UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DESARROLLO Y APLICACION DE DISTINTOS TIPOS DE ANUALIDADES A TASA REAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A:

HORACIO TELLEZ ANDRADE

DIRECTOR DE TESIS:

ACT. MARÍA AURORA VALDÉS MICHEL

2012

INDICE

AGRADECIMIENTOS

A mis padres:

Santa Andrade Valencia

José Tellez Martínez

Quienes me formaron en el camino de la rectitud, el respeto, los valores y la honradez, con profundo agradecimiento y eterno cariño.

A mis hermanos:

Héctor Tellez Andrade

José Luís Tellez Andrade

Quienes han estado conmigo en todo momento, gracias por su apoyo y orientación.

A mi esposa:

Nancy de León Nieto

Por el amor que me has mostrado en todo momento y tu apoyo incondicional ante los retos de la vida.

A mi hija:

Tania Tellez De León

Por ser el motor de mis fuerzas para salir adelante ante las adversidades y motivo principal de mis alegrías.

Primordialmente, quiero dar un reconocimiento a la Universidad Nacional Autónoma de México, mi Alma máter y la máxima casa de estudios en México, en especial a la Facultad de Ciencias y al Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Oriente, a los profesores, compañeros y amigos, quienes han sido parte por demás importante en la formación de mi persona, de mis ideales y valores.

También quiero dejar constancia de gratitud a todas las personas que a lo largo de mi trayectoria laboral me han dejado huella y me han permitido aprender de ellos, a mis jefes, compañeros y amigos, por creer en mí, así como a quienes me han apoyado para la presentación de este proyecto.

Extiendo mi gratitud a mis grandes amigos: Jorge Nájera, Verónica Jacal, Salvador Barrera, David Briseño, Manuel González, David Herrejón y Andrea Espejel, y a todos los que me faltan, quienes siempre me han brindado su amistad incondicional.

Quiero agradecer de manera especial a la Actuaria María Aurora Valdés Michell, quién sin su orientación, dirección y apoyo, no sería posible la presentación de este estudio.

Respetuosamente, quiero hacer un agradecimiento póstumo al Actuario Jorge Salas Torá, eminente Actuario en nuestro país y uno de mis ejemplos a seguir, gracias por haberme dado la oportunidad de aprender de usted, donde quiera que esté…

INTRODUCCION

Las Matemáticas Financieras, se desconocen a ciencia cierta cuando aparecieron, pero de lo que si se puede estar seguro es que es una derivación de las matemáticas aplicadas que estudian el valor del dinero en el tiempo y que a través de una serie de modelos matemáticos permiten tomar las decisiones más adecuadas en los proyectos de inversión.

El estudio del valor del dinero a través del tiempo, trae consigo la necesidad de comprender un fenómeno denominado “inflación”, como el principal elemento deteriorante del valor del dinero a través del tiempo.

Al existir el fenómeno inflacionario, la gente trata de protegerse a su manera contra sus efectos y si es posible sacarle provecho, de esta manera surge el concepto de *tasa de interés real*, como la forma que contrarresta eficazmente el efecto de la inflación en las transacciones financieras.

En este entorno, el presente trabajo tiene como objetivo principal el mostrar la aplicación del concepto de tasa real en los distintos tipos de anualidades, como una forma para evitar la pérdida del valor adquisitivo del dinero en las transacciones financieras ante la presencia del fenómeno inflacionario y garantizar de esta manera un rendimiento real.

El orden y contenido de cada uno de los capítulos es el siguiente:

En el capítulo 1 se mencionarán los fundamentos de las Matemáticas Financieras, algunos conceptos, definiciones, notaciones y desarrollos esenciales para un mayor entendimiento de los problemas financieros.

En el capítulo 2 se hablará de las anualidades, los elementos que la integran, su clasificación de acuerdo a los distintos criterios o características especiales que las conforman, el cálculo de su valor presente y su valor futuro de cada una de ellas.

Para el capítulo 3 se mencionarán dos conceptos importantes necesarios para una mayor comprensión del valor del dinero en el tiempo, por un lado la inflación, sus causas, clasificación, características, consecuencias, medición y efectos en el entorno económico en general, y por el otro la tasa de interés real, sus antecedentes, concepto y desarrollo.

Por último en el capítulo 4 se desarrollará la aplicación de la tasa real a los distintos tipos de anualidades, mediante el uso de herramientas específicas para su mayor manejo y entendimiento.

