



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA VALUACIÓN DE OPCIONES
AMERICANAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
NELLY SHARON KICHIK RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:
M EN C CHRISTIAN GABRIEL MIRANDA RUÍZ



2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Apellido paterno
Apellido materno
Nombre(s)
Teléfono
Universidad
Facultad
Carrera
Número de cuenta

1. Datos del alumno

Kichik
Rodríguez
Nelly Sharon
56 01 55 17
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
300595075

2. Datos del tutor

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

2. Datos del tutor

M. en C.
Christian Gabriel
Miranda
Ruiz

3. Datos del sinodal 1

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

3. Datos del sinodal 1

Act.
Jaime
Vázquez
Alamilla

4. Datos del sinodal 2

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

4. Datos del sinodal 2

Act.
Alberto
Cadena
Martínez

5. Datos del sinodal 3

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

5. Datos del sinodal 3

M. en I.
Gabriel Vladimir
Valencia
Baltazar

6. Datos del sinodal 4

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

6. Datos del sinodal 4

M. en I.
Emmanuel
Malagón
Bolaños

7. Datos del trabajo escrito

Título

Número de páginas
Año

7. Datos del trabajo escrito

Métodos numéricos para valuación
de opciones americanas
127 p
2012

Índice general

Agradecimientos	v
Introducción	vii
1. Conceptos básicos y modelos discretos	1
1.1. Definiciones	1
1.1.1. Futuros y otros derivados	3
1.1.2. Opciones	4
1.2. Modelo discreto general de un periodo	5
1.2.1. Elementos del modelo	6
1.2.2. Mercados viables	7
1.3. Modelo binomial	9
1.3.1. Modelo binomial de un periodo	9
1.3.2. Modelo binomial multiperiodo	15
1.4. Modelo binomial para opciones americanas	19
2. Cálculo estocástico	23
2.1. Movimiento Browniano	23
2.1.1. Caminata aleatoria	23
2.1.2. Construcción del movimiento Browniano	26
2.1.3. Integral de Wiener	30
2.2. Integral de Itô	33
2.2.1. Interpretación financiera de la integral de Itô	34
2.3. Modelo simple para calcular el precio de los activos	35
2.4. Precio neutral al riesgo	37
2.4.1. Medida neutral libre de riesgo	37
2.4.2. Teorema de representación de una martingala	39
2.4.3. Cobertura con una acción	40
2.5. La ecuación de Black-Scholes Merton	41
3. Métodos Numéricos	43
3.1. Teoría básica de las opciones	43
3.1.1. Lema de Itô y la eliminación de aleatoriedad	43
3.1.2. La ecuación de Black-Scholes	45

3.1.3.	Condiciones de frontera y finales	46
3.2.	La ecuación de B&S para opciones europeas	47
3.2.1.	Construcción de la ecuación	48
3.2.2.	Reducción de la ecuación de B&S a la ecuación de calor	49
3.3.	La ecuación de B&S para opciones americanas	52
3.3.1.	Diferencias entre opciones europeas y americanas	53
3.3.2.	<i>Put</i> y <i>call</i> americano	54
3.3.3.	Problema del obstáculo	55
3.3.4.	Fórmula de la desigualdad variacional	56
3.4.	Métodos numéricos	58
3.4.1.	Consideraciones generales para soluciones numéricas	58
3.4.2.	Aproximación por diferencias finitas	59
3.4.3.	Método explícito de diferencias finitas	61
3.4.4.	Método implícito de diferencias finitas	63
3.4.5.	Método de Crank-Nicolson	67
3.4.6.	Métodos para opciones americanas	71
4.	Simulación Monte Carlo	77
4.1.	Métodos para generar números aleatorios	78
4.1.1.	Generadores lineales congruenciales	79
4.1.2.	Generadores combinados y otros métodos	80
4.2.	Métodos generales de muestreo	81
4.2.1.	Método de la transformada inversa	82
4.3.	Variable aleatoria normal	84
4.3.1.	Propiedades básicas	85
4.3.2.	Métodos para generar variables aleatorias normales uni- variadas	86
4.3.3.	Métodos para generar normales multivariadas	93
4.4.	Movimiento Browniano y construcción de una caminata aleatoria	94
4.4.1.	Construcción de una caminata aleatoria	95
4.5.	Movimiento Browniano Geométrico y sus aplicaciones	97
4.5.1.	Opciones dependientes de la trayectoria	100
4.6.	Control de variaciones	101
4.7.	Simulación Montecarlo para opciones americanas	105
4.7.1.	Valuación de opciones americanas por aproximación de mínimos cuadrados.	105
	Conclusiones	113
	Apéndice A	115
.1.	Definiciones	115
.2.	Esperanza condicional	118
.3.	Martingalas	119
.4.	Cambio de medida	120
.5.	Instrumentos de mercado bajo la medida neutral al riesgo	122
.5.1.	Acciones bajo la medida neutral al riesgo	122

.5.2.	Valuación bajo la medida neutral al riesgo	124
.5.3.	Resolver integrales con números aleatorios	125

Agradecimientos

A la Universidad y maestros, porque sin ellos no tendría las bases necesarias para enfrentarme a la vida.

A mis padres, por apoyarme, ayudarme y aconsejarme incondicionalmente en todas las etapas de mi vida.

A mis hermanos, por estar siempre conmigo y darme el ánimo necesario para seguir adelante.

A mi asesor, por compartir conmigo un poco del gran conocimiento que tiene.

A mis sinodales, por sus comentarios, observaciones, apoyo y ayuda en todo el proceso de mi titulación.

A mi novio, por compartir conmigo su vida y apoyarme en todas mis metas.

A mis amigos, por ser mis maestros, cómplices y apoyo en la vida.

Introducción

Una opción es un instrumento financiero que da al poseedor el derecho de comprar o vender un subyacente a un precio pactado hoy en un tiempo futuro. Cuando se habla de opciones se piensa ¿cuántos contratos diferentes existen?, ¿cuánto valen este tipo de contratos?, ¿cómo se obtiene el valor de estos contratos? Las respuestas a estas preguntas se encuentran en este trabajo.

En México este tipo de productos son negociados principalmente en el mercado de derivados (MexDer) y además de opciones existen otro tipo de derivados que también son negociados ahí. Recientemente ha cobrado gran importancia la valuación de un tipo particular de operación que se puede ejercer en cualquier momento del tiempo hasta su fecha de vencimiento, estos contratos son conocidos como opciones americanas, además hay otro tipo de opciones que son más simples, estas sólo se pueden ejercer en su vencimiento. Este trabajo compara estos contratos y muestra modelos que se pueden utilizar para valorar ambos instrumentos haciendo las modificaciones necesarias.

Se empieza mostrando los modelos discretos [11, 7], pasando por los numéricos [13, 9, 2] y terminando con los continuos [3, 9, 10, 6]. Para poder abordar con detalle cada uno de los modelos, se estructuró este trabajo en 4 capítulos. En el capítulo 1 se muestra brevemente la historia del mercado de derivados, continuando con las características de los productos que ahí se negocian. Posteriormente se describe el primer modelo de valuación de opciones (modelo discreto) y por último, un comparativo entre opciones europeas y americanas.

En el capítulo 2 introducen los conceptos básicos de cálculo estocástico para entender por completo los modelos continuos. Después se desarrolla un modelo simple para valorar opciones que contribuye a entender el comportamiento de las mismas.

El capítulo 3 se presenta el enfoque de valuación a través de ecuaciones diferenciales, principalmente se desarrolla la ecuación de Black-Scholes para valorar derivados y las consideraciones requeridas para distinguir entre los diferentes tipos de derivados. Se exponen tres métodos distintos las diferentes formas de resolverlos.

En el capítulo 4 se aborda la valuación de opciones por simulación Montecarlo. La simulación es un método muy eficiente y poderoso ya que utilizando herramientas computacionales y estadísticas se pueden resolver muchos problemas que no pueden resolverse de forma directa. Por último se presenta una variante de simulación para valorar opciones americanas mediante aproximación de mínimos

cuadrados.

El objetivo de este trabajo es encontrar el mejor modelo para valorar opciones americanas. Se desea saber ¿qué método es el más rápido? ¿cuál es el más exacto? ¿cuál es la mejor forma de llegar al valor de una opción? Para esto es necesario conocer a fondo cómo se comporta una opción y sobre todo conocer los datos que se tienen disponibles para encontrar el valor a mercado de este derivado.

Capítulo 1

Conceptos básicos y modelos discretos

En este capítulo, se encuentran las bases teóricas para poder entender los siguientes capítulos. Se empieza mostrando las definiciones más importantes para terminar con el análisis de los modelos discretos. Este capítulo incluye bibliografía variada tal como [1, 4, 7, 8, 11].

1.1. Definiciones

Los derivados son aquellos instrumentos financieros cuyo precio no sólo varía en función de parámetros como riesgo, plazo, entre otros, sino que también dependen de la cotización que alcance en el mercado otro activo, al que se denomina subyacente.

Existen dos tipos de derivados formales

- Futuros
- Opciones

Este tipo de contratos son pactados en los mercados de derivados, los cuales se han establecido con gran éxito en todo el mundo. En ocasiones la venta de los derivados ha superado la de los respectivos subyacentes que son vendidos al contado.

El primer mercado de derivados fue fundado en Chicago en la década de los 70, a la fecha es posible encontrar tres mercados:

- Chicago Board of Trade (CBOE)
- Chicago Mercantile Exchange (CME)
- Chicago Board Options Exchange (CBOE)

Diez años después de la creación de estos mercados en Estados Unidos, los contratos de futuros y opciones llegan a Europa, formando los siguientes mercados:

- Holanda EOE (European Options Exchange) 1978
- Reino Unido LIFFE (London International Financial Futures Exchange) 1978
- Francia MATIF (Marché a Terme International de France) 1985
- Suiza SOFFEX (Swiss Financial Futures Exchange) 1988
- Alemania DTB (Deutsche Terminbourse) 1990
- Italia MIF (Mercato Italiano Futures) 1993

En México existe una institución conocida como *MexDer*¹ (Bolsa de derivados de México), fundada el 15 de diciembre de 1998 iniciando operaciones de futuros. En marzo del 2004 iniciaron operaciones en el mercado de opciones donde se ofrecen *put* y *call* sobre algunos subyacentes financieros.

Actualmente en MexDer se encuentran listados Contratos de Futuro sobre los siguientes subyacentes financieros:

- *Divisas*: Dólar de los Estados Unidos de América, Euro.
- *Índices*: Índice de Precios y Cotizaciones de la BMV.
- *Deuda*: Cetes a 91 días, TIIIE a 28 días, Bono a 3 años, Bono a 10 años, UDI y *swap* de 10 años.
- *Acciones*: Cemex CPO, Femsa UBD, GCarso A1, Telmex L y América Móvil L.

Para contratos de opciones, es posible encontrar *put* y *call* sobre los siguientes subyacentes financieros:

- *Futuros IPC*: Se manejan con tipo de opción Europea y su liquidación es en efectivo.
- *Divisas*: Se manejan con tipo de opción Europea y su liquidación es en especie.
- *Acciones*: Se manejan con tipo de opción Americana y su liquidación es en especie.
- *ETF's*: Se manejan con tipo de opción Americana y su liquidación es en especie.

A pesar del poco tiempo que lleva el MexDer activo, el número de contratos va aumentando año con año.

¹Esta institución sólo transacciona derivados pactados en mercados formales (futuros y opciones).

1.1.1. Futuros y otros derivados

Los *futuros* son un contrato de obligación que se hace en un mercado o en una bolsa donde las dos partes tienen la obligación de vender y comprar los activos en una fecha pactada a un precio específico. A diferencia de los futuros, un *forward* es un contrato de obligación entre dos partes, donde uno pacta comprar un activo a un cierto precio en una fecha específica, pero éste no es pactado en un mercado formal ².

Existen otras diferencias entre *forward* y futuros, la pérdida o ganancia en un contrato *forward* sólo se ve en la fecha de expiración, a diferencia del contrato de futuros el valor es calculado todos los días, cuando hacen esto se dice que hacen el *mark to market*, por lo que el valor de éste es pagado durante todo el tiempo del contrato y no sólo en la fecha que madura. Además se puede decir que un *forward* o futuro tiene posición larga si es de compra y corta si es de venta. Suponga que se tiene un futuro con posición larga donde S_t es el valor que toma el subyacente con respecto al tiempo y K es el valor al que se pactará vender el subyacente, en la figura 1.1 (a) se observa que cuando el valor del subyacente es igual al precio pactado, el payoff es cero y mientras va creciendo el precio del subyacente, el valor del payoff se incrementa y si el valor del subyacente se decrecienta, el payoff disminuye. Un detalle peculiar es que las ganancias y las pérdidas en este tipo de derivados pueden ser infinitas. Si es un futuro corto se hace el mismo análisis pero desde el punto de vista del vendedor.

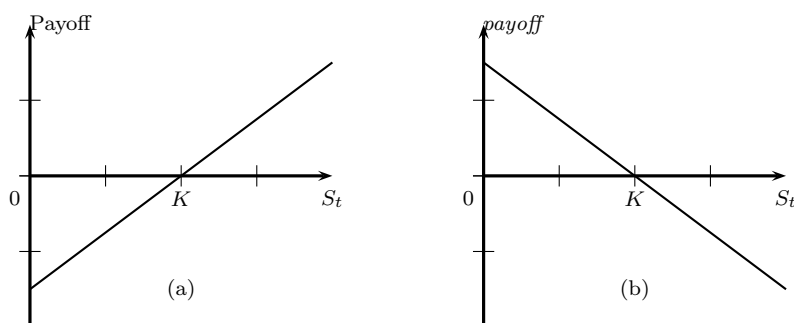


Figura 1.1: Payoffs de *forwards* o futuros: (a) posición larga (b) posición corta.

Un *swap* es un contrato financiero entre dos partes que acuerdan intercambiar flujos de caja futuros de acuerdo a una fórmula preestablecida. Se trata de contratos hechos *a medida* es decir, con el objetivo de satisfacer necesidades específicas de quienes firman dicho contrato. Debido a esto, se trata de instrumentos similares a los *forward*, en el sentido de que no son pactados en mercados formales.

El *swap* más común es el de tasas de interés, mediante el cual se intercambian flujos de intereses en una misma moneda en ciertas fechas previamente con-

²Generalmente este tipo de derivados son pactados entre bancos, no son calculados todos los días, es decir son negociados en el mercado *over the counter* (OTC).

venidas. El comprador paga flujos de intereses aplicando una tasa de interés fija sobre un cierto monto y recibe flujos de intereses aplicando una tasa fluctuante sobre el mismo monto. El vendedor recibe los intereses calculados de acuerdo a la tasa fija y paga los intereses a la tasa flotante, sobre el mismo monto y en las mismas fechas. Típicamente este tipo de *swap* se utiliza para transformar flujos de caja a tasa fija en flujos de caja a tasa flotante o viceversa.

1.1.2. Opciones

Las *opciones* son productos derivados que dan al poseedor el derecho de vender o comprar un activo subyacente a un precio pactado en una fecha futura acordada en el momento del contrato; este precio es llamado *precio de ejercicio* o *strike price*.

Existen dos tipos de opciones, de *compra* y de *venta*. La opción de compra conocida como *call* otorga al propietario tiene el derecho de comprar un activo subyacente en una fecha futura a un precio pactado en el momento del contrato. Por el contrario, la opción de venta, conocida como *put*, da al propietario el derecho de vender un activo en una fecha a cierto precio, especificados en el momento de hacer el contrato, se puede observar su *payoff* en la figura 1.2.

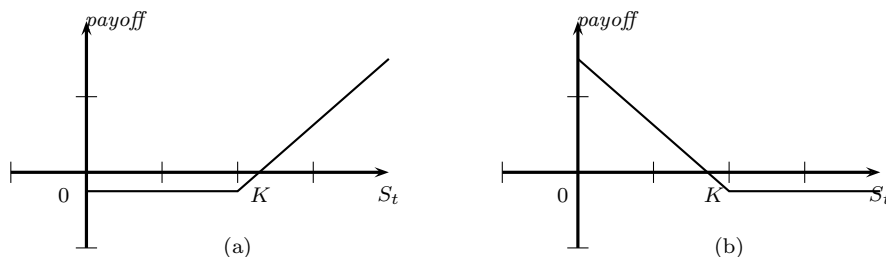


Figura 1.2: Payoffs de Opciones: (a) Call (b) Put.

Este tipo de activos son usados frecuentemente ya que el poseedor de éstos ve la compra como un seguro y la prima del mismo es el valor de la opción.

A continuación se presenta un ejemplo para entender el concepto de opción de compra, aunque no es la forma de calcular el precio de un *call* europeo ayuda a dar una idea de la utilidad de las opciones.

Supóngase que hoy se quiere vender una opción de compra que vence en 8 meses. El precio en el que se pactó vender los activos fue 500 pesos, bajo estos supuestos en la fecha de vencimiento puede pasar una de dos cosas:

1. Si el precio de ejercicio de los activos es de 530 pesos al final de los 8 meses, el poseedor de la opción puede ejercer su derecho de comprar los activos en 500 pesos lo que le da una ganancia de 30 pesos.
2. Si el precio de ejercicio del activo al final de los 8 meses es de 470 pesos, entonces el poseedor tiene la opción de no ejercerla.

Cuando se observa lo que puede pasar, la pregunta es ¿por qué pactar comprar algo en 500 cuando puede costar 470?

La respuesta a la pregunta anterior es que si se toman como precio de venta 530 y 470 con probabilidad un medio cada uno, se obtiene:

$$\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 30 = 15. \quad (1.1)$$

Ignorando la tasa de interés, la ecuación (1.1) da el valor de la opción. Supóngase que el poseedor pagó 15 pesos por la opción, si el valor de los activos se incrementa, éste tendría una ganancia de 15 pesos por otro lado, viendo la postura del especulador es diferente, si él compra una acción en 500 y ésta sube 30, el especulador estaría perdiendo 15, por el contrario si la acción baja, el especulador pierde 500 pesos de la compra del activo, por lo tanto estaría perdiendo el total de su inversión en cambio y el poseedor solo pierde 15. Con el razonamiento anterior se concluye que el precio de las opciones está relacionado esencialmente con el precio de los activos. Este efecto es llamado *gearing*.

Clasificación de Opciones

Cuando se habla de opciones, existen muchos tipos de clasificación, por ejemplo por tipo de activos o tipo de ejercicio, entre otras. A continuación se muestran algunas de sus clasificaciones.

Una opción *americana* es aquella que puede ser ejercida en cualquier momento antes de expirar, a diferencia las *européas* que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de expiración. Lo interesante de las opciones americanas no es solamente saber el valor de la opción, sino calcular cuando es el mejor momento para ejercerlas.

Existen otros tipos de opciones que son llamadas *exóticas*, el valor de estas opciones depende de la historia del precio de sus subyacentes y no sólo del valor de ejercicio. Un ejemplo de estas, podría ser la opción de comprar un subyacente que depende del clima, este tipo de opciones les convienen a los agricultores ya que pueden asegurar su cosecha y venderla a un precio pactado en una fecha futura, y si pierden la cosecha el vendedor de la opción les paga la cantidad pactada y si no ellos deciden si ejercen la opción o no.

1.2. Modelo discreto general de un periodo

En el mundo financiero, cualquier modelo que sea propuesto puede ser mejorado, ya que es una simplificación de la realidad. En particular, los modelos discretos contienen información valiosa con la que es posible obtener conclusiones que incluso permanecerán para el caso continuo.

A lo que se hace referencia como modelos de un periodo es a modelos que sólo constan de dos fechas, la fecha inicial y la final.

1.2.1. Elementos del modelo

Supóngase que sólo existen dos fechas de negociación, $t = 0$ y $t = 1$ es decir, sólo hay un periodo. Únicamente en estas fechas se puede consumir y negociar. Además el conjunto de posibles escenarios para la economía al tiempo $t = 1$ es el conjunto finito $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$. Asociado al conjunto Ω se tiene una medida de probabilidad P tal que $P(\omega_i) > 0$ para $i = 1, \dots, m$.

En el mercado existen $n + 1$ activos y a estos activos se les asocia el proceso de precios $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}(t), t = 0, 1\}$ con $\mathbf{S}(t) = (S_0(t), \dots, S_n(t))$. La variable $S_i(t)$ denota al precio del i -ésimo activo al tiempo t . Los precios al tiempo $t = 0$ son conocidos, pero al tiempo $t = 1$ son variables aleatorias que dependen de los posibles escenarios contenidos en Ω . Una notación más precisa del proceso de precios es, $\mathbf{S}(t, \omega_i) = (S_0(t, \omega_i), \dots, S_n(t, \omega_i))$, pero esta notación sólo se empleará cuando se considere indispensable.

Para este modelo se debe suponer la existencia en el mercado de un activo libre de riesgo. Supóngase que $S_0(t)$ es el precio del activo libre de riesgo al tiempo t , de modo que

$$S_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0, \\ 1 + r & \text{si } t = 1, \end{cases} \quad (1.2)$$

donde r es conocida como la *tasa libre de riesgo* y será considerada como variable determinística. Tradicionalmente r es la tasa de interés de un banco y es, a esta tasa, a la que los inversionistas pueden prestar o endeudarse, usualmente $r > 0$. Finalmente, se supondrá que el mercado permite ventas en corto, de manera que pueden invertirse cantidades positivas o negativas en cualquier activo del mercado.

Supongase que el agente invierte en el mercado de valores, el modo en el que éste invierte es el siguiente. Sea $\phi_i(t)$ las unidades del i -ésimo activo que un inversionista mantiene en su portafolio al tiempo t . El proceso $\phi = \{\phi(t), t = 0, 1\}$ con $\phi(t) = (\phi_0(t), \dots, \phi_n(t))$, define la dinámica del portafolio. Al proceso ϕ se le conoce como *estrategia de inversión*.

Asociado a una estrategia de inversión ϕ se encuentra el proceso de precios $\{V_\phi(t), t = 0, 1\}$ de un portafolio, esto es

$$V_\phi(t) = \sum_{i=0}^n \phi_i(t) S_i(t) = \phi(t) \cdot \mathbf{S}(t). \quad (1.3)$$

Al inicio del periodo el inversionista tiene un portafolio que vale $V_\phi(0) = \phi(0) \cdot \mathbf{S}(0)$ y tiene la oportunidad en ese mismo momento de renegociar sus posiciones, de tal forma que el valor de su portafolio se calcularía de la siguiente manera $V_\phi(1) = \phi(1) \cdot \mathbf{S}(1)$. La manera en la que se construyó el portafolio es importante, dado que el valor de la estrategia en $t = 1$ se fija desde $t = 0$ entonces se dice que el proceso ϕ es *predecible*. Además se tiene que

$$\phi(0) \cdot \mathbf{S}(0) = \phi(1) \cdot \mathbf{S}(0). \quad (1.4)$$

Cuando una estrategia de inversión cumple con (1.4) se dice que es una estrategia *autofinanciable*. Esta propiedad es muy importante para el modelo, pues afirma

que las variaciones en el valor del portafolio dependen únicamente de la variación de precios de los activos que lo componen y no se deben a la inclusión de recursos frescos al portafolio.

1.2.2. Mercados viables

Un modelo consistente debe excluir estrategias que den lugar a comportamientos económicos aberrantes. Una de estas estrategias es como la que se define a continuación.

DEFINICIÓN. 1 (ESTRATEGIA DOMINANTE)

Se dice que una estrategia ϕ es dominante si existe otra estrategia ψ tal que $V_\phi(0) = V_\psi(0)$ pero $V_\phi(1, \omega) > V_\psi(1, \omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.

En un mercado en equilibrio no resulta razonable la existencia de este tipo de estrategias. La siguiente afirmación ayuda a comprender el porque.

AFIRMACIÓN 1

Existen estrategias dominantes si y sólo si existe una estrategia ϕ tal que $V_\phi(0) = 0$, pero $V_\phi(1, \omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$.

Demostración

Sea ρ una estrategia dominante, entonces existe una estrategia ψ tal que $V_\rho(0) = V_\psi(0)$ pero $V_\rho(1) > V_\psi(1)$. Se define la estrategia $\phi = \rho - \psi$.

Se tiene entonces que

$$V_\phi(0) = V_\rho(0) - V_\psi(0) = 0,$$

pero

$$V_\phi(1, \omega) = V_\rho(1, \omega) - V_\psi(1, \omega) > 0, \quad \text{para todo } \omega \in \Omega.$$

Esto es $V_\phi(0) = 0$, pero $V_\phi(1, \omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$.

Por otro lado, si ϕ es tal que $V_\phi(0) = 0$, pero $V_\phi(1, \omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$, entonces ϕ domina a la estrategia que consiste en “no hacer nada”.

□

La afirmación anterior evidencia la inconsistencia de una estrategia dominante. Si existen estrategias dominantes entonces es posible construir un portafolio que no cuesta nada al principio del periodo e independientemente del estado de la naturaleza al término del periodo es positivo. En otras palabras, se obtiene algo por nada.

La siguiente afirmación confirma la inconveniencia de que existan estrategias dominantes.

AFIRMACIÓN 2

Existen estrategias dominantes si y sólo si existe una estrategia ϕ tal que $V_\phi(0) < 0$, pero $V_\phi(1, \omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$.

Demostración

Supongase que ρ es una estrategia que cumple las hipótesis de la afirmación 1, es decir $V_\rho(0) = 0$, pero $V_\rho(1, \omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Sea

$$\delta = \frac{1}{1+r} \min_{\omega \in \Omega} V_\rho(1, \omega),$$

Nótese que $\delta > 0$. Se define la estrategia ϕ como sigue

$$\phi_i(1) = \begin{cases} -\delta - \sum_{j=1}^n \rho_j(1) S_j(0) & \text{si } i = 0, \\ \rho_i(1) & \text{si } i \neq 0. \end{cases}$$

Se tiene entonces que

$$V_\phi(0) = -\delta < 0, \quad (1.5)$$

pero

$$\begin{aligned} V_\phi(1) &= \phi_0(1)(1+r) + \sum_{j=1}^n \phi_j(1) S_j(1) \\ &= -(1+r)\delta - (1+r) \sum_{j=0}^n \rho_j(1) S_j(0) + \sum_{j=0}^n \rho_j(1) S_j(1) \\ &= -\min_{\omega \in \Omega} V_\rho(1, \omega) - (1+r)V_\rho(0) + V_\rho(1) \\ &= V_\rho(1) - \min_{\omega \in \Omega} V_\rho(1, \omega) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

De (1.5) y (1.6) se sigue que ϕ es una estrategia tal que $V_\phi(0) < 0$ pero $V_\phi(1, \omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$.

Por otro lado, si ρ es tal que $V_\rho(0) < 0$ pero $V_\rho(1, \omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$, se define

$$\phi_i(1) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^n \rho_j(1) S_j(0) & \text{si } i = 0, \\ \rho_i(1) & \text{si } i \neq 0. \end{cases}$$

Claramente se tiene que $V_\phi = 0$ pero

$$\begin{aligned} V_\phi(1) &= \phi_0(1)(1+r) + \sum_{j=1}^n \phi_j(1) S_j(1) \\ &= -(1+r) \sum_{j=0}^n \rho_j(1) S_j(0) + \sum_{j=0}^n \rho_j(1) S_j(1) \\ &= V_\rho(1) - (1+r)V_\rho(0) > 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Es decir, ϕ es tal que $V_\phi(0) = 0$ pero $V_\phi(1) > 0$.

□

Esta última afirmación es muy útil para determinar la existencia de estrategias dominantes en el mercado.

En los modelos multiperiodo es posible explotar de manera más rica el concepto de probabilidad neutral al riesgo, en consideración a esto, más tarde se dará una definición formal y precisa de este tipo de medidas.

AFIRMACIÓN 3

Si existe una medida de probabilidad neutral al riesgo, entonces no existen estrategias dominantes.

Si existen estrategias dominantes entonces teóricamente se podrían encontrar estrategias que permitan obtener de manera segura ganancias arbitrariamente grandes, es decir, en un mercado con estrategias dominantes en teoría sería posible seguir estrategias que hicieran arbitrariamente rico al inversionista y evidentemente desde el punto de vista económico esta conclusión es a todas luces aberrante.

1.3. Modelo binomial

El modelo binomial es un modelo discreto, el cual es construido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde Ω es finita, y debe cumplir que si $\omega \in \Omega \Rightarrow \mathbb{P}[\omega] > 0$. Para la construcción del modelo, es necesario saber el número de activos con los que se cuenta y cuanto valen al día de hoy. Supongase que se tienen $n + 1$ activos con valor $S_0(t), S_1(t), \dots, S_n(t)$ cada uno, donde este valor es una variable aleatoria \mathcal{F} -medible, y estos precios juntos, forman el vector de precios de los activos al tiempo t $S(t) = (S_0(t), S_1(t), \dots, S_n(t))$. Si se encuentra en el tiempo 0, se dice que se tiene un activo libre de riesgo, entonces $S_n(0) = 1$, y si además supone que la tasa libre de riesgo es la constante r entonces el activo cero al tiempo t vale

$$S_0(t) = S_0(0)(1 + r)^t. \quad (1.8)$$

El modelo binomial de un periodo es un caso particular del modelo expuesto en la sección anterior, la diferencia es que en $t = 1$ el activo puede tomar varios valores y en el binomial sólo toma dos (el precio sube o baja).

Por practicidad, la notación para el modelo binomial será $S_t(\omega)$, donde $S_t(\omega)$ es el vector de precios del subyacente $\mathbf{S}(t)$, t es el periodo de tiempo en el que se encuentra y ω uno de dos valores: el valor u factor de alza y el valor d factor de baja.

1.3.1. Modelo binomial de un periodo

El modelo binomial de un periodo tiene como objetivo calcular el precio de la opción pero al mismo tiempo crea un portafolio que cubra la opción, esto quiere decir que se crea un portafolio con el mismo valor de la opción que lo asegura de pérdidas futuras.

El movimiento de precios que sigue un activo para el modelo binomial está dado por la figura 1.3.

En este modelo el principio del periodo es conocido como tiempo cero y el final como tiempo uno. Como se mencionó en la sección anterior, al tiempo cero el valor del activo S_0 es una cantidad positiva conocida al tiempo cero. Al tiempo uno, el precio de este activo puede ser uno de dos valores positivos llamados $S_1(u)$ y $S_1(d)$, donde $S_1(u) \leq S_0 \leq S_1(d)$. Suponga que el precio sube con

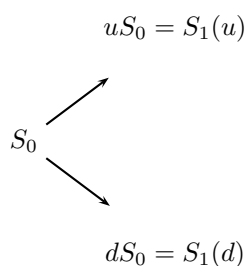


Figura 1.3: Modelo Binomial de un Periodo.

probabilidad p y baja con probabilidad $q = 1 - p$ con $p > 0$, con esto se puede conocer el valor al tiempo 1, pero al tiempo cero el valor en el tiempo uno no, por lo tanto se considera como estocástico.

Para encontrar el valor de las variables aleatorias, es necesario introducir los siguientes números

$$u = \frac{S_1(u)}{S_0}, \quad d = \frac{S_1(d)}{S_0},$$

donde $d < u$, u y d como se mencionó anteriormente y la *tasa de interés* r tal que $r \geq 0$.

En el modelo binomial de un periodo se debe hacer el siguiente supuesto adicional:

$$0 < d < 1 + r < u, \quad (1.9)$$

si $d \geq 1 + r$ no se tendrían pérdidas ya que aunque bajara el precio del activo, se tendría el suficiente dinero para pagar la deuda al mercado de dinero, es decir, es posible pedir prestado S_0 en el mercado de dinero y comprar el activo. Al término del periodo, se debe devolver el préstamo más intereses $(1 + r)S_0$. Por otro lado, el activo valdría $S_1 \geq uS_0 > (1 + r)S_0$, permitiendo mediante esta estrategia la obtención de una ganancia libre de riesgo sin invertir un solo peso, por lo tanto $S_1 - (1 + r)S_0 > 0$ y desde el punto de vista económico esta situación es inadmisibles.

Por otro lado, si $u \leq 1 + r$ se puede vender la acción en corto e invertir en el mercado de dinero y aunque el valor de la acción suba, el valor del activo sera menor al obtenido en el mercado de dinero, lo que implica que es posible ganar

dinero sin invertir nada y en el sentido económico, esto no tendría sentido. Como el precio de las acciones siempre es mayor que cero entonces $d > 0$. Por lo que la ecuación (1.9) es cierta.

El razonamiento anterior permite introducir la condición de no arbitraje y la existencia de la tasa libre de riesgo.

DEFINICIÓN. 2

Un arbitraje, es un proceso que valúa un portafolio $X(t)$ que satisface $X(0) = 0$ y que también satisface que para algún tiempo $T > 0$

$$P(X(T) \geq 0) = 1, P(X(T) < 0) = 0. \quad (1.10)$$

Una forma de analizar lo anterior es pensar que se tiene una estrategia de mercado que empieza con un capital de cero, pero algún tiempo después, se tiene probabilidad positiva de ganar dinero sin riesgo de perder. El movimiento en el precio de las acciones es mucho más complicado que el modelo binomial, pero este modelo es utilizado por las siguientes razones:

- El concepto de arbitraje y su relación con el precio neutral al riesgo son claros en el modelo.
- El modelo es usado en la práctica, ya que con un número razonable de periodos, se obtiene una aproximación bastante buena para modelos a tiempo continuo.
- Es posible encontrar soluciones numéricas razonablemente buenas a problemas complicados.

Para entender mejor la valuación de opciones con el método binomial se dan los siguientes ejemplos:

Considérese un *call europeo*, que otorga al poseedor el derecho más no la obligación de comprar un activo al tiempo uno con precio de ejercicio K y que $S_1(d) < K < S_1(u)$, si el precio del subyacente baja, la opción expira y no es ejercida, pero si el precio del subyacente sube, la opción puede ser ejercida y da una ganancia de $S_1(u) - K$. Para resumir esta situación, se dice que al tiempo uno, la opción vale $(S_1 - K)^+$, donde $(\dots)^+$ indica que se tomará el máximo entre cero y el valor dentro del paréntesis. El mayor problema que se tiene es calcular el valor de la opción al tiempo cero.

En el caso que la opción europea sea del tipo *put* esta tendría el valor de $(K - S_1)^+$.

