UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

Propuesta de una medida complementaria al índice de Herfindahl-Hirschman basada en su distribución de probabilidad bajo el supuesto de cuotas de mercado paramétricamente simétricas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN ECONOMÍA

P R E S E N T A

FERNANDO RODRÍGUEZ RAMOS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. GUSTAVO VARGAS SÁNCHEZ

MÉXICO, D.F. **Diciembre de 2012**

A mis padres.

Agradecimientos

A mis padres, *Ana María y Fernando*, por todo el amor que de ellos he recibido y por procurar formar en mí la base sobre la cual se han asentado todas mis ideas y razonamientos. Gracias, también, por brindarme todo su apoyo para avanzar en el proyecto profesional del cual este trabajo forma parte.

A mis hermanos, *Analía*, *Ariadna* y *Alejandro*, a mis abuelos *Víctor*(†) y *Melquiades*, a mi padrino *Juan Carlos* y, en general, a todos los integrantes de *las familias Rodríguez y Ramos*. Gracias por hacerme sentir que puedo contar con ustedes en todo momento.

A *Jessica*, porque su cariño y gran ánimo han sido un impulso fundamental para proponerme y lograr nuevas metas. Preciosa: gracias por compartir tu tiempo conmigo.

A *todos mis profesores*, con una mención especial para aquellos que han dejado una marca particularmente profunda en mi formación como profesional: M. en C. *Enrique Hueda*, Dra. *Ana Meda* y Dr. *Gustavo Vargas*.

A los sinodales que aceptaron hacer la revisión de este trabajo, por haberle dedicado parte de su tiempo para leerlo y por compartirme sus valiosos puntos de vista para enriquecerlo. Gracias, Mtra. *Irma Escárcega*, Mtro. *Franco Guerrero*, Mtro. *Javier Núñez* y Dr. *César Octavio Vargas*.

A *todos mis amigos y compañeros de la universidad*, por todos esos gratos momentos de fraternal convivencia y por formar una parte importante en mi proceso de formación. Gracias a los integrantes de *la Banda del Jardín*, a los de *La Última y nos Vamos* y a los del *Deportivo Ferra Gómez*. Un agradecimiento especial a *Lilia Karen Rivera* y a *Saúl Nicandro Ramírez* que dedicaron un tiempo a revisar e intercambiar ideas sobre algunos aspectos de este trabajo. Quiero hacer una mención especial para *Daniel Allard*, *Francisco Díaz Cerón*, *Carlos Hernández*, *Raúl Rodríguez* y *Alejandro Vázquez*, que me brindaron su apoyo académico, consejos y afecto en momentos decisivos.

Índice General

Introducción i

Capítulo I: Estructura de mercado y bienestar social 1

Los agentes básicos de la teoría microeconómica bajo el análisis de equilibrio parcial 1

Consumidores en el modelo canónico de equilibrio parcial 1

Productores bajo el supuesto de producción simple 9

Bienestar social en competencia perfecta 15

Bienestar social en monopolio 18

Capítulo II: Concentración de mercado y algunas de sus medidas. 22

La concentración de mercado y el bienestar social 22

El modelo de Cournot con demanda lineal y costos idénticos 22

Modelo de Cowling y Waterson 27

Una consideración sobre la simetría de las cuotas de mercado 29

Algunas medidas de concentración 31

El índice CR_m 32

El índice de entropía 35

El índice de Herfindahl-Hirschman 38

Caracterización de los índices de concentración según Encaoua y Jacquemin 41

Capítulo III: Propuesta de una medida complementaria al índice de Herfindahl-Hirschman 44

Observación sobre las medidas de concentración. 44

El supuesto de cuotas de mercado paramétricamente simétricas 45

Distribución del índice de Herfindahl-Hirschman bajo el supuesto de cuotas de mercado paramétricamente simétricas 47

Propuesta de una Medida complementaria al Índice de Herfindahl-Hirschman basada en su distribución de probabilidad bajo el supuesto de cuotas de mercado paramétricamente simétricas 54

Conclusiones y recomedaciones 60

Bibliografía 62

Introducción

La teoría microeconómica postula que, bajo ciertas condiciones, cada agente obtendrá un excedente por participar en el mercado. El monto y la distribución de los excedentes se encuentran determinados por la estructura del mercado en el que se generen; bajo competencia perfecta la suma de los excedentes es máxima y corresponde en su totalidad a los consumidores (el excedente de los productores es nulo), mientras que en monopolio se genera una suma de excedentes mínima que se reparte entre el productor monopolista y los consumidores. En algunos modelos de oligopolio es posible observar que los excedentes generados decrecen de acuerdo con el grado de semejanza que el mercado en cuestión guarde con el monopolio, es decir, el grado de concentración; por esta relación con el bienestar social es que la concentración resulta ser un concepto relevante.

Los índices más usados para medir la concentración son el CR_m, de entropía y de Herfindahl-Hirschman. El índice CR_m tiene una clara interpretación en términos de la descripción de la estructura de las cuotas de mercado, pero no puede ser considerada como una medida sumaria, ya que no usa la totalidad de la información sobre las cuotas de mercado. Los índices de entropía y Herffindahl-Hirschman son medidas sumarias, pero presentan dificultades para ser interpretados[1] debido, quizá, a que por su carácter de índices carecen de

[1] "El índice de Herfindahl… no parece tener un significado intuitivo muy claro… si se dice que el índice de Herfindahl vale 0.56, ligado a esto no hay un significado muy intuitivo" Kelly (1981). El índice de entropía suele interpretarse erroneamente como una medida de "la incertidumbre a la que se enfrentan los agentes al participar en el mercado".

unidades y a que sus magnitudes no son proporcionalmente comparables bajo algún contexto específico.

La construcción del índice de Herfindahl-Hirschman se basa en la observación de las cuotas de mercado correspondientes a cada una de las empresas de un mercado, durante algún periodo. Si el proceso del cual resultan estas cuotas se supone como aleatorio, para verificar la igualdad de condiciones de cada uno de los participantes será necesario construir una prueba de hipótesis cuya hipótesis nula (H_0) afirme que, si se selecciona al azar una unidad de producto colocada en el mercado, todas las empresas tienen la misma probabilidad de haberla elaborado, es decir, que las cuotas de mercado son paramétricamente simétricas. El estadístico usado en esta prueba será una función del índice de Herfindahl-Hirschman, por lo que es posible asociarle a este último una función de densidad bajo H_0; el *p-value* de esta prueba será una función inversa de la desigualdad de las cuotas de mercado.

En éste trabajo se pretende introducir una función del *p-value* de la prueba expuesta como una medida complementaria al índice de Herfindahl-Hirschman. Debido a que el *p-value* representa el riesgo asociado a rechazar erróneamente la hipótesis nula de igualdad de condiciones de mercado, los valores que arroje la medida propuesta en diferentes contextos pueden ser proporcionalmente comparables. Por ejemplo, si se observan tres industrias con el mismo número de empresas tales que, al ordenarlas de acuerdo a su índice de Herfindahl-Hirschman, la diferencia entre la primera y la segunda y la segunda y la tercera son similares, la medida propuesta presentará magnitudes que darán cuenta de que tan significativa es cada una de esas diferencias en términos del riesgo de rechazar erróneamente una hipótesis que representa el supuesto de igualdad de condiciones de competencia. Debido a lo anterior, se espera que dicha medida provea al índice de Herfindahl-Hirschman de una interpretación más intuitiva en términos de la desigualdad de las cuotas.

El trabajo consta de tres capítulos. En el primero se hará una revisión general de los conceptos de la teoría microeconómica que se involucran en la construcción del concepto de bienestar social y, a través de este, se hará una comparación de las estructuras de monopolio y competencia perfecta. En el segundo se presentarán dos modelos microeconómicos en los que es posible relacionar la concentración de mercado con el bienestar social y se hará un recuento de las medidas más comunes de concentración y de las propiedades que estas deben cumplir. En el tercero se presentará, bajo el enfoque de las pruebas de hipótesis, la construcción de la medida propuesta. Se iniciará con la presentación del supuesto de cuotas de mercado paramétricamente simétricas para después obtener la distribución de probabilidad del índice de Herfindahl-Hirschman bajo dicho supuesto. Finalmente, se presentará la medida propuesta y su interpretación en términos de la desigualdad de las cuotas de mercado.

Capítulo I:

Estructura de mercado y bienestar social

El objetivo de éste capítulo es presentar al concepto bienestar social, formado por la suma de excedentes de consumidores y productores, como un criterio de comparación entre estructuras de mercado. Se comenzará identificando los supuestos que se hacen al usar al excedente del consumidor como medida bienestar; en el caso de los productores se abundará en el análisis de costos como un preámbulo para la determinación del nivel óptimo de producción bajo diferentes estructuras de mercado. Finalmente se presentará, bajo la óptica del análisis de equilibrio parcial, la generación del excedente social en los mercados con estructuras de competencia y de monopolio.

Los agentes básicos de la teoría microeconómica bajo el análisis de equilibrio parcial

Consumidores en el modelo canónico de equilibrio parcial

Bajo el marco del análisis de equilibrio parcial se examina a los agentes en el entorno de un mercado específico, pasando por alto las interacciones que éste podría tener con el resto de la economía; lo anterior permite ampliar el grado de detalle con el que se aborda el desempeño de los agentes involucrados en el mercado de interés. Por lo anterior, usualmente se asume que bajo ésta perspectiva se obtienen “modelos más realistas de la organización de las industrias”[2].

La fundamentación del análisis de equilibrio parcial en términos de los agentes de los modelos de equilibrio general puede apreciarse en el desarrollo del *modelo canónico de equilibrio parcial*[3]. En dicho modelo se considera que los consumidores eligen canastas formadas por un cierto conjunto de bienes de interés ($\bar{q}'$) además de un bien numerario ($x_{\mathbb{1}}$) que representa al resto de los bienes de consumo disponibles en la economía; es decir, las canastas tienen la forma $\boldsymbol{x} = (x_{\mathbb{1}}, \bar{q}')$ y precios asociados $\bar{p} = (1, \bar{p}')$, los precios son considerados como una variable exógena por cada consumidor. El supuesto fundamental es el de que cada consumidor tiene preferencias *cuasilineales*, es decir, su función de utilidad tiene la forma:

$$U(\boldsymbol{x}) = U(x_{\mathbb{1}}, \bar{q}') = x_{\mathbb{1}} + W(\bar{q}')$$

Donde W es creciente y cóncava con respecto a la cantidad de cada uno de los bienes representados en $\bar{q}'$.

Así, el problema del consumidor queda expresado como:

$$\begin{gathered} Max\ U(x_{\mathbb{1}}, \bar{q}') = x_{\mathbb{1}} + W(\bar{q}') \\ s.a. \\ x_{\mathbb{1}} + \bar{p}' \cdot \bar{q}' \leq m \end{gathered}$$

[2] Tirole (1992), pág. 7
[3] El modelo aquí expuesto sigue la argumentación de Vives (1999)

Se sabe que la solución estará en la frontera del conjunto, por lo que se puede asumir igualdad en la restricción. Sustituyendo el valor de $x_{\mathbb{I}}$ se obtiene que el problema anterior es equivalente a maximizar, con respecto a cada entrada de $\bar{q}'$:

$$U(x_{\mathbb{I}}, \bar{x}') = m - \bar{p}' \cdot \bar{q}' + W(\bar{q}')$$

Debido a que m es una constante, éste nuevo problema tendrá la misma solución que el de maximizar $W(\bar{q}') - \bar{p}' \cdot \bar{q}'$; e ésta expresión es posible apreciar que la elección de los consumidores representados en éste modelo no presenta efectos ingreso, por lo que usualmente se supone que el ingreso de los consumidores involucrados es relativamente grande en comparación con su gasto en los bienes del mercado modelado.

Por las condiciones de primer orden se tiene que la utilidad marginal del bien i es igual a su precio:

$$\frac{\partial W_i}{\partial q_i} = p_i$$

Ésta expresión representa el sistema de demanda inversa; su matriz Jacobiana será igual a la matriz Hessiana de W, que se supone suave y negativa definida. De lo anterior surge la simetría de efectos cruzados ($\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial q_i}$) y la pendiente negativa de las demandas inversas ($\frac{\partial p_i}{\partial q_i} < 0$).Las demandas directas también tendrán pendiente negativa ($\frac{\partial q_i}{\partial p_i} < 0$) debido a que el sistema de donde se obtienen es el inverso de la matriz Hessiana de U, que es negativa definida; esta misma condición garantiza su invertibilidad en regiones convexas.