1 CAPITULO

CONCEPTOS BASICOS DE MATEMATICAS FINANCIERAS

1.1 Antecedentes

A lo largo de la historia, las matemáticas han sido aplicadas a muchas áreas del conocimiento a través de los años, en especial las matemáticas financieras, las cuales tuvieron su origen como un desarrollo involuntario pero necesario en algunas transacciones comerciales, en especial aquellas que involucraban en cierta manera una compensación que recibe la persona que presta u otorga un bien o derecho, a otra persona en un determinado tiempo.

Durante este proceso de creación de dichas aplicaciones, fueron planteados una serie de modelos matemáticos y surgiendo como consecuencia conceptos que permiten tener un mejor panorama para la toma de decisiones en este tipo de transacciones.

En resumen las matemáticas financieras surgen como consecuencia de la aplicación de las matemáticas al estudio del valor del dinero en el tiempo.

Para un mayor entendimiento de las matemáticas financieras es muy importante el manejo de algunos conceptos y modelos, digamos que es el lenguaje de los símbolos que se utilizan comúnmente en el desarrollo de modelos y aplicaciones financieras, por lo que a continuación se describen brevemente los principales conceptos de las matemáticas financieras:

1.2 Interés

En general, se entiende por interés a la retribución o ganancia que se obtiene al prestar u otorgar algún bien o derecho a otro en un lapso de tiempo.

En términos financieros se define interés como la remuneración obtenida por quien facilita el capital o dinero en la realización de una transacción denominada préstamo a un determinado plazo de tiempo.

En términos matemáticos el interés se define así:

$$Interes = CO - CP$$

Donde: CO Capital Obtenido

CP Capital Prestado

1.3 Tasa de interés

La tasa de interés se puede definir como el porcentaje de incremento del capital o ganancia a retribuir por el préstamo o uso de capital durante un intervalo de tiempo, expresado por lo regular en porcentaje con base al capital inicial y en relación al tiempo de que este se disponga.

Es decir, se entiende como tasa de interés a la razón del rendimiento que produce un capital o dinero invertido respecto del capital mismo.

Para ilustrarlo de mejor manera, supongamos que una persona pide un préstamo a un banco de $100,000.00 a pagar en un año, al concluir el plazo el banco recibirá $110,000.00, lo que indica que desde el punto de vista de la persona paga una tasa de interés del 10% por utilizar el dinero durante el año y mientras que el banco obtiene un 10% de ganancia, siendo el interés total de la transacción será de $10,000.00

Cada tasa de interés es dependiente de unidad de tiempo que se establezca, por lo que podemos tener diversas tasas de interés relativas a la unidad de tiempo con la que se calcule, por ejemplo, anual, semestral, trimestral y mensual, etc.

Además de su periodicidad de pago, es importante destacar que existen dos tipos de interés, el interés simple y el compuesto, los cuales se describen a continuación:

1.4 Interés simple

El interés simple es aquel en el que el interés se paga al final de un periodo de tiempo específico acordado, calculándose sobre el capital original.

La característica fundamental del interés simple es que los intereses que se generan a lo largo de un período de tiempo dado no se agregan al capital para el cálculo de los intereses del siguiente periodo, por lo que los intereses generados en cada uno de los periodos iguales son también iguales.

El interés simple se utiliza principalmente para operaciones con vencimientos cercanos o de “corto plazo”.

Para el calcular el interés total con el tipo de interés simple se tiene que:

$$Interes = \mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2 + \mathrm{i}_3 + \ldots + \mathrm{i}_t$$

Es decir, el interés total es la suma de los intereses de cada periodo y estos se calculan de la siguiente manera:

Sea C Capital inicial

i Tasa de interés del periodo

t Numero de periodos de tiempo

i_j Interés del periodo j

$i_1 = C \cdot i$ para el primer periodo

$i_2 = C \cdot i$ para el segundo periodo

.

.

.

$i_t = C \cdot i$ para el t periodo

Lo anterior conduce a la siguiente expresión de interés simple:

$$Interes = C \cdot i \cdot t$$

Ya que obtuvimos el interés total generado por el capital, es necesario sumarle el capital inicial para obtener lo que se llama capital final o monto y el cual se describe con la siguiente fórmula:

Sea K Capital final entonces:

$$K = C + Interes$$

Sustituyendo tenemos que:

$$K = C \cdot (1 + (i \cdot t))$$

Gracias a estas dos sencillas fórmulas el resto de los conceptos relacionados con el interés simple son fácilmente accesibles.