Sea $S_0 = 4$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{4}$. Entonces el valor de los activos al tiempo cero y al tiempo uno están representados en la figura 1.4. Suponga también que el precio de ejercicio de una opción de compra europea es $K = 5$. Además que tiene una inversión inicial de $X_0 = 1.20$ y se compran $\delta_0 = \frac{1}{2}$ activos al tiempo cero. Como la acción vale 4 por activo al tiempo cero, se debe usar la inversión inicial X_0 y pedir prestado 0.80 más para hacerlo. Mediante esta estrategia se adquiere una deuda en el mercado de dinero de 0.08, es decir, $X_0 - \delta_0 S_0 = -0.80$. En el tiempo uno, la posición del efectivo sería $(1 + r)(X_0 - \delta_0 S_0) = -1$, lo que

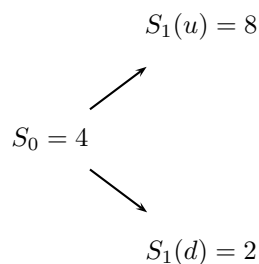


Figura 1.4: Precio de los activos.

significa una deuda de uno. Por otro lado, al tiempo uno se tendrá una acción valuada en $\frac{1}{2}S_1(u) = 4$ o $\frac{1}{2}S_1(d) = 1$. En particular si se obtiene u , el valor del portafolio y de la cuenta en el mercado de dinero sería:

$$X_1(u) = \frac{1}{2}S_1(u) + (1+r)(X_0 - \delta_0 S_0) = 3. \quad (1.11)$$

Por otro lado, si el valor de la acción baja, el valor del portafolio y de la cuenta en el mercado de dinero sería:

$$X_1(d) = \frac{1}{2}S_1(d) + (1+r)(X_0 - \delta_0 S_0) = 0. \quad (1.12)$$

En los dos casos, el valor del portafolio coincide con el valor de la opción al tiempo uno, que es $(S_u - 5)^+ = 3$ o $(S_d - 5)^+ = 0$. Con esto se ha replicado la opción negociándola en el mercado.

En el modelo general de un periodo, se define un *derivado*³, el cual es un activo que paga un monto $V_1(d)$ si se utiliza el factor de baja o $V_1(u)$ si se utiliza el factor de alza.

Para determinar el precio de V_0 al tiempo cero para un derivado, se procederá como en el ejemplo anterior. Supóngase que tiene una inversión de X_0 y que se compran δ_0 activos al tiempo cero, con esto se tiene una posición de efectivo de $X_0 - \delta_0 S_0$. El valor del portafolio de acciones y la cuenta en el mercado de dinero al tiempo uno es de:

$$X_1 = \delta_0 S_1 + (1+r)(X_0 - \delta_0 S_0) = (1+r)X_0 + \delta_0(S_1 - S_0(1+r)). \quad (1.13)$$

³En este caso una opción.

Lo que se desea es elegir X_0 y δ_0 tal que $X_1(u) = V_1(u)$ y $X_1(d) = V_1(d)$. Para que esto suceda también es necesario:

$$X_0 + \delta_0 \left(\frac{1}{1+r} S_1(u) - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} V_1(u) \quad (1.14)$$

$$X_0 + \delta_0 \left(\frac{1}{1+r} S_1(d) - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} V_1(d). \quad (1.15)$$

Una forma de resolver estas ecuaciones es multiplicar la primera por \tilde{p} y multiplicar la segunda por $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$, sumándolas, se obtiene:

$$X_0 + \delta_0 \left(\frac{1}{1+r} [\tilde{p}S_1(u) + \tilde{q}S_1(d)] - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} [\tilde{p}V_1(u) + \tilde{q}V_1(d)]. \quad (1.16)$$

Si se elige \tilde{p} tal que:

$$S_0 = \frac{1}{1+r} [\tilde{p}S_1(u) + \tilde{q}S_1(d)], \quad (1.17)$$

entonces el término que multiplica δ_0 en la ecuación (1.16) es cero, con esto se obtiene una ecuación más sencilla para X_0

$$X_0 = \frac{1}{1+r} [\tilde{p}V_1(u) + \tilde{q}V_1(d)], \quad (1.18)$$

si se divide la ecuación (1.18) en un sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}. \quad (1.19)$$

Si se resuelve para δ_0 , se obtiene la fórmula para la cobertura delta

$$\delta_0 = \frac{V_1(u) - V_1(d)}{S_1(u) - S_1(d)}. \quad (1.20)$$

En conclusión, si un agente comienza con una inversión X_0 y en el tiempo cero compra δ_0 acciones (1.20), en el tiempo uno utilizando el factor de alza dicho agente tendrá un portafolio con valor V_1 y es análogo cuando se utiliza el factor de baja⁴. Dada la estrategia propuesta, al determinar la cantidad a invertir en el mercado de dinero y al obtener la cobertura delta, lo que se concluye es que si el portafolio así construido vale lo mismo que el derivado en el futuro independientemente del escenario que ocurra, entonces el portafolio y el derivado deben valer lo mismo hoy. Por lo tanto el valor del derivado se obtiene al valuar el portafolio al tiempo cero, lo cual es fácil una vez que δ_0 está disponible, es decir:

$$V_0 = \frac{1}{1+r} [\tilde{p}V_1(u) + \tilde{q}V_1(d)]. \quad (1.21)$$

⁴Es importante mencionar que el valor V_1 depende de dos factores, una notación más adecuada sería V_1^ω , donde $\omega = u, d$.

Este precio permite al vendedor hacer una cobertura de la posición corta en el activo. El precio no introduce arbitraje cuando el derivado es agregado al mercado que comprende las acciones y la cuenta del mercado de dinero, cualquier otro precio al tiempo cero implicaría arbitraje. Un agente con una posición larga que tiene un activo con cierto valor, puede crear una cobertura para proteger la pérdida del valor. El número de acciones del activo subyacente que se sujeta a una cobertura de una posición larga es el valor de δ_0 . Para el ejemplo dado anteriormente en la figura 1.4, el valor de la opción utilizando las probabilidades libres de riesgo sería:

$$V_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} \left[\frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}0 \right] = \frac{6}{5} = 1.2.$$

Los números \tilde{p} y \tilde{q} son positivos por la condición de no arbitraje, estos números podrían no ser los mismos que p y q , ya que con estas probabilidades, la tasa de crecimiento promedio de la acción es estrictamente mayor que la tasa de crecimiento de una inversión en el mercado de dinero, entonces p y q deben satisfacer:

$$S_0 < \frac{1}{1+r} [pS_1(u) + qS_1(d)], \quad (1.22)$$

como p y q reflejan las expectativas del inversionista, el sentido de la desigualdad en (1.22) depende en todo caso de si las expectativas del inversionista son de alza o de baja, en este caso las expectativas son de alza. Una de las razones por las cuales no se ocupan p y q como las reales es que si fueran, la tasa de crecimiento promedio de la acción y la tasa de crecimiento de una inversión en el mercado de dinero serían iguales, lo que llevaría a un caso en el que el inversionista estaría libre de riesgo, ya que se incluyeron estas probabilidades para resolver ecuaciones anteriores.

Por lo tanto la ecuación (1.21) para el precio V_0 al tiempo cero de un derivado V_1 es llamada la formula para el precio libre de riesgo para el modelo binomial de un periodo.

Put-call Parity

Cuando se habla de *call* y *put*, el sentido común indica que son distintos, pero es posible lograr que éstos estén relacionados, argumentando lo siguiente: Supóngase que se tiene un *put* largo y un *call* corto, además supongase que los dos tienen la misma fecha de expiración T y el mismo precio de ejercicio K , y sea Π al valor de este portafolio, entonces

$$\Pi = S + P - C,$$

donde P y C son los valores del *put* y del *call* respectivamente. El pago de este portafolio al tiempo de expiración es:

$$S + \text{máx}(K - S, 0) - \text{máx}(S - K, 0). \quad (1.23)$$

la ecuación (1.23) puede ser vista de la siguiente forma

$$S + (K - S) - 0 = K, \text{ si } S \leq K$$

o

$$S + 0 - (S - K) = K, \text{ si } S \geq K.$$

No importa si S es más grande o más pequeña que K , el pago al momento de expirar siempre es el mismo, K . Pero en este momento se tiene la misma pregunta, ¿cuánto se está dispuesto a pagar por un portafolio que da una cantidad garantizada K al tiempo $t = T$? La respuesta a esta pregunta se obtiene descontando el valor de este portafolio $Ke^{-r(T-t)}$. Esto equivale al retorno del portafolio con tasa libre de riesgo, (porque la construcción del portafolio fue libre de riesgo), lo que indica que su rendimiento debe ser igual a la tasa libre de riesgo, otro rendimiento conduciría a una situación aberrante donde se puede construir una estrategia que asegurará un rendimiento seguro y positivo sin necesidad de invertir un solo peso. Supóngase que $S + P - C < Ke^{-r(T-t)}$, por definición, se tiene que $\Pi = S + P - C$ donde Π es el valor del portafolio al tiempo cero. Si la desigualdad se cumple, entonces al tiempo cero se piden prestados $S + P - C$ al mercado de dinero y como esta cantidad es menor que el valor presente del portafolio, al tiempo cero se tiene una cantidad mayor que el precio del portafolio, al final se tiene una pequeña ganancia sin haber invertido un sólo peso, lo que implica que $S + P - C > Ke^{-r(T-t)}$. Si $S + P - C > Ke^{-r(T-t)}$ entonces, haciendo un análisis similar al anterior se ganaría algo sin inversión, lo que sería una situación aberrante, entonces

$$S + P - C = Ke^{-r(T-t)}. \quad (1.24)$$

Esta relación entre el activo subyacente y sus opciones es llamada *put-call parity*. Esta relación dice que bajo ciertas condiciones, un *put* largo y un *call* corto tienen el mismo valor.

1.3.2. Modelo binomial multiperiodo

La definición de estrategia de inversión que se dió anteriormente es suficiente para el modelo de un periodo, sin embargo es importante mencionar que para modelos de más de un periodo es necesario añadir propiedades.

En el modelo binomial multiperiodo cada uno de los periodos depende de los factores de alza y de baja y cada periodo depende del anterior. Este modelo se representa en la figura 1.5.

Para describir la trayectoria del valor de una opción suponga que se encuentra en el tiempo 0. Al tiempo uno, puede tomar uno de dos valores, si sube en $t = 1$ vale $uS(0)$, y siguiendo esa trayectoria, al tiempo 2, la opción puede hacer una de dos cosas, subir o bajar de precio, si sube, en ese momento la opción vale u^2S_0 , por lo tanto el valor de la opción depende de 2 cosas, del valor en el tiempo anterior y del valor de los factores de alza y de baja del tiempo actual.

Lo que se desea determinar es el precio de no arbitraje de una opción al tiempo cero. Supóngase que un agente vende una opción en el tiempo cero a V_0 pesos,

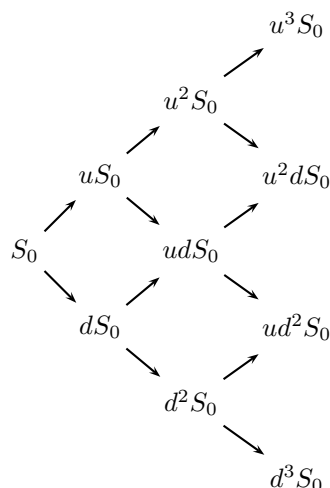


Figura 1.5: Modelo binomial multiperiodo.

pero todavía no se sabe cual es el valor de V_0 . Con el dinero que el agente obtiene de la venta de la opción, este decide comprar δ_0 acciones, invirtiendo $V_0 - \delta_0 S_0$ pesos en el mercado de dinero para poder financiar estas acciones. Es decir, pide prestados $\delta_0 S_0 - V_0$ pesos al mercado de dinero para comprar δ_0 acciones. Al tiempo uno el agente tiene un portafolio valuado en

$$X_1 = \delta_0 S_1 + (1 + r)(V_0 - \delta_0 S_0), \quad (1.25)$$

donde S_1 depende de los factores u y d .

Después, al tiempo 1, el agente tiene un portafolio de valor X_1 pesos y en este momento el agente puede reajustar su estrategia, suponga que decide quedarse con δ_1 acciones, entonces él invierte en el mercado de dinero $X_1 - \delta_1 S_1$. En el siguiente periodo la inversión del agente será:

$$V_2 = \delta_1 S_2 + (1 + r)(X_1 - \delta_1 S_1), \quad (1.26)$$

donde V_2 y S_2 dependen de los factores u y d , es decir, S_2 puede tomar uno de los siguientes valores: $u^2 S_0$, udS_0 , $d^2 S_0$.

Para determinar el precio de no arbitraje de la opción y el precio del portafolio que lo respalda, es necesario resolver las ecuaciones (1.25) y (1.26). Para resolverlas se emplea el supuesto de que estas ecuaciones dependen de los factores de alza y de baja y de las probabilidades neutrales al riesgo, con esto se encuentra una ecuación parecida a la obtenida en la sección anterior (1.21).

Este modelo binomial cuenta con tres procesos estocásticos (δ_0, δ_1) , (X_0, X_1, X_2) y (V_0, V_1, V_2) , donde cada una de estas sucesiones de variables aleatorias depende del tiempo y de los factores u y d , el subíndice indica cuantos periodos tuvieron que pasar para llegar al actual, también indica el número de veces que la opción sube o baja de precio. Es decir, si comienza con una inversión de X_0 y los valores de δ_0 y δ_1 son especificados, entonces es posible calcular el valor de un portafolio financiado por el mercado de dinero que depende del número de acciones que son compradas, entonces se dice que el valor del portafolio al tiempo $n + 1$ es:

$$X_{n+1} = \delta_n S_{n+1} + (1 + r)(X_n - \delta_n S_n). \quad (1.27)$$

Esta ecuación se obtiene de forma recursiva empezando con una inversión de X_0 al tiempo 0. Para ver el detalle del cálculo del valor de X_{n+1} se sugiere consultar el siguiente teorema.

TEOREMA. 1

Considere un modelo binomial para calcular el precio de una acción con N periodos, y suponga que $0 < d < 1 + r < u$ y que tiene las probabilidades libre de riesgo \tilde{p} y \tilde{q} . Sea V_N una variable aleatoria que depende de los primeros N periodos, sea w_i el evento de que pase el tiempo y ocurra una de dos opciones, que el valor de la acción suba o que baje, donde $w_i = d$ si el precio del activo baja en el periodo i y $w_i = u$ si el precio de nuestro activo sube en el tiempo i donde w_i toma el valor de u con probabilidad \tilde{p} y el valor d con probabilidad \tilde{q} . Entonces se define recursivamente de adelante hacia atrás la sucesión de variables aleatorias $V_{N-1}, V_{N-2}, \dots, V_0$ por

$$V_n = \frac{1}{1+r} [\tilde{p}V_{n+1}(w_1 \dots w_n u) - \tilde{q}V_{n+1}(w_1 \dots w_n d)], \quad (1.28)$$

entonces cada V_n depende de las $w_i, i = 1, \dots, n$ donde n corre desde 0 hasta $N - 1$. Entonces:

$$\delta_n = \frac{V_{n+1}(w_1 \dots w_n u) - V_{n+1}(w_1 \dots w_n d)}{S_{n+1}(w_1 \dots w_n u) - S_{n+1}(w_1 \dots w_n d)}, \quad (1.29)$$

donde de nuevo n corre desde 0 hasta $N - 1$. Si se fija $X_0 = V_0$ y define recursivamente hacia adelante en el tiempo los valores X_1, X_2, \dots, X_N por la ecuación 1.27, entonces se tiene:

$$X_N(w_1 w_2 \dots w_n) = V_N(w_1 w_2 \dots w_n), \quad (1.30)$$

para toda sucesión w_i .

este teorema indica que es posible encontrar probabilidades libres de riesgo tales que el valor del derivado sea igual al valor del portafolio, lo que lleva al razonamiento de que existe una forma de respaldar la inversión para asegurar la no pérdida, es decir, proteger la opción con un portafolio que al tiempo N pueda respaldar la inversión. Para entender mejor el modelo binomial multiperiodo, se presenta el siguiente ejemplo: Lo que se desea es encontrar el valor de la opción

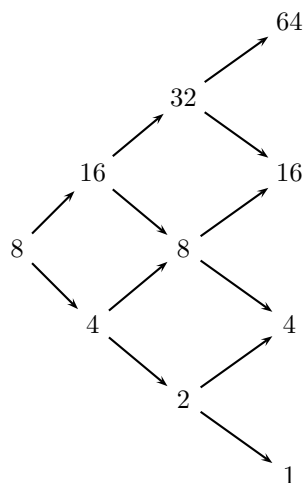


Figura 1.6: Precio de los activos para el Modelo de 3 periodos.

replicando un portafolio que la cubre, pero ahora se observará la trayectoria de la opción en 3 periodos. Suponga que $K = 10$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$, $S_0 = 8$, en la figura 1.6 se encuentran los valores de los activos en cada momento del tiempo.

Se desea encontrar el precio del *put* europeo al tiempo cero, este valor es obtenido de forma recursiva. Supongase que el *put* vence en el tiempo t , entonces se calcula $P_t = (K - S_t, 0)$, donde S_t depende de los factores u y d . Para calcular $P_{t-1} = \frac{\mathbb{E}[P_t]}{1+r}$ es necesario conocer el valor de $P(t)$, donde $\mathbb{E}[P_t] = uS_t\tilde{p} + dS_t\tilde{q}$, $\tilde{p} = 0.4$ y $\tilde{q} = 0.6$ son las probabilidades neutrales al riesgo y $r = 0.1$. Entonces $P_0 = 3.4079$ que es el precio del *put* el día de hoy. En la figura 1.7 encuentra el precio justo para la opción europea del tipo *put*.

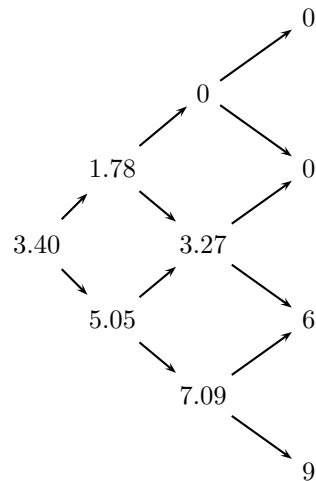
Aquí cada uno de los nodos representa a un periodo del modelo general, con lo que es fácil observar que el modelo es una generalización del modelo binomial de un periodo.

Una forma interesante de ver el modelo multiperiodo para valuar opciones europeas es usando la función de probabilidad binomial

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

donde n número de periodos, p y q son las probabilidades neutrales al riesgo e i es periodo en el que se encuentra.

Es posible encontrar el valor del *put* europeo con la función de probabilidad binomial, para esto es necesario multiplicar por $\max(K - S, 0)$. Es importante conocer esta alternativa, ya que si se sustituyen los valores correctos, se obtiene el valor de la opción en cada uno de los periodos.

Figura 1.7: Valor del *put* Europeo.

1.4. Modelo binomial para opciones americanas

Como se ha mencionado anteriormente, una opción americana es diferente a una europea, lo que implica que la forma de valuarlas es distinta, aunque en algún momento, estos dos tipos de opciones pueden tener relación. Existe un teorema muy importante que dice que el valor de un *call* europeo es igual al del *call* americano. El teorema es el siguiente:

TEOREMA. 2

Sea C_E el valor de un *call* europeo y sea C_A el valor de un *call* americano, entonces $C_E = C_A$.

Demostración

Sea P_E el precio de un *put* europeo. de acuerdo con la paridad *put-call* se tiene

$$C_E - P_E = S_t - e^{-r(T-t)}K.$$

y como $P_E \geq 0$ entonces

$$C_A \geq C_E \geq S_t - e^{-r(T-t)}K \geq S_t - K.$$

De lo anterior, se concluye que la mejor estrategia consiste en conservar el *call* americano hasta la fecha de expiración. Por lo tanto, el precio del *call* americano es igual al precio del *call* europeo.

□

Por el teorema anterior, no se calculará el valor del *call* americano. Esta sección se enfocará en la valuación del *put* americano.

Supóngase que se tiene una opción americana del tipo *put* con $K = 10$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$, $S_0 = 8$, el precio de los activos está representado en la figura 1.6, utilizados en la valuación del *put* europeo. La gran diferencia con el europeo es la posibilidad de ejercer en cualquier momento, por lo anterior se debe analizar en cada instante cuando es el mejor momento para ejercer. En cada nodo se debe traer a valor presente el valor esperado del tiempo futuro que los conecta, entonces se tiene $\max(K - S_t, E(V_{t+1}))$, donde $E(V_{t+1}) = \frac{uV_t\bar{p} + dV_t\bar{q}}{1+r}$ que se representa en la figura 1.7.

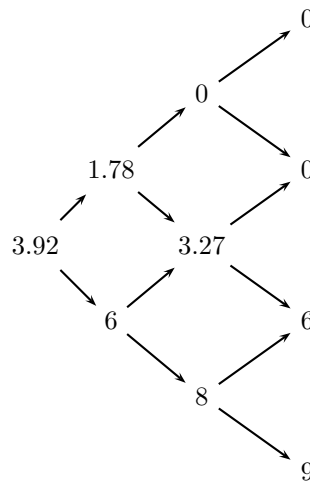


Figura 1.8: Valor del *put* Americano.

Se puede observar que de forma recursiva se ha obtenido el valor de la opción americana al tiempo cero. Si se compara con un *put* europeo con las mismas condiciones, se puede observar que es mayor, esto es porque en cada periodo de la opción americana es necesario comparar el valor de ejercicio contra el valor de mantener la opción. Una vez que se obtuvo el valor del *put*, es necesario replicar un portafolio. Lo primero que se debe hacer es encontrar el valor del *put* al tiempo cero, éste será el valor inicial, es decir, el capital inicial con el que cuenta el vendedor del *put* es $X_0 = 3.9219$. El portafolio al tiempo uno, debe valer lo mismo que la opción al tiempo uno, entonces si la acción sube el valor

del portafolio sería

$$\begin{aligned} X_1(u) &= 1.7851 = 16\delta_0 + (1.1)(3.92 - 8\delta_0) \\ &= 4.312 + 7.2\delta_0, \end{aligned}$$

entonces $\delta_0 = -0.3512$ y cuando la opción baja, el valor de δ_0 es el mismo. Siguiendo con este procedimiento, se calcula el valor de δ_1 y δ_2

$$\begin{aligned} \delta_1(u) &= -0.1364, \\ \delta_1(d) &= -0.7879, \\ \delta_2(uu) &= 0, \\ \delta_2(ud) &= -0.5, \\ \delta_2(dd) &= -1. \end{aligned}$$

Con estas δ 's, dependiendo del valor del subyacente, es posible replicar un portafolio para crear una cobertura de pérdidas futuras con el mismo valor de la opción en ese tiempo, es decir $X_0 = V_0$, $X_1(u) = V_1(u)$ y así sucesivamente para cada uno de los valores.

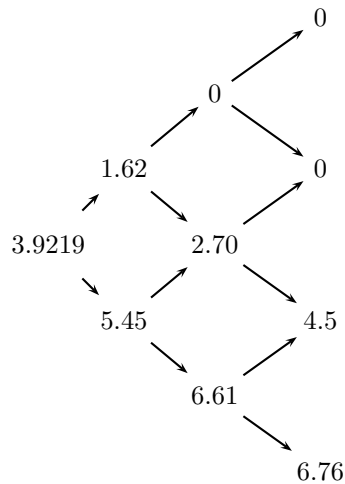


Figura 1.9: Valor presente del *put* Americano.

En la figura 1.9 se encuentra el valor descontado del *put* americano. Esta figura representa una submartingala⁵ bajo las probabilidades libres de riesgo \hat{p} y \hat{q} .

⁵Para ver definición de martingala, submartingala y super martingala ir al apéndice.

Esto es porque en cada nodo el precio descontado del *put* americano es mayor o igual al promedio de los precios descontados de los nodos subsecuentes.

Supóngase que en lugar de valuar cada mes o cada día, se quiere valuar cada segundo, entonces para cada segundo se tendría un periodo, y si se supone que se quiere valuar un año segundo por segundo, el modelo binomial se vuelve inservible, ya que para lograrlo es necesario hacer muchos cálculos. En los siguientes capítulos se presentarán modelos para valuar opciones con mayor exactitud, conocidos como modelos continuos.

Capítulo 2

Cálculo estocástico

En esta sección se dan definiciones que ayudan a entender los modelos financieros continuos, se verán los conceptos básicos de cálculo estocástico¹, la mayoría de los teoremas que son utilizados no serán demostrados por su complejidad, pero se ligan a la bibliografía para ver la demostración.

2.1. Movimiento Browniano

Se trabajará con un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un proceso estocástico es una función medible $X(t, \omega)$ definida en un espacio producto $[0, \infty) \times \Omega$, en particular esta función puede ser vista de dos formas:

- para cada t , $X(t, \cdot)$ es una variable aleatoria,
- para cada ω , $X(\cdot, \omega)$ es una función medible.

Entonces $X(t, \omega)$ es un proceso estocástico, que depende del tiempo t y de ω . Para fines prácticos, este proceso será mencionado como $X(t)$ o X_t .

2.1.1. Caminata aleatoria

Considérese una caminata aleatoria que empieza en cero, con brincos h y $-h$ en los tiempos $\delta, 2\delta, \dots$, donde $h, \delta > 0$. Supongase que se tiene una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, tales que $\mathbb{P}[X_j = h] = \mathbb{P}[X_j = -h] = \frac{1}{2}$. Sea Y una variable aleatoria que depende de h y δ que sirve para crear una sucesión de variables aleatorias Y , se define a $Y(n\delta)$ de la siguiente forma

$$Y(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad (2.1)$$

donde $Y(0) = 0$.

¹Este tema no será visto muy a fondo ya que es muy grande y complicado.

Se define $Y(t)$ para $t > 0$ por linealización, es decir,

$$Y(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y((n+1)\delta), \quad (2.2)$$

para $n\delta < t < (n+1)\delta$. Se puede decir que $Y(t)$ es la posición de la caminata aleatoria al tiempo t . En particular, la ecuación (2.1) es la posición de la caminata aleatoria al tiempo $n\delta$.

Recapitulando, se tiene que la construcción de una caminata aleatoria depende de una sucesión de variables aleatorias que en cada momento del tiempo toma el valor de h o $-h$. Lo que se desea es que cada vez la partición del tiempo sea más pequeña, es decir se quiere que $\delta \rightarrow 0$ y que los brincos en cada momento también sean más pequeños, entonces se desea que el límite de $Y(t)$ cuando δ y h tienden a 0 exista.

Para ver que este límite existe, tómesese el límite cuando δ y h tienden a 0 de la función característica de $Y_{\delta,h}(t)$

$$\lim_{\delta, h \rightarrow 0} \mathbb{E} [\exp [i\lambda Y_{\delta,h}(t)]] ,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ fija. Si $t = n\delta$, por lo tanto $n = \frac{t}{\delta}$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (\exp [i\lambda Y_{\delta,h}(t)]) &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E} e^{i\lambda X_j} \\ &= (\mathbb{E} e^{i\lambda X_j})^n \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{i\lambda h} + \frac{1}{2} e^{-i\lambda h} \right)^n \\ &= (\cos(\lambda h))^n \\ &= (\cos(\lambda h))^{t/\delta}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Es fácil observar que δ y h tienden a cero independientemente pero el límite de la ecuación (2.3) no existe. Para poder lograr que este límite exista es necesario imponer cierta relación entre δ y h . Para obtener el valor que se necesita se deben hacer los siguientes supuestos. Sea $u = (\cos(\lambda h))^{1/\delta}$. Entonces $\ln(u) = \frac{1}{\delta} \ln(\cos(\lambda h))$. Para poder llegar a donde se desea, es necesario conocer 2 aproximaciones

$$\cos(\lambda h) \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 h^2, \quad \text{para } h \text{ pequeña y}$$

$$\ln(1+x) \approx x, \quad \text{para } x \text{ pequeña.}$$

Con las dos se obtiene

$$\ln(\cos(\lambda h)) \approx \ln \left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 h^2 \right) \approx -\frac{1}{2} \lambda^2 h^2.$$

Entonces para δ y h pequeñas se tiene que $\ln(u) \approx -\frac{1}{2\delta}\lambda^2 h^2$ por lo tanto

$$u \approx \exp\left[-\frac{1}{2\delta}\lambda^2 h^2\right].$$

Entonces por la ecuación (2.3) se tiene

$$\mathbb{E}[\exp[i\lambda Y_{\delta,h}(t)]] = \exp\left[-\frac{1}{2}t\lambda^2 h^2\right]. \quad (2.4)$$

En particular, si δ y h tienen la relación $h^2 = \delta$ se tiene

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}[\exp[i\lambda Y_{\delta,h}(t)]] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Con lo anterior se ha encontrado una caminata aleatoria cuando δ y h tienden a cero cuando δ y h tienen la relación $h^2 = \delta$.

TEOREMA. 3

Sea $Y(t)$ una caminata aleatoria que comienza en 0 con brincos en cada momento del tiempo $\delta, 2\delta, \dots$ de h y $-h$. Supóngase también que existe una relación entre δ y h tal que $h^2 = \delta$. Entonces para cada $t > 0$ el límite

$$W(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} Y(t),$$

existe, más aun,

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda W(t)}] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}. \quad (2.5)$$

El proceso estocástico definido en el teorema 3 mejor conocido como movimiento browniano debe cumplir las siguientes propiedades:

1. El valor absoluto de la pendiente $Y_{t,\delta}$ en cada paso del tiempo es $h/\delta = 1/\sqrt{\delta} \rightarrow \infty$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Por esto se dice que la trayectoria del movimiento browniano no es diferenciable en ningún punto. Si se toma $\delta = |t - s|$, entonces

$$|W(t) - W(s)| \approx \frac{1}{\sqrt{\delta}}|t - s| = |t - s|^{\frac{1}{2}}.$$

2. Casi todas las trayectorias aleatorias del movimiento $W(t)$ son continuas.
 3. Para cada t , $W(t)$ es una variable aleatoria que se distribuye normal con media 0 y varianza t . Esta propiedad es consecuencia directa de la ecuación (2.5).
 4. El proceso estocástico $W(t)$ tiene incrementos independientes, es decir, para cualquier $0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_n$ las variables aleatorias $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ son independientes.
-

2.1.2. Construcción del movimiento Browniano

En la sección anterior se construyó una caminata aleatoria, con un pequeño análisis se llegó a la conclusión de que el $\lim_{\delta \rightarrow 0} Y(t)$ existe y converge a $W(t)$, justificado por el teorema 3. El proceso estocástico mencionado en este teorema es conocido como *Movimiento Browniano*. La definición formal de este movimiento es la siguiente:

DEFINICIÓN. 3

Sea $W(t)$ un proceso estocástico, este proceso es conocido como movimiento browniano si cumple las siguientes condiciones:

1. $\mathbb{P}\{\omega; W(0, \omega) = 0\} = 1$.
2. Para toda $0 \leq s < t$ la variable aleatoria $W(t) - W(s)$ se distribuye normal con media 0 y varianza $t - s$, es decir, para toda $a < b$

$$\mathbb{P}\{a \leq W(t) - W(s) \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-x^2/2(t-s)} dx. \quad (2.6)$$

3. $W(t, \omega)$ tiene incrementos independientes, es decir, para $0 \leq t_1 < t_2 < t_n$ las variables aleatorias

$$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}),$$

son independientes.

4. Las caminatas aleatorias de $W(t, \omega)$ son funciones continuas, es decir, $\mathbb{P}\{\omega; W(\cdot, \omega) \text{ sea continua}\} = 1$.

Como se menciona en la definición, los incrementos en el movimiento Browniano son independientes, lo que implica que la función de densidad conjunta de variables aleatorias normales es determinada por sus esperanzas y sus covarianzas. Por lo anterior, es posible dar la siguiente caracterización del Movimiento Browniano.

TEOREMA. 4

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Suponga que para cada $\omega \in \Omega$, existe una función continua $W(t)$ con $t \geq 0$ tal que $W(0) = 0$ y $W(t)$ depende de ω . Entonces las siguientes tres propiedades son equivalentes:

1. Para toda $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ los incrementos

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1}), \quad (2.7)$$

son independientes y cada uno de los incrementos se distribuye normal con esperanza cero y varianza $t_{i+1} - t_i$.

2. Para toda $t_0 < t_1 < \dots < t_m$, las variables aleatorias $W(t_1), \dots, W(t_m)$, son la función de densidad conjunta de variables aleatorias que se distribuyen normal con esperanza cero y con matriz de covarianza la matriz de covarianza del movimiento Browniano (2.8).

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}[W^2(t_1)] & \mathbb{E}[W(t_1)W(t_2)] & \dots & \mathbb{E}[W(t_1)W(t_m)] \\ \mathbb{E}[W(t_2)W(t_1)] & \mathbb{E}[W^2(t_2)] & \dots & \mathbb{E}[W(t_2)W(t_m)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{E}[W(t_m)W(t_1)] & \mathbb{E}[W(t_m)W(t_2)] & \vdots & \mathbb{E}[W^2(t_m)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_2 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_m & t_m & \dots & t_m \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

3. Para toda $t_0 < t_1 < \dots < t_m$, las variables aleatorias $W(t_1), \dots, W(t_m)$ tienen función generadora de momentos la ecuación (2.9).

$$\begin{aligned} \varphi(u_1, u_2, \dots, u_m) = & \\ \exp \left\{ \frac{1}{2}(u_1 + \dots + u_m)^2 t_1 + \frac{1}{2}(u_2 + \dots + u_m)^2 (t_2 - t_1) + \dots \right. & (2.9) \\ \left. + \frac{1}{2}(u_{m-1} + u_{m-2})^2 (t_{m-1} - t_{m-2}) + \frac{1}{2}(u_m)^2 (t_m - t_{m-1}) \right\}. & \end{aligned}$$

Si alguna de las tres propiedades sucede entonces $W(t)$, $t \geq 0$ es un movimiento Browniano.

Para ver la demostración de este teorema consultar [12]. Es importante mencionar que la función $t = W(t)$ es con probabilidad 1 una función continua en $[0, T]$, esta es una propiedad del movimiento Browniano.

Para todo modelo probabilístico en donde se estudien periodos y en específico para el movimiento Browniano, es necesario introducir una variable que permita trabajar con la información que se tiene disponible, esta variable es conocida como filtración. Utilizando la información que se tiene, es posible hacer una caracterización del movimiento Browniano, esta es la siguiente.

TEOREMA. 5

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, en el cual el movimiento Browniano $W(t)$, $t \geq 0$ está definido. Una filtración para el movimiento Browniano es una colección de σ -álgebras $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$, que satisface:

- Para $0 \leq s < t$, todo conjunto en $\mathcal{F}(s)$ también está en $\mathcal{F}(t)$. Esto es llamado acumulación de información.
 - Para cada $t \geq 0$, el movimiento Browniano $W(t)$ al tiempo t es $\mathcal{F}(t)$ -medible. Que una variable aleatoria cumpla con esto quiere decir que es adaptable.
-

- Para $0 \leq t < u$, los incrementos $W(u) - W(t)$ son independientes de $\mathcal{F}(t)$, cuando esto sucede, se dice que la σ -álgebra tiene independencia en los incrementos futuros.

Sea $\delta(t)$, $t \geq 0$ un proceso estocástico. Se dice que $\delta(t)$ es adaptada a la filtración $\mathcal{F}(t)$ si para cada $t \geq 0$ la variable aleatoria $\delta(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible.

Propiedades del movimiento Browniano

TEOREMA. 6

El movimiento Browniano es una Martingala².

Demostración

Sea W_t un movimiento Browniano y sea $0 \leq s \leq t$ dada, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W(t)|\mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}[(W(t) - W(s)) + W(s)|\mathcal{F}(s)] \\ &= \mathbb{E}[W(t) - W(s)|\mathcal{F}(s)] + \mathbb{E}[W(s)|\mathcal{F}(s)] \\ &= \mathbb{E}[W(t) - W(s)] + W(s) \\ &= W(s). \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN. 1

Para toda $t > 0$, $W(t)$ se distribuye normal con media 0 y varianza t . Para toda $s, t > 0$ se tiene que $\mathbb{E}[W(s)W(t)] = \min\{s, t\}$.

