forma más conveniente de describir la presencia de un campo gravitacional, para ver esto se pueden calcular los símbolos de Christoffel para las coordenadas esféricas los cuales no son todos cero y la ecuación de la geodésica en estas coordenadas ya no es una recta aunque el espacio es plano. Debemos encontrar entonces una forma de distinguir con certeza entre un espacio plano y uno que no lo es. La manera de hacer esto es a través del llamado “tensor de curvatura de Riemann”. Este tensor mide el cambio de un vector al transportarlo alrededor de un circuito cerrado manteniéndolo siempre paralelo a sí mismo (“transporte paralelo”). En un espacio plano, el vector no cambia al hacer esto, en un espacio curvo sí lo hace. Esto puede verse claramente si uno piensa en mover un vector en la superficie terrestre. Si comenzamos en un punto en el ecuador con un vector apuntando al este, nos movemos hasta el polo norte siguiendo un meridiano, bajamos siguiendo otro meridiano que haga un ángulo recto hacia el este con el primero hasta llegar de nuevo al ecuador, y luego seguimos el ecuador hasta volver al punto original, nos encontraremos con que el vector ahora apunta al sur.

**Teorema 2.7.7** Sea  $R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ , tal que

$$(X, Y, Z) \longmapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

entonces:

$$\hat{R} : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi^*(M) \longrightarrow \mathbf{R}$$

tal que

$$(X, Y, Z, \omega) \longmapsto \omega[R(X, Y, Z)]$$

es un tensor, conocido como el **tensor de curvatura** o **tensor de Riemann**, denotado como **Riem**

**Demostración.** Por definición  $R(X, Y, Z) = -R(Y, X, Z)$ . Sólo es necesario probar la linealidad en el primer y tercer argumento. La linealidad bajo la suma y la multiplicación por un escalar es trivial, sólo hay que probar linealidad para la multiplicación por una función.

Sea  $f \in C(M, \mathbf{R})$ , entonces

$$\begin{aligned} 1. \quad R(fX, Y, Z) &= \nabla_{fX} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX, Y]} Z \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - Y(f) \nabla_X Z - \nabla_{f[X, Y] - Y(f)X} Z = fR(X, Y, Z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad R(X, Y, fZ) &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X, Y]} (fZ) \\
&= \nabla_X (f \nabla_Y Z - Y(f)Z) - \nabla_Y (f \nabla_X Z + X(f)Z) - f \nabla_{[X, Y]} Z - ([X, Y]f)Z \\
&= fR(X, Y, Z) + X(f) \nabla_Y Z + XY(f)Z + Y(f) \nabla_X Z - Y(f) \nabla_X Z + \\
&\quad - YX(f)Z - X(f) \nabla_Y Z - [X, Y]fZ = fR(X, Y, Z).
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $R$  es lineal en todos sus argumentos. Como  $\hat{R}$  es lineal en su último argumento (por construcción) entonces  $R$  es un tensor.<sup>18</sup> ■

**Lema 2.7.8** *Si definimos las componentes del tensor de Riemann por:*

$$R(\partial_\nu, \partial_\delta, \partial_\mu) := R_{\mu\nu\delta}^\rho \partial_\rho \quad (2.7.4)$$

donde  $\{\partial_\rho\}$  es una base coordenada de  $\chi(M)$ , entonces

$$R_{\mu\nu\delta}^\rho = \partial_\nu(\Gamma_{\mu\delta}^\rho) - \partial_\delta(\Gamma_{\mu\nu}^\rho) + \Gamma_{\mu\delta}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\delta}^\rho \quad (2.7.5)$$

**Demostración.** De la definición de tensor de Riemann, tenemos que:

$$\begin{aligned}
R(\partial_\nu, \partial_\delta, \partial_\mu) &= \nabla_\nu \nabla_\delta \partial_\mu - \nabla_\delta \nabla_\nu \partial_\mu - \nabla_{[\partial_\nu, \partial_\delta]} \partial_\mu \\
&= \nabla_\nu(\Gamma_{\mu\delta}^\sigma \partial_\sigma) - \nabla_\delta(\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\sigma) - \gamma_{\nu\delta}^\sigma \nabla_\sigma \partial_\mu \\
&= \partial_\nu(\Gamma_{\mu\delta}^\sigma) \partial_\sigma + \Gamma_{\mu\delta}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \partial_\rho - \partial_\delta(\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) \partial_\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\delta}^\rho \partial_\rho - \gamma_{\nu\delta}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\rho
\end{aligned}$$

como  $\{\partial_\rho\}$  es una base coordenada, entonces  $\gamma_{\nu\delta}^\sigma = 0$  ■

**Nota.** Una discusión clásica en Relatividad General es la del “Principio de Equivalencia”, según el cual los observadores en caída libre pueden tomar coordenadas  $(t, x, y, z)$  tales que “infinitesimalmente” (“en primer orden de aproximación”) las leyes de la Física se escriben igual que para los observadores inerciales de la Relatividad Especial. La formulación matemática de este principio es la siguiente. La gravedad determina una conexión lineal sobre el espacio-tiempo y, por tanto, sus geodésicas. Los observadores en caída libre seguirán geodésicas de esta conexión y, si miden cuidadosamente, lo harán usando la aplicación exponencial [17]. Por ello, en sus coordenadas los símbolos de Christoffel se anulan a lo largo de esa geodésica, con lo que, en primer orden, considerarán símbolos de Christoffel nulos, igual que si se hallaran en  $(\mathbf{R}^n, \nabla^0)$ .

<sup>18</sup>Abusando del lenguaje es común llamar a  $R$  tensor de torsión

**Lema 2.7.9 (Identidad de Ricci)**

$$\forall X \in \chi(M) \quad \nabla_\rho(\nabla_\nu X^\mu + \Gamma_{\nu\delta}^\mu X^\delta) - \nabla_\nu(\nabla_\rho X^\mu + \Gamma_{\rho\delta}^\mu X^\delta) = R_{\sigma\rho\nu}^\mu X^\sigma \quad (2.7.6)$$

donde  $X^\mu$  denota a las componentes de  $X$  en una base coordenada.

**Demostración.**

$$\begin{aligned} R(\partial_\nu, \partial_\rho, X) &= \nabla_\nu \nabla_\rho X - \nabla_\rho \nabla_\nu X + \nabla_{[\partial_\nu, \partial_\rho]} X \\ &= \nabla_\rho(\nabla_\nu X^\mu + \Gamma_{\nu\delta}^\mu X^\delta) - \nabla_\nu(\nabla_\rho X^\mu + \Gamma_{\rho\delta}^\mu X^\delta) \end{aligned}$$

por otro lado tenemos que,  $R(\partial_\nu, \partial_\rho, X) = R_{\sigma\nu\rho}^\lambda X^\sigma \partial_\lambda$ , entonces

$$\begin{aligned} \omega^\mu(R_{\sigma\nu\rho}^\lambda X^\sigma \partial_\lambda) &= \omega^\mu(\nabla_\rho(\nabla_\nu X^\mu + \Gamma_{\nu\delta}^\mu X^\delta) - \nabla_\nu(\nabla_\rho X^\mu + \Gamma_{\rho\delta}^\mu X^\delta)) \\ &= \nabla_\rho(\nabla_\nu X^\mu + \Gamma_{\nu\delta}^\mu X^\delta) - \nabla_\nu(\nabla_\rho X^\mu + \Gamma_{\rho\delta}^\mu X^\delta) \end{aligned}$$

y además:

$$\omega^\mu(R_{\sigma\nu\rho}^\lambda X^\sigma \partial_\lambda) = R_{\sigma\nu\rho}^\lambda X^\sigma \omega^\mu(\partial_\lambda) = \delta_\lambda^\mu R_{\sigma\nu\rho}^\lambda X^\sigma$$

por lo tanto:

$$R_{\sigma\nu\rho}^\lambda X^\sigma = \nabla_\rho(\nabla_\nu X^\mu + \Gamma_{\nu\delta}^\mu X^\delta) - \nabla_\nu(\nabla_\rho X^\mu + \Gamma_{\rho\delta}^\mu X^\delta) \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.7.10 (Identidades de Bianchi).** Si la torsión es nula, es decir, si  $T_{\nu\rho}^\mu = 0$  y  $\{\partial_\mu\}$  es una base coordenada, entonces  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$

**1. La primera identidad de Bianchi**

$$R_{[\nu\rho\delta]}^\mu = R_{\nu\rho\delta}^\mu + R_{\rho\delta\nu}^\mu + R_{\delta\nu\rho}^\mu = 0 \quad (2.7.7)$$

**2. La segunda identidad de Bianchi**

$$\nabla_{[\sigma} R_{\rho\delta]\nu}^\mu = \nabla_\sigma R_{\nu\rho\delta}^\mu + \nabla_\rho R_{\nu\delta\sigma}^\mu + \nabla_\delta R_{\nu\sigma\rho}^\mu = 0 \quad (2.7.8)$$

**Demostración.**

- 1) Trivial de la definición de tensor de Riemann y de la identidad de Jacobi.
- 2) Tomamos un sistema de coordenadas normales en  $p \in M$ , entonces  $\Gamma_{(\nu\rho)}^\mu = 0$  en  $p$ . Como la torsión es cero en todo  $M$  y tenemos una base coordenada,

entonces del teorema 2.7.6  $\Gamma_{[\nu\rho]}^\mu = 0$  en toda la variedad, por lo tanto  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = 0$  en  $p$ , entonces

$$\nabla_\sigma R_{\nu\rho\delta}^\mu = \partial_\sigma R_{\nu\rho\delta}^\mu = \partial_\sigma (\partial_\rho \Gamma_{\nu\delta}^\mu - \partial_\delta \Gamma_{\nu\rho}^\mu)$$

como  $\Gamma$  es simétrico en los índices  $\rho\sigma$  y  $\delta\sigma$ , entonces antisimetrizando en los índices  $\rho\delta\sigma$  obtenemos la ecuación buscada ■

### Teorema 2.7.11 *Simetrías del tensor de Riemann*

1.  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(Y, X)Z, W \rangle$
2.  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$
3.  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(Z, W)X, Y \rangle$

#### **Demostración.**

- 1) Se sigue de la definición del tensor de curvatura.
- 2) Es equivalente probar que  $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$ , lo cual se hace mediante la definición de tensor de Riemann y las propiedades de la métrica.
- 3) Se usa la primera identidad de Bianchi para las posibles permutaciones de los índices inferiores ■

No definiremos formalmente el tensor de Ricci, simplemente diremos que es la contracción del tensor de Riemann.

#### **Definición 2.7.12**

$$R_{\mu\nu} := R_{\mu\delta\nu}^\delta \quad (2.7.9)$$

Son las componentes de un tensor de rango  $\binom{0}{2}$  que se llama **tensor de Ricci**.

Es fácil probar que las propiedades del teorema 2.7.11 implican que

$$R_{\mu\nu\rho\delta} = -R_{\nu\mu\rho\delta} = -R_{\mu\nu\delta\rho} = R_{\rho\delta\mu\nu}$$

En resumen, el tensor de Riemann de la conexión de Levi-Civita es antisimétrico en el primer par de índices; también es antisimétrico en el segundo par de índices; además, es simétrico bajo el intercambio del primer par por el segundo, lo que hace que el tensor de Ricci sea simétrico  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ .

**Definición 2.7.13** Se define el *escalar de curvatura* (o *escalar de Ricci*)  $R$  de  $(M, g)$  como la contracción métrica de su tensor de Ricci, esto es

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.7.10)$$

y se define el *tensor de Einstein*.

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (2.7.11)$$

El tensor de Einstein es simétrico y además tiene derivada covariante nula

$$\nabla_\rho G_\nu^\mu = 0 \quad (2.7.12)$$

como se deduce de la identidad de Bianchi. Evidentemente, esta identidad de Bianchi reducida no contiene la misma información que la original en términos del tensor de Riemann completo. La parte que falta corresponde a la derivada covariante del tensor de Weyl. De hecho el tensor de Riemann puede escribirse en términos del tensor de Weyl como [1]:

$$R_{\mu\nu\rho}^\delta = W_{\mu\nu\rho}^\delta + \frac{1}{2}(R_\nu^\delta g_{\mu\rho} - R_\rho^\delta g_{\mu\nu} + R_{\mu\rho}\delta_\nu^\delta - R_{\mu\nu}\delta_\rho^\delta) + \frac{1}{6}R(g_{\mu\nu}\delta_\rho^\delta - g_{\mu\rho}\delta_\nu^\delta) \quad (2.7.13)$$

Teniendo en cuenta las simetrías del tensor de Riemann, éste tiene  $n^2(n^2 - 1)/12$  componentes algebraicamente independientes y el tensor de Ricci tiene  $n(n + 1)/2$  componentes. En una dimensión, los tensores de Riemann y de Ricci se anulan; en dos y tres dimensiones, el tensor de Riemann está completamente determinado por el de Ricci; en cuatro dimensiones, la mitad de las componentes del tensor de Riemann están determinadas por el tensor de Ricci y la otra mitad por el tensor de Weyl. El número de componentes de los tensores de Riemann y Ricci se puede ver en la tabla siguiente:

dimM	n	4	3	2	1
Riemann	$n^2(n^2 - 1)/12$	20	6	1	0
Ricci	$n(n + 1)/2$	10	6	1	0

En este punto hay que hacer algunas observaciones para un espacio de cuatro dimensiones:

1. Nótese que el hecho de que el tensor de Ricci sea cero no significa que el espacio sea plano, ya que las 10 componentes restantes del tensor de Riemann pueden ser distintas de cero.

2. Si  $\dim M = n = 4$ , entonces  $R_{\nu\rho\delta}^{\mu}$  tiene  $n^4 = 256$  componentes, por las simetrías de  $R_{\nu\rho\delta}^{\mu}$ , y por las identidades de Bianchi, sólo 20 de sus 256 componentes son independientes.
3. El tensor de Ricci,  $R_{\mu\nu}$  es simétrico (lo que es fácil de comprobar a partir de las simetrías de R), por lo que tiene 10 componentes independientes (de sus 16). Podemos pensar que  $R_{\mu\nu}$  representa a 10 de las 20 componentes de  $R_{\nu\rho}^{\mu}$ .
4. Las otras 10 componentes del tensor de Riemann están representadas por el **tensor de Weyl**,  $W_{\nu\rho\delta}^{\mu}$ , el cual no definiremos aquí, sólo diremos que tiene la misma forma que el tensor de Riemann excepto que su tensor de Ricci se anula;  $W_{\nu\mu\delta}^{\mu} = 0$ , W describe todo lo que no es materia (radiación gravitacional).
5. En tres dimensiones el tensor de Weyl se anula por lo cual el tensor de Riemann está totalmente determinado por el tensor de Ricci.







---

# Capítulo 3

## Geometría Extrínseca

---

La noción de superficie encajada en un espacio-tiempo 3-dimensional es la base del formalismo  $2 + 1$  de la Relatividad General. Este Capítulo estará dedicado a las superficies. Todo lo que se desarrollará es independiente de las ecuaciones de Einstein, es decir, todos los resultados discutidos en este capítulo son válidos para cualquier espacio-tiempo  $M$  dotado de una métrica Lorentziana, todas las propiedades enunciadas son puramente geométricas.

Para facilitar la escritura de una ecuación dada en forma tensorial a notación de índices diremos que: dado  $T_{\mu\nu\dots}$  entenderemos que son las componentes de un tensor que denotaremos por  $\mathbf{T}$ , dado  $T^{\mu\nu\dots}$  corresponde al tensor  $\underline{\mathbf{T}}$  y las componentes  $T^{\nu\dots}$  corresponden al objeto que denotaremos por  $\vec{\mathbf{T}}$ .

### 3.1. Geometría en variedades Lorentzianas

El propósito de esta sección es entender lo que es una variedad lorentziana globalmente hiperbólica y enunciar la definición de espacio-tiempo que se utilizará en los últimos capítulos, la mayoría de los teoremas no se demostraran aquí pero daremos las referencias donde pueden consultarse las demostraciones correspondientes. En adelante entenderemos que  $(M, \mathbf{g})$  es una variedad lorentziana y denotaremos a los vectores tangentes a  $M$  mediante  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , etc., notación que se usa en física para poner de manifiesto que los vectores tangentes pueden ser interpretados como una velocidad.

**Definición 3.1.1** *Un abierto  $C \subset M$  es conexo si es una vecindad normal de cada uno de sus puntos, es decir, que para cualquier par de puntos  $p, q \in C$  existe una única geodésica contenida en  $C$  que los une.*

De [18], página 145, obtenemos la siguiente definición:

**Definición 3.1.2** Sea  $\phi$  una función sobre una variedad diferenciable  $M$  que asigna a cada  $p \in M$  una componente conexa  $\phi_p$  del conjunto de los vectores temporales de  $T_pM$ . La función  $\phi$  es diferenciable si para cada  $p \in M$  existe un campo vectorial  $\mathbf{X}$  diferenciable en alguna vecindad  $U$  de  $p$  tal que  $\mathbf{X}_q \in \phi_q$  para todo  $q \in U$ . A una función tal la llamaremos **orientación en el tiempo** de  $M$ . Diremos que  $(M, \mathbf{g})$  es **orientable en el tiempo** si admite una orientación en el tiempo. Si tenemos una orientación en el tiempo  $\phi$  en  $(M, \mathbf{g})$  entonces diremos que  $(M, \mathbf{g})$  está **orientada en el tiempo**. Si  $(M, \mathbf{g})$  está orientada en el tiempo,  $p \in M$  y  $\mathbf{v} \in T_pM$ , diremos que  $\mathbf{v}$  es un **vector futuro (pasado)** si  $\mathbf{v}$  está en el futuro (pasado) de  $p$ .

**Observación 3.1.3** La orientabilidad en el tiempo para un espacio de Lorentz es equivalente a la existencia de un **campo vectorial  $\mathbf{X}$  temporal**, es decir que para todo  $p \in M$  el vector  $\mathbf{X}_p \in T_pM$  es temporal. En efecto, si  $\mathbf{X}$  existe, entonces asignando a cada  $p \in M$  la componente conexa de  $T_pM$  que contiene a  $\mathbf{X}_p$  tenemos una orientación en el tiempo. Por otro lado, si tenemos una orientación en el tiempo  $\phi$  en  $M$  entonces para cada punto  $p \in M$  existe una vecindad  $U_p$  en el que está definido un campo vectorial temporal  $\mathbf{X}_{U_p}$  cuyo valor para cada  $q \in U_p$  está en  $\phi_q$ . Utilizando particiones de la unidad de  $M$  se puede construir un campo  $\mathbf{X}$  temporal definido en todo  $M$ . Los detalles pueden verse en ([18], lema 5.32).

Distinguiremos las dos componentes conexas del conjunto de vectores temporales llamando a una **cono causal futuro** de  $p$  y a la otra **cono causal pasado** de  $p$ . Así, diremos que un vector en  $\mathbf{v} \in T_pM$  es un vector futuro si está en el cono causal futuro de  $p$  y análogamente diremos que  $\mathbf{v}$  es un **vector pasado** si está contenido en el cono causal pasado de  $p$ .

**Definición 3.1.4 Causalidad de curvas**

- 1) Una curva es **causal** si sus vectores tangentes son temporales o nulos.<sup>1</sup>
- 2) Una curva  $\alpha$  es una **curva temporal (nula, espacial)** si su vector tangente es temporal (nulo, espacial) en cada uno de sus puntos.
- 3) Una curva es **futura (pasada)** si sus vectores tangentes son futuros (pasados) en cada uno de sus puntos.

<sup>1</sup>Con esto estamos asumiendo que las curvas son regulares, es decir, que su vector tangente nunca se anula. Por esta razón, toda curva causal es o bien futura o bien pasada, pero no puede ocurrir que tenga unos vectores tangentes futuros y otros pasados.

**Definición 3.1.5** Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva en  $M$ , sea  $a = \inf(I)$  y  $b = \sup(I)$  (siendo posible que  $a = -\infty$  o  $b = +\infty$ ), entonces diremos que  $q \in M$  es un extremo o punto final de  $\alpha$  si para toda sucesión  $\{s_j\} \subset I$ ,  $s_j \rightarrow a$  implica que  $\alpha(s_j) \rightarrow q$  o bien  $s_j \rightarrow b$  implica que  $\alpha(s_j) \rightarrow q$ . Si  $\alpha$  es una curva causal futura entonces en el primer caso  $q$  es un extremo pasado y en el segundo caso es un extremo futuro de  $\alpha$ .

**Definición 3.1.6** Si  $\alpha$  es una curva causal tal que no existe extremo futuro (pasado) de  $\alpha$  en  $M$ , entonces diremos que  $\alpha$  es **inextensible hacia el futuro (pasado)**. Si no existen extremos pasados ni futuros, diremos simplemente que  $\alpha$  es **inextensible**. Si una curva no es inextensible, se dice que es **extensible**.

Por conveniencia y para evitar comportamientos patológicos requeriremos que todas las curvas causales extensibles contengan a sus extremos.<sup>2</sup>

**Teorema 3.1.7** Si  $C$  es un abierto conexo de  $M$ , entonces una curva causal  $\alpha$  contenida en un subconjunto  $K \subset C$  compacto es extensible.

**Demostración.** Puede revisarse en ([18], lema 14.2).

De ahora en adelante supondremos que toda variedad lorentziana  $M$  está orientada en el tiempo. A partir de esta orientación es posible definir ciertos conjuntos que permiten estudiar la estructura causal de  $M$ .

**Teorema 3.1.8** Dos vectores temporales  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p M$  están en el mismo cono causal si y sólo si verifican

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) < 0 \quad (3.1.1)$$

**Demostración.** Se puede consultar en ([18], Lema 5.29).

**Definición 3.1.9** Sea  $N$  un subconjunto de  $M$ , y sea  $S$  un subconjunto de  $N$ :

---

<sup>2</sup>La extensibilidad de una curva no implica que ésta pueda realizarse de forma diferenciable ni tan siquiera de una forma única. Si  $\alpha : (a, b] \rightarrow M$  es una curva extensible que oscila de tal manera en  $\alpha(b) \in M$  que no existe  $\alpha(b)$ , entonces  $\alpha$  se puede extender en una vecindad convexa  $C$  de  $\alpha(b)$  extendiendo a partir de  $\alpha(b)$  la geodésica que une  $\alpha(b - \epsilon)$  con  $\alpha(b)$  para algún  $\epsilon > 0$  tal que  $\alpha(b - \epsilon) \in C$ .

1. Llamaremos **futuro (pasado) cronológico** de  $S$  en  $N$  al conjunto de puntos de  $N$  que pueden ser conectados con  $S$  mediante una curva temporal futura (pasada) contenida en  $N$ . Lo denotaremos con  $I^+(S, N)$  ( $I^-(S, N)$ ). En el caso que  $N = M$  lo denotaremos simplemente como  $I^+(S)$  ( $I^-(S)$ ).
2. Llamaremos **futuro (pasado) causal** de  $S$  en  $N$  a la unión de  $S$  con el conjunto de puntos de  $N$  que pueden ser conectados con  $S$  mediante una curva causal futura (pasada) contenida en  $N$ . Lo denotaremos con  $J^+(S, N)$  ( $J^-(S, N)$ ). Cuando  $N = M$  lo denotaremos simplemente como  $J^+(S)$  ( $J^-(S)$ ).
3. Diremos que  $S$  es un conjunto **ácrono** si para todo  $p \in S$  se verifica que  $I^+(p) \cap S = \emptyset$ .
4. Diremos que  $S$  es un conjunto **acausal** si para todo  $p, q \in S$  se verifica que no existe ninguna curva causal  $\alpha$  que conecte  $p$  con  $q$ .
5. Si  $S$  es un conjunto ácrono, llamaremos **dominio de dependencia futuro (pasado)** al conjunto de puntos  $p \in M$  tales que cada curva causal inextensible hacia el pasado (futuro) que pasa por  $p$  interseca a  $S$ . Lo denotaremos como  $D_+(S)$  ( $D_-(S)$ ). Y llamaremos dominio de dependencia a  $D(S) = D_+(S) \cup D_-(S)$ . Frecuentemente, a los dominios de dependencia se les llama **desarrollos de Cauchy**.

Dependiendo del comportamiento de las curvas causales de  $M$ , es posible clasificar a las variedades lorentzianas según verifiquen ciertas condiciones. La clasificación en las categorías que mencionaremos a continuación no es exhaustiva y en [19] puede encontrarse una amplia discusión sobre estas propiedades. En la siguiente definición enunciamos algunas de ellas teniendo en cuenta que si se verifica una, entonces se verifican todas las anteriores.

**Definición 3.1.10** Sea  $M$  una variedad lorentziana orientada en el tiempo, entonces

1. Diremos que  $M$  cumple la **condición cronológica** o que  $M$  es **cronológico** si no existen curvas temporales cerradas.
2. Diremos que  $M$  cumple la **condición de causalidad** o que  $M$  es **causal** si no existen curvas causales cerradas.
3. Diremos que  $M$  cumple la **condición de distinción de pasado** o que  $M$  **distingue pasado (futuro)** si  $I^-(p) = I^-(q)$  ( $I^+(p) = I^+(q)$ ) implica que  $p = q$  para todo  $p, q \in M$ .

4. Diremos que se cumple la **condición fuerte de causalidad** o que  $M$  es **fuertemente causal** en  $p \in M$  si para cada vecindad  $U$  de  $p \in M$  existe una vecindad  $V \subset U$  de  $p$  tal que cualquier segmento de una curva causal con extremos en  $V$ , está contenido enteramente en  $U$ . Esto quiere decir que no hay curvas causales casi cerradas en  $p$ , es decir, que existe una vecindad  $V$  de  $p$  tal que cualquier curva causal que abandone  $V$  no regresa a dicha vecindad. Diremos que  $M$  cumple la condición fuerte de causalidad si la verifica para todo  $p \in M$ .
5. Diremos que  $M$  es **establemente causal** si existe una función  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  cuyo gradiente es temporal para todo punto de  $M$ .
6. Diremos que  $M$  es **causalmente simple** si para todo conjunto compacto  $K \subset M$  se verifica que  $J^+(K)$  y  $J^-(K)$  son cerrados para todo  $p \in M$ .
7. Diremos que  $M$  es **globalmente hiperbólico** si se verifica la condición fuerte de causalidad y además para cualesquier puntos  $p, q \in M$  se tiene que  $J^+(p) \cap J^-(q)$  es compacto.

**Observación 3.1.11** La definición de estabilidad causal está tomada de ([19], Proposición 6.4.9) y caracteriza a tales variedades lorentzianas. La estabilidad causal de un variedad lorentziana  $M$  implica que si introducimos una pequeña perturbación en la métrica  $\mathbf{g}$  entonces  $M$  continua siendo causal.

Además si  $f \in C(M, \mathbf{R})$  es una función tal que su campo gradiente  $\nabla f$  es temporal pasado en todo  $p \in M$ , y si  $\alpha : I \rightarrow M$  es cualquier curva diferenciable temporal futura entonces como

$$g(\nabla f, \nabla f)_p < 0$$

para todo  $p \in M$  y por la definición de  $\nabla f$  se tiene que

$$\mathbf{g}(\nabla f, \mathbf{X}) = \mathbf{X}(f)$$

para todo  $\mathbf{X} \in \chi(M)$  entonces

$$\mathbf{g}(\nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t))_{\alpha(t)} = \alpha'(t)(f) > 0$$

Para todo  $t \in I$  ya que  $\nabla f(\alpha(t))$  y  $\alpha'(t)$  están en distintos conos causales de  $T_{\alpha(t)}M$  para todo  $t \in I \subset \mathbf{R}$ . Por lo tanto, como  $\alpha'(t)(f) > 0$  para todo  $t \in I$  entonces la función  $f$  es estrictamente creciente a lo largo de  $\alpha$ . El

mismo resultado se obtiene si suponemos que  $\nabla f$  es temporal futuro para todo  $p \in M$  y si  $\alpha$  es temporal pasada. Mediante el mismo razonamiento, si  $\nabla f$  y  $\alpha'$  están en el mismo cono causal de  $T_{\alpha(t)}M$  entonces se concluye que  $f$  es estrictamente decreciente a lo largo de  $\alpha$ .

**Definición 3.1.12** Una **superficie de Cauchy** es un conjunto  $S \subset M$  tal que cualquier curva temporal inextensible interseca a  $S$  una y sólo una vez.

**Definición 3.1.13** Una **función tiempo de Cauchy** es una función continua  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  tal que es estrictamente creciente a lo largo de toda curva temporal futura y además para todo  $r \in \text{Im}f$  se tiene que  $f^{-1}(r)$  es una superficie de Cauchy.

**Teorema 3.1.14** Una superficie de Cauchy es una hipersuperficie topológica ácrona cerrada que interseca a cada curva causal inextensible.

**Demostración.** Se puede revisar ([18], Lema 14.29).

**Observación 3.1.15** Un resultado importante que relaciona los dominios de dependencia definidos anteriormente con la hiperbolicidad global es el teorema 14.38 de [18] que dice que si  $A$  es un conjunto ácrono, entonces  $\text{int}D(A)$  (si no es vacío) es globalmente hiperbólico. Se puede aplicar este teorema a una superficie de Cauchy  $S$ , que por definición es un conjunto ácrono. Como  $D(S) = M$  entonces al ser  $M$  abierto se tiene que  $\text{int}D(S) = M$  con lo que se concluye que  $M$  es globalmente hiperbólico. Esto quiere decir que la existencia de una superficie de Cauchy en  $M$  asegura la hiperbolicidad global.

**Teorema 3.1.16 (Geroch)** Si  $M$  es un variedad Lorentziana globalmente hiperbólica, entonces existe un difeomorfismo<sup>3</sup>  $\Psi : M \rightarrow \Sigma \times \mathbf{R}$  donde  $\Sigma$  es una hipersuperficie diferenciable<sup>4</sup> tal que para todo  $a \in \mathbf{R}$  se tiene que  $\Psi^{-1}(\Sigma \times a)$  es una superficie de Cauchy.

**Demostración.** Puede revisarse en ([19], proposición 6.6.8) o en ([20]).

<sup>3</sup>En la demostración de esta proposición el difeomorfismo  $\Psi$  es tal que si  $\Psi(p) = (\Psi_1(p), \Psi_2(p)) \in \Sigma \times \mathbf{R}$  entonces  $\Psi_2$  es una función estrictamente creciente a lo largo de cualquier curva temporal futura.

<sup>4</sup>La demostración de la existencia de una superficie de Cauchy diferenciable  $\Sigma$  en un variedad Lorentziana globalmente hiperbólica puede verse en [20].



**Teorema 3.1.17** *Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. *M es globalmente hiperbólico.*
2. *Existe una función tiempo de Cauchy en M.*
3. *M posee una superficie de Cauchy*

**Demostración.**

1. Para ver que 1)  $\Rightarrow$  2) basta con aplicar el teorema de Geroch el cual nos permite construir el difeomorfismo  $\Psi$  y comprobar que la función  $f = go\Psi$  es una función tiempo de Cauchy, donde  $g : \Sigma \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es la proyección natural. En efecto, f es continua pues g y  $\Psi$  lo son. La nota 2 al pie de página del teorema de Geroch nos indica que f también es estrictamente creciente a lo largo de cualquier curva temporal futura. Por último, si  $r \in \mathbf{R}$  entonces

$$f^{-1}(r) = (go\Psi)^{-1}(r) = \Psi^{-1}og^{-1}(r) = \Psi^{-1}(\Sigma \times r)$$

que es una superficie de Cauchy como asegura el teorema de Geroch.

2. Es trivial probar que 2  $\Rightarrow$  3
3. Por la observación 3.1.15 se sigue que 3  $\Rightarrow$  1 ■

El teorema de Geroch nos asegura la existencia de una foliación  $\{\Sigma\}_t := \Sigma(t)$  de superficies de Cauchy espaciales y diferenciables, donde t se incrementa en la dirección temporal futura. Esto es equivalente a la existencia de una función tiempo de Cauchy diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $f^{-1}(t) = \Sigma(t)$ . El campo vectorial

$$\mathbf{X} = \frac{\nabla f}{\mathbf{g}(\nabla f, \nabla f)} \quad (3.1.2)$$

es ortogonal a cada  $\Sigma(t)$ , es decir, todas las curvas integrales de  $\mathbf{X}$  cortan ortogonalmente a todas las  $\Sigma(t)$  y además si  $\alpha$  es una curva integral entonces  $f \circ \alpha(t) = t$ , es decir que las curvas integrales se pueden parametrizar mediante el parámetro de la foliación. Esto se desprende de:

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)'(t) &= df(\alpha'(t)) = df(\mathbf{X}(\alpha(t))) = \\ &= \mathbf{g}(\nabla f, \mathbf{X}(\alpha(t))) = \left\langle \nabla f, \frac{\nabla f}{\langle \nabla f, \nabla f \rangle} \right\rangle = 1 \end{aligned}$$

por tanto  $f\circ\alpha(t) = t + c$ , donde  $c$  es la constante de integración que podemos normalizar para que  $f\circ\alpha(t) = t$ .

Ahora podemos definir el espacio-tiempo como una variedad que cumple ciertas propiedades.

**Definición 3.1.18** *Un espacio-tiempo tres dimensional (o simplemente el espacio-tiempo de tres dimensiones) es un par  $(M, \mathbf{g})$  que consiste de*

*ET1. Una variedad Lorentziana  $M$ , 3-dimensional.*<sup>5</sup>

*ET2.  $M$  es orientable.*

*ET3.  $M$  es orientable en el tiempo.*

*ET4.  $M$  es globalmente hiperbólico*

*ET5.  $M$  es conexo.*

Que el espacio-tiempo sea conexo quiere decir que  $M$  no tiene curvas cerradas de tipo temporal, lo que implica que  $M$  no puede ser compacta porque en cualquier variedad compacta Lorentziana debe haber curvas cerradas de tipo temporal.<sup>6</sup>

Esta es la definición general de espacio-tiempo que usaremos a partir de ahora. En las siguientes secciones estudiaremos una sola superficie  $\Sigma$  encajada en un espacio-tiempo  $M$ . Como ya hemos visto es posible considerar un conjunto continuo de superficies  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbf{R}}$  que cubre a la variedad  $M$ , esto se puede hacer para una extensa clase de espacios-tiempos que sean globalmente hiperbólicos.

Para finalizar hagamos un breve resumen. Hasta ahora hemos considerado una variedad lorentziana que es orientable temporalmente, es decir, tal que podemos hacer una elección continua a través de la variedad de la mitad del cono de luz que constituye la *dirección futura* y de la mitad que corresponde a la *dirección pasada*. Si  $\Sigma \subset M$  es un conjunto cerrado ácrono, es decir, que

<sup>5</sup>Es decir, una variedad diferenciable  $C^\infty$  que tiene una métrica Lorentziana  $\mathbf{g}$  con signatura  $sgn = (-, +, +)$ . A veces el uso de la signatura  $sgn = (+, -, -)$  es más adecuado, por ejemplo cuando se introducen espinores.

<sup>6</sup>Los espacios-tiempos globalmente hiperbólicos no admiten curvas temporales cerradas, lo que significa que no admiten viajes hacia atrás en el tiempo. No todos los espacios-tiempos poseen esta propiedad, pero en la descomposición  $2 + 1$  se asume que los espacios-tiempos físicamente razonables son de este tipo.

ningún par de puntos  $p, q \in \Sigma$  se pueden unir por una curva de tipo tiempo, entonces el dominio de dependencia de  $\Sigma$  es

$$D(\Sigma) := \{p \in M \mid \text{cada curva causal inextensible a través de } p \text{ interseca } q\} \quad (3.1.3)$$

Si  $D(\Sigma) = M$ , se dice que tenemos una superficie de Cauchy para el espacio-tiempo. Se tiene entonces, que una superficie de Cauchy es automáticamente una superficie 2-dimensional. Si una variedad lorentziana orientable en el tiempo admite una superficie de Cauchy, entonces es globalmente hiperbólica.

## 3.2. Encajes

**Definición 3.2.1** Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables, entonces un mapeo  $\Phi : M \rightarrow N$  se llama **mapeo (o aplicación)** de clase  $C^k$  si y sólo si:

$$\forall f : N \rightarrow \mathbf{R} \quad f \in C^k \quad \text{tal que} \quad f \circ \Phi \in C^k$$

**Definición 3.2.2** Dadas dos variedades diferenciables  $M, N$  se dice que una aplicación  $\Phi : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo si  $\Phi$  es biyectiva y  $\Phi, \Phi^{-1}$  son diferenciables.

El nombre difeomorfismo local se extiende al caso de que sólo se pueda asegurar sobre  $f$  que, para cada  $p \in M$ , existen abiertos  $U$  de  $p$  y  $V = f(U)$  de  $f(p)$ , tales que la restricción de  $f$  a  $U$  y  $V$  sea un difeomorfismo.

**Definición 3.2.3** Dos variedades diferenciables  $M, N$  son difeomorfas si existe un difeomorfismo  $\Phi : M \rightarrow N$ .

Los difeomorfismos pueden interpretarse como cambios “activos” de coordenadas. En efecto, dado un difeomorfismo  $\varphi$  y una carta  $(U, \phi)$  que contenga a  $p$  y otra  $(V, \psi)$  que contenga a  $q = \varphi(p)$ , la aplicación  $\phi' = \psi \circ \varphi$  que asigna a  $p$  las coordenadas de  $q$ , junto con el abierto  $U' = \varphi^{-1}[\varphi(U) \cap V]$ , es una carta que contiene al punto  $p$ .

**Definición 3.2.4** Sean  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables de clase  $C^\infty$  y sea  $\Phi : M \rightarrow N$  un mapeo entre ellas, entonces:

1.  $\Phi$  es una **inmersión** si y sólo si tanto ella como su inversa son de clase  $C^\infty$  localmente, es decir, si y sólo si para cada  $p \in M$  existe un abierto  $U$  tal que  $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$  es un difeomorfismo.
2.  $\Phi$  es un **encaje** (también llamado **embebimiento**) si y sólo si es una inmersión y un homomorfismo en su imagen  $\Phi(M)$ , es decir, si y sólo si  $\Phi$  es un difeomorfismo en su imagen.

También se dice que una inmersión es una función suave  $\Phi : M \rightarrow N$  con diferencial inyectiva. Notemos que una inmersión admite intersecciones en  $\Phi(M)$  pero un encaje no. En este último caso,  $\Phi(M)$  no es sólo una variedad topológica (con la topología inducida de  $M$ ) sino que la estructura diferenciable de  $M$  se induce sobre  $\Phi(M)$  de modo que  $M$  y  $\Phi(M)$  son variedades difeomorfas. Una subvariedad encajada es entonces equivalente a una subvariedad en el siguiente sentido: una variedad  $M$  incluida en otra variedad  $N$  es una subvariedad de ésta si la inclusión  $i : M \hookrightarrow N$  es un encaje. Para una demostración de que una inmersión es un embebimiento puede consultarse [16].

A continuación daremos una definición de superficie y definiremos los mapeos pull-back y push-forward entre dos superficies, por ello reescribimos la definición de encaje dada anteriormente pero ahora en términos de las superficies.

**Definición 3.2.5** Un **encaje** es una función  $\Phi : \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  tal que es un homomorfismo, es decir, un mapeo uno a uno tal que  $\Phi$  y  $\Phi^{-1}$  son continuas.