En el caso de que la canasta de bienes de interés contenga a un único elemento, se maximizará $W(q) - pq$ con $q \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, y con la función $W: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ continua, creciente y cóncava. De igual manera, las condiciones de primer orden darán como resultado que la utilidad marginal estará dada por el precio, el cual aparecerá como una función de la cantidad:

$$\frac{dW}{dq} = p(q)$$

Ésta última expresión constituye la función de demanda inversa[4]; su inversa será la función de demanda directa, que también tendrá pendiente negativa:

$$p^{-1}(q) = q(p)$$

Una importante caracterización de la función de demanda es la *elasticidad*, que relacionará incrementos de la cantidad demandada en proporción de su nivel actual con incrementos de los precios, también en proporción de su nivel actual; lo anterior se puede interpretar como una medida del grado de respuesta que tendrá la demanda ante cambios en el precio, dado un nivel de cantidad demandada. En el caso de un solo bien queda expresada como:

$$\eta(q) = \frac{dq(p)}{dp}\frac{p}{q}$$

Una función de demanda, evaluada en un punto q dado se dirá que es:

Elástica: $Si\ \eta(q) < -1$ ó $|\eta(q)| > 1$

[4] No se contradice la hipótesis de agentes tomadores de precio ya que el precio que está en función de la cantidad no es el de mercado, sino que es *"el máximo monto que los consumidores están dispuestos a pagar por una cantidad fija de mercancía"* Shy (1995)

Inelástica: $Si\ \eta(q) > -1$ ó $|\eta(q)| < 1$

De *elasticidad unitaria*: $Si\ \eta(q) = -1$ ó $|\eta(q)| = 1$

Bajo la óptica de análisis de equilibrio parcial, la función de demanda agregada depende del mismo parámetro p que las funciones de demanda individual y presenta las mismas propiedades, por éste motivo se representan aquí con la misma notación.

A partir de la función de demanda inversa (agregada) se define la función de ingreso de los productores como:

$$TR = q \times p(q)$$

También se define la función de ingreso marginal como:

$$MR = \frac{d\,TR(q)}{dq}$$

Ésta función proporciona una aproximación a la relación entre los incrementos del ingreso global de los productores con respecto a los incrementos en las cantidades consumidas; será de utilidad para analizar la interacción entre la estructura de demanda de los consumidores y las decisiones que tomarán los productores para maximizar su beneficio.

El bienestar asociado al consumo

Las medidas generalmente aceptadas del cambio en el bienestar de los consumidores asociado a modificaciones de la estructura de precios y su consecuente cambio en la elección de las canastas elegidas son la *variación equivalente* y la *variación compensatoria*; su construcción está hecha bajo el enfoque del equilibrio general y considera dos periodos entre los que se presenta una situación de cambio de precios y las respuestas que ante éste tendría un consumidor que maximiza su utilidad.

La variación equivalente y la variación compensatoria son expresadas como:

$$VE(p^0, p^1,) = e\big(p^0, v(p^1, m)\big) - e\big(p^0, v(p^0, m)\big) = e\big(p^0, v(p^1, m)\big) - m$$

$$VC(p^0, p^1,) = e\big(p^1, v(p^1, m)\big) - e\big(p^1, v(p^0, m)\big) = m - e\big(p^1, v(p^0, m)\big)$$

En donde:

p^0 y p^1 son los vectores de precios considerados como inicial y final, respectivamente.

$v(p, m)$ es la función de utilidad indirecta; representa el máximo de utilidad que puede alcanzar el consumidor dado un vector p y un presupuesto m.

$e(p, u)$ es la *función de gasto*; representa el mínimo gasto necesario que deberá hacer el consumidor para alcanzar un nivel de utilidad u, dada una estructura de precios p. Es la inversa de la función de utilidad indirecta.

Y además:

$e\big(p, v(q, m)\big)$ es conocida como la *función indirecta de utilidad métrica monetaria*.

Si se supone al tiempo 0 como pasado y al 1 como actual, la <u>variación equivalente</u> es interpretada como la diferencia que guardan:

i) <u>El gasto que era necesario</u>, bajo los precios p^0, <u>para alcanzar la máxima utilidad actualmente posible</u> con los nuevos precios p^1 y el presupuesto m

y ii) El gasto necesario, bajo los precios p^0, para alcanzar la máxima utilidad posible con los precios p^0 y el presupuesto m; es decir, el monto m.

Bajo p^0, es la variación de la renta que para el consumidor en cuestión resultaría equivalente a un cambio de p^0 a p^1.

Por su parte, la variación compensatoria es interpretada como la diferencia entre:

i) El gasto necesario, bajo los precios p^1, para alcanzar la máxima utilidad posible con los precios p^1 y el presupuesto m; es decir, el monto m.

y ii) El gasto actualmente necesario, bajo los precios p^1, para alcanzar la máxima utilidad anteriormente posible con los precios p^0 y el presupuesto m.

Bajo p^1, es la variación de la renta que para el consumidor en cuestión compensaría el cambio de p^1 a p^0.

Debido a que $m = e\left(p^0, v(p^0, m)\right) = e\left(p^1, v(p^1, m)\right)$, las variaciones equivalente y compensatoria pueden escribirse como:

$$VE(p^0, p^1,) = e\left(p^0, v(p^1, m)\right) - e\left(p^1, v(p^1, m)\right)$$

$$VC(p^0, p^1,) = e\left(p^0, v(p^0, m)\right) - e\left(p^1, v(p^0, m)\right)$$

El lema de Shephard dice que[5]:

$$\frac{\partial e(p, u)}{\partial p} = q^h(p, u)$$

[5] El lema de Shephard relaciona la función de gasto con la función de demanda Hicksiana, que es el nivel de producto requerido para minimizar el gasto dado un nivel de utilidad arbitrario. Una demostración detallada del lema puede encontrarse en Jehle & Reny (2001), pág. 36

Por lo que:

$$VE(p^0, p^1) = \int_{p_1}^{p_0} q^h(p, v(p^1, m))\, dp$$

$$VC(p^0, p^1) = \int_{p_1}^{p_0} q^h(p, v(p^0, m))\, dp$$

Debido a que la demanda Hicksiana no es observable, las igualdades anteriores se usan tomando en cuenta curvas de demanda Marshalianas; el error en el que se incurre está acotado y depende del valor de la elasticidad ingreso de la demanda y de la fracción del ingreso que representa el excedente del consumidor[6].

Bajo el análisis de equilibrio parcial se supone que el gasto que hacen los consumidores en el mercado modelado es pequeño con respecto a su ingreso; además, no hay efectos ingreso debido a que los consumidores tienen preferencias cuasilineales. Bajo éstos supuestos, las variaciones equivalentes y compensatorias se igualan y quedan de la forma:

$$\int_{p^0}^{p^1} q(t)dt$$

La expresión anterior es también conocida como excedente del consumidor y puede usarse indistintamente con funciones de demanda individuales o agregadas.

---

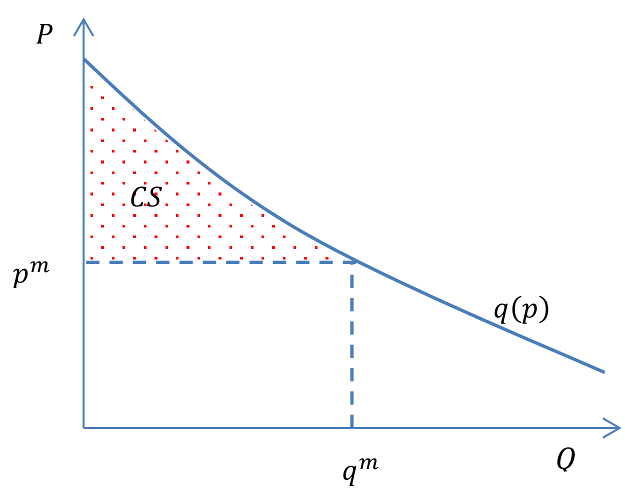
[6] Véase Jehle & Reny (2001), pág. 170

El excedente del consumidor también es usado para medir el bienestar obtenido por todos los consumidores de un mercado en una situación de un solo periodo. Supóngase que p^f es el máximo precio al que se formaría el mercado, es decir, $q(p^f + \epsilon) = 0 \;\; \forall \epsilon > 0$. Suponiendo que p^m es el precio de mercado, la integral :

$$CS = \int_{p^m}^{p^f} q(t)dt$$

se interpreta usualmente como el límite de la suma de las diferencias entre el precio de reserva de los consumidores que sí participaron en el mercado y el precio de mercado, cuando el número de consumidores crece. La anterior suma también constituye una medida del bienestar que, conjuntamente, obtienen los consumidores por participar en el mercado en un periodo determinado; una representación gráfica se muestra a continuación.

Figura 1. Excedente del consumidor con una canasta de un solo bien



Productores bajo el supuesto de producción simple

Suponiendo producción simple, un plan de producción puede describirse como:

$$y = (x, (-1\,)v);\ x \in\ \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}, v\ \in\ \mathbb{R}^{l-1}_{no\ neg}$$

donde x es el producto único y v es el vector de insumos.

La función de producción queda definida como $f\colon \mathbb{R}^{l-1}_{no\ neg} \longrightarrow\ \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$; a partir de esta se puede caracterizar a los planes factibles como aquellos en donde $x \leq f(v)$, por el supuesto de eliminación libre. Entonces, se verifica que $y = (f(v), v)\ sii.\, y \in \partial(Y)$, por lo que el concepto de eficiencia estará ligado a esta condición; además, la forma de la frontera del conjunto de producción está determinado por la función f, haciendo coincidir ésta formulación con la interpretación intuitiva de que las posibilidades de producción de una empresa están determinadas por la tecnología que tiene disponible.

En el contexto de producción simple, los rendimientos de escala quedan caracterizados de la siguiente manera:

Crecientes: $f(\lambda v) > \lambda f(v) \forall\ \lambda > 1$

Constantes: $f(\lambda v) = \lambda f(v) \forall\ \lambda > 0$

Decrecientes: $f(\lambda v) < \lambda f(v) \forall\ \lambda > 1$

Se define a la *línea isocuanta* como el conjunto $E(x) = \left\{v\ \in\ \mathbb{R}^{l-1}_{no\ neg} \middle| x = f(v)\right\}$, es decir, el conjunto de insumos que dan como resultado un cierto nivel fijo de producto x, suponiendo eficiencia de la producción.

Se presentan algunos supuestos que garantizan la posibilidad de obtener las funciones de beneficios, demanda de insumos y costos[7] a partir de la función de producción.

> *La función de producción* $f\colon \mathbb{R}^{l-1}_{no\,neg} \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ *es continua, cuasi-cóncava y monótona creciente.*

Si se supone que la cuasi-concavidad es estricta[8], entonces es posible establecer una función que asocie a cada nivel de precios con un nivel de producción; a dicha función se le denomina función de oferta y está denotada como $y = g(p)$. La función de beneficios queda definida como $\pi(p) = py$, donde $y = g(p)$; esta función evaluada en el precio de mercado del producto será llamada excedente del productor.

Bajo supuestos anteriormente mencionados, se tiene que π es una función convexa en p; además, su derivada con respecto a las cantidades de la mercancía q será la función de oferta de q misma. A partir de la formulación anterior, el problema del productor puede expresarse como:

$$Max\ \pi = py$$
$$s.a.$$
$$x \leq f(v)$$

---

[7] *"Se hace el siguiente supuesto para establecer restricciones suficientes para la operatividad de la formulación desarrollada"* Villar (1996)

[8] Una función es cuasi-cóncava si $\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ \forall\ \lambda \in [0,1]$ se tiene que:

$$F(x) \leq F(y) \Longrightarrow F(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq F(y)$$

Bajo éste supuesto que existe una *correspondencia* de demanda.
Si la desigualdad del lado derecho de la implicación es estricta, se dice que la función es estrictamente cuasi-cóncava.
La monotonía creciente se cumple si:

$$\forall v, v' \in \mathbb{R}^{l-1}_{no\,neg}, v' \gg v \Rightarrow f(v') > f(v)$$

Si se consideran como dados los niveles de producción, se pueden obtener los requerimientos óptimos de insumos a través de la solución de

$$Min \sum_{i=1}^{l-1} p_i v_i$$
$$s.a.$$
$$f(v) \geq q$$

Ésta solución tendrá la forma $v^* = h(p; q)$, donde q se considera fijo y dado.

Se puede definir entonces la función de costos, que indicará el costo que para la empresa tendrá obtener un nivel de producción dado:

$$C(q) = \sum_{i=1}^{l-1} p_i v_i^*$$

Bajo el análisis de equilibrio parcial se suele considerar la expresión anterior agregándole aditivamente una constante que representa a los costos fijos, por lo que queda como:

$$C(q) = \sum_{i=1}^{l-1} p_i v_i^* + FC = CV(q) + FC$$

La introducción del costo fijo resulta relevante para determinar el nivel mínimo de producción que estaría dispuesta a efectuar cada empresa; cualquier producción que arroje un ingreso menor a los costos tendrá como resultado una pérdida, pero la empresa decidirá producir si el precio presente en el mercado le permite colocar un nivel de producción que resulte en un ingreso que, además de los costos variables, cubra una fracción de los costos fijos[9].