Demostración

Por la condición 1 de la definición 4 se tiene que $W(t) = W(t) - W(0)$ entonces usando la condición 2 de la definición 4, se obtiene la primer afirmación. Para demostrar que $\mathbb{E}[W(s)W(t)] = \min\{s, t\}$ es necesario suponer que $s < t$, por las condiciones 2 y 3 de la definición 4 se tiene

$$\mathbb{E}[W(s)W(t)] = \mathbb{E}[W(s)(W(t) - W(s)) + W(s)^2] = 0 + s = s = \min\{s, t\}.$$

□

PROPOSICIÓN. 2

El proceso estocástico $\tilde{W}(t) = W(t + t_0) - W(t_0)$ también es un movimiento browniano para alguna $t_0 \geq 0$ fija.

Demostración

Se observa que el proceso estocástico $\tilde{W}(t)$ cumple las propiedades 1 y 4 de la definición 4. Para cualquier $s \leq t$ se tiene

$$\tilde{W}(t) - \tilde{W}(s) = W(t + t_0) - W(s + t_0), \quad (2.10)$$

²Para ver definición de Martingala, ver la Apéndice A.

donde por la condición 2 de la definición 4 se observa que $\tilde{W}(t) - \tilde{W}(s)$ se distribuye normal con media 0 y varianza $(t + t_0) - (s + t_0) = t - s$. Con lo anterior se cumple la condición 2 de la definición 4. Para verificar que cumple la condición 3 se supondrá que $t_0 > 0$, entonces para $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, se tiene $0 < t_0 \leq t_1 + t_0 < t_2 + t_0 < \dots < t_n + t_0$. Por lo tanto por la condición 3 de la definición 4 $W(t_k + t_0) - W(t_{k-1} + t_0)$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ son variables aleatorias independientes. Entonces por la ecuación (2.10) las variables aleatorias $\tilde{W}(t_k) - \tilde{W}(t_{k-1})$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ son independientes, lo que implica que el proceso estocástico $\tilde{W}(t)$ es un movimiento Browniano. \square

PROPOSICIÓN. 3

El proceso estocástico $\tilde{W}(t) = W(\lambda t)/\sqrt{\lambda}$ también es un movimiento browniano, esto se cumple para toda $\lambda > 0$.

Demostración

Las condiciones 1, 3 y 4 de la definición 4 se dejarán pendientes por su falta de complejidad. Para demostrar la condición 2 nótese que para toda $s < t$,

$$\tilde{W}(t) - \tilde{W}(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (W(\lambda t) - W(\lambda s)).$$

Lo que demuestra que $\tilde{W}(t) - \tilde{W}(s)$ se distribuye normal con media 0 y varianza $\frac{1}{\lambda}(\lambda t - \lambda s) = t - s$. Por lo tanto $\tilde{W}(t)$ cumple la condición 2. \square

Uno de los teoremas más importantes del movimiento browniano es el siguiente:

TEOREMA. 7

Sea $W(t)$, $t \geq 0$ un movimiento browniano y sea $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$ la filtración para nuestro movimiento browniano. Entonces $W(t)$, $t \geq 0$ es un proceso de Markov.

Para ver demostración consultar [12].

Utilizando el movimiento Browniano, se puede construir otro movimiento que es conocido como Movimiento Browniano geométrico y está definido de la siguiente forma.

DEFINICIÓN. 4

Sean μ y $\sigma > 0$ constantes, entonces se define el movimiento geométrico browniano como sigue:

$$S(t) = S(0)e^{\sigma W(t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}. \quad (2.11)$$

El movimiento Browniano geométrico es una de las herramientas más útiles en el mundo financiero, ya que es la base de muchos de sus modelos.

2.1.3. Integral de Wiener

En esta sección se definirá la integral de Wiener, este tipo de integrales son de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(t)dW(t, \omega), \quad (2.12)$$

donde $f(\omega)$ es una función determinística y $W(t, \omega)$ es un movimiento browniano.

Las integrales de la forma (2.12), sólo pueden ser definidas como una integral de *Riemann-Stieltjes* para funciones con variaciones acotadas³. Si son funciones con variaciones no acotadas, estas funciones no pueden ser definidas con la siguiente ecuación .

$$(RS) \int_a^b f(t)dW(t, \omega) = f(t)W(t, \omega)]_a^b - (RS) \int_a^b W(t, \omega)df(t). \quad (2.13)$$

Sin embargo, todas las funciones pueden ser definidas por la *Integral de Wiener* de f , ésta integral está definida por todas las funciones $f \in L^2[a, b]$, donde $L^2[a, b]$ representa el espacio de Hilbert⁴.de todas las funciones integrables en $[a, b]$. Para poder definir la integral de Wiener es necesario hacerlo en dos partes. Sea f una función simple definida por $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{[t_{i-1}, t_i]}$ donde $t_0 = a$ y $t_n = b$. Para el caso del movimiento browniano, la función está definida de la siguiente forma:

$$I(f) = \sum_{i=1}^n a_i(W(t_i) - W(t_{i-1})). \quad (2.14)$$

Se sabe que $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$ para toda $a, b \in \mathbb{R}$ y f, g funciones simples. Más aún, la función definida en (2.14) cumple el siguiente lema.

LEMA. 1

Para una función simple f , la variable aleatoria $I(f)$ es Gaussiana, con media 0 y varianza

$$\mathbb{E} (I(f)^2) = \int_a^b f(t)^2 dt. \quad (2.15)$$

Demostración

Se sabe que una combinación lineal de variables aleatorias independientes que se distribuyen normal, también se distribuyen normal. Por lo tanto, por las condiciones 2. y 3. del Movimiento Browniano, la variable aleatoria $I(f)$ definida

³Para saber más de funciones de variaciones acotadas consultar [12]

⁴Se dice que H es un espacio de Hilbert si es completo con respecto a la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

por la ecuación (2.14) se distribuye normal con media 0. Para validar que la varianza es la ecuación (2.15), se observa lo siguiente:

$$\mathbb{E}(I(f)^2) = \mathbb{E} \sum_{i,j=1}^n a_i a_j (W(t_i) - W(t_{i-1}))(W(t_j) - W(t_{j-1})).$$

Por las condiciones 2. y 3. de movimiento Browniano,

$$\mathbb{E}(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 = t_i - t_{i-1},$$

y para $i \neq j$,

$$\mathbb{E}((W(t_i) - W(t_{i-1}))(W(t_j) - W(t_{j-1}))) = 0.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}(I(f)^2) = \sum_{i=1}^n a_i^2 (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Con lo anterior, se ha terminado la primer parte de la demostración. Para la segunda, se usará $L^2(\Omega)$ para denotar al espacio de Hilbert de las variables aleatorias cuadradas real-valoradas sobre Ω con producto interno $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$. Sea $f \in L^2[a, b]$. Seleccione una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $f_n \rightarrow f$ en $L^2[a, b]$. Por el lema 1, la sucesión $\{I(f_n)\}_{n=1}^\infty$ es Cauchy en $L^2(\Omega)$. Por lo tanto converge en $L^2(\Omega)$,

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n), \quad I(f) \in L^2(\Omega). \quad (2.16)$$

Para que $I(f)$ esté bien definida, es necesario demostrar que el límite en la ecuación (2.16) es independiente de la selección de la sucesión $\{f_n\}$. Sea $\{g_m\}$ otra sucesión tal que $g_m \rightarrow f$ en $L^2[a, b]$. Como I es una función lineal se puede usar la ecuación (2.15) se obtiene

$$\mathbb{E}(|I(f_n) - I(g_m)|^2) = \mathbb{E}(|I(f_n - g_m)|^2) = \int_a^b (f_n(t) - g_m(t))^2 dt.$$

Si se toma $f_n(t) - g_m(t) = [f_n(t) - f(t)] - [g_m(t) - f(t)]$ y se usa la desigualdad $(x - y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ para obtener

$$\begin{aligned} & \int_a^b (f_n(t) - g_m(t))^2 dt \leq \\ & 2 \int_a^b ([f_n(t) - f(t)]^2 + [g_m(t) - f(t)]^2) dt \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n, m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

de lo que se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} I(g_m)$ en $L^2(\Omega)$.

Lo que demuestra que $I(f)$ está bien definida. □

DEFINICIÓN. 5

Sea $f \in L^2[a, b]$. El límite definido en la ecuación (2.16) es conocido como integral de Wiener de f .

La integral $I(f)$ de f está dada por

$$I(f)(\omega) = \left(\int_a^b f(t) dW(t) \right) (\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

TEOREMA. 8

Para cada $f \in L^2[a, b]$, la integral de Wiener $\int_a^b f(t) dW(t)$ es una variable aleatoria Gaussiana con media 0 y varianza $\|f\|^2 = \int_a^b f(t)^2 dt$.

Demostración

Cuando f es una función simple, la afirmación se cumple por el lema 1. Para una función cualquiera, sea $f \in L^2[a, b]$, la afirmación se cumple por la siguiente justificación. Si X_n se distribuye normal con media μ_n y varianza σ_n^2 y X_n converge a X en $L^2(\Omega)$, entonces X se distribuye normal con media $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ y varianza $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2$. □

Por lo tanto la integral de Wiener $I : L^2[a, b] \rightarrow L^2(\Omega)$ es una isometría. Más aún, preserva el producto interno, esto será demostrado en el siguiente corolario.

COROLARIO. 1

Si $f, g \in L^2[a, b]$, entonces

$$\mathbb{E}(I(f)I(g)) = \int_a^b f(t)g(t)dt. \quad (2.17)$$

En particular, si f y g son ortogonales, entonces las variables aleatorias $I(f)$ e $I(g)$ son independientes.

Demostración

Usando que la función I es lineal, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(I(f) + I(g))^2] &= \mathbb{E} [(I(f + g))^2] \\ &= \int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt \\ &= \int_a^b f(t)^2 dt + \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b g(t)^2 dt. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por otro lado, si se usa el teorema 8, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(I(f) + I(g))^2] &= \mathbb{E}[I(f)^2 + 2I(f)I(g) + I(g)^2] \\ &= \int_a^b f(t)^2 dt + 2\mathbb{E}[I(f)I(g)] + \int_a^b g(t)^2 dt. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Se observa que la ecuación (2.17) se obtiene igualando (2.18) y (2.19). \square

TEOREMA. 9

Sea f una función continua de variaciones acotadas. Entonces para casi toda $\omega \in \Omega$,

$$\left(\int_a^b f(t) dW(t) \right) (\omega) = (RS) \int_a^b f(t) dW(t, \omega),$$

donde la parte izquierda de la ecuación es la integral de Wiener de f y la parte derecha de la ecuación es la integral de Riemann-Stieltjes de f definida en (2.19)

Para ver demostración consultar [12].

2.2. Integral de Itô

Sea $W(t, \omega)$ un movimiento browniano, se define $\int_a^b f(t, \omega) dW(t, \omega)$ como la integral de Itô⁵, $f(t, \omega)$ es un proceso estocástico adaptado⁶ con respecto a la filtración $\mathcal{F}_t = \sigma \{W(s); s \leq t\}$ y $\int_a^b \mathbb{E}(|f(t)|^2) dt < \infty$. Cuando el término $f(t)$ es determinístico, la integral de Itô se reduce a la integral de Riemann.

Motivación

La teoría estocástica de la integral de Itô originalmente fue motivada como un método de construcción del proceso de difusión⁷ para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas. Otra forma de motivar esta integral es con martingalas. Sea $W(t)$ un movimiento browniano, supóngase que $f(t)$ es una función determinística en $L^2[a, b]$. Haciendo referencia el teorema 22 se obtiene que el proceso estocástico $M_t = \int_a^t f(s) dW(s)$, $a \leq t \leq b$, es una martingala. Es posible observar que la integral de Itô es muy parecida a la ecuación anterior, pero no es igual. Para poder hacer que la integral de Itô sea una martingala, es necesario hacerlo por pasos. Supóngase que $f(t) = W(t)$, entonces se tiene $\int_a^b W(s) dW(s)$. Para calcularla se hace lo siguiente:

$$L_n = \sum_{i=1}^n W(t_{i-1})(W(t_i) - W(t_{i-1})),$$

$$R_n = \sum_{i=1}^n W(t_i)(W(t_i) - W(t_{i-1})),$$

entonces

$$L_n - R_n = \sum_{i=1}^n (W(t_i) - W(t_{i-1}))^2. \quad (2.20)$$

⁵Definida en el año 1944.

⁶En la época en la que Itô desarrolló esta integral, el concepto de adaptabilidad no existía, él decía que era no anticipado.

⁷El proceso de difusión es una subclase del proceso de Markov.

El valor del $\lim_{n \rightarrow \infty} (L_n - R_n)$, si este existe, es la variación cuadrática del movimiento browniano. El siguiente teorema muestra que cuando el movimiento browniano fluctúa mucho, la variación cuadrática es cero.

TEOREMA. 10

Sea $\Delta_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ una partición finita del intervalo $[a, b]$, entonces

$$\sum_{i=1}^n (W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 \rightarrow b - a, \quad (2.21)$$

en $L^2(\Omega)$ cuando $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$ tiende a 0.

Para ver la demostración de este teorema consultar [12]. Si se aplica el teorema 10 a la ecuación (2.21) se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L_n - R_n) = b - a, \quad L_n \text{ o } R_n \in L^2. \quad (2.22)$$

2.2.1. Interpretación financiera de la integral de Itô

La integral de Itô es usada para modelar el valor de un portafolio que resulta de tratar acciones a tiempo continuo. La integral de Itô es

$$\int_0^T \delta(t) dW(t), \quad (2.23)$$

donde T es un número fijo, los ingredientes básicos en esta integral son $W(t)$, $t \geq 0$ que es un movimiento Browniano, junto con una filtración $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$ para este movimiento Browniano. Se dice que el integrando $\delta(t)$ sea una adaptación de un proceso estocástico, la razón para esto es que $\delta(t)$ será la posición que se tomará en un activo al tiempo t y depende de la trayectoria del precio del activo hasta el tiempo t . Que $\delta(t)$ sea adaptado quiere decir que $\delta(t)$ sea $\mathcal{F}(t)$ -medible para cada $t \geq 0$.

Lo que dice esta definición es que X_t es adaptado si con la información de \mathcal{F}_t es posible determinar cualquier cosa respecto a X_t . El problema que se enfrentará para darle sentido a la integral de Itô (2.23) es que las trayectorias del movimiento Browniano no son derivables con respecto al tiempo, entonces si se toma una función $g(t)$ diferenciable se obtiene:

$$\int_0^T \delta(t) dg(t) = \int_0^T \delta(t) g'(t) dt, \quad (2.24)$$

donde la parte derecha es una integral ordinaria (Lebesgue) con respecto al tiempo. Existe un teorema muy importante que da una caracterización de la integral de Itô, este es el siguiente.

TEOREMA. 11

La integral de Itô definida por (2.23) es una martingala.

Para ver demostración consultar [12].

2.3. Modelo simple para calcular el precio de los activos

Una de las razones por las que los activos se mueven de manera aleatoria es por la *hipótesis del mercado eficiente*, esta hipótesis tiene muchos supuestos, pero básicamente se basa en dos cosas:

- La información del pasado está completamente reflejada en el precio del presente, pero no da más información.
- Los mercados responden inmediatamente a cualquier información acerca del precio de un activo.

Con estas hipótesis, se puede concluir que el cambio en el precio de los activos se pueden modelar como un *proceso de Markov*.

Para poder deducir el modelo simple, es necesario tomar en cuenta algunos supuestos. Es posible observar que el cambio absoluto en el precio de un activo no es una cantidad representativa, ya que el cambio de un peso en el valor de un activo de 30 pesos es mucho más representativo que cuando el activo cuesta 300, por lo anterior no es posible utilizar este valor, en cambio, es posible utilizar el *retorno*, que se define como el cambio en el precio del activo dividido entre su valor original, lo que da una medida relativa del cambio del precio de éste.

Ahora suponga que al tiempo t el precio del activo es S , considere también un pequeño intervalo de tiempo dt , durante el cual S cambia a $S + dS$, como se observa en la Figura 2.1. En este momento surge un problema, ¿cómo es posible modelar el retorno correspondiente al activo $\frac{dS}{S}$? El modelo más común descompone el retorno en dos partes, una determinista y la otra es representada como una variable estocástica.

La parte determinista, es semejante al retorno del dinero invertido en un banco sin riesgo, lo que da la contribución del siguiente término de $\frac{dS}{S}$

$$\mu dt, \tag{2.25}$$

donde μ es una medida del promedio del rango del crecimiento del precio del activo, conocido como *drift*. En modelos simples, μ es tomada como constante y en otros puede ser tomada como función de S y t .

La segunda parte que forma el modelo es la parte aleatoria, que es representada por el cambio aleatorio del precio de la opción en respuesta a los factores externos que afectan el precio del activo, como una noticia inesperada. Esta es representada por una variable aleatoria que se distribuye normal con media cero, lo que agrega el siguiente término al modelo

$$\sigma dW. \tag{2.26}$$

σ es un número llamado *volatilidad*. Ésta mide la desviación estándar del retorno, dW es una variable aleatoria que se distribuye normal y es conocida como *proceso de Wiener*, dW da la parte aleatoria al modelo, y esta parte es esencial para predecir el valor de los activos. El Proceso de Wiener tiene las siguientes propiedades:

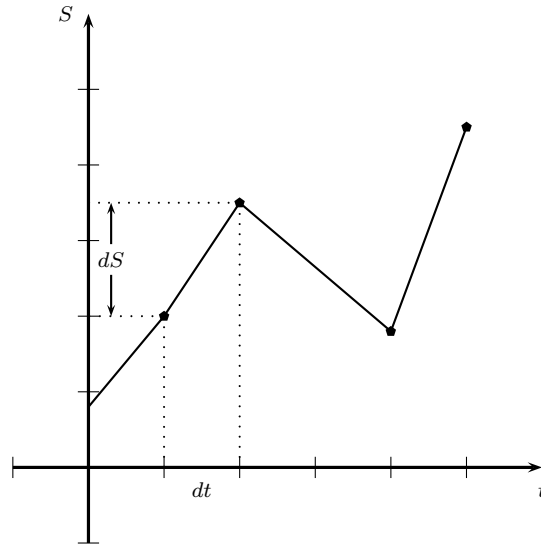


Figura 2.1: Caminata aleatoria.

1. dW es una variable aleatoria que se distribuye normal.
2. La esperanza de dW es cero.
3. La varianza de dW es dt .

Lo anterior se puede ver de la siguiente forma

$$dW = d\phi\sqrt{dt}, \quad (2.27)$$

donde ϕ es una variable aleatoria tomada de una distribución normal estándar. Teniendo todos los datos, es posible armar el modelo

$$\frac{dS}{S} = \sigma dW + \mu dt. \quad (2.28)$$

Éste tipo de ecuación es conocida como *ecuación diferencial estocástica*, que es la representación matemática para calcular de forma simple el valor de un activo.

Tomando $\sigma=0$ se tiene una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dS}{S} = \mu dt, \quad (2.29)$$

y cuando μ es constante, la solución de esta ecuación diferencial es

$$S(t) = S_0 e^{\mu t - t_0}, \quad (2.30)$$

donde S_0 es el valor del activo al tiempo $t = t_0$, por lo que cuando el modelo es determinístico, la solución se encuentra con facilidad.

La ecuación (2.28) es un caso particular de un caminata aleatoria. Existe una forma de aproximar la ecuación (2.28)

$$\frac{dS}{S} = \sigma dW + \mu dt \approx \frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t}. \quad (2.31)$$

2.4. Precio neutral al riesgo

En la sección 1.2 se utilizó el modelo binomial del precio de un activo para encontrar el precio de un derivado determinando el capital inicial de una cobertura para una posición corta. En el modelo binomial de dos periodos, se obtuvieron seis ecuaciones con seis incógnitas, estas incógnitas representan lo siguiente:

- La posición que la cobertura debe tomar en el activo subyacente al tiempo cero.
- La posición tomada por la cobertura al tiempo uno si sube.
- La posición de la cobertura al tiempo uno si baja.
- El valor del derivado al tiempo cero.
- El valor de derivado al tiempo uno si sube.
- El valor del derivado al tiempo uno si baja.

Además se observó que estas ecuaciones pueden resolverse sustituyendo las probabilidades libres de riesgo \tilde{p} y \tilde{q} dadas por (1.19), en (1.28) y luego calculando la posición de la cobertura bajo estas probabilidades en (1.29), entonces, la ecuación (6) dice que, bajo las probabilidades libres de riesgo el valor descontado del derivado es una martingala.

Lo que se hará en esta sección es definir lo que es una medida de probabilidad libre de riesgo, para poder resolver ecuaciones diferenciales parciales.

2.4.1. Medida neutral libre de riesgo

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y Z una variable aleatoria no negativa que satisface $\mathbb{E}Z = 1$. Entonces es posible definir una nueva medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ por la formula

$$\tilde{\mathbb{P}} = \int_A Z(w) d\mathbb{P}(w), \text{ para toda } A \in \mathcal{F}. \quad (2.32)$$

Por el teorema 23 se sabe que cualquier variable aleatoria X tiene dos esperanzas, una bajo su mediada original y otra bajo la nueva medida, esta relación se representa en la siguiente ecuación

$$\tilde{\mathbb{E}} = \mathbb{E}[XZ]. \quad (2.33)$$

Lo que se desea hacer es un cambio de medida similar a la del teorema 23, pero ahora será para todo un proceso y no sólo para una variable aleatoria. Para fijar el escenario, supóngase que se tiene un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una filtración $\mathcal{F}(t)$, definida en $0 \leq t \leq T$ donde T es el tiempo final fijo. Supóngase también que Z es una variable aleatoria positiva casi seguramente que satisface $\mathbb{E}Z = 1$, y se definirá a $\tilde{\mathbb{P}}$ por (2.32). Con lo anterior, se define el proceso de la derivada de Radon-Nikodym como sigue:

$$Z(t) = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}(t)], \quad (2.34)$$

donde por la condición de iteración, la derivada de Radon-Nikodym (2.34) es una martingala, es decir para $0 \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}(t)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}(t)]|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}(s)] = Z(s). \quad (2.35)$$

En los siguientes lemas, se darán propiedades importantes que este proceso satisface.

LEMA. 2

Sea t dada que satisface $0 \leq t \leq T$, y sea Y una variable aleatoria $\mathcal{F}(t)$ -medible. Entonces

$$\tilde{\mathbb{E}}Y = \mathbb{E}[YZ(t)]. \quad (2.36)$$

LEMA. 3

Sean s y t dadas que satisfacen $0 \leq s \leq t \leq T$, y sea Y una variable aleatoria $\mathcal{F}(t)$ -medible. Entonces

$$\tilde{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)} \mathbb{E}[YZ(t)|\mathcal{F}(s)]. \quad (2.37)$$

Revisar [12] para ver la demostración de ambos lemas.

Basado en los lemas anteriores, se llega a uno de los teoremas más importantes, el *Teorema de Girsanov* para una dimensión.

TEOREMA. 12

Sea $W(t)$ un movimiento browniano con $0 \leq t \leq T$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y sea $\mathcal{F}(t)$, $0 \leq t \leq T$, una filtración para este movimiento browniano. Sea $\Theta(t)$ un proceso de adaptación con $0 \leq t \leq T$. Se define

$$Z(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \Theta(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta^2(u) du \right\}, \quad (2.38)$$

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u) du, \quad (2.39)$$

fijando $Z = Z(T)$ se asume que

$$\mathbb{E} \int_0^T \Theta^2(u) Z^2(u) du < \infty. \quad (2.40)$$

Entonces $\mathbb{E}Z = 1$ y bajo la medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ dada por (2.32), el proceso $\tilde{W}(t)$, $0 \leq t \leq T$ es un movimiento browniano.

El teorema 12 es de gran importancia ya que las dos medidas de probabilidad en él son equivalentes⁸. Lo que dice este teorema es que dada una medida de probabilidad es posible encontrar otra nueva medida de probabilidad equivalente bajo la cual una nueva variable aleatoria definida como en (3.78) es un movimiento browniano.

En el apéndice se podrán apreciar algunos ejemplos de como se calcula el valor de una acción bajo la medida neutral al riesgo y una valuación de un derivado con la misma medida encontrando las siguientes ecuaciones

$$D(t)V(t) = \tilde{\mathbb{E}}[D(T)V(T)|\mathcal{F}(t)], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.41)$$

y

$$V(t) = \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-\int_t^T R(u)du} V(T) | \mathcal{F}(t) \right], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.42)$$

que serán conocidas como la fórmula de precio neutral al riesgo para el tiempo continuo.

2.4.2. Teorema de representación de una martingala

La ecuación neutral al riesgo (2.42), fue encontrada bajo el supuesto de que si se inicia con el capital inicial correcto, es posible encontrar un proceso de portafolio donde al tiempo final T el valor del portafolio es igual a $V(t)$ casi seguramente. Bajo estos supuestos, el capital inicial correcto sería

$$V(0) = \tilde{\mathbb{E}}[D(T)V(T)], \quad (2.43)$$

y el valor del portafolio a cualquier tiempo $t, 0 \leq t \leq T$ será $V(t)$ dado por la ecuación (2.42).

La existencia de un portafolio con cobertura, con un movimiento Browniano esta dada por el siguiente teorema.

TEOREMA. 13

Sea $W(t), 0 \leq t \leq T$, un movimiento Browniano en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y sea $\mathcal{F}(t)$, la filtración generada por este movimiento Browniano. Sea $M(t), 0 \leq t \leq T$, una martingala con respecto a esta filtración, (es decir, para toda $t, M(T)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible, y para $0 \leq s \leq t \leq T, \mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}(s)] = M(s)$). Entonces, existe un proceso adaptado $\Gamma(u), 0 \leq u \leq T$, tal que

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \Gamma(u) dW(u), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.44)$$

El teorema 13 es conocido con *Teorema de representación de la Martingala*. Este teorema es útil cuando la filtración es generada por el movimiento Browniano, entonces toda martingala bajo esta filtración es una condición inicial más una integral de Itô con respecto al movimiento Browniano. La importancia de hacer

⁸Ver definición 26.

una cobertura es que sólo hay un elemento aleatorio, que es movimiento Browniano del que se habla en el teorema (13), por lo tanto sólo hay una variable que es conocida y puede ser removida por una cobertura. Estas suposiciones, implican que la martingala no puede tener brinco, ya que la integral de Itô es continua.

En el teorema 13 se hace el supuesto de que la filtración sólo puede ser una generada por un movimiento Browniano, mientras que en el teorema de Girsanov 12 se dice que la filtración puede ser mayor a la generada por el movimiento Browniano. Si se supone que la filtración puede ser mayor a la generada por el movimiento Browniano, se obtiene el siguiente corolario.

COROLARIO. 2

Sea $W(t), 0 \leq t \leq T$ un movimiento Browniano en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y sea \mathcal{F} una filtración generada por ese movimiento Browniano. Sea $\Theta(t), 0 \leq t \leq T$ un proceso adaptado, se define

$$Z(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \Theta(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta^2(u) du \right\},$$

$$\tilde{W} = W(t) + \int_0^t \Theta(u) du,$$

y supóngase que

$$\tilde{\mathbb{E}} \int_0^T \Theta^2(u) Z^2(u) du < \infty.$$

Sea $Z = Z(T)$. Entonces $\mathbb{E}Z = 1$, y bajo la medida de probabilidad \mathbb{P} dada por (2.32), el proceso $\tilde{W}(t), 0 \leq t \leq T$ es un movimiento Browniano. Ahora, sea $M(t)$ una martingala bajo \mathbb{P} . Entonces existe un proceso adaptado $\tilde{\Gamma}(u), 0 \leq u \leq T$ tal que

$$\tilde{M}(t) = \tilde{M}(0) + \int_0^t \tilde{\Gamma}(u) d\tilde{W}(u), \quad 0 \leq u \leq T. \quad (2.45)$$

El corolario 2 no es una consecuencia trivial del teorema de representación de Martingala, teorema 13, ya que no es posible solo reemplazar $W(t)$ por $\tilde{W}(t)$, porque \mathcal{F} es generada por el movimiento $W(t)$. Este corolario es muy importante, ya que contiene lo mismo que en el teorema de representación de martingala, pero bajo una medida de probabilidad distinta y con una filtración más grande, por lo que es posible abarcar más información.

2.4.3. Cobertura con una acción

En esta sección se generará una cobertura para una acción, es posible hacer esto gracias al teorema de representación de la martingala teorema 13. Se empieza usando la ecuación (66), que es el proceso del precio de la acción y el proceso de la tasa de interés descontado (68). Cabe mencionar que la volatilidad es casi seguramente distinta de cero para toda $t \in [0, 1]$. Se hace la suposición adicional

de que la filtración $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$ es generada por el movimiento browniano $W(t), 0 \leq t \leq T$.

Sea $V(t)$ una variable aleatoria $\mathcal{F}(t)$ -medible para $0 \leq t \leq T$ se define a $V(t)$ por la fórmula neutral al riesgo (2.42). Entonces de acuerdo con (2.41)

$$D(t)V(t) = \tilde{\mathbb{E}}[D(t)V(t)|\mathcal{F}(t)]. \quad (2.46)$$

La ecuación (2.46) es una martingala bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, lo que indica que para $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}[D(t)V(t)|\mathcal{F}(s)] &= \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{\mathbb{E}}[[D(T)V(T)|\mathcal{F}(t)]|\mathcal{F}(s)]] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}[D(T)V(T)|\mathcal{F}(s)] \\ &= D(s)V(s). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Como $D(t)V(t)$ es una martingala puede ser vista como una integral de Itô de la siguiente forma

$$D(t)V(t) = V(0) + \int_0^t \tilde{\Gamma}(u)d\tilde{W}(u). \quad (2.48)$$

2.5. La ecuación de Black-Scholes Merton

El fin de esta sección es darle utilidad a toda la teoría planteada en este capítulo. Supóngase que se desea encontrar el precio para una opción europea tipo call con volatilidad σ y tasa de interés r constantes, además, supóngase que el *payoff* del activo subyacente es $V(T) = (S(T) - K)^+$, entonces usando la ecuación (2.42) se tiene:

$$\tilde{\mathbb{E}}[e^{-r(T-t)}(S(T) - K)^+|\mathcal{F}(x)]. \quad (2.49)$$

Como el movimiento browniano geométrico es un proceso de Markov, la expresión anterior depende del precio de la acción $S(t)$ y del tiempo t en el que la esperanza condicional es calculada, pero no en el precio de la acción antes del tiempo t , es decir, existe una función $c(t, x)$ tal que

$$c(t, S(t)) = \tilde{\mathbb{E}}[e^{-r(T-t)}(S(T) - K)^+|\mathcal{F}(x)]. \quad (2.50)$$

Es posible calcular $c(t, S(t))$ utilizando el teorema de independencia 16, con constantes σ y r , la ecuación (70) se convierte en

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \sigma \tilde{W}(t) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\}, \quad (2.51)$$

entonces es posible tener

$$\begin{aligned} S(T) &= S(t) \exp \left\{ \sigma (\tilde{W}(T) - \tilde{W}(t)) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau \right\} \\ &= S(t) \exp \left\{ -\sigma \sqrt{\tau} Y + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau \right\}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde Y es la variable aleatoria normal estandar

$$Y = \frac{\tilde{W}(\tau) - \tilde{W}(t)}{\sqrt{T-t}},$$

y τ es el tiempo $T-t$.

Es fácil observar que $S(T)$ es el producto de la variable aleatoria $\mathcal{F}(t)$ -medible $S(t)$ y la variable aleatoria que es independiente de $\mathcal{F}(t)$, por lo tanto, la ecuación $c(t, S(t))$ es

$$\begin{aligned} c(t, S(t)) &= \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-r\tau} \left(S(t) \exp \left\{ -\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right\} - K \right)^+ \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\tau} \left(S(t) \exp \left\{ -\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right\} - K \right)^+ e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Se dice que el integrando $(S(t) \exp \{ -\sigma\sqrt{\tau}y + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau \} - K)^+$ es positivo si y sólo si

$$y < d(\tau, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\log \frac{x}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right]. \quad (2.54)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} c(t, S(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d(\tau, x)} e^{-r\tau} \left(x \exp \left\{ -\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right\} - K \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d(\tau, x)} x \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} - \sigma\sqrt{\tau}y - \frac{\sigma^2\tau}{2} \right\} dy \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d(\tau, x)} e^{-r\sigma K} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d(\tau, x)} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(y + \sigma\sqrt{\tau})^2 \right\} dy - e^{-r\tau} KN(d(\tau, x)) \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d(\tau, x)\sigma\sqrt{\tau}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} dz - e^{-r\tau} KN(d(\tau, x)) \\ &= xN(d_+(\tau, x)) - e^{-r\tau} KN(d_-(\tau, x)), \end{aligned} \quad (2.55)$$

donde

$$d_+(\tau, x) = d_-(\tau, x) + \sigma\sqrt{\tau} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\log \frac{x}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right]. \quad (2.56)$$

Lo obtenido en la ecuación (2.55) es conocido como la ecuación de Black-Scholes Merton. Esta ecuación es la base de las secciones posteriores, ya que es la principal herramienta para la valuación de opciones.

Capítulo 3

Métodos Numéricos

Este capítulo estudiará el enfoque de valuación a través de ecuaciones diferenciales, se verá un poco de la teoría que está detrás y algunos métodos numéricos para resolverlas.

3.1. Teoría básica de las opciones

3.1.1. Lema de Itô y la eliminación de aleatoriedad

En el mundo real, el precio de los activos se calcula en intervalos de tiempo discreto, pero cuando existen muchos datos, valuar esto es muy difícil, por lo que el modelo discreto es transformado en un modelo continuo, es decir, se toma el límite cuando $dt \rightarrow 0$.

El lema de Itô es el resultado más importante sobre la manipulación de las variables que se ocuparán en este capítulo. Lo que hace el lema de Itô es manipular las funciones con variables aleatorias de la misma forma en la que lo hace el *teorema de Taylor* a las funciones con variables deterministas. La aproximación heurística ¹ utilizada para obtener el lema de Itô está basada en la expansión de series de Taylor.