**Definición 3.2.6** Sea  $M$  un espacio-tiempo tres dimensional; entonces una superficie  $\Sigma$  de  $M$  es la imagen de una superficie  $\hat{\Sigma}$  dada por un **encaje**  $\Phi : \hat{\Sigma} \rightarrow M$ , tal que:

$$\Sigma = \Phi(\hat{\Sigma}) \subset M.$$

Podemos definir localmente una superficie como el conjunto de puntos para los cuales un campo escalar  $t$  en  $M$  es constante (que por comodidad tomaremos como cero):

$$\forall p \in M, p \in \Sigma \iff t(p) = 0$$

Asumamos, por ejemplo que  $\Sigma$  es una subvariedad conexa de  $M$  con la topología de  $\mathbf{R}^2$ , entonces introducimos un sistema de coordenadas locales en  $M$ , dado por  $x^\alpha = (t, x, y)$  tal que  $t \in \mathbf{R}$  y  $x^i = (x, y)$  son coordenadas cartesianas en  $\mathbf{R}^2$ . La superficie  $\Sigma$  es definida por la condición  $t(p) = 0$  y podemos obtener la forma explícita del mapeo considerando  $\{x^i\}$  como coordenadas en la superficie  $\hat{\Sigma}$ , como:

$$\Phi : \hat{\Sigma} \rightarrow M \quad \text{tal que;} \quad (x, y) \mapsto (0, x, y)$$

El mapeo  $\Phi$  manda curvas en  $\hat{\Sigma}$  en curvas en  $M$  y consecuentemente manda vectores en  $\hat{\Sigma}$  a vectores en  $M$  y formas en  $M$  a formas en  $\hat{\Sigma}$ , es decir, tenemos un mapeo entre  $T_p\hat{\Sigma}$  y  $T_pM$  y otro entre  $T_p^*M$  y  $T_p^*\hat{\Sigma}$ , que definiremos más adelante.

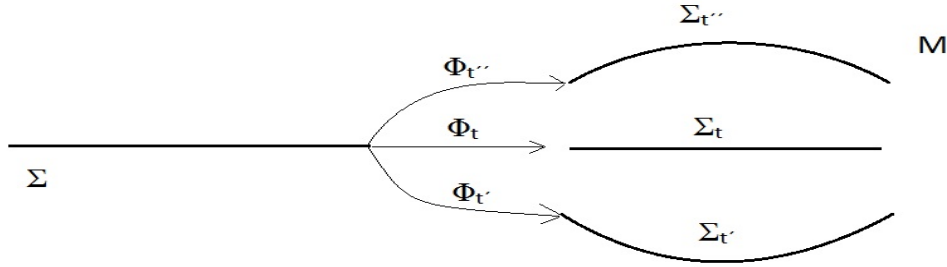


Figura 3.2.1: Foliación por una familia uni-paramétrica de encajes

Notemos que el parámetro  $t$  induce una familia uniparamétrica de encajes dada por:

$$\Phi_t : \Sigma \longrightarrow M, \quad t \in \mathbf{R}$$

tal que  $\Sigma_t := \Phi_t(\Sigma) \subset M$

Aquí  $\Sigma_t$  es la imagen de  $\Phi_t$  en  $M$  para el tiempo topológico fijado  $t$ , esta es sólo una hoja de la foliación. Mediante la foliación tenemos el concepto de pasado y futuro respecto al parámetro  $t$ , donde  $t' < t < t''$ , esto puede observarse en la figura 3.2.1 en donde  $\Sigma_{t'}$  es la línea del pasado y  $\Sigma_{t''}$  es la línea del futuro [13].

**Definición 3.2.7** Sea  $\Phi : \hat{\Sigma} \longrightarrow M$  un mapeo de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , entonces el mapeo lineal inducido  $\Phi_* T_p\hat{\Sigma} \longrightarrow T_{\Phi(p)}M$  tal que:

$$(\Phi_* \mathbf{v}_p)_{\Phi(p)} f = \Phi_*(\mathbf{v}_p)_{\Phi(p)} [f] = \mathbf{v}_p [f \circ \Phi] \tag{3.2.1}$$

se llama **push-forward** o **diferencial de  $\Phi$**  (fig. 3.2.2).

**Teorema 3.2.8** Dado el mapeo  $\Phi_* : T_p\hat{\Sigma} \longrightarrow T_{\Phi(p)}M$ , entonces  $\forall f \in C(M, \mathbf{R})$

1)  $\Phi_*(\mathbf{v}_p)_{\Phi(p)} [f] = \mathbf{v}_p [f \circ \Phi]$

2)  $\Phi_*$  es lineal.

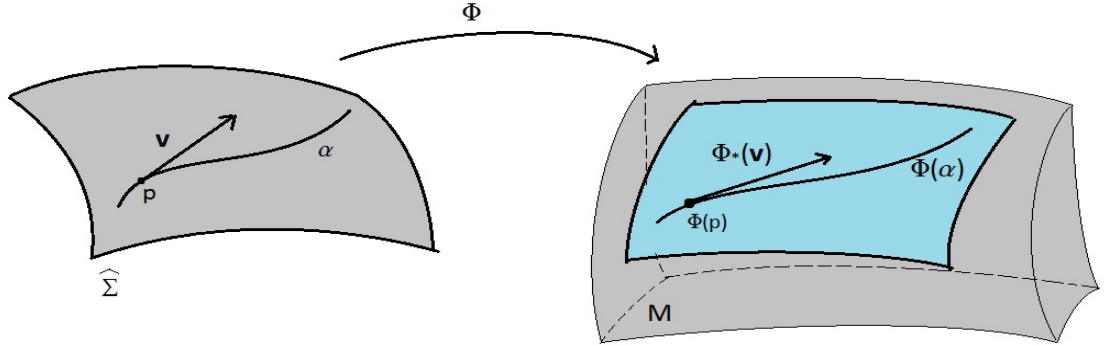


Figura 3.2.2: El push-forward

**Demostración.**

- 1) Sea  $\alpha(t)$  una curva con  $\alpha(0) = p$ ,  $\dot{\alpha}(0) = \mathbf{v}_p$ , entonces por la definición:

$$\Phi_*(\mathbf{v}_p)_{\Phi(p)}[f] = (\Phi \circ \alpha)'_{\Phi(p)}(f) = [f \circ (\Phi \circ \alpha)]'_{(0)} = [(f \circ \Phi) \circ \alpha]'_{(0)} = \mathbf{v}_p[f \circ \Phi]$$

- 2)  $[\Phi_*(\mathbf{v}_p + \mathbf{w}_p)]f = (\mathbf{v}_p + \mathbf{w}_p)(f \circ \Phi) = \mathbf{v}_p(f \circ \Phi) + \mathbf{w}_p(f \circ \Phi)$   
 $= (\Phi_*\mathbf{v}_p)f + (\Phi_*\mathbf{w}_p)f$

Sea  $a \in \mathbf{R}$ , entonces

$$[\Phi_*(a\mathbf{v}_p)]f = (a\mathbf{v}_p)(f \circ \Phi) = a(\mathbf{v}_p[f \circ \Phi]) = a(\Phi_*\mathbf{v}_p)f \quad \blacksquare$$

En la figura 3.2.2 tenemos el encaje  $\Phi$  de una superficie  $\hat{\Sigma}$  en una variedad 3-dimensional  $M$ , definida por la superficie  $\Sigma = \Phi(\hat{\Sigma})$ . El push-forward  $\Phi_*\mathbf{v}$  de un vector  $\mathbf{v}$  tangente a alguna curva  $\alpha$  en  $\hat{\Sigma}$ , es un vector tangente a  $\Phi(\alpha)$  en  $M$ .

En particular si  $x^\alpha = (t, x, y)$  es un sistema de coordenadas adaptadas,<sup>7</sup> entonces el push-forward se puede escribir explícitamente como sigue:

$$\forall \mathbf{v} = (v^x, v^y) \in T_p\hat{\Sigma} \quad \implies \quad \Phi_*\mathbf{v} = (0, v^x, v^y) \in T_{\Phi(p)}M \quad (3.2.2)$$

Donde  $v^i = (v^x, v^y)$  denota las componentes del vector  $\mathbf{v}$  con respecto a la base natural  $\{\partial_i\}$  de  $T_p\hat{\Sigma}$  asociada a las coordenadas  $\{x^i\}$  definidas anteriormente.

<sup>7</sup> Véase la Sección 5.2

**Definición 3.2.9** Sean  $\Phi : \hat{\Sigma} \rightarrow M$  de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$  y  $\Phi_*$  como ya se definió, entonces el mapeo

$$\Phi^* : T_{\Phi(p)}(M) \rightarrow T_p\hat{\Sigma} \quad \text{tal que} \quad \Phi^*(\omega)\mathbf{v} = \omega(\Phi_*\mathbf{v}) = \langle \omega, \Phi_*\mathbf{v} \rangle$$

donde  $\omega \in T_{\Phi(p)}^*M$  y  $\mathbf{v} \in T_p\hat{\Sigma}$ , se llama **pull-back** de  $\Phi$ . Donde se tiene que el mapeo

$$\Phi^*\omega : T_p\hat{\Sigma} \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{v} \mapsto \langle \omega, \Phi_*\mathbf{v} \rangle$$

De la ecuación (3.2.2) el mapeo  $\Phi^*\omega$  se puede escribir en coordenadas locales explícitamente como sigue:

Si  $\omega = (\omega_t, \omega_x, \omega_y) \in T_{\Phi(p)}^*M$ , entonces

$$\Phi^*\omega = (\omega_x, \omega_y) \quad (3.2.3)$$

Donde  $\omega_\alpha$  denota las componentes de la 1-forma  $\omega$  con respecto a la base dual  $\{\mathbf{d}x^\alpha\}$  asociada a las coordenadas  $\{x^\alpha\}$ .

**Observación 3.2.10** El pull-back puede definirse para tensores de rango  $\binom{0}{s}$  como sigue:

Si  $\mathbf{T} \in T_{\Phi(p)}^*(M)^s$  donde  $\Phi^* : T_{\Phi(p)}^*(M)^* \rightarrow T_p^*(\hat{\Sigma})^s$  tal que:

$$\forall (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) \in T_p^*(\hat{\Sigma})^s \quad \Phi^*\mathbf{T}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) = \mathbf{T}(\Phi^*\mathbf{v}_1, \dots, \Phi^*\mathbf{v}_s) \quad (3.2.4)$$

esto es, la función  $\Phi^*$  toma un tensor de rango  $\binom{0}{s} \in T^*M$  y le asocia un tensor en  $T_p^*(\hat{\Sigma})^s$ <sup>8</sup> que actúa sobre vectores dando un real.

El pull-back da la manera de trasladar la métrica del espacio  $M$  a la superficie  $\Sigma$  mediante la siguiente definición.

**Definición 3.2.11** Sea  $\mathbf{g}$  la métrica del espacio-tiempo tres dimensional, se define la **métrica inducida** en  $\Sigma$  por:

$$\gamma := \Phi^*\mathbf{g} \quad (3.2.5)$$

$\gamma$  es llamada también la **primera forma fundamental** de  $\Sigma$  (o la **2-métrica** de  $\Sigma$ ).

---

<sup>8</sup> $T_p^*(\hat{\Sigma})^s := \underbrace{T_p^*(\hat{\Sigma}) \otimes T_p^*(\hat{\Sigma}) \otimes \dots \otimes T_p^*(\hat{\Sigma})}_{s\text{-veces}}$

Notemos que

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in T_p(M) \times T_p(M), \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

de forma que en el sistema de coordenadas  $x^i = (x, y)$  de  $\Sigma$ , la ecuación (3.2.3) permite escribir a las componentes de  $\gamma$ , como

$$\gamma_{ij} = g_{ij} \tag{3.2.6}$$

**Definición 3.2.12** *Caracter causal de las superficies*

- $\Sigma$  es espacial, si y sólo si  $\gamma$  es riemanniana (o definida positiva), es decir, de signatura  $(+, +)$ .
- $\Sigma$  es temporal, si y sólo si  $\gamma$  es lorentziana, es decir, de signatura  $(-, +)$ .
- $\Sigma$  es nula, si y sólo si  $\gamma$  es degenerada, es decir, de signatura  $(0, +)$ .

Hasta ahora hemos visto que el mapeo  $\Phi$  induce un mapeo de vectores en  $\Sigma$  a vectores en  $M$  por medio del push-forward y mediante el pull-back manda s-formas en  $M$  en s-formas en  $\Sigma$  pero no hay un mapeo que haga las cosas de manera inversa.

Podríamos definir de manera ingenua el mapeo inverso como una función  $F : T_p M \rightarrow T_p \Sigma$  tal que si  $\mathbf{v} \in T_p M$  entonces  $F(\mathbf{v}) = (v^x, v^y) \in T_p \Sigma$ , es claro que este mapeo depende de la elección de las coordenadas  $(t, x, y)$ , pero un mapeo de estas características debería ser independiente de las coordenadas, en realidad el mapeo inverso estará dado por el proyector tangente (respecto a  $\mathbf{g}$ ) en  $\Sigma$ , dicho mapeo se definirá más adelante.

Ya hemos mencionado que  $\Sigma$  es espacial respecto a la métrica  $\mathbf{g}$  de  $M$ . Por ello, existe un campo vectorial temporal,  $\mathbf{n}$ , normal a la hoja  $\Sigma$  en  $M$ . Con la normal se fija una de las dos posibles orientaciones, con las cuales la noción de pasado y futuro son especificadas.

**Definición 3.2.13** *Dado un campo escalar  $t$  en  $M$  tal que la subvariedad  $\Sigma$  es definida como una superficie de nivel de  $t$ , la 1-forma  $d\mathbf{t}$  es **normal** a  $\Sigma$  en el sentido de que:*

$$\forall \mathbf{v} \in T_p \Sigma \quad \langle d\mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle = 0$$



**Definición 3.2.14** El *dual* de  $dt$ , es decir, el vector  $\nabla t$  (de componentes  $\nabla^\alpha t = g^{\alpha\mu} \nabla_\mu t = g^{\alpha\mu} (dt)_\mu$ ) es un vector **normal** a  $\Sigma$  que satisface las siguientes propiedades:<sup>9</sup>

- $\nabla t$  es temporal  $\iff \mathbf{g}(\nabla t, \nabla t) < 0$
- $\nabla t$  es espacial  $\iff \mathbf{g}(\nabla t, \nabla t) > 0$
- $\nabla t$  es nulo  $\iff \mathbf{g}(\nabla t, \nabla t) = 0$

Hay que observar que  $\nabla t$  define una única dirección normal a  $\Sigma$ . En otras palabras, un vector normal,  $\mathbf{n}$ , a  $\Sigma$  debe ser colineal a  $\nabla t$ , es decir:

$$\mathbf{n} = \lambda \nabla t \quad \text{para algún } \lambda \in \mathbf{R}$$

Si  $\Sigma$  es una superficie nula, entonces un vector normal a  $\Sigma$  es también tangente a  $\Sigma$  pues los vectores nulos son ortogonales a ellos mismos, en este caso se deberá normalizar de forma distinta.

Si  $\Sigma$  no es nula, entonces se puede normalizar el vector  $\nabla t$  para tener un vector unitario

$$\mathbf{n} = (\pm \nabla t \cdot \nabla t)^{-\frac{1}{2}} \nabla t \quad (3.2.7)$$

Mediante esta ecuación puede comprobarse que el signo positivo corresponde a una superficie temporal y el signo menos corresponde a una superficie espacial. Por construcción tenemos que el vector  $\mathbf{n}$  es unitario:

- $\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) := \mathbf{g}(\partial_0, \partial_0) = -1$  si  $\Sigma$  es espacial.
- $\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) := \mathbf{g}(\partial_0, \partial_0) = 1$  si  $\Sigma$  es temporal.

Esto se conoce como la aplicación de Gauss, la cual definimos a continuación.

**Definición 3.2.15** *La aplicación de Gauss* Sea  $\Sigma_t$  una superficie espacial y sea  $p \in \Sigma_t$ . Consideremos un abierto  $U \subset \Sigma_t$  que contenga a  $p$  y tal que  $\Sigma_t$  admite un campo vectorial normal  $\mathbf{n} : U \subset \Sigma_t \rightarrow T_p N$ <sup>10</sup> ortogonal a  $\Sigma_t$  definido en  $U$ , llamado la **aplicación de Gauss**. Además podemos elegir  $\mathbf{n}$  tal que  $\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1$ .

<sup>9</sup>Esto equivale a decir que

1.  $\nabla t$  es temporal  $\iff \Sigma$  es temporal.
2.  $\nabla t$  es espacial  $\iff \Sigma$  es espacial
3.  $\nabla t$  es nulo  $\iff \Sigma$  es nula.

<sup>10</sup>Aquí  $T_p N := (T_p M)^\perp$

### 3.3. Curvatura extrínseca

A partir de este punto se denotará como  $\nabla$  a la conexión de Levi-Civita asociada a  $\Sigma$  y como  $\bar{\nabla}$  a la conexión de Levi-Civita del espacio-tiempo  $M$ . Retomando las definiciones de las Secciones 2.7 y 2.6 definiremos a los objetos geométricos para la superficie  $\Sigma$ .

Al hablar de las superficies espaciales que forman la foliación del espacio-tiempo, debemos distinguir entre la curvatura “intrínseca” de dichas superficies proveniente de su geometría interna, y su curvatura “extrínseca” relacionada con la forma en que estas se encuentran inmersas en el espacio-tiempo de 3 dimensiones. La curvatura intrínseca estará dada por el tensor de Riemann de la variedad  $M$ , que se define en términos de la métrica espacial  $\gamma_{ij}$ . La curvatura extrínseca se define en términos de lo que le ocurre al vector normal  $\mathbf{n}$  al transportarlo paralelamente de un sitio a otro de la superficie. En general encontraremos que al transportar paralelamente este vector a un punto cercano, el nuevo vector ya no será normal a la superficie. El “tensor de curvatura extrínseca”  $K_{ij}$  es una medida del cambio en el vector normal bajo transporte paralelo.

**Teorema 3.3.1** *Sea  $\Sigma$  una superficie espacial diferenciable con una métrica riemanniana  $\gamma$ . Entonces existe una única conexión lineal en  $T\Sigma$  simétrica y compatible con la métrica tal que:*

$$\nabla\gamma = 0 \quad (3.3.1)$$

en una base coordenada sus componentes son

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}\gamma^{im}(\partial_j\gamma_{km} + \partial_k\gamma_{jm} - \partial_m\gamma_{jk}) \quad (3.3.2)$$

a esta conexión se le llama **conexión riemanniana** o **conexión de Levi-Civita** de  $\Sigma$

**Demostración.** La demostración es análoga a la del teorema [2.6.9, pág. 45]

■

Denotemos como **Riem** al tensor de Riemann de  $\Sigma$  con componentes  $R_{lij}^k$ , este mide la no conmutatividad de dos derivadas covariantes sucesivas  $\nabla$ . Tenemos una identidad análoga a la identidad de Bianchi pero en dos dimensiones:

$$\forall \mathbf{v} \in T_p\Sigma, \quad (\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)v^k = R_{lij}^k v^l \quad (3.3.3)$$

El tensor de Ricci de  $\Sigma$  lo denotamos por  $\mathbf{Ric}$  y  $R = \gamma^{ij}R_{ij}$  es el escalar de Ricci (o escalar de curvatura)<sup>11</sup>.

En dos dimensiones, el tensor de Riemann puede ser completamente determinado del conocimiento del tensor de Ricci de acuerdo a la ecuación:

$$R_{ijkl} = \delta_k^i R_{jl} - \delta_l^i R_{jk} + \gamma_{jl} R_k^l - \gamma_{jk} R_l^i + \frac{1}{2} R (\delta_l^i \gamma_{jl} - \delta_k^i \gamma_{jl}) \quad (3.3.4)$$

esto quiere decir que el tensor de Weyl se anula en dos dimensiones.<sup>12</sup>

Además de la curvatura intrínseca discutida líneas arriba, se puede considerar otro tipo de curvatura para la variedad  $\Sigma$ , con la cual se puede saber cómo se “dobla”  $\Sigma$  en  $M$ . Este doblez corresponde a la elección de la normal  $\mathbf{n}$  cuando se mueve en  $\Sigma$ . Para ello se define el mapeo de Weingarten como sigue:

**Definición 3.3.2** Se define el *mapeo de Weingarten* (fig. 3.3.1)  $\mathbf{S}$ <sup>13</sup> como un endomorfismo<sup>14</sup> en  $T_p M$  tal que a cada vector tangente le asocia la variación del normal a lo largo de dicho vector. Esta variación está dada por la conexión  $\bar{\nabla}$  como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : T_p \Sigma &\longrightarrow T_p \Sigma && \text{tal que} \\ \text{Si } \mathbf{v} \in T_p \Sigma, & \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}) := \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Podemos ver que en efecto  $\mathbf{S}(\mathbf{v}) \in T_p \Sigma$ , mediante el producto interno

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{v}) = \mathbf{n} \cdot \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} \mathbf{n} = \frac{1}{2} \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0$$

Como  $\Sigma$  es espacial, el mapeo  $\mathbf{S}$  esta definido univocamente.

**Teorema 3.3.3** La propiedad fundamental del mapeo de Weingarten es que es auto-adjunto con respecto a la métrica inducida  $\gamma$ , esto es:

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in T_p \Sigma \times T_p \Sigma, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{v}) = \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}^{15} \quad (3.3.6)$$

<sup>11</sup>También llamado curvatura Gaussiana de  $(\Sigma, \gamma)$

<sup>12</sup>De hecho, se puede demostrar que el tensor de Weyl se anula en dimensiones  $\leq 3$

<sup>13</sup>Conocido también como el operador de forma.

<sup>14</sup>Se llama endomorfismo a una aplicación lineal  $f : V \longrightarrow V$  de un espacio vectorial  $V$  en si mismo.

<sup>15</sup>Usaremos la notación tradicional de producto escalar, donde entenderemos que éste es con respecto a la métrica  $\gamma$  si consideramos que  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p \Sigma$  o con respecto a  $\mathbf{g}$  si  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p M$ .

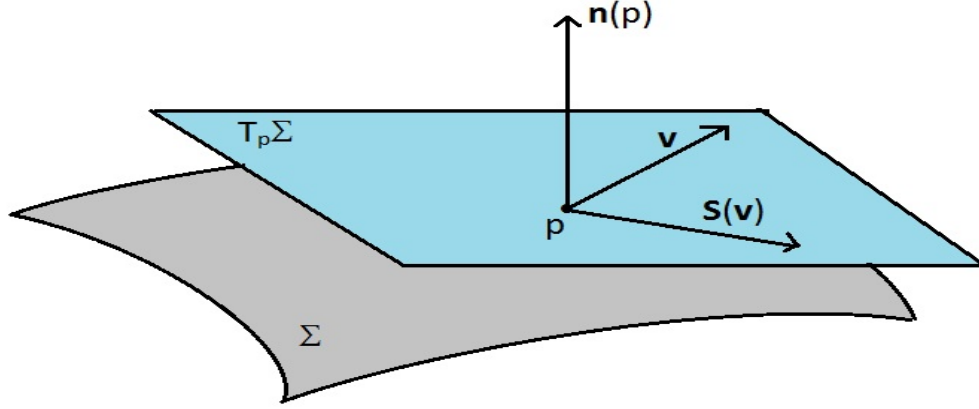


Figura 3.3.1: Mapeo de Weingarten

**Demostración.** Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p\Sigma$ , por definición de  $\mathbf{S}$ .

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \mathbf{S}(\mathbf{v})) &= g(\mathbf{u}, \bar{\nabla}_v \mathbf{n}) = g(\mathbf{u}, \bar{\nabla}_v \mathbf{n}) + g(\mathbf{n}, \bar{\nabla}_v \mathbf{u}) - g(\mathbf{n}, \bar{\nabla}_v \mathbf{u}) \\ &= \bar{\nabla}_v (g(\mathbf{u}, \mathbf{n})) - g(\mathbf{n}, \bar{\nabla}_v \mathbf{u}) = -g(\mathbf{n}, \bar{\nabla}_v \mathbf{u}) \end{aligned}$$

pero  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \bar{\nabla}_u \mathbf{v} - \bar{\nabla}_v \mathbf{u} \implies$

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \mathbf{S}(\mathbf{v})) &= -g(\mathbf{n}, \bar{\nabla}_v \mathbf{u}) = g(\mathbf{n}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]) - g(\mathbf{n}, \bar{\nabla}_u \mathbf{v}) \\ &= g(\mathbf{n}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]) - \bar{\nabla}_v (g(\mathbf{n}, \mathbf{v})) + g(\mathbf{v}, \bar{\nabla}_u \mathbf{n}) = g(\mathbf{n}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]) + g(\mathbf{v}, \bar{\nabla}_u \mathbf{n}) \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} g(\bar{\nabla} t, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]) &= \bar{\nabla}_\mu t (\bar{\nabla}_u v - \bar{\nabla}_v u)^\mu = \bar{\nabla}_\mu t u^\nu \bar{\nabla}_\nu v^\mu - \bar{\nabla}_\mu t v^\nu \bar{\nabla}_\nu u^\mu \\ &= u^\nu (\bar{\nabla}_\nu (\bar{\nabla}_\mu t v^\mu) - v^\mu \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu t) - v^\nu (\bar{\nabla}_\nu (\bar{\nabla}_\mu t u^\mu) - u^\mu \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu t) \\ &= u^\mu v^\nu (\bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu t - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu t) = 0 \end{aligned}$$

esta última igualdad es debido a que  $\bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu t = \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu t$ .

Como  $\mathbf{n}$  es colineal a  $\bar{\nabla} t$ , entonces  $g(\mathbf{n}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]) = 0$  y  $g(\mathbf{v}, \bar{\nabla}_u \mathbf{n}) = 0$ , por lo tanto

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}). \quad \blacksquare$$

Ahora demostraremos una importante identidad conocida como la ecuación de Weingarten.

**Lema 3.3.4 Ecuación de Weingarten.** Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p M$  y  $\mathbf{n} \in N_p M$ ,<sup>16</sup> entonces:

$$-g(\mathbf{u}, \overline{\nabla}_{\mathbf{v}} \mathbf{n}) = g(\mathbf{n}, \overline{\nabla}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}) \quad (3.3.7)$$

**Demostración.** Como  $g(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\mathbf{v}} g(\mathbf{u}, \mathbf{n}) &= g(\overline{\nabla}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}, \mathbf{n}) + g(\mathbf{u}, \overline{\nabla}_{\mathbf{v}} \mathbf{n}) = 0 \implies \\ g(\overline{\nabla}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}, \mathbf{n}) &= -g(\mathbf{u}, \overline{\nabla}_{\mathbf{v}} \mathbf{n}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A continuación definimos una importante cantidad conocida como la curvatura extrínseca de la superficie.

**Definición 3.3.5** Se define a la forma bilineal  $\mathbf{K}$  en el espacio tangente a  $\Sigma$  como el mapeo

$$\mathbf{K} : T_p \Sigma \times T_p \Sigma \longrightarrow \mathbf{R}$$

tal que:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{S}(\mathbf{v})) \quad (3.3.8)$$

es simétrica. Esta es la llamada **segunda forma fundamental** de  $\Sigma$  o **tensor de curvatura extrínseca** de  $\Sigma$ .

La curvatura extrínseca contiene la misma información que el mapeo de Weingarten. De la definición 3.3.2 tenemos que

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in T_p \Sigma \times T_p \Sigma, \quad \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\gamma(\mathbf{u}, \overline{\nabla}_{\mathbf{v}} \mathbf{n}) \quad (3.3.9)$$

**Definición 3.3.6** Definimos el escalar de curvatura extrínseca como la traza del tensor de curvatura extrínseca y lo denotamos por  $K$

$$K := \text{tra}(K_{ij}) = \gamma^{ij} K_{ij}$$

Como  $K$  es la traza del tensor de curvatura extrínseca respecto a la métrica  $\gamma$ , entonces es sencillo demostrar que  $K$  es menos dos veces la curvatura media de  $\Sigma$

$$K := \gamma^{ij} K_{ij} = -2H \quad (3.3.10)$$

<sup>16</sup> $N_p M$  es el conjunto de vectores normales a la variedad  $M$

**Definición 3.3.7 Curvatura media.** Definimos a la curvatura media de  $\Sigma$  en términos de la segunda forma fundamental como

$$H := - \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}(\mathbf{n}, \bar{\nabla}_v \mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \bar{\nabla}_v \mathbf{n}) \quad (3.3.11)$$

Es decir, la curvatura media es la traza del mapeo de Weingarten y por eso no depende de la base elegida. Los eigenvalores del operador  $\mathbf{S}$ , que son todos reales pues  $\mathbf{S}$  es auto-adjunto, son llamados **las curvaturas principales** de  $\Sigma$  y los eigenvectores correspondientes son llamados **las direcciones principales** de  $\Sigma$ . La **curvatura media** de  $\Sigma$  es la media aritmética de las curvaturas principales

$$H := \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad (3.3.12)$$

donde  $k_i$  son los dos eigenvalores de  $\mathbf{S}$ .

La curvatura definida arriba no debe confundirse con la curvatura Gaussiana, esta última es una cantidad intrínseca, independiente de la forma en que la variedad  $(\Sigma, \gamma)$  es encajada en  $(M, \mathbf{g})$  mientras que las curvaturas principales y la curvatura media sí dependen del encaje, por esta razón se llaman cantidades extrínsecas.

A continuación pondremos algunos ejemplos de superficies encajadas en  $\mathbf{R}^3$ , en este caso la métrica de la variedad  $M$  es riemanniana  $(+, +, +)$  y la superficie  $\Sigma$  es espacial con métrica riemanniana  $(+, +)$ .

**Ejemplo 3.3.8** Un plano en  $\mathbf{R}^3$ .

Sea  $\Sigma$  un plano. Sean  $x^\alpha = (x, y, z)$  las coordenadas cartesianas de  $\mathbf{R}^3$  tal que  $\Sigma$  es el plano  $z = 0$

La función escalar  $t$  en  $\Sigma$  se define por la ecuación

$$\forall p \in M, \quad p \in \Sigma \quad \iff \quad t(p) = 0$$

o simplemente  $t = z$ .

Sea  $x^i = (x, y)$  un sistema de coordenadas en  $\Sigma$  y  $\gamma_{ij} = \text{diag}(1, 1)$  con respecto a estas coordenadas. El tensor de Riemann se anula, es decir,  $\mathbf{Riem}(\gamma) = 0$  y el vector  $\mathbf{n}$  tiene componentes  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  respecto a  $(x, y, z)$ .

Las componentes de  $\bar{\nabla} \mathbf{n}$  están dadas por las derivadas parciales

$$\bar{\nabla}_{\beta} n^{\alpha} = \frac{\partial n^{\alpha}}{\partial X^{\beta}}$$

donde los símbolos de Christoffel se anulan para las coordenadas  $\{x^{\alpha}\}$ , entonces

$$\bar{\nabla} \mathbf{n} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{S} = 0 \quad \implies \quad \mathbf{K} = 0$$

**Ejemplo 3.3.9** Un cilindro en  $\mathbf{R}^3$ .

Sea  $\Sigma$  un cilindro definido por  $t := \rho - R = 0$  donde  $\rho := \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $R$  es una constante positiva (es el radio del cilindro).

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \implies \quad t := \rho - R = 0$$

Sean  $x^{\alpha} = (\rho, \varphi, z)$  las coordenadas cilíndricas con  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , donde  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Entonces  $x^i = (\varphi, z)$  es un sistema de coordenadas cilíndricas en  $\Sigma$ . La métrica inducida es:

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = R^2 d\varphi^2 + dz^2$$

con  $f(R, \varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$  y  $\partial_z = (0, 0, 1)$ . Con esto se puede calcular

$$\gamma_{11} = \partial_{\varphi} \cdot \partial_{\varphi} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = R^2$$

$$\gamma_{21} = 0$$

$$\gamma_{22} = \partial_z \cdot \partial_z = 1$$

haciendo  $\eta := R\varphi$  la métrica se transforma en

$$\gamma_{mn} dx^m dx^n = d\eta^2 + dz^2$$

que tiene la forma de la métrica del plano.

Sea  $\mathbf{n}$  el vector normal a  $\Sigma$ . Respecto a las coordenadas cartesianas  $x^{\alpha} = (x, y, z)$  sus componentes son:

$$\mathbf{n} = (x, y, 0) \quad \implies \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x, y, 0)$$

como  $\bar{\nabla}_\beta n^\alpha = \frac{\partial n^\alpha}{\partial X^\beta}$ , entonces

$$\bar{\nabla}_\beta n^\alpha = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} y^2 & -xy & 0 \\ -xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La curvatura extrínseca es:  $\mathbf{K} = -\mathbf{u} \cdot \bar{\nabla}_\nu \mathbf{n}$ , entonces las componentes de  $\mathbf{K}$  respecto a la base  $\{x^i\}$  son:

$$K_{ij} = \mathbf{K}(\partial_i, \partial_j) = -\nabla_\beta n_\alpha (\partial_i)^i (\partial_j)^\beta$$

donde

$$\partial_i = \{\partial_\varphi, \partial_z\}$$

es la base coordenada y  $(\partial_i)^\alpha$  son las componentes del vector  $\partial_i$  respecto a la base  $\partial_\alpha = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$  asociada a las coordenadas cartesianas  $x^\alpha = (x, y, z)$ , explícitamente

$$(x, y, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$$

$$\partial_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} = -y \partial_x + x \partial_y$$

$$\partial_z = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} = \partial_z$$

$(\partial_\varphi)^\alpha = (-y, x, 0)$  y  $(\partial_z)^\alpha = (0, 0, 1)$ , por lo que la curvatura extrínseca es

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} K_{\varphi\varphi} & K_{\varphi z} \\ K_{z\varphi} & K_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las componentes de la métrica del cilindro son:

$$\gamma_{ij} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la inversa es

$$\gamma^{ij} = \begin{bmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

finalmente el escalar de curvatura extrínseca es

$$K = \gamma^{ij} K_{ij} = \gamma^{11} K_{11} + \gamma^{22} K_{22} = -\frac{R}{R^2} = -\frac{1}{R}$$



**Ejemplo 3.3.10** *La esfera en  $\mathbb{R}^2$ .*

Sea  $S^2$  la esfera de radio  $R$ , entonces

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R \quad \implies \quad t =: r - R = 0$$

Sean  $x^\alpha = (r, \theta, \varphi)$  las coordenadas esféricas tales que

$$f(r, \theta, \varphi) = (r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \cos \theta)$$

y sea  $x^i = (\theta, \varphi)$  un sistema de coordenadas en  $\Sigma = S^2$ , la métrica en la esfera es:

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = \gamma_{\theta\theta} d\theta^2 + \gamma_{\varphi\varphi} d\varphi^2$$

donde las componentes de la métrica son:

$$\gamma_{\theta\theta} = \partial_\theta \cdot \partial_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} = R^2$$

$$\gamma_{\varphi\varphi} = \partial_\varphi \cdot \partial_\varphi = R^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

por lo tanto

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = \gamma_{\theta\theta} d\theta^2 + \gamma_{\varphi\varphi} d\varphi^2 = R^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2)$$

podemos escribir a la métrica como:

$$\gamma_{ij} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{bmatrix}$$

y su inversa es

$$\gamma^{ij} = \begin{bmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1/R^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{bmatrix}$$

contrario a los dos ejemplos anteriores esta métrica no es la del plano. El escalar de Ricci, el tensor de Ricci y el tensor de Riemann de  $(\Sigma, \gamma)$  son:

$$n^\alpha = \frac{1}{R}(x, y, z)$$

$$\bar{\nabla}_\beta n^\alpha = \frac{\partial n^\alpha}{\partial X^\beta} = \frac{1}{R^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

las bases naturales asociadas a  $x^i = (\theta, \varphi)$  en  $\Sigma$  son:

$$\begin{aligned}\partial_\varphi &= \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial Z} = -y\partial_x + x\partial_y \\ \partial_\theta &= \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} [xz\partial_x + yz\partial_y - (x^2 + y^2)\partial_z]\end{aligned}$$

las componentes de la curvatura extrínseca se calculan mediante  $K_{ij} = -\nabla_\beta n_\alpha (\partial_i)^\alpha (\partial_j)^\beta$ , entonces

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} K_{\theta\theta} & K_{\theta\varphi} \\ K_{\varphi\theta} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & -R\sin^2\theta \end{bmatrix} = -\frac{1}{R}\gamma_{ij}$$

así tenemos que

$$K_{ij} = \gamma^{ij} K_{ij} = \gamma^{ij} \left(-\frac{1}{R}\right) \gamma_{ij} = -\frac{1}{R} (\gamma^{11}\gamma_{11} + \gamma^{22}\gamma_{22}) = -\frac{1}{R} (1 + 1) = -\frac{2}{R}$$

Estos ejemplos muestran que el plano tiene curvatura gaussiana y extrínseca nulas, mientras que el cilindro tiene curvatura gaussiana nula pero su curvatura extrínseca es  $K = -1/R$  y la esfera tiene curvatura gaussiana  $R = 2/R^2$  y curvatura extrínseca  $K = -2/R$ , esto nos hace ver que la curvatura extrínseca no es completamente independiente de la curvatura intrínseca, como veremos después, estas están relacionadas por la ecuación de Gauss.

### 3.4. La descomposición ortogonal

En lo que sigue se considerara que  $\Sigma$  es espacial, es decir, la métrica inducida  $\gamma$  es riemanniana, o equivalentemente que el vector normal  $\mathbf{n}$  es temporal.

**Definición 3.4.1** Para todo  $p \in \Sigma$ , el espacio de todos los vectores espacio-temporales puede descomponerse en una parte tangente y otra ortogonal a  $\Sigma$ , mediante la siguiente **descomposición ortogonal** (fig.3.4.1)

$$T_p M = T_{\parallel} M \oplus T_{\perp} M := T_p(\Sigma_t) \oplus T_p N$$

donde  $T_p N$  es un subespacio de  $T_p M$  de dimensión 1 generado por el vector normal  $\mathbf{n}$ .