La función de costo marginal es usada para analizar los cambios en el costo con respecto a cambios en el tamaño de la producción, está dada por la derivada de la función de costo con respecto al nivel de producción:

$$MC(q) = \frac{dC(q)}{dq}$$

La función de costo medio, que expresará el costo de cada unidad de producto quedará como:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q}$$

Ésta función puede descomponerse aditivamente en fija y variable

$$AC(q) = \frac{CV(q)}{q} + \frac{CF}{q} = AVC(q) + AFC$$

Suponiendo que la función de costo medio alcanza un mínimo en un cierto nivel de producción, se tendrá que:

$$\frac{d\,AC(q)}{dq} = \frac{d\,\frac{C(q)}{q}}{dq} = \frac{MC(q)q - C(q)}{q^2} = 0$$

Despejando

$$MC(q) = \frac{C(q)}{q}$$

Entonces, en su nivel mínimo, el costo medio es igual al costo marginal.

[9] Éste razonamiento es válido si se considera que la totalidad de los costos fijos son hundidos.

En éste contexto, suponiendo que cada nivel de producción se hace a su costo mínimo, el problema del productor queda planteado como la maximización, con respecto a la cantidad producida, de la ganancia: $\pi(q) = pq - C(q)$

Por condiciones de primer orden:

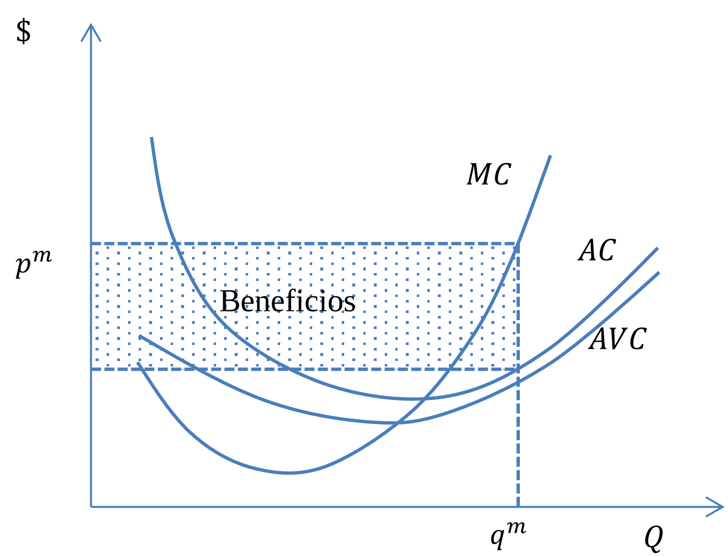
$$\frac{d\pi(q)}{dx} = \frac{d\big(pq - C(q)\big)}{dq} = p - \frac{dC(q)}{dq} = p - MC(q) = 0$$

Por lo que la igualdad entre precio y el costo marginal es una condición necesaria para la maximización; esto implica que la función de oferta de cada empresa es igual a la función de costo marginal, siempre y cuando el costo marginal supere al costo variable medio[10].

El excedente del productor estará dado por su beneficio, es decir, por la diferencia entre sus ingresos y costos.

En el siguiente gráfico se representan las relaciones anteriormente descritas:

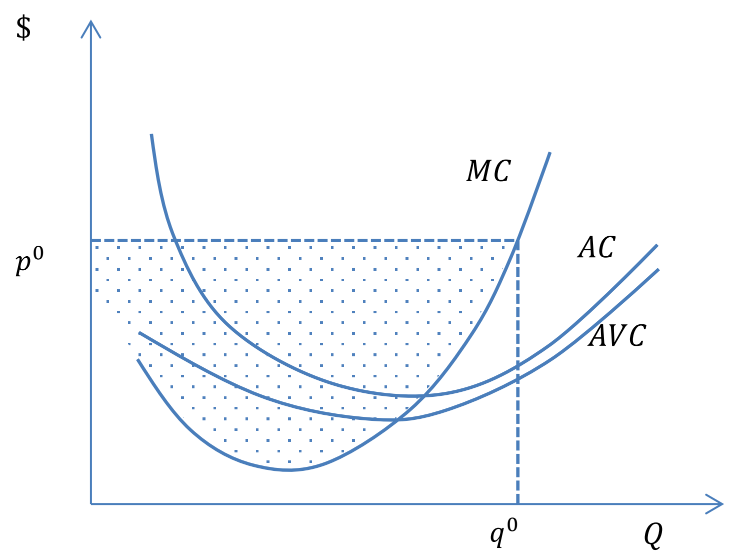
Figura 2. Costos medios, costos marginales y excedente del productor bajo producción simple



[10] El precio en el que se igualan las funciones de costo variable medio y el costo marginal es llamado precio de cierre (p^c)

Alternativamente, es posible medir el excedente del productor como el área comprendida entre los costos marginales y el precio. El ingreso se obtiene como precio por cantidad y el costo variable total se obtiene como la integral definida del costo marginal, desde cero hasta la cantidad colocada. Este planteamiento ignora los costos fijos.

Figura 3. Excedente del productor a partir del ingreso total y costo marginal.



Bienestar social en competencia perfecta

En el contexto de las estructuras de mercado, se dice que un agente es competitivo si presenta una conducta precio aceptante, es decir, si el precio está considerado como una variable exógena en el planteamiento de su problema de maximización particular. La estructura de mercado de competencia perfecta está compuesta por agentes que cumplen con lo anterior, además de una serie de supuestos adicionales como:

-Libre entrada y salida en el mercado en cuestión

-Ausencia de externalidades y costos de transacción

-Información perfecta

En éste contexto, suponiendo que cada nivel de producción se hace a su costo mínimo, el problema del productor queda planteado como la maximización, con respecto a la cantidad producida, de la ganancia:

$$\pi(q) = pq - C(q)$$

Por condiciones de primer orden:

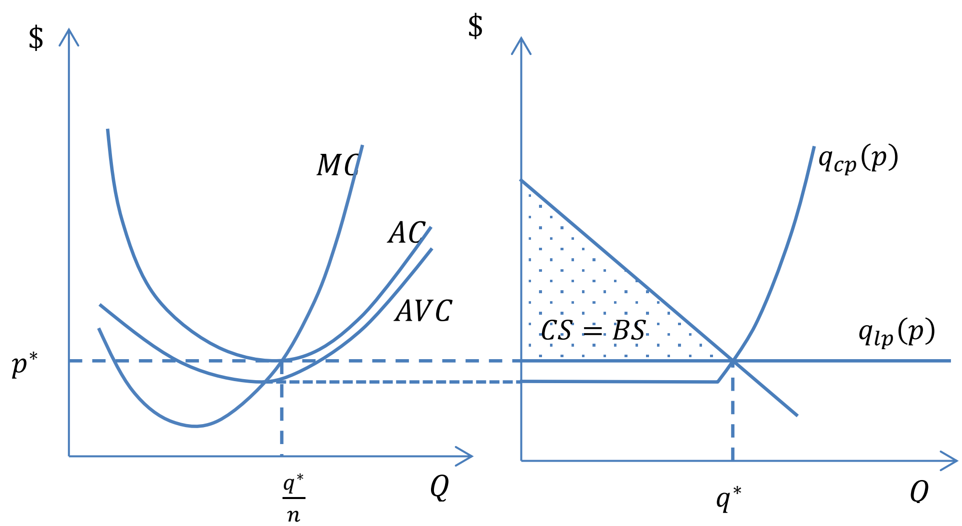
$$\frac{d\pi(q)}{dx} = \frac{d\big(pq - C(q)\big)}{dq} = p - \frac{dC(q)}{dq} = p - MC(q) = 0$$

Esta condición, como se vio antes, implica que la función de oferta de cada empresa es igual a la función de costo marginal.

Se supone que en un mercado con ésta estructura, el equilibrio de largo plazo será una pareja ordenada de precio y cantidad de (p^*, q^*) tal que el precio será igual a el costo medio mínimo de producir el nivel q^* con la mejor tecnología disponible. A continuación se esboza la argumentación usual del modo en el que surge dicho equilibrio.

Dado un nivel de precio, la oferta agregada será igual a la suma de las cantidades ofertadas por cada empresa a dicho nivel, la cual generará un "equilibrio temporal"(p, q) en su intersección con la demanda. En caso de que el precio sea mayor al costo medio de producir con la mejor tecnología, el anterior resultado tendrá como consecuencia una ganancia extraordinaria para cada productor involucrado, situación que resultará atractiva para nuevos productores que entrarán al mercado en cuestión solo si disponen de una tecnología que, para el nivel de demanda del mercado, les permitan obtener ganancias; éste proceso se replicará hasta que todas las empresas que producen satisfagan la demanda de mercado con un precio igual al costo medio de la tecnología más eficiente, lo cual implica que no habrá ganancia extraordinaria para los productores. Debido a lo anterior, la función de oferta de largo plazo será constante e igual al costo medio de producir con la tecnología más eficiente. Éste proceso se ilustra a continuación:

Figura 4. Formación del precio y beneficio social en competencia perfecta



Como consecuencia de la ausencia de beneficio para los productores se tiene que el bienestar social igualará al excedente del consumidor, además, dicho excedente será el máximo posible obtenido bajo cualquier estructura de mercado debido a que la producción se realiza con la tecnología más eficiente disponible. Es decir, el bienestar social generado por un mercado con estructura de competencia perfecta es igual a:

$$\int_{p^*}^{p^f} q(t)dt$$

La diferencia entre el bienestar social que se generaría bajo competencia perfecta y el generado bajo cualquier otra estructura de mercado es denominada *pérdida del bienestar social*[11] que es interpretado como el costo que para una sociedad representa el hecho de que un mercado no esté operando con la mayor eficiencia posible.

Bienestar social en monopolio

La estructura de mercado de monopolio está formada por consumidores competitivos que generan la usual curva de demanda con pendiente negativa respecto al precio y un productor único que dispone de información perfecta sobre dicha demanda y cuyo objetivo es el de maximizar su beneficio; la entrada a nuevos competidores está totalmente bloqueada. El beneficio que obtiene el productor monopolista, igual a la diferencia entre sus ingresos y costos se representa usualmente de la siguiente manera:

$$\pi(q) = q * p(q) - C(q)$$

[11] Éste concepto es usualmente encontrado como *deadweight loss*

En ésta expresión se representa el hecho de que el nivel de producción que elija el monopolista determinará sus costos, dada su tecnología, y el precio de mercado, dada la estructura de demanda del mercado en cuestión.

La maximización con respecto a la cantidad de la expresión anterior genera la siguiente condición de primer orden:

$$\frac{d\pi(q)}{dq} = \frac{d\big(q * p(q) - C(q)\big)}{dq} = \left(q\ \frac{d\,p(q)}{dq} + p(q)\right) - \frac{dC(q)}{dq} = 0$$

Como la elasticidad se define como $\eta(q) = \frac{dq(p)}{dp}\frac{p}{q(p)} = \frac{p(q)}{q}\frac{1}{\frac{dp(q)}{dq}}$

$$\frac{d\pi(q)}{dq} = p(q)\left(1 + \frac{1}{\eta(q)}\right) - \frac{dC(q)}{dq} = 0$$

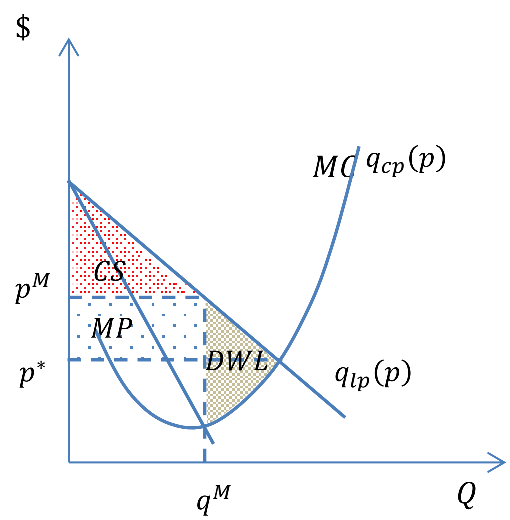
Por lo que

$$\frac{p(q) - \frac{dC(q)}{dq}}{p(q)} = -\frac{1}{\eta(q)}$$

es una condición necesaria para la maximización de beneficios del monopolista. La diferencia entre el precio y el costo marginal normalizada por el precio (en el lado izquierdo de la igualdad) es conocida como *exceso proporcional de precio sobre costo marginal* o *índice de poder de mercado de Lerner*; en la expresión anterior es posible ver que, en monopolio, solo depende de la elasticidad de la demanda.