Antes de obtener la aproximación, se ocupará un resultado importante que no será demostrado, para más detalles puede consultar [13]. Se sabe con probabilidad uno que

$$dW^2 \rightarrow dt, dt \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Supóngase que la función $f(S)$ es una función suave que depende de S , por el momento se dejará a un lado el hecho de que S es estocástica, si S varía por una pequeña cantidad dS , claramente f también varía en una pequeña cantidad,

¹Una heurística es un algoritmo que abandona uno o ambos objetivos; por ejemplo, normalmente encuentran buenas soluciones, aunque no hay pruebas de que la solución no pueda ser arbitrariamente errónea en algunos casos; o se ejecuta razonablemente rápido, aunque no existe tampoco prueba de que siempre será así. Las heurísticas generalmente son usadas cuando no existe una solución óptima bajo las restricciones dadas (tiempo, espacio, etc.), o cuando no existe del todo.

dado que no está cerca de las singularidades de f . Entonces por la expansión de series de Taylor se tiene lo siguiente

$$df = \frac{df}{dS}dS + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dS^2}dS^2 + \dots, \quad (3.2)$$

donde dS esta dada por (2.28). Aquí dS es un simple número ², elevando al cuadrado se obtiene

$$dS^2 = (\sigma SdW + \mu Sdt)^2 = \sigma^2 S^2 dW^2 + 2\sigma\mu S^2 dt dW + \mu^2 S^2 dt^2. \quad (3.3)$$

Examinando la magnitud del orden de cada uno de los términos en (3.3) se obtiene que el primer término de esta ecuación es el más grande para dt pequeña y domina a los otros dos términos ya que $dW = O(\sqrt{dt})$, entonces

$$dS^2 = (\sigma SdW + \mu Sdt)^2 = \sigma^2 S^2 dW^2,$$

y como $dW \rightarrow dt$ se obtiene que $dS^2 \rightarrow \sigma^2 S^2 dt$. Si se utiliza este resultado en (3.2) y se mantienen los términos que son al menos tan grandes como $O(dt)$ y se utiliza la definición de dS dada por la ecuación (2.28) se encuentra que

$$df = \frac{df}{dS}(\sigma SdW + \mu Sdt) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2f}{dS^2} dt = \sigma S \frac{df}{dW} + (\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2f}{dS^2}) dt \dots \quad (3.4)$$

Este es el lema de Itô que relaciona el pequeño cambio en la función que depende de una variable aleatoria con respecto al pequeño cambio en la variable por si sola. Se observa que las caminatas aleatorias de S (2.28) y la de f (3.4) dependen de la variable aleatoria dW . Este hecho puede ser explotado para construir una tercera variable g cuya variación dg es completamente determinística durante el pequeño periodo de tiempo dt .

Sea Δ un número y sea

$$g = f - \Delta S$$

donde Δ se mantiene constante durante el periodo de tiempo dt , entonces

$$\begin{aligned} dg &= df - \Delta dS \\ &= \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dW + (\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}) dt - \Delta \sigma S dW + \mu S dt \\ &= \sigma S (\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta) dW + (\mu S (\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}) dt. \end{aligned}$$

Eligiendo $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$, es posible eliminar el coeficiente dW lo que da un valor para dg conocido ya que la caminata aleatoria de g sería completamente determinística. Este argumento será crucial al momento de hablar de valuación de opciones.

²Esto es porque por el momento no se toma S como aleatoria.

3.1.2. La ecuación de Black-Scholes

Suponga que se tiene una opción cuyo valor $V(S, t)$ ³ depende solo de S y de t . En este momento no es necesario especificar que tipo de opción es V ⁴ es más, V podría ser el valor de un portafolio completo, pero por simplicidad, se pensará que V es una opción simple o mejor conocida como *opción vainilla*. Usando el lema de Itô para V se tiene

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt, \quad (3.5)$$

que da la caminata aleatoria que sigue V .

Ahora se construye un portafolio que consta de una opción y un número de activos subyacentes $-\Delta$ ⁵. Lo que implica que el valor del portafolio es

$$\pi = V - \Delta S. \quad (3.6)$$

El salto en el valor de este portafolio en una unidad de tiempo es

$$d\pi = dV - \Delta dS,$$

donde Δ se queda fija durante el intervalo de tiempo. Si Δ no se comportara de esta forma, cuando se calcule el valor de $d\pi$, se tendran términos de la forma $d\Delta$, lo que indica que Δ sería variable pero Δ se va a mantener constante, entonces poniendo juntas las ecuaciones (2.28), (3.5) y (3.6) se obtiene la caminata aleatoria que sigue π

$$d\pi = \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S \right) dt. \quad (3.7)$$

Como se mencionó en la sección del lema de Itô, es posible eliminar el componente aleatorio eligiendo Δ de la siguiente manera

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad (3.8)$$

³Es necesario recordar lo siguiente:

- El precio del activo sigue una caminata aleatoria lognormal (2.28).
- La tasa de interés libre de riesgo r y la volatilidad σ son conocidas durante el tiempo de vida de la opción.
- No hay costo de transacción de la cobertura al portafolio.
- El activo subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción.
- No existen probabilidades de arbitraje.
- La venta en corto es permitida y las acciones pueden ser divididas.

⁴Si es un *call* o un *put*.

⁵Este número todavía no está especificado.

donde Δ es valuado al principio del incremento de tiempo dt . De este procedimiento se obtiene un portafolio cuyos incrementos son completamente determinísticos. El valor del incremento del portafolio será

$$d\pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \quad (3.9)$$

Para asegurar la no existencia de arbitraje, es necesario hacer el siguiente análisis, observe que el retorno de un monto π invertido a una tasa de interés libre de riesgo debe tener un crecimiento de $r\pi dt$ al tiempo dt . entonces:

- Si el lado derecho de la ecuación fuera más grande que $r\pi dt$, sería posible pedir prestado al mercado de dinero la cantidad de π e invertirlo en el portafolio. El resultado de esta estrategia podría ser mayor que el costo de pedir prestado, es decir, existe la posibilidad de ganar dinero sin invertir nada, lo que implica arbitraje.
- Si el lado derecho fuera menor que $r\pi dt$, entonces es posible hacer una venta en corto del portafolio e invertir π en el banco a una tasa libre de riesgo, lo que implica una ganancia sin tener nada que perder, esto es arbitraje.

Para garantizar la no existencia de arbitraje la ecuación debe cumplir la igualdad

$$r\pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.6) y (3.8) en (3.10) y dividiendo entre dt se obtiene

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (3.11)$$

Esta ecuación es la *ecuación diferencial de Black-Scholes*.

La ecuación (3.11) es una ecuación diferencial, como es conocido, algunas de las ecuaciones diferenciales tienen muchas soluciones, pero el valor de una opción debe ser único⁶. Para que esto suceda, es necesario imponer condiciones de frontera. Estas condiciones especifican el comportamiento de la solución requerida en cierta parte del dominio de las soluciones. Este tema se ve más a fondo en la siguiente sección.

3.1.3. Condiciones de frontera y finales

Es difícil entender que, bajo ciertos supuestos fijados previamente, cualquier instrumento del mercado de derivados, cuyo precio depende de S y de t , debe satisfacer la ecuación de Black-Scholes. Lo que se desea es encontrar el valor de una opción. El primer paso es encontrar una ecuación diferencial, este paso ya se hizo en la sección anterior. El siguiente paso es introducir ciertas condiciones que

⁶De otro modo existiría arbitraje.

fijan los supuestos del problema para que este represente a algún instrumento del mercado de derivados.

Una ecuación diferencial puede tener muchas soluciones, pero el valor de una opción es único, por lo que se deben fijar condiciones de frontera y finales, las cuales van a especificar el comportamiento de la opción en alguna parte del dominio de la solución.

El tipo de ecuación diferencial más común en problemas financieros es la ecuación parabólica.

DEFINICIÓN. 6

En su forma más simple una ecuación parabólica relaciona las derivadas parciales de una función $V(S, t)$ que depende de S y de t , donde la derivada de grado mayor con respecto a S es dos y para t el grado más grande es uno.

Por la definición 6 se concluye que la ecuación de B&S reducida a la ecuación de calor es parabólica. Existen dos tipos de ecuaciones parabólicas, las *forward* y las *backward*. Si los signos de la ecuación son los mismos y aparecen del mismo lado de la ecuación, entonces es una ecuación *backward*, en otro caso es *forward*. Ya que se conoce el tipo de ecuación, es necesario introducir las condiciones finales y de frontera, por lo regular se fijan dos condiciones para S y una para t ⁷.

Por ejemplo,

$$V(S, t) = V_a(t) \text{ en } S = a$$

y

$$V(S, t) = V_b(t) \text{ en } S = b,$$

donde V_a y V_b son funciones dadas.

Si la ecuación es del tipo *backward*, la condición final es:

$$V(S, t) = V_T(S) \text{ en } t = T$$

donde V_T es una función conocida, por lo anterior es posible resolver V en la región $t < T$.

Si la ecuación fuera del tipo *forward*, la condición inicial debe estar dada en $t = 0$, entonces es posible resolver V en $t > 0$. Por supuesto, es posible cambiar de *backward* a *forward* con un simple cambio de variable $t' = -t$. Es importante resaltar que la ecuación parabólica no se puede resolver en dirección contraria, es decir no se deben imponer condiciones iniciales en una ecuación del tipo *backward*.

3.2. La ecuación de B&S para opciones europeas

En esta sección se deducirá la ecuación de B&S para opciones europeas, esto se logrará fijando ciertas condiciones de frontera y finales, para poder obtener una única solución para este tipo de ecuaciones, ya que el valor de una opción es único.

⁷Las condiciones dependen del grado mayor de su derivada.

3.2.1. Construcción de la ecuación

Una vez encontrada la ecuación de B&S para el valor de una opción, es necesario introducir las restricciones para que la solución de ésta sea única. Por el momento se fijará la atención en el *call* europeo denotado por $C(S, t)$, con precio de ejercicio K y fecha de expiración T .

La condición final aplicada al tiempo $t = T$, es dada por un argumento de arbitraje. Si $S > K$ al tiempo de expiración, lo que se debería hacer es ejercer el *call*, pagando K para obtener una ganancia de S . Entonces la ganancia neta de esta transacción sería $S - K$. Por otro lado, si $S < K$ al tiempo de expiración, no se debe ejercer la opción porque se podría tener una pérdida de $K - S$, en este caso la opción expira sin valor alguno, entonces el valor de una opción *call* al momento de expiración es

$$C(S, T) = \max(S - K, 0). \quad (3.12)$$

Esta es la condición final de la ecuación diferencial parcial.

Por otro lado las condiciones de frontera para calcular el precio del activo son aplicadas cuando $S = 0$ y cuando $S \rightarrow \infty$. Es posible ver en la ecuación (2.28) que si S siempre es cero, entonces dS también es cero, por lo tanto S nunca cambia. Este es el único caso determinístico para la ecuación diferencial estocástica (2.28), entonces si $S = 0$ al momento de expiración, el valor de la opción es cero, por lo que el *call* europeo no vale cuando $S = 0$, es decir

$$C(0, t) = 0. \quad (3.13)$$

Cuando $S \rightarrow \infty$, es decir, cuando el precio del activo crece sin parar, entre más grande es, más parece que la opción debería ser ejercida, y cada vez el precio de ejercicio adquiere menor importancia, por lo que el payoff de la opción se convierte en el valor del subyacente arrojando la siguiente restricción

$$C(S, t) \approx S, \quad S \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Teniendo las tres restricciones para caracterizar al *call* europeo, se dice que si se resuelve la ecuación de Black-Scholes (3.11) bajo las condiciones (3.12), (3.13) y (3.14), el resultado será único y la solución de este problema da el precio del *call*. Ahora para un *put* con valor $P(S, t)$ las restricciones son como sigue.

$$P(S, T) = \max(K - S, 0). \quad (3.15)$$

Donde la condición final es el pago definido en la ecuación (3.15). En el caso del *put*, si S es cero, el pago final de un *put* es conocido con certeza y este valor es K . Para determinar el valor de $P(0, t)$, lo único que se debe hacer es traer a valor presente el valor de K recibido al tiempo T , una de las condiciones será

$$P(0, t) = Ke^{-r(T-t)}. \quad (3.16)$$

Cuando $S \rightarrow \infty$, no es conveniente ejercer la opción, lo que implica

$$P(S, t) \rightarrow 0 \text{ cuando } S \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

Con lo anterior se tiene una base para encontrar soluciones únicas de ecuaciones diferenciales parciales.

El siguiente paso es encontrar una solución exacta para el *call* europeo, en este caso se utiliza el supuesto de que la tasa de interés y la volatilidad son constantes, cuando esto pasa, la solución explícita para un *call* europeo es

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2). \quad (3.18)$$

Para el *put* la solución explícita es

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1), \quad (3.19)$$

donde $N(\cdot)$ es la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar

$$N(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy,$$

donde

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Estas ecuaciones satisfacen la paridad *put-call*, para ver detalle consultar [13]. Las ecuaciones (3.18) y (3.19) son interesantes, ya que sus valores contienen a la función de distribución de una normal estándar, por lo que al valor de una opción se le puede dar una interpretación probabilística, es posible demostrar que el valor de la opción puede ser visto como el valor esperado de la opción al momento de expiración, lo que da una valuación de riesgo neutral.

3.2.2. Reducción de la ecuación de B&S a la ecuación de calor

En esta sección se encontrará la solución de la ecuación de B&S forma teórica, primero se hacen cambios de variable para encontrar cierto parecido a la ecuación de calor, se dará por hecho que se conoce la solución de la ecuación de calor, y al final, regresar al problema original para encontrar la solución del *call* europeo.

La ecuación de Black-Scholes para un *call* europeo es

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \quad (3.20)$$

con condiciones de frontera y finales

$$C(0, t) = 0, C(S, t) \approx S, \quad S \rightarrow \infty,$$

$$C(S, T) = \max(S - K, 0).$$

Como se menciona al principio de la sección, la ecuación (3.20) se parece a la ecuación de difusión de calor en [13] pero tiene más términos y en cada incremento en el tiempo, C es diferenciable con respecto a S , y por su condición final $t = T$ se observa claramente que la ecuación es backward. Entonces lo primero que se debe hacer es eliminar los términos que contengan a S y a S^2 , y aprovechar para que al mismo tiempo la ecuación sea sin dimensión⁸, y así convertirla en una ecuación del tipo *forward*.

Para lograr lo anterior se hacen los siguientes cambios de variable

$$S = Ke^x, t = T - \tau/\frac{1}{2}\sigma^2, C = Kv(x, \tau),$$

para obtener

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k_1 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - k_1 v, \quad (3.21)$$

donde $k_1 = r/\frac{1}{2}\sigma^2$, y también se obtiene la siguiente condición inicial,

$$v(x, 0) = \max(e^x - 1, 0).$$

La nueva ecuación sólo tiene un parámetro, k_1 , ahora se tiene que controlar un parámetro y no 4 para el valor de la opción. Se puede ver que la nueva ecuación se asemeja más a la ecuación de calor, pero para convertirla en una, falta hacer un cambio de variable, suponga que

$$v = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau), \quad (3.22)$$

para algunas constantes α y β que deben ser encontradas, sustituyendo la función y derivando se tiene

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k_1 - 1) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - k_1 u,$$

y es posible encontrar una ecuación que no contenga u eligiendo

$$\beta = \alpha^2 + (k_1 - 1)\alpha - k_1,$$

al mismo tiempo que

$$0 = 2\alpha + (k_1 - 1),$$

con esto se eliminan también los términos que tienen $\frac{\partial u}{\partial x}$. Resolviendo estas ecuaciones se obtienen los valores de α y de β que son

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k_1 - 1), \quad \beta = -\frac{1}{4}(k_1 + 1)^2,$$

⁸Cuando se dice que algo no tiene dimensión quiere decir que no tiene unidades de medida, en la ecuación para la opción Europea el único parámetro sin dimensión es $k_1 = r/\frac{1}{2}\sigma^2$.

sustituyendo estos valores en (3.22) se tiene

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x - \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} u(x, \tau),$$

donde

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ para } -\infty < x < \infty, \tau > 0,$$

con

$$u(x, 0) = u_0(x) = \text{máx}(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0). \quad (3.23)$$

Con lo anterior se ha obtenido la ecuación de calor con solución.

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-(x-s)^2/4\tau} ds, \quad (3.24)$$

donde $u_0(x)$ esta dada por (3.23).

Para facilitar las cosas, se escribe la integral de una forma mas conocida haciendo un cambio de variable $x' = (x-s)/\sqrt{2\tau}$ para obtener

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x'\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= I_1 - I_2, \end{aligned}$$

para I_1 se tiene

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(x' - \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau})^2} dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau} - \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \\ &= e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} N(d_1), \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}$$

y

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds,$$

donde $N(d_1)$ es la función de distribución de una normal.

Para evaluar I_2 es lo mismo, solo que en lugar de tener $(k_1 + 1)$, se tiene $(k_1 - 1)$. Finalmente, se regresa al problema original, sustituyendo

$$v(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} u(x, \tau),$$

después de hacer esta sustitución, se efectúan los siguientes cambios de variables, $x = \log(S/K)$, $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)$ y $C = Kv(x, \tau)$ para así obtener el valor del *call* europeo que es

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{(T - t)}}$$

y

$$d_2 = \frac{\log(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{(T - t)}}.$$

Utilizando un resultado conocido y haciendo ciertos cambios de variable se logró convertir un problema del tipo *backward* en uno *forward*, se resolvió el *forward*, para después regresar al problema original, y así encontrar el valor del *call* europeo.

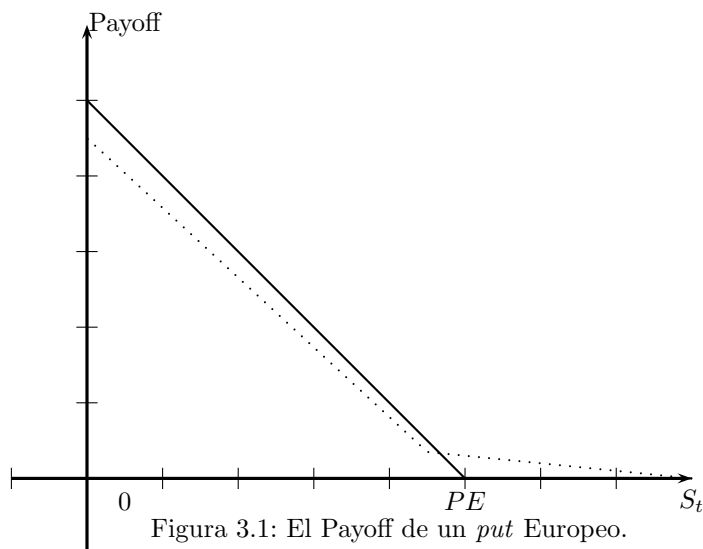
Para encontrar el valor de un *put* europeo, se puede seguir el mismo procedimiento, o se puede utilizar la paridad *put-call*, una vez obtenido el valor del *call*, es posible obtener el del *put* utilizando la siguiente fórmula

$$C - P = S - Ke^{-r(T-t)}.$$

3.3. La ecuación de B&S para opciones americanas

En la sección anterior, se encontró el valor del *put* y del *call* europeo con la ecuación de B&S bajo ciertas restricciones, pero el fin es encontrar estos valores para opciones americanas. El problema para opciones americanas es un poco más complicado la base está en las opciones europeas, ya que las americanas pueden ser ejercidas en cualquier momento y las europeas no, por lo anterior es necesario conocer bien las opciones para poder dar una representación matemática de estas.

Ahora se tratarán a fondo las opciones americanas, se verán las restricciones requeridas para encontrar la ecuación que las representa, y en la siguiente sección se expondrán los métodos numéricos que permiten encontrar el valor de cualquier opción.

Figura 3.1: El Payoff de un *put* Europeo.

3.3.1. Diferencias entre opciones europeas y americanas

Como se ha mencionado, las opciones americanas son opciones que tienen una ventaja sobre las europeas, estas pueden ser ejercidas en cualquier momento en la vida de la opción. La fórmula explícita que se calculó en la sección anterior era válida para opciones europeas, pero en esta ecuación ejercer antes de la fecha de expiración no estaba permitido, y esta es una característica esencial de las opciones americanas. Las opciones americanas le dan al poseedor más derechos, por lo que el valor es mayor al de las europeas.

En la figura 3.1, se observa que en un rango grande de S el valor del *put* europeo es menor que su valor intrínseco⁹. Suponga que S cae en este rango, entonces $P(S, t) < \max(K - S, 0)$. Ahora imagine que es posible ejercer en ese momento, si esto sucede, es factible usar la siguiente estrategia, comprar la opción en P , ejercerla vendiendo los activos por K , y después volver a comprar el activo en el mercado a S , entonces tendría una ganancia libre de riesgo con valor de $K - P - S$. Por este análisis, cuando es posible ejercer antes de la fecha de expiración, se tiene la siguiente restricción:

$$V(S, t) \geq \max(S - K, 0). \quad (3.25)$$

Por esta diferencia, se concluye que el valor de un *put* americano debe ser diferente al de un europeo.

Existen otras diferencias, que pueden ser mencionadas, pero para los fines que se tienen, no son necesarias. Las condiciones que se necesitan para poder representar a las opciones americanas de forma única son:

⁹El valor intrínseco de una opción es el valor que tendría dicha opción si se ejerciera en ese momento.

- El valor de las opciones debe ser mayor o igual a su función de pago.
- La igualdad en la ecuación de B&S es reemplazada por una desigualdad.
- El valor de la opción debe ser una función continua de S .
- El valor de Δ debe ser continuo.

3.3.2. *Put y call americano*

Considérese la ecuación de Black-Scholes para valuar un *put* europeo

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rP = 0, \quad (3.26)$$

con función de pago

$$P(S, t) = \text{máx}(K - S, 0), \quad (3.27)$$

y condiciones de frontera

$$P(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad P(S, 0) \rightarrow 0 \text{ cuando } S \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Como se sabe, el valor de un *put* europeo para ciertos valores de S , cae por debajo de su valor intrínseco. Esta afirmación es cierta considerando el valor de una opción *put* cuando $S = 0$. Si esto sucede, el valor intrínseco de la opción es K pero si se toma en cuenta las condiciones de frontera (3.28) $P(0, t) = Ke^{-r(T-t)} < K$, entonces el valor de la opción es menor a su valor intrínseco para $t < T$. Si se pudiera valuar un *put* americano como un *put* europeo, es muy fácil encontrar una estrategia de arbitraje. Para eliminar el arbitraje al valuar una opción americana, se debe imponer la siguiente condición

$$P(S, t) \geq \text{máx}(K - S, 0). \quad (3.29)$$

Se observa que en la ecuación de Black-Scholes para las opciones europeas se satisface la igualdad, pero para las americanas en lugar de tener igualdad se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rP \leq 0. \quad (3.30)$$

Se ha mencionado que las opciones americanas son un problema no acotado, pero las europeas no satisfacen la restricción (3.29). Supongase también que $P = K - S$ para alguna $S < K$. Si este fuera el caso, P no satisface la igualdad en la ecuación de Black-Scholes y solo la podría cumplir si $r = 0$ ya que

$$\frac{\partial}{\partial t}(K - S) + \frac{1}{2}S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2}(K - S) - r(K - S) = -rK < 0,$$

para P un *put* europeo.

Pero P no cumple la desigualdad. Cuando $P = K - S$ el retorno del portafolio es menor al retorno de un equivalente en un banco, por lo que la estrategia óptima sería ejercer la opción. Entonces para cualquier tiempo t dado, se debe dividir

a S en dos regiones distintas, una sería cuando el ejercicio antes de la fecha de expiración es óptimo y cumple que

$$P = K - S, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rP < 0,$$

y la otra región cuando ejercer antes de la fecha de expiración no es óptima y cumple que

$$P > K - S, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rP = 0.$$

Sea $S_f(t)$ definida como el valor mas grande de S al tiempo t para el cual se tiene que $P(S, t) = \max(K - S, 0)$. Entonces

$$P(S_f(t), t) = \max(K - S_f(t), 0),$$

pero

$$P(S, t) \geq \max(K - S, 0), \quad \text{si } S > S_f(t).$$

Existe un análisis local cerca de la parte no acotada que dice

$$\frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t), t) = -1.$$

Lo que da dos restricciones de frontera para problemas no acotados que son las siguientes

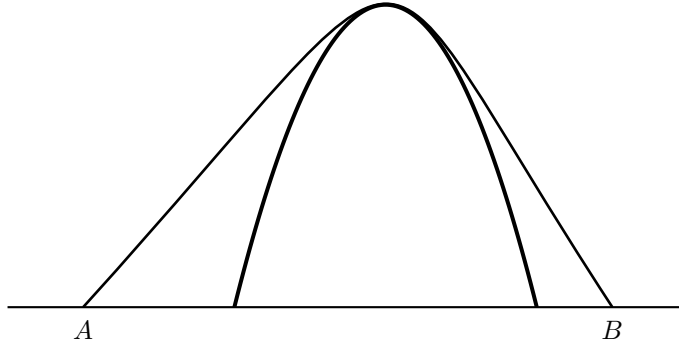
$$P(S_f(t), t) = \max(K - S_f(t), 0), \quad \frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t), t) = -1. \quad (3.31)$$

El *put* americano queda representado por la ecuación (3.30) y por las restricciones (3.31).

El *call* americano es muy parecido al *call* europeo, más aún, se puede decir que son casi iguales y en los casos en los que existe alguna diferencia entre ellos es cuando el *call* americano ejerce dividendos, pero para los fines del momentos no es necesario. Esto se mencionó en el teorema 2.

3.3.3. Problema del obstáculo

Considerese una banda elástica tomada por dos extremos y supongase que en medio de ella hay un obstáculo fijo con altura $f(x)$. Los extremos de la banda son $x = pm$, y es desplazamiento de la banda en $u(x)$. Asíumase que $f(\pm 1) < 0$ y que $f(x) > 0$ en algunos puntos cuando $-1 < x < 1$. Se asume que $f'' < 0$ donde $' = d/dx$, y con esto se garantiza que solamente hay una región de contacto. La región sin frontera es entonces el conjunto de puntos marcados como A y B en la siguiente figura, donde la banda tiene contacto por primera vez con el obstáculo.



En la región de contacto $u = f$, y cuando la banda no está en contacto con el obstáculo, la banda está recta, por lo que $u'' = 0$. También se deben agregar las siguientes condiciones $u(-1) = 0, u(A) = f(A)$, $u(1) = 0$ y $u(B) = f(B)$. Pero como A y B no son conocidos, es necesario agregar otras condiciones, por lo que el problema queda representado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 u(-1) &= 0, \\
 u'' &= 0, & -1 < x < A, \\
 u(A) &= f(A), & u'(A) &= f'(A), \\
 u(x) &= f(x), & A < x < B, \\
 u(B) &= f(B), & u'(B) &= f'(B), \\
 u'' &= 0, & B < x < 1, \\
 u(1) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Dada una $f(x)$ en particular, en principio puede ser demostrado que $u(x)$, A y B son determinados por la ecuación (3.32).

3.3.4. Fórmula de la desigualdad variacional

Se sabe que el problema del obstáculo y el problema para opciones americanas son muy similares. Se puede ver que la formulación de Black-Scholes de un problema para opciones americanas puede ser reducido a un problema parabólico de desigualdad variacional.

En la sección (2.2.2) se mencionó que es posible reducir la ecuación de Black-Scholes, en la ecuación de difusión de calor,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.33}$$

en cualquier momento $P(S, t)$ cae alrededor del pago $\max(K - S, 0)$. Defina

$$g(x, \tau) = e^{\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} \max(e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}, 0). \tag{3.34}$$

Entonces la condición inicial para la ecuación (3.33) es

$$u(x, 0) = g(x, 0), \quad (3.35)$$

mientras que la restricción $P(S, t) \geq \max(K - S, 0)$ se transforma en

$$u(x, \tau) \geq g(x, \tau). \quad (3.36)$$

Finalmente se tiene la siguiente condición

$$u(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty, \quad u \text{ y } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ son continuas en todos lados.} \quad (3.37)$$

Es posible ver que por cálculo directo se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \geq 0 \quad \text{para } x \neq 0. \quad (3.38)$$

Para evitar complicaciones técnicas, se supondrá que se restringe cualquier método numérico a una malla finita, es decir, se considerará el problema (3.33)-(3.36) solo para x en el intervalo $-x^- < x < x^+$, donde x^+ y x^- son lo suficientemente grandes, lo que significa que se impondrán las siguientes condiciones de frontera

$$u(x^+, \tau) = 0, \quad u(-x^-, \tau) = g(-x^-, \tau). \quad (3.39)$$

Se asume que es posible reemplazar las condiciones de frontera exactas, por aproximaciones que para valores pequeños de S $P = K - S$, mientras que para valores grandes $P = 0$.

El problema de las opciones americanas es muy similar al problema del obstáculo, pero con un obstáculo que depende del tiempo, es decir, la función de pago transformada $g(x, \tau)$. Como la ecuación diferencial parcial es parabólica, la desigualdad variacional de este problema es conocida como desigualdad variacional parabólica.

Primero es necesario resaltar que es posible escribir (3.33)-(3.36) en forma de una complementariedad lineal

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (u(x, \tau) - g(x, \tau)) &= 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &\geq 0, \quad (u(x, \tau) - g(x, \tau)) \geq 0, \end{aligned} \quad (3.40)$$

con las condiciones iniciales y de frontera (3.35) y (3.39), se tiene

$$u(x, 0) = g(x, 0),$$

$$u(-x^-, \tau) = g(-x^-, \tau), \quad u(x^+, \tau) = g(x^+, \tau) = 0,$$

y con la condición de que

$$u(x, \tau) \text{ y } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ son continuas.} \quad (3.41)$$

Con esta formulación se tienen dos situaciones:

1. Cuando es óptimo el ejercicio de la opción, es decir, cuando $u = g$.
2. Cuando no es óptimo ejercer la opción, es decir, cuando $u > g$.

La ventaja de esta formulación es que no menciona de forma explícita la falta de frontera del problema de las opciones americanas. Si es posible resolver la desigualdad variacional o el problema de complementariedad lineal, entonces se encuentra la frontera de óptimo ejercicio por la condición que lo define, esto es que es posible dividir la región donde $u(x, \tau) > g(x, \tau)$ de la región donde $u(x, \tau) = g(x, \tau)$.

3.4. Métodos numéricos

En esta sección se muestran varias técnicas numéricas para resolver modelos de ecuaciones diferenciales parciales, para esto se construyen algunos algoritmos. Se empieza considerando soluciones numéricas para las opciones europeas.

3.4.1. Consideraciones generales para soluciones numéricas

Todos los modelos que se utilizarán en este capítulo son extensiones del modelo básico de B&S. Este tipo de modelos se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

- Construir una aproximación finita a la ecuación diferencial. Este procedimiento es conocido como *discretización* o *problema de aproximación*.
- Ver en que lugares la discretización es sensible a pequeños errores originados por la aritmética calculada. Si la ecuación discretizada es sensible a estos errores, entonces la aproximación es inservible. Este problema es conocido como *problema de sensibilidad*.
- Ver en que grado la discretización se aproxima a la ecuación diferencial parcial. Esto quiere decir ver cuando la discretización tiende a la solución de la ecuación diferencial. Este problema es conocido como *problema de convergencia*.

Por discretización se considerará a cualquier método que sirve para reducir ecuaciones diferenciales parciales continuas en un conjunto discreto de ecuaciones en diferencias que puede ser resuelto en una computadora. Solo se considerarán dos tipos de discretización *diferencias finitas* y *elementos finitos*.

Otra consideración importante para los algoritmos es la eficiencia de las técnicas para encontrar soluciones. La eficiencia se mide con dos indicadores:

1. La cantidad de memoria requerida por la computadora para resolver el algoritmo.
2. El número de operaciones que son necesarias para encontrar la solución del algoritmo. Esto determina la velocidad de ejecución del algoritmo.

3.4.2. Aproximación por diferencias finitas

La idea de los métodos de diferencias finitas, es remplazar la derivada en ecuaciones parciales por aproximación de diferencias finitas. Por ejemplo la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ puede ser definida como el siguiente límite

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) = \lim_{\partial \tau \rightarrow 0} \frac{u(x, \tau + \partial \tau) - u(x, \tau)}{\partial \tau}.$$

Si en lugar de hacer tender $\partial \tau$ a cero se hace muy pequeña, se obtiene la aproximación

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) \approx \frac{u(x, \tau + \partial \tau) - u(x, \tau)}{\partial \tau}. \quad (3.42)$$

La ecuación (3.42) es conocida como *aproximación en diferencias finitas* de $\frac{\partial u}{\partial \tau}$, ya que involucra diferencias pequeñas, pero no infinitesimales que dependen de la variable u . Esta diferencia en particular es conocida como *diferencia forward*, ya que la diferencia es hacia adelante con respecto a τ . Si se tiene una ecuación de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) = \lim_{\partial \tau \rightarrow 0} \frac{u(x, \tau) - u(x, \tau - \partial \tau)}{\partial \tau},$$

entonces la aproximación sería

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) \approx \frac{u(x, \tau) - u(x, \tau - \partial \tau)}{\partial \tau}. \quad (3.43)$$

Esta diferencia es conocida como *diferencia backward*. Existe otra definición para $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ esta es:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) = \lim_{\partial \tau \rightarrow 0} \frac{u(x, \tau + \partial \tau) - u(x, \tau - \partial \tau)}{2\partial \tau}.$$

Entonces la aproximación de esta ecuación sería:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) \approx \frac{u(x, \tau + \partial \tau) - u(x, \tau - \partial \tau)}{2\partial \tau}. \quad (3.44)$$

Esta aproximación es conocida como *diferencia central*. Como se observa en la figura 3.2 están representadas los tres tipos de diferencias finitas para parciales de primer orden, y en cada una de las diferencias, se supone que ∂x es pequeña. Estas tres diferencias son para parciales de primer orden, pero para las parciales de segundo orden existen las siguientes aproximaciones.

Diferencia *forward*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) = \lim_{\partial x \rightarrow 0} \frac{1}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \partial x, \tau) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \right). \quad (3.45)$$

Diferencias *backward*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) = \lim_{\partial x \rightarrow 0} \frac{1}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) - \frac{\partial u}{\partial x}(x - \partial x, \tau) \right). \quad (3.46)$$

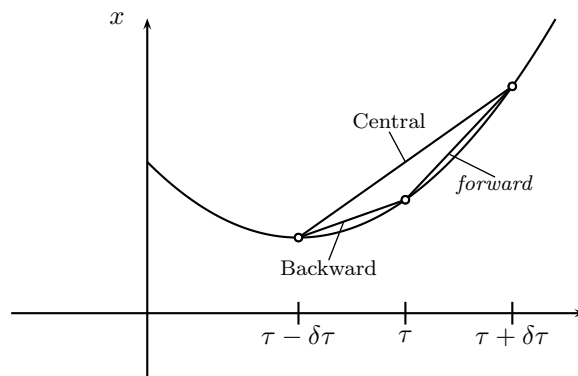


Figura 3.2: Tipos de aproximaciones.

Diferencias centrales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) = \lim_{\partial x \rightarrow 0} \frac{1}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \partial x/2, \tau) - \frac{\partial u}{\partial x}(x - \partial x/2, \tau) \right). \quad (3.47)$$

De las ecuaciones anteriores, se observa que se tienen 3 formas distintas de aproximar ecuaciones de segundo orden, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, en ecuaciones de primer orden, y anteriormente se mencionaron otras tres formas de aproximar ecuaciones parciales de primer orden $\frac{\partial u}{\partial x}$, por lo que se tienen 27 formas distintas de aproximar una ecuación de segundo orden.