En caso de querer conocer el capital inicial o valor presente, utilizando las fórmulas y despejando C se tiene:

$$C = \frac{K}{(1 + (i \cdot t))}$$

Si se quiere conocer la tasa de interés asociada, despejando i a partir de la fórmula del capital final obtenemos:

$$i = \frac{K - C}{C \cdot t}$$

Para conocer el periodo de tiempo invertido, partiendo de las fórmulas básicas y despejando t tenemos que:

$$t = \frac{K - C}{C \cdot i}$$

1.4.1 Relaciones entre tasas de interés simple

Tasas de interés equivalentes:

Se consideran tasas de interés equivalentes a aquellas tasas que teniendo distinta unidad de tiempo, aplicados a un mismo capital durante un mismo periodo de tiempo, producen el mismo capital final.

Hasta el momento se ha referido a una tasa de interés simple anual, los periodos que se han tomado también han sido anuales, sin embargo se sabe que las operaciones comerciales no tienen por qué hacer referencia a un número exacto de años, es más, en muchas operaciones la duración es inferior al año, por ello la tasa de interés tampoco tiene por que ser anual y puede hacer referencia a cualquier período de tiempo.

Para ilustrar el problema se tomará una tasa de interés simple del 10% anual, con un capital inicial de $100 durante dos años, la pregunta sería ¿cuál es la tasa de interés asociada si lo pagos fueran semestrales?

Aplicando las fórmulas mostradas tenemos que el monto obtenido al final es de $120, entonces esto es:

$$K = 100 \cdot (1 + (.10 \cdot 2)) = 120$$

Tomando en cuenta que no cambian ni el capital inicial ni el lapso de tiempo, sólo la capitalización o pagos de interés, y como se quiere convertir la tasa anual a semestral, t cambia de 2 años a 4 semestres, por lo que lo único que hace falta es la tasa, para esto se toma la fórmula para obtener la tasa de interés aplicando la información proporcionada de lo que obtenemos:

$$i = \frac{120 - 100}{100 \cdot 4} = 0.05 = 5\%$$

Por lo tanto la tasa anual de interés simple del 10% equivale a una tasa de interés simple semestral del 5%.

Análogamente se puede proceder de la misma forma para cualquier periodo de capitalización.

De lo anterior se observa que existe una correspondencia entre los períodos de capitalización y la tasa de interés que se aplica, por lo que se debe tomar especial cuidado en que ambos conceptos deban ser homogéneos, es decir, si el periodo de capitalización es semestral, la tasa debe ser semestral.

De lo anterior se generaliza que:

$$K = C \cdot (1 + (i_p \cdot tp))$$

Donde i_p es la tasa de interés de periodo

tp es el tiempo del periodo

Si p = 1 la tasa de interés es anual

Si p = 2 es semestral

Si p = 4 es trimestral etc.

1.5 Interés compuesto

La diferencia esencial entre el interés compuesto y el simple reside en que el primero acumula los intereses para producir con ellos nuevos intereses, mientras que en el segundo no.

De lo anterior, se define como interés compuesto a aquel proceso mediante el cual los intereses se acumulan al capital para producir conjuntamente nuevos intereses al final de cada periodo de tiempo y así sucesivamente, por lo que tiene lugar la capitalización periódica de los intereses.

En la práctica se traduce en el acuerdo entre las partes para que al final de cada período los intereses producidos por un préstamo en lugar de liquidarse al prestamista se incorporen al capital para que la suma de ambos produzca más intereses en el período siguiente.

Los elementos fundamentales para el cálculo del interés compuesto son:

C = Capital inicial

n = número de períodos que dura la operación

i = Tipo de interés anual

K = Capital final. La suma del capital inicial más los intereses.

Al igual que en el interés simple el concepto de capital final es la suma del capital inicial más los intereses generados durante el periodo de vida de la operación financiera.