Para hacer el análisis de la pérdida en el bienestar social o *deadweihgt loss* generado por un hipotético cambio entre una estructura de competencia perfecta y una de monopolio se suele hacer el supuesto de igualdad de funciones de costo marginal entre el conjunto de las empresas competitivas y la empresa monopolista.

Figura 5. Formación del precio y generación de la pérdida de bienestar social en monopolio



La generación de ésta pérdida es el argumento usual en contra del monopolio; una de las consideraciones que se deberán hacer para tomarla en cuenta es el hecho de que ésta varía decrecientemente con la elasticidad de la demanda del mercado (esto hará que no sea relevante en casos con elasticidades de la demanda muy elevadas). También se deberá considerar situaciones donde puedan ser aplicados argumentos a favor del monopolio como la presencia de mercados donde por cuestiones de costos es más eficiente tener un solo productor (monopolio natural), o las ventajas de conocimiento en industrias intensivas en investigación y desarrollo(I+D ó R&D)[12].

[12] Veáse Carlton & Perloff (1994) capítulo 16.

Capítulo II:

Concentración de mercado y algunas de sus medidas.

La competencia perfecta (con múltiples productores tomadores de precio y la generación de un máximo bienestar social) y el monopolio (con un solo productor formador de precio y bienestar social mínimo[13]) se asumen como casos extremos de estructuras de mercado. En este capítulo se presentará el desarrollo de dos modelos microeconómicos, que podrían considerarse como intermedios, con la intención de hacer una introducción a la relación que el bienestar social guarda con el concepto de *concentración de mercado*. Posteriormente, se detallará en la formulación de tres medidas de concentración (índices CR_m, de Herfindahl-Hirschman y de entropía) para, finalmente, abordar la caracterización general de los índices de concentración hecha por Encaoua y Jacquemin.

La concentración de mercado y el bienestar social

El modelo de Cournot con demanda lineal y costos idénticos

El modelo de Cournot supone la existencia de n empresas idénticas en costos que producen un bien homogéneo y que disponen de información perfecta sobre la demanda que éste tiene en el mercado; simultánea e independientemente, cada una elige su propio nivel de producción con conocimiento de que el precio se determinará conjuntamente a través de la demanda inversa. Este modelo, que

[13] El bienestar social mínimo derivado del ejercicio del poder de monopolio se dará en el caso de formación de un precio único; un sistema con un monopolista que produce eficientemente y que vende cada unidad a través de subastas tendrá un bienestar social máximo. La preferencia entre un sistema como el anterior o uno de competencia es un asunto de distribución del ingreso.

data de 1838, puede expresarse en términos de un *juego rectangular*[14] en el que el conjunto de jugadores estará constituido por alguno que represente a las n empresas que participan en el mercado, el conjunto de estrategias puras para cada jugador por todos los posibles niveles de producción que cada empresa puede elegir y la función de pago de cada jugador será su respectiva función de beneficio que, a través de la determinación del precio, dependerá del nivel de producción de todas empresas participantes. A continuación se presenta el desarrollo del modelo bajo los supuestos de costos idénticos entre todas las empresas y demanda lineal.

Se supone que cada una de las n empresas participantes tiene asociado un índice i, por lo que el conjunto de jugadores puede ser representado como $N = \{1,2,\ldots,n\}$.

También se hace el supuesto de que para cada una de las empresas es posible cualquier nivel de producción, por lo que $D_i = [0,\infty)$ es el conjunto de estrategias puras para la empresa con índice i; la colección $\{D_i\}_{i\in N}$ está formada por las estrategias puras de todos los jugadores.

La función de pago estará dada por la función de beneficios de cada empresa, que es la diferencia entre los ingresos derivados de la cantidad de producto que decida

[14] En Zapata Lillo (2007) un juego rectangular se define de la siguiente manera:
Un juego rectangular consta de un conjunto N, de una colección de conjuntos D_j, uno para cada j en N, y de una colección de funciones φ_j, una para cada j en N, donde $\varphi_j: \prod_{j\in N} D_j \to \mathbb{R}$.
A N le llamaremos el conjunto de jugadores, a cada D_j el conjunto de estrategias puras del jugador j y a φ_j la función de pago del jugador j. $\left(N, \{D_j\}_{j\in N}, \{\varphi_j\}_{j\in N}\right)$ denotará el juego que tiene el conjunto de jugadores N, los conjuntos de estrategias puras D_j y las funciones de pago φ_j. Usaremos la letra D para denotar al producto cartesiano $\prod_{j\in N} D_j$ (igual a $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ si N es finito y tiene n elementos). A los elementos de D les llamaremos perfiles de estrategias puras.

colocar en el mercado y los costos en los que incurrirá al producir dicha cantidad. Los costos estarán dados por:

$$C_i(q_i) = cq_i$$

donde q_i es la cantidad de producto que la empresa con índice i colocará en el mercado y c es una constante que representa el costo medio de producir cada unidad, el cual se supone idéntico para cualquier empresa y para cualquier nivel de producción. Los ingresos de cada empresa estarán determinados por la cantidad q_i que decida producir y por el precio de mercado, el cual se definirá por la función de demanda inversa:

$$p(q_1, q_2, \dots, q_n) = a - b\left(\sum_{i \in N} q_i\right)$$

Donde a representa el mínimo precio al que la cantidad demandada es cero, y b es la disminución que presentará el precio ante el incremento de la cantidad ofertada en una unidad de producto; $a, b > 0$.

Debido a lo anterior, la función de beneficios de la empresa i estará dada por:

$$\pi_i = \left(a - b\left(\sum_{j \in N} q_j\right)\right) q_i - cq_i$$

Entonces, el modelo de oligopolio de Cournot es análogo al juego definido por:

$$(N, \{D_i\}_{i \in N}, \{\pi_i\}_{i \in N})$$

El *equilibrio de Nash en estrategias puras* se define en Zapata Lillo (2007) de la siguiente manera[15]:

> *Se dice que σ^*en D es un equilibrio de Nash en estrategias puras (ep), si para cada jugador j en N se cumple que:*
>
> $$\varphi_j(\sigma^*) \geq \varphi_j\left(\sigma^*|\sigma^j\right) \text{ para toda } \sigma^j \text{en } D_j$$

Para comenzar el análisis del modelo de Cournot se hace uso del concepto de mejor respuesta, definido también en Zapata Lillo (2007) como:

> *Dado un perfil de estrategias $\hat{\sigma}$ en D, decimos que $\tilde{\sigma}^j$ en D_j es una mejor respuesta del jugador j a $\hat{\sigma}$, si*
>
> $$\varphi_j\left(\hat{\sigma}\,|\tilde{\sigma}^j\right) \geq \varphi_j\left(\hat{\sigma}\,|\sigma^j\right) \text{ para toda } \sigma^j \text{ en } D_j$$

Este concepto es útil debido a que un perfil de estrategias σ^* es un equilibrio de Nash (ep) si y solo si σ^{*j} es una mejor respuesta de j a σ^* para toda $j \in N$.

Debido a lo anterior, se procede a obtener las mejores respuestas de cada empresa maximizando su beneficio con respecto a su producción, dado la producción de las otras empresas:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = \frac{\partial\left(q_i * \left(p\left(\sum_{j\in N} q_j\right)\right) - C_i(q_i)\right)}{\partial q_i} = a - b\left(\sum_{j\neq i} q_j\right) - 2bq_i - c = 0$$

Despejando q_i

[15] La expresión $(\sigma^*|\sigma^j)$ se refiere a un perfil de estrategias igual al perfil σ^* excepto por un cambio en la estrategia correspondiente al jugador j.

$$q_i = \frac{a - \ b\left(\sum_{j \neq i} q_j\right) - c}{2b}$$

Por lo que la función de mejor respuesta queda definida como:

$$R_i = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}\left(\sum_{j \neq i} q_j\right)$$

Se verifica que el anterior resultado corresponde a un máximo ya que

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} = -2b$$

El razonamiento usual para encontrar el equilibrio es el de hacer inicialmente una conjetura de simetría entre las cantidades a producir ($q = q_i \ \forall \ i \in \{1,2, \ldots, N\}$) derivada de la igualdad de las funciones de costo, la cual implicará:

$$q = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}(n - 1)q$$

Por lo que las cantidades de equilibrio de cada empresa quedarán como:

$$q^C = \frac{a - c}{(n + 1)b}$$

En equilibrio, la cantidad agregada será:

$$Q^C = \left(\frac{a - c}{b}\right)\left(\frac{n}{n + 1}\right)$$

Que hará que el precio sea:

$$p^C = a - b(Q^C) = \frac{a + nc}{n + 1}$$

Y las ganancias de cada empresa:

$$\pi_i^C = \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b} = b(q^C)^2$$

A partir del precio que se genera en el equilibrio se obtiene que:

$$\lim_{n\to\infty} p^C = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} + \frac{nc}{n+1} = c$$

Es decir, en un mercado constituido por empresas con costos idénticos y que compiten fijando cantidades, un mayor número de empresas tendrá como consecuencia que el precio y la cantidad ofrecidas en el mercado, así como el bienestar social generado, se aproximarán a los de determinados por la competencia perfecta.

Modelo de Cowling y Waterson

La asociación entre el número de empresas participantes en una industria y el desempeño de ésta en términos del bienestar social generado se desarrolla en el modelo anterior sobre la base de costos idénticos entre las empresas participantes que tienen como consecuencia niveles de producción idénticos, por lo que no es posible conceptualizarlo en industrias con asimetrías en las cuotas de mercado. El modelo propuesto en Cowling & Waterson (1976) superó éste inconveniente al incluir en su formulación la posibilidad de diferencias en los costos marginales y considerar como medida del desempeño de la industria el promedio de los márgenes precio costo ponderado por las participaciones de mercado; el desarrollo básico de dicho modelo se presenta a continuación:

Se suponen n empresas productoras de un bien homogéneo, cada una generará un nivel de producción determinado denotado por q_i. La función de demanda inversa queda expresada como:

$$p(Q) = p\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)$$

Las empresas están diferenciadas entre sí a través de su costo marginal, por lo que las condiciones de primer orden para la maximización de beneficios pueden escribirse como:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p(Q) + q_i f'(Q)\frac{\partial Q}{\partial q_i} - c'(q_i) = 0$$

La sensibilidad de la producción total con respecto a la producción de la empresa $i \frac{\partial Q}{\partial q_i} = 1 + \frac{\partial \sum_{j\neq i} q_j}{\partial q_i}$ se escribe como $1 + \lambda_i$, con lo que la igualdad anterior queda como:

$$p(Q) + q_i f'(Q)(1 + \lambda_i) - c'(q_i) = 0$$

Multiplicando por q_i, haciendo la suma sobre las n empresas y multiplicando por uno $\left(\frac{Q^2}{Q^2}\right)$ el segundo término del lado izquierdo de la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i p(Q) + \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2}{Q^2} f'(Q)(1 + \lambda_i)Q^2 - \sum_{i=1}^{n} q_i * c'(q_i) = 0$$

Dividiendo por los ingresos globales de la industria, lo anterior puede re-escribirse como:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i p(Q) - \sum_{i=1}^{n} q_i * c'(q_i)}{Q * p(Q)} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i}{Q}\right)^2 \frac{f'(Q)Q^2}{Q * p(Q)} (1+\mu)$$

Donde $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i^2}{\sum_{i=1}^{n} q_i^2}$

Asumiendo que las empresas tienen costos marginales constantes iguales a su costo variable medio, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{Q} * \frac{p(Q) - AC_i}{p(Q)} = -\frac{H}{\eta}(1+\mu)$$

Es decir, el exceso promedio ponderado de los márgenes precio costo depende de la elasticidad de la demanda y de H, que es el *índice de Herfindahl-Hirschman*, una medida de concentración de mercado.

La relación, propuesta teóricamente en el modelo anterior, entre bienestar social derivado de la participación de los agentes en algún mercado y la estructura éste en términos de su concentración ha sido objeto de múltiples estudios empíricos[16], que coinciden en la existencia de alguna relación entre éstos conceptos, por lo que se asume la relevancia de la concentración en el análisis de las industrias. A continuación se hará una revisión de tres medidas de concentración ampliamente utilizadas.