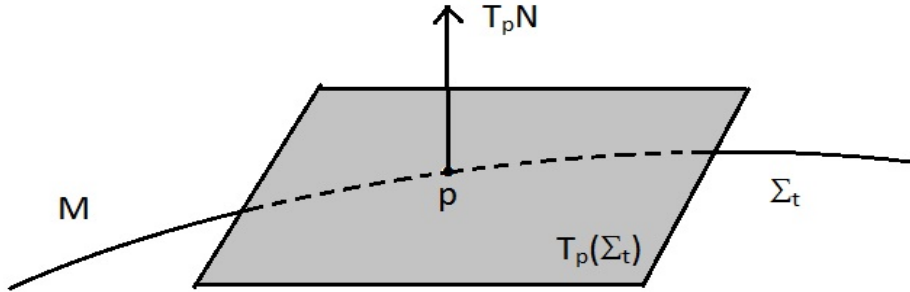


Figura 3.4.1: La geometría de la descomposición ortogonal

En esta definición  $T_{\parallel}M := T_p\Sigma_t$  y  $T_{\perp}M := T_pN$ . Los mapeos de proyección asociados  $P_{\parallel} := \vec{\gamma}$  (tangente a  $\Sigma_t$ ) y  $P_{\perp} := \vec{\gamma}_{\perp}$  (ortogonal a  $\Sigma_t$ ) se definen de la siguiente manera:

**Definición 3.4.2** El **proyector tangente** en  $\Sigma$  es el operador  $\vec{\gamma}$  (asociado con la descomposición ortogonal) definido como

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} : T_pM &\longrightarrow T_p\Sigma && \text{tal que} \\ \forall \mathbf{v} \in T_pM & \quad \vec{\gamma}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{v})\mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

El **proyector ortogonal**  $\vec{\gamma}^{\perp}$  (asociado a la descomposición ortogonal) es un operador definido como

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}^{\perp} : T_pM &\longrightarrow T_pN && \text{tal que} \\ \forall \mathbf{v} \in T_pM & \quad \vec{\gamma}^{\perp}(\mathbf{v}) = -\mathbf{ng}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

**Teorema 3.4.3** El operador  $\vec{\gamma}$  satisface las siguientes propiedades:

1. Si  $\mathbf{n} \in T_pN \implies \vec{\gamma}(\mathbf{n}) = 0$
2.  $\forall \mathbf{v} \in T_p\Sigma, \implies \vec{\gamma}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$

**Demostración.**

1. Si  $\mathbf{n} \in T_p N$  entonces

$$\overrightarrow{\gamma}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} + \mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{n} - \mathbf{n} = 0$$

2. Si  $\mathbf{v} \in T_p \Sigma$ , entonces

$$\overrightarrow{\gamma}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \gamma(\mathbf{n}, \mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{v} \quad \blacksquare$$

**Teorema 3.4.4** Las componentes de  $\gamma$  respecto a una base  $\{\partial_\alpha\}$  de  $T_p M$  son

$$\gamma_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha + n^\alpha n_\beta \quad (3.4.3)$$

**Demostración.** Escribiendo la ecuación (3.4.1) en componentes respecto a la base coordinada  $\{\partial_\alpha\}$  tenemos

$$v^\beta \gamma_\beta^\alpha = v^\alpha + n_\beta v^\beta n^\alpha = v^\beta \delta_\beta^\alpha + n_\beta v^\beta n^\alpha = v^\beta (\delta_\beta^\alpha + n_\beta n^\alpha)$$

por lo tanto

$$\gamma_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha + n^\alpha n_\beta \quad \blacksquare$$

**Teorema 3.4.5** El operador de proyección satisface las siguientes propiedades:

$$1. n^\nu \gamma_\nu^\mu = 0$$

$$2. h_\nu^\mu \gamma_\rho^\nu = \gamma_\rho^\mu$$

$$3. \gamma_\mu^\mu = 2$$

**Demostración.**

$$1. n^\nu \gamma_\nu^\mu = n^\nu (\delta_\nu^\mu + n_\nu n^\mu) = n^\nu \delta_\nu^\mu + n^\nu n_\nu n^\mu = n^\mu n^\mu = 0$$

$$\begin{aligned} 2. \gamma_\nu^\mu \gamma_\rho^\nu &= (\delta_\nu^\mu + n_\nu n^\mu)(\delta_\rho^\nu + n_\rho n^\nu) = \delta_\nu^\mu \delta_\rho^\nu + \delta_\rho^\nu n_\nu n^\mu + \delta_\nu^\mu n_\rho n^\nu + n_\nu n^\mu n_\rho n^\nu \\ &= \delta_\rho^\mu + n_\rho n^\mu + n_\rho n^\mu - n_\rho n^\mu = \delta_\rho^\mu + n_\rho n^\mu = \gamma_\rho^\mu \end{aligned}$$

$$3. \gamma_\mu^\mu = \delta_\mu^\mu + n_\mu n^\mu = \delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 - 1 = 3 - 1 = 2 \quad \blacksquare$$

Recordemos que el encaje  $\Phi$  induce los mapeos  $T_p\Sigma \rightarrow T_pM$  y  $T_p^*M \rightarrow T_p^*\Sigma$  pero no el mapeo inverso. El operador  $\vec{\gamma}$  da el mapeo natural  $T_pM \rightarrow T_p\Sigma$

**Definición 3.4.6** Sea  $\vec{\gamma}$  el operador de proyección tangente, entonces se puede construir el mapeo  $\vec{\gamma}^* : T_p^*\Sigma \rightarrow T_p^*M$  tal que para algún  $\omega \in T_p^*\Sigma$ ,  $\vec{\gamma}_*\omega : T_pM \rightarrow \mathbf{R}$  tal que

$$\vec{\gamma}^*\omega(\mathbf{v}) = \omega(\vec{\gamma}(\mathbf{v})) \quad (3.4.4)$$

que es una estructura lineal que pertenece a  $T_p^*M$ .

Se puede extender la definición anterior a un tensor  $\mathbf{T}$  de rango  $\binom{0}{s}$ , así  $\vec{\gamma}^* : T_p^*(\Sigma)^n \rightarrow T_p^*(M)^n$ .

Para  $\mathbf{T} \in T_p\Sigma$ ,  $\vec{\gamma}^*\mathbf{T} : T_p(M)^n \rightarrow \mathbf{R}$  tal que

$$\vec{\gamma}^*\mathbf{T}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{T}(\vec{\gamma}(\mathbf{v}_1), \dots, \vec{\gamma}(\mathbf{v}_n)) \quad (3.4.5)$$

Aplicando esta definición a  $\gamma$  en  $\Sigma$  entonces  $\vec{\gamma}^*\gamma$  es una forma bilineal en  $M$  que coincide con  $\gamma$  si sus dos argumentos son vectores tangentes a  $\Sigma$  y que es cero si alguno de sus argumentos es ortogonal a  $\Sigma$ , es decir, paralelo a  $\mathbf{n}$  (más adelante se demostrará esta afirmación), entonces esta es una extensión de  $\gamma$  a todos los vectores en  $T_pM$ , la cual abusando de la notación se denotará por el mismo símbolo  $\gamma$ :

$$\gamma := \vec{\gamma}^*(\gamma) \quad (3.4.6)$$

**Teorema 3.4.7** La función  $\gamma$  definida anteriormente se expresa en términos de  $\mathbf{g}$  y de la 1-forma  $\underline{\mathbf{n}}$  como:

$$\gamma := \mathbf{g} + \underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}} \quad (3.4.7)$$

en componentes

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta \quad (3.4.8)$$

**Demostración.** Es trivial usando las definiciones ■

**Teorema 3.4.8** *Propiedades de  $\gamma$*

$$1) \text{ Si } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p\Sigma \implies \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

$$2) \mathbf{u} = \lambda \mathbf{n} \implies \forall \mathbf{v} \in T_pM, \quad \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

**Demostración.**

$$1) \text{ Si } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p\Sigma \text{ entonces } \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \underline{\mathbf{n}}, \mathbf{u} \rangle \langle \underline{\mathbf{n}}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

$$2) \text{ Si } \mathbf{u} = \lambda \mathbf{n} \text{ entonces para algún } \mathbf{v} \in T_pM$$

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \gamma(\lambda \mathbf{n}, \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda \langle \underline{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \rangle \langle \underline{\mathbf{n}}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \lambda \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \lambda \langle \underline{\mathbf{n}}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \underline{\mathbf{n}}, \mathbf{v} \rangle - \lambda \langle \underline{\mathbf{n}}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Definición 3.4.9** El operador  $\overrightarrow{\gamma}^*$  extiende a la curvatura extrínseca  $\mathbf{K}$ , definida como una forma bilineal en  $\Sigma$ , a una forma bilineal en  $M$  mediante:

$$\mathbf{K} := \overrightarrow{\gamma}^* \mathbf{K} \quad (3.4.9)$$

En este trabajo usamos el punto de vista 3-dimensional, es decir, tratamos un campo tensorial en  $\Sigma$  como si estuviera definido en  $M$ . Para tensores covariantes (formas s-lineales) si no se hace mención explícita, la extensión 3-dimensional estará dada vía el operador  $\overrightarrow{\gamma}^*$ . En el caso de tensores contravariantes, la identificación está dada por el push-forward de  $\Phi$ , este punto de vista hace que la manipulación de tensores en  $\Sigma$  sea más simple por el hecho de tratarlos como tensores en  $M$  vía el operador  $\overrightarrow{\gamma}^*$ .

**Definición 3.4.10** Dado  $\mathbf{T}$  de rango  $\binom{p}{q} \in M$ , denotemos como  $\overrightarrow{\gamma}^* \mathbf{T}$  a un tensor en  $M$  del mismo tipo y tal que sus componentes en una base  $\{\partial_\alpha\}$  de  $T_pM$  son expresadas en términos de  $\mathbf{T}$  por

$$(\overrightarrow{\gamma}^* \mathbf{T})_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \gamma_{\mu_1}^{\alpha_1} \dots \gamma_{\mu_p}^{\alpha_p} \gamma_{\beta_1}^{\nu_1} \dots \gamma_{\beta_q}^{\nu_q} T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} \quad (3.4.10)$$

Notar que para una forma s-lineal  $\mathbf{T}$  en  $\Sigma$ ,  $\overrightarrow{\gamma}^*(\overrightarrow{\gamma}^* \mathbf{T}) = \overrightarrow{\gamma}^* \mathbf{T}$ ; para un vector  $\mathbf{v} \in T_pM$  se tiene que  $\overrightarrow{\gamma}^*(\mathbf{v}) = \overrightarrow{\gamma}(\mathbf{v})$ , para una 1-forma  $\omega \in T_p^*M$  tenemos que  $\overrightarrow{\gamma}^*(\omega) = \omega(\overrightarrow{\gamma})$  y para un tensor  $\mathbf{T}$ ,  $\overrightarrow{\gamma}^* \mathbf{T}$  es tangente a  $\Sigma$  éste es cero si uno de sus argumentos es  $\mathbf{n}$  o  $\underline{\mathbf{n}}$ .

Un vector  $\mathbf{n}$  normal a  $\Sigma$  es definido sólo para puntos  $p \in \Sigma$ . Consideremos alguna extensión de  $\mathbf{n}$  en alguna vecindad abierta de  $\Sigma$ .

**Definición 3.4.11** Si  $\Sigma$  es una superficie de nivel para algún campo escalar  $t$ , tal que una extensión natural está dada por  $\bar{\nabla}t$  de acuerdo a [(3.2.7), pág. 71], entonces el campo tensorial  $\bar{\nabla}\mathbf{n}$  es una cantidad definida. En particular podemos introducir el vector

$$\mathbf{a} := \bar{\nabla}\mathbf{n} \quad (3.4.11)$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector temporal unitario que puede verse como una **2-velocidad** de algún observador y  $\mathbf{a}$  es entonces la **2-aceleración** correspondiente.

**Teorema 3.4.12** El vector  $\mathbf{a}$  es ortogonal a  $\mathbf{n}$ , esto es,  $\mathbf{a} \in T_p\Sigma$ .

**Demostración.**

$$\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = \mathbf{g}(\mathbf{n}, \bar{\nabla}\mathbf{n}) = \frac{1}{2}\bar{\nabla}\mathbf{n}[\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n})] = \frac{1}{2}\bar{\nabla}\mathbf{n}(-1) = 0 \quad \blacksquare$$

**Teorema 3.4.13** Si  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in T_pM \times T_pM$  entonces:

$$\bar{\nabla}\underline{\mathbf{n}} = -\mathbf{K} - \underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{n}} \quad (3.4.12)$$

en componentes

$$\bar{\nabla}_\beta n_\alpha = -K_{\alpha\beta} - a_\alpha n_\beta \quad (3.4.13)$$

**Demostración.** Usando las ecuaciones [(3.3.9), pág. 75] y [(3.4.9), pág. 84] tenemos que

$$\begin{aligned} \forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in T_pM \times T_pM \\ \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \vec{\gamma}^*\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{K}(\vec{\gamma}(\mathbf{u}), \vec{\gamma}(\mathbf{v})) = -\mathbf{g}(\vec{\gamma}(\mathbf{u}), \bar{\nabla}_{\vec{\gamma}(\mathbf{v})}\mathbf{n}) \\ &= -\mathbf{g}(\mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{u})\mathbf{n}, (\bar{\nabla}_{(\mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{v})\mathbf{n})}\mathbf{n})) = -\mathbf{g}(\mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{u})\mathbf{n}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{n} + \mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{v})\bar{\nabla}\mathbf{n}) \\ &= -\mathbf{g}(\mathbf{u}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{n}) - \mathbf{g}(\mathbf{u}, \bar{\nabla}\mathbf{n})\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) + \mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{v})\mathbf{n}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{n}) - \mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{u})\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{v})\mathbf{n}, \bar{\nabla}\mathbf{n}) \\ &= -\mathbf{g}(\mathbf{u}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{n}) - \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{a})\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = -\bar{\nabla}\underline{\mathbf{n}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \underline{\mathbf{a}}, \mathbf{u} \rangle \langle \underline{\mathbf{n}}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

en estas igualdades usamos que;  $\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{n}, \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{n}) = 0$  para algún vector  $\mathbf{x}$ . Por lo tanto

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\bar{\nabla}\underline{\mathbf{n}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \underline{\mathbf{a}}, \mathbf{u} \rangle \langle \underline{\mathbf{n}}, \mathbf{v} \rangle$$

por lo tanto

$$\mathbf{K} = -\bar{\nabla}\underline{\mathbf{n}} - \underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{n}} \quad \blacksquare$$

Aplicando el operador de proyección  $\overrightarrow{\gamma}^*$  a esta última ecuación se puede demostrar fácilmente que

$$\mathbf{K} = -\overrightarrow{\gamma}^* \overline{\nabla} \mathbf{n} \quad (3.4.14)$$

**Corolario 3.4.14** *La traza del tensor de curvatura extrínseca es*

$$K = -\overline{\nabla} \cdot \mathbf{n} \quad (3.4.15)$$

*en componentes*

$$K = -\overline{\nabla}_\alpha n^\alpha \quad (3.4.16)$$

**Demostración.** Contrayendo la ecuación (3.4.13) con  $g^{\alpha\beta}$  tenemos

$$\overline{\nabla}_\beta n_\alpha g^{\alpha\beta} = -K_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} - a_\alpha n_\beta g^{\alpha\beta} \implies$$

$$\overline{\nabla}_\beta n^\beta = -K - a_\alpha n^\alpha$$

por lo tanto

$$K = -\overline{\nabla} \cdot \mathbf{n} \quad \blacksquare$$

Si queremos encontrar las componentes de  $\mathbf{K}$  usamos [(3.3.9), pág. 75], obteniendo:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\gamma(\mathbf{u}, \overline{\nabla}_\mathbf{v} \mathbf{n}) = -u^\nu v^\mu \overline{\nabla}_\mu n_\nu$$

por otro lado

$$K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = K(u^\nu \partial_\nu, v^\mu \partial_\mu) = u^\nu v^\mu k(\partial_\nu, \partial_\mu) = u^\nu v^\mu K_{\nu\mu}$$

como ambas ecuaciones deben ser iguales, entonces

$$K_{\alpha\beta} = -\overline{\nabla}_\alpha n_\beta \quad \blacksquare$$



### 3.5. Ecuación de Gauss

**Teorema 3.5.1** Dado el tensor de rango  $\binom{p}{q}$  en  $M$ , la derivada covariante  $\nabla \mathbf{T}$  con respecto a la conexión  $\nabla$  se expresa en términos de la derivada covariante  $\bar{\nabla} \mathbf{T}$  con respecto a la conexión espacio-tiempo  $\bar{\nabla}$  de acuerdo a

$$\nabla \mathbf{T} = \overrightarrow{\gamma}^* \bar{\nabla} \mathbf{T} \quad (3.5.1)$$

en componentes esto se escribe como:

$$\nabla_{\rho} T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \gamma_{\mu_1}^{\alpha_1} \dots \gamma_{\mu_p}^{\alpha_p} \gamma_{\beta_1}^{\nu_1} \dots \gamma_{\beta_q}^{\nu_q} \gamma_{\rho}^{\sigma} \bar{\nabla}_{\sigma} T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} \quad (3.5.2)$$

**Demostración.** La prueba consta de dos partes; primero hay que demostrar que  $\overrightarrow{\gamma}^* \bar{\nabla}$  es una conexión lineal en  $\Sigma$  y además que es simétrica, esto no tiene ninguna dificultad. La segunda parte consiste en demostrar que la conexión se anula al aplicarla a  $\gamma$ . Usando las ecuaciones [(3.4.10), pág. 84] y [(3.4.8), pág. 84] obtenemos:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\gamma}^* \bar{\nabla} \gamma)_{\alpha\beta\gamma} &= \gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\beta}^{\nu} \gamma_{\gamma}^{\rho} (\bar{\nabla}_{\rho} (g_{\mu\nu} + n_{\mu} n_{\nu})) = \gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\beta}^{\nu} \gamma_{\gamma}^{\rho} [\bar{\nabla}_{\rho} g_{\mu\nu} + n_{\mu} \bar{\nabla}_{\rho} n_{\nu} + n_{\nu} \bar{\nabla}_{\rho} n_{\mu}] \\ &= \gamma_{\gamma}^{\rho} (\gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\beta}^{\nu} n_{\mu} \bar{\nabla}_{\rho} n_{\nu} + \gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\beta}^{\nu} n_{\nu} \bar{\nabla}_{\rho} n_{\mu}) = 0 \end{aligned}$$

La conexión  $\bar{\nabla}$  es la única conexión lineal en  $\Sigma$  que aplicada a  $\gamma$  se anula. Por lo tanto necesariamente  $\overrightarrow{\gamma}^* \bar{\nabla} = \bar{\nabla}$ .

La ecuación en componentes se demuestra fácilmente aplicando [(3.4.10) pág. 84], como sigue

$$\nabla_{\rho} T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = (\overrightarrow{\gamma}^* \bar{\nabla}_{\rho} T)_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \gamma_{\mu_1}^{\alpha_1} \dots \gamma_{\mu_p}^{\alpha_p} \gamma_{\beta_1}^{\nu_1} \dots \gamma_{\beta_q}^{\nu_q} \gamma_{\rho}^{\sigma} \bar{\nabla}_{\sigma} T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} \quad \blacksquare$$

**Observación 3.5.2**  $\mathbf{T}$  en el lado izquierdo de (3.5.1) debería ser la extensión 3-dimensional  $\overrightarrow{\gamma}^* \mathbf{T}$  dada por [(3.4.5) pág. 83], siguiendo la convención escribimos  $\mathbf{T}$  en lugar de  $\overrightarrow{\gamma}^* \mathbf{T}$ . De manera similar el lado derecho de esta misma ecuación debería escribirse  $\overrightarrow{\gamma}^* \nabla \mathbf{T}$  para que esta sea una igualdad entre tensores en  $M$ , por lo tanto rigurosamente deberíamos escribir

$$\overrightarrow{\gamma}^* \nabla \mathbf{T} = \overrightarrow{\gamma}^* [\bar{\nabla} (\overrightarrow{\gamma}^* \mathbf{T})] \quad (3.5.3)$$

#### Teorema 3.5.3 Ecuación de Gauss

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in T\Sigma \times T\Sigma, \quad \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \mathbf{n} \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (3.5.4)$$

**Demostración.** Sean  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in T_p\Sigma \times T_p\Sigma$ , entonces de (3.5.1) tenemos:

$$\begin{aligned}
(\nabla_u v)^\alpha &= \nabla_{u^\sigma \partial_\sigma} v^\alpha = u^\sigma \nabla_\sigma v^\alpha = u^\sigma \gamma_\mu^\alpha \gamma_\sigma^\nu \bar{\nabla}_\nu v^\mu = u^\nu \gamma_\mu^\alpha \bar{\nabla}_\nu v^\mu \\
&= u^\sigma (\delta_\mu^\alpha + n_\mu n^\alpha \bar{\nabla}_\nu v^\mu) = u^\nu \delta_\mu^\alpha \bar{\nabla}_\nu v^\mu + u^\nu u^\nu n^\alpha \bar{\nabla}_\nu v^\mu \\
&= u^\nu \bar{\nabla}_\nu v^\alpha + u^\nu n_\mu n^\alpha \bar{\nabla}_\nu v^\mu = u^\nu \bar{\nabla}_\nu v^\alpha + u^\nu n_\mu n^\alpha \bar{\nabla}_\nu v^\mu \\
&= u^\nu \bar{\nabla}_\nu v^\alpha - u^\nu v^\mu n^\alpha \bar{\nabla}_\nu n^\mu
\end{aligned}$$

esta última igualdad es válida pues

$$\bar{\nabla}_\nu (n_\mu v^\mu) = n_\mu \bar{\nabla}_\nu v^\mu + v^\mu \bar{\nabla}_\nu n_\mu = 0$$

De la ecuación [(3.3.9), pág. 75], tenemos que

$$\mathbf{K} = -\gamma(\mathbf{u}, \bar{\nabla}_\nu \mathbf{n}) = -u^\nu v^\mu \bar{\nabla}_\mu n_\nu$$

entonces

$$(\nabla_u v)^\alpha = u^\nu \bar{\nabla}_\nu v^\alpha + n^\alpha \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{\nabla}_{u^\nu \partial_\nu} v^\alpha + n^\alpha \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

por lo tanto

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \mathbf{nK}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \blacksquare$$

Esta ecuación da otra interpretación de la curvatura extrínseca,  $\mathbf{K}$  mide la desviación de la derivada covariante de algún vector de  $\Sigma$  a lo largo de otro vector en  $\Sigma$  tomada con  $\nabla$  con la derivada  $\bar{\nabla}$  de  $M$ .

Notemos que, usando los proyectores y la ecuación de Gauss podemos escribir:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p\Sigma_t$$

$$\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} := \bar{\gamma}(\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) + \bar{\gamma}_\perp(\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) := (\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{v})^\parallel + (\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{v})^\perp = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \mathbf{nK}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

La interpretación geométrica de la ecuación anterior puede verse en la figura 3.5.1. Notemos que utilizando la ecuación de Gauss podemos definir de manera alternativa a la conexión  $\nabla$  como:

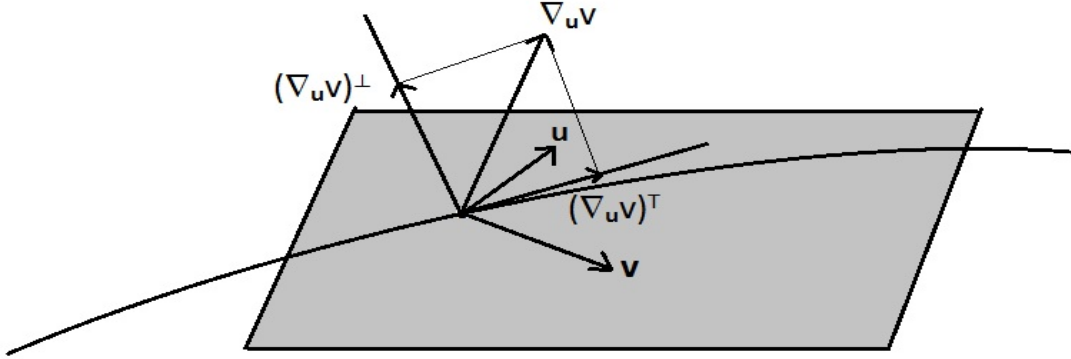


Figura 3.5.1: Interpretación geométrica de la ecuación de Gauss

**Definición 3.5.4** La derivada covariante  $\nabla$ , respecto a la métrica  $\gamma$  está definida en función del proyector tangente como:

$$\nabla := \vec{\gamma} \circ \bar{\nabla} \quad (3.5.5)$$

Mediante esta definición demostraremos, sólo por completez, el teorema [3.3.1, pág. 72], el cual es equivalente a la observación 3.5.2.<sup>17</sup>

#### DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.3.1

(a) P.D.  $\nabla$  es una conexión lineal, es decir, P.D.  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p \Sigma_t$  y  $f \in C^\infty$

1.  $\nabla_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} \mathbf{w} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w} + \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w}$
2.  $\nabla_{\mathbf{u}} (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w}$
3.  $\nabla_{f\mathbf{u}} \mathbf{v} = f \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$
4.  $\nabla_{\mathbf{u}} (f\mathbf{u}) = f \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + \mathbf{u}[f]\mathbf{u}$

Sólo demostraremos la ecuación (4), siendo trivial demostrar las otras tres. Usando la definición de proyector y la definición anterior tenemos:

$$\begin{aligned} 4. \quad \nabla_{\mathbf{u}} (f\mathbf{v}) &= \vec{\gamma} (\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} (f\mathbf{v})) = \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} (f\mathbf{v}) + \mathbf{ng}(\mathbf{n}, \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} (f\mathbf{v})) \\ &= f[\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \mathbf{ng}(\mathbf{n}, \bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{v})] + \mathbf{u}[f](\mathbf{v} + \mathbf{ng}(\mathbf{n}, \mathbf{v})) = f \vec{\gamma} (\bar{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) + \mathbf{u}[f] \vec{\gamma} (\mathbf{v}) \end{aligned}$$

<sup>17</sup>Rigurosamente deberíamos demostrar esta afirmación mediante el uso de (3.5.1) y (3.5.2) aunque el proceso es un poco tedioso y el resultado es el mismo que el de la observación 3.5.2.

$$= f\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + \mathbf{u}[f]\mathbf{v}.$$

Donde usamos el hecho de que  $\overrightarrow{\gamma}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ .

(b) P.D.  $\nabla_{\mathbf{u}}\gamma = 0$ . De (3.4.7) tenemos que:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}}\gamma &= \overrightarrow{\gamma}(\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}\gamma) = \overrightarrow{\gamma}(\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}(\mathbf{g} + \underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}})) = \overrightarrow{\gamma}(\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}})) \\ &= \overline{\nabla}_{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}}) + \mathbf{n}\mathbf{g}(\mathbf{n}, \overline{\nabla}_{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}})) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

(c) P.D.  $\nabla$  es simétrica, es decir, P.D.  $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \overrightarrow{\gamma}(\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \overline{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}) - [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \\ &= \overrightarrow{\gamma}(\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \overline{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}]) \\ &= \overrightarrow{\gamma}(\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \overrightarrow{\gamma}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Usamos el hecho de que, como  $\overrightarrow{\gamma}([\mathbf{u}, \mathbf{v}]) = [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \in T_p\Sigma_t$ , entonces  $\mathbf{g}(\mathbf{n}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]) = 0$

■

A continuación justificamos que  $\mathbf{K}$  es un tensor simétrico (una forma bilineal y simétrica). En coordenadas locales tenemos que  $\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = K(u^i\partial_i, v^j\partial_j) = u^i v^j K(\partial_i, \partial_j) = K_{ij}u^i v^j$ , donde definimos:

$$K(\partial_i, \partial_j) = K_{ij} \quad (3.5.6)$$

**Teorema 3.5.5**  $\mathbf{K}$  es un tensor.

**Demostración.** Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p\Sigma_t$  y sea  $f \in C^\infty$ , entonces:

(i) P.D.  $\mathbf{K}(f\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) = f\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{K}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(f\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) &= -\mathbf{g}(\overline{\nabla}_{(f\mathbf{u}+\mathbf{w})}\mathbf{v}, \mathbf{n}) = -\mathbf{g}(f\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + \overline{\nabla}_{\mathbf{w}}\mathbf{v}, \mathbf{n}) \\ &= -\mathbf{g}(f\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{n}) - \mathbf{g}(\overline{\nabla}_{\mathbf{w}}\mathbf{v}, \mathbf{n}) = -f\mathbf{g}(\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{n}) - \mathbf{g}(\overline{\nabla}_{\mathbf{w}}\mathbf{v}, \mathbf{n}) \\ &= f\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{K}(\mathbf{w}, \mathbf{v})\end{aligned}$$

(ii) P.D.  $\mathbf{K}(\mathbf{u}, f\mathbf{w} + \mathbf{v}) = f\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(\mathbf{u}, f\mathbf{w} + \mathbf{v}) &= -\mathbf{g}(\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}(f\mathbf{w} + \mathbf{v}), \mathbf{n}) = -\mathbf{g}(\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}(f\mathbf{w}), \mathbf{n}) - \mathbf{g}(\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{n}) \\ &= -\mathbf{g}(\mathbf{u}[f]\mathbf{w} + f\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{w}, \mathbf{n}) - \mathbf{g}(\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{n}) \\ &= -\mathbf{u}[f]\mathbf{g}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) - f\mathbf{g}(\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{w}, \mathbf{n}) - \mathbf{g}(\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{n}) \\ &= -f\mathbf{g}(\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{w}, \mathbf{n}) - \mathbf{g}(\overline{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{n}) = f\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Teorema 3.5.6**  $\mathbf{K}$  es simétrico.

**Demostración.** Como  $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \mathbf{0}$  y además  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \in T_p\Sigma_t$ , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathbf{g}(\mathbf{n}, \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}) = -\mathbf{g}(\mathbf{n}, \bar{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}]) = -\mathbf{g}(\mathbf{n}, \bar{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}) + \mathbf{g}(\mathbf{n}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]) \\ &= -\mathbf{g}(\mathbf{n}, \bar{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}) = \mathbf{K}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 3.6. Ecuaciones de Gauss-Codazzi

Las ecuaciones de Gauss-Codazzi constituyen la base del formalismo  $2 + 1$  en Relatividad General. Estas dan la descomposición del tensor de Riemann del espacio-tiempo en términos de cantidades relativas a la superficie  $\Sigma$ , el tensor de Riemann asociado a la métrica inducida  $\gamma$  y la curvatura extrínseca.

Consideremos la identidad de Ricci [ec. (2.7.6), pág. 51] que define el tensor de Riemann como una medida de la conmutatividad de dos derivadas covariantes sucesivas con respecto a la conexión  $\nabla$  asociada a la métrica  $\gamma$  de  $\Sigma$ . La versión 2-dimensional está dada por [(3.3.3), pág. 72].

**Teorema 3.6.1** Sea  $\{\partial_0, \partial_a\} = \{\partial_\alpha\}$  una base ortonormal de  $T_pM$ , entonces el tensor de curvatura de  $M$  puede expresarse en función del tensor de curvatura de  $\Sigma$  como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} &= \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} - \mathbf{n}[\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})] + \\ &\quad + (\bar{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{n})\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) - (\bar{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{n})\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \quad (3.6.1) \end{aligned}$$

esta ecuación es conocida como la **ecuación tensorial de Gauss**

**Demostración.** Sean  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in T_p\Sigma_t$  y  $\mathbf{n} \in T_pN$ . Usando la ecuación de Gauss y las definiciones del tensor de Riemann, tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} &= \bar{\nabla}_{\mathbf{X}}\bar{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \bar{\nabla}_{\mathbf{Y}}\bar{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \bar{\nabla}_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} = \\ &= \bar{\nabla}_{\mathbf{X}}(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \mathbf{n}\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) - \bar{\nabla}_{\mathbf{Y}}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \mathbf{n}\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})) + \\ &\quad - (\nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} - \mathbf{n}\mathbf{K}([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z})) \\ &= \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} - \mathbf{n}[\mathbf{K}(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) + \bar{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) - \overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) - \mathbf{K}([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) - (\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{n})\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \\
& \quad \quad \quad + (\overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{n})\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \\
= & \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} + \mathbf{n}\mathbf{K}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) - \mathbf{n}[\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \\
& \quad \quad \quad - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})] - (\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{n})\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + (\overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{n})\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \\
\text{pero sabemos que } \nabla & \text{ es simétrica, } \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \implies \\
\overline{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = & \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} - \mathbf{n}[\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})] + \\
& -(\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{n})\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + (\overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{n})\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Corolario 3.6.2** Sean  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in T_p\Sigma_t$ ,  $\omega \in T_p^*\Sigma_t$  y  $\underline{\mathbf{n}} \in T_p^*N$ , entonces las ecuaciones de **Gauss-Codazzi** y **Codazzi-Mainardi** son respectivamente

$$\mathbf{g}(\omega, \overline{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}) = \gamma(\omega, \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}) - \mathbf{K}(\omega, \mathbf{X})\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{K}(\omega, \mathbf{Y})\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \quad (3.6.2)$$

$$\mathbf{g}(\underline{\mathbf{n}}, \overline{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \quad (3.6.3)$$

**Demostración.** Sean  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in T_p\Sigma_t$  y  $\omega \in T_p^*\Sigma_t$ , entonces del teorema anterior y de la definición de la curvatura extrínseca tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\omega, \overline{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}) &= \gamma(\omega, \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}) - \mathbf{g}(\omega, \overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{n})\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \\
& \quad \quad \quad + \mathbf{g}(\omega, \overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{n})\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \\
&= \gamma(\omega, \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}) - \mathbf{K}(\omega, \mathbf{X})\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{K}(\omega, \mathbf{Y})\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})
\end{aligned}$$

pues  $\mathbf{g}(\omega, \mathbf{n}) = 0$ .

Sea  $\underline{\mathbf{n}} \in T_p^*N$ , entonces del teorema anterior y de que

$$\mathbf{g}(\underline{\mathbf{n}}, \overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{n}) = \mathbf{g}(\underline{\mathbf{n}}, \overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{n}) = 0, \quad \text{tenemos que :}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\underline{\mathbf{n}}, \overline{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}) &= \mathbf{g}(\underline{\mathbf{n}}, \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}) - [\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})]\mathbf{g}(\underline{\mathbf{n}}, \mathbf{n}) \\
&= \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Cuando tomamos una base y queremos escribir las ecuaciones anteriores (en general cualquier ecuación tensorial) en notación de índices, simplemente se pone un índice abajo por cada vector y un índice arriba por cada uno-forma. En el siguiente corolario pasamos de las ecuaciones tensoriales a notación de índices de manera formal.

**Corolario 3.6.3** Sean  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in T_p\Sigma_t$ ,  $\boldsymbol{\omega} \in T_p^*\Sigma_t$  y  $\mathbf{n} \in T_p^*N$ , entonces las ecuaciones de Gauss-Codazzi y de Codazzi-Mainardi en componentes son respectivamente:

$$\bar{R}_{bcd}^a = R_{bcd}^a - K_c^a K_{bd} + K_d^a K_{bc} \quad (3.6.4)$$

$$\bar{R}_{abc}^0 = \nabla_c K_{ab} - \nabla_b K_{ac} \quad (3.6.5)$$

**Demostración.** Sean  $\boldsymbol{\omega} = \omega_a dx^a$ ,  $\mathbf{X} = X^c \partial_c$ ,  $\mathbf{Y} = Y^d \partial_d$ ,  $\mathbf{Z} = Z^b \partial_b$  y  $\mathbf{n} = n_0 dx^0 = dx^0$  y utilizando el corolario 3.6.2, entonces:

$$g(\omega_a dx^a, \bar{R}(X^c \partial_c, Y^d \partial_d) Z^b \partial_b) = \omega_a X^c Y^d Z^b \bar{R}_{bcd}^a \quad (1)$$

$$\gamma(\omega_a dx^a, R(X^c \partial_c, Y^d \partial_d) Z^b \partial_b) = \omega_a X^c Y^d Z^b R_{bcd}^a \quad (2)$$

$$K(\omega_a dx^a, X^c \partial_c) = \omega_a X^c K_c^a \quad K(Y^d \partial_d, Z^b \partial_b) = Y^d Z^b K_{bd} \quad (3)$$

$$K(\omega_a dx^a, Y^d \partial_d) = \omega_a Y^d K_d^a \quad K(X^c \partial_c, Z^b \partial_b) = X^c Z^b K_{bc} \quad (4)$$

Como (1) = (2) + (3) + (4) quedando demostrada la primera ecuación.

Por otro lado

$$g(dx^0, \bar{R}(X^c \partial_c, Y^d \partial_d) Z^b \partial_b) = X^c Y^d Z^b \bar{R}_{bcd}^0 \quad (5)$$

$$\nabla_{(Y^c \partial_c)} K(X^b \partial_b, Z^a \partial_a) = Z^a X^b Y^c \nabla_c K_{ab} \quad (6)$$

$$\nabla_{(X^b \partial_b)} K(Y^c \partial_c, Z^a \partial_a) = Z^a X^b Y^c \nabla_b K_{ac} \quad (7)$$

Como (5) = (6) - (7) queda demostrada la segunda ecuación. ■

La forma en que obtuvimos a las ecuaciones de Gauss-Codazzi y Codazzi-Mainardi a partir de la ecuación tensorial de Gauss es la más sencilla y clara sin embargo, por consistencia, derivaremos las mismas ecuaciones mediante el uso del proyector tangente, así tendremos las mismas ecuaciones sólo que escritas explícitamente en términos de las componentes del operador de proyección.

**Teorema 3.6.4**  $\forall \mathbf{v} \in T_p\Sigma$ , la ecuación de Gauss-Codazzi en componentes es:

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma \gamma_\delta^\sigma \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho = R_{\delta\alpha\beta}^\gamma + K_\alpha^\gamma K_{\delta\beta} - K_\beta^\gamma K_{\alpha\delta} \quad (3.6.6)$$

**Demostración.** Usando (3.5.2) dos veces obtenemos

$$\nabla_\alpha (\nabla_\beta v^\gamma) = \gamma_\beta^\nu \gamma_\alpha^\mu \gamma_\rho^\gamma \nabla_\mu (\nabla_\nu v^\rho) = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma \nabla_\mu (\gamma_\nu^\sigma \gamma_\delta^\rho \nabla_\sigma v^\delta)$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma'_\beta \gamma'_\alpha \gamma'_\rho (\gamma_\nu^\sigma \gamma_\delta^\rho \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\delta + \gamma_\nu^\sigma \nabla_\sigma v^\delta \nabla_\mu \gamma_\delta^\rho + \gamma_\delta^\rho \nabla_\sigma v^\delta \nabla_\mu \gamma_\nu^\sigma) \\
&= \gamma'_\beta \gamma'_\alpha \gamma'_\rho (\gamma_\nu^\sigma \gamma_\delta^\rho \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\delta + \gamma_\nu^\sigma \nabla_\sigma v^\delta (n_\delta \nabla_\mu n^\rho + n^\rho \nabla_\mu n^\delta) + \\
&\quad + \gamma_\delta^\rho \nabla_\sigma v^\delta (n_\delta \nabla_\mu n^\rho + n^\rho \nabla_\mu n^\delta))
\end{aligned}$$

pero sabemos que

$$\nabla_\mu \gamma_\nu^\sigma = \nabla(\delta_\nu^\sigma + n^\sigma n_\nu) = n_\nu \nabla_\mu n^\sigma + n^\sigma \nabla_\mu n_\nu$$

y además sabemos que la componente tangente de la normal es cero, es decir,  $\gamma'_\beta n_\nu = 0$ , entonces

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha (\nabla_\beta v^\gamma) &= \gamma'_\beta \gamma'_\alpha \gamma'_\rho \gamma_\nu^\sigma \gamma_\delta^\rho \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\delta + \gamma'_\beta \gamma'_\alpha \gamma'_\rho \gamma_\nu^\sigma n_\delta \nabla_\mu v^\delta \nabla_\sigma n^\rho + \\
&\quad + \gamma'_\beta \gamma'_\alpha \gamma'_\rho \gamma_\nu^\sigma n^\rho \nabla_\mu v^\delta \nabla_\sigma n_\delta + \gamma'_\beta \gamma'_\alpha \gamma'_\rho \gamma_\delta^\rho n_\nu \nabla_\sigma v^\delta \nabla_\mu n^\sigma + \gamma'_\beta \gamma'_\alpha \gamma'_\rho \gamma_\delta^\rho n^\sigma \nabla_\sigma v^\delta \nabla_\mu n_\nu \\
&= \gamma_\beta^\sigma \gamma_\delta^\gamma \gamma'_\alpha \gamma'_\rho n_\mu \nabla_\sigma v^\delta + \gamma_\beta^\sigma \gamma'_\alpha \gamma'_\rho n_\delta \nabla_\mu v^\delta \nabla_\sigma n^\rho + \gamma'_\beta \gamma'_\alpha \gamma'_\delta n^\sigma \nabla_\sigma v^\delta \nabla_\mu n_\nu
\end{aligned}$$

pero  $\nabla_\sigma (n_\delta v^\delta) = n_\delta \nabla_\sigma v^\delta + v^\delta \nabla_\sigma n_\delta = 0$  y  $K_{\alpha\beta} = -\gamma_\alpha^\mu \gamma'_\beta \nabla_\mu n_\nu \implies$

$$\nabla_\alpha (\nabla_\beta v^\gamma) = \gamma'_\beta \gamma'_\delta \gamma'_\alpha \gamma_\nu^\mu \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\delta - n^\sigma \nabla_\sigma v^\delta \gamma'_\delta K_{\alpha\beta} - v^\delta K_{\alpha\delta} K_\beta^\gamma$$

Por lo tanto intercambiando los índices  $\alpha$  y  $\beta$ , renombrando índices y usando la propiedad de simetría de  $K$  obtenemos:

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta v^\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha v^\gamma = (K_{\alpha\delta} K_\beta^\gamma - K_{\beta\delta} K_\alpha^\gamma) v^\delta + \gamma_\beta^\sigma \gamma'_\delta \gamma'_\alpha \gamma_\nu^\mu [\nabla_\mu \nabla_\sigma v^\delta - \nabla_\sigma \nabla_\mu v^\delta]$$

de la identidad de Ricci

$$(K_{\alpha\delta} K_\beta^\gamma - K_{\beta\delta} K_\alpha^\gamma) v^\delta + \gamma_\beta^\sigma \gamma'_\delta \gamma'_\alpha \bar{R}_{\nu\mu\sigma}^\delta v^\nu = R_{\mu\alpha\beta}^\gamma v^\mu$$

renombrando índices

$$(K_{\alpha\mu} K_\beta^\gamma - K_{\beta\mu} K_\alpha^\gamma) v^\mu + \gamma_\beta^\sigma \gamma'_\lambda \gamma'_\alpha \bar{R}_{\mu\rho\sigma}^\lambda v^\mu = R_{\mu\alpha\beta}^\gamma v^\mu$$

Como  $v^\mu = \gamma_\nu^\mu v^\nu \implies$

$$\gamma_\beta^\sigma \gamma'_\lambda \gamma'_\alpha \gamma_\nu^\mu \bar{R}_{\mu\rho\sigma}^\lambda v^\nu = \gamma_\nu^\mu R_{\mu\alpha\beta}^\gamma v^\nu + (K_{\beta\mu} K_\alpha^\gamma - K_{\alpha\mu} K_\beta^\gamma) \gamma_\nu^\mu v^\nu$$



por lo tanto

$$\gamma_\beta^\sigma \gamma_\lambda^\gamma \gamma_\alpha^\rho \gamma_\nu^\mu \bar{R}_{\mu\rho\sigma}^\lambda v^\nu = R_{\nu\alpha\beta}^\gamma v^\nu + (K_{\beta\nu} K_\alpha^\gamma - K_{\alpha\nu} K_\beta^\gamma) v^\nu$$

Renombrando índices<sup>18</sup> obtenemos el resultado deseado.