Esto es, para el primer periodo se tiene que el capital al final es:

$$K_1 = C + (C \cdot i) = C(1+i)$$

Como se reinvierten los intereses, el capital al final del segundo periodo es:

$$K_2 = K_1 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i) \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^2$$

De manera análoga el capital al final del tercer periodo:

$$K_3 = C \cdot (1+i) \cdot (1+i) \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^3$$

De este modo, al final de n años el capital final será:

$$K = C \cdot \underbrace{(1+i) \cdot (1+i) \cdot (1+i) \ldots (1+i)}_{\text{n años}} = C \cdot (1+i)^n$$

Por lo tanto la fórmula general para el interés compuesto es:

$$K = C \cdot (1+i)^n$$

Para ilustrar de mejor manera el uso de la fórmula anterior se mencionan los siguientes ejemplos:

1. Calcular el valor de la cancelación de un préstamo a 15 años de \$800,000 que tenemos concedido a un tipo de interés compuesto del 10% anual, entonces tenemos lo siguiente:

$K = 800{,}000 \cdot (1+.10)^{15} = 3{,}341{,}798.54$

2. Sea un monto final de $1,000,000 ¿cuál fue el capital inicial que lo produjo invertirlo al 8% de interés compuesto anual durante diez años?

   Despejando C tenemos que:

   $C = 1{,}000{,}000 \cdot (1+.08)^{-10} = 463{,}193.50$

3. ¿A qué tipo de interés compuesto anual fue invertido un capital de $500,000 pesos para convertirse en $625,000 al cabo de cinco años?

   Despejando i tenemos que:

   $i = \sqrt[5]{\frac{625{,}000}{500{,}000}} - 1 = 0.0456 = 4.56\%$

Para el caso de que se necesite conocer n cuando existen las demás variables, entonces si lo hacemos en forma generalizada se despejará n de la fórmula, teniendo por tanto:

$$\frac{K}{C} = (1+i)^n$$

Tomamos logaritmos para despejar al incógnita ya que está en la potencia.

$$Log(K) - Log(C) = n * Log(1+i)$$

Dando como resultado:

$$n = \frac{Log(K) - Log(C)}{Log(1+i)} \quad 1$$

1.5.1 Tipos de interés equivalentes en el interés compuesto.

Al igual que en el interés simple, los tipos equivalentes en el interés compuesto son aquellos que aplicados a un capital inicial determinado producen el mismo capital final durante el mismo intervalo de tiempo, aunque se refieran a diferentes períodos de capitalización.

Sin embargo los tipos de interés equivalentes en el interés compuesto no son proporcionales como en el interés simple, tal como se ilustrarán más adelante.

Con el fin de comparar bajo un mismo criterio inversiones realizadas con tasas y periodos de capitalización diferentes, se definen dos conceptos fundamentales:

- Tasa de interés efectiva:

  Es aquella tasa capitalizable generalmente de forma anual y que produce intereses en un año denominada i.

- Tasa de interés nominal:

  Es el valor resultante de multiplicar el número de periodos de tiempo comprendidos en un año por el valor de la tasa de interés efectiva asociada al mismo periodo de tiempo.

Si llamamos m a la frecuencia de capitalización o periodos de convertibilidad, es decir, el número de veces que durante un período de tiempo se capitalizan los intereses producidos.

De acuerdo a los conceptos mencionados anteriormente, se establece la siguiente relación entre dichas tasas:

$$(1+i)=(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{m}$$

Despejando i tenemos que la tasa efectiva es:

$$i = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m - 1$$

De lo anterior, si m = 2 el periodo de capitalización es semestral por lo que la tasa efectiva será semestral, análogamente si m = 4 la capitalización será trimestral por lo que la tasa efectiva también será trimestral.

1.6 El descuento compuesto

Para sustituir un capital futuro por otro con vencimiento presente utilizaremos la ley financiera del descuento compuesto que no es sino la operación inversa al interés compuesto.

Los elementos que debemos considerar para estas operaciones son los siguientes:

K = Flujo Nominal o monto al vencimiento.

C = Efectivo o capital al inicial.

DT = Descuento total, la diferencia entre el monto y el capital inicial.

n = El periodo de tiempo transcurrido entre el momento de efectivo y el vencimiento.

d = Tasa de descuento, es el tipo de interés anual que se aplica sobre el monto, en función del plazo de la operación, para obtener el capital o efectivo de la compra.

Si quisiéramos por ejemplo cobrar anticipadamente un capital cuyo vencimiento se fuera a producir dentro de un número determinado de años, la cantidad que recibiríamos sería el valor actual o valor presente del mismo, ya se obtenga éste por aplicación del tipo de interés i o ya por el descuento d.