Una consideración sobre la simetría de las cuotas de mercado

La relación teóricamente representada en los dos modelos anteriores entre el bienestar social y la concentración tiene que ser abordada tomando en cuenta una

[16] Véase el capítulo 8 de Carlton & Perloff (1994) y el capítulo 7 de Martin (1994)

consideración. Como se revisará más adelante, un componente de la concentración es la simetría de las cuotas de mercado: si se comparan dos mercados con el mismo número de empresas participantes, el menos concentrado será aquel que presente una mayor simetría en sus cuotas; pero en Motta (2004), la simetría de las cuotas de mercado se presenta como un factor que facilita la colusión. Motta dice que esta idea se encuentra apoyada en algunos argumentos informales (por ejemplo, el de que los individuos que estan en posiciones similares podrían llegar fácilmente a un acuerdo que les convenga a todos) y cita dos modelos formales en los que esta se desarrolla con diferentes enfoques. El primero es el de Compte, Jenny y Rey[17], en el que las empresas elaboran productos homogéneos y tienen costos idénticos pero capacidades diferentes. En este modelo, la empresa con mayor tamaño tiene el mayor incentivo a romper la colusión (una empresa cuya capacidad es superada cuando el precio está en su nivel de colusión no tiene incentivo a bajar su precio), mientras que las empresas pequeñas tienen dificultades para establecer un castigo (la restricción en capacidad hace que no les sea posible amenazar creiblemente a la empresa que rompe el acuerdo). Una distribución más igualitaria de capacidades ayudaría a formar un acuerdo colusivo. Si las posiciones de las empresas fueran más similares, sus incentivos a romper el acuerdo y a establecer castigos serían más acordes y la colusión podría ser más sostenible.

[17] Compte, O., F. Jenny y P. Rey. 2002. Capacity Constraints, Mergers and Collusion. *European Economic Review*. 46:1-29; citado en Motta (2004).

El segundo modelo es de Kühn y Motta[18]. En él se supone la existencia de empresas fabricantes de múltiples productos. Entre más grande sea una empresa (con mayor variedad de productos), tiene mayor incentivo a mantener los precios altos. De manera similar a una empresa que tiene una cuota grande del mercado, para la que una reducción marginal del precio afecta a las unidades infra-marginales, en este modelo, una reducción del precio en un producto afectaría negativamente al los otros productos. A su vez, una empresa pequeña (con una menor variedad de productos) tiene un fuerte incentivo a romper un acuerdo colusivo y beneficiarse de los precios altos, disminuyendo su precio para capturar demanda de todos los productos de las empresas rivales. Por lo tanto, en este modelo, la empresa más grande tiene más dificultad para establecer un castigo mientras que las empresas pequeñas tienen incentivo a romper un eventual acuerdo colusivo mediante una disminución en el precio.

Los mecanismos de estos dos modelos son diferentes pero tienen el mismo resultado: una distribución más igualitaria de los activos relaja las restricciones de los incentivos, tanto de las empresas grandes como de las pequeñas y ayudaría a la formación de acuerdos colusivos.

Algunas medidas de concentración

Las medidas que serán analizadas son índices que se calculan en base a las cuotas de mercado, es decir, en base a las proporciones de la producción total

[18] Kühn, K. y M. Motta. 1999. “The Economics of Joint Dominance”. Manuscrito no publicado; citado en Motta (2004).

que cada empresa participante coloca en el mercado considerado como relevante, en un periodo determinado. Si se considera que cada empresa participante tiene asociado un índice $i,\ i \in \{1,2,\dots,n\}$, éstas cuotas estarán denotadas por $s_i = \frac{q_i}{Q}$, donde q_i es el total de unidades de producción colocadas en el mercado relevante por la empresa con índice i en el periodo de interés y Q es el total de unidades de producción colocadas conjuntamente por todas las empresas consideradas, es decir $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$.

El índice CR_m

Las siglas CR del índice CR_m se refieren al término *Concentration Ratio*; la m resulta del hecho que el índice CR_m es calculado a partir de las m cuotas de mercado más grandes. En Utton (1970) se menciona que en el Reino Unido fue ampliamente utilizado el índice CR_3, mientras que en EEUU se disponía de información para las 4, 8 y 20 empresas más grandes además de que: "Quizá la medida más ampliamente utilizada hasta la fecha haya sido el *Concentration Ratio*"[19]. El índice CR_4 fue usado en los lineamientos de fusiones en EEUU de 1968 hasta 1992[20].

El índice CR_m se define como la suma de las m mayores cuotas de mercado:

$$CR_m = \sum_{i=1}^{m} s_{(i)}$$

[19] Utton (1970), pág. 47
[20] Shy (1995)

Donde $s_{(i)}$ es la i-ésima mayor cuota de mercado obtenida por las empresas participantes en el mercado de interés, $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$; $s_{(1)} \geq s_{(2)} \geq s_{(3)} \geq \cdots \geq s_{(m)}$.

Asumiendo que en el mercado en cuestión existan n empresas, este índice puede tomar valores en el intervalo $[\frac{m}{n}, 1]$.

Una desventaja atribuida a éste índice es que para industrias con distribuciones de cuotas de mercado evidentemente diferentes el índice puede resultar igual; en Shy (1995) se presenta un ejemplo en el que se supone la existencia de dos industrias con distribuciones de cuotas de mercado como las de la siguiente tabla:

Industria\\s_i	s_1	s_2	s_3	s_4, s_5	$s_6, \dots, s_8$	s_9, s_{10}	$\boldsymbol{CR_4}$
Industria 1	.6	.1	.05	.05	.05	0	.80
Industria 2	.2	.2	.2	.2	0	0	.80

Es posible ver que, aunque CR_4 es igual en las dos industrias, la diferencia en sus respectivas cuotas de mercado más grandes podría hacer que se esperaran comportamientos de mercado diferentes.

En Utton (1970) se presenta un ejemplo resumido en el siguiente cuadro:

Industria\\CR_2, CR_4	CR_2	CR_4
Industria 1	.5	.6
Industria 2	.4	.75

A partir de éste ejemplo se concluye que al usar ésta medida “no está claro cuál de éstas dos industrias es la más altamente concentrada”[21]. Las dos situaciones presentadas anteriormente se pueden conceptualizar en términos de la *curva de concentración industrial*, que es la gráfica de la relación dada por:

$$CI(i) = \sum_{j=1}^{i} s_{(j)}$$

Es posible notar que $CI(i)$ es igual a CR_m con $m = i$.

Las dificultades del uso del índiceCR_m encontradas en los ejemplos presentados se identifican con situaciones en donde, para alguna k ocurra que:

$$CI^1(k) > CI^2(k) \text{ y } CI^1(k+1) = CI^2(k+1)$$

o bien:

$$CI^1(k) > CI^2(k) \text{ y } CI^1(k+1) < CI^2(k+1)$$

Éste tipo de situaciones son identificadas como *intersecciones de la curva de concentración industrial*; el uso del índice CR_mpara distinguir cuál es la más concentrada de entre dos industrias solo será válido en casos donde esto no ocurra.

[21] Utton (1970), pág. 50

El índice de entropía

El desarrollo de éste índice, en el contexto de la teoría de la información, parte del concepto de *sorpresa* asociada a la ocurrencia de un evento, la cual se representa mediante una función de la probabilidad de observar dicho evento[22].

Axiomáticamente se establece que la función sorpresa deberá cumplir con:

i) *La sorpresa asociada a la ocurrencia de un evento que se sabe sucederá con seguridad, es nula*

$$S(1) = 0$$

ii) *Entre menos probable sea un evento, mayor será la sorpresa que generará al ocurrir*

$$p < q \Longrightarrow S(p) > S(q)$$

iii) $S(p)$ es una función continua de p

iv) Suponiendo dos eventos independientes, la sorpresa generada por su ocurrencia conjunta será la suma de las sorpresas.

$$S(pq) = S(p) + S(q)$$

A partir del Axioma *iv)*, se tiene que:

$$S(p \cdot p) = S(p^2) = 2S(p)$$

Inductivamente:

$$S(p^m) = mS(p)$$

[22]Los eventos son denominados símbolos, es decir, expresan la transmisión de unidades de información y la sorpresa es una medida de la relevancia o cantidad de información que provee la observación de algún símbolo por parte del receptor del mensaje.

También por el axioma *iv)*:

$$S(p) = S\left(\prod_{i=1}^{n} p^{1/n}\right) = nS\left(p^{1/n}\right)$$

De las dos igualdades anteriores:

$$S\left(p^{m/n}\right) = \frac{m}{n} S(p)$$

Por Axioma iii):

$$S(p^x) = xS(p) \ \ \forall x \in \mathbb{R}_{no\ neg}$$

Cualquier p se puede escribir como $p = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, con $x \in [0, +\infty) \Longrightarrow x = -\log_2 p$

Debido a lo anterior:

$$S(p) = S\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = x\, S\left(\frac{1}{2}\right) = -\,\mathrm{C} \log_2 p$$

Donde $C = S\left(\frac{1}{2}\right) > 0 = S(1)$, por los axiomas i) y ii)

Suponiendo $C = 1$, si se considera una variable aleatoria X, que presentará uno de los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ con probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_n$, el valor esperado de la sorpresa derivada de la observación de X será:

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(p_i)$$

Si la expresión anterior se considera como un índice, el cambio de base 2 a base e no cambiará sus propiedades, por lo que el índice de entropía se puede definir como:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \, ln(p_i)$$

El mínimo valor que puede tomar éste índice es 0, que corresponde a una situación de monopolio y el máximo es $\ln n$, que se alcanza en una situación de simetría total de cuotas de mercado; es por ésta razón que al índice de entropía se le considere una medida *inversa* de la concentración de mercado por lo que varios autores proponen un cambio al índice para para que su forma final sea:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, ln(p_i)$$

Al usarse en el contexto de medición de la concentración de mercado, las probabilidades de ocurrencia de algún símbolo se sustituirán por las cuotas de mercado asociadas a cada uno de los oferentes participantes. La utilidad del uso de éste índice para medir la concentración de mercado radica en sus propiedades de sensibilidad con respecto a las cuotas de mercado y al número de oferentes, y no directamente de la interpretación de situaciones propias de la economía en términos de la teoría de la información[23].

[23] Al usar el índice para medir la concentración el concepto de *símbolo* se sustituye completamente por el de *empresa oferente*, con lo que se pierde toda referencia a la transmisión de mensajes y, con esto, la relación con la teoría de la información. Por lo anterior se considera errónea la interpretación del índice de entropía como una medida de *la incertidumbre a la que se enfrentan los agentes al participar en el mercado*.

El índice de Herfindahl-Hirschman

En 1945 Albert O. Hirschman, en su libro *National Power and the Structure of Foreign Trade* propuso un índice para medir la concentración del valor del comercio exterior de un país entre el conjunto de mercancías comerciadas. El índice tenía la siguiente forma funcional:

$$I_H = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i}{Q}\right)^2}$$

Hirschman propuso éste índice argumentando que era sensible tanto a la desigualdad de las proporciones del valor del comercio de cada mercancía como a número de mercancías consideradas, a diferencia de los índices derivados de la curva de Lorenz, que solo son sensibles a la desigualdad de las proporciones.

Cinco años después, sin conocer la obra de Hirschman, Orris C. Herfindahl propuso en su tesis doctoral, titulada *Concentration in the U.S. Steel Industry*, un índice idéntico excepto por la raíz cuadrada.

A partir de entonces, en las aplicaciones de concentración industrial, el índice comenzó ser llamado índice de Herfindahl; posteriormente, cuando se conoció la autoría de Hirschman a través del artículo *The Paternity of an Index* en 1964, se le nombró índice de Herfindahl-Hirschman. El índice quedó definido como:

$$I_{HH} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i}{Q}\right)^2$$

El valor mínimo de éste índice, dado un cierto número de empresas participantes, es $1/n$ y surgirá cuando las cuotas de mercado de todas sean iguales.

El valor máximo de éste índice es uno y se dará en el en caso de un mercado abastecido por un monopolista.

En Adelman (1969) se muestra que, en mercados con empresas cuyas cuotas de mercado son iguales, el índice tiene la propiedad de ser igual al inverso del número de empresas participantes en el mercado; a continuación se presenta la argumentación que se hizo para llegar a la conclusión anterior.

La varianza de las cuotas de mercado está dada por:

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{q_i}{Q}\right)^2$$

Desarrollando:

$$n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2q_i}{nQ}+\left(\frac{q_i}{Q}\right)^2\right) = I_{HH}-\frac{1}{n}$$

Reacomodando:

$$I_{HH} = n\sigma^2 + \frac{1}{n}$$

Con cuotas de mercado iguales, la varianza será cero, por lo que la expresión anterior quedará como:

$$I_{HH} = \frac{1}{n}$$

Se argumenta que la anterior igualdad provee una interpretación más intuitiva del índice.

En Kelly (1981) se desarrolla otra interpretación del índice de Herfindahl-Hirschman cuyo desarrollo se esboza a continuación.