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma \gamma_\delta^\sigma \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho = R_{\delta\alpha\beta}^\gamma + K_\alpha^\gamma K_{\delta\beta} - K_\beta^\gamma K_{\alpha\delta} \quad \blacksquare$$

Lo que sigue es encontrar una relación similar a la anterior entre los tensores de Ricci en  $M$  y en  $\Sigma$  y otra que relacione los escalares de Ricci de ambas variedades.

**Corolario 3.6.5** *La contracción de las ecuaciones de Gauss-Codazzi es*

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \bar{R}_{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\mu} n^\nu \gamma_\beta^\rho n^\sigma \bar{R}_{\nu\rho\sigma}^\mu = R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu \quad (3.6.7)$$

**Demostración.** Contrayendo (3.6.6) en los índices  $\alpha$  y  $\gamma$  y usando la propiedad  $\gamma_\alpha^\mu \gamma_\rho^\alpha = \gamma_\rho^\mu = \delta_\rho^\mu + n^\mu n_\rho$ , entonces tenemos que

1.  $\gamma_\gamma^\alpha \gamma_\alpha^\delta R_{\delta\alpha\beta}^\gamma = R_{\alpha\beta}$
2.  $\gamma_\gamma^\alpha \gamma_\alpha^\delta K_\alpha^\gamma K_{\beta\gamma} = K K_{\alpha\beta}$
3.  $\gamma_\gamma^\alpha \gamma_\alpha^\delta K_\beta^\gamma K_{\alpha\delta} = \gamma_\gamma^\delta K_{\beta\gamma} K_{\alpha\delta} = K_\beta^\delta K_{\alpha\delta}$
4.  $\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\sigma \gamma_\delta^\gamma \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\sigma \delta_\gamma^\delta \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho + n^\delta n_\gamma \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\sigma \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho$

Reescribamos cada uno de los miembros derechos de (4). Por un lado tenemos

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\sigma \delta_\gamma^\delta \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\sigma \delta_\gamma^\delta \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\sigma \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \bar{R}_{\mu\nu}^\rho$$

Por otro lado utilizando que  $n_\gamma = \gamma_{\gamma\nu} n^\nu$  obtenemos

$$n^\delta n_\gamma \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\sigma \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho = n^\sigma n^\nu \gamma_{\nu\gamma} \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\sigma \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho = n^\sigma n^\nu \gamma_{\beta\gamma} \gamma_\alpha^\mu \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho = n^\sigma n^\nu \gamma_{\alpha\mu} \gamma_\delta^\rho \bar{R}_{\nu\rho\sigma}^\mu$$

Sustituyendo estas relaciones en (3.6.6) obtenemos la relación buscada.  $\blacksquare$

<sup>18</sup> Aquí utilizamos los índices griegos en vez de los índices latinos pues hemos reemplazado al vector  $\mathbf{v}$  por algún vector en  $TM$  sin que el resultado cambie gracias a la presencia del operador de proyección  $\vec{\gamma}$  y también gracias al hecho de que el tensor de curvatura extrínseca y de que el tensor de Riemann de  $\Sigma$  son tangentes a  $\Sigma$ .

**Corolario 3.6.6** *La ecuación escalar de Gauss-Codazzi que relaciona el escalar de Ricci de  $M$  con el de  $\Sigma$  es*

$$\bar{R} + 2\bar{R}_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = R + K^2 - K_{ij}K^{ij} \quad (3.6.8)$$

**Demostración.** Contrayendo (3.6.7) con respecto a los índices  $\mu$  y  $\nu$  obtenemos:

1.  $\gamma^{\alpha\beta}\gamma_\alpha^\mu\gamma_\beta^\nu\bar{R}_{\mu\nu} = \gamma^{\mu\beta}\gamma_\beta^\nu\bar{R}_{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu} = \bar{R}$ .
2.  $\gamma^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = R$ .
3.  $\gamma^{\alpha\beta}KK_{\alpha\beta} = K^2$
4.  $\gamma^{\alpha\beta}K_{\alpha\mu}K_\beta^\mu = K_{\alpha\mu}K^{\alpha\mu}$ .
5.  $\gamma^{\alpha\beta}n^\sigma n^\nu\gamma_{\alpha\mu}\gamma_\beta^\rho\bar{R}_{\nu\rho\sigma}^\mu = n^\sigma n^\nu\gamma_{\mu\beta}\gamma_\beta^\rho\bar{R}_{\nu\rho\sigma}^\mu = n^\sigma n^\nu\gamma_\mu^\rho\bar{R}_{\nu\rho\sigma}^\mu = n^\nu n^\sigma\bar{R}_{\nu\sigma}$

Demostrando así la ecuación (3.6.8) ■

Este corolario es la generalización del Teorema de Egregio de Gauss [16], el cual relaciona la curvatura intrínseca en  $\Sigma$  dada por el escalar de Ricci con la curvatura extrínseca representada por  $K^2 - K_{ij}K^{ij}$ . En el caso de una superficie encajada en  $\mathbf{R}^3$ , la curvatura se anula y hay un cambio de signo debido a que la métrica en  $\mathbf{R}^3$  (en este caso el vector normal es espacial) es riemanniana y no lorentziana, la ecuación es en este caso

$$R - K^2 + K_{ij}K^{ij} = 0 \quad (\mathbf{g} \text{ riemanniana}) \quad (3.6.9)$$

Notemos que  $\bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho n_\rho = R_{\sigma\mu\nu}^0$  por lo que el resultado del corolario siguiente es básicamente el mismo que el corolario 3.6.3, sólo que aquí se utiliza el operador de proyección.

**Teorema 3.6.7** *Las ecuaciones de Codazzi-Mainardi en componentes son*

$$\gamma_\rho^\gamma n^\sigma \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho = \nabla_\beta K_\alpha^\gamma - \nabla_\alpha K_\beta^\gamma \quad (3.6.10)$$

**Demostración.** Aplicando la identidad de Ricci al vector normal  $\mathbf{n}$  (o más precisamente a la extensión de  $\mathbf{n}$  en  $M$ , que se hace mediante el operador  $\overrightarrow{\gamma}$ ), tenemos

$$(\bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta - \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\alpha)n^\gamma = \bar{R}_{\mu\alpha\beta}^\gamma n^\mu$$

proyectando esta relación en  $\Sigma$ , usando las ecuaciones [(3.4.13), pág. 85] y [(3.5.2), pág. 87] tenemos

$$\begin{aligned} \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \gamma_\gamma^\rho \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta n^\gamma &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \gamma_\gamma^\rho \bar{\nabla}_\alpha (-K_\beta^\gamma - a^\gamma n_\gamma) \\ &= -\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \gamma_\gamma^\rho (\bar{\nabla}_\alpha K_\beta^\gamma + a^\gamma \bar{\nabla}_\alpha n_\gamma + n_\beta \bar{\nabla}_\alpha a^\gamma) = -\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \gamma_\gamma^\rho (\bar{\nabla}_\alpha K_\beta^\gamma + a^\gamma \bar{\nabla}_\alpha n_\beta) \\ &= -\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \gamma_\gamma^\rho \bar{\nabla}_\alpha K_\beta^\gamma - \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta a^\rho \bar{\nabla}_\alpha n_\gamma = -\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \gamma_\gamma^\rho \bar{\nabla}_\alpha K_\beta^\gamma + a^\rho K_{\mu\nu} \\ &= -\nabla_\mu K_\nu^\rho + a^\rho K_{\mu\nu} \end{aligned}$$

intercambiando los índices  $\mu$  y  $\nu$  obtenemos que

$$\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \gamma_\gamma^\rho \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\alpha n^\gamma = -\nabla_\mu K_\mu^\rho + a^\rho K_{\nu\mu} = -\nabla_\mu K_\mu^\rho + a^\rho K_{\mu\nu}$$

entonces haciendo la resta entre estas dos cantidades obtenemos que

$$\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \gamma_\gamma^\rho \bar{R}_{\mu\alpha\beta}^\gamma n^\mu = \nabla_\mu K_\mu^\rho - \nabla_\mu K_\nu^\rho$$

por lo tanto renombrando índices obtenemos la relación buscada

$$\gamma_\rho^\gamma \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho n^\sigma = \nabla_\beta K_\alpha^\gamma - \nabla_\alpha K_\beta^\gamma \quad \blacksquare$$

**Corolario 3.6.8** *La contracción de las ecuaciones de Codazzi-Mainardi es:*

$$\gamma_\alpha^\mu n^\nu \bar{R}_{\mu\nu} = \nabla_\alpha K - \nabla_\mu K_\alpha^\mu \quad (3.6.11)$$

**Demostración.** Contrayendo el lado izquierdo de (3.6.10) en los índices  $\alpha$  y  $\beta$  tenemos

$$\gamma_\rho^\alpha \gamma_\gamma^\rho \gamma_\beta^\gamma \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho n^\sigma = \gamma_\rho^\mu \gamma_\beta^\gamma \gamma_\gamma^\rho \gamma_\beta^\nu \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho n^\sigma = \gamma_\rho^\mu \gamma_\beta^\nu \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho n^\sigma$$

pero

$$\gamma_\rho^\mu \gamma_\beta^\nu \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho n^\sigma = (\delta_\rho^\mu + n^\mu n_\rho) n^\sigma \gamma_\beta^\nu \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho = n^\sigma \gamma_\beta^\nu \bar{R}_{\sigma\nu} + \gamma_\beta^\nu n^\mu n_\rho n^\sigma \bar{R}_{\sigma\mu\nu}^\rho = n^\sigma \gamma_\beta^\nu \bar{R}_{\sigma\nu}$$

pues debido a las simetrías del tensor de Riemann respecto a sus primeros dos argumentos el último término se anula.

Contrayendo el lado derecho de (3.6.10) en los mismos índices que antes, obtenemos

$$\gamma_\rho^\alpha \gamma_\gamma^\rho \nabla_\beta K_\alpha^\gamma = \nabla_\beta K$$

y

$$\gamma_\rho^\alpha \gamma_\gamma^\rho \nabla_\alpha K_\beta^\gamma = \nabla_\rho K_\beta^\rho$$

igualando términos tenemos la relación buscada ■

Hay que observar que las ecuaciones (3.6.4) y (3.6.5) son equivalentes a las ecuaciones (3.6.6) y (3.6.10) respectivamente, sólo que en estas últimas están las componentes del operador de proyección  $\vec{\gamma}$  y además tenemos que  $R_{abc}^0 = n_d R_{abc}^d$ . Esto quiere decir que en vez de definir el operador  $\vec{\gamma}^*$  podríamos haber partido de la ecuación de Gauss (3.5.4) como definición para así tener la definición de  $\nabla$  (definición 3.5.4) usada para demostrar que  $\nabla$  es una conexión lineal y simétrica, obteniendo los mismos resultados.





---

# Capítulo 4

## Geometría de Foliaciones

---

### 4.1. Foliaciones

En el capítulo anterior se estudió una sola superficie  $\Sigma$  encajada en un espacio-tiempo  $M$ , ahora en este Capítulo consideraremos un conjunto continuo de superficies  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbf{R}}$  que cubre a la variedad  $M$ . En el capítulo anterior hemos visto que ésto es posible para una extensa clase de espacios-tiempos que sean globalmente hiperbólicos. Daremos la definición de foliación, que será la que se utilizará en lo que resta de este trabajo.

**Definición 4.1.1** *Sea  $(M, g)$  un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, éste se puede **foliar** por medio de una familia de superficies  $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ . Por **foliación** entendemos que existe un campo escalar  $\hat{t}$  en  $M$  regular<sup>1</sup> y de clase  $C^\infty$ , tal que cada superficie de la foliación es una superficie de nivel de este campo escalar, esto es*

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Sigma_t := \{p \in M \mid \hat{t}(p) = t\}$$

como  $\hat{t}$  es regular, las superficies  $\Sigma_t$  no se intersectan, es decir

$$\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset \quad \text{para } t \neq t'$$

en lo que sigue no distinguiremos entre  $t$  y  $\hat{t}$ . Cada  $\Sigma_t$  es llamada una hoja de la foliación. Asumimos que todos los  $\Sigma_t$  son superficies espaciales y que la foliación cubre a  $M$ : (véase la figura 4.1.1)

$$M = \bigcup_{t \in \mathbf{R}} \Sigma_t$$

---

<sup>1</sup>El gradiente nunca se anula

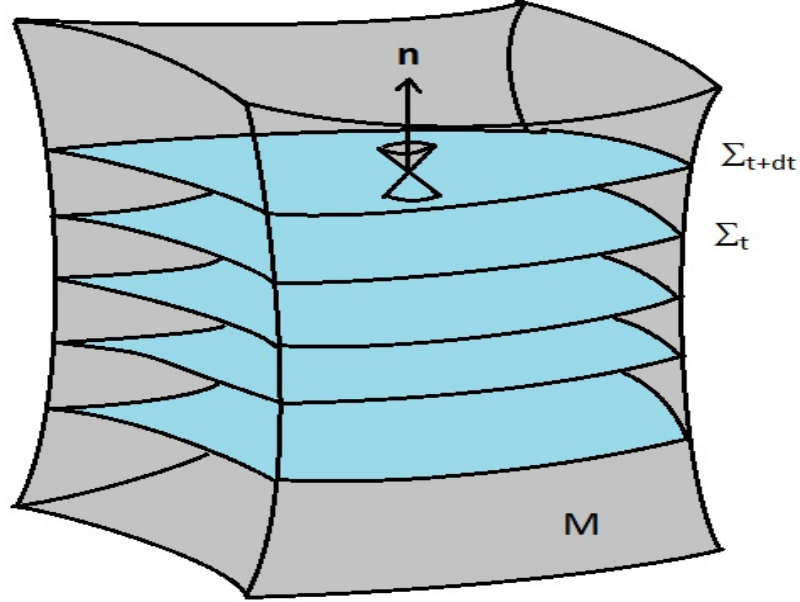


Figura 4.1.1: Foliación del espacio-tiempo  $M$

El vector normal  $\mathbf{n}$  da la dirección temporal al futuro y ésta es necesariamente colineal al vector  $\nabla t$  asociado a la 1-forma  $dt$ , entonces podemos definir el campo escalar lapse, como sigue.

**Definición 4.1.2** *Cualquier vector normal a  $\Sigma_t$  debe ser colineal al vector temporal  $\mathbf{n}$  que es normal a esta superficie*

$$\mathbf{n} := -N\nabla t \quad (4.1.1)$$

donde

$$N := (-\nabla t \cdot \nabla t)^{-1/2} = (-\langle dt, \nabla t \rangle)^{-1/2} \quad (4.1.2)$$

el campo escalar  $N$  define a la llamada **función lapse**<sup>2</sup>

Notar que el signo menos en (4.1.1) es elegido para que  $\mathbf{n}$  sea orientado futuro si el campo escalar  $t$  se incrementa hacia el futuro. Además el valor de  $N$  asegura que  $\mathbf{n}$  sea unitario, esto es  $\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1$ .

<sup>2</sup>También llamada lapso.



Por construcción  $N > 0$  esto indica que  $N$  nunca se anula si la foliación es regular. La ecuación (4.1.1) también indica que  $-N$  es el factor de proporcionalidad entre  $\mathbf{dt}$  y la 1-forma asociada al vector  $\mathbf{n}$ , es decir, por la dualidad métrica

$$\underline{\mathbf{n}} = -N\mathbf{dt} \quad (4.1.3)$$

**Definición 4.1.3** Definimos el *vector de evolución normal*  $\mathbf{m}$  normal a  $\Sigma_t$ , como un vector temporal  $\mathbf{m}$  normal a  $\Sigma_t$  tal que

$$\mathbf{m} := N\mathbf{n} \quad (4.1.4)$$

**Teorema 4.1.4** Si  $\mathbf{n}$  es unitario, entonces

1.  $\mathbf{g}(\mathbf{m}, \mathbf{m}) = -N^2$
2.  $\langle \mathbf{dt}, \mathbf{m} \rangle = -1$

**Demostración.** Utilizando la definición de  $\mathbf{m}$  y el hecho de que  $\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1$ , tenemos

1.  $\mathbf{g}(\mathbf{m}, \mathbf{m}) = \mathbf{g}(N\mathbf{n}, N\mathbf{n}) = -N^2$ .
2. Por las ecuaciones (4.1.1) y (4.1.2) y de la definición de  $\mathbf{m}$ , tenemos

$$\langle \mathbf{dt}, \mathbf{m} \rangle = N\langle \mathbf{dt}, \mathbf{n} \rangle = N\langle \mathbf{dt}, -N\nabla t \rangle = \frac{-N^2}{-N^2} = 1 \quad \blacksquare \quad (4.1.5)$$

**Teorema 4.1.5** El vector  $\delta t\mathbf{m}$  transporta a la superficie  $\Sigma_t$  en una vecindad de  $p \in \Sigma_t$  en la superficie  $\Sigma_{t+\delta t}$  en una vecindad de  $p' \in \Sigma_{t+\delta t}$ .

**Demostración.** Sea  $p \in \Sigma_t$  desplazamos infinitesimalmente esta superficie sobre el vector  $\mathbf{m}\delta t$  al punto  $p' = p + \mathbf{m}\delta t$  (figura 4.1.2) donde  $p' \in \Sigma_{t+\delta t}$ . De la definición de  $\mathbf{dt}$ , el valor del campo escalar  $t$  en  $p'$  es

$$t(p') = t(p + \delta t\mathbf{m}) = t(p) + \langle \mathbf{dt}, \delta t\mathbf{m} \rangle = t(p) + \delta p$$

esta última igualdad demuestra que  $p' \in \Sigma_{t+\delta t}$   $\blacksquare$

Lo que esta propiedad nos indica es que en una vecindad de  $p$ , la superficie  $\Sigma_t$  es transportada paralelamente (mediante un arrastre de Lie) sobre el vector

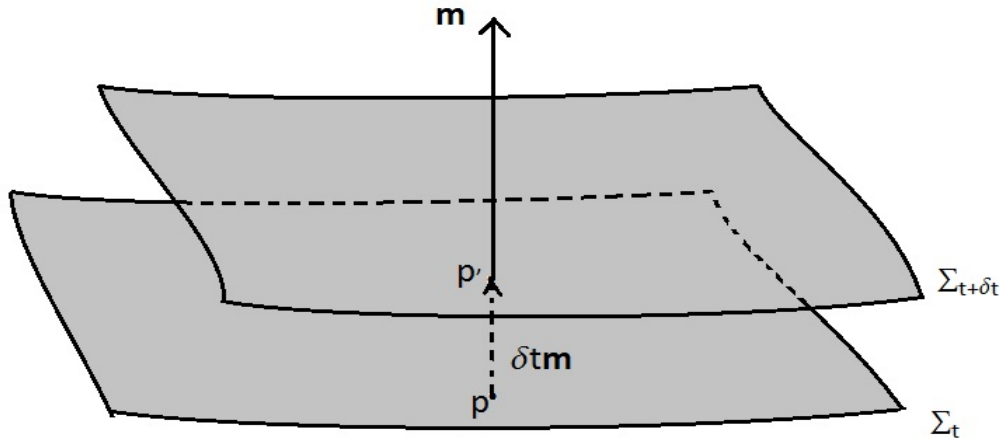


Figura 4.1.2: Vector de evolución normal

$\delta t \mathbf{m}$  en la superficie  $\Sigma_{t+\delta t}$  en una vecindad de  $p'$ , esta interpretación puede verse en la figura 4.1.2. Este arrastre paralelo está dado por la derivada de Lie,<sup>3</sup> debido a esto el vector  $\mathbf{m}$  es llamado vector de evolución normal.

**Definición 4.1.6** *Puesto que  $\mathbf{n}$  es un vector unitario temporal tangente a la curva con coordenadas espaciales constantes, entonces esto puede ser visto como la 2-velocidad de algún observador. A tal observador se la llama **observador euleriano**.*

Esto significa que las líneas de mundo de los observadores eulerianos son ortogonales a las superficies  $\Sigma_t$ . Físicamente para un observador Euleriano la superficie (localmente)  $\Sigma_t$  es un conjunto de eventos simultáneos de acuerdo a la definición de simultaneidad de Relatividad General.

**Observación 4.1.7** *Sean  $p \in \Sigma_t$  y  $q \in \Sigma_{t+\delta t}$  dos eventos cerrados en la línea de mundo de algún observador Euleriano. Sea  $t$  la “coordenada temporal” de  $p$  y  $t + \delta t$  la coordenada temporal de  $q$  ( $\delta t > 0$ ), entonces  $q = p + \delta t \mathbf{m}$ . El tiempo propio  $\delta \tau$  (que mide el observador Euleriano) entre los dos eventos, es dado por la longitud del vector que une  $p$  con  $q$ , esto se calcula con la*

<sup>3</sup>Para mas detalles ver el Apéndice 5.5

métrica espacio-temporal de  $M$ .

$$\delta\tau = \sqrt{-\mathbf{g}(\delta t\mathbf{m}, \delta t\mathbf{m})} = \sqrt{-\mathbf{g}(\mathbf{m}, \mathbf{m})}\delta t = N\delta t$$

Pues  $N > 0$ , esta igualdad justifica el nombre lapse dado a  $N$ ,  $N$  relaciona a la coordenada temporal  $t$  con el tiempo físico  $\tau$  medido por un observador Euleriano.

**Teorema 4.1.8** La 2-aceleración de un observador Euleriano  $\bar{\nabla}_{\mathbf{n}}\mathbf{n}$  se expresa en términos del gradiente espacial de la función lapse como

$$\underline{\mathbf{a}} = \nabla \ln N \quad (4.1.6)$$

$$\mathbf{a} = \vec{\nabla} \ln N \quad (4.1.7)$$

**Demostración.** De (4.1.3) y de la ecuación de la 2-aceleración tenemos que sus componentes son

$$a_\alpha = n^\mu \bar{\nabla}_\mu n^\alpha = -n^\mu \bar{\nabla}_\mu (N \bar{\nabla}_\alpha t) = -n^\mu N \bar{\nabla}_\mu N \bar{\nabla}_\alpha t - n^\mu N \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\mu t$$

hemos usado el hecho de que  $\bar{\nabla}$  es simétrica, de nuevo usando (4.1.3), obtenemos

$$\begin{aligned} a_\alpha &= -n^\mu \left(-\frac{n_\alpha}{N}\right) \bar{\nabla}_\mu N - n^\mu N \left(-\frac{n_\mu}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} n^\mu n_\alpha \bar{\nabla}_\mu N - \frac{1}{N} n^\mu N \bar{\nabla}_\alpha n_\mu + n_\mu n^\mu N \bar{\nabla}_\alpha \left(\frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} (\bar{\nabla}_\alpha N + n_\alpha n^\mu \bar{\nabla}_\mu N) = \frac{1}{N} (\delta_\alpha^\mu \bar{\nabla}_\mu N + n_\alpha n^\mu \bar{\nabla}_\mu N) \\ &= \frac{1}{N} (\delta_\alpha^\mu \bar{\nabla}_\mu N + \gamma_\alpha^\mu \bar{\nabla}_\mu N - \gamma_\alpha^\mu \bar{\nabla}_\mu N) = \frac{1}{N} \gamma_\alpha^\mu \bar{\nabla}_\mu N = \frac{1}{N} \nabla_\alpha N = \nabla_\alpha (\ln N) \end{aligned}$$

por lo tanto<sup>4</sup>

$$\underline{\mathbf{a}} = \nabla \ln N$$

y por la dualidad métrica

$$\mathbf{a} = \vec{\nabla} \ln N \quad \blacksquare$$

<sup>4</sup>Notar que el gradiente  $\nabla$  es siempre tangente a  $\Sigma_t$ , de esta ecuación puede recuperarse el hecho de que  $\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = 0$ .

**Observación 4.1.9** *Sustituyendo la ecuación (4.1.6) para la aceleración en la ecuación [(3.4.12), pág. 85], entonces*

$$\bar{\nabla} \underline{\mathbf{n}} = -\mathbf{K} - \nabla \ln N \otimes \underline{\mathbf{n}} \quad (4.1.8)$$

en componentes

$$\bar{\nabla}_\beta n_\alpha = -K_{\alpha\beta} - n_\beta \nabla_\alpha \ln N \quad (4.1.9)$$

**Teorema 4.1.10** *La derivada covariante del vector de evolución normal está dada por*

$$\bar{\nabla} \underline{\mathbf{m}} = -N \bar{\mathbf{K}} - \bar{\nabla} N \otimes \underline{\mathbf{n}} + \underline{\mathbf{n}} \otimes \bar{\nabla} N \quad (4.1.10)$$

en componentes

$$\bar{\nabla}_\beta m^\alpha = -N K_\beta^\alpha - \nabla^\alpha N n_\beta + n^\alpha \bar{\nabla}_\beta N \quad (4.1.11)$$

**Demostración.** Utilizando la definición de  $\underline{\mathbf{m}}$  y (4.1.8) tenemos que

$$\bar{\nabla} \underline{\mathbf{m}} = \bar{\nabla} (N \underline{\mathbf{m}}) = N \bar{\nabla} \underline{\mathbf{m}} + \underline{\mathbf{m}} \bar{\nabla} N$$

$$= N(-\mathbf{K} - \nabla \ln N \otimes \underline{\mathbf{n}}) + \underline{\mathbf{n}} \otimes \bar{\nabla} N = -N\mathbf{K} - N\nabla \ln N \otimes \underline{\mathbf{n}} + \underline{\mathbf{n}} \otimes \bar{\nabla} N$$

entonces por la dualidad métrica tenemos el resultado deseado. ■

## 4.2. Evolución de la 2-métrica y del proyector tangente

**Teorema 4.2.1** *Sea  $\gamma$  la métrica de  $\Sigma_t$ , entonces la evolución de  $\Sigma_t$  a lo largo del vector de evolución normal  $\underline{\mathbf{m}}$  está dada por la derivada de Lie ( $\mathcal{L}$ ) de  $\gamma$  a lo largo de  $\underline{\mathbf{m}}$*

$$\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{m}}} \gamma = -2N\mathbf{K} \quad (4.2.1)$$

**Demostración.** De la ecuación (A.1.9) para un tensor de rango  $\binom{0}{2}$  y usando (4.1.11) tenemos que

$$\mathcal{L}_{\underline{\mathbf{m}}} \gamma_{\alpha\gamma} = m^\mu \bar{\nabla}_\mu \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_\beta^\mu \bar{\nabla}_\alpha m_\mu + \gamma_\alpha^\mu \bar{\nabla}_\beta m_\mu$$

calculando cada término por separado tenemos

$$m^\mu \bar{\nabla}_\mu \gamma_{\alpha\beta} = N n^\mu \bar{\nabla}_\mu (n_\alpha n_\beta) = N n^\mu (n_\alpha \bar{\nabla}_\mu n_\beta + n_\beta \bar{\nabla}_\mu n_\alpha) = N (a_\alpha n_\beta + n_\alpha a_\beta)$$

$$= N\left(n_\alpha \frac{\nabla_\beta N}{N} + n_\beta \frac{\nabla_\alpha N}{N}\right) = n_\alpha \nabla_\beta N + n_\beta \nabla_\alpha N \quad (1)$$

$$\gamma_{\mu\beta} \bar{\nabla}_\alpha m^\mu = -\gamma_{\mu\beta} (NK_\alpha^\mu + n_\alpha \nabla^\mu N - n^\mu \bar{\nabla}_\alpha N) = -NK_{\alpha\beta} - n_\alpha \nabla_\beta N \quad (2)$$

intercambiando índices

$$\gamma_{\alpha\mu} \bar{\nabla}_\beta m^\mu = -NK_{\alpha\beta} - n_\beta \nabla_\alpha N \quad (3)$$

donde hemos usado que  $\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta$ ,  $\gamma_{\mu\beta} n^\mu = 0$  y  $\gamma_{\alpha\mu} n^\mu$ . Sumando (1) + (2) + (3) tenemos

$$\mathcal{L}_m \gamma = -2NK \quad \blacksquare$$

**Corolario 4.2.2** *El valor de la derivada de Lie de  $\gamma$  a lo largo de un vector unitario normal  $\mathbf{n}$  es*

$$\mathcal{L}_n \gamma = \frac{1}{N} \mathcal{L}_m \gamma \quad (4.2.2)$$

**Demostración.** Como  $\mathbf{m} = N\mathbf{n}$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m \gamma &= \mathcal{L}_{N\mathbf{n}} \gamma = N n^\mu \bar{\nabla}_\mu \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_\mu^\beta \bar{\nabla}_\alpha (N n^\mu) + \gamma_\alpha^\mu \bar{\nabla}_\beta (N n^\mu) \\ &= N (n^\mu \bar{\nabla}_\mu \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\mu\beta} \bar{\nabla}_\alpha n^\mu + \gamma_{\alpha\mu} \bar{\nabla}_\beta n^\mu) = N \mathcal{L}_n \gamma_{\alpha\beta} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Corolario 4.2.3** *La curvatura extrínseca está dada en términos de la derivada de Lie de  $\gamma$  a lo largo del vector normal  $\mathbf{n}$  mediante*

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n \gamma \quad (4.2.3)$$

**Demostración.**

$$\mathcal{L}_n \gamma = \frac{1}{N} (-2NK)$$

por lo tanto

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n \gamma \quad \blacksquare$$

Tenemos tres interpretaciones de la curvatura extrínseca, recordemos que la ecuación (3.4.14) dice que es la proyección sobre  $\Sigma_t$  del gradiente de un vector unitario normal a  $\Sigma_t$ , es decir, la curvatura extrínseca describe la curvatura de la superficie  $\Sigma$  ( $x^0 = \text{constante}$ ) desde la perspectiva del espacio-tiempo 3-dimensional en el que se halla inmersa. De acuerdo a la ecuación de Gauss la  $\mathbf{K}$  mide la diferencia entre las conexiones espacial y espacio-temporal y este último corolario dice que es menos  $\frac{1}{2}$  la derivada de Lie de  $\gamma$  a lo largo de un vector temporal normal a  $\Sigma_t$ .

**Teorema 4.2.4** La derivada de Lie del proyector tangente  $\vec{\gamma}$  en  $\Sigma_t$  a lo largo del vector de evolución temporal es cero.

$$\mathcal{L}_n \vec{\gamma} = 0 \quad (4.2.4)$$

**Demostración.** Por la ecuación (A.1.9)

$$\mathcal{L}_m \gamma_\beta^\alpha = m^\mu \bar{\nabla}_\mu \gamma_\beta^\alpha - \gamma_\beta^\mu \bar{\nabla}_\mu m^\alpha + \gamma_\mu^\alpha \bar{\nabla}_\beta m^\mu$$

Calculando cada término por separado y usando las ecuaciones (4.1.6) y (4.1.11) además del hecho de que  $\gamma_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha + n^\alpha n_\beta$ , tenemos

$$\begin{aligned} m^\mu \bar{\nabla}_\mu \gamma_\beta^\alpha &= N n^\mu \bar{\nabla}_\mu (n_\alpha n_\beta) = N (n^\mu n^\alpha \bar{\nabla}_\mu n_\beta + n^\mu n_\beta \bar{\nabla}_\mu n^\alpha) \\ &= N \left( \frac{n_\beta}{N} \nabla^\alpha N + \frac{n^\alpha}{N} \nabla^\beta N \right) = n_\beta \nabla^\alpha N + n^\alpha \nabla_\beta N \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

$$\gamma_\beta^\mu \bar{\nabla}_\mu m^\alpha = \gamma_\beta^\mu (N K_{\mu\alpha} + \nabla^\alpha N n_\mu - n^\alpha \nabla_\mu N) = -N K_{\beta\alpha} + n^\alpha \nabla_\beta N \dots\dots\dots(2)$$

$$\gamma_{\mu\alpha} \bar{\nabla}_\beta m^\mu = -N K_\beta^\alpha - n_\beta \nabla_\alpha N \dots\dots\dots(3)$$

haciendo (1) - (2) + (3) = 0, tenemos que:

$$\mathcal{L}_n \vec{\gamma} = 0 \quad \blacksquare$$

**Corolario 4.2.5** Sea  $M$  un espacio-tiempo tres dimensional, entonces

$$\text{Si } \mathbf{T} \text{ es tangente a } \Sigma_t \quad \implies \quad \mathcal{L}_m \mathbf{T} \text{ es tangente a } \Sigma_t \quad (4.2.5)$$

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\mathbf{T}$  es un campo tensorial de rango  $\binom{1}{1}$  en  $\Sigma_t$ , entonces éste cumple que

$$\vec{\gamma}^* \mathbf{T} = \mathbf{T}$$

como  $\gamma_\mu^\alpha \gamma_\beta^\nu T_\nu^\mu = T_\beta^\alpha$ , tenemos que

$$\mathcal{L}_m T_\beta^\alpha = \mathcal{L}_m (\gamma_\mu^\alpha \gamma_\beta^\nu T_\nu^\mu) = \mathcal{L}_m \gamma_\mu^\alpha (\gamma_\beta^\nu T_\nu^\mu) + \mathcal{L}_m \gamma_\beta^\nu (\gamma_\mu^\alpha T_\nu^\mu) + \mathcal{L}_m T_\nu^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\mu^\alpha = \mathcal{L}_m T_\beta^\alpha$$

esto indica que

$$\vec{\gamma}^* \mathcal{L}_m \mathbf{T} = \mathcal{L}_m \mathbf{T}$$

y esto demuestra que  $\mathcal{L}_m \mathbf{T}$  es tangente a  $\Sigma_t$ , esta prueba puede extenderse a cualquier campo tensorial  $\binom{p}{q}$  tangente a  $\Sigma_t$ .  $\blacksquare$

### 4.3. El escalar de curvatura

**Lema 4.3.1** *La proyección de  $\mathcal{L}_m \mathbf{K}$  en  $\Sigma_t$ , en componentes, está dada por*

$$\mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} = N \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu n^\sigma \bar{\nabla}_\sigma K_{\mu\nu} - 2N K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu \quad (4.3.1)$$

**Demostración.** De la ecuación (A.1.9) tenemos que

$$\mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} = m^\mu \bar{\nabla}_\mu K_{\alpha\beta} + K_{\mu\beta} \bar{\nabla}_\alpha m^\mu + K_{\alpha\mu} \bar{\nabla}_\beta m^\mu$$

utilizando (4.1.11) y haciendo los cálculos obtenemos que

$$\mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} = N n^\mu \bar{\nabla}_\mu K_{\alpha\beta} - 2N K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu - K_{\alpha\mu} n_\beta \nabla^\mu N - K_{\beta\mu} n_\alpha \nabla^\mu N$$

proyectando esta ecuación en  $\Sigma_t$ , es decir, aplicando el operador  $\vec{\gamma}^*$  a ambos lados, usando la propiedad de que  $\vec{\gamma}^* \mathcal{L}_m \mathbf{K} = \mathcal{L}_m \mathbf{K}$  y utilizando (4.1.11) tenemos que aplicando este operador al lado derecho de (4.3.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu N n^\sigma \bar{\nabla}_\sigma K_{\mu\nu} - 2N \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu K_{\mu\sigma} K_\nu^\sigma - \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \nabla^\sigma N n_\nu K_{\mu\sigma} - \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \nabla^\sigma N n_\mu K_{\beta\sigma} \\ = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu N n^\sigma \bar{\nabla}_\sigma K_{\mu\nu} - 2N \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu K_{\mu\sigma} K_\nu^\sigma \end{aligned}$$

hemos utilizado el hecho de que  $\gamma_\beta^\nu n_\nu = 0$  y como  $\vec{\gamma}^* \mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} = \mathcal{L}_m K_{\alpha\beta}$ , entonces

$$\mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} = N \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu n^\sigma \bar{\nabla}_\sigma K_{\mu\nu} - 2N K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu \quad \blacksquare$$

**Teorema 4.3.2** *La ecuación de Ricci es*

$$\gamma_\alpha^\mu n^\rho \gamma_\beta^\nu n^\sigma \bar{R}_{\rho\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{N} \mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} + \frac{1}{N} \nabla_\alpha \nabla_\beta N + K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu \quad (4.3.2)$$

**Demostración.** Aplicando la identidad de Ricci al vector  $\mathbf{n}$  y proyectando dos veces a lo largo de  $\Sigma_t$  (esto es, multiplicando por  $\gamma_{\alpha\mu} \gamma_\beta^\nu$ ) y una vez a lo largo de  $\mathbf{n}$  (multiplicando por  $n^\sigma$ ) tenemos:

$$\gamma_{\alpha\mu} n^\sigma K_\beta^\nu (\bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\sigma n^\mu - \bar{\nabla}_\sigma \bar{\nabla}_\nu n^\mu) = \gamma_\alpha^\mu n^\sigma \gamma_\beta^\nu \bar{R}_{\rho\nu\sigma}^\mu n^\rho \quad (4.3.3)$$

aplicando (4.1.9) tenemos

$$\gamma_{\alpha\mu} n^\sigma \gamma_\beta^\nu \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\sigma n^\mu = -\gamma_{\alpha\mu} \gamma_\beta^\nu n^\sigma (\bar{\nabla}_\nu K_\sigma^\mu + n^\sigma \bar{\nabla}_\nu \nabla^\mu \ln N + \bar{\nabla}_\nu n_\sigma \nabla^\mu \ln N)$$

como  $n^\sigma \bar{\nabla}_\nu n_\sigma = 0$ ,  $n^\sigma K_\sigma^\mu = 0$ ,  $n^\sigma n_\sigma = -1$  y además  $n^\sigma \bar{\nabla}_\nu K_\sigma^\mu = -K_\sigma^\mu \bar{\nabla}_\nu n^\sigma$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\mu}n^\sigma\gamma_\beta^\nu\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}_\sigma n^\mu &= \gamma_{\alpha\mu}\gamma_\beta^\nu K_\sigma^\mu\bar{\nabla}_\sigma n^\sigma + \gamma_{\alpha\mu}\gamma_\beta^\nu\bar{\nabla}_\nu\nabla^\mu\ln N \\ &= -\gamma_{\alpha\mu}\gamma_\beta^\nu K_\sigma^\mu K_\nu^\sigma + \nabla_\beta\nabla_\alpha\ln N = K_{\alpha\sigma}K_\beta^\sigma + \nabla_\alpha\nabla_\beta\ln N \quad \dots\dots\dots(1)\end{aligned}$$

donde se ha puesto que  $\nabla_\alpha\nabla_\beta = \nabla_\beta\nabla_\alpha$  pues  $\nabla$  es simétrica.