Malla de las diferencias finitas

Para entender lo que es una malla se da un ejemplo con la ecuación de difusión. Para la aproximación de esta ecuación por diferencias finitas, se construye la malla de la siguiente forma. Primero se divide el eje de las x en nodos con la misma distancia entre ellos, esta distancia es ∂x , y se hace lo mismo con el eje de las τ , solo que la distancia ahora es $\partial \tau$. Con esto se dividió el plano (x, τ) en una malla, donde los puntos de la malla son de la forma $(n\partial x, n\partial \tau)$ como se muestra en la figura 3.3.

Los puntos que importan son los valores de $u(x, \tau)$ en los puntos de la malla y serán escritos de la siguiente forma

$$u_m^n = u(n\partial x, m\partial \tau). \quad (3.48)$$

Éste método será utilizado para obtener un conjunto de ecuaciones discretas que se aproximan a la ecuación diferencial parcial, pero de este método solo se obtiene un sistema de aproximaciones.

En las siguientes secciones se analizarán métodos distintos de diferencias finitas y las distintas formas de resolverlos.

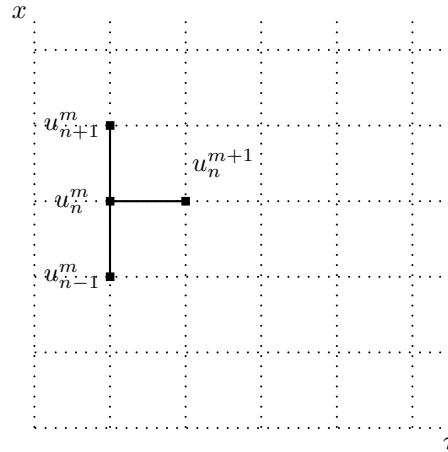


Figura 3.3: Discretización explícita de diferencias finitas.

3.4.3. Método explícito de diferencias finitas

Este método como su nombre lo dice, es un método que encuentra las soluciones de una manera explícita, es decir muestra las soluciones de un paso adelante que dependen de los anteriores.

Ecuación explícita de diferencias finitas

Considerese el modelo general de B&S transformado para el valor de una opción europea

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.49)$$

con condiciones finales y de frontera

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \tau) &= f(x, \tau), & \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, \tau) &= g(x, \tau), \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Usando diferencias del tipo *forward* (3.42) para $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ y diferencia simétrica central (3.47) para $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, se observa que la ecuación de difusión se transforma en

$$\begin{aligned} & \frac{u(x, \tau + \partial\tau) - u(x, \tau)}{\partial\tau} + O(\partial\tau) \\ &= \frac{u(x + \partial x, \tau) - 2u(x, \tau) + u(x - \partial x, \tau)}{\partial x^2} + O((\partial x)^2). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Si se restringe a los valores de $u(x, \tau)$ en la malla, la ecuación (3.51) se transforma en

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\partial\tau} + O(\partial\tau) = \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{(\partial x)^2} + O((\partial x)^2), \quad (3.52)$$

e ignorando los términos $O(\partial\tau)$ y $O((\partial x)^2)$, es posible aproximar de la siguiente manera

$$v_n^{m+1} = v_n^m + \alpha(v_{n+1}^m + v_{n-1}^m - 2v_n^m), \quad (3.53)$$

donde

$$\alpha = \frac{\partial\tau}{(\partial x)^2}, \quad (3.54)$$

v_n^{m+1} es sólo una aproximación de la ecuación original.

En estos momentos surge la pregunta de convergencia, si $v_n^m \rightarrow u_n^m$ cuando $\partial\tau \rightarrow 0$ y $\partial x \rightarrow 0$, es decir si la aproximación es buena.

Se puede decir que si a cualquier tiempo m , se conoce v_n^m para todos los valores de n , entonces es posible calcular de manera explícita a v_n^{m+1} . Es necesario observar que v_n^{m+1} solo depende de v_{n+1}^m, v_n^m y v_{n-1}^m . Esta relación se muestra en la figura 3.3.

Si se escoge $-\infty < x < \infty$ con ∂x del mismo tamaño, se tendría que elegir un numero infinito de pasos y eso no tendría sentido, entonces se elige una x finita pero lo suficientemente grande para no tener problemas, es decir

$$-N^- \partial x \leq x \leq N^+ \partial x. \quad (3.55)$$

Por lo anterior se reemplazan las condiciones de frontera (3.50) por las siguientes

$$v_{-N^-}^m = f(-N^- \partial x, m\partial\tau), \quad v_{N^+}^m = g(N^+ \partial x, m\partial\tau), \quad (3.56)$$

y como condición inicial

$$v_n^0 = u_0(n\partial x), \quad -N^- \leq n \leq N^+. \quad (3.57)$$

Como ya se tiene la ecuación (3.53) con sus restricciones, es posible exhibir el algoritmo para el método explícito de diferencias finitas.

Algoritmo para el método explícito de diferencias finitas

Para obtener la aproximación de diferencias finitas para el precio de una opción, se divide el tiempo de expiración de una opción $1/2\sigma^2\tau$ en M secciones iguales

$$\partial\tau = \frac{1/2\sigma^2\tau}{M}. \quad (3.58)$$

Después se resuelve la ecuación (3.53) sujeto a (3.56) y (3.57), se usan estos valores para para comenzar el procedimiento iterativo. Teniendo lo anterior se siguen los siguientes pasos:

1. Empezando con los valores de v_n^0 , se aplica (3.53) para resolver v_n^1 con $-N^- < n < N^+$. Usando las condiciones de frontera para determinar $v_{-N^-}^1$ y $v_{N^+}^1$, esto determina completamente v_n^1 para $-N^- < n < N^+$.

2. Repetir este proceso hasta encontrar v_n^M .

Ahora surgen algunos problemas con este método, como lo son la convergencia y la estabilidad. Primero se habla un poco de la estabilidad, este problema nace porque se utilizan métodos numéricos precisos, lo que da un problema de redondeo. Se dice que el sistema (3.53) es estable si los errores de redondeo no crecen mucho en cada iteración, si pasa lo contrario, se dice que el procedimiento es inestable. Para poder determinar la estabilidad o inestabilidad de la ecuación se tiene la siguiente regla:

- Estable si $0 < \alpha \leq 1/2$.
- Inestable si $\alpha > 1/2$.

El sistema (3.53) también es inestable cuando $\alpha < 0$, pero en este caso se tendría una aproximación de diferencias finitas para una ecuación backward, y este tipo de ecuaciones son inestables. Por otro lado, para el problema de convergencia, el inconveniente es hacer que $\alpha = \partial\tau/(\partial x)^2$ caiga entre 0 y 1/2. Es posible demostrar que la aproximación de diferencias finitas para el método explícito converge sí y solo si es estable.

Una consecuencia de este resultado es que es posible hacer que la solución de la aproximación y la solución exacta sean lo mas cercanas posibles, esto se hace tomando $\partial\tau$ lo suficientemente pequeña, para obtener la siguiente desigualdad:

$$0 < \frac{\partial\tau}{(\partial x)^2} < \frac{1}{2}. \quad (3.59)$$

3.4.4. Método implícito de diferencias finitas

Los métodos implícitos de diferencias finitas son usados para vencer las limitaciones de convergencia y estabilidad del método explícito dadas por la restricción

$$0 < \alpha = \frac{\partial\tau}{(\partial x)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

A diferencia del método explícito, el método implícito requiere resolver un sistema de ecuaciones, pero esto se resuelve con métodos numéricos, el más conocido es el método LU que se discutirá más adelante.

El método implícito de diferencias finitas usa aproximación de diferencias backward (3.43) para $\frac{\partial u}{\partial\tau}$ y la aproximación simétrica central (3.47) para $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, lo que da la siguiente ecuación:

$$\frac{u_n^m - u_n^{m-1}}{\partial\tau} + O(\partial\tau) = \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{(\partial x)^2} + O((\partial x)^2). \quad (3.60)$$

Después de reagrupar los términos, se obtiene la ecuación implícita de diferencias finitas como sigue

$$v_n^m + \alpha(v_{n-1}^m - 2v_n^m + v_{n+1}^m) = v_n^{m-1}. \quad (3.61)$$

Como en el método explícito

$$\alpha = \frac{\partial\tau}{(\partial x)^2},$$

y v_n^m es la aproximación numérica al valor exacto u_n^m . Ahora v_n^m, v_{n-1}^m y v_{n+1}^m dependen de v_n^{m-1} de manera implícita. La malla de este método es la figura 3.4.

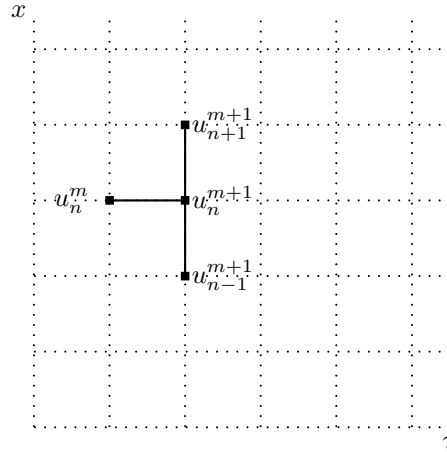


Figura 3.4: Discretización implícita de diferencias finitas.

Considerese el problema de una opción europea, se trunca la malla infinita en $x = -N^-\partial x$ y $x = N^+\partial x$, y tomar N^- y N^+ lo suficientemente grandes para no tener errores significativos, se obtiene el valor v_n^0 con la condición inicial

$$v_n^0 = u_0(n\partial x), \quad -N^- \leq n \leq N^+,$$

y los valores de $v_{-N^-}^m$ y $v_{N^+}^m$ de las condiciones de frontera

$$v_{-N^-}^m = f(-N^-\partial x, m\partial\tau),$$

$$v_{N^+}^m = g(N^+\partial x, m\partial\tau).$$

El problema es encontrar v_n^m para $m \geq 1$ y $-N^- < n < N^+$ de (3.61), es posible escribir esta ecuación como un sistema lineal de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & 0 & & -\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{N^+-1}^m \\ \vdots \\ v_0^m \\ \vdots \\ v_{-N^-+1}^m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_{N^+-1}^{m+1} \\ \vdots \\ v_0^{m-1} \\ \vdots \\ v_{-N^-+1}^{m-1} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_{N^+}^m \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ v_{-N^-}^m \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

El vector del lado derecho de esta ecuación sale de las ecuaciones finales, por ejemplo

$$(1 + 2\alpha)v_{N^+-1}^m - \alpha v_{N^+-2}^m = v_{N^+-1}^{m-1} + \alpha v_{N^+}^m,$$

y las condiciones de frontera determinan v_N^+ y $v_{-N^-}^m$. La ecuación (3.62) puede ser escrita de una forma mas compacta como sigue:

$$Mv^m = v^{m-1} + b^m, \quad (3.63)$$

donde v^m y b^m son los vectores de dimensión $(N^+ + N^- - 2)$, es decir

$$v^m = (v_{N^+-1}^m, \dots, v_{-N^-+1}^m), \quad b^m = \alpha(v_{N^+}^m, 0, \dots, 0, v_{-N^-}^m),$$

y M es la matriz cuadrada de $(N^+ + N^- - 2)$ dada en (3.62).

Para poder resolver este sistema de ecuaciones, son necesarios los métodos numéricos, que se mencionan a continuación.

Método LU para resolver matrices tridiagonales

La matriz M es una matriz tridiagonal, esto quiere decir que los elementos de la diagonal, los de la diagonal superior y los de la diagonal inferior son diferentes de cero.

Lo dice el método LU es que es posible hacer una descomposición de una matriz en la multiplicación de dos matrices; una diagonal superior y una diagonal inferior, es decir $A = LU$. Se tiene un sistema original de la forma

$$Ax = LUx = q.$$

Por lo que se puede resolver la ecuación

$$Ly = q,$$

usando sustitución *forward*. Se escribe

$$Ux = y,$$

que puede ser resuelta usando sustitución *backward*, lo que reduce el problema original en dos problemas mas fáciles de resolver. Primero se encuentra el valor de y , para después encontrar el valor de x .

Como se tiene una matriz tridiagonal, es posible encontrar una descomposición LU particular para este tipo de matrices de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & \cdots & \vdots \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \\
 = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & l_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & z_2 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & u_{n-1} & z_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & u_n \end{pmatrix}, \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

donde las u_i , z_i y l_i están dadas por

$$\begin{aligned}
 u_1 &= a_1, & u_i &= a_i - \frac{c_{i-1}b_{i-1}}{u_{i-1}}, & 2 \leq i \leq n, \\
 z_i &= c_i, & l_i &= b_i/u_i, & 1 \leq i \leq n-1.
 \end{aligned}$$

El procedimiento para encontrar la solución es primero calcular las u_i , después encontrar el valor de las y_i usando sustitución *forward*

$$y_1 = q_1, \quad y_i = q_i - \frac{b_{i-1}y_{i-1}}{u_{i-1}}, \quad 2 \leq i \leq n,$$

y después encontrar la solución usando sustitución *backward*

$$x_n = y_n/u_n, \quad x_i = \frac{y_i - c_{-i}x_{i+1}}{u_i}.$$

Esto significa que para resolver una matriz tridiagonal solo es necesario calcular u_i y las y_i explícitamente para encontrar la solución de las x_i .

Algoritmo para el método implícito de diferencias finitas

Lo que hace este algoritmo es resolver (3.62) para cada valor en el tiempo, usando el método LU descrito anteriormente, lo que permite encontrar el valor de la opción con los siguientes pasos.

1. Empezando con las condiciones iniciales y de frontera, y fijando un α , se forma la ecuación (3.62) para el tiempo uno.
2. Se resuelve la matriz con el método LU.

3. Repetir este proceso hasta encontrar u_n^M .

Como en el método explícito, se observan ciertos problemas, como que tan estable es y si converge a la solución. Para saber si la solución es estable lo único que se pide es que $\alpha > 0$. Para ver la justificación de esta restricción ver [13]. Para la convergencia, igual que en el método explícito las solución es convergente si y solo si es estable.

3.4.5. Método de Crank-Nicolson

El método implícito de diferencias finitas de Crank-Nicolson es uno de los métodos más eficientes, éste método puede ser visto como el promedio del método implícito y del explícito vistos en las secciones anteriores. Específicamente si se usa aproximación *forward* se obtiene el método explícito, y si se usa diferencia *backward* se obtiene el implícito. El promedio de estas dos ecuaciones es:

$$\begin{aligned} & \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\partial\tau} + O(\partial\tau) \\ &= \left(\frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{2(\partial x)^2} + \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{2(\partial x)^2} \right) + O((\partial x)^2), \end{aligned} \quad (3.65)$$

lo que da paso al método de Crank-Nicolson.

Si se habla de la exactitud, es posible ver a que se aproxima cada uno de los términos de la ecuación (3.65), por ejemplo el lado derecho de la ecuación es

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau + \partial\tau) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) \right).$$

Si se consideran diferencias *forward* y *backward* para $\partial^2 u / \partial x^2$ alrededor del punto $(x, \tau + \partial\tau/2)$ se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau + \partial\tau/2) - \partial\tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \tau}(x, \tau + \partial\tau/2) + R_4(\partial\tau/2)^2,$$

usando el teorema de Taylor, y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau + \partial\tau) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau + \partial\tau/2) + \partial\tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \tau}(x, \tau + \partial\tau/2) + S_4(\partial\tau/2)^2,$$

donde R_4 y S_4 son los errores, y sumando las ecuaciones se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau + \partial\tau/2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau + \partial\tau) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) \right) + O((\partial\tau)^2).$$

Se observa que

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau + \partial\tau/2) = \frac{u(x, \tau + \partial\tau) - u(x, \tau)}{\partial\tau} + O((\partial\tau)^2).$$

Interpretando la aproximación de diferencias finitas (3.65) como una aproximación de

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau + \partial\tau/2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau + \partial\tau/2),$$

se observa que la ecuación (3.65) es cierta.

De la ecuación (3.65) se obtiene que la diferencia apropiada es

$$v_n^{m+1} - \frac{1}{2}\alpha(v_{n-1}^{m+1} - 2v_n^{m+1} + v_{n+1}^{m+1}) = v_n^m + \frac{1}{2}\alpha(v_{n-1}^m - 2v_n^m + v_{n+1}^m). \quad (3.66)$$

Como en la sección anterior $\alpha = \partial\tau/(\partial x)^2$. En esta ecuación se observa que v_n^{m+1} , v_{n-1}^{m+1} y v_{n+1}^{m+1} están determinadas de forma implícita por los términos v_n^m , v_{n-1}^m y por v_{n+1}^m .

En principio, resolver este sistema de ecuaciones no es diferente a resolver la ecuación (3.61) del método implícito. Esto es posible ya que todo el lado derecho de la ecuación (3.66) puede ser evaluado explícitamente si v_n^m es conocido. El problema se reduce a calcular primero

$$Z_n^m = v_n^m + \frac{1}{2}\alpha(v_{n-1}^m - 2v_n^m + v_{n+1}^m). \quad (3.67)$$

La ecuación (3.42) es una formula explícita para Z_n^m . Después se resuelve

$$v - n^{m+1} - \frac{1}{2}\alpha(v_{n-1}^{m+1} - 2v_n^{m+1} + v_{n+1}^{m+1}) = Z_n^m, \quad (3.68)$$

este problema es lo mismo que resolver (3.61).

Considerese una opción europea simple, suponga que es posible truncar la malla infinita con $x = -N^-\partial x$ y $x = N^+\partial x$ y de nuevo tomar N^- y N^+ lo suficientemente grandes para no tener errores. Como en las secciones anteriores se calculará v_n^0 de la condición inicial de la siguiente manera:

$$v_n^0 = u_0(n\partial x), \quad -N^- \leq n \leq N^+.$$

También $v_{-N^-}^m$ y $v_{N^+}^m$ es una de las condiciones de frontera conocidas

$$v_{-N^-}^m = f(-N^-\partial x, m\partial\tau), \quad v_{N^+}^m = g(N^+\partial x, m\partial\tau).$$

Sólo queda encontrar las v_n^m para $m \geq 1$ y $-N^- < n < N^+$ de la ecuación (3.63). El problema puede ser visto como lineal representado como sigue:

$$Cv^{m+1} = Dv^m + b^m, \quad (3.69)$$

donde las matrices C y D están dadas por

$$C = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -\frac{1}{2}\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha & 1 + \alpha & -\frac{1}{2}\alpha & & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2}\alpha & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 0 & & -\frac{1}{2}\alpha & 1 + \alpha \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \frac{1}{2}\alpha & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha & 1 - \alpha & \frac{1}{2}\alpha & & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\alpha & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 0 & & \frac{1}{2}\alpha & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

y los vectores v^m , v_{m+1} y b^m son

$$v^{m+1} = \begin{pmatrix} v_{N^+-1}^{m+1} \\ \vdots \\ v_0^{m+1} \\ \vdots \\ v_{-N^++1}^{m+1} \end{pmatrix}, \quad v^m = \begin{pmatrix} v_{N^+-1}^m \\ \vdots \\ v_0^{m+1} \\ \vdots \\ v_{-N^++1}^m \end{pmatrix}$$

$$b^m = \frac{1}{2}\alpha \begin{pmatrix} v_{N^+}^m + v_{N^+}^{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{-N^-}^m + v_{-N^-}^{m+1} \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

y el vector b^m sale de las condiciones de frontera, que es lo mismo que se hace en el método implícito.

Algoritmo del método Crank-Nicolson

Como C es invertible¹⁰, lo siguiente es válido

$$v^{m+1} = C^{-1}(Dv^m + b^m), \quad (3.72)$$

entonces v^{m+1} puede ser encontrado dado v^m y las condiciones de frontera. Como la condición inicial determina v^0 , es posible encontrar cada v^m de forma inductiva.

Pero esto no es lo que hace este método, lo que hace es encontrar los vectores de Z^m de la siguiente manera:

$$Z^m = Dv^m + b^m. \quad (3.73)$$

El valor de Z^m es encontrado de forma explícita, usando la ecuación (3.67), y después se utiliza el método LU tridiagonal para encontrar

$$Cv^{m+1} = Z^m. \quad (3.74)$$

El algoritmo para el método es el siguiente

1. Se encuentran las matrices C y D , fijando el valor de α , utilizando las condiciones iniciales y de frontera se calculan los valores de v^0 y de b^0 .

¹⁰Debido a que es diagonal dominante.

2. Se calcula el valor de Z^0 explícitamente usando la ecuación (3.73).
3. Se calcula el valor de v^1 utilizando el método LU para matrices tridiagonales aplicándolo a la ecuación (3.74).
4. Repetir el proceso hasta encontrar v^{m+1} .

Como ya se tiene el algoritmo de forma explícita, es necesario hablar de la estabilidad de éste, es decir, es necesario decir cuando es estable el método y cuando no.

Para ver la estabilidad del método de Crank-Nicolson se examinan pequeñas perturbaciones armónicas de la solución exacta de la ecuación (3.66), si se escribe esta ecuación para v^m se obtiene:

$$(1 + \alpha)v_n^{m+1} - \frac{1}{2}\alpha(v_{n-1}^{m+1} + v_{n+1}^{m+1}) = (1 - \alpha)v_n^m + \frac{1}{2}\alpha(v_{n-1}^m + v_{n+1}^m).$$

Considerese el efecto de una pequeña perturbación $\in \lambda^m \text{sen } w$, después de hacer ciertos pasos algebraicos se obtiene

$$\lambda(1 + \alpha - \alpha \cos w) \text{sen } w = (1 - \alpha + \alpha \cos w) \text{sen } w,$$

encontrando el siguiente valor de λ

$$\lambda = \frac{1 - 2\alpha \text{sen}^2 \frac{1}{2}w}{1 + 2\alpha \text{sen}^2 \frac{1}{2}w},$$

entonces $|\lambda| < 1$ para todas las frecuencias de la perturbación. Esto implica estabilidad, ya que todas las perturbaciones decrecen cuando m crece.

Lo que significa que el método estable cuando $\alpha > 0$.

Método θ

El método θ es una generalización del método de Crank-Nicolson, este toma la forma

$$v_n^{m+1} - \theta\alpha(v_{n-1}^{m+1} - 2v_n^{m+1} + v_{n+1}^{m+1}) = v_n^m + (1 - \theta)\alpha(v_{n-1}^m - 2v_n^m + v_{n+1}^m),$$

donde $0 < \theta < 1$. Este método puede ser pensado como el promedio del método explícito y el método implícito vistos en las secciones anteriores. Cuando $\theta = 0$, el método θ es el método explícito, cuando $\theta = \frac{1}{2}$ el método θ es el método de Crank-Nicolson y cuando $\theta = 1$ el método θ es el método implícito. Es posible demostrar que el método θ es estable para toda $\alpha > 0$ si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$. Para $0 < \theta < \frac{1}{2}$ es estable si

$$0 < \alpha < \frac{1}{2(1 - 2\theta)}, \quad (0 < \theta < \frac{1}{2}).$$

El método θ es convergente cuando es estable, para demostrar esto, solo se tienen que hacer ciertas adaptaciones a las demostraciones de estabilidad de los métodos anteriores. Para poder desarrollar el método θ es esencialmente lo mismo que el método de Crank-Nicolson.

3.4.6. Métodos para opciones americanas

En esta sección se encuentra una manera para poder calcular el valor de una opción americana. Después de hacer ciertos cambios de variable en las siguientes ecuaciones

$$S = ke^x, \quad t = T - \tau / \frac{1}{2}\sigma^2,$$

$$V(S, t) = Ke^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x - \frac{1}{4}(k_1-1)^2 + k_1\tau} u(x, \tau),$$

donde

$$k_1 = r / \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Para el *put* americano se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = \text{máx}(e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}, 0), \quad (3.75)$$

$$u(x, \tau) \geq e^{\frac{1}{4}((k_1-1)^2 + 4k_1\tau)} \text{máx}(e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}, 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, \tau) = 0.$$

Para el *call* se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = \text{máx}(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0), \quad (3.76)$$

$$u(x, \tau) \geq e^{\frac{1}{4}((k_1-1)^2 + 4k_1\tau)} \text{máx}(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \tau) = 0.$$

Es posible escribir estos problemas de una manera más compacta, como un problema de complementación lineal de la forma

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \geq 0, \quad (u(x, \tau) - g(x, \tau)) \geq 0, \quad (3.77)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (u(x, \tau) - g(x, \tau)) = 0.$$

Aquí la restricción de la función de pago, $g(x, \tau)$ esta dada por

$$g(x, \tau) = e^{\frac{1}{4}((k_1-1)^2 + 4k_1\tau)} \text{máx}(e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}, 0),$$

para el *put*

$$g(x, \tau) = e^{\frac{1}{4}((k_1+1)^2 + 4k_1\tau)} \text{máx}(e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}, 0),$$

para el *call*.

La condición inicial y las condiciones de frontera se transforman en

$$u(x, 0) = g(x, 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, \tau) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x, \tau), \quad (3.78)$$

$$u(x, \tau), \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \text{ son tan continuas como } g(x, \tau), \frac{\partial g}{\partial x}(x, \tau).$$

La ventaja de la ecuación (3.77) es que no expresa de forma explícita que es un problema no acotado. Primero se resuelve el problema lineal complementario, después se encuentran las condiciones que dicen si es o no acotado, es decir se obtiene

$$u(X(\tau), \tau) = g(X(\tau), \tau), \quad \text{pero} \quad u(x, \tau) > g(x, \tau) \quad \text{para} \quad x > X(\tau),$$

para el *put*, y

$$u(X(\tau), \tau) = g(X(\tau), \tau), \quad \text{pero} \quad u(x, \tau) > g(x, \tau) \quad \text{para} \quad x < X(\tau),$$

para el *call*. Esta formulación es válida aún si se tuvieran muchos lugares no acotados o aunque fuera acotado.

Formulación de las diferencias finitas para opciones americanas

Para poder obtener un método numérico para resolver el *put* americano, es posible, como antes, con diferentes aproximaciones. Una opción es dividir el plano (x, τ) en una malla finita como lo hicimos en las secciones anteriores, y tomar aproximaciones de diferencias finitas de la ecuación (3.77).

Se empieza discretizando el problema de complementariedad. Se aproximarán los términos de la forma $\partial u / \partial \tau - \partial^2 u / \partial x^2$ por diferencias finitas en una malla regular con pasos de tamaño ∂x y $\partial \tau$ y truncarlo, por lo que x cae entre x^- y x^+ donde

$$-x^- = -N^- \partial x \leq x = n \partial x \leq N^+ \partial x = x^+,$$

y N^- y N^+ lo suficientemente grandes. Para no analizar por separado los tres métodos anteriores, sólo se analizará con el método θ , entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\partial \tau} + O(\partial \tau),$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \theta \left(\frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{(\partial x)^2} \right) \\ &+ (1 - \theta) \left(\frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{(\partial x)^2} + O((\partial x)^2) \right). \end{aligned}$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$ y $u_n^m = (n \partial x, m \partial \tau)$ y dependiendo del valor de θ es el método que se utiliza. Se escribe la función de pago discretizada como

$$g_n^m = g(n \partial x, m \partial \tau). \quad (3.79)$$

La condición $u(x, \tau) \geq g(x, \tau)$ implica que

$$v_n^m \geq g_n^m \quad \text{para} \quad m \geq 1, \quad (3.80)$$

y las condiciones de frontera e iniciales

$$v_{-N-}^m = g_{-N-}^m, \quad v_{N+}^m = g_{N+}^m, \quad v_n^0 = g_n^0. \quad (3.81)$$

Se utilizará el método de diferencias finitas para discretizar las derivadas parciales que están dadas por la ecuación (3.77) para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx & \frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\partial \tau} - \theta \left(\frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{(\partial x)^2} \right) \\ & - (1 - \theta) \left(\frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{(\partial x)^2} \right), \end{aligned}$$

donde la condición $\partial u / \partial \tau - \partial^2 u / \partial x^2 \geq 0$ es aproximada por

$$v_n^{m+1} - \alpha \theta (v_{n+1}^{m+1} - 2v_n^{m+1} + v_{n-1}^{m+1}) \geq v_n^m - \alpha (1 - \theta) (v_{n+1}^m - 2v_n^m + v_{n-1}^m).$$

Como en las secciones anteriores

$$\alpha = \frac{\partial \tau}{(\partial x)^2}.$$

Si $\theta < \frac{1}{2}$ las restricciones de estabilidad pueden ser aplicadas con α , es decir $0 < \alpha < \frac{1}{2}(1 - \theta)$. Se define

$$b_n^m = v_n^m - \alpha (1 - \theta) (v_{n+1}^m - 2v_n^m + v_{n-1}^m), \quad (3.82)$$

entonces

$$v_n^{m+1} - \alpha \theta (v_{n+1}^{m+1} - 2v_n^{m+1} + v_{n-1}^{m+1}) \geq b_n^m. \quad (3.83)$$

Observese que en el tiempo $(m+1)\partial\tau$ es posible encontrar b_n^m de manera explícita ya que se conocen los valores de v_n^m . La condición de complementariedad lineal

$$g(x, \tau) = e^{\frac{1}{4}((k_1+1)^2+4k_1\tau)} \max(e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0),$$

es aproximada por

$$(v_n^{m+1} - \alpha \theta (v_{n+1}^{m+1} - 2v_n^{m+1} + v_{n-1}^{m+1}) - b_n^m) (v_n^{m+1} - g_n^{m+1}) = 0. \quad (3.84)$$

Algoritmo para el método de opciones americanas

Es posible escribir la aproximación de diferencias finitas (3.80)-(3.84) como un problema de matrices, este problema puede ser resuelto con el método *SOR*. Lo que hace el método *SOR* es resolver un sistema lineal de la forma $Ax = b$ donde $a_{ii} \neq 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$, también se debe elegir el parámetro ω y el vector de soluciones iniciales $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^t$, entonces el algoritmo es como sigue:

1. Se fija $k = 1$.
-

2. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, sea:

$$x_i^{(k)} = (1 - \omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} \right).$$

3. Si $x^{(k)}$ es lo suficientemente exacto ir al paso 4. Si $x^{(k)}$ no es lo suficientemente exacto, agregar 1 a k e ir al paso 2.

4. El proceso esta terminado.

Este algoritmo solo sirve para dar una idea de como se va a trabajar. Sea v^m el vector que aproxima los valores de v al tiempo $m\partial\tau$ y g^m el vector que representa las contradicciones al mismo tiempo, es decir

$$v^m = \begin{pmatrix} v_{-N^-+1} \\ \vdots \\ v_{N^+-1}^m \end{pmatrix}, \quad g^m = \begin{pmatrix} g_{-N^-+1} \\ \vdots \\ g_{N^+-1}^m \end{pmatrix}. \quad (3.85)$$

Por las condiciones (3.81) se sabe que $v_{N^+}^m = g_{N^+}^m$. Sea el vector b^m el vector dado por

$$b^m = \begin{pmatrix} b_{-N^-+1} \\ \vdots \\ b_{N^+-1}^m \end{pmatrix}, \quad (3.86)$$

donde los valores de b_n^m están determinados por (3.82). Cada b_n^m puede ser escrita de la siguiente forma

$$b_n^m = v_n^m + \alpha(1 - \theta)(v_{n+1}^m - 2v_n^m + v_{n-1}^m) \text{ para } -N^- + 2 < n < N^+ - 2, \quad (3.87)$$

y en las condiciones finales $n = -N^- + 1$ y $n = N^+ - 1$ se tiene que $b_{-N^-+1}^m$ y $b_{N^+-1}^m$ son diferentes a las demás ya que se incluyó un término más, entonces las condiciones están dadas por

$$b_{-N^-+1}^m = v_{-N^-+1}^m + \alpha(1 - \theta)(g_{N^-}^m - 2v_{-N^-+1}^m + v_{-N^-+2}^m) + \alpha\theta g_{-N^-}^{m+1},$$

$$b_{N^+-1}^m = v_{N^+-1}^m + \alpha(1 - \theta)(g_{N^+}^m - 2v_{N^+-1}^m + v_{N^+-2}^m) + \alpha\theta g_{N^+}^{m+1}. \quad (3.88)$$

Si se introduce la matriz cuadrada, simétrica y tridiagonal

$$C = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha\theta & -\alpha\theta & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha\theta & 1 + 2\alpha\theta & -\alpha\theta & & \vdots \\ 0 & -\alpha\theta & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\alpha\theta \\ 0 & 0 & & -\alpha\theta & 1 + 2\alpha\theta \end{pmatrix}, \quad (3.89)$$

es posible reescribir la aproximación discretizada por un problema de complementariedad lineal de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (Cv^{m+1} - b^m) \geq, \quad (v^{m+1} - g^{m+1}) \geq 0, \\ (v^{m+1} - g^{m+1})(Cv^{m+1} - b^m) = 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Se toma $Z \geq 0$ para decir que el vector no tiene componentes negativas. El cambio en el tiempo es como en el método implícito, es decir el vector b^m contiene la información del cambio en el tiempo $m\partial\tau$ que determina el valor de v^{m+1} en el paso del tiempo $(m+1)\partial\tau$. En cada paso de tiempo se puede calcular b^m de los valores que ya se conocen de v^m . Se calcula g^m para cualquier paso en el tiempo, por lo que solo queda resolver el problema (3.90).

Para implementar el algoritmo que se va a utilizar, es necesario validar que los elementos que no son cero de la matriz C sólo sean los elementos de la diagonal, de la diagonal superior y de la inferior.

Con lo anterior se tiene la información completa para dar el algoritmo.

1. Dada v^m , se forma el vector b^m usando las ecuaciones (3.86), (3.87) y (3.88), para después calcular el vector g^{m+1} usando (3.89) y (3.90).
2. Sea $V^j = (V_{-n+1}^j, \dots, V_{N+1}^j)$ denotando los vectores iterativos, se empieza con V^0 y se aplica el algoritmo SOR para encontrar el vector V^{j+1} a partir de V^j . Se sabe que $V^j \rightarrow v^{m+1}$ cuando $j \rightarrow \infty$. Empieza con $V^0 = \text{máx}(v^m, g^{m+1})$.
3. En secuencia se forman las cantidades U_i^{j+1} dadas por

$$U_i^{j+1} = (b_i^m + \alpha\theta V_{i-1}^{j+1} + \alpha\theta V_{i-1}^j) / (1 + 2\alpha\theta),$$

y después se obtiene el valor V^{j+1} de

$$V_i^{j+1} = \text{máx} \left(g_i^{m+1}, V_i^j + \omega(U_i^{j+1} - V_i^j) \right),$$

donde $1 < \omega < 2$ es un parámetro dado.

4. Pruebe donde $|V_{j+1} - V^j|$ es o no más pequeño que el parámetro de tolerancia elegido anteriormente ϵ , es decir, pruebe cuando

$$\sum_i (V_i^{j+1} - V_i^j)^2 \leq \epsilon^2.$$

Si esto sucede pasar al número 5, pero si no sucede, regresar al paso 3 pero en lugar de usar V^j se usa V^{j+1} .

5. Cuando los vectores V^j tienen la convergencia deseada, se obtiene $v^{k+1} = V^{j+1}$
6. Si ya se tiene el número de pasos requeridos pasar al siguiente paso, si no regresar al paso 1.
7. El proceso está terminado.