Se considera la igualdad:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2}(nI_{HH}-1)$$

Se argumenta que la varianza no tiene por sí misma una interpretación económica por lo que se introduce el concepto de *monopolio virtual*, que consiste en suponer un mercado en el que prevalecen $n-1$ empresas con una cuota de mercado marginal y una empresa que tiene casi la totalidad del mercado. Si se representa al vector de cuotas de mercado como:

$$S_{mv} = (1-\epsilon(n-1), \epsilon, \dots, \epsilon)$$

Bajo el supuesto de monopolio virtual:

$$\lim_{\epsilon \to 0} I_{HH}(S_{mv}) = 1$$

Por lo que:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sigma^2 = \frac{n-1}{n^2}$$

Se propone una medida denominada *dispersión estandarizada* dada por el cociente de la varianza observada en las cuotas de mercado y la de un mercado con el mismo número de empresas bajo el supuesto de monopolio virtual, es decir:

$$\sigma_*^2 = \frac{nI_{HH} - 1}{n-1}$$

Por lo que el índice de Herfindahl-Hirschman queda como:

$$I_{HH} = \frac{\sigma_*^2(n-1)+1}{n}$$

En ésta expresión se puede distinguir que el I_{HH} depende de dos factores explícitamente identificados que, según Kelly, "tienen una clara interpretación intuitiva"[24]: la cantidad de empresas participantes en el mercado y de la variación de las cuotas de mercado (representada como la dispersión estandarizada).

[24] Kelly (1981), pág. 53

Caracterización de los índices de concentración según Encaoua y Jacquemin

En su artículo *Degree of Monopoly, Indices of Concentration and Threat of Entry* publicado en *International Economic Review* en febrero de 1980, David Encaoua y Alexis Jacquemin postulan que todo índice de concentración deberá presentar una serie de propiedades para considerarse una medida adecuada del grado de monopolio.

Las propiedades se dividen en dos grupos que se presentan a continuación:

n *constante*

p_1 La transferencia de una parte de una cuota de una firma a otra más grande no deberá decrementar la medida.

p_2 Para un número dado de firmas, la medida tendrá su valor mínimo cuando las firmas tengan cuotas iguales.

p_3 Si dos industrias compuestas por el mismo número de productores son tales que la cuota agregada del las k firmas más grandes en la primer industria es mayor o igual que la cuota de las k mayores en la segunda, para $k = 1, \dots, n$, la misma desigualdad se deberá presentar entre las medidas de concentración de las dos industrias

n *variable*

p_4 En caso de fusión de dos o más firmas, la medida de concentración no debe decrecer

p_5 En caso de industrias compuestas por firmas de tamaño igual, la medida de concentración no deberá decrecer ante un aumento del número de firmas

Adicionalmente, se propone que las medidas de concentración deberán cumplir con la siguiente condición:

Simetría

$C_n(q_1, \ldots, q_n) = C_n(q_{\pi(1)}, \ldots, q_{\pi(n)})$ para cualquier permutación π de $\{1,2, \ldots n\}$

Encaoua y Jacquemin demostraron que toda medida que presente la propiedad p_1 presentará también las propiedades p_2 y p_3, además de que la propiedad p_5 será verdadera si se cumplen p_2 y p_4, por lo que para comprobar que una medida de concentración cumple con todas las propiedades propuestas basta con demostrar que cumple con p_1 y p_4.

También obtuvieron condiciones suficientes para que una medida cumpla con lo anterior. Si una medida de concentración tiene la forma:

$$C_n(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^{n} q_i \, h(q_i)$$

con $h(q_i)$ una función que asigna una ponderación a la cuota i-ésima, y se define $H(q) = h(q)$,entonces:

1) Si la función H es convexa, p_1 será satisfecha por la medida $C_n(q_1, \ldots, q_n)$
2) Si la función h es no decreciente, p_4 será satisfecha por la medida $C_n(q_1, \ldots, q_n)$

A partir de lo anterior, Encaoua y Jacquemin demuestran que los índices $\mathrm{CR_m}$, de Herfindahl-Hirschman, y de entropía son medidas que cumplen las propiedades $\mathrm{p_1}$ a $\mathrm{p_5}$.

Capítulo III:
Propuesta de una medida complementaria al índice de Herfindahl-Hirschman

En éste capítulo se presentará una propuesta de medida complementaria al índice de Herfindahl que servirá para proveerle de una interpretación en términos de la desigualdad de las cuotas de mercado. Se comenzará exponiendo los supuestos en su formulación para, posteriormente, presentar su desarrollo.

Observación sobre las medidas de concentración.

Es importante resaltar que los valores que toman los índices de Herfindahl Hirschman y de entropía tienen un carácter puramente ordinal, es decir, sus magnitudes no pueden ser proporcionalmente comparables. Además, debido a que cada índice representa un criterio particular para establecer un orden, resulta posible que al comparar dos mercados el orden de los niveles de concentración observados no sea consistente entre las diferentes medidas de concentración.

Supóngase dos industrias con cuotas de mercado como las de la siguiente tabla:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
I_1	0.80	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
I_2	0.79	0.0525	0.0525	0.0525	0.0525	0

Los índices de entropía y Herfindahl-Hirschman son:

	I_{HH}	H
I_1	0.6480	-0.8222
I_2	0.6351	-0.8050

Se puede observar que, según el índice de Herfindahl-Hirschman, la industria I_1 tiene un grado de concentración mayor al de la industria I_2; el índice de entropía indica lo contrario. Aunque, en general, ambos índices aumentan su valor ante la presencia de un menor número de empresas, el decremento causado por una reducción en la cuota de mercado de la empresa de mayor tamaño tuvo un mayor impacto en el índice de Herfindahl-Hirschman debido a la ponderación que, por su forma funcional, este índice otorga a cuotas altas.

Se pretende que la medida presentada a continuación funcione como un criterio general, con un significado proporcional, para evaluar la desigualdad de las cuotas de mercado.

El supuesto de cuotas de mercado paramétricamente simétricas

Generalmente, el nivel de concentración de mercado se modela como un fenómeno completamente determinado por algún conjunto de factores (como la tecnología disponible para la producción, el tamaño del mercado y la efectividad de la organización gerencial al interior de las empresas[25]), pero también ha sido abordado desde el enfoque estocástico. Por ejemplo, en Kanagala, Sahni,

[25] Véase el capítulo 4 de Scherer & Ross (1990)

Sharma, Gou, & Yu (2004) se considera que: "…las cuotas de un mercado con n participantes consisten en n variables aleatorias con n medias y desviaciones estándar diferentes", en Nauemberg, Alkhamisi, & Andrijuk (2004) se dice que: "con el propósito de modelar la *cuota de mercado acumulativa*[26]… la distribución de Bradford es una alternativa razonable" y en De Vany & Lee Hong Kim (2003) se afirma que las cuotas de mercado siguen un movimiento estocástico *Pareto-Lévy*.

Con el afán de desarrollar una medida complementaria al índice de Herfindahl-Hirschaman, en éste trabajo se le supondrá que las cuotas de mercado un son generadas por un experimento probabilístico en el que el total de las unidades de producto vendidas (Q) y el número de oferentes (n) presentes en un mercado durante un cierto periodo son fijos y están determinados exógenamente. Dado lo anterior, si a cada uno de los n oferentes presentes en una industria se les asocia un índice i, $i \in \{1,2,\dots,n\}$, se supondrá que cada una de las Q unidades de producto a ser vendidas en el mercado tiene asociada una probabilidad p_i de haber sido colocada por el oferente i y que ningún oferente puede llegar al final del periodo sin haber vendido por lo menos una unidad de producto[27]. Lo anterior implica que el vector formado por las ventas de las empresas participantes en un mercado durante un periodo determinado tiene una distribución multinomial,[28] condicionado a que ninguna de las entradas de dicho vector es igual a cero. La

[26] Éste concepto es equivalente al índice CR_m

[27] Se hace ésta precisión con el fin de que no se presenten ambigüedades en el número de participantes de mercado.

[28] La distribución multinomial es una distribución conjunta que surge de suponer una secuencia de Q experimentos independientes e idénticos entre sí; cada experimento producirá uno de entre n posibles resultados, los cuales tienen probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_n$ de aparecer, $p_i > 0$ y $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
Si se denota como q_i al número de experimentos que arrojaron el resultado i, se tendrá que $\sum_{i=1}^{n} q_i = Q$ y:

$$\mathbb{P}\{Q_1 = q_1, Q_2 = q_2, \dots, Q_n = q_n\} = \frac{Q!}{q_1!\, q_2! \dots q_n!} p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_n^{n}$$

elección de éste modelo de probabilidad se debe a que cualquier simulación del comportamiento de las cuotas de mercado arrojará que éstas se encuentran en el intervalo abierto que va de cero al uno ($n \geq 2$), y sumarán 1; lo anterior es considerado una ventaja sobre los modelos donde se supone que cada cuota es independiente, como en el caso de Kanagala, Sahni, Sharma, Gou, & Yu (2004) donde, al suponer cuotas distribuidas normalmente, no se garantiza que las éstas tengan el comportamiento adecuado en términos de su signo (puede haber cuotas negativas) ni de su magnitud (puede haber cuotas mayores que 1).[29]

En éste contexto, el supuesto de *cuotas mercado paramétricamente simétricas (cmps)* consistirá en dar por hecho la igualdad entre los parámetros p_i del modelo multinomial que representa a las ventas realizadas en el mercado. Este supuesto dará la flexibilidad de suponer igualdad de condiciones de competencia entre las empresas participantes en el mercado y, simultáneamente, ventas que resulten en cuotas que no son idénticas.

Distribución del índice de Herfindahl-Hirschman bajo el supuesto de cuotas de mercado paramétricamente simétricas

La medida a proponer se desarrollará tomando en cuenta la distribución de probabilidad que tendría el índice de Herfindahl-Hirschman suponiendo igualdad entre los parámetros p_i del modelo multinomial que representa a las ventas hechas en un mercado durante un periodo determinado, es decir el supuesto de *cmps*, representado como:

$$(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \sim Multinomial(Q, p_1, p_2, \dots, p_n) \; dado \; que \; Q_i > 0, con \; p_i = \frac{1}{n}$$

[29] Lo anterior puede ocurrir a pesar de que se restrinja a que la suma de las cuotas modeladas sea uno

La distribución del índice de Herfindahl-Hirschman, bajo la hipótesis anterior se puede denotar como:

$$F_{I_{HH}}(x) = \mathbb{P}\{I_{HH} \leq x\} = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \,|I_{HH}(\omega) \leq x\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\left(Q_1 = q_1, Q_2 = q_2, \dots, Q_n = q_n\right) \mid \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_i}{Q}\right)^2 \leq x\right\}$$

Es decir, para evaluar la función de distribución del índice de Herfindahl-Hirchman en un algún $x \in (0,1)$ será necesario conocer la probabilidad asociada al conjunto de vectores posiblemente resultantes de un proceso multinomial tales que el índice evaluado en éstos sea menor que x. Se propone el siguiente algoritmo para lograr lo anterior[30]:

-Obtener todos los vectores $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ tales que $q_i \in \mathbb{N}/\{0\}$ y $\sum_{i=1}^{n} q_i = Q$

-Calcular para cada uno de éstos el índice de Herfindahl-Hirschman.

-Calcular la probabilidad de obtener cada uno de éstos vectores bajo un proceso multinomial con $p_i = \frac{1}{n}$.

-Observar los diferentes valores que puede obtener el índice de Herfindahl-Hirschman y asociarle a cada uno la suma de las probabilidades de todos los vectores que lo generan.

[30] Se propone éste algoritmo para obtener la función de distribución en lugar de un proceso analítico ya que no fue posible obtener una fórmula que asociara al índice de Herfindahl-Hischman con su probabilidad debido a la existencia de vectores idénticos en tanto en la suma de sus entradas como en el índice y cuyas entradas provienen de diferentes subconjuntos de los naturales; por ejemplo las entradas de los vectores $(9,9,2)$ y $(11,6,3)$ suman 20 y ambos presentan un índice de Herfindahl-Hirschman de 166.

-Considerando que la suma de las probabilidades asociadas a cada índice es la probabilidad de obtener un vector que no contenga ningún cero en sus entradas, dividir las probabilidades anteriormente obtenidas de todos los vectores entre dicha suma, para obtener así la probabilidad que cada valor del índice tendrá en el espacio $dado\ que\ Q_i > 0$ que corresponde a la hipótesis nula.