De nuevo usando (4.1.9) el segundo miembro del lado izquierdo de la ecuación (4.3.1) obtenemos

$$\gamma_{\alpha\mu}n^\sigma\gamma_\beta^\nu\bar{\nabla}_\sigma\bar{\nabla}_\nu n^\mu = -\gamma_{\alpha\mu}\gamma_\beta^\nu n^\sigma(\bar{\nabla}_\sigma K_\nu^\mu + n_\nu\bar{\nabla}_\sigma\nabla^\mu\ln N + \bar{\nabla}_\sigma n_\nu\nabla^\mu\ln N)$$

como  $n^\sigma\bar{\nabla}_\sigma n_\nu = \nabla_\nu\ln N$ ,  $\gamma_\beta^\nu n_\nu = 0$  y además  $n^\sigma\bar{\nabla}_\nu K_\sigma^\mu = -K_\sigma^\mu\bar{\nabla}_\nu n^\sigma$ , entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\mu}n^\sigma\gamma_\beta^\nu\bar{\nabla}_\sigma\bar{\nabla}_\nu n^\mu &= -\gamma_{\alpha\mu}\gamma_\beta^\nu n^\sigma\bar{\nabla}_\sigma K_\nu^\mu - \gamma_{\alpha\mu}\gamma_\beta^\nu\nabla^\mu\ln N\nabla_\nu\ln N \\ &= \gamma_{\alpha\mu}\gamma_\beta^\nu n^\sigma\bar{\nabla}_\sigma K_\nu^\mu - \nabla_\alpha\ln N\nabla_\beta\ln N \quad \dots\dots\dots(2)\end{aligned}$$

pero

$$\nabla_\alpha\ln N\nabla_\beta\ln N = \frac{1}{N^2}\nabla_\alpha N\nabla_\beta N \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\nabla_\beta\nabla_\alpha\ln N = \nabla_\beta\left(\frac{1}{N}\nabla_\alpha N\right) = \frac{1}{N}\nabla_\beta\nabla_\alpha N - \frac{1}{N^2}\nabla_\alpha N\nabla_\beta N \quad \dots\dots\dots(4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3) y (4) en (1) y (2) y colocando el resultado en (4.3.1) obtenemos finalmente que

$$\gamma_\alpha^\mu\gamma_\beta^\nu n^\sigma\bar{R}_{\rho\nu\sigma}^\mu n^\rho = \frac{1}{N}\nabla_\beta\nabla_\alpha N + \gamma_{\alpha\mu}\gamma_\beta^\nu n^\sigma\bar{\nabla}_\sigma K_\nu^\mu - K_{\alpha\mu}K_\beta^\mu \quad \dots\dots\dots(5)$$

Del lema 4.3.1 obtenemos que

$$N\gamma_\alpha^\mu\gamma_\beta^\nu n^\sigma\bar{\nabla}_\sigma K_{\mu\nu} = \mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} + 2NK_{\alpha\mu}K_\beta^\mu$$

entonces sustituyendo en la ecuación (5) obtenemos

$$\gamma_\alpha^\mu\gamma_\beta^\nu n^\sigma\bar{R}_{\rho\nu\sigma}^\mu n^\rho = \frac{1}{N}\mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} + \frac{1}{N}\nabla_\alpha\nabla_\beta N + K_{\alpha\mu}K_\beta^\mu \quad \blacksquare$$

**Corolario 4.3.3** *El tensor de Ricci del espacio-tiempo está relacionado con el tensor de Ricci de  $\Sigma_t$  y su curvatura extrínseca mediante la ecuación*

$$\vec{\gamma}^*\bar{\mathbf{R}} = -\frac{1}{N}\mathcal{L}_m\mathbf{K} - \frac{1}{N}\nabla\nabla N + \mathbf{R} + \mathbf{K}\mathbf{K} - 2\mathbf{K} \cdot \vec{\mathbf{K}} \quad (4.3.4)$$



**Demostración.** De la ecuación de Gauss [(3.5.4), pág. 87] y de (4.3.3) se obtiene el resultado en índices

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \bar{R}_{\mu\nu} = -\frac{1}{N} \mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} - \frac{1}{N} \nabla_\alpha \nabla_\beta N + R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\mu} K^\mu_\beta \quad (4.3.5)$$

en notación de índices libres (notación tensorial) obtenemos el resultado deseado ■

Las ecuaciones [(3.6.6), pág. 93], [(3.6.10), pág. 96] y (4.3.3) completan la descomposición 2 + 1 del tensor de Riemann del espacio-tiempo. La parte proyectada tres veces a lo largo de  $\mathbf{n}$  se anula, es decir  $\bar{\mathbf{Riem}}(\bar{\mathbf{n}}, \mathbf{n}, \mathbf{n}, \cdot) = 0$  y  $\bar{\mathbf{Riem}}(\cdot, \mathbf{n}, \mathbf{n}, \mathbf{n}) = 0$ , esto se da gracias a las simétrías del tensor de Riemann, entonces se puede proyectar a lo más dos veces sobre  $\mathbf{n}$  sin que el resultado se anule, gracias a eso tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.3.4** *El tensor de Riemann del espacio-tiempo M está dado por la ecuación*

$$\bar{R}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = \frac{1}{N} \mathcal{L}_m \mathbf{K} + \frac{1}{N} \nabla_i \nabla^i N - K_{ij} K^{ij} \quad (4.3.6)$$

**Demostración.** Podemos limitar el rango de las variables a los índices  $i, j = 1, 2$  y entonces todos los tensores involucrados serán espaciales, incluido  $\mathcal{L}_m \mathbf{K}$ . Tomamos la traza de (4.3.4) respecto a  $\gamma$  (en índices se contrae con  $\gamma^{\alpha\beta}$ ), entonces tenemos

$$\gamma^{\alpha\beta} \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \bar{R}_{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu) \bar{R}_{\mu\nu} = \bar{R} + n^\mu n^\nu \bar{R}_{\mu\nu} \dots\dots\dots(1)$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m(\gamma^{ij} K_{ij}) &= \gamma^{ij} \mathcal{L}_m K_{ij} + K_{ij} \mathcal{L}_m \gamma^{ij} \quad \implies \\ \gamma^{ij} \mathcal{L}_m K_{ij} &= \mathcal{L}_m \mathbf{K} - K_{ij} \mathcal{L}_m \gamma^{ij} \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m(\gamma_{ij} \gamma^{ij}) &= \mathcal{L}_m(\delta_i^j) = 0 \quad \implies \\ \gamma_{lk} \mathcal{L}_m \gamma^{kj} + \gamma^{kj} \mathcal{L}_m \gamma_{lk} &= 0 \end{aligned}$$

multiplicando la ecuación anterior por  $\gamma^{il}$

$$\gamma^{il} \gamma_{lk} \mathcal{L}_m \gamma^{kj} + \gamma^{ik} \gamma^{kj} \mathcal{L}_m \gamma_{lk} = \mathcal{L}_m \gamma^{ij} + \gamma^{il} \gamma^{kj} (-2N K_{lk}) = 0$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}_m \gamma^{ij} = 2N K^{ij} \dots\dots\dots(2)$$

Por otro lado

$$\gamma_{ij} \mathcal{L}_m K_{ij} = \mathcal{L}_m K - 2NK^{ij}K_{ij} \dots\dots\dots(3)$$

$$\gamma^{ij} \nabla_i \nabla_j N = \nabla^j \nabla_j N \dots\dots\dots(4)$$

$$\gamma^{ij} R_{ij} = R \dots\dots\dots(5)$$

$$K_{ij} K \gamma^{ij} = K^2 \dots\dots\dots(6)$$

por lo tanto tenemos que, después de proyectar

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu &= -\frac{1}{N} \mathcal{L}_m K + 2K^{ij} K_{ij} + R - \frac{1}{N} \nabla_i \nabla^i N + K^2 - 2K_{ij} K^{ij} - \bar{R} \\ \bar{R}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{N} \mathcal{L}_m K + R - \frac{1}{N} \nabla_i \nabla^i N + K^2 - \bar{R} \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

De la ecuación de Gauss-Codazzi [(3.6.8), pág. 96] tenemos

$$R + K^2 = \bar{R} + 2\bar{R}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu + K_{ij} K^{ij} \dots\dots\dots(8)$$

Sustituyendo la ecuación (8) en (7) tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu &= -\frac{1}{N} \mathcal{L}_m K + 2K^{ij} K_{ij} + R - \frac{1}{N} \nabla_i \nabla^i N + K^2 - 2K_{ij} K^{ij} - \bar{R} + \\ &\quad + \bar{R} + 2\bar{R}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu + K_{ij} K^{ij} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\bar{R}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = \frac{1}{N} \mathcal{L}_m K + \frac{1}{N} \nabla_i \nabla^i N - K_{ij} K^{ij} \quad \blacksquare$$

**Corolario 4.3.5** *El escalar de curvatura está dado por*

$$\bar{R} = R + K^2 + K_{ij} K^{ij} - \frac{2}{N} \mathcal{L}_m K - \frac{2}{N} \nabla_i \nabla^i N \quad (4.3.7)$$

**Demostración.** Sustituyendo (4.3.6) en (3.6.8) obtenemos

$$\begin{aligned} R + K^2 &= \bar{R} + \frac{2}{N} \mathcal{L}_m K + \frac{2}{N} \nabla_i \nabla^i N - 2K_{ij} K^{ij} + K_{ij} K^{ij} \implies \\ \bar{R} &= R + K^2 + K_{ij} K^{ij} - \frac{2}{N} \mathcal{L}_m K - \frac{2}{N} \nabla_i \nabla^i N \quad \blacksquare \end{aligned}$$





---

## *Capítulo 5*

# *El Formalismo Canónico de la Relatividad General*

---

Hemos mencionado que, de acuerdo a la teoría de la Relatividad General, la gravedad no es una fuerza como se le consideraba en la Física Newtoniana, sino que es una manifestación de la “curvatura” del espacio-tiempo. Un objeto masivo produce una distorsión en la geometría del espacio-tiempo, y a su vez esta distorsión controla o altera el movimiento de los objetos. Utilizando el lenguaje de John A. Wheeler, la materia le dice al espacio-tiempo como curvarse, y el espacio-tiempo le dice a la materia como moverse.

En el Capítulo 1 mencionamos dos de las tres ideas principales que guiaron a Einstein en su camino hacia la Relatividad General: El “Principio de Covariancia General” que dice que las leyes de la Física deben tomar la misma forma para todo observador, el “Principio de Equivalencia” que dice que todos los objetos caen exactamente de la misma forma en un campo gravitacional. La tercera idea fundamental es el “Principio de Mach”<sup>1</sup> que dice que la inercia local de un objeto debe ser producida por la distribución total de la materia en el Universo. El Principio de Covariancia General llevó a Einstein a pedir que las leyes de la Física se escribieran en forma tensorial, el Principio de Equivalencia lo llevó a concluir que la manera natural de describir a la gravedad era identificándola con la geometría del espacio-tiempo, y el Principio de Mach lo llevó a la idea de que dicha geometría debería ser alterada por la distribución de materia y energía, este elemento está contenido en las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales pueden derivarse de varias maneras, ya sea buscando una generalización relativista y consistente con la ley de la gravitación universal de Newton (camino seguido por Einstein), o derivándolas de manera formal a partir de un principio variacional partiendo de un lagrangiano adecuado.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Llamado así en honor a Ernst Mach quién lo postuló a fines del siglo XIX.

<sup>2</sup>Ésta es la Acción de Einstein-Hilbert que usaremos más adelante.

Para estudiar la evolución en el tiempo de cualquier sistema físico, lo primero que debe hacerse es formular dicha evolución como un “problema de valores iniciales” o “problema de Cauchy”: dadas condiciones iniciales (y de frontera) adecuadas, las ecuaciones fundamentales deben poder predecir la evolución futura (o pasada) del sistema. Al intentar escribir a las ecuaciones de Einstein como un problema de Cauchy nos enfrentamos a un problema: las ecuaciones de Einstein están escritas en forma tal que el espacio y el tiempo son simétricos y juegan papeles equivalentes. Esta “covariancia” de las ecuaciones es importante (y elegante) desde el punto de vista teórico, pero no permite pensar claramente en la evolución en el tiempo del campo gravitacional. Lo primero que debemos hacer para reescribir a las ecuaciones de Einstein como un problema de Cauchy es separar los papeles del espacio y el tiempo de forma clara. A la formulación de la Relatividad General que resulta de esta separación se le conoce como el “formalismo 2 + 1”. En los primeros capítulos hemos desarrollado los conceptos geométricos necesarios para hacer tal descomposición, la cual haremos en el presente capítulo

## 5.1. *Descomposición 2+1 de las ecuaciones de Einstein*

Sea  $(M, \mathbf{g})$  el espacio-tiempo 3-dimensional, tal que  $\mathbf{g}$  obedece las ecuaciones de Einstein<sup>3</sup> en el vacío con constante cosmológica nula [8]

$$\bar{\mathbf{R}} - \frac{1}{2}\bar{R}\mathbf{g} = 0 \quad (5.1.1)$$

donde  $\bar{\mathbf{R}}$  es el tensor de Ricci y  $\bar{R}$  es el escalar de curvatura asociados a  $\mathbf{g}$ .

---

<sup>3</sup>Fue el matemático francés E.Cartan quien demostró que la deducción más general de las ecuaciones de campo de la RG contenía de forma natural un término introducido inicialmente por Einstein durante sus investigaciones sobre un modelo cosmológico estático. Las mencionadas ecuaciones quedaban por consiguiente,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

siendo  $\Lambda$  la desde entonces llamada constante cosmológica. En ausencia de campos y materia  $\Lambda$  expresa un tipo de curvatura intrínseca del espacio-tiempo. Pero puesto que la curvatura espacio-temporal es debida a la presencia de materia o energía, es lógico suponer que  $\Lambda$  nos está indicando que el estado físico usualmente denominado vacío no es realmente tal. Es decir, a falta de los campos y la materia ordinaria, el vacío posee una densidad de energía propia imposible de eliminar.

Para escribir las ecuaciones de Einstein en el lenguaje 2 + 1, vamos a utilizar al operador de proyección junto con el vector normal para separar a las ecuaciones de Einstein en 3 grupos:

**Teorema 5.1.1** *La proyección de las ecuaciones de Einstein en la superficie  $\Sigma_t$  es:*

$$\mathcal{L}_m \mathbf{K} = -\nabla \nabla N + N(\mathbf{R} + K\mathbf{K} - 2\mathbf{K} \cdot \vec{K} - \frac{1}{2}\bar{R}\gamma) \quad (5.1.2)$$

**Demostración.** Aplicamos el operador lineal  $\vec{\gamma}^*$  a la ecuación (5.1.1) y como  $\vec{\gamma}^* \mathbf{g} = \gamma$ , entonces

$$\vec{\gamma}^* \bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{2}\bar{R}\vec{\gamma}^* \mathbf{g} = \frac{1}{2}\bar{R}\gamma$$

De [(4.3.4), pág. 110] tenemos

$$\vec{\gamma}^* \bar{\mathbf{R}} = -\frac{1}{N}\mathcal{L}_m \mathbf{K} - \frac{1}{N}\nabla \nabla N + \mathbf{R} + K\mathbf{K} - 2\mathbf{K} \cdot \vec{K} = \frac{1}{2}\bar{R}\gamma$$

despejando  $\mathcal{L}_m \mathbf{K}$  obtenemos el resultado deseado ■

Debido a que cada término de la ecuación de arriba es un campo tensorial tangente a  $\Sigma_t$ , entonces podemos reemplazar los índices espacio-temporales por índices espaciales para obtener la ecuación en notación de índices como:

$$\mathcal{L}_m K_{ij} = -\nabla_i \nabla_j N + N(R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k - \frac{1}{2}\bar{R}\gamma_{ij}) \quad (5.1.3)$$

Estas ecuaciones contienen la verdadera dinámica del sistema y son las ecuaciones de evolución.

**Teorema 5.1.2** *La proyección de las ecuaciones de Einstein en el vacío sobre el vector temporal  $\mathbf{n}$  es:*

$$R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 0 \quad (5.1.4)$$

a esta ecuación se le llama “**constricción hamiltoniana**”

**Demostración.** Como la ecuación (5.1.1) es una igualdad entre formas bilineales le aplicamos la pareja  $(\mathbf{n}, \mathbf{n})$  y como  $\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1$ , tenemos:

$$\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) + \frac{1}{2}\bar{R}\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) - \frac{1}{2}\bar{R} = 0$$

entonces

$$2\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \bar{R} \dots\dots\dots(1)$$

de la ecuación de Gauss-Codazzi [(3.6.8), pág. 96]

$$2\bar{R}_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = R + K^2 - K_{ij}K^{ij} - \bar{R}$$

sustituyendo esto en la ecuación (1) y como  $\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \bar{R}_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$  obtenemos el resultado deseado ■

La ecuación (5.1.4) no tiene derivadas temporales (aunque sí tiene derivadas espaciales de  $\gamma_{ij}$  dentro del escalar de Ricci), por ello no es una ecuación de evolución, es una “constricción” (a veces también llamada ligadura o vínculo) del sistema. Como esta constricción está relacionada con la densidad de energía  $\rho$ ,<sup>4</sup> se le conoce como la “constricción de energía” o la “constricción hamiltoniana”.

**Teorema 5.1.3** *La proyección de las ecuaciones de Einstein en  $\Sigma_t$  y en  $\mathbf{n}$ , es conocida como la “constricción de momento” o “constricción difeomórfica”<sup>5</sup> y esta dada por*

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{K}} - \nabla K = 0 \quad (5.1.5)$$

**Demostración.** La proyección sobre la superficie y sobre la normal se representa por

$$\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{n}, \vec{\gamma}(\cdot)) = \frac{1}{2}\bar{R}\mathbf{g}(\mathbf{n}, \vec{\gamma}(\cdot)) = 0$$

entonces de la ecuación de Codazzi-Mainardi [(3.6.11), pág. 97] tenemos

$$\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{n}, \vec{\gamma}(\cdot)) = \gamma_\alpha^\mu n^\nu \bar{R}_{\mu\nu} = \nabla_\alpha K - \nabla_\beta K_\alpha^\beta = 0$$

por lo tanto

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{K}} - \mathbf{K} = 0 \quad \blacksquare$$

<sup>4</sup>Cuando se toman las ecuaciones de Einstein en general:  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ , la cual relaciona la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia y energía dada por el tensor de energía-momento. Haciendo un proceso análogo la constricción hamiltoniana es

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho$$

donde  $\rho := n_\alpha n_\beta T^{\alpha\beta}$  es la densidad de energía de la materia medida por los observadores eulerianos.

<sup>5</sup>Se le conoce como constricción de momento pues en general la proyección mixta puede escribirse

$$\nabla_j [K^{ij} - \gamma^{ij} K_{ij}] = 8\pi j^i$$

donde  $j^i := \gamma_\beta^i (n_\alpha T^{\alpha\beta})$ , es el flujo de momento medido por los observadores eulerianos. Se le llama “constricción difeomórfica” por razones que veremos más adelante.



La ecuación (5.1.5) tampoco tiene derivadas temporales, por lo que es otra constricción (de hecho son 2 constricciones). Las ecuaciones de Einstein (5.1.1) equivalen a las tres ecuaciones: (5.1.2) (5.1.4) y (5.1.5). La ecuación (5.1.2) es tensorial para tensores de rango 2 (es decir, formas bilineales en la superficie) e involucra sólo a tensores simétricos y tiene tres componentes independientes. La ecuación (5.1.4) es escalar y por tanto produce una componente y la ecuación (5.1.5) es tensorial de rango 1 y tiene 2 componentes independientes. El número total de componentes independientes es de 6 que son las mismas componentes que tiene la ecuación (5.1.1).

## 5.2. Coordenadas adaptadas a la foliación

Las ecuaciones (5.1.2)-(5.1.5) son un sistema de ecuaciones tensoriales, para transformarlas a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (E.D.P) se puede introducir un sistema de coordenadas en la variedad espacio-tiempo  $M$ .

**Definición 5.2.1** *Las coordenadas adaptadas a la foliación  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbf{R}}$  es un conjunto definido de la siguiente manera. En cada superficie  $\Sigma_t$  se introduce algún sistema de coordenadas  $x^i = (x^1, x^2)$  llamadas **coordenadas espaciales**, si este sistema varía suavemente entre dos superficies próximas, entonces  $x^\alpha = (t, x^1, x^2)$  constituye un sistema de coordenadas en  $M$ , llamado **sistema de coordenadas adaptadas** en  $M$ .*

El conjunto  $\{\partial_\alpha\} = \{\partial_t, \partial_i\}$  es una base natural de  $T_p M$  asociada a las coordenadas  $\{x^\alpha\}$ , donde

$$\partial_t := \frac{\partial}{\partial t} \quad (5.2.1)$$

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i} \quad i \in \{1, 2\} \quad (5.2.2)$$

Notar que el vector  $\partial_t$  es tangente a una línea con coordenadas espaciales constantes, es decir, tangente a la curva de  $M$  definida por  $x^1 = c^1$  y  $x^2 = c^2$  donde las  $c^i$  son constantes (ver la figura 5.2.1). A la derivada  $\partial_t$  se le llama **vector tiempo**.

**Observación 5.2.2** *Para cada  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\partial_i$  es tangente a las líneas  $t = c^0$ ,  $x^j = c^j$  para  $i \neq j$ . A cada  $t$  constante estas líneas pertenecen a la superficie*

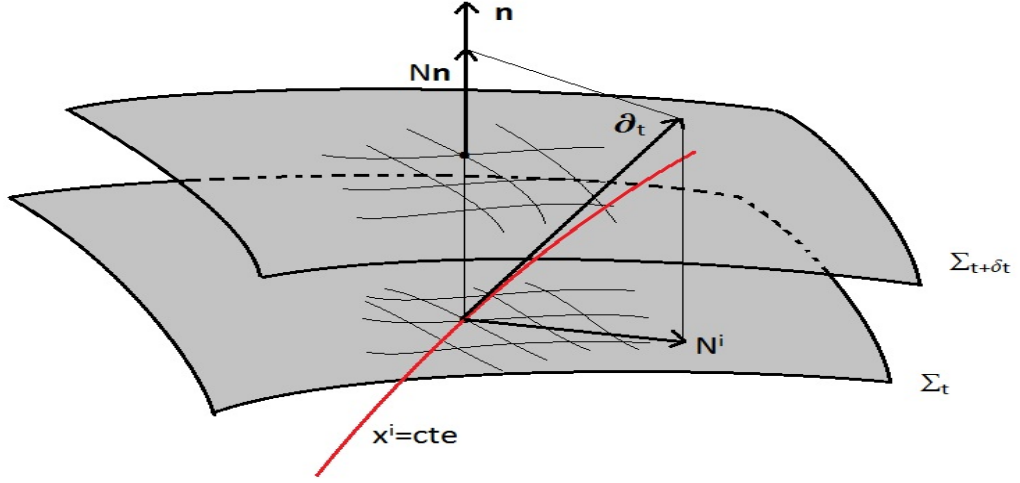


Figura 5.2.1: Coordenadas adaptadas, función lapse y vector shift

$\Sigma_t$  lo cual implica que  $\partial_i$  es tangente a ella, esto es

$$\partial_i \in T_p \Sigma \quad i \in \{1, 2\}$$

La base dual asociada a  $\{\partial_\alpha\}$  es la base de  $T_p^* M$ ,  $\{\mathbf{d}x^\alpha\}$  y por ello cumplen

$$\langle \mathbf{d}x^\alpha, \partial_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha \quad (5.2.3)$$

en particular la 1-forma  $\mathbf{d}t$  es dual del vector  $\partial_t$  y cumplen que

$$\langle \mathbf{d}t, \partial_t \rangle = 1 \quad (5.2.4)$$

La ecuación [(4.1.5), pág. 103] dice que  $\langle \mathbf{d}t, \mathbf{m} \rangle = 1$ . En general, los vectores  $\partial_t$  y  $\mathbf{m}$  difieren, sólo coinciden en el caso en el que las coordenadas  $\{x^i\}$  son tales que las líneas  $x^i = \text{cte}$  son ortogonales a la superficie  $\Sigma_t$  (ver la figura 5.2.1).

**Definición 5.2.3** La diferencia entre los vectores  $\partial_t$  y  $\mathbf{m}$  es el llamado **vector shift**<sup>6</sup> y lo denotamos por  $\mathbf{N}$

$$\mathbf{N} := \partial_t - \mathbf{m} = \partial_t - N\mathbf{n} \quad (5.2.5)$$

donde  $\mathbf{n}$  es normal a  $\Sigma_t$  y  $\mathbf{N}$  es tangente a  $\Sigma_t$ .

<sup>6</sup>Vector de corrimiento

De aquí se sigue que la descomposición 2 + 1 del vector temporal es:

$$\partial_t = N\mathbf{n} + \mathbf{N} \quad (5.2.6)$$

**Teorema 5.2.4** *Sea  $M$  una variedad espacio-tiempo, entonces se cumplen las siguientes propiedades*

$$\langle \mathbf{dt}, \mathbf{N} \rangle = 0 \quad (5.2.7)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = 0 \quad (5.2.8)$$

$$\mathbf{g}(\partial_t, \partial_t) = -N^2 + \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \quad (5.2.9)$$

**Demostración.**

(1) Usando (5.2.4) con la ecuación [(4.1.5), pág. 103] tenemos

$$\langle \mathbf{dt}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{dt}, \partial_t \rangle - \langle \mathbf{dt}, \mathbf{m} \rangle = 1 - 1 = 0$$

(2) De la ecuación [(4.1.3), pág. 103], tenemos

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = \langle \underline{\mathbf{n}}, \mathbf{N} \rangle = N \langle \mathbf{dt}, \mathbf{N} \rangle$$

(3) Usando la ecuación (5.2.6)

$$\mathbf{g}(\partial_t, \partial_t) = \mathbf{g}((N\mathbf{n} + \mathbf{N}), (N\mathbf{n} + \mathbf{N})) = -N^2 + \mathbf{g}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \quad \blacksquare$$

**Definición 5.2.5** *En base a los resultados anteriores podemos definir la causalidad del vector tiempo:*

$$1. \partial_t \text{ es temporal} \iff \mathbf{g}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) < N^2.$$

$$2. \partial_t \text{ es nulo} \iff \mathbf{g}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = N^2.$$

$$3. \partial_t \text{ es espacial} \iff \mathbf{g}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) > N^2.$$

**Observación 5.2.6** *Como  $N \in T_p \Sigma_t$ , introducimos las componentes de  $\mathbf{N}$  y de su dual  $\underline{\mathbf{N}}$  con respecto a las coordenadas espaciales  $\{x^i\}$  de  $\Sigma_t$  de acuerdo a:*

$$\mathbf{N} := N^i \partial_i \quad \text{y} \quad \underline{\mathbf{N}} := N_i \mathbf{d}x^i \quad (5.2.10)$$

**Teorema 5.2.7** *Las componentes de un vector unitario y normal  $\mathbf{n}$  con respecto a la base natural  $\{\partial_\alpha\}$  se pueden expresar en términos de  $\mathbf{N}$  y de  $N^i$  como:*

$$n^\alpha = \frac{1}{N}(1, -N^1, -N^2) \quad (5.2.11)$$

**Demostración.** De la ecuación (5.2.6)

$$\mathbf{n} = \frac{\partial_t - \mathbf{N}}{N}$$

entonces

$$n^\alpha = \frac{1}{N}(\partial_t - N^i \partial_i) = \frac{1}{N}(\partial_t - N^1 \partial_{x^1} - N^2 \partial_{x^2}) = \frac{1}{N}(1, -N^1, -N^2) \quad \blacksquare$$

**Teorema 5.2.8** *Las componentes covariantes del vector normal (es decir, las componentes de  $\underline{\mathbf{n}}$  con respecto a la base dual  $\{\mathbf{d}x^\alpha\}$  de  $T_p^*M$ ) son:*

$$n_\alpha = (-N, 0, 0)$$

**Demostración.** De la ecuación [(4.1.3), pág. 103]  $\underline{\mathbf{n}} = -N\mathbf{d}t$ , entonces

$$n_\alpha = -N\mathbf{d}t + 0dx + 0dy = (-N, 0, 0) \quad \blacksquare$$

**Observación 5.2.9** *Las componentes  $\gamma_{ij}$  de la 2-métrica  $\gamma$  con respecto a las coordenadas  $\{x^i\}$  son*

$$\gamma := \gamma_{ij} \mathbf{d}x^i \otimes \mathbf{d}x^j$$

*Las componentes  $g_{\alpha\beta}$  de  $\mathbf{g}$  respecto a las coordenadas  $\{x^\alpha\}$  son*

$$\mathbf{g} := g_{\alpha\beta} \mathbf{d}x^\alpha \otimes \mathbf{d}x^\beta$$

*donde las componentes de la métrica son*

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}(\partial_\alpha, \partial_\beta) \quad (5.2.12)$$

**Teorema 5.2.10** Las componentes de la métrica  $g$  en términos de las cantidades de la descomposición  $2 + 1$  están dadas por

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{0j} \\ g_{i0} & g_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_k N^k - N^2 & N_j \\ N_i & \gamma_{ij} \end{bmatrix} \quad (5.2.13)$$

**Demostración.** De la ecuación (5.2.9)

$$g_{00} = \mathbf{g}(\partial_t, \partial_t) = -N^2 + N_i N^i \quad (5.2.14)$$

por otro lado de (5.2.5)

$$\begin{aligned} g_{0j} &= \mathbf{g}(\partial_t, \partial_j) = \partial_t \cdot \partial_j = (\mathbf{m} + \mathbf{n}) \cdot \partial_j = \mathbf{m} \cdot \partial_j + \mathbf{N} \cdot \partial_j \\ &= \langle \underline{\mathbf{N}}, \partial_j \rangle = N_i \langle dx^i, \partial_j \rangle = N_j \end{aligned}$$

por lo tanto

$$g_{0j} = N_j \quad (5.2.15)$$

$$g_{i0} = N_i \quad (5.2.16)$$

finalmente como  $\partial_i$  y  $\partial_j$  son tangentes a  $\Sigma_t$  entonces

$$g_{ij} = \mathbf{g}(\partial_i, \partial_j) = \gamma(\partial_i, \partial_j) = \gamma_{ij} \quad \blacksquare \quad (5.2.17)$$

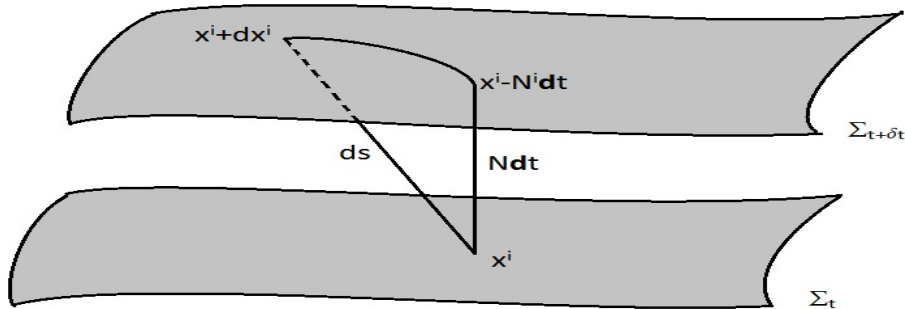


Figura 5.2.2: Teorema de Pitágoras Lorentziano.

**Corolario 5.2.11** Las componentes de la métrica  $g$ <sup>7</sup> son

$$d^2s = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -N^2dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \quad (5.2.18)$$

**Demostración.** Usando las ecuaciones:(5.2.14),(5.2.15) y (5.2.17) tenemos

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= g_{00}dt^2 + g_{0j}dtdx^j + g_{i0}dx^i dt + g_{ij}dx^i dx^j \\ &= (-N^2 + N_i N^i)dt^2 + N_j dtdx^j + N_i dx^i dt + \gamma_{ij}dx^i dx^j \\ &= -N^2dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \end{aligned}$$

en este último paso usamos que  $N_i = \gamma_{ij}N^j$  ■

**Definición 5.2.12** Se definen las densidades escalares  $g$  y  $\gamma$  que dependen de las coordenadas  $\{x^\alpha\}$  como:

$$g := \det(g_{\alpha\beta})$$

$$\gamma := \det(\gamma_{ij})$$

**Teorema 5.2.13** La inversa de la métrica es

$$g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} g^{00} & g^{0j} \\ g^{i0} & g^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & \gamma^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{bmatrix} \quad (5.2.19)$$

**Demostración.** Del álgebra lineal sabemos que la inversa de una matriz está dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

y el determinante de  $g_{\alpha\beta}$  :

$$\det(g_{\alpha\beta}) = \gamma_{ij}N_i N^j - \gamma_{ij}N_i N^j - N_i N^i = N_i N^i - N_i N^i - \gamma_{ij}N^2 = -\gamma_{ij}N^2$$

<sup>7</sup>Se puede imaginar el espacio-tiempo foliado por una familia de superficies  $t = cte$ ; luego,  $Ndt$  es el lapso de tiempo propio entre las superficies superior e inferior. Por otro lado, la función de corrimiento da la correspondencia entre puntos en las dos superficies;  $x^i + dx^i + N^i dt$  en la superficie inferior que corresponde al punto  $x^i + dx^i$ ,  $t + dt$  en la superior. Desde este punto de vista, esta ecuación es sólo una expresión del teorema de Pitágoras. En la figura 5.2.2 se tiene la interpretación geométrica de esta ecuación que es un "Teorema de Pitágoras" Lorentziano.

entonces:

$$\begin{aligned}
 g^{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta})^{-1} &= -\frac{1}{\gamma_{ij}N^2} \begin{bmatrix} \gamma_{ij} & -N_i \\ -N_j & N_iN^i - N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_{ij}}{-\gamma_{ij}N^2} & \frac{-N_i}{-\gamma_{ij}N^2} \\ \frac{-N_j}{-\gamma_{ij}N^2} & \frac{N_iN^i - N^2}{-\gamma_{ij}N^2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{\gamma^{ij}N_i}{N^2} \\ \frac{\gamma^{ij}N_j}{N^2} & \gamma^{ij} - \frac{\gamma^{ij}N_iN_j}{N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & \gamma^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

■

**Teorema 5.2.14** *El elemento de volumen de  $M$  en términos de la métrica  $\gamma$  en  $\Sigma_t$  es:*

$$\sqrt{-g}d^3x = \sqrt{\gamma}Ndt d^2x \quad (5.2.20)$$

**Demostración.** La regla de Cramer dice que

$$g^{\alpha\beta} = \frac{C_{\alpha\beta}}{\det(g_{\alpha\beta})} = \frac{C_{\alpha\beta}}{g}$$

donde el cofactor es

$$C_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta} \det(M_{\alpha\beta})$$

los  $M_{\alpha\beta}$  son los menores de la matriz  $g_{\alpha\beta}$ . Así tenemos que

$$g^{00} = \frac{C_{00}}{g} = \frac{\det(\gamma_{ij})}{g} = \frac{\gamma}{g}$$

de la ecuación (5.2.14) obtenemos que

$$g\left(-\frac{1}{N^2}\right) = \gamma \quad \implies \quad g = -N^2\gamma$$

por lo tanto

$$\sqrt{-g}d^3x = \sqrt{N^2\gamma}d^2x dt = N\sqrt{\gamma}d^2x dt \quad \blacksquare$$

**Observación 5.2.15** *Cálculo alternativo de la métrica  $g$ .*

Sea  $\{\partial_\alpha\} = \{\partial_0, \partial_a\}$  una base ortonormal para  $T_pM$  con respecto a la métrica  $g$ , es decir,  $\mathbf{n} = \partial_0$  y  $\partial_a = \vec{\gamma}^*(\partial_a) = \partial_a + \mathbf{n}g(\mathbf{n}, \partial_a)$  y sea  $\{dx^\alpha\}$  su base dual, es decir, se cumple que

$$dx^\alpha(\partial_\beta) = \delta_\beta^\alpha$$

La familia uniparamétrica de encajes  $t \longrightarrow \Phi_t : \Sigma_t \longrightarrow M$  define el campo vectorial  $\boldsymbol{\partial}_t = N\mathbf{n} + \mathbf{N} = N\partial_0 + N^a\partial_a$ . Si fijamos el sistema de coordenadas  $\{x^k\}$  en  $\Sigma_t$ , entonces  $\boldsymbol{\partial}_t$  es la 3-velocidad de puntos con coordenadas espaciales  $\{x^k\}$  fijas.

Si  $U \subset \Sigma$  es una vecindad coordenada, de coordenadas  $y^k : U \longrightarrow \mathbf{R}$ , definimos un sistema de coordenadas  $\{x^\mu, V\}$  en  $M$  por:

$$V = \bigcup_{t \in \mathbf{R}} \Phi_t(U) \quad \text{tal que}$$

$$x^0(p) = t \quad \text{si } p \in M$$

$$x^k(p) = y^k \circ \Phi_t^{-1}(p) \quad \text{si } p \in \Sigma_t$$

Sean  $\{\boldsymbol{\partial}_0, \boldsymbol{\partial}_k\}$  campos vectoriales en  $V$ , entonces podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\partial}_t \\ \boldsymbol{\partial}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & N^a \\ 0 & A_k^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\partial}_0 \\ \boldsymbol{\partial}_a \end{pmatrix}$$

invirtiendo la última ecuación obtenemos:

$$\begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dt & dx^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & N^a \\ 0 & A_k^a \end{pmatrix}$$

como  $\underline{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\partial}^0$  y  $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{g} + \underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}}$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \boldsymbol{\gamma} - \underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}} = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^a \otimes dx^a \\ &= -N^2 dt \otimes dt + (N^a dt + A_k^a dx^k) \otimes (N^k + A_l^k dx^l) \\ &= -N^2 dt \otimes dt + A_k^a A_i^a (N^k dt + dx^k) \otimes (N^i dt + dx^i) \\ &= -N^2 dt \otimes dt + \gamma_{ik} (dx^i + N^i dt) \otimes (dx^k + N^k dt) \end{aligned}$$

donde se define que

$$\gamma_{ik} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\partial}_i, \boldsymbol{\partial}_k) = A_i^a A_k^a$$

Esta expresión de la métrica es la misma que la dada por la ecuación (5.2.18).

Mediante el uso de las formas diferenciales podemos demostrar que el elemento de volumen es  $d\mu = N\sqrt{\gamma}dt \wedge d^2x$  [8]

La 3-forma de volumen es:

$$d\mu = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = (Ndt) \wedge (N^1 dt + A_k^1 dx^k) \wedge (N^2 dt + A_i^2 dx^i)$$



$$\begin{aligned}
&= NA_k^1 A_i^2 dt \wedge dx^k \wedge dx^i = N(A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2) dt \wedge dx \wedge dy \\
&= N\sqrt{\alpha} dt \wedge d^2x = N\sqrt{\alpha} dt d^2x \quad ^8
\end{aligned}$$

El siguiente teorema da la forma explícita de los símbolos de Christoffel en términos de la función lapso y del vector de corrimiento con los cuales podrá escribirse el escalar de curvatura, la acción de Hilbert, etc., en términos de  $N$  y  $N^i$ .