Capítulo 4

Simulación Monte Carlo

El método Monte Carlo está basado en simulación. La simulación puede ser utilizada para resolver muchos problemas, por ejemplo, supongase que se quiere abrir un negocio que abrirá a las 8 am, en promedio al día se tienen alrededor de 50 pedidos, la experiencia indica que el tiempo que se tarda en cubrir cada pedido es una variable aleatoria con media de 20 minutos y desviación estandar de 8 minutos. Se planea no recibir pedidos después de las 6 pm. Bajo este escenario, es necesario saber la respuesta a ciertas preguntas como ¿cuál es la hora promedio en la que el encargado va a dejar el depósito?, ¿cuál es el tiempo promedio en el que se cubre un pedido?, ¿qué porción del total de los pedidos se surte en media hora?

Para resolver estas preguntas es necesario plantear un modelo probabilístico ya que plantearlo de forma analítica es complicado, para hacerlo, es necesario hacer ciertos supuestos para aclarar el escenario, por ejemplo situaciones probabilísticas acerca de la llegada de los clientes, la tasa de arribo que depende de la hora del día, también se debe especificar una función de probabilidad, esto es para medir el tiempo que toma cubrir cada pedido. Un factor muy importante a considerar es cuando un pedido tiene la distribución encontrada y cuando no, es decir, se deben plantear ciertas suposiciones probabilísticas con respecto a tiempo de arribo y con respecto al tiempo de servicio. También es necesario ver si las variables anteriores dependen del día o es constante durante el tiempo. Tomando en cuenta estos supuestos¹, se ha planteado un escenario probabilístico.

Una vez planteado el problema, el paso siguiente es resolverlo, pero como se mencionó anteriormente es muy difícil resolver este tipo de problemas analíticamente, por lo que se hace uso de la simulación. Este método está basado en dos grandes grupos, en el primero es usando ciertos conocimientos de computación para generar *números aleatorios* que son utilizados para simular posibles ocurrencias durante un periodo largo de tiempo, el segundo utiliza la teoría estadística para estimar los valores que resuelven las preguntas anteriormente

¹Asegurando que al menos sean los básicos.

planteadas. En pocas palabras lo que hace el método de simulación es:

- Utilizar la computadora para generar números aleatorios que cumplen con cierta función de distribución fijada con anticipación. (En el ejemplo son el tiempo de arribo y el tiempo de servicio).
- Utilizar la estadística para estimar la respuesta las preguntas planteadas.

Para poder plantear y resolver este tipo de problemas, es necesario tener bases probabilísticas muy sólidas².

Como se pudo ver en el ejemplo, es posible utilizar simulación para casi cualquier cosa, el punto de este capítulo es utilizar simulación para valuar opciones, por lo que éste capítulo estará enfocado en los métodos útiles para llegar al objetivo.

4.1. Métodos para generar números aleatorios

El corazón de todas las simulaciones Monte Carlo son una sucesión de números aparentemente aleatorios usados para derivar la simulación. En el análisis del método Monte Carlo se supondrá que los números son aleatorios para poder utilizar conceptos de probabilidad y estadística. Es importante mencionar que los números aleatorios son generados por algoritmos completamente determinísticos.

Antes de entrar de lleno a la discusión de la sucesiones, se debe especificar a que se refiere con generadores de números aleatorios. Cuando se habla de estos se hace referencia a un mecanismo para producir una sucesión de variables aleatorias U_1, U_2, \dots con las siguientes propiedades:

1. Cada U_i se distribuye uniforme en el intervalo $[0, 1]$.
2. Las U_i son independientes.

Un generador de números aleatorios, produce una sucesión finita de números aleatorios u_1, u_2, \dots, u_K en el intervalo unitario. Por lo general, estos valores dependen de algunos valores que el usuario debe especificar con anterioridad como se verá en los métodos. Cualquier sucesión de las que se genera está constituida por un conjunto de posibles valores de variables aleatorias uniformes independientes U_1, \dots, U_K . Un buen generador de números aleatorios es aquel que satisface la admisión de vagos requerimientos en los que es difícil distinguir de pequeños segmentos de sucesiones de u_1, u_2, \dots, u_K de una realización de variables aleatorias uniformes. Como conclusión se destaca que un buen generador produce valores que son consistentes con las propiedades 1 y 2. Si el número K es grande, entonces se tienen más posibilidades de que los valores caigan en un subintervalo del intervalo unitario para que se asemejen a la longitud del intervalo y obtener uniformidad. La independencia sugiere que no hay un patrón entre los valores.

Para construir un buen generador de números aleatorios se considera lo siguiente:

²Para ver algún concepto ver capítulo de cálculo estocástico o apéndice.

- Longitud del periodo: Como se verá más adelante cualquier generador aleatorio, en algún momento se va a repetir, por lo que es bueno saber cual es la longitud del periodo, entre más grande mejor.
- Reproducibilidad: Se sabe que es difícil reproducir una sucesión aleatoria, pero hay veces en las que es necesario reproducir la sucesión, por lo que debe ser fácil reproducirla.
- Velocidad: Como un generador aleatorio debe ser llamado miles de veces, este debe ser rápido.
- Portátil: Para generar números aleatorios, el algoritmo debe reproducir la misma sucesión de valores en cualquier plataforma computable.
- Aleatorio: Esta es una de las consideraciones más importantes. Hay dos aspectos para construir generadores aleatorios: cumplir con las propiedades teóricas solicitadas y hacer pruebas estadísticas.

4.1.1. Generadores lineales congruenciales

Existen distintos tipos de generadores para números aleatorios, pero los más conocidos son los lineales congruenciales. Hay dos tipos de generadores lineales congruenciales, el puro y el mixto.

El puro toma la siguiente forma:

$$x_{i+1} = ax_i \text{ mod } m,$$

$$u_{i+1} = x_{i+1}/m.$$

El primer generador lineal congruencial mixto fue propuesto por Lehmer, este toma la forma:

$$x_{i+1} = (ax_i + c) \text{ mod } m,$$

$$u_{i+1} = x_{i+1}/m.$$

En estos generadores se tiene un multiplicador a , el modulo y la semilla que es x_0 . La semilla es un número entre 1 y $m-1$ que es especificado por el usuario. En particular hay ciertas condiciones simples para asegurar que estos generadores tengan periodo completo³. Si $c \neq 0$ las condiciones son:

- c y m son primos relativos,
- todo primo que divide a m , divide a $a-1$,
- $a-1$ es divisible entre 4 si m lo es.

Si $c = 0$ y m es primo es posible obtener un periodo completo para cualquier $x_0 \neq 0$ si

³Es decir el número de distintos valores generados por cualquier semilla es $m-1$.

- $a^{m-1} - 1$ es múltiplo de m ,
- $a^j - 1$ no es múltiplo de m para $j = 1, \dots, m - 2$.

Un número a que satisface esas dos propiedades es llamado *raíz primitiva* de m . Es posible ver que si $c = 0$ la sucesión $\{x_i\}$ es la siguiente

$$x_0, ax_0, a^2x_0, a^3x_0, \dots \pmod{m},$$

que es la sucesión que regresa primero a x_0 para la k más pequeña que cumple que $a^k x_0 \pmod{m} = x_0$, además es la k más pequeña para la que $a^k \pmod{m} = 1$, es decir, la k para la cual $a^k - 1$ es múltiplo de m . Entonces la definición de raíz primitiva corresponde precisamente al requerimiento de que la sucesión no regrese a x_0 hasta llegar a $a^{m-1}x_0$.

Marsaglia demostró que si se toma $c \neq 0$, el operador es más lento que tomar $c = 0$, es conveniente tomar m primo ya que es posible construir un generador simple con un periodo completo encontrando raíces primitivas de m .

Implementación de generadores lineales congruenciales

Aparte de la velocidad, evadir el sobre flujo es la consideración principal en la implementación de generadores lineales congruenciales. Si el producto ax_i puede ser representado exactamente para toda sucesión de x_i , entonces no se tiene control del sobre flujo. Si el multiplicador a es grande, ni utilizando precisión double es posible obtener una representación exacta para cada producto ax_i . En este caso el generador puede ser implementado de la siguiente forma:

1. Representar el múltiplo a como

$$a = 2^\alpha a_1 + a_2 \text{ con } a_1, a_2 < 2^\alpha.$$

2. Usar la siguiente fórmula

$$ax_i \pmod{m} = (a_1(2^\alpha x_i \pmod{m}) + a_2 x_i \pmod{m}) \pmod{m}.$$

La integración aritmética a veces es más rápida que la aritmética de punto flotante y depende mucho del tipo de precisión que se utilice.

4.1.2. Generadores combinados y otros métodos

Los métodos que combinan generador lineales congruenciales son prometedores, ya que preservan ciertas propiedades atractivas, como las computacionales pero con ciertas ventajas, ya que es posible extender el periodo.

Una manera fácil de ver los generadores combinados es sumar uno o más generadores lineales congruenciales. Wichmann y Hill propusieron sumar valores en el intervalo unitario, mientras que L'Ecuyer suma y después divide.

Para poder entender mejor, se da siguiente ejemplo. Se toman J generadores donde el j -ésimo tiene los parámetros a_j, m_j de la siguiente forma:

$$x_{j,i+1} = a_j x_{j,i} \text{ mod } m_j, u_{j,i+1} = x_{j,i+1}/m_j, j = 1, \dots, J.$$

La combinación de Wichmann-Hill fija u_{i+1} igual a la parte fraccional de $u_{1,i+1} + u_{2,i+1} + \dots + u_{J,i+1}$. La combinación de L'Ecuyer toma la siguiente forma:

$$x_{i+1} = \sum_{j=1}^J (-1)^{j-1} x_{j,i+1} \text{ mod } (m_1 - 1), \quad (4.1)$$

y

$$u_{i+1} = \begin{cases} x_{i+1}/m_1, & , x_{i+1} > 0 \\ (m_1 - 1)/m_1, & , x_{i+1} = 0 \end{cases}, \quad (4.2)$$

asumiendo que m_1 es la mas grande de las m_j .

Una combinación de generadores puede tener un periodo mucho mas grande que cualquiera de sus elementos.

Otra forma de extender generadores congruenciales es usando lo siguiente

$$x_i = (a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_k x_{i-k}) \text{ mod } m, \quad (4.3)$$

seguido de $u_i = x_i/m$. Este método es conocido como generador múltiple recursivo o MRG. Una semilla para este método consiste en $x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_0$.

Una estrategia alternativa para generar números aleatorios produce un flujo de bits que están concatenados para producir enteros y después normalizados para producir puntos en el intervalo unitario. Es posible obtener los bits de forma recursiva, es decir

$$b_i = (a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \dots + a_k b_{i-k}) \text{ mod } 2,$$

con $a_i = 0$ o $a_i = 1$. Este método fue propuesto por Tausworthe.

De la misma manera, los generadores congruenciales inversos se obtienen de manera recursiva, es decir

$$x_{i+1} = (a x_i^- + c) \text{ mod } m,$$

donde $(\text{mod } m)$ a la inversa de x es un número entre 1 y $m - 1$ único si existe y que satisface que $x x^- = 1 \text{ mod } m$.

En esta sección se han mencionado diferentes métodos para generar números aleatorios y en la siguiente sección se asumirá que se han calculado estas sucesiones de números aleatorios.

4.2. Métodos generales de muestreo

Utilizando algún método se genera una sucesión de variables aleatorias independientes U_1, U_2, \dots que satisfacen

$$P(U_i \leq u) = \begin{cases} 0 & , u < 0 \\ u & , 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & , u > 1 \end{cases}, \quad (4.4)$$

es decir variables aleatorias independientes que se distribuyen uniforme entre cero y uno. Un algoritmo de simulación transforma estas variables independientes en una muestra de caminatas de procesos estocásticos.

4.2.1. Método de la transformada inversa

Supongase que se quiere tomar una muestra de funciones de distribución F , es decir, se desea generar variables aleatorias X con la propiedad de que $P(X \leq x) = F(x)$ para toda x . El método de la transformada inversa fija

$$X = F^{-1}(U), U \text{ Unif } [0, 1], \quad (4.5)$$

donde F^{-1} es la inversa de F .

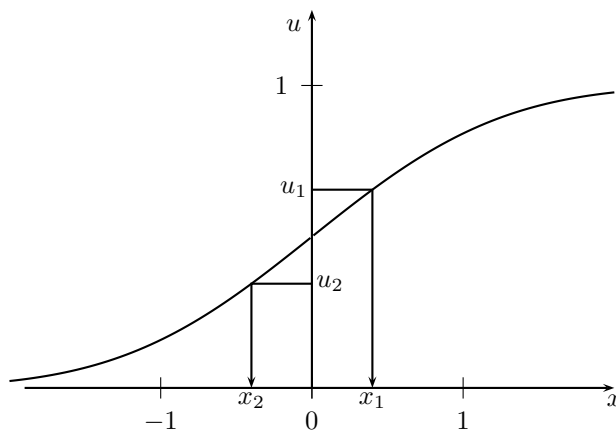


Figura 4.1: Método de la transformada inversa.

Esta transformación está representada en la figura 4.2.1, en la que se toma cualquier distribución F en la cual es posible ver que los valores entre u y $F(0)$ caen en la parte negativa de x y los valores entre $F(0)$ y 1 caen en el cuadrante positivo.

En las siguientes gráficas es posible ver otras formas de representar la inversa, por ejemplo en la figura (4.2) se observa una función de distribución con un brinco en el punto x_0 , es decir,

$$\lim_{x \uparrow x_0} F(x) < F(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} F(x).$$

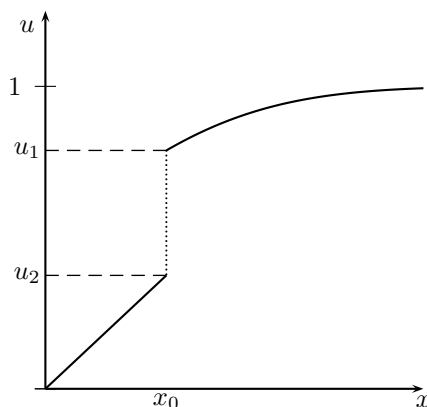


Figura 4.2: Transformada inversa con saltos.

Si se usa a F como distribución, y se toma la descripción de arriba, x_0 tiene probabilidad $F(x_+) - F(x_-)$, donde $F(x_-)$ representa a todos los valores que toma F antes de x_0 y $F(x_+)$ todos los valores después de x_0 .

En la figura (4.3) se observa que la función de distribución tiene partes planas, es decir, sea $a < x < b$, si $F(a) = F(x) = F(b)$.

En conclusión, la inversa de F está bien definida si F es estrictamente creciente, de otro modo, es necesaria una regla para no tener dificultades, por ejemplo

$$F^{-1}(u) = \inf \{x : F(x) \leq u\}; \quad (4.6)$$

si hay muchas x para las cuales $F(x) = u$, esta regla elige la menor de las x .

En la figura (4.3) la inversa de F no está bien definida en los puntos donde se tienen partes planas, por lo tanto se dice que si F es constante en un intervalo $[a, b]$ y si $X \sim F$, entonces

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = 0.$$

Por lo anterior, se concluye que las partes planas de la gráfica, son las partes que tienen probabilidad cero. Si F es continua y estrictamente creciente, entonces la densidad en todos lados de la distribución es distinta de cero.

Para verificar que la transformada inversa (4.5) genera muestras de la distribución F , se valida la distribución de X de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(F^{-1}(U) \leq x) \\ &= P(U \leq F(x)) \\ &= F(x). \end{aligned}$$

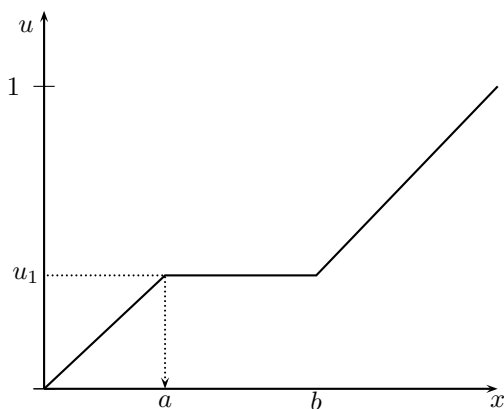


Figura 4.3: Transformada inversa con picos.

La segunda igualdad sucede ya que F^{-1} está definida como los eventos $\{F^{-1}(u) \leq x\}$ y $\{u \leq F(x)\}$ que coinciden para toda u y x , es decir los eventos coinciden para los valores de x y u respectivamente. La última igualdad viene de (4.4).

Para entender mejor este método de muestras los siguiente ejemplos.

Distribución exponencial. Esta distribución es:

$$F(x) = 1 - e^{-x/\theta}, x \geq 0.$$

Esta puede ser la distribución de los tiempos entre los saltos de un proceso poisson con parámetro $1/\theta$. Para invertir esta distribución, es necesario utilizar el algoritmo $X = -\theta \log(1 - U)$, que puede ser implementado de la siguiente forma:

$$X = -\theta \log(U). \tag{4.7}$$

Esto pasa ya que U y $1 - U$ tienen la misma distribución.

4.3. Variable aleatoria normal

Las variables aleatorias normales, son base para la construcción de muchos modelos financieros de simulación. Esta sección empieza con las propiedades básicas de la distribución normal.

4.3.1. Propiedades básicas

DEFINICIÓN. 7

Las distribución de una normal estándar tiene densidad

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{s\Pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (4.8)$$

y tiene función de distribución

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{s\Pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du. \quad (4.9)$$

La palabra estándar significa que es una variable aleatoria con media 0 y varianza 1. De donde se obtiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN. 8

En general una variable aleatoria que se distribuye normal con media μ y varianza σ^2 con $\sigma > 0$ tiene:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{s\Pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.10)$$

como función de densidad y

$$\Phi(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \quad (4.11)$$

DEFINICIÓN. 9

Si $Z \sim N(0, 1)$ entonces:

$$\mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Una función de distribución normal esta caracterizada por un vector μ con dimensión d y una matriz de covarianza Σ , esta debe ser simétrica y positiva semidefinida, es decir:

$$x^T \Sigma x \geq 0, \quad (4.12)$$

para toda $x \in \mathbb{R}^d$. La ecuación (4.12) es equivalente a decir que todos los eigenvalores de Σ son no negativos. Si Σ es positiva definida, entonces la función de distribución $N(\mu, \Sigma)$ tiene función de densidad

$$\Phi_{\mu, \Sigma}(x) = \frac{1}{(2\Pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (4.13)$$

con $|\Sigma|$ el determinante de Σ .

DEFINICIÓN. 10

Si $X \sim N(\mu, \Sigma)$, entonces el i -ésimo componente X_i tiene distribución (μ_i, σ^2) con $\sigma^2 = \Sigma_{ii}$. El i -ésimo y el j -ésimo componente tienen covarianza

$$\text{Cov}[X_i, X_j] = \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = \Sigma_{ij}.$$

DEFINICIÓN. 11

El coeficiente de correlación entre X_i y X_j está dado por

$$\rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}.$$

Existen tres propiedades de la distribución normal multivariada que son muy importantes.

PROPOSICIÓN. 4

Propiedad de la Transformación lineal. *Cualquier transformación lineal de un vector normal, también es lineal, es decir*

$$X \sim N(\mu, \Sigma) \Rightarrow AX \sim N(A\mu, A\Sigma A^T), \quad (4.14)$$

para toda matriz $A_{k \times d}$, $\Sigma_{d \times d}$ y μ , un vector de dimensión d .

PROPOSICIÓN. 5

Fórmula condicional. *Suponga que el vector $(X_{[1]}, X_{[2]})$, es un vector multivariado normal con*

$$\begin{pmatrix} X_{[1]} \\ X_{[2]} \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \mu_{[1]} \\ \mu_{[2]} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{[11]} & \Sigma_{[12]} \\ \Sigma_{[21]} & \Sigma_{[22]} \end{pmatrix} \right), \quad (4.15)$$

y suponga que $\Sigma_{[22]}$ tiene rango completo, entonces

$$(X_{[1]} | X_{[2]=x}) \sim N(\mu_{[1]} + \Sigma_{[12]} \Sigma_{[22]}^{-1} (x - \mu_{[2]}), \Sigma_{[11]} - \Sigma_{[12]} \Sigma_{[22]}^{-1} \Sigma_{[21]}). \quad (4.16)$$

DEFINICIÓN. 12

Función Generadora de Momentos. *Si $X \sim N(\mu, \Sigma)$, con X con dimensión d , entonces*

$$\mathbb{E} = [\exp(\theta^T X) = \exp(\mu^T \theta + \frac{1}{2} \theta^T \Sigma \theta), \quad (4.17)$$

para toda $\theta \in \mathfrak{R}^d$.

Una vez expuestas las propiedades básicas, es el momento de seguir adelante con los métodos para generar variables aleatorias normales.

4.3.2. Métodos para generar variables aleatorias normales univariadas

En esta sección se verán distintos métodos para generar muestras de distribuciones normales. Es suficiente asumir una muestra de variables aleatorias que se distribuyen $N(0, 1)$. Se hace el supuesto de la disponibilidad de una sucesión de variables aleatorias independientes U_1, U_2, \dots que se distribuyen uniforme el intervalo $[0, 1]$, considerando métodos para transformar estas variables aleatorias uniformes en variables aleatorias normales.

Método de Box-Muller

Este algoritmo genera una muestra de variables aleatorias normales estándar, donde cada uno de los elementos de la muestra es una variable aleatoria normal estándar. Está basado en las siguientes propiedades:

- $R^2 = Z_1^2 + Z_2^2$ se distribuye exponencial con media 2, es decir:

$$\mathbb{P}(R \leq x) = 1 - e^{-x/2};$$

- dada R el punto (Z_1, Z_2) , R se distribuye uniforme en la circunferencia de radio \sqrt{R} centrado en el origen. Para generar esta, primero se debe generar un punto. En la figura (4.3.2) se muestran las *coordenadas polares* que son la representación de como se forma la circunferencia.

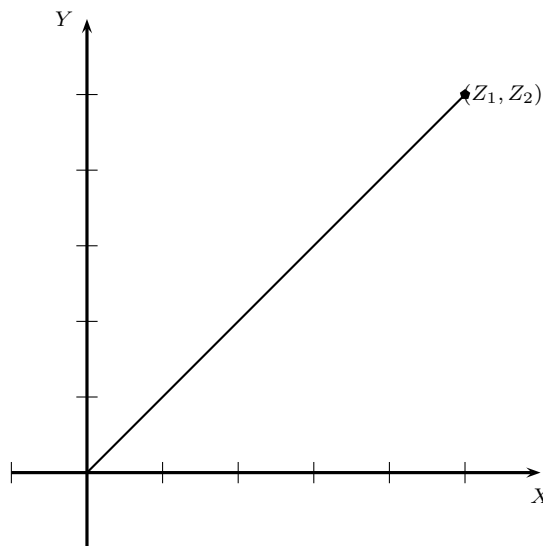


Figura 4.4: Coordenadas Polares.

Es posible generar (Z_1, Z_2) pero primero se debe generar R y después elegir un punto sobre la circunferencia de \sqrt{R} de manera uniforme. De una muestra de distribuciones exponenciales, se puede fijar $R = -2 \log(U_1)$, $U \sim \text{Unif}[0, 1]$ como en la ecuación (4.7). Para generar un punto sobre la circunferencia, se genera un ángulo aleatorio de manera uniforme en $[0, 2\pi]$ y después se dibuja el ángulo hasta llegar a un punto sobre la circunferencia. Este ángulo aleatorio será generado por $V = 2\pi U_2$, donde $U_2 \sim \text{Unif}[0, 1]$, el punto correspondiente en la circunferencia tendrá coordenadas $(\sqrt{R} \cos(V), \sqrt{R} \sin(V))$. El algoritmo queda de la siguiente manera:

1. Generar U_1, U_2 variables aleatorias independientes que se distribuyen uniforme en $[0, 1]$, con estas variables se obtienen los valores de R y V de la

siguiente forma

$$R = -2\log(U_1),$$

y

$$V = 2\pi U_2.$$

2. Se obtiene el valor de Z_1 y de Z_2 con las siguientes ecuaciones

$$Z_1 = (\sqrt{R} \cos(V)),$$

y

$$Z_2 = (\sqrt{R} \sin(V)).$$

3. Finalizar.

Marsaglia y Bray le hicieron ciertas modificaciones al algoritmo, reduciendo problemas computacionales, esto es evadiendo la evaluación del seno y del coseno. Este método utiliza el método de aceptación y rechazo para hacer una muestra de puntos uniforme y después transformar estos puntos en variables aleatorias normales. EL algoritmo es el siguiente: Mientras ($X < 1$)

1. Se generan U_1 y U_2 , $U_i \sim \text{Uni}[0, 1]$.

2. Con los valores generados en 1, se obtiene

$$U_1 = 2(U_1 - 1), \quad U_2 = 2(U_2 - 1).$$

3. Utilizando valores de 2

$$X = U_1^2 + U_2^2$$

para obtener Y con la siguiente fórmula

$$Y = \sqrt{-2 \log X / X}.$$

4. Utilizando el valor de Y obtenido en 3, se tiene

$$Z_1 = U_1 Y$$

y

$$Z_2 = U_2 Y.$$

5. Finalizar.
-

Método de aproximación de la inversa de una normal

Aplicando el Método de la inversa a la distribución normal, solo queda la evaluación de Φ^{-1} . Se verán ciertos métodos específicos para evaluar Φ^{-1} .

Como la distribución normal es simétrica, se tiene:

$$\Phi^{-1}(1 - u) = -\Phi^{-1}(u),$$

por esto, es suficiente evaluar Φ^{-1} en el intervalo $[0.5, 1]$, y después usar la propiedad de simetría para extender la aproximación al resto de l intervalo unitario. Beasley y Springer propusieron la siguiente aproximación

$$\Phi^{-1}(u) \sim \frac{\sum_{n=0}^3 a_n (u - \frac{1}{2})^{2n+1}}{1 + \sum_{n=0}^3 b_n (u - \frac{1}{2})^{2n+1}}, \quad (4.18)$$

para $0.5 \leq u \leq 0.92$, con constantes a_n y b_n dadas (ver figura 4.5). Cuando u mayor a 0,92 se utiliza la función racional $\sqrt{\log(1 - u)}$. Moro encontró una manera de aproximar las colas de la distribución normal, esto es, reemplazando la segunda parte de la aproximación de Beasley - Springer por una aproximación de Chebyshev, es decir

$$\Phi^{-1}(u) \approx g(u) = \sum_{n=0}^8 c_n [\log(-\log(1 - u))]^n, \quad 0.92 < u \leq 1, \quad (4.19)$$

con c_n constante dada también en la figura 4.5, usando que es simétrica se tiene

$a_0 =$	2.50662823884	$b_0 =$	-8.47351093090
$a_1 =$	-18.61500062529	$b_1 =$	23.08336743743
$a_2 =$	41.39119773534	$b_2 =$	-21.06224101826
$a_3 =$	-25.44106049637	$b_3 =$	3.13082909833
$c_0 =$	0.3374754822726147	$c_5 =$	0.0003951896511919
$c_1 =$	0.9761690790917186	$c_6 =$	0.0000321767881768
$c_2 =$	0.1607979714918209	$c_7 =$	0.0000002888167364
$c_3 =$	0.0276438810333863	$c_8 =$	0.0000003960315187
$c_4 =$	0.0038405729373609.		

Figura 4.5: Constantes para el Método de aproximación de la inversa de la normal.

$$\Phi^{-1}(u) \approx -g(1 - u), \quad 0 < u \leq 0.08.$$

Con estas modificaciones, Moro encontró un error absoluto máximo de $3 * 10^{-9}$, sobre el rango $\Phi^{-1}(-7) \leq u \leq \Phi^{-1}(7)$. El algoritmo de Moro es el siguiente:

1. Sea u un número aleatorio entre $[0, 1]$ y las constantes de la tabla 4.5, x una aproximación de Φ^{-1} entonces se toma

$$y = u - 0.5.$$

Si $|y| \leq 0.42$, ir a 2. Si $|y| > 0.42$, ir a 3.

2. Tomando $u = y^2$, se encuentra el valor de x de la siguiente forma

$$x = y \left(\frac{((a_3 r + a_2)(r + a_1))(r + a_0)}{(((a_3 r + a_2)(r + a_1))(r + a_0))(r + 1)} \right).$$

Ir a 6.

3. Se toma $r = u$ y si $y > 0$ entonces $r = 1 - u$, después

$$r = \log(-\log(r)).$$

4. Usando el valor de r dado en 4, se calcula

$$x = (c_0 + r)(c_1 + r)(c_2 + r)(c_3 + r)(c_4 + r)(c_5 + r)(c_6 + r)(c_7 + r)(c_8 + r).$$

5. Si $y < 0$ y $x = -x$.

6. Finalizar.

El problema que se tiene cuando se calcula Φ^{-1} , es encontrar la raíz de x para la ecuación $\Phi(x) = u$, que al principio fue encontrada con alguno de los métodos mencionados en la sección (3.1). Un ejemplo de un método que produce iteraciones es el método de Newton

$$x_{n+1} = x_n \frac{\Phi(x_n) - u}{\phi(x_n)},$$

esta ecuación puede ser vista de la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n + (u - \Phi(x_n)) \exp(-0.5x_n \cdot x_n + c), \quad c \equiv \log(\sqrt{2\pi}).$$

Marsaglia, Zaman y Marsaglia recomiendan el punto inicial

$$x_0 = \pm \sqrt{|-1.6 \log(1.0004 - (1 - 2u))^2|},$$

donde el signo depende si u es negativa o positiva, y con este valor inicial se obtiene una muy buena aproximación para $\Phi^{-1}(u)$. Un procedimiento para encontrar raíces es útil cuando se desea exactitud, pero si el fin es la rapidez, no es necesario utilizar uno de estos procedimientos.

Aproximación de la función de distribución Normal

Una aproximación para una función de distribución normal es necesaria para muchas aplicaciones financieras, en esta subsección, se presentarán dos métodos, el primero es más rápido y el segundo es más exacto, pero en general los dos métodos son lo suficientemente buenos para la mayoría de las aplicaciones.

El primer método es conocido como la aproximación de Hastings, y esta basado en los siguientes pasos.

1. Dado un valor de x , y utilizando las constantes de la tabla (4.6) se obtiene

$$t = \frac{1}{1 + |x|^p},$$

$$s = b_5 t^5 + b_4 t^4 + b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t$$

y

$$y = s \exp(-0.5x^2 - c).$$

2. Si $x > 0$ ir a 3 si no, ir a 4.
3. $y = 1 - y$.
4. Finalizar.

$b_1 =$	0.319381530	$b_5 =$	1.330274429
$b_2 =$	-0.356563782	$p =$	0.2316419
$b_3 =$	1.781477937	$c =$	$\log(\sqrt{2\Pi})$
$b_4 =$	-1.821255978.		

Figura 4.6: Constantes para la aproximación de Hastings.

El segundo método que se incluye es para generar una función acumulada de la normal, es de Marsaglia, y como el método anterior, esta basado en encontrar el ratio $(1 - \Phi(x))/\phi(x)$, éste método es más exacto que el de Hastings, pero al momento de procesarlo es 3 veces más tardado, pero ambos métodos son muy rápidos y efectivos. El algoritmo es como sigue:

1. Con los valores de la figura (4.7), y eligiendo una x entre -15 y 15 , se obtiene

$$j = \text{mín}(|x| + 0.5, 14),$$

entonces

$$z = j, h = |x| - z, a = v_{j+1},$$

$$b = z(a - 1), q = 1, s = a + hb.$$

$v_1 =$	1.253314137315500	$v_9 =$	0.1231319632579329
$v_2 =$	0.6556795424187985	$v_{10} =$	0.1097872825783083
$v_3 =$	0.4213692292880545	$v_{11} =$	0.09902859647173193
$v_4 =$	0.3045902987101033	$v_{12} =$	0.09017567550106468
$v_5 =$	0.2366523829135607	$v_{13} =$	0.08276628650136917
$v_6 =$	0.1928081047153158	$v_{14} =$	0.0764757610162485
$v_7 =$	0.1623776608968675	$v_{15} =$	0.07106958053885211
$v_8 =$	0.1401041834530502	$c =$	$\log(\sqrt{2\Pi})$.

Figura 4.7: Constantes para la aproximación de Marsaglia.

2. Con los valores obtenidos en 1, para $i = 2, 4, 6, \dots, 24 - j$ se genera

$$a = \frac{a + zb}{i},$$

$$b = \frac{b + za}{i + 1},$$

$$q = qh^2,$$

$$s = s + q(a + hb).$$

3. Si $x > 0$, ir a cuatro, si no

$$y = s \exp(-0.5x^2 - c).$$

Ir a 5.

4. Calcula

$$y = 1 - (s \exp(-0.5x^2 - c)).$$

5. Finalizar.

Existen otros métodos para aproximar Φ y Φ^{-1} , algunos de estos están basados en la *Función de Error*, es decir

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\Pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Se puede observar que para $x \geq 0$,

$$\text{Erf}(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1, \Phi(x) = \frac{1}{2}[\text{Erf}(x/\sqrt{2}) + 1]$$

y

$$\text{Erf}^{-1}(u) = \frac{2}{\sqrt{2}}\Phi^{-1}\left(\frac{u+1}{2}\right), \Phi^{-1}(u) = \sqrt{2}\text{Erf}^{-1}(2u-1),$$

por esto, con un simple despeje, se puede encontrar el valor aproximado de Φ o de Φ^{-1} .

Estos métodos serán útiles en el futuro, ya que ciertas propiedades ayudarán a reducir errores para el problema Monte Carlo.

4.3.3. Métodos para generar normales multivariadas

Como se vió en la sección 3.3.1, la función de distribución normal es especificada por su vector de medias μ y su matriz de covarianza Σ . La matriz de covarianza es vista de la siguiente forma

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1d} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & & \rho_{d2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{1d} & \rho_{2d} & \dots & \rho_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_d \end{pmatrix}.$$

Usando cualquiera de los métodos vistos en la sección anterior, se pueden generar variables aleatorias normales independientes, Z_1, \dots, Z_d , y se les puede asignar un vector $Z \sim N(0, I)$. Por la propiedad de transformación lineal (4.14) se sabe que si $Z \sim N(0, I)$ y $X = \mu + AZ$, entonces $X \sim N(\mu, AA^T)$, por lo que el problema de encontrar X se reduce a encontrar una matriz A tal que $AA^T = \Sigma$.

Factorización de Cholesky

Se desea encontrar A tal que $AA^T = \Sigma$, para esto la matriz más fácil de utilizar es una triangular inferior, ya que reduce el calculo de $\mu + AZ$ a

$$\begin{aligned} X_1 &= \mu_1 + A_{11}Z_1 \\ X_2 &= \mu_2 + A_{21}Z_1 + A_{22}Z_2 \\ &\vdots \\ X_n &= \mu_d + A_{d1}Z_1 + A_{d2}Z_2 + \dots + A_{dd}Z_d. \end{aligned}$$

La representación $AA^T = \Sigma$ con A una matriz triangular inferior, es conocida como la factorización de Cholesky para Σ , esto sólo sucede si Σ es positiva definida, y si Σ es positiva definida, entonces la matriz A es única.