El algoritmo anterior se implementó en una función diseñada para ser ejecutada en el paquete *MATLAB*. A continuación se presenta el código de dicha función[31]:

```
%Función que relaciona el índice de Herfindahl-Hirschman con sus funciones
%de masa y distribución bajo el supuesto de cuotas de mercado paramétricamente
%simétricas.
%Por Fernando Rodríguez Ramos

function [F]= ihhp(N,Q)
%Mediante la función 'DIOPHANTINE' se obtiene una matriz 'A' cuyos vectores
%fila son todas las posibles soluciones enteras positivas de la ecuación
%1*q1+1*q2+...+1*qN=Q, es decir,los posibles resultados de ventas de las N
%empresas que participaron en un mercado en el que se colocaron Q unidades
%de producto, en un periodo determinado.
A=diophantine(ones(1,N),Q,1:Q);
%Se guarda como 'B' la matriz que resulta de adicionar a 'A' dos columnas;
%una con el índice de Herfindahl que se obtendría con cada resultado de
%ventas y otra con la probabilidad puntual que cada uno de estos resultados
%tiene si se le considera como obtenido de un experimento multinomial de
%parámetros(Q,p1=p2=...=pN=1/N)
B=[A (1/Q^2)*sum(A.^2,2) mnpdf(A,(1/N)*(ones(N,1)))];
%Se ordena 'B' ascendentemente de acuerdo al valor del índice de Herfindahl
%y se guarda como 'C'
[m,n]=size(B);
C=sortrows(B,n-1);
%Se obtiene la probabilidad de que un ensayo de un experimento multinomial
%produzca un vector sin ceros a partir de la suma de las probabilidades de
%todos los posibles vectores con entradas de enteros positivos.
d=sum(B(:,n));
%A la matriz ordenada ascendentemente se le adiciona una columna con la
%probabilidad puntual que tiene cada vector en el espacio "dado que ninguna
%entrada es cero";también se agrega la columna con la suma acumulada de
%dichas probabilidades
Z=[C (1/d)*C(:,n) (1/d)*(cumsum(C(:,n)))];
% Se genera una matriz cuya primer columna está formada por los diferentes
% valores del índice de Herfindahl, sin repetición.
```

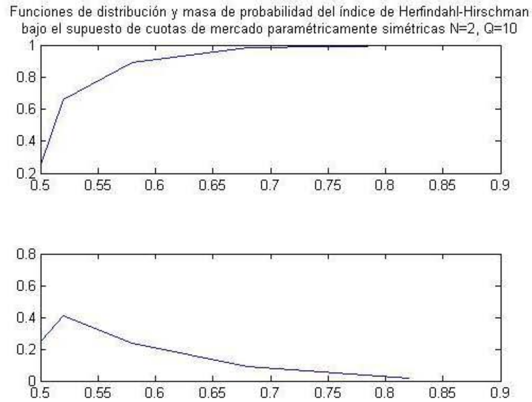
[31] La función 'diophantine.m' usada para generar los vectores que, en éste caso, representan a las ventas de una industria fue tomada del foro virtual *MATLAB Newsgroup* localizado en: http://www.mathworks.com/matlabcentral/newsreader/view_thread/239424

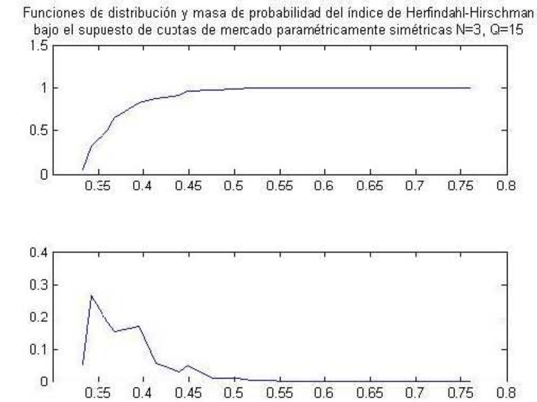
```
F=[unique(Z(:,n-1)) ones(size(unique(Z(:,n-1)),1),1) zeros(size(unique(Z(:,n-1)),1),2)];
%Se llenan la segunda columna de la matriz con el número de vectores que
%tienen asociado el valor del índice de Herfindahl-Hirschman que está en la
%primera columna, la tercera con sus probabilidades acumuladas y la cuarta
%con su probabilidad puntual.

j=1;
for i=1:m-1
if Z(i,n-1)==Z(i+1,n-1)
        F(j,2)=F(j,2)+1;
else
        F(j,3)=Z(i,n+2);
j=j+1;
end
end
F(j,3)=Z(m,n+2);

for i=2:size(unique(Z(:,n-1)))
    F(i,4)=F(i,3)-F(i-1,3);
end
F(1,4)=F(1,3);
subplot(2,1,1); plot (F(:,1),F(:,3))
title({'Funciones de distribución y masa de probabilidad del índice de Herfindahl-Hirschman';['bajo el supuesto de cuotas de mercado paramétricamente simétricas N=',num2str(N),', Q=',num2str(Q)]})
subplot(2,1,2); plot (F(:,1),F(:,4))
```

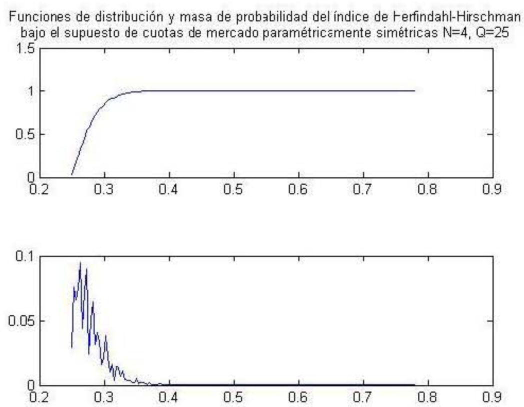
La función anteriormente presentada tiene como parámetros N y Q que, respectivamente, representan al número de empresas participantes y a la cantidad de unidades de producto colocadas en un mercado supuesto al final del periodo; su salida es una tabla que tendrá en la primera columna los diferentes valores que puede tomar el índice de Herfindahl-Hirschman, en la segunda el número de vectores que generan el valor del índice[32], en la tercera la función de distribución evaluada en el valor del índice presente en la primera columna y en la cuarta la probabilidad de que el índice tome el valor de la primera columna.

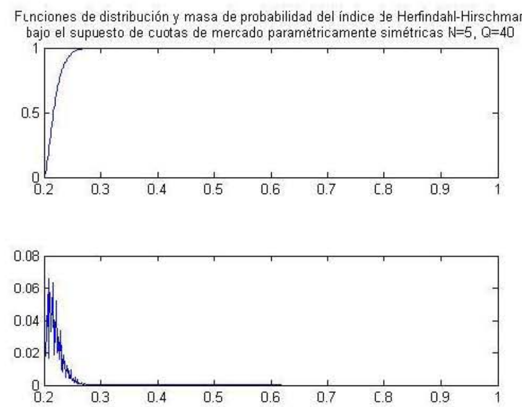
A continuación se muestran algunas gráficas obtenidas al correr dicho programa con diferentes parámetros.

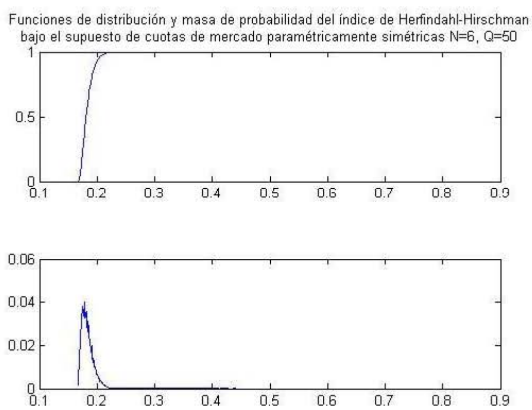
[32] Ésta columna se usó para verificar que se consideraran todos los posibles vectores generados por un proceso multinomial, lo anterior se cumple si la suma de sus entradas es $\binom{Q-1}{n-1}$.

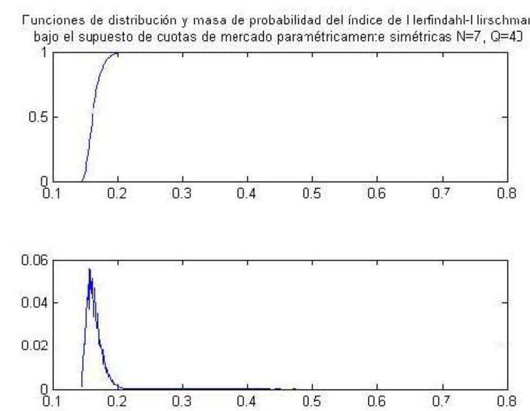












La función se corrió con entradas N y Q relativamente bajas debido a que durante su ejecución se efectúan operaciones que implican un gran costo computacional en términos de tiempo de procesamiento y de espacio de memoria, como la construcción de todos los $\binom{Q-1}{N-1}$ vectores con entradas en los enteros cuya suma es Q y el ordenamiento de los mismos de acuerdo al valor del índice de Herfindahl-Hirschman[33]. Ésta limitación puede superarse parcialmente en los casos en los que se represente a mercados con pocos participantes suponiendo la existencia de una cuota mínima de mercado e interpretando a Q como su inverso[34].

Debido a lo anterior, para el desarrollo de la medida se considerará al *estadístico ji cuadrado de Pearson* como una alternativa para obtener una aproximación a la distribución del índice de Herfindahl-Hirschman bajo el supuesto de *cmps*. Dicho estadístico es usado para probar la hipótesis nula $p_i = \pi_i,\ i = 1 \dots n$, en un experimento multinomial dado por:

$$\mathbb{P}\{Q_1 = q_1, Q_2 = q_2, \dots, Q_n = q_n\} = \frac{Q!}{q_1!\, q_2! \dots q_n!} p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_n^{n}$$

El estadístico es:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{(q_i - Q\pi_i)^2}{Q\pi_i}$$

[33] Para obtener la distribución del índice en una industria en la que 20 empresas colocarán 10,000 unidades de producto se tendrían que construir aproximadamente 8.065×10^{58} vectores; una calculadora estándar no puede estimar el número de vectores que se tendrían que construir si se supone que, en lugar de 20, hay 40 empresas.

[34] Éste procedimiento presenta otro inconveniente: un mercado con n participantes en el que se ha observado que cada empresa ha vendido una unidad será representado mediante el caso trivial en el que se le asocie al índice de Herfindahl-Hirschman una función de probabilidad con un solo punto con masa de probabilidad 1; en caso de hacer una comparación entre dos mercados, se tendrá que considerar una cuota de mercado mínima igual para ambos.

Se ha demostrado[35] que, bajo la hipótesis nula, la distribución límite de éste estadístico cuando $Q \to \infty$ es una ji cuadrada de Pearson con $n-1$ grados de libertad (χ^2_{n-1}).

En éste caso, la hipótesis nula es la de cuotas de *cmps*, es decir:

$$H_0: p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$$

Por lo que el estadístico ji cuadrada de Pearson queda como:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(q_i - \frac{Q}{n}\right)^2}{\frac{Q}{n}}$$

Desarrollando:

$$P = \frac{n}{Q}\sum_{i=1}^{n}\left(q_i^2 - 2q_i\frac{Q}{n} + \left(\frac{Q}{n}\right)^2\right) = \frac{n}{Q}\sum_{i=1}^{n} q_i^2 - \frac{2Q}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i + \frac{Q^2}{n}$$

Como $\sum_{i=1}^{n} q_i^2 = Q^2 I_{HH}$ y $\sum_{i=1}^{n} q_i = Q$, la igualdad anterior arroja que la relación entre el índice de Herfindahl-Hirschman con el estadístico ji cuadrada de Pearson es:

$$P = nQ\left(I_{HH} - \frac{1}{n}\right) \sim \chi^2_{n-1}$$

Se recurrirá a éste resultado para aproximar la distribución del índice de Herfindahl-Hirschman bajo el supuesto de *cmps*, cuando n y Q no sean pequeñas[36].

---

[35] Véase (Lehmann & Romano, 2005, pág. 590).

Propuesta de una Medida complementaria al Índice de Herfindahl-Hirschman basada en su distribución de probabilidad bajo el supuesto de cuotas de mercado paramétricamente simétricas

La medida a proponer surge en el contexto de una prueba de hipótesis en la que se plantea la presencia de cuotas de mercado paramétricamente simétricas como hipótesis nula, como hipótesis alternativa la no presencia de las mismas y en la que se usa como estadístico de prueba al índice de Herfindahl-Hirschman, es decir:

$$H_0: El\ mercado\ analizado\ presenta\ cmps$$

$$vs$$

$$H_a: El\ mercado\ analizado\ no\ presenta\ cmps$$

$$\mathcal{C} = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in D_1 \middle| \, I_{HH}(x_1, \dots, x_n) \geq F_{I_{HH}}^{-1}(1-\alpha)\right\}$$

La hipótesis nula será rechazada si, y solo si, el valor observado del índice de Herfindahl-Hirschman es mayor que un cierto valor crítico, determinado como aquel con el que se asumirá un nivel máximo aceptable de riesgo de rechazar erróneamente la hipótesis nula. Supóngase que el valor crítico no estuviera determinado; en caso de observar que el índice de Herfindahl-Hirschman toma un valor cualquiera denotado por i_{HH}, si se decidiera rechazar la hipótesis nula se estaría asumiendo un riesgo α de:

$$1 - F_{I_{HH}}(i_{hh})$$

[36] Debido a que en ésta formulación también se requiere de conocer el total de producto colocado en el mercado, se supondrá que éste estará dado en por una potencia de 10; para hacer comparables un conjunto de mercados se deberá suponer que Q es el mismo para todos.