**Teorema 5.2.16** *La métrica  $g_{\mu\nu}$  lleva a los siguientes símbolos de Christoffel:*

$$\bar{\Gamma}_{tt}^t = \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{N^b}{N} \nabla_b N + \frac{N^a N^b}{N} K_{ab} \quad (5.2.21)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{tt}^a &= \gamma^{ab} N \nabla_b N + N \gamma^{ab} \partial_t \left( \frac{N_b}{N} \right) - \frac{N^a N^b}{N} \nabla_b N + \\
&\quad - \gamma^{ab} N^c \nabla_b N_c - \frac{N^a N^b N^c}{N} K_{bc} \quad (5.2.22)
\end{aligned}$$

$$\bar{\Gamma}_{ta}^t = \frac{1}{N} \nabla_a N + \frac{N^b}{N} K_{ab} \quad (5.2.23)$$

$$\bar{\Gamma}_{ta}^b = N \gamma^{bc} K_{ac} + N \nabla_a \left( \frac{N^b}{N} \right) - \frac{N^b N^c}{N} K_{ac} \quad (5.2.24)$$

$$\bar{\Gamma}_{ab}^t = \frac{1}{N} K_{ab} \quad (5.2.25)$$

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \frac{N^k}{N} K_{ab} \quad (5.2.26)$$

### Demostración.

1) Mediante las ecuaciones [(2.6.9), pág. 45], (5.2.13) y (5.2.19) podemos demostrar la ecuación (5.2.21) como sigue

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tt}^t &= \frac{1}{2} [g^{tt}(g_{tt,t}) + g^{at}(g_{at,t} + g_{ta,t} - g_{tt,a})] \\
&= -\frac{1}{2N^2} \frac{\partial}{\partial t} (N_b N^b - N^2) + \frac{N^a}{2N^2} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial t} N_a - \nabla_a (N_b N^b - N^2) \right]
\end{aligned}$$

<sup>8</sup>Aquí hicimos uso de la regla de alternación para las formas diferenciales

$$dx^i dx^j = -dx^j dx^i$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2N^2} \left[ N_b \frac{\partial N^b}{\partial t} + N^b \frac{\partial N_b}{\partial t} - 2N \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
&\quad + \frac{N^a}{2N^2} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial t} N_a - N_b \nabla_a N^b - N^b \nabla_a N_b + 2N \nabla_a N \right] \\
&= -\frac{N_b}{2N^2} \frac{\partial N^b}{\partial t} - \frac{N^b}{2N^2} \frac{\partial N_b}{\partial t} + \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{N^a}{N^2} \frac{\partial N_a}{\partial t} - \frac{N^a N_b}{2N^2} \nabla_a N^b + \\
&\quad - \frac{N^a N^b}{2N^2} \nabla_a N_b + \frac{N^a}{N^2} \nabla_a N \\
&= -\frac{N_b}{2N^2} \frac{\partial N^b}{\partial t} + \frac{N^b \gamma_{ab}}{2N^2} \frac{\partial N^a}{\partial t} + \frac{N^a N^b}{2N^2} \frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial t} - \frac{N^a N_b}{2N^2} \nabla_a N^b + \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} + \\
&\quad - \frac{N^a N^b}{2N^2} \nabla_a N_b + \frac{N^a}{N^2} \nabla_a N \\
&= -\frac{N_b}{2N^2} \frac{\partial N^b}{\partial t} + \frac{-N_b}{2N^2} \frac{\partial N^b}{\partial t} + \frac{N^a N^b}{2N^2} \frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial t} - \frac{N^a N^b}{2N^2} \nabla_a N_b + \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} + \\
&\quad - \frac{N^a N^b}{2N^2} \nabla_a N_b + \frac{N^a}{N^2} \nabla_a N \\
&= \frac{N^a N^b}{2N^2} \frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial t} + \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{N^a N^b}{2N^2} \nabla_a N_b + \frac{N^a}{N^2} \nabla_a N - \frac{N^a N_b}{2N^2} \nabla_a (\gamma^{ab} N_a) \\
&= \frac{N^a N^b}{2N^2} \frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial t} + \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{N^a N^b}{2N^2} \nabla_a N_b + \frac{N^a}{N^2} \nabla_a N - \frac{N^a N_b \gamma^{ab}}{2N^2} \nabla_a N_b \\
&= \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{N^b}{N} \nabla_b N + \frac{N^a N^b}{N} \left[ \frac{1}{2N} \{ \nabla_a N^b + \nabla_b N^a - \dot{\gamma}_{ab} \} \right] \\
&= \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{N^b}{N} \nabla_b N + \frac{N^a N^b}{N} K_{ab}
\end{aligned}$$

Como se quería probar,<sup>9</sup> usamos el hecho de que la conexión es métrica ( $\nabla_a \gamma^{ab} = 0$ ). ■

<sup>9</sup>Estamos haciendo uso de un resultado que probaremos más adelante en el Teorema 5.3.3

El conocimiento de la función lapso en cada punto de  $\Sigma_0$  determina de manera unívoca un vector  $\mathbf{m} = \mathbf{n}N$  y en consecuencia la localización de la superficie próxima  $\Sigma_{\delta t}$  mediante un transporte de Lie a lo largo de  $\mathbf{m}$ . También se puede decir que para cada punto de  $\Sigma_0$  la función lapso específica que tan lejano está este punto de un punto en  $\Sigma_{\delta t}$  para cada sistema de coordenadas  $\{x^i\}$  de  $\Sigma_0$  a  $\Sigma_{\delta t}$ .

**Teorema 5.2.17** *La derivada de Lie de  $\mathbf{K}$  con respecto a  $\partial_t$  es un campo tensorial tangente a  $\Sigma_t$ . Además tenemos las siguientes ecuaciones*

$$\mathcal{L}_{\partial_t}\gamma - \mathcal{L}_{\mathbf{N}}\gamma = -2N\mathbf{K} \quad (5.2.27)$$

$$\mathcal{L}_{\partial_t}\gamma_{ij} = \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t} \quad (5.2.28)$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{N}}\gamma_{ij} = \nabla_i N_j + \nabla_j N_i \quad (5.2.29)$$

**Demostración.** De la ecuación (5.2.5) y de la linealidad de la derivada de Lie obtenemos

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}\mathbf{K} = \mathcal{L}_{(\partial_t - \mathbf{N})}\gamma = \mathcal{L}_{\partial_t}\mathbf{K} - \mathcal{L}_{\mathbf{N}}\mathbf{K} \quad (5.2.30)$$

por la ecuación [(4.2.5), pág. 108]  $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}\mathbf{K}$  es tangente a  $\Sigma_t$  y como  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{K}$  son tangentes a  $\Sigma_t$  entonces  $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}\mathbf{K}$  lo es, esto implica que  $\mathcal{L}_{\partial_t}\mathbf{K}$  es tangente a  $\Sigma_t$ .

Para probar la ecuación (5.2.27) usamos (5.2.5), la linealidad de la derivada de Lie y (A.1.8), entonces

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}\gamma = \mathcal{L}_{\partial_t}\gamma - \mathcal{L}_{\mathbf{N}}\gamma = -2N\mathbf{K}$$

Para probar (5.2.28) tomamos un sistema de coordenadas adaptadas  $x^\alpha = (t, x^i)$ , entonces de (A.1.9) la derivada de Lie de la métrica con respecto a la parcial del tiempo es

$$\mathcal{L}_{\partial_t}\gamma_{ij} = \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t}$$

Para probar (5.2.29) aplicamos (A.1.9) en términos de las derivadas de la superficie

$$\mathcal{L}_{\mathbf{N}}\gamma_{ij} = N^k \nabla_k \gamma_{ij} + \gamma_{kj} \nabla_i N^k + \gamma_{ij} \nabla_j N^k = \nabla_i N_j + \nabla_j N_i$$

esto es así pues  $\nabla_k \gamma_{ij} = 0$  ■

Mediante estas relaciones es posible expresar a las ecuaciones (5.1.2) (5.1.4) y (5.1.5), como un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Este punto de vista es usado en Relatividad Numérica [10].

### 5.3. Forma 2+1 de la acción de Einstein-Hilbert

Con el fin de emplear los métodos habituales de cuantización en la teoría de campos, es necesario construir una densidad lagrangiana para la Relatividad General. Como ya hemos mencionado esto equivale a buscar una formulación que distinga claramente entre la parte espacial y temporal del espacio-tiempo, algo así rompe (por lo menos formalmente) con el espíritu fundacional de la Relatividad General, motivo por el cual se suele hablar en estos casos de “formalismo no covariante” o “formulación 2 + 1”,<sup>10</sup> para indicar esta nítida distinción que se establece entre variables espaciales y temporales.

Hasta ahora hemos introducido una foliación del espacio-tiempo mediante superficies  $\Sigma_t$  de tiempo constante, después hemos definido la función lapse  $N$  y el vector shift  $N^i$  que nos han servido para escribir la métrica del espacio-tiempo en su forma 2 + 1 [(5.2.18), pág. 124] y mediante las ecuaciones de Gauss-Codazzi [(3.6.6), pág. 93] hemos hecho la descomposición de las ecuaciones de Einstein en su forma 2 + 1, ahora buscaremos la densidad lagrangiana gravitacional y la escribiremos en su forma canónica.

Sea  $m$  una partícula clásica en el espacio  $\mathbf{R}^2$ ,<sup>11</sup> entonces la partícula sigue una trayectoria  $r(t)$  en este espacio, recordemos que para una partícula que describe una curva  $r(t)$  en  $\mathbf{R}^2$  con energía cinética  $T = \frac{1}{2}m \| \dot{r}(t) \|^2$  y la energía potencial  $V(r(t), t)$ , la lagrangiana se define como

$$L(r, \dot{r}, t) = \frac{1}{2}m \| \dot{r} \|^2 - V(r, t)$$

que es una función explícita de la posición, la velocidad y también del tiempo (en el caso de que lo sea  $V$ ). Por ejemplo, si la trayectoria de la partícula está restringida a pasar por una superficie  $\Sigma \subset \mathbf{R}^2$ , es natural pensar que el sistema “pierde un grado de libertad”, y la lagrangiana será una función con dominio la superficie junto con todos los planos tangentes a ella posibles, más, eventualmente, el tiempo. Esta situación se puede generalizar y abstraer progresivamente, lo que conduce a los siguientes conceptos [25].

**Definición 5.3.1** *El espacio de configuración de un sistema mecánico es una variedad diferenciable arbitraria  $M$ , entonces el lagrangiano es una función sobre  $TM$  o, con más generalidad (para lagrangianos dependientes del*

<sup>10</sup>En el caso físico real de cuatro dimensiones, se le conoce como formalismo 2 + 1.

<sup>11</sup>Conocido como el espacio de configuración de la partícula

tiempo),

$$L : TM \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad (5.3.1)$$

donde la coordenada natural de  $\mathbf{R}$  en  $TM \times \mathbf{R}$  o “tiempo” se usará para parametrizar las curvas bajo consideración (ec. (5.3.2)).

El dominio de definición de la lagrangiana es pues una variedad producto  $TM \times \mathbf{R}$ , donde usualmente se trabaja con coordenadas tipo  $(q, \dot{q}, t)$ , junto a la coordenada usual de  $\mathbf{R}$ .

Tiene sentido pues considerar  $\partial L/\partial q$ ,  $\partial L/\partial \dot{q}$  y  $\partial L/\partial t$ . Sea

$$\gamma : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \Sigma_t \quad \text{tal que } t \mapsto \gamma(t)$$

una curva diferenciable (tomando coordenadas podemos escribir  $t \mapsto q(t)$ ). Esta curva induce a su vez curvas en  $TM$  y en  $M = TM \times \mathbf{R}$ ,

$$I \subset \mathbf{R} \quad \text{tal que } t \longmapsto \gamma'(t)$$

$$I \subset \mathbf{R} \longrightarrow TM \times \mathbf{R} \quad \text{tal que } t \longmapsto (\gamma(t), t) \quad (5.3.2)$$

En coordenadas esta última función se suele escribir  $(q(t), \dot{q}(t), t)$ , donde cada  $\dot{q}^i(t)$  es igual a la componente  $i$ -ésima del vector tangente  $\gamma'(t)$ , que coincide con la derivada de  $q^i(t) := q^i(\gamma(t))$  en cada  $t \in I$ ,

$$\dot{q}^i(t) = \frac{dq^i}{dt}(t) \quad \forall t \in I$$

Es sabido que, en la deducción variacional de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se considera el funcional acción

$$S(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), t) dt$$

sobre curvas diferenciables  $\gamma : [t_0, t_1] \longrightarrow \Sigma_t$ . La compacidad de  $[t_0, t_1]$  (concretamente, la existencia de un “número de Lebesgue”) permite hallar un número finito de vecindades coordenadas  $(U^{(\alpha)}, q^{(\alpha)})$  y una partición del intervalo  $t_0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = t_1$  tal que  $\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset U^{(\alpha_i)}$  para algún  $\alpha_i$ . Así tiene sentido escribir

$$S(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), t) dt = \sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} L(q^{(\alpha_i)}(t), \dot{q}^{(\alpha_i)}(t), t) dt$$

para poder deducir expresiones manejables en coordenadas.

Típicamente, en Mecánica Lagrangiana se consideran curvas que conectan dos puntos fijos  $p_0, p_1 \in \Sigma_t$ , y que son críticas para el funcional de acción  $S$  en el siguiente sentido. Sea  $\gamma$  una curva que conecta  $p_0$  con  $p_1$ ,

$$\gamma : [t_0, t_1] \longrightarrow \Sigma_t, \quad \gamma(t_0) = p_0, \quad \gamma(t_1) = p_1.$$

Una variación de  $\gamma$  es una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} [-\epsilon, \epsilon] \times [t_0, t_1] &\longrightarrow M, \\ (s, t) &\longmapsto \gamma_s(t) \end{aligned}$$

para algún  $\epsilon > 0$ , que verifica  $\gamma_0(t) = \gamma(t), \forall t \in [t_0, t_1]$  (en ocasiones, también conviene permitir que el intervalo de definición de  $\gamma_s$  dependa de  $s$ , por lo que el dominio de la variación se generaliza subsecuentemente). La variación se llama de extremos fijos si

$$\gamma_s(t_0) = p_0, \quad \gamma_s(t_1) = p_1, \quad \forall s \in [-\epsilon, \epsilon].$$

Para cada  $s$  fijo, la curva  $t \longmapsto \gamma_s(t)$  es una curva longitudinal de la variación. Para cada  $t$  fijo, la curva  $s \longmapsto \gamma_s(t)$  es una curva transversal; esta curva determina en  $s = 0$  un vector tangente  $\mathbf{v}(t)$  para cada  $t$ . A la curva en  $TM$

$$t \longmapsto \mathbf{v}(t)$$

se le llama campo variacional o variación infinitesimal de  $\gamma$ . Obsérvese que la variación de  $\gamma$  en  $\Sigma_t$  induce una variación de  $\gamma$  en  $TM$ :

$$\begin{aligned} [-\epsilon, \epsilon] \times [t_0, t_1] &\longrightarrow TM, \\ (s, t) &\longrightarrow \gamma'_s(t), \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

donde  $\gamma'_s(t)$  denota al vector tangente en  $\gamma_s(t)$  determinado por la curva longitudinal  $\gamma_s$  (a su vez, esta variación induce trivialmente una en  $TM \times \mathbf{R}$ ). Se dice que  $\gamma$  es una curva crítica para  $S$  si para toda variación de  $\gamma$  en el conjunto de curvas que se está considerando se tiene

$$\left. \frac{dS(\gamma_s)}{ds} \right|_{s=0} = 0$$

No es difícil demostrar que las curvas críticas para variaciones de extremos fijos coinciden con las que, escritas en cualesquiera coordenadas, satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n) \tag{5.3.4}$$

El siguiente paso en la formulación de una teoría canónica de la gravedad es la construcción de una densidad lagrangiana adecuada. El carácter de densidad se puede obtener considerando el determinante del tensor métrico, es decir,  $\sqrt{g}$ . Por lo tanto, lo que hace falta para completar nuestra construcción es un escalar. Ahora bien, las ecuaciones de Einstein contienen derivadas de segundo orden del tensor métrico y por lo tanto el lagrangiano debe ser una función de primer orden en las derivadas del tensor métrico. Sin embargo, es imposible construir una función escalar con estas características (la única solución es una constante). La solución a esto es usar un lagrangiano que contenga segundas derivadas pero de manera tal que estas aparezcan sólo a través de una divergencia, pues de este modo no contribuirán a las ecuaciones de campo [1]. El único escalar con las propiedades anteriores es el escalar de curvatura  $R(\mathbf{g})$ . Por lo tanto, un lagrangiano adecuado para las ecuaciones de Einstein es el lagrangiano de Einstein-Hilbert que presentamos en el siguiente teorema.

**Teorema 5.3.2** *Sea  $M$  un espacio-tiempo, entonces la descomposición 2 + 1 de la acción de Einstein-Hilbert es*

$$S(q, \dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (5.3.5)$$

El lagrangiano es

$$L(q, \dot{q}) = \int_{\Sigma_t} (\mathcal{L} + T.S.(1)) d^2x \quad (5.3.6)$$

donde la densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = N\sqrt{\gamma}(R + K_{ij}K^{ij} - K^2) \quad (5.3.7)$$

y tenemos un término de superficie que es una divergencia

$$T.S.(1) = -2N\sqrt{\gamma}[\bar{\nabla}_\mu(Nn^\mu) + \bar{\nabla}_\mu(n^\nu\bar{\nabla}_\nu n^\mu)] \quad (5.3.8)$$

las variables  $q$  y  $\dot{q}$  son

$$q = (\gamma_{ij}, N, N^i) \quad \dot{q} = (\dot{\gamma}_{ij}, \dot{N}, \dot{N}^i)$$

**Demostración.** La acción de Einstein-Hilbert [8] es

$$S = \int_{\Gamma} \bar{R}\sqrt{-g} d^3x \quad {}^{12} \quad (5.3.9)$$

<sup>12</sup>En realidad la acción de Einstein-Hilbert en tres dimensiones es:  $S_{E-H} = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) d^3x$ . Nosotros estamos normalizando  $\frac{1}{16\pi G} = 1$  y tomando la constante cosmológica  $\Lambda = 0$

donde  $\Gamma$  es una parte de  $M$  delimitada por las superficies  $\Sigma_{t_1}$  y  $\Sigma_{t_2}$  para  $(t_1 < t_2)$  de la foliación  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbf{R}}$ , esto es

$$\Gamma := \bigcup_{t=t_1}^{t_2} \Sigma_t \quad (5.3.10)$$

De la descomposición 2 + 1 del escalar de Ricci del espacio-tiempo [(4.3.7), pág. 112] y de (5.2.18) que da el elemento de volumen, obtenemos

$$\bar{R}\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}\bar{R} = [N(R + K^2 + K_{ij}K^{ij}) - 2\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K - 2\nabla_i\nabla^i N]\sqrt{\gamma} \dots\dots\dots(1)$$

Como  $K$  es un escalar entonces de [(3.4.15), pág. 86] su derivada de Lie es

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K = m^\mu\bar{\nabla}_\mu K = Nn^\mu\bar{\nabla}_\mu K - N[\bar{\nabla}_\mu(Kn^\mu) - K\bar{\nabla}_\mu n^\mu] = N[\bar{\nabla}_\mu(Kn^\mu) + K^2]$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K = N[\bar{\nabla}_\mu(Kn^\mu) + K^2] \quad (5.3.11)$$

sustituyendo esta ecuación en (1), tenemos

$$\bar{R}\sqrt{-g} = [N(R - K^2 + K_{ij}K^{ij}) - 2N\bar{\nabla}_\mu(Kn^\mu) - 2\nabla_i\nabla^i N]\sqrt{\gamma}$$

como

$$\int_{\Gamma} N\bar{\nabla}_\mu(Kn^\mu)\sqrt{\gamma}d^3x = \int_{\Gamma} \bar{\nabla}_\mu(Kn^\mu)\sqrt{-g}d^3x$$

y además extendiendo a  $M$ , tenemos que

$$\bar{\nabla}_\mu(\bar{\nabla}^\nu N)\sqrt{\gamma} = \bar{\nabla}_\mu(\bar{\nabla}^\nu \ln N) = \bar{\nabla}_\mu \mathbf{a} = \bar{\nabla}_\mu(\bar{\nabla}_{\mathbf{n}} \mathbf{n}) = \bar{\nabla}_\mu(n^\nu\bar{\nabla}_\nu n^\mu)$$

usando la ecuación (5.3.10) para separar la integral tres dimensional en una integral de tiempo y otra integral de espacio, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \bar{R}\sqrt{-g}d^3x = \\ & = \int_{\Gamma} [N(R - K^2 + K_{ij}K^{ij})\sqrt{\gamma}d^3x - 2 \int_{\Gamma} [\bar{\nabla}_\mu(Nn^\mu) + \bar{\nabla}_\mu(n^\nu\bar{\nabla}_\nu n^\mu)]\sqrt{-g}d^3x \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_t} [N(R - K^2 + K_{ij}K^{ij})\sqrt{\gamma}d^2xdt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_t} T.S.(1)N\sqrt{\gamma}d^2xdt \end{aligned}$$

por lo tanto

$$S = S(q, \dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_t} (\mathcal{L} + T.S.(1))d^2xdt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})dt \quad \blacksquare$$



Hay que precisar que esta expresión para la acción de la gravitación está limitando la topología del espacio-tiempo  $M$ , ya que ella será entonces de la forma  $\Sigma \times \mathbf{R}$ , misma que se mantiene durante toda la evolución de las superficies, esto quiere decir que no se permiten cambios en la topología de las superficies. Por ejemplo si estamos utilizando un modelo cosmológico en el cual el Universo es cerrado, entonces siempre deberá mantenerse así.

En la ecuación (5.3.5) lo que se hace es especificar la métrica sobre una superficie inicial  $\Sigma_{t_1}$  y una final  $\Sigma_{t_2}$ , entonces la variación de  $S$  será sobre todas las superficies posibles (sus métricas) que conectan a dichas superficies. Con esto se pueden escribir las ecuaciones de Einstein en el vacío como  $\delta S = 0$ .<sup>13</sup>

**Teorema 5.3.3** *La curvatura extrínseca está dada como función de las variables  $N$ ,  $N^i$ ,  $\dot{\gamma}_{ij}$  y  $\gamma_{ij}$  como*

$$K_{ij}[\gamma_{ij}, \dot{\gamma}_{ij}, N, N^i] = \frac{1}{2N}(\gamma_{ik}\nabla_j N^k + \gamma_{jk}\nabla_i N^k - \dot{\gamma}_{ij}) \quad (5.3.12)$$

**Demostración.** Reescribiendo  $K_{ij}$  en términos de  $\dot{\gamma}_{ij}$  y sustituyendo  $\mathcal{L}_N \gamma_{ij}$  dada por (5.2.29) tenemos

$$\begin{aligned} K_{ij} &= -\frac{1}{2N} \left( \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{ij} - \mathcal{L}_N \gamma_{ij} \right) = \frac{1}{2N} (\nabla_i N_j + \nabla_j N_i - \dot{\gamma}_{ij}) \\ &= \frac{1}{2N} (\gamma_{ij} \nabla_j N^k + \gamma_{jk} \nabla_i N^k - \dot{\gamma}_{ij}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema 5.3.4** *Sea  $\{x_i\}$  un sistema de coordenadas de  $\Sigma_t$ . Las ecuaciones dinámicas de Einstein en su forma 2 + 1 pueden expresarse en términos de las derivadas covariantes  $\nabla_i$  y de las derivadas temporales como*

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_N \right) \gamma_{ij} = -2NK_{ij} \quad (5.3.13)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_N \right) K_{ij} = -\nabla_i \nabla_j N + NR_{ij} + KK_{ij} - 2K_{ik}K_j^k - \frac{1}{2}R\gamma_{ij} \quad (5.3.14)$$

<sup>13</sup>Se debe incluir en el lagrangiano el término  $T.S.(1)$ , de lo contrario no recuperaremos las ecuaciones de Einstein correctas.

**Demostración.** Sea  $\{x_i\}$  un sistema de coordenadas para  $\Sigma_t$ . Para probar el resultado, partimos de que

$$\mathcal{L}_m K_{ij} = (\mathcal{L}_{\partial_t} - \mathcal{L}_N) K_{ij} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_N \right) K_{ij}$$

aplicando esta ecuación a (5.1.3) obtenemos la primera ecuación. Análogamente

$$\mathcal{L}_N \gamma_{ij} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_N \right) \gamma_{ij}$$

sustituyendo en (5.1.3) obtenemos la segunda ecuación ■

## 5.4. Gravitación canónica

Hasta este punto hemos reescrito la acción de manera que podemos encontrar las ecuaciones de Einstein en el vacío, tomando la variación de la acción e igualandola a cero ( $\delta S = 0$ ). La densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  contiene derivadas espaciales de segundo orden de la métrica  $\gamma_{ij}$ , por lo que en principio, las ecuaciones de Euler-Lagrange deberían ser de cuarto orden. Al efectuar la variación, los términos de derivadas mayores se anulan como términos en la frontera, por lo que las ecuaciones resultantes son de segundo orden. Si se quiere reducir el orden de estas ecuaciones con el objeto de tener ecuaciones de primer orden, existen varios caminos posibles. Uno de ellos, que no seguiremos, consiste en tomar la acción de Palatini [8], que consiste en considerar tanto a las 6 componentes de  $g_{\mu\nu}$  como a las componentes de la conexión afín  $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$  como variables independientes y hacer las variaciones respecto de todas ellas. Con este procedimiento se obtienen las mismas ecuaciones de campo así como la relación entre la métrica y las conexiones (procedimiento usado en la formulación de Ashtekar). El segundo es escribir el hamiltoniano mediante una transformación de Legendre.

Podemos preguntarnos ahora si hay alguna relación entre el espacio fase de la formulación hamiltoniana y las variedades métricas que sirven de base a las teorías del espacio-tiempo. En otras palabras, nos planteamos cuál es el vínculo entre el fibrado cotangente del espacio de configuración,  $T^*$ , que tiene una estructura simpléctica natural suministrada por la forma simpléctica canónica, y el fibrado tangente  $T$ , con una estructura métrica natural proporcionada por el elemento de línea de Riemann (la conocida forma cuadrática

diferencial de  $n$  dimensiones).

El espacio de fases hamiltoniano posee estructura simpléctica, lo que permite determinar en él la noción de elemento de volumen, pero carece de una estructura métrica propiamente dicha. En general, la estructura métrica presupone el concepto de volumen, pero no al contrario. Por ello, las ecuaciones de movimiento de Hamilton necesitan una estructura formal -la simpléctica- menos rica que la contenida en las variedades métricas. Además, una variedad simpléctica carece de la noción de curvatura local que permita, por el teorema de Darboux [25], distinguir también localmente entre diversas variedades simplécticas.

De manera estándar, para un sistema con  $n$  grados de libertad el **espacio fase** es una variedad  $M$  de  $2n$  dimensiones. Cada estado del sistema está representado por un punto de  $M$ . El hamiltoniano,  $H$ , es una función definida en  $M$  que dicta la evolución temporal del sistema. El objeto básico para la descripción de un sistema clásico es una variedad diferenciable  $2n$  dimensional  $M$  dotada de una 2-forma  $\omega$  no degenerada y cerrada.<sup>14</sup>

Las consideraciones precedentes adquieren su verdadera trascendencia al afrontar el problema de cuantizar la gravedad mediante un método canónico. Es decir, se trata de reformular la Relatividad General a semejanza de la teoría cuántica hamiltoniana, utilizando variables canónicas conjugadas. A continuación definiremos lo que es una variedad simpléctica para así definir lo que es un hamiltoniano.

**Definición 5.4.1** *Sea  $M$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional, entonces  $M$  se llama **variedad simpléctica** si y sólo si:*

1.  $M$  tiene una 2-forma  $\omega$  **no degenerada**.
2.  $M$  tiene una 2-forma  $\omega$  **cerrada**, es decir,  $d\omega = 0$

---

<sup>14</sup>Para introducir una 2-forma no degenerada y cerrada procedemos como sigue: Dado el hamiltoniano,  $H$ , tenemos definido  $dH$  y mediante  $\omega$  podemos asociar a todo  $dH$  un campo vectorial  $V_H$  tal que

$$\omega(V_H) + dH = 0$$

Por lo tanto el flujo de este campo vectorial nos dice como evoluciona temporalmente el sistema. La 2-forma  $\omega$  proporciona la relación entre el espacio tangente en un punto de  $M$  y el espacio cotangente. De esta forma toda función  $F$  del espacio fase tiene asociada una 1-forma  $dF$  y campo vectorial  $V_F$

**Definición 5.4.2** Sea  $M$  una variedad simpléctica. En Mecánica Hamiltoniana se parte de la variedad de configuración  $TM$ , de su espacio cotangente  $T^*M$  o **espacio fase** y de un hamiltoniano  $H : T^*M \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . A las coordenadas  $p_i$  se les llama momentos generalizados.

Análogamente al caso lagrangiano (Sección 5.3 de este capítulo), en Mecánica Hamiltoniana se pueden calcular curvas críticas del hamiltoniano (u otros funcionales relacionados con él) para diversos tipos de variaciones. Esto es, curvas en  $T^*M$

$$\rho : [t_0, t_1] \rightarrow T^*M, \quad \rho(t) = (q(t), p(t))$$

tales que para cualquier variación

$$[-\epsilon, \epsilon] \times [t_0, t_1] \rightarrow T^*M$$

$$(s, t) \mapsto \rho_s(t)$$

(en la clase de curvas que se considere) se tiene la función

$$S(\rho_s) = \int_{t_1}^{t_2} H(\rho_s(t), t) dt := \int_{t_1}^{t_2} H(q_s(t), p_s(t), t) dt$$

donde  $\frac{dS}{ds} \Big|_{s=0} = 0$ . Pero, a diferencia del caso lagrangiano, tanto la curva  $\rho(t)$  como la variación  $\rho_s(t)$  se toman directamente en  $T^*M$ , esto es, no se construyen a partir de curvas de  $M$  [compárese con (5.3.3), pág. 132]. La consecuencia de esta “mayor libertad” en las variaciones, es que las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{dq^i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t), t); \quad \frac{dp_i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t), p(t), t) \quad (5.4.1)$$

(que caracterizan localmente a curvas extremales apropiadas), son  $2n$  ecuaciones de primer orden en lugar de  $n$  ecuaciones de segundo orden.

El método canónico consiste en definir a los momentos, a partir del lagrangiano como nuevas variables, y tratar de reescribir el lagrangiano en términos de las variables originales y los momentos, tomándolas como variables independientes (el número de variables independientes se duplica), donde en el proceso se tendrá que calcular la función hamiltoniana. Este último paso en general no se puede hacer cuando existen constricciones que ligan a las variables, por lo que hay todo un desarrollo para tratar estos sistemas [2].

Recordemos que una partícula clásica de masa,  $m$ , en el espacio de configuración  $\mathbf{R}^2$ , sigue una trayectoria  $q(t)$  en este espacio. La trayectoria satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.3.4). En general, si tenemos la velocidad  $\dot{q}$  en términos de la posición y el momento, entonces el hamiltoniano está dado por la transformación de Legendre

$$H(p, q) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}) \quad (5.4.2)$$

Para esta partícula en un potencial su hamiltoniano es

$$H = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q)$$

Sin embargo esto no sucede en Relatividad General por que, como hemos visto, esta teoría tiene constricciones. En Relatividad General, la 2-métrica juega el rol de la posición y la derivada temporal de la métrica se puede expresar en términos del momento conjugado junto con la función lapse y el vector shift.

La posición y el momento tomados juntos forman un punto  $(q, p)$  en el espacio fase  $\mathbf{R}^4$ . El espacio de configuración puede ser alguna variedad simpléctica  $M$ , la velocidad es un vector tangente a  $M$ , el momento es un vector cotangente a  $M$  (por ello se escriben sus componentes como  $p_i$ ). El espacio fase es entonces el campo cotangente del espacio de configuración y el estado de un sistema clásico es representado por un punto en el espacio fase. Por lo tanto a partir de este momento entenderemos que el haz cotangente  $T_p\Sigma$  es una variedad simpléctica de 4 dimensiones.

La idea del formalismo hamiltoniano es el converso de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Notemos que las coordenadas del momento  $p_i$ , las de posición  $q^i$  y el hamiltoniano pueden ser pensados como funciones en el espacio fase. En efecto, en Mecánica Clásica un observable puede ser considerado como una función en el espacio fase, de hecho se puede demostrar que en una variedad simpléctica se tiene un mapeo bilineal que toma dos funciones en  $M$  y da otra función en  $M$  llamado el paréntesis de Poisson que forma un álgebra de Lie en la variedad [25]. Nosotros definiremos el paréntesis de Lie como un álgebra de funciones en el espacio fase del espacio-tiempo, llamado paréntesis de Poisson.

**Definición 5.4.3** *Sea  $M$  un espacio-tiempo que se puede foliar por una familia de superficies  $\{\Sigma_t\}$  y sea  $C^\infty(T^*\Sigma, \mathbf{R})$  el espacio de las funciones diferenciables en la variedad  $T^*\Sigma$ . Una **estructura de Poisson** en un espacio-*

tiempo  $M$  es definida por un mapeo bilineal

$$\{ , \} : C^\infty(T^*\Sigma, \mathbf{R}) \times C^\infty(T^*\Sigma, \mathbf{R}) \longrightarrow C^\infty(T^*\Sigma, \mathbf{R})$$

llamado el **paréntesis de Poisson**, denotado por  $(f, g) \mapsto \{f, g\}$ ; tal que

$$\forall f, g \in T^*\Sigma \times T^*\Sigma \quad \{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \quad (5.4.3)$$

que satisface las siguientes propiedades

(i) Es antisimétrico,

$$\{g, f\} = -\{f, g\}$$

(ii) Satisface la identidad de Jacobi,

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

(iii) Cumple la regla de Libnitz,

$$\{f_1 f_2, g\} = \{f_1, g\} f_2 + f_1 \{f_2, g\}$$

$$\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\} g_2 + g_1 \{f, g_2\}$$

Una variedad equipada con tal estructura se llama **variedad de Poisson**

A partir de este momento entenderemos que en nuestro espacio-tiempo el haz cotangente  $T^*\Sigma$  es una variedad de Poisson.

**Teorema 5.4.4** *El paréntesis de Poisson  $\{ , \}$  forma un álgebra de Lie y cumple la regla de Leibnitz*

**Demostración.** Es trivial probar que el paréntesis de Poisson cumple los axiomas de Lie [def. 2.4.5, pág. 34] y la regla de Leibnitz ■

**Teorema 5.4.5** *Sea  $M$  un espacio-tiempo, entonces las ecuaciones de Hamilton escritas con el formalismo de Poisson son*

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{H, q^i\} \quad (5.4.4)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = \{H, p_i\} \quad (5.4.5)$$

**Demostración.** Es trivial de la definición del paréntesis de Poisson ■

Hemos visto que al pasar del formalismo lagrangiano al hamiltoniano, se ha cambiado de un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden a uno de  $2n$  ecuaciones de primer orden. En el siguiente teorema demostramos que la razón de cambio de un observable es determinada por el paréntesis de Poisson con el hamiltoniano.

**Teorema 5.4.6** *Si  $f$  es un observable, entonces la razón de cambio de  $f$  es determinada por su paréntesis de Poisson con el hamiltoniano, es decir*

$$\text{Si } f \text{ es un observable} \implies \dot{f} = \{H, f\} \quad (5.4.6)$$

**Demostración.** Como  $f = f(p, q)$ , entonces se calcula la diferencial de  $f$  obteniendo el resultado ■

Los observables fundamentales son el momento y la posición, cuyos paréntesis de Poisson son

$$\{p_j, q^k\} = \delta_j^k \quad (5.4.7)$$

$$\{p_j, p_k\} = \{q^j, q^k\} = 0 \quad (5.4.8)$$

En resumen, tenemos que las coordenadas del espacio fase serán  $(p, q)$ . La 2-forma  $\omega$  será

$$\omega = dp \wedge dq$$

Entonces para un observable  $F(p, q)$  tenemos

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial p} dp \quad V_F = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}$$

**Observación 5.4.7** *La geometría simpléctica es una herramienta potente para el estudio de la dinámica de sistemas clásicos, así como las simetrías y la cuantización de ellos. Proporciona una descripción covariante del formalismo hamiltoniano, sin embargo, cuando elegimos unas coordenadas  $(p, q)$  en el espacio fase rompemos la covariancia explícita de la teoría, para mantenerla se desarrolla el concepto de **espacio fase covariante**. No entraremos en detalles de tipo técnico sólo diremos que la idea principal de este método consiste en considerar que tenemos una correspondencia unívoca entre las soluciones clásicas de un sistema y los valores de las  $q$ 's y las  $p$ 's para el*

tiempo cero. Esto permite definir covariantemente el espacio fase como el espacio de soluciones de las ecuaciones de movimiento.

Llamemos  $\mathcal{Z}$  a este espacio de soluciones. Para teorías de campos lagrangianas se ha desarrollado el formalismo que permite estudiar la geometría diferencial de  $\mathcal{Z}$  y definir de manera covariante una estructura simpléctica sobre este espacio aplicable a teorías de Yang-Mills y cuerdas.

Cuando tenemos una teoría gauge [8], el espacio fase físicamente relevante será el espacio de las soluciones módulo las transformaciones gauge  $\mathcal{Z}/\mathcal{G}$ . Para que este espacio sea una variedad simpléctica debemos asegurarnos que la forma simpléctica sea no degenerada y que sea invariante frente a transformaciones gauge. Otro punto delicado es asegurar que  $\mathcal{Z}/\mathcal{G}$  sea una variedad diferenciable. Para la RG pueden aparecer problemas, pero, en el caso de espacios-tiempos asintóticamente planos no hay problemas (justamente en esta clase de espacios-tiempos podemos definir la energía y el momento totales). Se puede demostrar que una expresión para la forma simpléctica para la RG es la siguiente:

$$\omega = \int_{\Sigma} d\Sigma_{\alpha} \sqrt{g} [\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} (\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta \ln g) - \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} (\delta g^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \delta \ln g)]$$

siendo

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_{\mu} \delta g_{\nu\beta} + \nabla_{\nu} \delta g_{\mu\beta} - \nabla_{\beta} \delta g_{\mu\nu})$$

además  $\delta$  es la derivada exterior en  $\mathcal{Z}$ ,  $\nabla$  es la derivada covariante y  $\Sigma$  es una superficie de Cauchy arbitraria.

Hasta ahora hemos considerado las ecuaciones de Einstein en el vacío y asumimos que el espacio-tiempo  $M$  es difeomorfo a  $\Sigma_t \times \mathbf{R}$ , donde  $\Sigma_t$  es una superficie riemanniana. En este caso la posición  $q$  es la 2-métrica  $\gamma$ , y el espacio de configuración es  $\mathfrak{Riem}(\Sigma)$ , el cual definimos a continuación.

**Definición 5.4.8** Sea  $M$  una variedad espacio-tiempo con  $\Sigma$  una superficie riemanniana, entonces el **espacio de configuración** o **Superespacio** [5] para la Relatividad General es

$$\mathfrak{Riem}(\Sigma) := \{\gamma \in \tau^{(0,2)} \mid \gamma \text{ es una métrica riemanniana de } \Sigma_t \quad \forall t \in \mathbf{R}\} \quad (5.4.9)$$

donde la **Supermétrica** o **métrica de De Witt** es

$$G^{ijkl} := \sqrt{\gamma} \left[ \frac{1}{2} (\gamma^{ik} \gamma^{jl} + \gamma^{il} \gamma^{jk}) - \gamma^{ij} \gamma^{kl} \right] \quad (5.4.10)$$



**Definición 5.4.9** Sea  $\mathfrak{Riem}(\Sigma)$  el espacio de configuración del espacio-tiempo  $M$ , entonces llamamos **espacio fase** al conjunto de puntos  $(\gamma_{ij}, \pi^{ij})$  que pertenecen a  $T^*\mathfrak{Riem}(\Sigma)$

Ahora escribiremos la densidad lagrangiana en términos de la supermétrica y de la curvatura extrínseca.