Para entender mejor este concepto, se manejará un ejemplo un poco abstracto, pero ayudará a entender el método. Considerese una matriz de covarianza Σ , representada como

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Suponiendo que $\sigma_1 > 0$ y $\sigma_2 > 0$, el factor de Cholesky es:

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_2 \end{pmatrix},$$

entonces, es posible encontrar una muestra de distribuciones normales aleatorias bivariadas (μ, Σ) resolviendo

$$\begin{aligned} X_1 &= \mu_1 + \sigma_1 Z_1 \\ X_2 &= \mu_2 + \rho\sigma_2 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2. \end{aligned}$$

Para el caso en el que la matriz $\Sigma = AA^T$ sea de dimensión $d \times d$, (donde A_{ij} es el número en la columna i renglón j de la matriz A , matriz triangular inferior), para encontrar el factor de Cholesky, se deben resolver las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned}\Sigma_{11} &= A_{11}^2 \\ \Sigma_{21} &= A_{21}A_{11} \\ &\vdots \\ \Sigma_{d1} &= A_{d1}A_{11} \\ &\vdots \\ \Sigma_{22} &= A_{21}^2 + A_{22}^2 \\ &\vdots \\ \Sigma_{dd} &= A_{d1}^2 + \dots + A_{dd}^2.\end{aligned}$$

Esta expresión puede ser reducida en una sola de la siguiente forma

$$\Sigma_{ij} = \sum_{k=1}^j A_{ik}A_{jk}, j \leq i; \quad (4.20)$$

de donde se obtiene

$$A_{ij} = \left(\Sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} A_{ik}A_{jk} \right) / A_{jj}, j < i, \quad (4.21)$$

y

$$A_{ii} = \sqrt{\Sigma_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}^2}. \quad (4.22)$$

Entonces de las ecuaciones (4.20)-(4.22), se encuentra un algoritmo recursivo para la factorización de Cholesky.

4.4. Movimiento Browniano y construcción de una caminata aleatoria

Debido a la información dada en el capítulo 2, el movimiento Browniano ya no es algo desconocido, pero para refrescar la memoria se mencionan las propiedades más importantes de este.

1. $W(0) = 0$.
2. La función $t = W(t)$ es, con probabilidad 1 una función continua en $[0, T]$.
3. Los incrementos $\{W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_k) - W(t_{k-1})\}$ son independientes para toda k y para toda $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_k < T$.

4. $W(t_i) - W(t_{i-1}) \sim N(0, t_i - t_{i-1})$, para toda $0 \leq t_{i-1} < t_i \leq T$.

Con las propiedades anteriores y usando las constantes μ y $\sigma > 0$, se conoce a $X(t)$ como un movimiento Browniano con drift μ y coeficiente de difusión σ^2 entonces

$$\frac{X(t) - \mu t}{\sigma},$$

es un movimiento Browniano estándar. Entonces es posible construir a X de un movimiento Browniano estándar W fijando

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t).$$

De aquí se sigue que $X(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$. Más aún, X resuelve la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t). \quad (4.23)$$

Si se hace el supuesto de que $X(0) = 0$, se tiene una normalización natural, pero lo que se necesita es construir un movimiento Browniano con drift μ , coeficiente de difusión σ^2 y valor inicial x , sumando x a cada uno de las $X(t)$. Si se supone que μ y σ son valores determinísticos, pero variables con respecto al tiempo, es posible construir un movimiento Browniano por medio de la ecuación (4.23), es decir por

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW(s),$$

con $X(0)$ una constante arbitraria, entonces el proceso X es un movimiento Browniano, ya que tiene incrementos independientes y su caminata aleatoria es continua, más aún cada incremento $X(t) - X(t-1)$ se distribuye normal con media

$$\mathbb{E}[X(t_i) - X(t_{i-1})] = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mu(u) du$$

y varianza

$$\text{Var}[X(t_i) - X(t_{i-1})] = \text{Var} \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(u) dW(u) \right] = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma^2(u) du.$$

4.4.1. Construcción de una caminata aleatoria

Para poder simular el movimiento Browniano, se deben simular valores $(W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_n))$ o $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ para un conjunto de puntos fijos $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Como se sabe, los incrementos en el movimiento Browniano, son independientes y se distribuyen normal, por lo que es posible simular el movimiento Browniano por sus incrementos. Sean Z_1, \dots, Z_n , variables aleatorias normal estándar independientes, generadas por alguno de los métodos utilizados en la sección (3.3.2). Para generar un movimiento Browniano, se fijan $t_0 = 0$ y $W(0) = 0$, para generar

$$W(t_{i+1}) = W(t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (4.24)$$

Para $X \sim \text{MB}(\mu, \sigma^2)$ con constantes μ y σ y dada $X(0)$, se fija

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (4.25)$$

Si se tienen coeficientes dependientes de la trayectoria, la recursión se transforma en

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(s)ds + \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(u)du}Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (4.26)$$

Los métodos descritos en (4.24)-(4.26) son exactos, es decir la distribución conjunta de los valores simulados $(W(t_1), \dots, W(t_n))$ o $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ corresponden a la distribución conjunta del movimiento Browniano en los mismos puntos. Estos métodos hablan de exactitud en los puntos, pero no se tiene exactitud entre las t'_i s-. Este error es conocido como *error de discretización*, si se reemplaza la ecuación (4.26) por la aproximación de Euler

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \mu(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i)\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

En general se introduce el error de discretización hasta en los puntos t_1, \dots, t_n , porque los incrementos no necesariamente tienen la media y la varianza exacta. El vector $(W(t_1), \dots, W(t_n))$, es una transformación lineal del vector de incrementos $(W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}))$, y como estos incrementos son independientes y se distribuyen normal, se sigue de la propiedad de la transformación lineal que se menciona en la sección 4.3.1, en la ecuación (4.34), generar un vector como $(W(t_1), \dots, W(t_n))$, es análogo a generar vectores aleatorios con los métodos mencionados en la sección anterior.

Aunque la construcción de la caminata aleatoria satisface la mayoría de las aplicaciones, es interesante y algunas veces útil, considerar alternativas distintas para métodos de muestreo.

Para aplicar cualquier método de los vistos en la sección 4.3.3, es necesario encontrar el vector de esperanzas y la matriz de covarianza para el vector $(W(t_1), \dots, W(t_n))$. Para el movimiento Browniano estándar, se sabe que $\mathbb{E}[W(t_i)] = 0$, esto es por definición. Para encontrar la matriz de covarianza, considérese cualquier tiempo entre $0 < s < t < T$, usando que los incrementos en el movimiento Browniano son independientes se obtiene,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[W(s), W(t)] &= \text{Cov}[W(s), W(s) + (W(t) - W(s))] \\ &= \text{Cov}[W(s), W(s)]\text{Cov}[W(s), W(t) - W(s)] \\ &= s + 0 = s. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Sea C la matriz de covarianzas de $(W(t_1), \dots, W(t_n))$, entonces

$$C_{ij} = \min(t_i, t_j). \quad (4.28)$$

Factorización de Cholesky

Notando que el vector $(W(t_1), \dots, W(t_n)) \sim N(0, C)$ con C la matriz con entradas de la forma de (4.28), es posible simular este vector como AZ , donde $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T \sim N(0, I)$, y A satisface $AA^T = C$. El método de Cholesky discutido en la sección 3.3.3, toma a A como una matriz triangular superior. Para C como en la ecuación (4.28), la factorización de Cholesky esta dada por

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \dots & \sqrt{t_n - t_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

En este caso, generar el vector $(W(t_1), \dots, W(t_n))$ como AZ , es simplemente la representación matricial de la recursión dada por la ecuación (4.24).

Para un movimiento browniano con los parámetros μ y σ^2 , el factor de Cholesky es σA , con el i -ésimo componente del vector de esperanza μt_i y matriz de covarianza $\sigma^2 C$ y de nuevo se observa que el método de Cholesky coincide con la recursión de incrementos (4.25).

4.5. Movimiento Browniano Geométrico y sus aplicaciones

En el capítulo 2 se mostró la definición (4) de movimiento Browniano geométrico, este movimiento puede ser visto como la exponencial del movimiento Browniano ordinario, es decir $S(t)$ es un movimiento Browniano geométrico, si $\log S(t)$ es un movimiento Browniano con valor inicial $\log S(0)$. A diferencia del movimiento Browniano, el movimiento Browniano geométrico siempre toma valores positivos, ya que la función exponencial no admite números negativos, esta propiedad es una muy deseable para los modelos financieros, más aún, en el MBG los cambios porcentuales

$$\frac{S(t_2) - S(t_1)}{S(t_1)}, \frac{S(t_3) - S(t_2)}{S(t_2)}, \dots, \frac{S(t_n) - S(t_{n-1})}{S(t_{n-1})}, \quad (4.29)$$

son independientes para $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Estas propiedades explican el porque se utiliza el movimiento geométrico Browniano para modelar el precio de los activos en lugar de usar el movimiento Browniano ordinario.

PROPOSICIÓN. 6

Supongase que se tiene un movimiento Browniano W , y que X satisface la ecuación (4.23), entonces $X \sim MB(\mu, \sigma^2)$. Si $S(t) = S(0) \exp(X(t)) \equiv f(X(t))$ fija (como en la ecuación (2.11)), entonces aplicando la fórmula de Itô se de-

muestra que

$$\begin{aligned} dS(t) &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(t))dt \\ &= S(0)\exp(X(t))[\mu dt + \sigma dW(t)] + \frac{1}{2}\sigma^2 S(0)\exp(X(t))dt \quad (4.30) \\ &= S(t)\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + S(t)\sigma dW(t). \end{aligned}$$

Sin embargo, el movimiento Browniano Geométrico generalmente es representado por

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t), \quad (4.31)$$

esta expresión sugiere un modelo Browniano para el retorno instantáneo $dS(t)/S(t)$. Si se comparan las ecuaciones (4.30) y (4.31), se encuentra que los modelos son inconsistentes y que existe cierta ambigüedad al momento de hablar de μ , ya que en la ecuación (4.30) es el drift del movimiento Browniano $S(t)$ definido como $S(t) = S(0)\exp(X(t))$, mientras que en la ecuación (4.31), $S(t)$ tiene drift $\mu S(t)$ y la ecuación (4.31) implica

$$d \log S(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW(t). \quad (4.32)$$

La ecuación (4.32), puede ser verificada aplicando Itô, o comparando la ecuación (4.31) con la ecuación (4.30).

Para aterrizar las cosas, se define a un movimiento Browniano Geométrico como en la ecuación (4.31), este tiene drift μ y parámetro de volatilidad σ , el coeficiente de difusión para $S(t)$ es σ^2 .

En la ecuación (4.32), se observa que si $S \sim \text{MBG}(\mu, \sigma^2)$, y si S tiene valor inicial $S(0)$, entonces

$$S(t) = S(0)\exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right]. \quad (4.33)$$

Un procedimiento útil para simular valores para S en $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ es

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)\exp\left(\left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right](t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{ti+1}\right), \quad (4.34)$$

para $i \in [1, n-1]$, Z_1, \dots, Z_n se distribuyen normal estándar.

El método es útil en (4.34) ya que las W_i son independientes y se distribuyen normal. En si, la ecuación (4.34) es equivalente a aplicarle la exponencial a ambos lados de (4.25) y reemplazar μ por $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$. Si se desea agregar parámetros dependientes de la trayectoria, se debe aplicar exponencial a ambos lados de (4.26).

Distribución Logonormal

Si $S \sim \text{MBG}(\mu, \sigma^2)$, entonces la distribución marginal de $S(t)$ es la exponencial de una variable aleatoria normal, esta es conocida como distribución logonormal.

DEFINICIÓN. 13

Se dice que $Y \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$, si la variable aleatoria Y tiene la distribución $\exp(\mu + \sigma Z)$, $Z \sim N(0, 1)$. Ésta distribución está dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(Z \leq [\log(y) - \mu]/\sigma) \\ &= \Phi\left(\frac{\log(y) - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

y función de densidad dada por

$$\frac{1}{y\sigma} \phi\left(\frac{\log(y) - \mu}{\sigma}\right). \quad (4.36)$$

DEFINICIÓN. 14

La esperanza y la varianza de la distribución mostrada en la definición están dadas por

$$\mathbb{E}[Y] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}, \quad \text{Var}[Y] = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1). \quad (4.37)$$

Analizando estas ecuaciones, se encuentra que si $S \sim \text{MBG}(\mu, \sigma^2)$, entonces $(S(t)/S(0)) \sim \text{LN}([\mu - \frac{1}{2}\sigma^2]t, \sigma^2 t)$, y

$$\mathbb{E}[S(t)] = e^{\mu t} S(0), \quad \text{Var}[S(t)] = e^{2\mu t} S^2(0) (e^{\sigma^2 t} - 1). \quad (4.38)$$

En resumen lo que se tiene es

$$\mathbb{E}[S(t)|S(\tau), 0 \leq \tau \leq u] = \mathbb{E}[S(t)|S(u)] = e^{\mu(t-u)} S(u), \quad u < t, \quad (4.39)$$

que es una expresión análoga a una esperanza condicional. La primera igualdad en (4.39), es la propiedad de Markov (ver apéndice), y la segunda igualdad se da por la generalización de la ecuación (4.33).

La ecuación (4.39) indica que μ actúa como el promedio de la tasa de crecimiento para S , puede ser vista como la sort del promedio de la tasa compuesta de retorno continua. Si se tiene una muestra de trayectorias de S , el panorama cambia, por ejemplo para un movimiento Browniano W , se tiene que $t^{-1}W(t) \rightarrow 0$ con probabilidad 1. Para $S \sim \text{MBG}(\mu, \sigma^2)$, entonces,

$$\frac{1}{t} \log S(t) \rightarrow \mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \quad (4.40)$$

con probabilidad 1, por lo que se concluye que $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ sirve como la tasa de crecimiento sobre esta trayectoria. Si esta expresión es positiva, $S(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, si es negativa entonces $S(t) \rightarrow 0$.

Suponga que existe un modelo con $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 < 0 < \mu$ de la ecuación (4.39) además se tiene que $\mathbb{E}[S(t)]$ crece exponencialmente, sin embargo el valor de $S(t)$ tiende a 0. Este comportamiento es explicado por el comportamiento de la distribución de S , ya que aunque S tiende a cero, con el paso del tiempo, S puede obtener valores tan grandes que hacen que el valor de la media crezca de esta forma.

4.5.1. Opciones dependientes de la trayectoria

El fin que se tiene es simular trayectorias del movimiento Browniano Geométrico para encontrar el precio de una opción, pero esto no es sólo para encontrar el valor de una opción simple si no para encontrar el valor de una opción dependiente de la trayectoria, como se ha mencionado, estas opciones son las que dependen de la trayectoria que toma el activo subyacente S durante el tiempo, y no simplemente encontrar el valor $S(T)$ para alguna T fija.

Como se vió al principio del capítulo, el valor de una opción puede ser representado por la esperanza del valor presente del pago la ecuación (4.51). Este precio es estimado por simulación, es decir, generando trayectorias del activo subyacente, después, traer a valor presente cada trayectoria y al final sacar el promedio de los valores obtenidos.

Dinámicas neutrales al riesgo

El punto esencial de esta sección, es la medida de probabilidad con respecto a la cual la esperanza es encontrada, la pregunta que nace con respecto a este punto es como se va a descontar el valor de la opción. El chiste es saber como se deben generar las trayectorias del activo subyacente, específicamente cuando se habla de movimiento Browniano Geométrico se debe prestar atención en como se va a elegir el valor del drift μ .

Se empieza por asumir que existe una constante que será una tasa de interes compuesta, continua y libre de riesgo, a esta constante se le conoce como r , entonces si se presta un peso, al tiempo t el valor del peso será e^{rt} .

Para poder obtener el precio bajo la medida libre de riesgo, se debe descontar el pago que se recibirá al tiempo t , es decir se divide el valor del activo entre e^{rt} .

Ahora supóngase que existe una acción S que no paga dividendos, entonces bajo la medida neutral al riesgo, el precio descontado $S(t)/e^{rt}$ es una martingala, es decir,

$$\frac{S(u)}{e^{ru}} = \mathbb{E} \left[\frac{S(t)}{e^{rt}} \mid \{S(\tau), 0 \leq \tau \leq u\} \right]. \quad (4.41)$$

Comparando la ecuación (4.41) con (4.40) se observa que si S es un movimiento Browniano Geométrico bajo la medida libre de riesgo, entonces $\mu = r$, es decir

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma W(t). \quad (4.42)$$

Como se mencionó en el capítulo 1, la tasa libre de riesgo es útil, ya que en el mundo libre de riesgo todos los activos tienen la misma tasa de interes, es decir los que invierten no pueden demandar una tasa de interes más alta por poseer un activo de alto riesgo.

4.6. Control de variaciones

Este es uno de los métodos más certeros para aumentar la eficiencia de la simulación Monte Carlo. Además es el método más utilizado en técnicas de reducción de varianza. Lo que hace este método es tomar la información de los errores de las cantidades conocidas para poder estimar los errores de las variables desconocidas.

Sean Y_1, \dots, Y_n los outputs de n simulaciones, es posible decir como ejemplo que Y_i es el valor descontado de un derivado en la i -ésima trayectoria, también suponga que las Y_i son independientes e idénticamente distribuidas, entonces para poder ejemplificar el método, se dice que el fin es encontrar $\mathbb{E}[Y_i]$. Para la esperanza, se tiene un estimador que es conocido como la media muestral, es decir $\bar{Y} = \sum_{i=1}^n Y_i/n$, este estimador cuando $n \rightarrow \infty$ converge con probabilidad 1.

Suponga también que en cada simulación, se obtiene otro output junto con Y conocido como X , en cada una de la repeticiones se obtiene el par (X_i, Y_i) , además este par es independiente e idénticamente distribuido y que $\mathbb{E}[X]$ existe, entonces para cualquier b fija se puede calcular para la i -ésima replicación,

$$Y_i(b) = Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X]),$$

para después calcular

$$\bar{Y}(b) = \bar{Y} - b(\bar{X} - \mathbb{E}[X]) = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])}{n}, \quad (4.43)$$

que es la media muestral.

La ecuación (4.43), es un estimador de control de variaciones, y el error observado $\bar{X} - \mathbb{E}[X]$, sirve como control al momento de estimar $\mathbb{E}[Y]$.

Como estimador de variaciones, la ecuación (4.43) es bueno, ya que

$$\mathbb{E}\bar{Y}(b) = \mathbb{E}\bar{Y} - b(\bar{X} - \mathbb{E}[X]) = \mathbb{E}\bar{Y} = \mathbb{E}[Y],$$

por lo que se concluye que es imparcial, también es consistente porque con probabilidad 1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i(b)}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])}{n} \\ &= \mathbb{E}[Y - b(X - \mathbb{E}[X])] \\ &= \mathbb{E}[Y]. \end{aligned}$$

Cada $Y_i(b)$ tiene varianza

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_i(b)] &= \text{Var}[Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])] \\ &= \sigma_Y^2 - 2b\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + b^2\sigma_X^2 \equiv \sigma^2(b), \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde $\sigma_X^2 = \text{Var}[X]$, $\sigma_Y^2 = \text{Var}[Y]$ y ρ_{XY} es la correlación entre X y Y . El estimador de control de variaciones $\bar{Y}(b)$ tiene varianza $\sigma^2(b)/n$, mientras que

la media muestral ordinaria \bar{Y} tiene varianza σ_Y^2/n , por lo tanto, el estimador de variaciones tiene menor varianza si

$$b^2\sigma_X < 2b\sigma_Y\rho_{XY}.$$

Existe un coeficiente óptimo que minimiza la varianza, conocido como b^* dado por

$$b^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}. \quad (4.45)$$

Si se sustituye el valor de b^* (4.45) en la ecuación (4.44), el rango de la varianza del estimador óptimo controlado es

$$\frac{\text{Var}[\bar{Y} - b^*(\bar{X} - \mathbb{E}[X])]}{\text{Var}[\bar{Y}]} = 1 - \rho_{XY}^2. \quad (4.46)$$

Se utiliza la ecuación (4.46) solo si b^* es conocido. En la práctica, el objetivo es encontrar $\mathbb{E}[Y]$, si esta ya es conocida, entonces es lo mismo si se conoce σ_Y o ρ_{XY} . Sin embargo, se obtienen más beneficios si el estimador b^* es utilizado. Por ejemplo, si en (4.45) se reemplazan los parámetros de población por los parámetros muestrales, se obtiene

$$\hat{b}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})}. \quad (4.47)$$

Dividiendo entre n el numerador y el denominador, aplicando la ley fuerte de los grandes números, se observa con probabilidad 1 que $\hat{b}_n \rightarrow b^*$, lo que sugiere utilizar el estimador $\bar{Y}(\hat{b}_n)$ que es la media muestral de $Y_i(\hat{b}_n)$.

Si se desea hacer una interpretación geométrica, la ecuación (4.47) puede ser vista como la pendiente de una regresión lineal que pasa por (X_i, Y_i) utilizando los mínimos cuadrados para encontrar la recta ajustada. El poder asociar el control de variaciones con una regresión es importante, ya que ayuda a hacer un análisis estadístico de los estimadores de control de variaciones.

Para poder entender mejor el método de reducción de variaciones, se dan los siguientes ejemplos.

La reducción de variaciones para activos subyacentes

En la valuación de opciones el activo subyacente es muy importante, este puede servir como una muy buena fuente para el control de variaciones. Anteriormente, se ha mencionado que es muy importante la abstinencia del arbitraje, y este requerimiento es equivalente a decir que el valor presente del precio de activo es martingala, lo que da un buen control de variaciones ya que por sus propiedades, la esperanza de cualquier martingala a cualquier tiempo futuro es su valor inicial, es decir, si se hace el supuesto de que se está trabajando bajo una medida neutral al riesgo y que la tasa de interés es la constante r , si $S(t)$ es el valor del activo entonces $\exp(-rt)S(t)$ es una martingala y $\mathbb{E}[\exp(-rt)S(T)] = S(0)$.

Ahora supóngase que se está valuando una opción $S(t)$ con función de pago Y , con esta información, es posible armar un estimador de control de variaciones

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - b[S_i(T) - e^{-rT}S(0)]),$$

también es posible utilizar el estimador correspondiente reemplazando b por \hat{b} . Si $Y = e^{-rT}(S(T) - K)^+$, se está valuando un *call* estandar, y la efectividad del control de variaciones depende el valor de K , por ejemplo, si $K = 0$, se tiene una correlación perfecta y mientras K va creciendo, la correlación va disminuyendo.

Método de control de variaciones para opciones.

Por lo regular, la simulación es utilizada para valuar opciones complejas, pero aveces también es útil para opciones no tan complicadas. Por ejemplo, aunque se cuente con el planteamiento de Black-Scholes, existen opciones dependientes de la trayectoria que sólo se pueden resolver con simulación, y la formulación para estos problemas también sirve para opciones con menor dificultad. En particular, si se desea valuar opciones asiáticas, el siguiente promedio aritmético puede ser utilizado

$$\bar{S}_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i), \quad (4.48)$$

donde la simulación es necesaria, aún cuando S sea un movimiento browniano. Sin embargo, a diferencia de las asiáticas, los *call* y *put* con promedio geométrico

$$\bar{S}_G = \left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n}. \quad (4.49)$$

Entonces las opciones vistas como \bar{S}_G pueden ser usadas como control de variaciones al momento de valuar \bar{S}_A .

Por último se da el ejemplo de las dinámicas tratables, supóngase que se desea valuar una opción para la cual sus dinámicas están modeladas por

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma(t)dW(t),$$

donde $\sigma(t)$ puede ser función de $S(t)$ o puede ser una función estocástica. Es posible aproximar $S(t)$ para las fechas t_1, \dots, t_n con la siguiente expresión

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp \left(\left[r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] (t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \right),$$

donde las $Z_i \sim N(0, 1)$ y son independientes. Cuando se habla de un modelo estocástico con respecto a la volatilidad, una segunda recursión podría determinar la evolución de $\sigma(t_i)$. Supóngase que la opción que se desea valuar solo puede ser tratada si su activo subyacente es un movimiento Browniano Geométrico, entonces, con S se simula

$$\tilde{S}(t_{i+1}) = \tilde{S}(t_i) \exp \left(\left[r - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 \right] (t_{i+1} - t_i) + \tilde{\sigma} \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \right),$$

para alguna $\tilde{\sigma}$ constante y para la misma sucesión de Z_i . También se tiene que $\tilde{S}(0) = S(0)$, entonces si se valúa una opción tipo *call* con valor de ejercicio K y

fecha de expiración t_n , es posible encontrar un estimador controlado utilizando replicasiones independientes de

$$(S(t_n) - K)^+ - b \left((\tilde{S}(t_n) - K)^+ - \mathbb{E} \left[(\tilde{S}(t_n) - K)^+ \right] \right).$$

Sin tomar en cuenta el factor de descuento, la esperanza de la derecha está dada por la ecuación de de B&S.

Con estos ejemplos, se observa para que sirve el método de control de varianza, pero, falta hablar de los cambios que este método hace en la interpretación estadística de la simulación.

Es muy importante que al momento de introducir técnicas de reducción de varianza, se analicen las variaciones que estas le pueden causar a la interpretación estadística de los outputs. Al momento de realizar un proceso, los outputs obtenidos son independientes e imparciales, y calcular intervalos de confianza para su esperanza no es un gran lío, pero para algunas técnicas, lo es, un ejemplo sería cuando se introduce dependencia entre las replicasiones para la técnica de reducción de variaciones. Si se introduce el estimador \hat{b}_n dado por la ecuación (4.47). Para cualquier b fija, $\bar{Y}(b)$ es el estimador de control de variaciones, donde éste es la media muestral para i replicasiones independientes $Y_i(b)$, entonces, cualquier intervalo de confianza algo valido para $\mathbb{E}[Y]$ está dado por

$$\bar{Y}(b) \pm z_{\delta/2} \frac{\sigma(b)}{\sqrt{n}}, \quad (4.50)$$

donde $z_{\delta/2}$ es el $(i - \delta/2)$ cuartil de la distribución normal ($\Phi(z_{\delta/2}) = (1 - \delta/2)$) y $\sigma(b)$ es la desviación estandar dada por cada una de las replicasiones.

En la práctica, $\sigma(b)$ es desconocida, pero puede ser estimada cuando la muestra estandar de la desviación dada por

$$s(b) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i(b) - \bar{Y}(b))^2}.$$

El intervalo de confianza dado en la ecuación (4.50), es asintóticamente válido si se sustituye $\sigma(b)$ por $s(b)$, y como una consecuencia del límite de la distribución se obtiene

$$\frac{\bar{Y}(b) - \mathbb{E}[Y]}{\sigma(b)/\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1).$$

Por otro lado si se reemplaza el valor de b por el valor estimado \hat{b}_n dado por (4.47), el estimador dado anteriormente sería

$$\bar{Y}(\hat{b}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{b}_n(X_i - \mathbb{E}[X])),$$

y como $\hat{b}_n \rightarrow b^*$, se tiene

$$\sqrt{n}(\bar{Y}(\hat{b}_n) - \bar{Y}(b^*)) = (\hat{b}_n - b^*) \cdot \sqrt{n}(\bar{X} - \mathbb{E}[X]) \Rightarrow 0 \cdot N(0, \sigma_X^2) = 0,$$

por lo tanto $\bar{Y}(\hat{b}_n)$ satisface el teorema del límite central, igual que $\bar{Y}(b^*)$. Lo que implica que $\bar{Y}(\hat{b}_n)$ es tan preciso como $\bar{Y}(b^*)$. Más aun el estimador \hat{b}_n cumple

$$\frac{\bar{Y}(\hat{b}_n) - \mathbb{E}[Y]}{s(\hat{b}_n)/\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1),$$

con $s(\hat{b}_n)$ la desviación estandar de la muestra de las $Y_i(\hat{b}_n)$, $i = 1, \dots, n$, porque $s(\hat{b}_n)/\sigma(b^*) \rightarrow 1$. En particular, el intervalo de confianza dado por (4.47) es válido si se reemplazan $\bar{Y}(b)$ y $\sigma(b)$ por $\bar{Y}(\hat{b}_n)$ y $s(\hat{b}_n)$, aunque el intervalo haya sido calculado con b^* , que es el coeficiente óptimo.

Es fácil crear un estimador asintóticamente válido para los intervalos de confianza del estimador para control de variaciones. Más aun, si n es grande, obtiene los mismos beneficios al usar \hat{b}_n que al usar b^* . Sin embargo para n finita, los costos por usar un estimador en lugar del coeficiente óptimo, pueden ser grandes.

4.7. Simulación Montecarlo para opciones americanas

Para tener una idea de lo que es la aproximación Monte Carlo, se calculará la esperanza del valor presente del pago de una opción tipo *call*. Este no será el precio de la opción, pero tienen una relación muy importante.

En el capítulo 1 sección 2, el pago de la opción *call* al tiempo T está dado por $(S_T - K)^+ = \max\{0, S_T - K\}$. Para encontrar el valor presente se multiplica por e^{-rt} , con r una tasa de interes continua, entonces la esperanza del valor presente es

$$\mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)^+]. \quad (4.51)$$

Para que esta ecuación tenga significado, se debe conocer la función de distribución de $S(T)$, para esto recuerde que en el capítulo 1 sección 4, se obtuvo que el precio de una opción y su aproximación está dado por la ecuación (2.31), es decir,

$$\frac{dS}{S} = \sigma dW + \mu dt \approx \frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t},$$

donde W es un movimiento Browniano, de esta forma, se puede conocer el valor de la función de distribución, pero ese es uno de los fines de este capítulo.

Para poder atacar de raíz el problema, es necesario empezar con los principios de simulación, primero se generan números aleatorios y por último se simula el valor de la opción.

4.7.1. Valuación de opciones americanas por aproximación de mínimos cuadrados.

En esta sección se mostrará la valuación de opciones americanas, lo que se hará es aproximar el valor de la esperanza condicional usando la información de las trayectorias simuladas para después encontrar el valor de la opción. La esperanza

que se va a aproximar es $\mathbb{E}[e^{-r\Delta t}Y_{t+\Delta t}|\mathcal{F}_t]$, donde $Y_T = \max(K - S_T, 0)$ al tiempo final, después este valor puede cambiar tal como se verá adelante.

Para esto suponga que se tiene un activo que se valua en un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un tiempo de vida finito $[0, T]$, donde el espacio de estados Ω es el conjunto de todos los posibles valores estocásticos que puede tomar el activo en el mercado en el intervalo de tiempo de vida de este. Sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t; t \in [0, T]$ la filtración generada por todos los posibles valores que puede tomar el activo, y se hace el supuesto de que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Para eliminar el arbitraje, se dice que existe una medida de probabilidad equivalente Q .

El interés que se tiene en esta sección es valuar opciones americanas en un tiempo de ocurrencia desde 0 hasta T . Lo que se hará es restringir la atención en derivados cuyos pagos sean funciones del tipo $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, Q)$. Se puede decir que el valor de una opción americana es aquel que maximiza el valor presente de los flujos de efectivo de la opción, donde el máximo esta dado por el valor obtenido en los tiempos de paro dado la filtración.

Con lo anterior, se tienen las bases probabilísticas para poder aproximar la esperanza condicional por mínimos cuadrados. Para estos se necesita el siguiente teorema.

TEOREMA. 14

Sea Y una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tal que $\mathbb{E}Y^2 < \infty$. Si $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ es una σ -álgebra, entonces para cualquier variable aleatoria \mathcal{D} -medible tal que $\mathbb{E}Z^2 < \infty$ se tiene que

$$\mathbb{E}(Y - Z)^2 \geq \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}))^2, \quad (4.52)$$

y la igualdad se alcanza si y sólo si $Z = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$.

Demostración

Se sabe que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y - Z)^2 &= \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}))^2 + \mathbb{E}(Z - \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}))^2 \\ &\quad - 2\mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}))(Z - \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}))), \end{aligned}$$

y como $\mathbb{E}|Z - \mathbb{E}(Y|\mathcal{D})| < \infty$, $\mathbb{E}|(Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}))(Z - \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}))| < \infty$ y $(Z - \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}))$ es \mathcal{D} -medible entonces

$$\mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}))(Z - \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}))|\mathcal{D}) = 0,$$

y por lo tanto

$$\mathbb{E}(Y - Z)^2 = \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}))^2 + \mathbb{E}(Z - \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}))^2,$$

de donde se sigue el resultado.

La igualdad en (4.52) se da si y sólo si $\mathbb{E}(Z - \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}))^2 = 0$.

□

Este teorema tiene mucha fuerza, ya que con éste se asegura la existencia del mínimo y se muestra, es decir $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|\mathcal{D}])^2]$ es el mínimo para toda variable

aleatoria aunque no sea D -medible, ya que si es D -medible, $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|D])^2] = 0$. También es muy importante para lo que se hará en esta sección, porque estamos aproximando la esperanza condicional por mínimos cuadrados, el mínimo es este teorema es un esperanza condicional, usando esto, obtenemos la aproximación mínima a la esperanza condicional.

Supongase que se quiere valorar una opción americana simple, lo que se quiere también es encontrar el tiempo óptimo de ejercicio. En pocas palabras, lo que se quiere es lo siguiente; supongase que en la fecha de expiración del contrato, la estrategia óptima para la opción americana es ejercer si la opción esta in the money (esto significa que la opción puede ser ejercida, en el mercado de dinero este es el término utilizado, en español se traduce como en el dinero), antes del momento de expiración, la estrategia óptima de ejercicio es comparar el valor de ejercicio inmediato con el valor aproximado de la esperanza condicional, y ejercer si el valor de ejercicio inmediato es mayor al valor de la aproximación de la esperanza condicional.

Teniendo las bases teóricas para el método de aproximación por mínimos cuadrados, se dará un breve ejemplo para entender esta aproximación.

Como se mencionó anteriormente, el objetivo es valorar una opción americana simple, será una opción tipo *put*, el precio de ejercicio para el *put* es de $K = 1.10$, y que nuestro periodo de tiempo lo dividimos en 1,2 y 3, donde 3 es la fecha de expiración, también se tiene que la tasa de interés libre de riesgo es 0.06, como este ejemplo sólo es para mostrar como funciona el algoritmo, sólo usaremos 8 trayectorias aleatorias para simular los valores de las acciones, a estas se les llamará matriz de precios de las acciones

Trayectoria	t_0	t_1	t_2	t_3
1	1.00	1.09	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	0.93	0.97	0.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	0.76	0.77	0.90
7	1.00	0.92	0.84	1.01
8	1.00	0.88	1.22	1.34

El objetivo será establecer la regla de paro que maximiza el valor de la opción el algún punto a lo largo de la trayectoria, como el algoritmo es recursivo, lo que se debe hacer es empezar con definir la estrategia óptima para el tiempo 3 y seguir calculando hasta llegar al tiempo cero, la estrategia óptima para el tiempo 3 está dada por $\max(K - S, 0) > 0$ y se ve reflejada en la siguiente matriz llamada matriz de flujo de efectivo

Trayectoria	t_1	t_2	t_3
1	—	—	0.00
2	—	—	0.00
3	—	—	0.07
4	—	—	0.18
5	—	—	0.00
6	—	—	0.20
7	—	—	0.09
8	—	—	0.00.