La magnitud anterior es usualmente conocida como el *p-value* de la prueba y la medida propuesta lo incorpora como una medida inversa de la desigualdad de las cuotas de mercado.

La función de distribución que en éste trabajo se le han asociado al índice de Herfindahl-Hirschman es altamente sensible a cambios en sus valores, es decir, crece rápidamente conforme aumenta el valor del índice; lo anterior tiene como resultado que devuelva valores cercanos a uno en una gran parte de su recorrido, y *p-values* cercanos a cero, lo cual dificulta su comparación al ser usados como medidas de la desigualdad del mercado. Debido a lo anterior se propone aplicar a los *p-value* la transformación $-log_{10}$; de éste modo se simplificará la comparación ya que un cambio de diez veces en el *p-value* se verá reflejado en un cambio de una unidad en el índice propuesto.

Así pues, la medida que se propone es:

$$I = -\log_{10}\left(1 - F_{IHH}(i_{HH})\right)$$

Es decir, para obtener una medida complementaria al índice de Herfindahl Hirschman que arroje una interpretación en términos de la probabilidad de error que se asume al rechazar el supuesto de cuotas de mercado paramétricamente simétricas, se propone proceder de la siguiente manera:

-Calcular el índice de Herfindahl-Hirschman.

-Obtener el valor de la función de distribución del índice bajo el supuesto de cuotas de mercado paramétricamente simétricas, ya sea de manera exacta (con una función como la propuesta para *MATLAB*) o de manera aproximada (usando la relación que el índice tiene con la ji cuadrada de Pearson)[37].

-Evaluar en la función I en el valor de la función de distribución del índice de Herfindahl-Hirschman.

El índice I propuesto constituye una medida complementaria al índice de Herfindahl-Hirschman que permitirá comparar la concentración derivada de la desigualdad entre las cuotas de mercado observadas en industrias con igual número de participantes. El índice I no es, por sí mismo, una medida de concentración, ya que no cumple en su totalidad con las propiedades propuestas en Encaoua & Jacquemin (1980); lo anterior se desprende del hecho de que en su formulación las cuotas de mercado se consideran fijas y determinadas exógenamente.

A continuación se demostrará que el índice I cumple con la condición de simetría y las propiedades p_1, p_2 y p_3.

Afirmación:

El índice $I = -\log_{10}\left(1 - F_{IHH}(i_{HH})\right)$*satisface la propiedad*$p_1$, *y* la condición de simetría.

Demostración:

p_1)

[37] En caso de que la función de densidad sea aproximada por ésta relación, el índice se denotará como I^*.

Sea$D_1 = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n | s_i > 0, i = 1,2, \dots, n \ \wedge \ \sum_{i=1}^{n} s_i = 1\}$; se sabe que $i_{HH}: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$es una medida de concentración que satisface la propiedadp_1. Sea $S = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in D_1$ un vector de cuotas de mercado ysupóngase que $\exists\ s_j, s_k$ tales que $s_j > s_k = s'_k + s''_k$;$s'_k, s''_k > 0$.

Ante la transferencia de una parte de la cuota de mercado de una empresa (k) a otra más grande (j), por p_1:

$$i_{HH}(s_1, \dots, s_j, \dots, s'_k + s''_k, \dots, s_n) \leq i_{HH}(s_1, \dots, s_j + s''_k, \dots, s'_k, \dots, s_n)$$

Toda función de distribución es una función no decreciente de su argumento, por lo que es posible afirmar que, manteniendo constante el número de empresas participantes, $I = -\log_{10}\left(1 - F_{I_{HH}}(i_{HH})\right)$ es una función no decreciente del índice de Herfindahl-Hirschman

$$I\left(i_{HH}\left(s_1, \dots, s_j, \dots, s'_k + s''_k, \dots, s_n\right)\right) \leq I\left(i_{HH}\left(s_1, \dots, s_j + s''_k, \dots, s'_k, \dots, s_n\right)\right)$$

$\therefore I$ cumple con $p_1 \Longrightarrow I$ cumple con $p_2 \ y \ p_3$

Simetría

Como $\mathrm{i_{HH}(q_1, \dots, q_n) = i_{HH}(q_{\pi(1)}, \dots, q_{\pi(n)})}$ para cualquier permutación π de $\{1,2, \dots n\}$

$$\mathrm{I\left(i_{hh}(q_1, \dots, q_n)\right) = I\left(i_{HH}\left(q_{\pi(1)}, \dots, q_{\pi(n)}\right)\right)}$$

Por lo que I cumple con la condición de simetría

Lo anterior permite confirmar que la medida propuesta es adecuada para comparar industrias con igual número de participantes.

Para ilustrar la aplicación de ésta medida complementaria, considérese el siguiente ejemplo:

Se suponen 3 industrias con cuotas de mercado e índices CR_4 y de Herfindahl como los de la siguiente tabla:

Ind\ s_i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	$\mathbf{100}\boldsymbol{CR_4}$	$\mathbf{100^2}\boldsymbol{i_{HH}}$
1	.30	.20	.15	.15	.05	.05	.05	.05	80	1,850
2	.35	.28	.17	.08	.04	.03	.03	.02	88	2,400
3	.60	.10	.05	.05	.05	.05	.05	.05	80	3,850

Se evaluó el índice de Herfindahl-Hirschman observado en su distribución aproximada bajo el supuesto de cuotas de mercado paramétricamente simétricas y suponiendo una cuota de mercado mínima de 1%, posteriormente se procedió a hacer los cálculos necesarios para obtener el índice I. Se obtuvo la siguiente tabla:

Ind.	$\mathbf{100^2}\boldsymbol{i_{HH}}$	$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{i_{HH}})$
1	1,850	7.4485
2	2,400	16.3185
3	3,850	40.6352

El índice de Herfindahl-Hirschman arroja que la industria 3 presenta más concentración que la industria 2 que, a su vez, está más concentrada que la industria 1. Debido a que se trata de industrias con el mismo número de empresas es posible comparar el nivel de concentración con el índice I, observándose que el riesgo de rechazar erróneamente la hipótesis de *cmps* es, aproximadamente, 10^9 veces mayor en la industria 1 que en la industria 2; análogamente, el riesgo de cometer error tipo I con la hipótesis nula de *cmps* es, aproximadamente, 10^{24} veces menor en la industria 3 que en la industria 2.

Así, pues, la medida propuesta indica que las diferencias en el índice de Herfindahl-Hirschman que, en apariencia son pequeñas, representan un cambio significativo si se tiene en mente la verificación de la igualdad de condiciones de mercado representada por la hipótesis de cuotas de mercado paramétricamente simétricas.

Conclusiones y recomedaciones

En éste trabajo se introdujo el supuesto de cuotas de mercado paramétricamente simétricas que consiste en suponer que las ventas hechas en un mercado tienen una distribución de probabilidad conjunta multinomial dada por:

$$\mathbb{P}\{Q_1 = q_1, Q_2 = q_2, \dots, Q_n = q_n\} = \frac{Q!}{q_1!\, q_2! \dots q_n!}\left(\frac{1}{n}\right)^{q_1+q_2+\cdots+q_n}$$

Donde q_i representa al total de unidades vendidas por la empresa i, Q al total de unidades vendidas en el mercado y n el número de empresas participantes. Bajo éste supuesto es posible obtener la distribución del índice de Herfindahl-Hirschman y, en el contexto de una prueba de hipótesis, usar una transformación del p-value como indicador de la desigualdad de las cuotas de mercado que constituirá una medida complementaria al índice de Herfindahl-Hirschman y cuyas magnitudes son proporcionalmente comparables.

Al usar la medida propuesta se deberá tomar en cuenta que es posible caer en una situación de desbordamiento numérico por defecto. Debido a que con valores relativamente pequeños del índice de Herfindahl-Hirschman se obtienen valores muy cercanos a uno en la función de distribución asociada, la expresión $1 - F_{I_{HH}}(i_{HH})$ puede ser tomada como cero al efectuar el cálculo con algún paquete computacional al darle la instrucción de efectuar la diferencia después de calcular la distribución. En este trabajo, para evitar este problema se tuvo que recurrir a definir dicha expresión mediante la función *gammainc* incorporada en el paquete MATLAB.

Considerando que las medidas de concentración económica deben ser sensibles tanto a la desigualdad de las cuotas de mercado como al número de empresas participantes en la industria, se recomienda acompañar a la medida propuesta por algún indicador que sea función del número óptimo de empresas; al comparar la concentración entre varias industrias, el índice de Herfindahl-Hirschman aportará una cifra de carácter *ordinal*, mientras que el índice I y la otra medida proveerán información sobre la importancia relativa de cada uno de los factores mencionados en su determinación.

Bibliografía

Adelman, M. (Febrero de 1969). Comment on the "H" Concentration Measure as Numbers-Equivalent. *The review of Economics and Statistics, 51*(1), 99-101.

Carlton, D., & Perloff, J. (1994). *Modern Industrial Organization* (Segunda ed.). Nueva York: Harper Collins College Publishers.

Cowling, K., & Waterson, M. (Agosto de 1976). Price-Cost Margins and Market Structure. *Economica, 43*(171), 267-274.

De Vany, A., & Lee Hong Kim, C. (Julio de 2003). Stochastic Market Structure: Concentration Mesures And Motion Picture Antitrust. *Working Paper Series, Centre on Regulation and Competition*. Manchester, Gran Bretaña: Institute for Develoment Policy and Management, University of Manchester.

Encaoua, D., & Jacquemin, A. (Febrero de 1980). Degree of Monopoly, Indices of Concentration and Threat of Entry. *International Economic Review, 21*(1).

Gómez Gómez-Plana, A. (Junio 2005). Simulación De Políticas Económicas: Los Modelos De Equilibrio General Aplicado. *Cuadernos Económicos del ICE, Número 69*, 197-216.

Hirschman, A. (Septiembre de 1964). The Paternity of an Index. *The American Economic Review, 54*(5), 761.

Jehle, G., & Reny, P. (2001). *Advanced Microeconomic Theory.* Boston: Addison Wesley.

Kanagala, A., Sahni, M., Sharma, S., Gou, B., & Yu, J. (2004). A Probabilistic Approach of Hirschman-Herfindahl Index (HHI) to Determine Possibility of Markett Power Acquisition. *Power Systems Conference and Exposition, 2004. IEEE PES. 3*, págs. 1277 - 1282. New York: Institute of Electrical & Electronics Engineers.

Kelly, W. A. (Julio de 1981). A Generalized Interpretation of the Herfindahl Index. *Southern Economic Journal, 48*(1), 50-57.

Kreps, D. (1985). *A Course In Microeconomic Theory.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Lazzarini, H. (1975). *La Teoría de la Información y el Análisis de la Concentración Bancaria.* Buenos Aires: El Ateneo.

Lehmann, E. L., & Romano, J. (2005). *Testing Statistical Hypotheses.* New York: Springer.

Marsden, J., & Tromba, A. (1998). *Cálculo Vectorial.* México: Addison Wesley Longman.

Martin, S. (1994). *Industrial Economics:Economic Analysis and Public Policy.* Nueva York: Macmillan Publishing Company.

Martinez-Giralt, X. (2008). *Microeconomía Avanzada.* Barcelona: Disponible en línea con licencia GNU.

Nauemberg, E., Alkhamisi, M., & Andrijuk, Y. (Enero de 2004). Simulation of a Hirschman-Herfindahl Index Without Complete Market Share Information. *Health Economics, 13*(1), 87-94.

Ross, S. (2006). *A First Course in Probability.* New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Scherer, F., & Ross, D. (1990). *Industrial Market Structure and Economic Performance.* Boston: Houghton Mifflin Company.

Shy, O. (1995). *Industrial Organization: Theory and Applications.* Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Tirole, J. (1992). *The Theory of Industrial Organization.* Cambridge Massachusetts: The MIT Press.

Utton, M. (1970). *La Concentración Industrial.* Madrid: Alianza Universidad.

Varian, H. (1992). *Análisis Microeconómico.* Barcelona: Antoni Bosch.

Varian, H. (1999). *Microeconomía Intermedia: Un Enfoque Actual.* Barcelona: Antoni Bosch.

Villar, A. (1996). *Curso de Microeconomía Avanzada: Un Enfoque de Equilibrio General.* Barcelona: Antoni Bosch.

Vives, X. (1999). *Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools.* Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Zapata Lillo, P. (2007). *Economía, Política y Otros Juegos: Una Introducción a los Juegos No Cooperativos.* México, D.F.: Las Prensas de Ciencias, Facultad de Ciencias UNAM.