En el caso de que aplicáramos el tipo de interés i, el descuento total obtenido se llamará descuento matemático real o racional y si aplicáramos el tanto de descuento del descuento total obtenido se llamará descuento comercial.

1.6.1 Descuento racional.

Llamamos así a los intereses que genera el efectivo desde su pago hasta el vencimiento del monto. Por lo tanto el cálculo de los intereses se hará en este caso sobre el capital.

El descuento total es la diferencia entre el monto y el capital.

DT = K – C

Dado que ya conocemos el valor de $K = C \cdot (1+i)^n$, si sustituimos nos queda:

$$DT = C \cdot (1+i)^n - C$$

$$DT = C \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]$$

El valor del descuento total es igual al del valor del interés total.

Análogamente, si lo que queremos es calcular el descuento total en función del monto K tenemos que:

$$DT = K * \left[1 - (1+i)^{-n}\right]$$

1.6.2 Descuento comercial

Llamamos descuento comercial a los intereses que genera el monto o capital nominal desde el momento de liquidación de efectivo hasta su propio vencimiento.

Por tanto, el cálculo de los intereses se hace sobre el nominal, es decir, si tenemos un capital nominal K al que se le aplica una tasa de descuento d, por lo que el valor actual C será por lo tanto:

En el primer año:

$$C = K(1-d)$$

En el segundo año:

$$C = K(1-d)(1-d) = K(1-d)^2$$

Análogamente para el año n tenemos en forma general que:

$$C = K(1-d)^n$$

Al igual que ocurre con el interés compuesto, también existe la tasa nominal de descuento, la cual tiene la siguiente relación con la tasa efectiva de descuento:

$$1-d = (1-\frac{d^{(m)}}{m})^m$$

Resultando que:

$$d = 1-(1-\frac{d^{(m)}}{m})^m$$

1.7 Cálculo de año financiero

En el medio financiero, se ha visto en alguna ocasión que los tipos de interés se expresan normalmente como tasas anuales, no obstante es necesario establecer criterios para definir un año a efectos de cálculo de intereses (año financiero), esto debido al impacto de tomar meses de 30 o 31 o 28 días, así como el hecho de que 12 meses de 30 días harían un año de 360 y en la realidad son de 365, aunque cada cuatro años existe uno de 366 días.

Para salvar este problema existen varios convenios o usos de mercado que denominaremos bases de cálculo, por lo que la duración de un año financiero no tiene por que ser la misma que la de un año natural, y además variará según el criterio empleado.

La base de cálculo viene definida por dos términos fundamentales a la hora de realizar operaciones financieras, por un lado el numerador indica el criterio que se emplea para calcular diferencia de días entre dos fechas, y por otro el denominador define el número de días que componen el año financiero.

- **BASE ACTUAL / 365**

Esta convención o base de cálculo considera que los años financieros son de 365 días naturales, por lo que cada día contribuye con un sumando igual a 1/365, la consecuencia inmediata es que el número de años entre dos fechas dadas es igual a la diferencia de días naturales entre ambas dividida por 365.

Ejemplo:

Para calcular el número de años entre el 10 de enero de 2006 y el 10 de Junio de 2006 se hace la siguiente operación:

151 / 365 = 0.4137

- **BASE ACTUAL / 360**

En esta base de cálculo se considera que los años financieros son de 360 días naturales y cada día contribuye con un sumando igual a 1/360, por lo que el número de años entre dos fechas dadas es igual a la diferencia de días naturales entre ambas dividida por 360.

Ejemplo:

Para calcular el número de años entre el 10 de enero de 2006 y el 10 de Junio de 2006 se hace lo siguiente:

151 / 360 = 0.4194

- **BASE 30 / 360**

Esta convención tiene la siguiente característica: considera que los años financieros están compuestos por 12 meses de 30 días cada uno, por lo que lo importante, independientemente de los días reales que tenga cada mes.

Ejemplo:

Para calcular el número de años entre el 10 de enero de 2006 y el 10 de Junio de 2006 se realiza la siguiente operación:

(20 + 30 + 30 + 30 + 30 + 10) / 360 = 0.4167

- **BASE 365 / 365**

Esta base de cálculo en especial, su particularidad reside en que considera que los años financieros son de 365 días pero eliminando el 29 de febrero cuando el año sea bisiesto, por lo que cada día contribuye con un sumando igual a 1/365, salvo el 29 de febrero que no contribuye en ningún caso.