Hasta ahora el valor no diferencia si es americana o europea, ya que en este momento los valores son iguales.

Al tiempo 2 se debe hacer una validación y preguntar, si la opción está *in the money*⁴, el poseedor de la opción debe decidir si ejercer o mantener la opción hasta el tiempo 3, para tomar esta decisión debemos hacer una regresión para calcular la esperanza condicional, para esto se necesita X que será el valor de la acción en el tiempo 2, esto es obtenido de la matriz de precios de las acciones, y para las 5 trayectorias que la opción está *in the money* tenemos la Y que será el valor presente de la opción si ésta no es ejercida al tiempo 2, los valores de X y Y para el tiempo 2 están dados por

Trayectoria	X	Y
1	0.00×0.94176	1.08
2	—	—
3	0.07×0.94176	1.07
4	0.18×0.94176	0.97
5	—	—
6	0.20×0.94176	0.77
7	0.09×0.94176	0.84
8	—	—

para calcular la esperanza condicional del valor presente de la opción al tiempo 2, se debe correr una regresión para Y sobre las constantes X y X^2 . El resultado para esta regresión está dado por $\mathbb{E}[Y|X] = -1.070 + 2.983X - 1.813X^2$. Con el valor de esta esperanza condicional, se puede encontrar el valor óptimo de ejercicio al tiempo 2 comparando el valor del ejercicio inmediato al tiempo 2 con el valor dado por la esperanza condicional, en la siguiente tabla se encuentran, en la primera columna el valor de ejercicio inmediato y el valor de la estimación en la segunda,

⁴Se usa esta expresión para decir que es conveniente ejercer la opción, es decir si $\max(K - S, 0) > 0$ entonces se decide que la opción es *in the money*.

Trayectoria	Ejercicio Inmediato	Estimación
1	0.02	0.0369
2	—	—
3	0.03	0.0461
4	0.13	0.1176
5	—	—
6	0.33	0.1520
7	0.26	0.1565
8	—	—

si el valor de ejercicio inmediato es mayor al valor estimado, entonces se ejerce, y la matriz de flujo de efectivo de actualiza de la siguiente forma:

Trayectoria	t_1	t_2	t_3
1	—	0.00	0.00
2	—	0.00	0.00
3	—	0.00	0.07
4	—	0.13	0.00
5	—	0.00	0.00
6	—	0.33	0.00
7	—	0.26	0.00
8	—	0.00	0.00

se observa que en las trayectorias 4,6 y 7 el ejercicio es óptimo, por lo que se decide ejercer al tiempo 2, si se observa el tiempo óptimo de ejercicio al tiempo 3 ha cambiado, esto es porque si la opción es ejercida en algún momento, no existen flujos de efectivo posibles para tiempo futuro, ya que la opción sólo puede ser ejercida una vez.

Para el tiempo 1, con la matriz de precios de las acciones, se observa que hay 5 trayectorias que se encuentran in the money, para estas, igual que en el tiempo 2, Y es el valor presente de los flujos de efectivo futuros, cabe destacar, que al tiempo 2 el valor de Y es calculado con distintos valores, esto es porque la opción sólo puede ser ejercida en una ocasión, entonces si la opción es ejercida en el tiempo 3, se debe traer a valor presente dos periodos, igual que en el tiempo anterior, X representa el valor de la opción al tiempo 1 de las acciones que se encuentran in the money, los vectores que representan a X y a Y para el tiempo 1 están dados por

Trayectoria	X	Y
1	0.00×0.94176	1.09
2	—	—
3	—	—
4	0.13×0.94176	0.93
5	—	—
6	0.33×0.94176	0.76
7	0.26×0.94176	0.92
8	0.00×0.94176	0.88

como en el tiempo anterior, la esperanza condicional estimada está dada por $\mathbb{E}[Y|X] = 2.038 - 3.335X + 1.356X^2$, y si se sustituye el valor de X se obtiene

Trayectoria	Ejercicio Inmediato	Estimación
1	0.01	0.0139
2	—	—
3	—	—
4	0.17	0.1092
5	—	—
6	0.34	0.2866
7	0.18	0.1175
8	0.22	0.1553

si se hace la comparación para encontrar el ejercicio óptimo y se encuentra que en las trayectorias 4,6,7 y 8 el ejercicio es óptimo por lo que la matriz de ejercicio óptimo se actualiza de la siguiente manera

Trayectoria	t_1	t_2	t_3
1	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.07
4	0.17	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00
6	0.34	0.00	0.00
7	0.18	0.00	0.00
8	0.22	0.00	0.00

Con la matriz anterior, se puede definir una matriz de paro óptima, esta matriz esta dada por 1 si se ejerce la matriz y 0 si no, y es la siguiente

Trayectoria	t_1	t_2	t_3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	1
4	1	0	0
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0

Con lo anterior se tiene una matriz que identifica el tiempo de paro óptimo y los flujos de efectivo de la opción Americana tipo *put*, con estos flujos, se puede valorar la opción trayendo a valor presente los flujos de efectivo de cada una de las trayectorias en donde el flujo de efectivo sea mayor a cero, y después promediar estos valores. Para una opción americana, el promedio del valor presente de los flujos de efectivo es 0.1144, en cambio el valor presente de los flujos de efectivo al tiempo 3 es de 0.0564, este valor es equivalente al valor de una opción europea del mismo tipo, y se observa que el valor es casi la mitad del de una americana.

Lo que muestra éste algoritmo es una manera de encontrar el valor de la opción junto con su matriz de paro óptimo utilizando aproximación por mínimos cuadrados, se puede observar que no es un método difícil. En resumen lo que se hace es simular n trayectorias de cada una de estas, se tiene el valor de las acciones hasta la fecha de expiración de la opción, como el algoritmo es recursivo se empieza en el tiempo T y se hace la evaluación de ejercicio óptimo, al tiempo T la opción americana vale lo mismo que la Europea y al tiempo $T - 1$, se evalúa si es óptimo ejercer en ese momento. Para saber si es óptimo, se revisa si la acción se encuentra in the money, si está, entonces se calcula el valor de ejercicio inmediato y se compara contra el valor estimado, si el valor de ejercicio inmediato es mayor que el valor estimado, entonces es conveniente ejercer. A partir de esta decisión, se forma la matriz de tiempo de paro óptimo. Si el poseedor ejerce en el tiempo $T - 1$ entonces al tiempo T el poseedor no podrá ejercer, ya que la opción puede ser ejercida sólo una vez. Para encontrar el valor de la opción se traen a valor presente los valores en donde la opción es ejercida, por ejemplo, si la opción se ejerce en el tiempo 3, se trae a valor presente 3 periodos y así para cada una de las trayectorias.

Éste algoritmo es muy útil, ya que aparte de calcular el valor de la opción, da la matriz de tiempo de paro óptimo, es un algoritmo útil y sencillo.

Conclusiones

Todos los modelos son perfectibles y por lo tanto no es sencillo tomar partido a algún modelo en especial. Los modelos expuestos en este trabajo son de gran utilidad, pero cada uno tiene sus fortalezas y debilidades.

Modelo	Ventajas	Desventajas	Utilidad
Binomial de un periodo	<ul style="list-style-type: none"> - Sencillo de plantear. - No tiene muchos supuestos. -Es muy rápido. -Se crea un portafolio cobertura. 	<ul style="list-style-type: none"> - Sólo es de un periodo. -No es muy preciso. 	Es un modelo que se utiliza cuando se desea tener una idea del valor de la opción.
Binomial multiperiodo	<ul style="list-style-type: none"> - Es fácil de plantear. - No tiene muchos supuestos. -Es rápido cuando son pocos periodos. -Se crea un portafolio cobertura. 	<ul style="list-style-type: none"> - No es muy exacto. - Si se requieren muchos periodos se convierte en un modelo inutilizable. 	Es un modelo que es útil cuando se requiere una valuación rápida y no muy exacta.
Métodos numéricos	<ul style="list-style-type: none"> - Son algoritmos sencillos donde sólo depende de 3 puntos antes o después. -Existen métodos para medir estabilidad y convergencia. 	<ul style="list-style-type: none"> - Existe el riesgo del error por redondeo. - La implementación no es muy sencilla. -No crea portafolio cobertura. 	Son modelos útiles es útil cuando se requiere una valuación rápida y no muy exacta.
Simulación Montecarlo	<ul style="list-style-type: none"> - Es muy exacto. -Es fácil de implementar. -Es muy eficiente. -Puede tener muchas iteraciones. 	<ul style="list-style-type: none"> -Tiene muchos supuestos. - No crea portafolio cobertura. - 	Es un modelo muy bueno para dar una valuación a mercado.

Modelo	Ventajas	Desventajas	Utilidad
Método de mínimos cuadrados	-Es muy exacto. -Crea un portafolio cobertura. -Dice cual es el mejor momento para ejercer. -Se puede poner el número de periodos que se quiera	-Tiene muchos supuestos. -No es tan sencillo de implementar.	Es un modelo que aparte de dar una valuación a mercado dice cuando es el mejor momento para ejercer y genera un portafolio cobertura.

Tomando en cuenta lo que aparece en el cuadro resumen, el modelo debe ser elegido de acuerdo a las necesidades del usuario.

En conclusión, no existe el mejor modelo, el usuario puede encontrar el mejor modelo que se adapte a sus necesidades.

Apéndice A

.1. Definiciones

En esta sección, se muestran las definiciones de probabilidad que son útiles para entender algunos de los teoremas dados en este trabajo. Se desea definir una medida de probabilidad, para poder definir ésta, es necesario dar los siguientes elementos. Sea Ω un espacio abstracto, y sea 2^Ω el conjunto potencia de Ω y \mathcal{A} un subconjunto de 2^Ω . Utilizando estos elementos se dan las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN. 15

Se dice que \mathcal{A} es un álgebra si cumple que

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$ y $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$.
3. \mathcal{A} es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas.

DEFINICIÓN. 16

Se dice que \mathcal{A} es una σ -álgebra si cumple que

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$ y $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$.
3. \mathcal{A} es cerrada bajo uniones e intersecciones numerables.

La única diferencia entre un álgebra y una σ -álgebra es que la σ -álgebra no solo es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas, si no que es cerrada bajo uniones e intersecciones numerables

DEFINICIÓN. 17

Se dice que si $C \subset 2^\Omega$, entonces $\sigma(C)$ es la σ -álgebra más pequeña que contiene a C .

DEFINICIÓN. 18

La σ -álgebra de los reales es la σ -álgebra de Borel, la cual es generada por intervalos de la forma $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{Q}$.

Con esto se puede dar la definición de medida de probabilidad.

DEFINICIÓN. 19

Una medida de probabilidad definida sobre una σ -álgebra $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ es una función $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ que satisface

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ y $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. Para toda sucesión numerable $\{A_n\}_{n \geq 1}$, $A_n \in \mathcal{A}$ disjuntos por pares se tiene

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n). \quad (53)$$

Otro resultado importante es la continuidad de la medida de probabilidad que se ve en el siguiente teorema.

TEOREMA. 15

Sea \mathbb{P} una medida de probabilidad y sea $\{A_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de eventos en \mathcal{A} que converge a un evento A , entonces $A \in \mathcal{A}$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A).$$

DEFINICIÓN. 20

- Dos eventos A y B son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- Una colección de eventos $(A_i)_{i \in I}$ es una colección independiente si para todo subconjunto finito J de I tenemos

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

DEFINICIÓN. 21

La probabilidad condicional de un evento A dado un evento B es

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \mathbb{P}(B) > 0.$$

TEOREMA. 16

Supóngase que $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces

- A y B son independientes si y solo si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.
- La operación $A \rightarrow \mathbb{P}(A|B)$ de $\mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ define una nueva medida de probabilidad en \mathcal{A} llamada medida de probabilidad condicional dado B .

Uno de los teoremas más importantes de la probabilidad condicional es el teorema de Bayes que dice lo siguiente:

TEOREMA. 17

Sea $(E_n)_{n \geq 1}$ una partición finita o numerable de Ω y supongase que $\mathbb{P}(A)$ y la $\mathbb{P}(E_N) > 0$, entonces

$$\mathbb{P}(E_n|A) = \frac{\mathbb{P}(A|E_n)\mathbb{P}(E_n)}{\sum_n \mathbb{P}(A|E_n)\mathbb{P}(E_n)},$$

donde $\mathbb{P}(A) = \sum_n \mathbb{P}(A|E_n)\mathbb{P}(E_n)$.

DEFINICIÓN. 22

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria es una función real-valuada X definida en Ω con la propiedad de que para todo subconjunto de borel $B \in \mathfrak{R}$, el subconjunto de Ω dado por

$$(X \in B) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}$$

en la σ -álgebra \mathcal{F} .

Una forma en la que se puede ver a una variable aleatoria es como una cantidad numérica que tiene que ver con el resultado de un experimento aleatorio.

DEFINICIÓN. 23

Sea X una variable aleatoria en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La esperanza de X es definida como

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

TEOREMA. 18

Sea X una variable aleatoria tal que tanto X como X^2 tienen esperanza finita. La varianza de X es definida de la siguiente manera

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2.$$

A partir de estas dos definiciones se tienen tres desigualdades muy importantes que se muestran en los siguientes teoremas.

TEOREMA. 19

Desigualdad de Markov. Si X es una variable aleatoria cualquiera y $a > 0$, entonces

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

TEOREMA. 20

Desigualdad de Jensen. Si φ es una función convexa real-valuada definida en \mathfrak{R} , y si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, entonces

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}\varphi(X).$$

TEOREMA. 21

Desigualdad de Chebyshev. Sea X una variable aleatoria no negativa y una función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ creciente tal que $\mathbb{E}[f(x)] < \infty$. Entonces para toda $a \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$f(a)\mathbb{P}(X > a) \leq \mathbb{E}[f(x)].$$

.2. Esperanza condicional

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sea $L^p(\Omega)$ el espacio para todas las variables aleatorias X tales que $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ para $1 \leq p < \infty$ fijo. Sea $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio Banach con norma $\|X\|_p = (\mathbb{E}(|X|^p))^{1/p}$.

En particular $\|X\|_1 = \mathbb{E}[|X|]$. Suponga que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, donde \mathcal{G} es una σ -álgebra. Sea X una variable aleatoria con $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Se define la función real-valuada de μ sobre \mathcal{G} como

$$\mu(A) = \int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad A \in \mathcal{G}. \quad (54)$$

Observese que $|\mu(A)| \leq \int_A |X| d\mathbb{P} \leq \int_{\Omega} |X| d\mathbb{P} = \mathbb{E}[|X|] \forall A \in \mathcal{G}$. Más aún, la función μ satisface las siguientes condiciones:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(\cup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$ para cualquier sucesión de eventos $A_n \in \mathcal{G}, n = 1, 2, 3, \dots$ tal que $A_j \cap A_i = \emptyset$ para toda $i \neq j$.
3. Si $\mathbb{P}(A) = 0$ y $A \in \mathcal{G}$, entonces $\mu(A) = 0$.

Una función $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las condiciones 1. y 2. es conocida como una *medida con signo* sobre (Ω, \mathcal{G}) . Se dice que una medida con signo μ es absolutamente continua con respecto a \mathbb{P} si satisface la condición 3. Por lo tanto la función definida en (54) es una medida con signo sobre (Ω, \mathcal{G}) y absolutamente continua sobre \mathbb{P} .

Se aplica el teorema de Radon-Nikodym (24) a la medida con signo μ definida en la ecuación (54) para obtener una variable aleatoria Y \mathcal{G} -medible con $\mathbb{E}[Y] < \infty$ tal que

$$\mu(A) = \int_A Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{G}. \quad (55)$$

Supóngase ahora que existe otra variable aleatoria \tilde{Y} que es \mathcal{G} -medible con $\mathbb{E}[\tilde{Y}] < \infty$ que satisface

$$\mu(A) = \int_A \tilde{Y}(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{G}. \quad (56)$$

Entonces si se toman las definiciones de las ecuaciones (55) y (56), se tiene $\int_A (Y - \tilde{Y}) d\mathbb{P} = 0$ para toda $A \in \mathcal{G}$. Esto implica que $Y = \tilde{Y}$ casi seguramente. Con lo anterior se demostró la unicidad de la esperanza condicional en la siguiente definición.

DEFINICIÓN. 24

Sea $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F})$. Supóngase que \mathcal{G} es un σ -campo y que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. La esperanza condicional de X dado \mathcal{G} es definida como la única variable aleatoria Y que satisface las siguientes condiciones:

1. Y es \mathcal{G} -medible;
2. $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}$ para toda $A \in \mathcal{G}$.

La esperanza condicional $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ puede ser interpretada como el valor esperado de X basado en la información dada por \mathcal{G} .

.3. Martingalas

Sea $f \in L^2[a, b]$ y el proceso estocástico definido por

$$M_t = \int_a^t f(s) dW(s), \quad a \leq t \leq b. \quad (57)$$

El proceso estocástico M_t definido por la ecuación (57) es una martingala.

DEFINICIÓN. 25

Una filtración sobre T ⁵ es una familia decreciente $\{\mathcal{F}_t | t \in T\}$ de σ -campos. Se dice que un proceso estocástico X_t es adaptado a $\{\mathcal{F}_t | t \in T\}$ si, para cada t la variable aleatoria X_t es \mathcal{F}_t -medible.

PROPOSICIÓN. 7

Sea X_t un proceso estocástico adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ y $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ para toda $t \in T$. Entonces X_t es llamada martingala con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$ si para toda $s \leq t \in T$

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, \quad \text{c.s. (casi segura)} \quad (58)$$

Una submartingala y una supermartingala son definidas reemplazando la igualdad por desigualdades en la ecuación (58), es decir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] &\geq X_s \quad \text{c.s. (submartingala)} \\ \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] &\leq X_s \quad \text{c.s. (supermartingala)} \end{aligned} \quad (59)$$

Con las definiciones anteriores, es posible dar los siguientes ejemplos para poder identificar bien las definiciones. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esperanza finita y sea $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Entonces $\{S_n\}$ es una submartingala si $\mathbb{E}[X_1] \geq 0$ y una supermartingala si $\mathbb{E}[X_1] \leq 0$.

Un movimiento Browniano $W(t)$ es una martingala. Para ver que esto es cierto, sea

$$\mathcal{F}_t = \sigma \{W(s); s \leq t\}.$$

⁵ T puede ser un intervalo en los números reales o el conjunto de los enteros positivos.

Entonces para toda $s \leq t$,

$$\mathbb{E}[W(t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W(t) - W(s)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W(s)|\mathcal{F}_s].$$

Como $W(t) - W(s)$ es independiente de \mathcal{F}_s , se tiene que $\mathbb{E}[W(t) - W(s)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W(t) - W(s)]$, pero $\mathbb{E}[W(t)] = 0$ para toda t . Por lo tanto $\mathbb{E}[W(t) - W(s)|\mathcal{F}_s] = 0$. Por otro lado, $\mathbb{E}[W(s)|\mathcal{F}_s] = W(s)$, esto sucede porque $W(s)$ es \mathcal{F}_s -medible. Por lo tanto $\mathbb{E}[W(s)|\mathcal{F}_s] = W(s)$ para toda $s \leq t$. Con lo anterior, queda demostrado que el movimiento Browniano $W(t)$ es una martingala.

El siguiente teorema dice que el proceso M_t definido en la ecuación (57) es una martingala.

TEOREMA. 22

Sea $f \in L^2[a, b]$. Entonces el proceso estocástico

$$M_t = \int_a^t f(s)dW(s), \quad a \leq t \leq b,$$

es una martingala con respecto a $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s); s \leq t\}$.

Para ver la demostración del teorema consultar [12].

.4. Cambio de medida

Un cambio de medida es tomar una variable aleatoria Z para cambiarle la medida de probabilidad al espacio Ω . Para esto es necesario cambiar la medida actual \mathbb{P} por una nueva medida $\tilde{\mathbb{P}}$. Cuando Ω es no numerable e infinita y se tiene $\mathbb{P}(\omega) = \tilde{\mathbb{P}}(\omega) = 0$ para toda $\omega \in \Omega$ y no tiene sentido escribir la siguiente ecuación,

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}, \quad (60)$$

ya que la división entre cero es indeterminada, entonces se reescribe la ecuación (60) como sigue

$$Z(\omega) = \mathbb{P}(\omega) = \tilde{\mathbb{P}}(\omega). \quad (61)$$

En la ecuación (61) se tiene una ecuación igualada a cero de los dos lados, pero no dice nada acerca de la relación que tienen $\tilde{\mathbb{P}}, \mathbb{P}$ y Z , ya que $\tilde{\mathbb{P}}(\omega) = \mathbb{P}(\omega) = 0$, pero $Z(\omega)$ puede tomar cualquier valor. Para cambiar de \mathbb{P} a $\tilde{\mathbb{P}}$ se tienen que asignar probabilidades en Ω usando a Z para que diga en qué valores de Ω se tiene revisar la probabilidad de que $Z > 1$ y en cuales la probabilidad de que $Z < 1$. Sin embargo, esto se hace conjunto a conjunto en lugar de hacerlo ω por ω . Este proceso esta descrito en el siguiente teorema.

TEOREMA. 23

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y sea Z una variable aleatoria no negativa casi segura con esperanza $\mathbb{E}Z = 1$. Para toda $A \in \mathcal{F}$ se define

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega)d\mathbb{P}(\omega). \quad (62)$$

Entonces $\tilde{\mathbb{P}}$ es una medida de probabilidad. Más aún si X es una variable aleatoria no negativa, entonces

$$\tilde{\mathbb{E}} = \mathbb{E}[XZ] \quad (63)$$

Si Z es una variable aleatoria estricta positiva casi segura, también se tiene:

$$\mathbb{E}Y = \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{Y}{Z} \right] \quad (64)$$

para toda variable aleatoria Y no negativa.

Para demostrar este teorema, lo único que se debe hacer es demostrar que $\tilde{\mathbb{P}}$ es una medida de probabilidad, esto se hace usando la definición de medida de probabilidad dada en [12].

Ahora, es necesario dar una definición en la que se pueda decir que tan parecidas son nuestras dos probabilidades.

DEFINICIÓN. 26

Sea Ω un conjunto no vacío, y sea \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de Ω . Se dice que dos medidas de probabilidad \mathbb{P} y $\tilde{\mathbb{P}}$ son equivalentes en (Ω, \mathcal{F}) si coinciden en todos los conjuntos en \mathcal{F} que tienen probabilidad cero.

Lo que dice esta definición es que si se tienen dos medidas de probabilidad distintas en el mismo espacio con la misma σ -álgebra, éstas deben coincidir en los conjuntos que tengan probabilidad cero para que sean equivalentes. Teniendo la definición de equivalencia, se da la definición de derivada de Radón-Nikodým.

DEFINICIÓN. 27

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\tilde{\mathbb{P}}$ otra medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) que es equivalente a \mathbb{P} , y sea Z una variable aleatoria casi segura positiva que relaciona a \mathbb{P} con $\tilde{\mathbb{P}}$ vía la ecuación (62). Entonces Z es conocida como la derivada de Radón-Nikodým que es la derivada de $\tilde{\mathbb{P}}$ con respecto a \mathbb{P} , se escribe de la siguiente forma.

$$Z = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \quad (65)$$

Con la definición anterior, se ha relacionado las dos medidas de probabilidad, pero existe un teorema que dice que con la existencia de dos medidas de probabilidad equivalentes se garantiza la existencia de una variable aleatoria positiva casi segura. Esto está representado en el siguiente teorema.

TEOREMA. 24

Sean \mathbb{P} y $\tilde{\mathbb{P}}$ dos medidas de probabilidad equivalentes definidas en (Ω, \mathcal{F}) . Entonces existe una variable aleatoria Z positiva casi segura tal que $\mathbb{E}Z = 1$ y

$$\tilde{\mathbb{P}} = \int_A Z(w) d\mathbb{P}(w) \text{ para toda } A \in \mathcal{F}$$

Este teorema es conocido como el teorema de Radón-Nikodým.

Existencia de la medida neutral al riesgo

DEFINICIÓN. 28

Una medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ es neutral al riesgo si

- $\tilde{\mathbb{P}}$ y \mathbb{P} son equivalentes, y
- bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, el valor descontado $D(t)S_i(t)$ es una martingala para toda $i = 1 \dots n$.

.5. Instrumentos de mercado bajo la medida neutral al riesgo**.5.1. Acciones bajo la medida neutral al riesgo**

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $W(t), 0 \leq t \leq T$ un movimiento Browniano en ese espacio, $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$, es la filtración de este movimiento. Considérese el valor de una acción con derivada

$$dS(t) = \alpha(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW, 0 \leq t \leq T, \quad (66)$$

donde $\alpha(t)$ y $\sigma(t)$ son la tasa media de retorno y la volatilidad, respectivamente. Estos son procesos adaptados. Se asumirá que para toda $t \in [0, T]$, $\sigma(t)$ es diferente de cero casi seguramente.

Se dice que el valor de una acción es una generalización del movimiento Browniano, y una forma equivalente de escribir la ecuación (60) es

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s)dW(s) + \int_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s) \right) ds \right\}. \quad (67)$$

Ahora supóngase también que $R(t)$ es un proceso adaptado de la tasa de interés, con éste se define

$$D(t) = e^{-\int_0^t R(s)ds}. \quad (68)$$

Si $I(t) = \int_0^t R(s)ds$ tal que $dI(t) = R(t)dt$ y que $dI(t)dI(t) = 0$, entonces, introduciendo una nueva función $f(x) = e^{-x}$ tal que $f'(x) = -f(x)$ y $f''(x) = f(x)$, y utilizando la fórmula de Itô se obtiene

$$\begin{aligned} dD(t) &= df(I(t)) \\ &= f'(I(t))dI(t) + \frac{1}{2}f''(I(t))dI(t)dI(t) \\ &= -f(I(t))R(t)dt \\ &= -R(t)D(t)dt. \end{aligned} \quad (69)$$

Acerca de la ecuación (63), se mencionan los siguientes puntos.

- Aunque $D(t)$ es aleatoria, tiene variación cuadrática cero.

- El valor del activo $S(t)$ es aleatorio y tiene variación cuadrática diferente de cero.
- Para encontrar $dD(t)$ no es necesario saber cálculo estocástico.

El gran inconveniente que se tiene es que si se invierte en este activo, no se sabe cual es el precio que tendrá en el futuro ya que un movimiento Browniano es el que maneja el valor del activo. Por otro lado, si se invierte en el mercado de dinero se tiene una tasa de interés variable $R(t)$. Si el precio de un activo al tiempo cero en el mercado de dinero es 1, entonces al tiempo t el activo valdría $e^{\int_0^t R(s)ds} = \frac{1}{D(t)}$. Si se invierte en este activo y la tasa de intrés es conocida en el momento de la inversión, es posible tener mayor certeza del valor de la tasa de interés dentro de un periodo corto de tiempo. A diferencia del valor de un activo en el mercado de dinero, que es susceptible a cambios instantáneos y es *más aleatorio* que $D(t)$. El modelo captura este efecto, ya que $S(t)$ tiene variación cuadrática diferente de cero, al mismo tiempo que $D(t)$ tiene variación cuadrática cero. El proceso descontado para el valor de un activo es,

$$D(t)S(t) = S(0) \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s)dW(s) + \int_0^t \left(\alpha(s) - R(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s) \right) ds \right\}, \quad (70)$$

con derivada

$$\begin{aligned} d(D(t)S(t)) &= (\alpha(t) - R(t)) D(t)S(t)dt + \sigma(t)D(t)S(t)dW(t) \\ &= \sigma(t)D(t)S(t) [\Theta(t)dt + dW(t)], \end{aligned} \quad (71)$$

donde Θ es el precio de riesgo del mercado, y está dada por,

$$\Theta = \frac{\alpha(t) - R(t)}{\sigma(t)}. \quad (72)$$

Es posible obtener la ecuación (71), de dos formas, la primera es aplicando la fórmula de Itô a la parte derecha de la ecuación (70) y la segunda es usando la regla del producto de Itô y las ecuaciones (60) y (63).

En la primera igualdad de la ecuación (71) se observa que la tasa media de retorno del valor descontado del activo es $\alpha(t) - R(t)$, y la volatilidad de este, es la misma que las del precio no descontado.

Introduciendo la medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ mencionada en el teorema 12, junto con el precio de riesgo del mercado Θ (72), es posible reescribir la ecuación (71) en términos del movimiento browniano descrito en el teorema mencionado (\tilde{W}) como sigue:

$$d(D(t)S(t)) = \sigma(t)D(t)S(t)d\tilde{W}(t). \quad (73)$$

$\tilde{\mathbb{P}}$ será conocida como *la medida neutral a riesgo*, ya que es equivalente a la medida original \mathbb{P} y hace que el precio descontado de la acción sea martingala, de acuerdo con la ecuación (73)

$$D(t)S(t) = S(0) + \int_0^t \sigma(u)D(u)S(u)d\tilde{W}(u), \quad (74)$$

y bajo $\tilde{\mathbb{P}}$ el proceso $\int_0^t \sigma(u)D(u)S(u)d\tilde{W}(u)$ es una integral de Itô y por lo tanto una martingala.

Por otro lado, el precio no descontado $S(t)$ tiene tasa media de retorno igual a la tasa de interés bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, (esto puede ser verificado sustituyendo $dW(t) = -\Theta(t) + d\tilde{W}(t)$ en (60)), entonces la ecuación (60) se convierte en

$$dS(t) = R(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)d\tilde{W}(t). \quad (75)$$

Esta ecuación puede ser resuelta para $S(t)$ o simplemente reemplazar la integral de Itô por su equivalente $\int_0^t \sigma(s)d\tilde{W}(s) + \int_0^t (\alpha(s) - R(s))ds$ en la ecuación (67), para obtener

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s)d\tilde{W}(s) + \int_0^t \left(R(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s) \right) ds \right\}. \quad (76)$$

En tiempo discreto, el cambio de medida no cambia el árbol binomial, lo único que cambia es la probabilidad en los nodos del árbol. En tiempo continuo, el cambio de medida de \mathbb{P} a la medida neutral a riesgo $\tilde{\mathbb{P}}$, cambia la tasa media de retorno, pero no cambia la volatilidad, ésta indica las trayectorias posibles que puede tomar la acción, es decir, aquellas en las cuales el logaritmo del precio de la opción acumula una variación cuadrática con tasa $\sigma^2(t)$ por unidad de tiempo. Después del cambio de medida, se sigue considerando el mismo conjunto de trayectorias para el activo, pero la probabilidad con la que toma cada una de las trayectorias ha cambiado. Si $\alpha(t) > R(t)$, entonces el cambio de medida asigna mayor probabilidad a las trayectorias que tengan menor retorno, por lo tanto la tasa media de retorno se reduce de $\alpha(t)$ a $R(t)$.

.5.2. Valuación bajo la medida neutral al riesgo

Sea $V(T)$ una variable aleatoria $\mathcal{F}(T)$ -medible, que representa el pago de un derivado al tiempo T , se dice que este pago es un pago dependiente de la trayectoria, ya que es $\mathcal{F}(T)$ -medible. Se desea saber cual es capital inicial $X(0)$ y el proceso del portafolio $\Delta(t)$ que se necesita para cubrir una posición corta para este derivado, es decir que

$$X(T) = V(T), \quad (77)$$

casi seguramente.

Supóngase que la tasa media de retorno, volatilidad y la tasa de interés no son constantes, entonces es necesario elegir un capital inicial y una estrategia de portafolio tal que la ecuación (77) se cumpla. Una vez realizada la elección correcta, se tiene

$$D(t)X(t) = \tilde{\mathbb{E}}[D(T)X(T)|\mathcal{F}(t)] = \tilde{\mathbb{E}}[D(T)V(T)|\mathcal{F}(t)]. \quad (78)$$

La ecuación (78) se cumple ya que $D(t)X(t)$ es una martingala bajo la medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$. El valor $X(t)$ en (78), es el capital necesario en el tiempo t para poder hacer una cobertura corta para el derivado con valor $V(T)$, entonces $V(t)$

es el valor del derivado al tiempo t , por lo que la ecuación (78) se transforma en

$$D(t)V(t) = \tilde{\mathbb{E}}[D(T)V(T)|\mathcal{F}(t)], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (79)$$

La ecuación (2.41) es la fórmula de precio bajo la medida neutral a riesgo. Dividiendo entre $D(t)$ la ecuación (2.41), y recordando la definición de $D(t)$ (68) se obtiene

$$V(t) = \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-\int_t^T R(u)du} V(T) | \mathcal{F}(t) \right], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (80)$$

Las ecuaciones (2.41) y (2.42) serán conocidas como la fórmula de precio neutral al riesgo para el tiempo continuo.

.5.3. Resolver integrales con números aleatorios

Una de las aplicaciones más nuevas de los números aleatorios es calcular integrales. Sea $g(x)$ una función y supongase que se quiere encontrar el valor de θ tal que

$$\theta = \int_0^1 g(x)dx.$$

Si $U \sim \text{Unif}(0, 1)$, es posible expresar a θ como:

$$\theta = E[g(U)].$$

Si las variables aleatorias U_1, U_2, \dots, U_k se distribuyen uniforme y son independientes, entonces las funciones $g(U_1), g(U_2), \dots, g(U_k)$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esperanza θ . Entonces, por la ley de los grandes números se tiene

$$\sum_{i=1}^k \frac{g(U_i)}{k} \rightarrow E[g(U)] = \theta, \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty. \quad (81)$$

Por lo que es posible aproximar a θ generando un número grande de variables aleatorias u_i y después tomar la aproximación para el valor promedio de $g(u_i)$. Esta aproximación es conocida como aproximación Monte Carlo.

Bibliografía

- [1] Aragunés, José R., Mascavena, Juan *La eficiencia y el equilibrio en los mercados de capital*, Universidad Complutense de Madrid, Análisis financiero no. 64, 1994.
- [2] Black F. and Scholes M. *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy. 1973.
- [3] Glaseerman, Paul, *Monte Carlo methods in Financial Engineering*, Springer 2004.
- [4] Hull, John C., *Options, Futures and other Derivatives, 6th edition*, Prentice Hall, 2006.
- [5] Jean, Jacob, *Probability Essentials*, Springer, 1991.
- [6] Longstaff, Francis A, Schwarts, Eduardo S *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*, UCLA, 2001.
- [7] Lamberton, Damien *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. 1st edition*, Champman&Hall CRC, 1996.
- [8] Musiela, Marek *Martingale Methods in Financial Modeling*, 22nd edition, Springer.
- [9] Ross, Sheldon, *Stochastic Processes, 2nd edition*, Wiley, 1996.
- [10] Ross, Sheldon, *Simulation, 3rd edition*, Academic Press, 2002.
- [11] Shreve, Steven E., *Stochastic calculus for Finance I*, Springer 2004.
- [12] Shreve, Steven E., *Stochastic calculus for Finance II*, Springer 2004.
- [13] Wilmott, Paul, *Option Pricing, Mathematical Models and Computation*, Oxford Financial Press, 1994.