**Teorema 5.4.10** La **densidad lagrangiana** del campo gravitacional en términos de la supermétrica esta dada por

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = N(G^{ijkl}K_{ij}K_{kl} + \sqrt{\gamma}R) \quad (5.4.11)$$

donde  $G^{ijkl}$  es la métrica del espacio de configuración.

**Demostración.** Calculemos el término

$$\begin{aligned} G^{ijkl}K_{ij}K_{kl} &= \sqrt{\gamma} \left[ \frac{1}{2}(\gamma^{ik}\gamma^{jl} + \gamma^{il}\gamma^{jk}) - \gamma^{ij}\gamma^{kl} \right] K_{ij}K_{kl} \\ &= \sqrt{\gamma} \left[ \frac{1}{2}K_{ij}(\gamma^{jl}\gamma^{ik}K_{kl}) + \frac{1}{2}K_{ij}(\gamma^{il}\gamma^{jk}K_{kl} - \gamma^{ij}K_{ij}\gamma^{kl}K_{kl}) \right] \\ &= \sqrt{\gamma}[K_{ij}K^{ij} - K^2] \end{aligned}$$

por lo tanto

$$G^{ijkl}K_{ij}K_{kl} = \sqrt{\gamma}[K_{ij}K^{ij} - K^2] \quad (5.4.12)$$

sustituyendo esta ecuación en (5.3.6) se obtiene el resultado deseado ■

Ahora definiremos el momento conjugado a la 2-métrica, ya en la sección anterior hemos calculado el lagrangiano de Einstein-Hilbert en términos de  $\gamma_{ij}$  y  $\dot{\gamma}^{ij}$ . Para definir las derivadas temporales es necesario proceder como en Mecánica Clásica, esto es, fijando un difeomorfismo entre  $M$  y  $\Sigma \times \mathbf{R}$ , obteniendo una coordenada temporal  $t$  y el campo vectorial  $\partial_t$ , esto ya lo hemos hecho, para ello tomamos  $\Sigma_t = \Sigma_o := \Sigma$  (i.e.  $t = 0$ ) y trabajamos en las coordenadas adaptadas definidas en la Sección 2 de este capítulo, de forma que  $\partial_0 = \partial_t$  y tal que las derivadas  $\partial_x$  y  $\partial_y$  son tangentes a  $\Sigma_t$ .

**Definición 5.4.11** Los **momentos canónicamente conjugados** a las variables dinámicas son

$$\pi^{ij} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \quad (5.4.13)$$

Notar que la densidad lagrangiana es independiente de las derivadas explícitas del tiempo de  $N$  y de  $N^i$  (pues  $R$ ,  $K_{ij}$  y  $K$  son independientes de  $N$  y de  $N^i$ ), esto muestra que la función lapse y el campo vectorial shift no son variables dinámicas.

**Teorema 5.4.12** *Los momentos asociados a las variables  $N^\mu$  son cero.*<sup>15</sup>

$$P^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}^\mu} = 0 \quad (5.4.14)$$

*Estos son los vínculos primarios.*

**Demostración.** Trivial pues  $\mathcal{L}$  es independiente de  $\dot{N}^\mu$  ■.

**Teorema 5.4.13** *El momento canónicamente conjugado  $\pi^{ij}$  se puede escribir en términos de la supermétrica como:*

$$\pi^{ij} = -G^{ijkl} K_{kl} \quad (5.4.15)$$

**Demostración.** Por definición

$$\begin{aligned} \pi^{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \left( NG^{mnkl} K_{mn} K_{kl} + N\sqrt{\gamma}R \right) = NG^{mnkl} \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} (K_{mn} K_{kl}) \\ &= NG^{mnkl} \left( K_{mn} \frac{\partial K_{kl}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} + K_{kl} \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right) = 2NG^{mnkl} K_{kl} \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

pero

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial \dot{\gamma}_{mn}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\gamma}_{ij}}{\partial \dot{\gamma}_{mn}} = -\frac{1}{2N} \delta_{ij}^{mn}$$

sustituyendo esta última igualdad en la ecuación (1), obtenemos

$$\pi^{ij} = -G^{mnkl} K_{kl} \delta_{ij}^{mn} = -G^{ijkl} K_{kl} \quad \blacksquare$$

Notemos que de este último teorema y de la definición de  $\mathbf{G}$ ,<sup>16</sup> los momentos  $\pi^{ij}$  son densidades tensoriales de peso uno sobre la superficie. Para hacer la transformada de Legendre del lagrangiano y definir el hamiltoniano, es necesario despejar las velocidades como funciones de los momentos. Como las velocidades  $\dot{N}^\mu$  son funciones arbitrarias entonces no es posible expresarlas en términos de las coordenadas y de los momentos. Las velocidades de la métrica se pueden expresar de esta forma sólo si es posible invertir (5.4.15), esto es, expresar  $K_{ij}$  en términos de los momentos. Por ello es necesario encontrar la inversa de la supermétrica, esto es, un tensor cuyas componentes sean tales que se cumple la siguiente relación

$$G_{ijkl} G^{klmn} = \delta_{ij}^{mn} \quad (5.4.16)$$

<sup>15</sup>Aquí  $\mu = 0, 1, 2$  y  $N^0 := N$

<sup>16</sup>Es el tensor de componentes  $G^{ijkl}$

La forma más general para la inversa es [5]

$$G_{ijkl} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[ \frac{A}{2} (\gamma_{ik}\gamma_{jl} + \gamma_{il}\gamma_{jk}) + B\gamma_{ij}\gamma_{kl} \right] \quad (5.4.17)$$

sustituyendo (5.4.17) en (5.4.16) obtenemos que  $A = 1$  y  $B = -\frac{1}{2}$ , entonces la curvatura extrínseca puede ser expresada como:

$$K_{ij} = -G_{ijkl}\pi^{kl} \quad (5.4.18)$$

**Corolario 5.4.14** *El momento canónicamente conjugado y la curvatura extrínseca pueden expresarse como*<sup>17</sup>

$$\pi^{ij} = \sqrt{\gamma}(K\gamma^{ij} - K^{ij}) \quad (5.4.19)$$

$$\pi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( \frac{1}{2} K\gamma_{ij} - K_{ij} \right) \quad (5.4.20)$$

$$K^{ij} = \sqrt{\gamma}(\pi\gamma^{ij} - \pi^{ij}) \quad (5.4.21)$$

$$K_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( \frac{1}{2} \pi\gamma_{ij} - \pi_{ij} \right) \quad (5.4.22)$$

**Demostración.** Tomamos como base la ecuación (5.4.15), entonces

$$\begin{aligned} \pi^{ij} &= -G^{ijkl}K_{kl} = -\sqrt{\gamma} \left[ \frac{1}{2}\gamma^{ik}\gamma^{jl}K_{kl} + \frac{1}{2}\gamma^{il}\gamma^{jk}K_{kl} - \gamma^{ij}\gamma^{kl}K_{kl} \right] \\ &= -\sqrt{\gamma}[K^{ij} - K\gamma^{ij}] \end{aligned}$$

de manera análoga se demuestran las relaciones restantes ■

El siguiente teorema nos dice como escribir el hamiltoniano de la Relatividad General en términos de la curvatura extrínseca.

**Teorema 5.4.15** *Sea  $M$  una variedad espacio-tiempo, entonces el **hamiltoniano gravitacional** está dado por:*

$$H = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} = \int_{\Sigma_t} (N\mathcal{H}_0 + N^i\mathcal{H}_i) d^2x + T.S.(2) \quad (5.4.23)$$

donde

$$\mathcal{H}_0 = \sqrt{\gamma}(K_{ij}K^{ij} - K^2 - R) \quad (5.4.24)$$

<sup>17</sup>Aquí,  $\text{tra}(K) := \gamma^{ij}K_{ij} := K$  y  $\text{tra}(\pi) := \gamma^{ij}\pi_{ij} := \pi$

$$\mathcal{H}_i = 2\sqrt{\gamma}(\nabla_j K_i^j - \nabla_i K) \quad (5.4.25)$$

$$T.S.(2) = 2 \int_{\Sigma_t} \nabla_j (KN^j - K_i^j N^i) d^2x \quad (5.4.26)$$

**Demostración.** La densidad hamiltoniana está dada por la transformada de Legendre:

$$\mathcal{H} = \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L} \quad (5.4.27)$$

usando las ecuaciones (5.3.12), (5.4.19) y (5.4.11), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sqrt{\gamma}(K\gamma^{ij} - K^{ij})(\gamma_{ik}\nabla_j N^k + \gamma_{jk}\nabla_i N^k - 2NK_{ij}) - N\sqrt{\gamma}(R + K_{ij}K^{ij} - K^2) \\ &= \sqrt{\gamma}(K\gamma^{ij} - K^{ij})(\nabla_j N_i + \nabla_i N_j - 2NK_{ij}) - N\sqrt{\gamma}(R + K_{ij}K^{ij} - K^2) \\ &= -N\sqrt{\gamma}(R + K^2 - K_{ij}K^{ij}) - 2\sqrt{\gamma}K^{ij}\nabla_j N_i + 2\sqrt{\gamma}K\gamma^{ij}\nabla_j N_i \end{aligned}$$

por tanto

$$\mathcal{H} = -N\sqrt{\gamma}(R + K^2 - K_{ij}K^{ij}) + 2\sqrt{\gamma}(K\gamma^{ij}\nabla_j N_i - K^{ij}\nabla_j N_i) \dots\dots\dots(1)$$

donde usamos que  $\nabla_j(\gamma_{ik}N^k) = \gamma_{ik}\nabla_j N^k + N^k\nabla_j\gamma_{ik} = \gamma_{ik}\nabla_j N^k$  y se intercambiaron los índices usando la simetría de  $\mathbf{K}$ .

Por otro lado, usando que  $N_i = \gamma_{il}N^l$  y  $\nabla_j(N^i\gamma_i^j) = \gamma_i^j\nabla_j N^i$ , obtenemos

$$\begin{aligned} K\gamma^{ij}\nabla_j N_i - K^{ij}\nabla_j N_i &= K\gamma^{ij}\gamma_{il}\nabla_j N^l - K^{ij}\gamma_{il}\nabla_j N^l \\ &= K\gamma_i^j\nabla_j N^i - K_i^j\nabla_j N^i = K\nabla_j N^j - K_i^j\nabla_j N^i \\ &= K\nabla_j N^j - K_i^j\nabla_j N^i + N^j\nabla_j K - N^i\nabla_i K + N^i\nabla_j K_i^j - N^i\nabla_j K_i^j \\ &= N^i\nabla_j K_i^j - N^i\nabla_i K + \nabla_j(KN^j) - \nabla_j(K_i^j N^i) \end{aligned}$$

entonces, sustituyendo esta última ecuación en (1) tenemos

$$\mathcal{H} = \sqrt{\gamma}[N(K_{ij}K^{ij} - K^2 - R) - 2N^i(\nabla_i K - \nabla_j K_i^j) + 2\nabla_j(KN^j - K_i^j N^i)] \quad (5.4.28)$$

Por lo tanto el hamiltoniano es

$$H = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} d^2x + T.S.(2) \quad (5.4.29)$$

■

En el proceso que hemos seguido para obtener el lagrangiano y el hamiltoniano han aparecido varios términos de superficie, ecuaciones (5.3.8) y (5.4.26),

que hemos dejado de lado. Según las condiciones de frontera del sistema que estemos estudiando, estos términos pueden anularse o no. En el caso de que no sean nulos es muy importante añadir al lagrangiano y al hamiltoniano las contribuciones de estos términos, por que en caso contrario no recuperaremos las ecuaciones correctas de Einstein. El teorema siguiente nos hace ver que el hamiltoniano gravitacional se anula.

**Teorema 5.4.16** *El hamiltoniano de la Relatividad General se anula*

$$H = 0$$

**Demostración.** Es equivalente demostrar que las constricciones se anulan, es decir, para  $\mu = 0$  tenemos que  $\mathcal{H}_0$  es la ecuación de restricción [(5.1.4), pág. 117] y es cero. Por otro lado para  $\mu = i = 1, 2$  se tiene que  $\mathcal{H}_i$  es la ecuación de restricción [(5.1.5), pág. 118] que también es cero ■

Notemos que podemos escribir la densidad lagrangiana a primer orden a partir de las ecuaciones (5.4.23) y (5.4.27). Como  $\mathcal{H} = \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}$ , entonces

$$\mathcal{L}[\gamma_{ij}, \dot{\gamma}_{ij}, \pi^{ij}, N, N^i] = \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{H}_0 N - N^i \mathcal{H}_i \quad (5.4.30)$$

Así la acción gravitacional será una funcional de la métrica  $\gamma_{ij}$  así como de los momentos  $\pi$  y los  $N^\mu$ . También el hamiltoniano es funcional de las variables de configuración  $(\gamma_{ij}, N, N^i)$  y de los momentos conjugados  $(\pi^{ij}, P^N, P^N)$ , (aunque la dependencia con respecto al momento no está en forma explícita) donde los dos últimos son idénticamente cero. El escalar de curvatura que aparece en  $H$  vía  $\mathcal{H}_0$  es función de  $\gamma_{ij}$  y de las derivadas espaciales.

Hay que hacer una observación de la forma de la ecuación del lagrangiano (5.4.30). Las funciones  $N^\mu$  juegan el papel de multiplicadores de Lagrange y la acción está en forma parametrizada. Si se varía  $\mathcal{L}$  respecto a las funciones  $N^\mu$  se encuentra que  $\mathcal{H}_0$  y  $\mathcal{H}_i$  son cero, por lo que las  $N^\mu$  al multiplicar a funciones que se anulan tienen la función de los multiplicadores de Lagrange y son, en principio, funciones arbitrarias. Además las funciones lapse y shift pueden ser eliminadas por una transformación de gauge, por lo que no representan grados físicos de libertad. Esto se indica moviéndonos al formalismo hamiltoniano por el hecho de que sus momentos conjugados se anulan. Esto es lo que Dirac llama constricciones primarias. Una elección popular de gauge llamada gauge síncrono, es

$$N = 1 \quad N^i = 0$$

Las ecuaciones dinámicas restantes (para las variables  $\gamma_{ij}$ ) están dadas por las variaciones de la acción  $S(q, \dot{q}, t)$  respecto de ellas. Además  $\gamma_{ij}$  y  $\pi^{ij}$  no son

independientes entre ellas pues están ligadas por las tres relaciones  $\mathcal{H}_\mu = 0$ , las cuales son las constricciones hamiltoniana y de momento.

Como el lagrangiano a primer orden no está en forma canónica, entonces la teoría está en forma parametrizada.<sup>18</sup> Si estuviera en forma canónica, entonces los términos del hamiltoniano sólo tendrían variables contenidas en los términos  $(\pi^{ij}, \dot{\gamma}_{ij})$ , pero como en este caso los términos del hamiltoniano contienen a las  $N^\mu$  se dice entonces que la acción no está en forma canónica, lo cual sucede cuando la teoría está parametrizada como es el caso. En [23] se hace un cambio de variables para tener el lagrangiano en forma parametrizada.

En resumen, tenemos que en la formulación Hamiltoniana de la Relatividad General, las variables correspondientes en el espacio fase son:

$$(\gamma_{ij}, K_{ij}) \longmapsto (\gamma_{ij}, \pi_{ij})$$

Ahora escribiremos el hamiltoniano explícitamente en función de los momentos  $\pi_{ij}$ .

**Teorema 5.4.17** *Sea  $M$  una variedad espacio-tiempo, entonces*

$$N^i \mathcal{H}_i = -2N_k \nabla_j \pi^{jk} \quad (5.4.31)$$

$$N \mathcal{H}_0 = G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \sqrt{\gamma} R = \sqrt{\gamma} \left( \gamma^{-1} \pi_{ij} \pi^{ij} - \frac{\gamma^{-1}}{2} \pi^2 \right) - \sqrt{\gamma} R \quad (5.4.32)$$

**Demostración.**

$$(1) N^i \mathcal{H}_i = 2\sqrt{\gamma} N^i \nabla_j K_i^k - 2N^i \sqrt{\gamma} \nabla_i K$$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{\gamma} N^i \nabla_j (\gamma_{ik} K^{jk}) - 2\sqrt{\gamma} N_k \gamma^{ik} \nabla_i K = 2\sqrt{\gamma} N_k \nabla_j K^{jk} - 2\sqrt{\gamma} N_k \nabla_i (\gamma^{ik} K) \\ &= 2N_k \nabla_j \sqrt{\gamma} (K^{kj} - \gamma^{jk} K) = -2N_k \nabla_j \pi^{jk} \end{aligned}$$

(2) Sabemos de (5.4.22) que  $G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} = \sqrt{\gamma} (K^{ij} K_{ij} - K^2)$ . Por otro lado usando (5.4.15) tenemos

$$\begin{aligned} G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} &= G^{ijkl} (-G_{ijmn} \pi^{mn}) (-G_{klpq} \pi^{pq}) = \delta_{mn}^{kl} G_{klpq} \pi^{mn} \pi^{pq} \\ &= G_{mnpq} \pi^{mn} \pi^{pq} = G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} (\gamma_{ik} \gamma_{jl} + \gamma_{il} \gamma_{jk} - \gamma_{ij} \gamma_{kl}) \pi^{ij} \pi^{kl} \end{aligned}$$

<sup>18</sup>Para ilustrar esta distinción entre forma canónica y parametrizada véase A.1.

$$= \sqrt{\gamma}(\gamma^{-1}\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\gamma^{-1}}{2}\pi^2) \quad \blacksquare$$

Mediante este teorema podemos escribir la densidad hamiltoniana como:

$$\mathcal{H}[\gamma, \pi, N, N^i] = N\mathcal{H}_0[\gamma, \pi, N] + N^i\mathcal{H}_i[\gamma, \pi, N^i]^{19} \quad (5.4.33)$$

donde:

$$\mathcal{H}_0[\gamma, \pi, N^i] = G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} - \sqrt{\gamma}R \quad (5.4.34)$$

$$\mathcal{H}_i[\gamma, \pi, N^i] = -2\nabla_j\pi^{ji} \quad (5.4.35)$$

Para estudiar el significado de las constricciones y para simplificar los cálculos es conveniente suavizar las constricciones con unas funciones arbitrarias, como lo definimos a continuación.

**Definición 5.4.18** Sea  $M$  una variedad espacio-tiempo, definimos la “**constricción hamiltoniana**” y la “**constricción difeomórfica**”, como

$$H_0 := H(N) := H[\gamma, \pi, N] = \int N\mathcal{H}_0 d^2x \quad (5.4.36)$$

$$H_i := H(N^i) := H[\gamma, \pi, N^i] = \int N^i\mathcal{H}_i d^2x \quad (5.4.37)$$

donde  $\mathcal{H}_0$  y  $\mathcal{H}_i$  estan dados por las ecuaciones (5.4.36) y (5.4.37), podemos escribir el hamiltoniano gravitacional total como

$$H_T[\gamma, \pi, N, N^i] = H_0[\gamma, \pi, N, N^i] + H_i[\gamma, \pi, N, N^i] + \text{términos de superficie}$$

Notemos que si integramos por partes (5.4.37) obtendremos una integral sobre la frontera de  $\Sigma$ , este término conduce a las definiciones de momento, momento angular y energía ADM [13]. Notemos también que estas constricciones están relacionadas con las dos direcciones de evolución temporal de  $\Sigma_t$  correspondientes a la dirección normal (el lapso  $N$ ) y a la dirección tangente (el corrimiento  $N^i$ ) respectivamente, esto es,  $H(N)$  genera una evolución temporal de una forma que corresponde a un “empujon” de  $\Sigma$  hacia adelante en la dirección normal, mientras que  $H[N^i]$  genera una evolución temporal externa que “empuja” a  $\Sigma$  en la dirección tangente a ella, más precisamente, esta cantidad genera transformaciones de  $X$  correspondientes al flujo en  $\Sigma$  generado por  $N^i$ . Este flujo es una familia uniparamétrica de difeomorfismos en  $\Sigma$ .

<sup>19</sup>Más divergencias (que son los términos de superficie). Aquí el término de superficie T.S.(2) toma la forma

$$2 \int_{\Sigma_t} \nabla_j (N_k \pi^{jk}) d^2x$$

**Definición 5.4.19** Sean  $f, g \in T^*\mathfrak{Met}(\Sigma)$ , definimos el **paréntesis de Poisson** de estas dos funciones como

$$\{f, g\} = \int_{\Sigma} \left[ \frac{\partial f}{\partial \pi^{ij}(\mathbf{x})} \frac{\partial g}{\partial \gamma_{ij}(\mathbf{x})} - \frac{\partial f}{\partial \gamma_{ij}(\mathbf{x})} \frac{\partial g}{\partial \pi^{ij}(\mathbf{x})} \right] \sqrt{\gamma} d^2x \quad (5.4.38)$$

donde las derivadas que aparecen a la derecha se llaman **derivadas funcionales**.

Es trivial calcular los paréntesis de Poisson de  $\gamma^{ij}$  y  $\pi_{ij}$ , obteniendo ecuaciones análogas a las encontradas para partículas en  $\mathbf{R}^n$ .

$$\begin{aligned} \{\pi^{ij}(\mathbf{x}), \gamma_{kl}(\mathbf{y})\} &= (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_l^i \delta_k^j) \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \{\pi^{ij}(\mathbf{x}), \pi^{kl}(\mathbf{y})\} &= \{\gamma_{ij}(\mathbf{x}), \gamma_{kl}(\mathbf{y})\} = 0 \end{aligned}$$

Observemos que las ecuaciones de constricción  $\mathcal{H}_\mu = 0$ , son las tres ecuaciones de Einstein que son restricciones del problema inicial, las restantes tres ecuaciones, que son las que dan la evolución, se encuentran de las ecuaciones de Hamilton (5.4.1) como sigue.

**Teorema 5.4.20** Sea  $M$  una variedad espacio-tiempo y  $H$  su hamiltoniano escrito en su forma (2+1), entonces las tres ecuaciones de Einstein que dan la evolución temporal están dadas por las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{\gamma}^{ij} = \{H, \gamma^{ij}\} = 2\gamma^{-\frac{1}{2}}N \left( \pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi\gamma_{ij} \right) + 2\nabla_{[i}N_{j]} \quad (5.4.39)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ij} = \{H, \pi_{ij}\} &= -N\gamma^{\frac{1}{2}} \left( R^{ij} - \frac{1}{2}R\gamma^{ij} \right) + \frac{1}{2}N\gamma^{-\frac{1}{2}}\gamma^{ij} \left( \pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi^2 \right) + \\ &- 2N\gamma^{-\frac{1}{2}} \left( \pi^{ik}\pi_k^j - \frac{1}{2}\pi\pi^{ij} \right) + \gamma^{\frac{1}{2}}(\bar{\nabla}^i\bar{\nabla}^j N - \gamma^{ij}\nabla^a\nabla_a N) + \\ &+ \gamma^{\frac{1}{2}}\bar{\nabla}_a(\gamma^{-\frac{1}{2}}N^a\pi^{ij}) - 2\pi^{a[i}\nabla_a N^{j]} \end{aligned} \quad (5.4.40)$$

**Demostración.**

1. De la ecuación [(5.2.29), pág. 129]  $\mathcal{L}_N\gamma_{ij} = \nabla_i N_j + \nabla_j N_i$ , sustituyendo en [(5.3.13), pág. 135] obtenemos

$$\dot{\gamma}_{ij} = -2NK_{ij} + \nabla_i N_j + \nabla_j N_i.$$

sustituyendo en esta ecuación la [(5.4.22), pág. 145] y antisimetrizando obtenemos el resultado deseado.

2. El cálculo aunque sencillo es engorroso, simplemente hay que escribir la ecuación [(5.3.14), pág. 135] en términos de los momentos generalizados ■



**Teorema 5.4.21** *Sea  $M$  una variedad espacio-tiempo, entonces los paréntesis de Poisson de  $H_i[\gamma, \pi, N^i]$  con la métrica y los momentos son*

$$\{\gamma_{ij}, H_i[\gamma, \pi, N^i]\} = \mathcal{L}_N \gamma_{ij} \quad (5.4.41)$$

$$\{\pi^{ij}, H_i[\gamma, \pi, N^i]\} = \mathcal{L}_N \pi^{ij} \quad (5.4.42)$$

**Demostración.**

1. Reescribimos  $H_i[\gamma, \pi, N^i]$  en términos del momento  $\pi^{ij}$ . Como

$$\nabla_j(N^i \pi^{ji}) = N^i \nabla_j \pi^{ji} + \pi^{ji} \nabla_j N^i$$

entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i &= -2 \int_{\Sigma} N^i \nabla_j \pi^{ji} d^2x = -2 \int_{\Sigma} \nabla_j(N^i \pi^{ji}) d^2x + 2 \int_{\Sigma} \pi^{ji} \nabla_j N^i d^2x \\ &= 2 \int_{\Sigma} \pi^{ji} \nabla_j N^i d^2x = \int_{\Sigma} \pi^{ji} \mathcal{L}_N \gamma_{ij} d^2x \end{aligned}$$

donde usamos (5.2.29), haciendo el paréntesis de Poisson obtenemos que

$$\{\gamma_{ij}, \mathcal{H}_i\} = \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial \pi^{ij}} = \mathcal{L}_N \gamma_{ij}$$

2) Como  $\mathcal{L}_N(\pi^{ji} \gamma_{ij}) = \pi^{ji} \mathcal{L}_N \gamma_{ij} + \gamma_{ij} \mathcal{L}_N \pi^{ji}$ , entonces podemos escribir

$$\int_{\Sigma} \pi^{ji} \mathcal{L}_N \gamma_{ij} d^2x = \int_{\Sigma} \mathcal{L}_N(\pi^{ji} \gamma_{ij}) d^2x - \int_{\Sigma} \gamma_{ij} \mathcal{L}_N \pi^{ji} d^2x = - \int_{\Sigma} \gamma_{ij} \mathcal{L}_N \pi^{ji} d^2x$$

por lo tanto

$$\{\pi^{ij}, \mathcal{H}_i\} = - \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial \gamma_{ij}} = \mathcal{L}_N \pi^{ji} \quad \blacksquare$$

Este último teorema demuestra que la constricción de momento es el generador de los difeomorfismos espaciales, esta es la razón por la cual a la constricción de momento se le nombra constricción difeomórfica.

En resumen, tenemos que la variable canónica esencial es la métrica de una superficie espacial  $\gamma_{ij}$ , y su momento conjugado se denota  $\pi_{ij}$ . Este momento conjugado se vincula estrechamente con la curvatura estrínseca, la cual a su vez depende de la derivada temporal de la métrica espacial. La teoría

contiene tres constricciones -es decir, relaciones entre las variables en un cierto instante- a causa de las simetrías presentes. Dos de ellas manifiestan la covariancia de la Relatividad General frente a difeomorfismos espaciales. La tercera restricción se asocia con difeomorfismos fuera de las superficies espaciales, y se conoce como la restricción hamiltoniana. Exponiéndolo con algo más de detalle, existen dos tipos de constricciones en el formalismo hamiltoniano de la RG: las constricciones difeomórficas (o del movimiento canónico) y las constricciones hamiltonianas. Las primeras -como su nombre lo indican- generan los difeomorfismos de la superficie de datos iniciales, mientras que las segundas gobiernan la transición desde cada una de estas superficies a la siguiente. O en otras palabras, las constricciones hamiltonianas generan el movimiento, y las difeomórficas relacionan las descripciones equivalentes de la misma situación física.

Por desgracia, este formalismo canónico rompe la simetría relativista entre el espacio y el tiempo, separando de manera peculiar el comportamiento de la restricción hamiltoniana con respecto a las demás. Ya que ahora el movimiento viene dado por la restricción hamiltoniana y -según Dirac- las constricciones se identifican con transformaciones gauge, el movimiento mismo es meramente una pura transformación gauge. En consecuencia, todas las magnitudes invariantes gauge de la teoría -las únicas a las que suele atribuirse auténtico significado físico- son constantes del movimiento: ninguna propiedad física relevante debería cambiar con el tiempo en absoluto. Tras una serie de manipulaciones matemáticas llegamos a un hamiltoniano de la RG formado únicamente por las constricciones mencionadas, el cual se anula sin remedio. La causa de esta anulación estriba en que la noción de tiempo introducida en el formalismo canónico, es puramente artificial y arbitraria.

Y como la Relatividad General se ocupa de la única fuerza completamente universal, la gravedad, sus conclusiones deberían aplicarse al Universo entero. Así pues, nada habría de experimentar jamás cambio alguno en todo el cosmos. Este es el problema del tiempo, o “del formalismo congelado”, típico de la Relatividad General gauge. Por decirlo de alguna manera, el método canónico “detecta” que la Relatividad General no privilegia variable temporal alguna, y reacciona anulando los hamiltonianos construidos mediante tales variables. Obviamente, los intentos de cuantizar la teoría de la gravedad de Einstein no sólo no han solucionado esta paradoja, sino que se han visto irremediablemente obstaculizados por ella.

Se puede demostrar que los paréntesis de Poisson de las constricciones cumplen

lo que se conoce como álgebra de Dirac, las expresiones explícitas son

$$\begin{aligned} \{H(N^i), H(N^{i'})\} &= H([N^i, N^{i'}]) = H(N^i \bar{\nabla}^i N'_i - N^{i'} \bar{\nabla}^i N_i) \\ \{H(N^i), H(N)\} &= H(N^i \bar{\nabla}_i N) \\ \{H(N), H(N')\} &= H([N, N']) \end{aligned} \quad (5.4.43)$$

Observemos que los paréntesis de Poisson de dos constricciones es también una restricción, por lo que se tiene que esta operación es cerrada, aunque no es un álgebra de Lie.

Hay una forma distinta de escribir las constricciones de forma que aparecen en función explícita del tensor de Einstein.

**Teorema 5.4.22** *Sea  $M$  una variedad espacio-tiempo,  $N$  la función lapse y  $N^i$  el vector shift, entonces las ecuaciones de restricción se escriben en términos del tensor de Einstein como sigue*

$$\mathcal{H}_0 = -2G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 0 \quad (5.4.44)$$

$$\mathcal{H}_i = -2G_{\mu i} n^\mu = 0 \quad (5.4.45)$$

**Demostración.**

1. De la ecuación [(2.7.11), pág. 53] tenemos que  $G_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\bar{R}$ , evaluando esta expresión en el vector  $\mathbf{n}$  tenemos

$$G(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \bar{R}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) - \frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \bar{R}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) + \frac{1}{2}\bar{R} \quad \implies$$

$$2G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = \bar{R} + 2\bar{R}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$$

de [(3.6.8), pág. 96]

$$\bar{R} + 2\bar{R}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = R + K^2 - K_{ij}K^{ij}$$

pero

$$\mathcal{H}_0 = K_{ij}K^{ij} - R - K^2 = -2G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 0.$$

2. Usando el operador de proyección y [(3.6.11), pág. 97] tenemos

$$G_{0i} = \bar{R}_{0i} = \bar{\gamma}^*(\bar{R}(\mathbf{n}, \mathbf{x})) = \bar{\gamma}^*(\bar{R}_{\mu\nu} n^\nu) = \gamma_\alpha^\mu \bar{R}_{\mu\nu} n^\nu$$

$$= \gamma_j^i \bar{R}_{\mu i} n^\mu = \nabla_j K_i^j - \bar{\nabla}_i K_j^j = H_i. \quad \blacksquare$$

La constricción  $\mathcal{H}_0 = 0$  aparece como consecuencia de la invariancia ante reparametrizaciones temporales, y la constricción  $\mathcal{H}_i = 0$  es debida a la invariancia ante reparametrizaciones de las coordenadas espaciales en las superficies. De este modo vemos que el rol de las constricciones es reintroducir en la teoría el principio de covariancia, que había sido violado al haber elegido la forma particular [(5.2.18), pág. 124] de la métrica.

Debemos señalar un punto importante: en las constricciones antes mencionadas no existe referencia alguna a la superficie  $\Sigma$  que posee las cantidades geométricas  $\gamma_{ij}$  y  $\pi^{ij}$ . Esta superficie representa un instante de tiempo, por lo tanto el tiempo ha “desaparecido” (al menos explícitamente) del formalismo. La “desaparición” del tiempo en este nivel clásico, será la causante del problema del tiempo en Gravedad Cuántica y de sus problemas de interpretación.

**Observación 5.4.23** *Hasta ahora tenemos que la densidad hamiltoniana para la Relatividad General debe anularse para las ecuaciones de Einstein en el vacío, es decir,  $H = 0$ . Una teoría con hamiltoniano nulo puede parecer trivial a primera vista, pero su dinámica es interesante. Las ecuaciones  $\mathcal{H}_\mu = 0$  son las tres ecuaciones de Einstein que son constricciones en el problema inicial. El espacio de configuración de la Relatividad es  $\mathfrak{Riem}(\Sigma)$  lo cual es natural pues uno espera que el espacio fase sea el espacio de todos los pares  $(\gamma_{ij}, \pi^{ij})$ . Sin embargo no todos los puntos del espacio fase representan estados permitidos, pues se deben satisfacer las constricciones, lo cual restringe el espacio de fase generando, a esto se le conoce como **el espacio fase físico**:*

$$H_{fis} = \{\mathcal{H}_\mu = 0\} \subset T^*\mathfrak{Riem}(\Sigma)$$

*El hamiltoniano se anula en este subespacio, sin embargo las ecuaciones de Hamilton generan una dinámica no trivial [8].*

## 5.5. Aplicaciones del formalismo canónico

El uso del formalismo típico de la Mecánica Analítica, junto con la teoría de operadores sobre espacios abstractos (es decir, el análisis funcional), suministró las herramientas matemáticas con que construir la teoría cuántica desde

sus orígenes a la actualidad. El camino seguido por la Relatividad General resultó muy distinto, por cuanto que utilicé el análisis tensorial (Geometría Riemanniana) como los instrumentos propios de las variedades geométricas implicadas. De modo que el proyecto de unificación entre ambas ramas de la Física hubo que afrontar en sus inicios con dificultades no sólo conceptuales, sino también de tipo formal.

Por tanto, la principal motivación para la construcción de una formulación hamiltoniana, es decir, la identificación (de un conjunto de variables canónicamente conjugadas a partir de una función lagrangiana y la obtención del hamiltoniano como la transformada de Legendre en las velocidades de la función lagrangiana), consistía en la posibilidad de cuantizar la teoría de la Relatividad General. Esto es, asociar a cada variable canónica un operador sobre un espacio vectorial e imponer reglas de conmutación entre pares de variables conjugadas. El operador hamiltoniano toma ahora el papel de generador de translaciones en el tiempo, es decir, es el responsable de la dinámica del sistema.

Analizaremos de manera somera el proceso de cuantización a partir del hamiltoniano construido. Para la Relatividad General, el procedimiento de cuantización no es directo a partir del hamiltoniano construido, ya que existen 3 constricciones entre las variables canónicas. Para tratar de salvar esta dificultad, se han seguido dos caminos diferentes, que son a grandes rasgos: 1) Tratar de aislar los verdaderos grados de libertad de la gravitación, objetivo que tenían en mente ADM al comenzar su programa. Una vez aislados los grados de libertad, se procedería a su cuantización. Este procedimiento sólo se ha logrado realizar de manera formal. 2) Considerar a todas las variables, pero imponer condiciones sobre el vector de estado dadas por las tres constricciones, esto es, pedir que las constricciones (ahora como operadores) al actuar sobre el vector de estado, lo anulen. Este es el punto de vista adoptado por Dirac y De Witt.

El método canónico de cuantización se basa, como ya hemos mencionado, en la cuantización de un sistema hamiltoniano clásico. Empezamos con un sistema descrito por un lagrangiano a partir del cuál se obtienen las ecuaciones de movimiento. El siguiente paso fue hacer una transformación de Legendre para obtener una descripción hamiltoniana del sistema. Una vez que el sistema está descrito por el formalismo hamiltoniano se puede pasar a su cuantización. Tenemos un conjunto de variables canónicas y un álgebra de Lie obtenida con el corchete de Poisson entre estas variables. La idea básica de la cuantización canónica consiste en trasladar esta álgebra clásica a un

álgebra cuántica, donde los corchetes serán sustituidos por conmutadores y los observables clásicos pasarán a ser operadores cuánticos, es decir,

Teoría clásica	Teoría cuántica.
A,B,C observables	$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ operadores hermitianos
$\{A, B\}$ (paréntesis de Poisson)	$[\hat{A}, \hat{B}] = -i\hbar\hat{C}$ (Conmutador)

Ahora nos falta tener un espacio de Hilbert de estados sobre el que actúen los operadores cuánticos y nos encontraremos con el problema de la elección del producto interno que determine este espacio de Hilbert. También podemos tener problemas de ordenación al pasar de una expresión clásica a su correspondiente operador cuántico porque las variables clásicas conmutan siempre pero no ocurre lo mismo con los operadores cuánticos. Otros problemas serán la regularización de los operadores, anomalías, etc.

Como hemos visto, en el caso de la Relatividad General consideramos una variedad  $M$  de tres dimensiones pero con la siguiente limitación: consideramos sólo espacio-tiempos con una topología  $\Sigma \times \mathbf{R}$  donde  $\Sigma$  es una superficie de Cauchy, es decir, cualquier curva temporal que pasa por un punto cualquiera de  $M$  intersecta a  $\Sigma$ , bien en el futuro o bien en el pasado. Esta limitación fue necesaria para poder obtener una descripción hamiltoniana de la teoría.

Para la descripción hamiltoniana necesitamos de un parámetro (el tiempo) respecto al cuál evoluciona el sistema. En el caso de la R.G. introducimos este parámetro haciendo una foliación del espacio-tiempo, la coordenada temporal es el parámetro que etiqueta cada hoja de la foliación. Con esta foliación parece que se rompe explícitamente la invariancia relativista de la teoría al adjudicar un papel privilegiado a esta coordenada temporal, diferenciándola así de las demás coordenadas. Sin embargo, no está tan claro que realmente se pierda la covariancia de la teoría porque si se recurre al espacio fase covariante [24] se puede reformular la teoría de forma que se respete la covariancia de la R.G. En esta formulación se introducen los objetos necesarios para el formalismo canónico (el espacio fase, la forma simpléctica, ...) de forma covariante por lo que el formalismo es independiente de la elección de coordenadas. Por lo tanto la elección de una coordenada particular como el tiempo es sólo un instrumento necesario para calcular los resultados, respetando implícitamente la covariancia de la teoría.

Una vez obtenida la versión hamiltoniana de la R.G. nos encontramos con el siguiente problema: la teoría tiene ligaduras. Este es el obstáculo más importante de cara a la cuantización. Toda la complejidad de la teoría está codificada en las constricciones. El formalismo hamiltoniano para sistemas con ligaduras fue desarrollado por Dirac [2]. La presencia de las constricciones está ligada a la invariancia bajo difeomorfismos de la teoría. Es más, el hamiltoniano del sistema es una combinación de constricciones por lo que estas no sólo imponen unas restricciones en el espacio fase sino que además gobiernan la dinámica del sistema. Las variables canónicas del espacio fase son  $\gamma^{ij}$  y los momentos  $\pi_{ij}$ . Las constricciones reducirán los grados de libertad.

Llegados a este punto tenemos un sistema clásico con ligaduras y queremos abordar su cuantización. Fundamentalmente tenemos dos alternativas:

- **Cuantización en el espacio fase reducido.** Las constricciones son eliminadas clásicamente mediante una fijación del gauge. Así se obtiene un espacio fase reducido donde sólo están los verdaderos grados de libertad del sistema. Entonces se pasa a cuantizar el sistema.
- **Cuantización “a la Dirac”.** La otra posibilidad consiste en incorporar las constricciones a nivel cuántico. Se imponen como operadores que aniquilarán los estados físicos.

A continuación vamos a ver brevemente en que consiste cada método y que dificultades o problemas tienen.

- En la cuantización en el espacio fase reducido debemos eliminar las constricciones clásicamente. Recordemos que la R.G. tiene dos constricciones de primera clase ligadas a la invariancia bajo difeomorfismos de la teoría. Para eliminarlas debemos añadir tres condiciones que fijen el gauge “adecuadamente”, es decir, las condiciones gauge han de ser conservadas por la evolución dinámica del sistema y también se tiene que verificar que la superficie de fijación de gauge (generada por las condiciones gauge) intersecta transversalmente a las órbitas gauge (generadas por las constricciones) de forma que se extrae un único punto de la órbita gauge. Una vez fijado el gauge no falta más que reducir el sistema y eliminar las constricciones para quedarnos con los verdaderos grados de libertad dinámicos de la teoría que serán dos variables y sus respectivos momentos conjugados.

Con este proceso se han eliminado las constricciones y se obtiene el espacio fase reducido. Ya se puede pasar a la cuantización, que como

hemos visto se trata de pasar del álgebra clásica entre las variables reducidas a un álgebra cuántica entre operadores.

Sin embargo, en la teoría general no se ha encontrado una fijación gauge que permita la cuantización. Incluso en casos más sencillos este esquema de cuantización puede presentar dificultades, en primer lugar, tenemos que asegurarnos de que al reducir el espacio fase se obtiene una variedad simpléctica [25], y entonces puede ocurrir que el álgebra de Poisson de las variables reducidas sea muy complicada, o que lo sea el hamiltoniano. En definitiva, el haber conseguido eliminar las constricciones no garantiza conseguir cuantizar el sistema reducido.

- Analizemos ahora el esquema de cuantización “a la Dirac”. Las ligaduras serán impuestas a nivel cuántico, de momento nos olvidamos de ellas y cuantizamos el sistema de la manera habitual. Las variables canónicas  $(\gamma^{ij}, \pi_{ij})$  pasarán a ser operadores cuánticos que actúan sobre funcionales de onda  $\psi(\gamma)$  que representan los estados. El álgebra de Poisson se traslada a un álgebra entre los operadores cuánticos y tendremos la representación usual

$$(\hat{q}_{ij}(\mathbf{x})\psi)(\gamma) = \eta_{ij}(\mathbf{x})\psi(\gamma)$$

$$(\hat{p}^{ij}(\mathbf{x})\psi)(\gamma) = -i \frac{\partial \psi(\gamma)}{\partial \pi_{ij}(\mathbf{x})}$$

donde  $\gamma \in \mathfrak{Riem}(\Sigma)$  y  $\mathbf{x} \in \Sigma_t$ .

Estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación análogas a las ecuaciones (5.4.43):

$$[\hat{\pi}^{ij}(\mathbf{x}), \hat{\gamma}_{kl}(\mathbf{y})] = -i(\delta_k^i \delta_l^j + \delta_l^i \delta_k^j) \delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$[\hat{\pi}^{ij}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{kl}(\mathbf{y})] = [\hat{\gamma}_{ij}(\mathbf{x}), \hat{\gamma}_{kl}(\mathbf{y})] = 0$$

Lo que sigue es cuantizar el hamiltoniano, para ello tomamos las constricciones y reemplazamos la métrica y el momento por los operadores  $\hat{\gamma}_{ij}$  y  $\hat{\pi}^{ij}$  y obtenemos las versiones cuánticas de las ecuaciones (5.4.36) y (5.4.37), obteniendo  $\hat{H}(N)$  y  $\hat{H}(N^i)$  en el espacio  $\mathbf{L}^2(\mathfrak{Met}(\Sigma))$ . Lo que se obtiene es que los operadores  $\hat{\gamma}_{ij}$  y  $\hat{\pi}^{ij}$  no conmutan. Para elegir operadores “decentes” estos deben de conmutar cumpliendo condiciones



análogas al caso clásico (5.4.43)

$$\begin{aligned}
\{\hat{H}(N^i), \hat{H}(N^{i'})\} &= -i\hat{H}([N^i, N^{i'}]) = -i\hat{H}(N^i\bar{\nabla}^i N_{i'} - N^{i'}\bar{\nabla}^i N_i) \\
\{\hat{H}(N), \hat{H}(N')\} &= -i\hat{H}([N, N']) \\
\{\hat{H}(N^i), \hat{H}(N)\} &= -i\hat{H}(N^i\bar{\nabla}_i N)
\end{aligned}
\tag{5.5.1}$$

Desafortunadamente esto es prácticamente imposible de conseguir. El problema aquí es que el hamiltoniano gravitacional no es polinomial en las variables, además es la suma de las constricciones y estas contienen el término  $\sqrt{\gamma}$  y debido a esto uno enfrenta el problema de como transformar la raíz cuadrada de una variable a un operador, para pasar a la teoría cuántica. La aplicación de los métodos de cuantización de campos convencionales en RG, que se basan en la expansión de perturbaciones de campo débil, fallan porque conducen a una teoría no renormalizable. Desde luego, estos métodos han tenido gran éxito en electrodinámica cuántica, por ejemplo, porque se supone que el espacio-tiempo de fondo es plano. Pero para Relatividad General el campo es el mismo espacio-tiempo y en general no es plano. Debido a esto se cree que la mejor manera de enfrentar el problema de cuantización es de una manera canónica no perturbativa.

El método para resolver el problema descrito anteriormente es conocido como el método de la raíz cuadrada de Dirac, el cual es muy complicado y no lo trataremos aquí. Suponiendo que se obtienen los operadores  $\hat{H}(N)$  y  $\hat{H}(N^i)$  que cumplen las relaciones de conmutación antes mencionadas, entonces el hamiltoniano sería

$$\hat{H} = \int_{\Sigma} (N\hat{H} + N^i\hat{H}_i)\sqrt{\gamma}d^2x$$

Hemos visto que clásicamente el hamiltoniano  $H$  se anula en el espacio fase físico  $H_{fis}$  pues tres ecuaciones de Einstein son las constricciones, la pregunta es ¿cómo entendemos estas constricciones en la teoría cuántica? El tema de las constricciones en la teoría cuántica fue desarrollado por Dirac [2]. Dirac dice que si  $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{Riem}\Sigma)$  es un estado físico si satisface las ecuaciones de restricción cuánticas, entonces dado que las soluciones tienen que ser invariantes bajo difeomorfismos y como precisamente las constricciones son los generadores de estos difeomorfismos, implementaremos las constricciones como operadores cuánticos

$\hat{H}$ . Los estados  $\psi$  que sean aniquilados por estos operadores serán invariantes bajo difeomorfismos y por lo tanto serán estados físicos.

$$\hat{H}(\gamma_{ij}, \pi^{ij})\psi = 0$$

$$\hat{H}(N)\psi = \hat{H}(N^i)\psi = 0 \quad \forall N, N^i$$

de forma alterna se puede decir que cumple la ecuación de Wheeler-DeWitt [6]

$$\hat{H}\psi = 0 \quad \forall N, N^i$$

Para que el espacio físico sea un espacio de Hilbert necesitamos introducir un producto interno. Aquí tenemos un problema difícil porque el método canónico no nos dice como obtener este producto interno. Además no tenemos una simetría que nos ayude a seleccionarlo, como ocurre por ejemplo en electromagnetismo (en este caso la simetría que tenemos es el grupo de Poincare, y se pide que esta simetría sea implementada en la teoría cuántica por una transformación unitaria; con este requerimiento se tiene la prescripción para seleccionar el producto interno). Los estados  $\psi$  deben ser normalizables y los observables serán operadores hermitianos, ambas cosas respecto al producto interno elegido.

Al pasar las constricciones a operadores cuánticos tendremos los problemas usuales de ambigüedad en la ordenación y la regularización comunes a las teorías cuánticas de campos. Sin embargo, podemos encontrar soluciones formales al requerimiento de que los estados sean aniquilados por las constricciones. Estas ecuaciones significan que las soluciones son invariantes bajo difeomorfismos. Entonces, podemos olvidarnos de las dos constricciones asociadas a difeomorfismos en la superficie espacial  $\Sigma_t$  si consideramos funcionales que dependan de la geometría de esta superficie, es decir, de propiedades invariantes bajo difeomorfismos en esta superficie. Entonces sólo nos queda la constricción hamiltoniana, eligiendo alguna ordenación y regularizandola de alguna manera podríamos convertir esta constricción en una ecuación de onda. Esta es conocida como ecuación de Wheeler-DeWitt y sus soluciones nos darían los estados físicos. Como podemos ver, para la RG todo este proceso es complejo, tiene arbitrariedades y presenta dificultades por lo que no ha sido resuelto para el caso general.

Hemos visto que tenemos dos alternativas en el proceso de cuantización, que en general darán resultados diferentes. Hay algunos que comparan estos dos

métodos para sistemas sencillos pero sus conclusiones no ayudan a inclinarnos por uno u otro. En algunos casos la cuantización “a la Dirac” reproduce la teoría cuántica correcta y en otros funciona la cuantización en el espacio fase reducido. No obstante, debemos tener en cuenta que ambos métodos tienen muchas ambigüedades y sólo una elección adecuada de ellas nos llevaría a la teoría cuántica correcta. Quizá pudiera ocurrir que ambos métodos, cada uno con su prescripción correspondiente, fueran equivalentes, pero por el momento este tema sigue abierto.

En años recientes se ha tratado de cuantizar el campo gravitacional utilizando la idea de suma sobre trayectorias, es decir, se consideran todas las posibles evoluciones de las 2-geometrías (entre dos de ellas fijas, dando a cada una de aquellas un peso proporcional a la acción clásica evaluada a lo largo de esta trayectoria [21]). Asimismo, se han construido formulaciones canónicas de la Relatividad, alternativas a la ADM, como por ejemplo el formalismo de Ashtekar [7] o la Loop Quantum Gravity.

A finales de los años sesenta y principios de los setenta, se desarrolló el estudio de modelos cosmológicos, en particular homogéneos, con el uso de un formalismo hamiltoniano [22]. Este método resulta particularmente útil ya que en algunos casos es posible encontrar una solución explícita de las ecuaciones de Einstein, y en general permite hacer un análisis cualitativo más rico de la dinámica de los modelos. Entre los modelos más estudiados están aquellos en los que las funciones lapse y shift toman los valores  $N = 1$  y  $N^i = 0$ , las superficies con  $t = \text{cte}$  son aquellas que aceptan grupos de movimiento definidos en ellas (hay un total de nueve) y se conocen como universos tipo Bianchi.

El procedimiento que se describió al final de la sección, que consiste en resolver las constricciones y elegir condiciones coordenadas con el objeto de pasar la acción a la forma canónica (teniéndose así un hamiltoniano verdadero) ha sido posible en algunos casos donde se definen las coordenadas en función de  $\gamma_{ij}$  y  $\pi^{ij}$ , llegándose a expresar al hamiltoniano en términos de estas coordenadas [23]. Las 2-geometrías involucradas en la métrica dependen exclusivamente de la coordenada tiempo, por lo que el problema tiene un número finito de grados de libertad, ya que las coordenadas del problema dependen solamente del parámetro tiempo y no de todas las variables como en el caso de espacios tiempo más generales. En el lenguaje del superespacio, las 2-geometrías de los modelos cosmológicos son un subconjunto de aquel, bautizado por Misner con el nombre de minisuperespacio.

En el minisuperespacio, donde el número de grados de libertad es a lo más cuatro (cinco en el espacio físico real), es posible preguntarse si existe alguna relación entre las ecuaciones de Hamilton, derivadas a partir del hamiltoniano y la ecuación de geodésicas asociada a la supermétrica. Notemos que la forma del hamiltoniano (5.4.33) es similar al hamiltoniano de la partícula libre en el espacio-tiempo, con la diferencia de que en la partícula libre el término de masa puede depender en general de las coordenadas  $q^i$ .

Debido a la complejidad de las constricciones el análisis canónico de la Relatividad General es difícil de abordar, sin embargo, podemos considerar modelos más sencillos y tratar de cuantizarlos. De esta forma, simplificaremos el caso general para obtener un modelo que podamos resolver. La idea de este enfoque es que resolviendo estos casos más sencillos podemos extraer conclusiones que nos guiarán en la construcción de una teoría cuántica de la gravedad. Esto es en esencia un modelo de midisuperespacio: una teoría de campos que se obtiene por una reducción de simetría de la Relatividad General. DeWitt explotó esta idea en la cuantización de espacio-tiempos homogéneos e isotrópicos rellenos con materia y poco después Misner [26] estudió estos modelos sin el requerimiento de isotropía. Con estos primeros trabajos se abría camino el estudio de la Cosmología Cuántica. Más adelante se han estudiado diferentes modelos. Todos estos modelos se pueden separar en dos tipos: modelos de minisuperespacio y midisuperespacio. Tendremos un modelo de minisuperespacio cuando imponemos tanta simetría que eliminamos todos los grados de libertad locales, y por lo tanto al cuantizar la teoría obtenemos una teoría mecanico-cuántica. Sin embargo, si al simplificar la teoría añadiendo simetría todavía tenemos grados de libertad locales, al cuantizar obtenemos una teoría cuántica de campos, en este caso se trata de un modelo de midisuperespacio. El número de grados de libertad marca la diferencia entre ambos casos. En los modelos de midisuperespacio encontraremos los problemas usuales de las teorías cuánticas de campos (renormalización).

Ahora veremos porque se han utilizados términos tan contradictorios como “minisuperespacio” y “midisuperespacio” para llamar a estos modelos. En primer lugar necesitamos entender a que se llama superespacio, término que fue acuñado por Wheeler [5]. En el formalismo canónico se estudia como evoluciona una superficie de Cauchy  $\Sigma$ , entonces el conjunto de todas las posibles 2-métricas para  $\Sigma$  es el superespacio. Las soluciones de las ecuaciones de Einstein están incluidas en este conjunto. Si se considera un modelo con cierta simetría se restringen las soluciones a una parte de este superespacio. Por este motivo estos modelos adoptaron el nombre de modelos de minisuperes-

pacio o midisuperespacio, dependiendo de cuanto se reducé el superespacio al imponer la simetría. El término minisuperespacio fue introducido por Misner.

Esta clase de modelos, en particular, los modelos de midisuperespacio son a veces una aproximación razonable de la teoría completa. En el caso de un modelo de minisuperespacio hemos simplificado demasiado la teoría. En cambio, un modelo de midisuperespacio se parece mucho al caso general: tenemos una teoría cuántica de campos, tiene constricciones debido a la libertad gauge, en definitiva, al tratar de cuantizar un modelo de este tipo aparecen muchos de los problemas de la teoría completa. La estrategia de considerar un modelo simplificado para que se pueda resolver, muchas veces ha dado buenos resultados. Por ejemplo, antes de obtener la Mecánica Cuántica se estudio la cuantización de un átomo de hidrógeno. Casi siempre es más fácil comenzar por un modelo sencillo.

Un punto muy importante en la cuantización de estos modelos es que se trata de un método no perturbativo. Dado el éxito obtenido con métodos perturbativos en el campo de la Física de Partículas, la aplicación de estos métodos a la cuantización de la RG fue inmediata. Sin embargo, la teoría que se obtiene no es renormalizable. Esto parece indicar que debemos seguir otras estrategias porque puede ocurrir que los fenómenos a pequeña escala sean realmente importantes y se escapen a un análisis perturbativo, como ocurre en fenómenos críticos.

Finalmente mencionaremos que este formalismo también puede aplicarse al estudio de la Relatividad Numérica, aunque tendríamos que descomponer las ecuaciones de Einstein con el tensor de energía-momento y tomar en cuenta los términos de superficie y llegar a las definiciones de masa y momento ADM [13].









---

# Apéndice A

## La Derivada de Lie

---

La derivada de algún campo vectorial  $\mathbf{v}$  en  $M$  puede construirse por la variación  $\delta\mathbf{v}$ <sup>1</sup> de  $\mathbf{v}$  entre los puntos próximos  $p$  y  $q$ . Ingenuamente uno podría escribir  $\delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(q) - \mathbf{v}(p)$ . Sin embargo  $\mathbf{v}(q)$  y  $\mathbf{v}(p)$  pertenecen a espacios vectoriales distintos  $T_qM$  y  $T_pM$ , en consecuencia la diferencia  $\mathbf{v}(q) - \mathbf{v}(p)$  no está definida. Para definir la derivada de  $\mathbf{v}$  uno puede introducir alguna estructura extra en  $M$ , estas estructuras son dos: una es la conexión  $\nabla$  llegando a obtener la derivada de  $\nabla_{\mathbf{v}}$  en dirección de otro campo vectorial  $\mathbf{u}$ ; la otra forma es llevar la derivada de  $\mathbf{v}$  a lo largo de  $\mathbf{u}$ , es decir transportar la derivada de  $\mathbf{v}$  sobre el campo  $\mathbf{u}$ , esta es la derivada de Lie [17]. Estos dos tipos de derivada se generalizan para campos tensoriales, en ellas se encuentran las formas diferenciales, para ellas existe un tercer tipo de derivada que no requiere una estructura extra de  $M$ : esta es la derivada exterior.

### A.1. Derivada de Lie de campos tensoriales

**A.1.1. Definición** Sea  $\mathbf{X} \in \chi(M)$  de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ; y sea la curva en  $M$   $\gamma : I \subset \mathbf{R} \rightarrow M$ , tal que  $\forall p \in \text{Im}(\gamma) \dot{\gamma}(p) = \mathbf{x}_p$ , entonces  $\gamma$  se llama **curva integral** de  $\mathbf{X}$ .

**Teorema A.1.1** *Todo campo vectorial en  $M$  define una única curva integral  $\gamma$  por cada punto  $p \in M$  tal que  $\gamma(0) = p$ .*

**Lema A.1.2** *Sean  $p \in M$ ,  $\mathbf{X} \in \chi(M)$  tal que  $\mathbf{x}_p \neq 0$ ,  $\implies \exists U_p$  con coordenadas locales  $\{y^i\}$  tal que  $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial y^1}$  en  $U$ .*

---

<sup>1</sup>La  $\delta$  indica que la derivación es sólo respecto a las coordenadas sin incluir la derivada respecto al tiempo

**Demostración.** Sean  $n = \dim M$ ,  $U_p$  vecindad de  $p$  y  $\Sigma \subset U$  una hipersuperficie de  $\dim = n - 1$ , tal que  $\mathbf{X}$  no es tangente a  $\Sigma$  en ningún punto, con coordenadas  $\{y^2, \dots, y^n\} \implies \forall q \in \Sigma \exists! \gamma_q$  curva integral de  $\mathbf{X}$  que pasa por  $q$ , tal que  $\gamma_q(0) = q \quad \forall q \in \Sigma$ . Definimos  $y^1$  a lo largo de  $\gamma_q$  como:  $y^1 = \int dt$ , con  $y^1 = 0$  en  $\Sigma$  y tomamos  $\{y^2, \dots, y^n\}$  constantes a lo largo de  $\gamma \implies \{y^i\}_{i=1}^n$  es el sistema de coordenadas deseado. ■

### Definición A.1.3 Curvas en $M$

(a) Sea  $\gamma(t)$  curva integral en  $M$ , entonces  $\gamma$  se llama **completa** si y sólo si,  $\gamma(t)$  esta definida para toda  $t$ .

(b) Un conjunto de curvas integrales completas se llama una **congruencia**.

**Definición A.1.4** Sean  $\mathbf{X} \in \chi(M)$ ,  $p \in M$  y  $\gamma(t)$  una curva integral de  $\mathbf{X}$  tal que  $\gamma(t_0) = p$ , entonces definimos el mapeo siguiente,

$$\forall s \in \mathbf{R} \quad h_s : M \longrightarrow M \quad \text{tal que} \quad h_s(p) := \gamma(t_0 + s) \quad (\text{A.1.1})$$

La interpretación geométrica de la última definición puede verse en la figura(A.1.1).

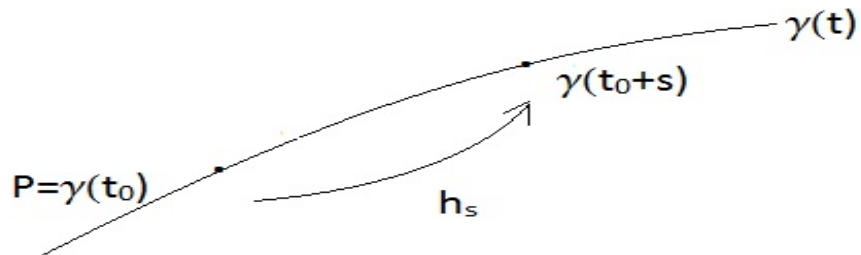


Figura A.1.1: Interpretación geométrica de  $h$

**Observación A.1.5** Por construcción  $h$  cumple que:

1.  $h$  es un grupo del parametro  $s$

$$a) \quad h_{t+s} = h_t \circ h_s = h_s \circ h_t = h_{s+t}$$

b)  $h_0 = id$  (identidad)

c)  $h_{-s} = (h_s)^{-1}$

2. El grupo  $\{h_s\}_{s \in \mathbf{R}}$  inducido por el campo vectorial  $\mathbf{X}$  permite “arrastrar” (“transportar”) funciones, vectores, 1-formas y en general campos tensoriales a lo largo de las curvas integrales. Este mapeo es conocido como flujo.

**Definición A.1.6** Sean  $p \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{X} \in \chi(M)$ ,  $\gamma$  una curva integral de  $\mathbf{X}$  que pasa por  $p$  y  $\{h_t\}_{t \in \mathbf{R}}$  el grupo de transformaciones inducido por  $\mathbf{X}$  y  $f \in C(M, \mathbf{R})$ , entonces definimos la **derivada de Lie**<sup>2</sup> de  $f$  con respecto a  $\mathbf{X}$  en  $p$  como:

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f)_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(h_t(p)) - f(p)}{t} \quad (\text{A.1.2})$$

**Teorema A.1.7**

$$\forall f \in C(M, \mathbf{R}), \quad (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f)_p = \mathbf{X}_p f \quad (\text{A.1.3})$$

**Demostración.** Usaremos el sistema de coordenadas adaptado a las curvas integrales de  $\mathbf{u}$ , entonces por definición:

$$y^1(h_t(p)) = y^1(p) + t \quad y \quad \forall j \geq 2 \quad y^j(h_t(p)) = y^j(p)$$

entonces por el Lema A.1.2 tenemos

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(h_t(p)) - f(p)}{t} = \left( \frac{\partial f}{\partial y^1} \right)_p = \mathbf{X}_p[f]$$

Esta ecuación vale para el sistema de coordenadas  $\{y^i\}$ , pero es una ecuación escalar entonces también es válida en cualquier sistema de coordenadas ■

**Definición A.1.8** Sean  $p \in M$ ,  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \chi(M)$ ,  $\gamma$  curva integral de  $\mathbf{X}$  que pasa por  $p$  y  $\{h_t\}_{t \in \mathbf{R}}$  el grupo de transformación inducido por  $\mathbf{X}$ , entonces la **derivada de Lie** de  $\mathbf{Y}$  con respecto a  $\mathbf{X}$  en  $p$  (figura A.1.2), como:

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mathbf{Y}_p - h_{t*} \mathbf{Y}_{h_{-t}(p)}] \quad (\text{A.1.4})$$

donde

$$h_{t*} : T_{h_{-t}(p)}(M) \longrightarrow T_p M$$

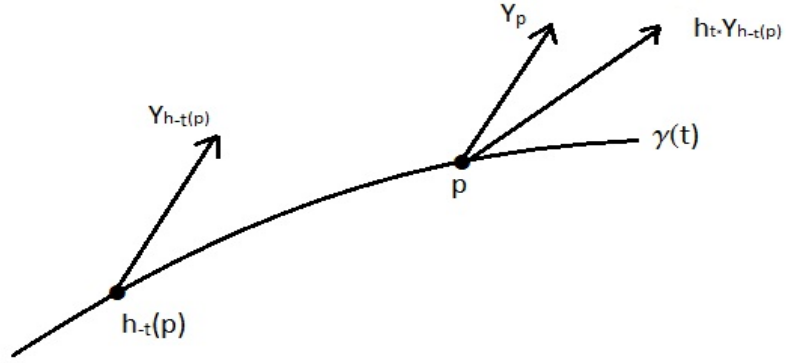


Figura A.1.2: Derivada de Lie de un campo vectorial

**Teorema A.1.9**

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})_p = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_p \quad (\text{A.1.5})$$

**Demostración.** Usamos el sistema de coordenadas adaptado a  $\mathbf{X}$ , entonces

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y^i(Y_p^1 Y_p^j) - Y^i(Y_{p-t}^1 Y_p^j)] = \left( \frac{\partial y^i}{\partial Y^1} \right)_p = \mathbf{X}_p[Y^i]$$

para  $j = 2, 3, \dots$

El último término de esta igualdad no es la componente de un vector, pero lo sería si le restamos  $\mathbf{Y}_p(X^i)$  que no altera el resultado ya que, como

$$X^i = \delta_1^i \quad \implies \quad \mathbf{Y}_p(X^i) = 0$$

y de la ecuación (2.4.3)

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})_p^i = \mathbf{X}_p(Y^i) - \mathbf{Y}_p(X^i) = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_p^i \quad \blacksquare$$

Este teorema justifica el nombre de corchete de Lie dado al conmutador en el Capítulo 1. De las definiciones de la derivada de Lie para funciones y para campos vectoriales, queda claro que para campos de 1-formas se usará el pull-back inducido por el grupo de transformaciones  $\{h_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ .

<sup>2</sup>Notar que esta definición es independiente del sistema de coordenadas

**Definición A.1.10** Sean  $\mathbf{X} \in \chi(M)$ ,  $p \in M$ ,  $\gamma$  curva integral de  $\mathbf{X}$  que pasa por  $p$  y  $\omega \in \chi^*(M)$ , entonces

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega)_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega_p - h_{-t}^*\omega_{h-t(p)}}{t} \tag{A.1.6}$$

**Teorema A.1.11**  $\mathcal{L}_u\omega^3$  es un campo de 1-formas cuyas componentes son

$$(\mathcal{L}_u\omega)_j = \omega_{j,i}u^i + \omega_k u_{,j}^k = u^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} + \omega_k \frac{\partial u^k}{\partial x^j} \tag{A.1.7}$$

**Demostración.** De la regla de Leibnitz

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u(\mathbf{w}(\mathbf{v})) &= (\mathcal{L}_u\mathbf{w})\mathbf{v} + \mathbf{w}(\mathcal{L}_u\mathbf{v}) = (\mathcal{L}_u\omega)v + \omega[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \\ &= (\mathcal{L}_u\omega)\mathbf{v} + \omega_k(v_{,i}^k u^i - u_{,i}^k v^i) \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

Por otro lado, como  $\mathbf{w}(\mathbf{v})$  es una función de  $M$  en  $\mathbf{R}$ , entonces

$$\mathcal{L}_u(\omega(\mathbf{v})) = \mathbf{u}(\omega(\mathbf{v})) = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\omega_j v^j) = \omega_{j,i}u^i v^j + \omega_j v_{,i}^j u^i \dots\dots\dots(2)$$

como (1) = (2), tenemos el resultado deseado ■

La derivada de Lie se puede extender para algún campo tensorial de la siguiente manera: Primero pedimos que para el campo escalar  $f$ ,  $\mathcal{L}_u f = \langle df, \mathbf{u} \rangle$  y que se cumpla la regla de Leibnitz. Como resultado, la derivada de Lie de un campo tensorial de rango  $\binom{r}{s}$  es un campo tensorial del mismo tipo.

Las componentes respecto a un sistema de coordenadas  $\{x^\alpha\}$  son:

$$\mathcal{L}_u T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} - \sum_{i=1}^r T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \sigma \dots \alpha_r} \frac{\partial u^{\alpha_i}}{\partial x^\sigma} + \sum_{i=1}^s T_{\beta_1 \dots \sigma \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^{\beta_i}} \tag{A.1.8}$$

Notar que las derivadas parciales en la ecuación (A.1.8) se pueden reemplazar por alguna conexión sin torsión,<sup>4</sup> como la conexión de Levi-Civita  $\nabla$  asociada a la métrica  $\mathbf{g}$ , entonces la ecuación toma la forma

$$\mathcal{L}_u T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = u^\mu \nabla_\mu T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} - \sum_{i=1}^r T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \sigma \dots \alpha_r} \nabla_\sigma u^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^s T_{\beta_1 \dots \sigma \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \nabla_{\beta_i} u^\sigma \tag{A.1.9}$$

<sup>3</sup>Se ha cambiado el campo vectorial  $\mathbf{X}$  por  $\mathbf{u}$

<sup>4</sup>Esto quiere decir que  $\nabla_u \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$



---

# Apéndice A

## Teorías Parametrizadas

---

### A.1. Mecánica parametrizada

Una teoría es covariante si su descripción no depende del sistema de coordenadas. En el caso de la Mecánica Clásica esta condición es equivalente a la invariancia de la parametrización.

**Teorema A.1.1** *Sea  $M$  un sistema mecánico clásico. Si  $M$  es invariante de parametrización, entonces el Hamiltoniano canónico es idénticamente nulo, es decir,*

$$\begin{aligned} \text{Si } S(\tau) = S(t) \quad \text{con } \tau = \tau(t) \quad \implies \\ H_c = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

**Demostración.** El sistema  $M$  está descrito por la acción:

$$S(t) = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \frac{dq}{dt}) dt$$

Sea  $\tau = \tau(t)$  la parametrización, entonces la acción se puede escribir como:

$$S(\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(q, \frac{dq}{d\tau}) d\tau$$

sean

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{dq}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \dot{q} \lambda = v \lambda \quad (\text{A.1.2})$$

$$dt = \frac{dt}{d\tau} d\tau = \lambda d\tau \quad (\text{A.1.3})$$

donde

$$\lambda = \frac{dt}{d\tau} \quad (\text{A.1.4})$$

$$v = \frac{dq}{dt} \quad (\text{A.1.5})$$

Como  $M$  es invariante de la parametrización, entonces  $S(\tau) = S(t)$ , es decir,

$$\int (q, \frac{dq}{d\tau}) d\tau = \int (q, \frac{dq}{dt}) dt$$

Aplicando las ecuaciones (A.1.2), (A.1.3) y (A.1.4), obtenemos:

$$\int (q, \lambda v) d\tau = \int (q, v) \lambda d\tau$$

entonces

$$L(q, \lambda v) = \lambda L(q, v)$$

Esto implica que  $L$  es una función homogénea de primer orden en las velocidades.<sup>1</sup> Derivando respecto a  $\lambda$  (utilizando la regla de la cadena), obtenemos

$$\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L = 0$$

pero el lado izquierdo de esta ecuación es el hamiltoniano canónico, por lo tanto

$$H_c = 0 \quad \blacksquare$$

**Teorema A.1.2** *Si el hamiltoniano canónico es idénticamente nulo, entonces el hessiano tiene una restricción lagrangiana nula.*

**Demostración.** El hamiltoniano es idénticamente nulo, es decir

$$H_c = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L = 0$$

derivando respecto a  $\dot{q}^j$ , obtenemos

$$\frac{\partial H_c}{\partial \dot{q}^j} = \dot{q}^i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = W_{ij} \dot{q}^j = 0$$

Esto indica que el hessiano  $W_{ij}$ , tiene un eigenvector nulo, es decir

<sup>1</sup>Una función es homogénea de orden  $n$  si,  $f(\lambda x, y) = \lambda^n f(x, y)$



$$W_{ij}v^j = W_{ij}\dot{q}^j = 0$$

contrayendo con el eigenvector  $\dot{q}^j$ , se obtiene

$$\varphi = \alpha_i \dot{q}^i = \dot{q}^i \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \right] = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left[ L - \dot{q}^j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right] = 0$$

por lo tanto a nivel Lagrangiano, tenemos una constricción idénticamente cero ■

También hay una constricción hamiltoniana, que podemos obtener de la siguiente forma.

El momento canónico es

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (\text{A.1.6})$$

como  $L$  es homogéneo de orden uno, entonces de esta relación se observa que  $p^i$  es homogéneo de orden uno, entonces existe una constricción  $\phi$  cuya forma explícita depende de la forma explícita del lagrangiano considerado. De la ecuación (A.1.1), el Hamiltoniano primario es

$$H_1 = H_c + \lambda^a \phi_a = H_c + \lambda \phi = \lambda \phi = v \phi$$

En la teoría general de constricciones, a ésta constricción se le llama ligadura de primera clase.<sup>2</sup>

## A.2. Mecánica canónica

No todos los hamiltonianos de la Mecánica corresponden a sistemas parametrizados. En 1933, Dirac, desarrolló un método para parametrizar lagrangianos no-parametrizados. El método consiste en considerar el tiempo  $t$  como una nueva coordenada  $q^0$  del espacio de configuración.

Consideremos la acción canónica

$$S(t) = \int \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^i p_i - H(p_i, q^i)) dt \quad (\text{A.2.1})$$

<sup>2</sup>Para más detalles sobre ligaduras se puede consultar [2]

Si  $t = q^0$  y  $\tau$  es un nuevo parámetro temporal, entonces como

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{dq^i}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}$$

entonces se puede escribir el lagrangiano como

$$S(\tau) = \int \mathcal{L}\left(q^i, \frac{dq^i}{d\tau}\right) \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int \mathcal{L}(q^i, \theta^i) \dot{q}^0 d\tau \quad (\text{A.2.2})$$

donde se ha definido

$$\theta^i = \frac{\frac{dq^i}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{q^{0i}}{\dot{q}^0} \quad (\text{A.2.3})$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \dot{q}^0$$

El nuevo lagrangiano es

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(q^i, \theta^i) \dot{q}^0 \quad (\text{A.2.4})$$

Los momentos son

$$P_0 = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}^0} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^0} (\mathcal{L} \dot{q}^0) = \mathcal{L} + \dot{q}^0 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^i} \frac{\partial \theta^i}{\partial \dot{q}^0} \right) = \mathcal{L} - \theta^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^i} \quad (\text{A.2.5})$$

$$P_i = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} (\mathcal{L} \dot{q}^0) = \mathcal{L} \frac{\partial \dot{q}^0}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = \dot{q}^0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^i} \frac{\partial \theta^i}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^i} \quad (\text{A.2.6})$$

En este caso el hamiltoniano canónico es

$$H_c = \mathcal{L} - \theta^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^i} \quad (\text{A.2.7})$$

La ecuación (A.2.6) se puede reescribir como

$$\bar{p}_0 = -H_c \quad (\text{A.2.8})$$

Si el lagrangiano es regular, entonces (A.2.6) se puede invertir para expresar a la variable  $\theta$  en términos de  $\bar{p}$ . Finalmente la ecuación (A.2.8) es

$$\bar{p}_0 = -H_c(q^i, \bar{p}_i) \quad (\text{A.2.9})$$

Esta es la constricción Hamiltoniana. La versión cuántica de esta constricción es la ecuación de Schrödinger que veremos en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo A.2.1** *Un ejemplo sencillo de un lagrangiano canónico*

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^2 - V(\vec{q}).$$

utilizando las ecuaciones (A.2.4) y (A.2.3), tenemos que el lagrangiano parametrizado es

$$\bar{L} = \frac{m}{2} \frac{\dot{\vec{q}}^2}{\dot{q}^0} - V(\vec{q})\dot{q}^0$$

Los momentos correspondientes son:

$$\bar{p}_0 = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^0} = -\frac{m}{2} \frac{\dot{\vec{q}}^2}{(\dot{q}^0)^2} - V(\vec{q})$$

$$\bar{p}_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} = m \frac{\dot{q}^i}{\dot{q}^0}$$

entonces

$$\bar{p}_0 = -\frac{1}{2m} \vec{p}^2 - V(\vec{q}).$$

La versión cuántica de esta restricción es la ecuación de Schrödinger.



## Bibliografía

---

- [1] S.M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley (Pearson Education), San Francisco (2004); <http://pancake.uchicago.edu/carroll/grbook/>
- [2] P. A. M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Canadian J. Math. 2, 129 (1950).
- [3] Arnowitt, R., Deser, S., and Misner, C.W., *The dynamics of general relativity*, in Witten, L., ed., *Gravitation: An Introduction to Current Research*, 227–265, (Wiley, New York,U.S.A., 1962). Related online version (cited on 5 January 2005): <http://arXiv.org/abs/gr-qc/0405109>.
- [4] Y. Choquet-Bruhat and J.W. York, *The Cauchy Problem, in General Relativity and Gravitation*, one hundred Years after the Birth of Albert Einstein, Vol. 1, edited by A.Held, Plenum Press, New York (1980), p. 99.
- [5] J.A. Wheeler, *Superspace in Analytic Methods in Mathematical Physics*, ed. Gilberl, Newlon (1970),335.378.
- [6] Carlip, S., *Notes on the  $(2+1)$ -Dimensional Wheeler–DeWitt Equation*, Class. Quantum Grav., 11, 31, (1994). Related online version (cited on 5 January 2005): <http://arXiv.org/abs/gr-qc/9309002>
- [7] A. Ashtekar, *New Variables for Classical and Quantum Gravity*, [Phys. Rev.Lett. 57 \(1986\) 2244–2247](#).
- [8] J. Baez and J. P. Muniain, *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific, Singapore (1994).
- [9] Witten, E. (1988) “*2+1 dimensional gravity as a exactly soluble system*”. Nucl. Phys., B311, 46-78.
- [10] T.W. Baumgarte and S.L. Shapiro, *Numerical relativity and compact binaries*, Phys. Rep.376, 41 (2003).
- [11] K.S. Thorne and D. Macdonald, *Electrodynamics in curved spacetime: 3 + 1 formulation*,Mon. Not. R. Astron. Soc. 198, 339 (1982).

- 
- [12] Alejandro Corichi y Darío Núñez, *Introducción al Formalismo ADM*, Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México. Revista Mexicana de Física 37 No4 (1991) 720-747.
- [13] D.Giulini, *Canonical Gravity*, Lectures presented at the 16th Saalburg Summer School “Fundamentals and New Methods in Theoretical Physics”, August 30 - September 10, 2010, Wolfersdorf, Germany
- [14] M.C.Bertin , B.M.Pimentel and P.J.Pompeia, *General Relativity in two dimensions: a Hamilton-Jacobi constraint analysis* [arXiv:0911.2120v1](https://arxiv.org/abs/0911.2120v1) [gr-qc] 11 Nov 2009.
- [15] Armstrong M.A., *Topología Básica*, Reverté, Barcelona, 1987.
- [16] Do Carmo M., *Riemannian Geometry*, Alianza Universidad Textos, 1994.
- [17] O.A.Palmas y H.Sánchez, *Geometría Riemanniana*, Las prensas de ciencias U.N.A.M, México,2007
- [18] O’Neill B., *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*, Series in Pure and Applied Math. 103 Academic Press, N.Y. (1983).
- [19] S.W. Hawking y G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, Londres, 1973..
- [20] R. P. Geroch, *Topology in General Relativity*, J. Math. Phys. 8 (1967) 782.
- [21] Rovelli, C., *Notes for a brief history of quantum gravity*, (2000). URL (cited on 5 January 2005):<http://arXiv.org/abs/gr-qc/0006061>
- [22] Benedetti, R., and Guadagnini, E., *Cosmological Time in (2 + 1) Gravity*, Nucl. Phys. B, 613, 330–352, (2001). Related online version (cited on 5 January 2005): <http://arXiv.org/abs/gr-qc/0003055>
- [23] Stone, L. and Kuchar, K.V. *Representation of spacetime diffeomorphism in canonical geometrodynamics under harmonic coordinate conditions*. Class Quantum gravity 9, 1992, 757-776. Printed in the U.K.
- [24] S. W. Hawking and C. J. Hunter, *The Gravitational Hamiltonian in the Presence of Non-Orthogonal Boundaries*, Class. Quant. Grav. 13, 2735, (1996): <http://arXiv:gr-qc/9603050v2> 27 Aug 1996
- [25] Libermann P. and Marle C.M., *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, D.Reidel Publishing Company, Dordrech Holland 1987.
- [26] Misner C.W., *Minisuperspace, Magic Without Magic*, edited by J. R. Klauder, W. H. Freeman, San Francisco, (1972).