- **BASE ACTUAL/ ACTUAL**

Para este cálculo si el año al que pertenece cada día es no bisiesto entonces contribuye como 1/365, en caso de que se diera la circunstancia de que sí pertenece a un año bisiesto contribuye como 1/366.

Ejemplo:

El número de años entre el 10 de enero de 2008 y el 10 de abril de 2008 será:

91 / 366 = 0.2486

En este orden de ideas, el número de años entre el 10 de Diciembre de 2007 y el 10 de enero de 2008 será de:

(21 / 365) + (10 / 366) = 0. 08486

1.8 Ecuación de valor

Anteriormente se han examinado los distintos elementos básicos que intervienen con cierto tipo de problemas que involucran el uso del capital y la retribución y/o interés asociado o con su utilización en el tiempo, no obstante, en el mundo financiero moderno, ocurren más y diferentes tipos de transacciones, por lo que es necesario desarrollar una metodología que nos ayude a definir, entender y resolver problemas de este tipo.

En este sentido, primero que nada es necesaria la identificación de los elementos que integran los problemas de interés:

- El valor de capital invertido, o solicitado.
- La tasa de interés asociada a la inversión.
- Y por último el valor del capital o monto ya sea pagar o recibir después de haber transcurrido un cierto periodo de tiempo previamente pactado.

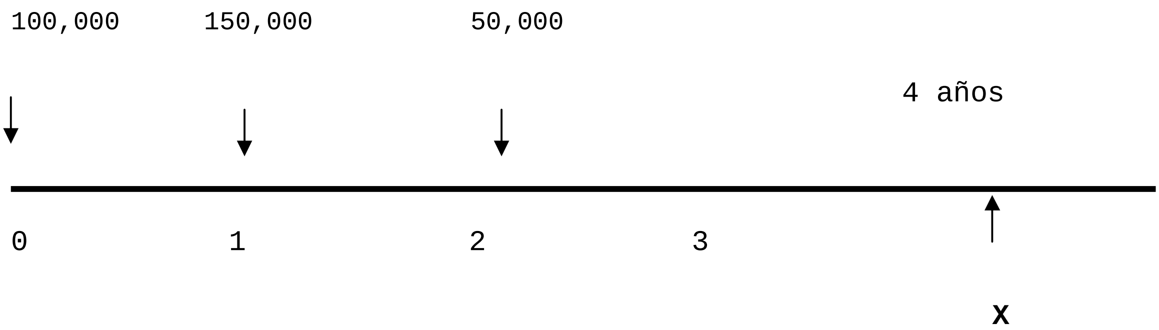
Una vez proporcionados dos de estos elementos, es posible determinar el valor del tercero, tal y como se puede observar en los ejemplos anteriormente señalados, sin embargo, existen problemas más complicados que involucran más de una suma de capital a diferentes plazos o periodos de tiempo.

Ejemplo:

Determinar la cantidad o monto que recibirá dentro de 4 años Alberto como beneficio de prestar a Enrique $100,000 en este momento, $150,000 dentro de 1 año y $50,000 dentro de 2 años, a una tasa del 4% efectiva anual

Es claro que a pesar de que ya se han definido las fórmulas a aplicar en esta operación, es necesario definir claramente el problema para poder "ocupar" de manera óptima las fórmulas desarrolladas anteriormente, por lo que para tener una mejor visión del problema se tratará de exponer en la siguiente *línea de tiempo*[1]:

Gráfica 1

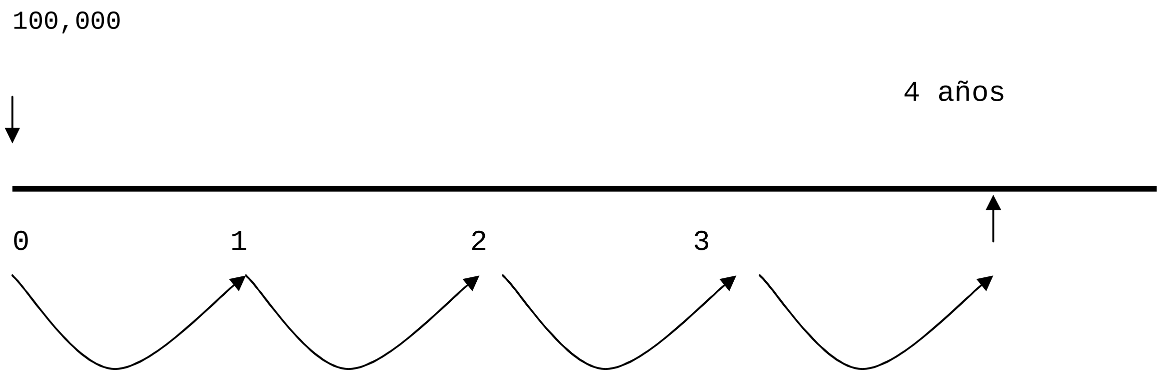


En primer lugar, se debe escoger el punto de valuación o selección del punto de tiempo para determinar la solución al problema, en este caso se escoge como punto el año 4 ya que es aquí donde se encuentra la incógnita solicitada.

[1] Es utilizada para una mejor visualización del problema.

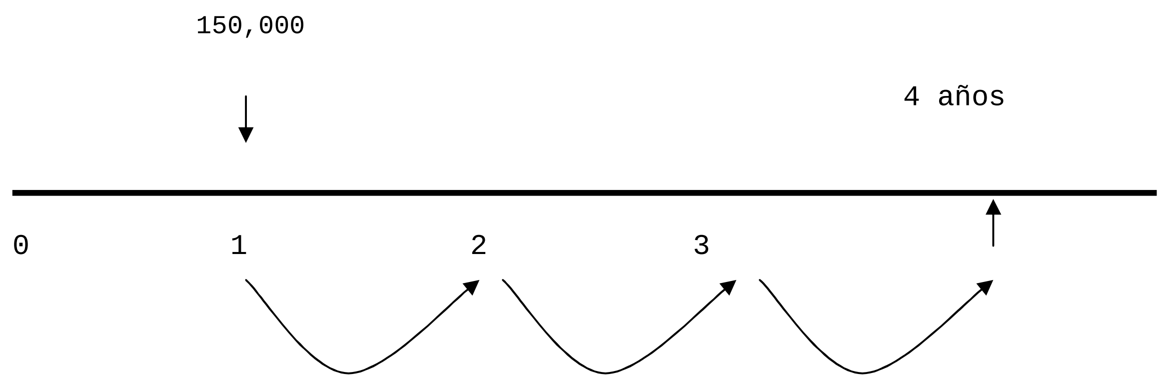
En este orden de ideas debemos utilizar los conceptos de las obligaciones y derechos de ambas partes, por un lado tenemos que el beneficio a pagar a Alberto al vencimiento se le denominará "**X**" por ser el valor buscado y por el otro, las cantidades que recibirá Enrique a lo largo de la transacción, esto es:

Gráfica 2



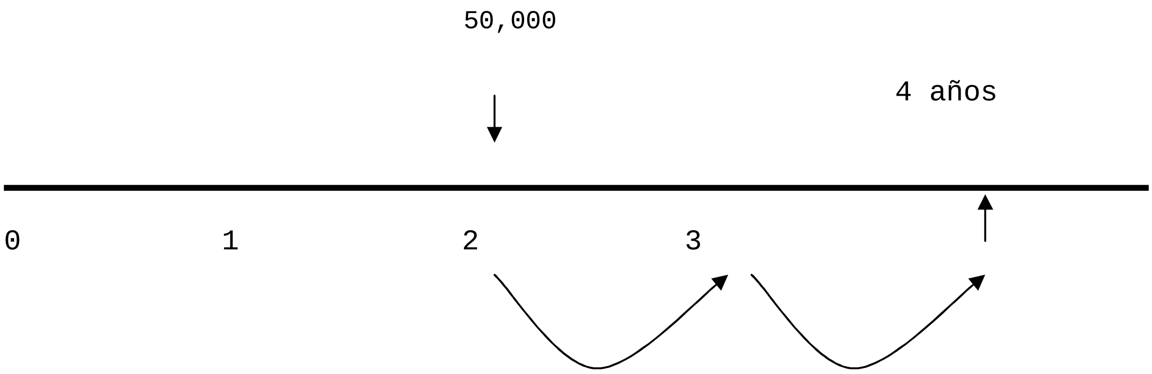
Esto es $K_1 = 100{,}000 \cdot (1.04)^4$

Gráfica 3



Esto es: $K_2 = 150{,}000 \cdot (1.04)^3$

Gráfica 4



Esto es: $K_3 = 50{,}000 \cdot (1.04)^2$

Por último, se realiza la igualdad entre los derechos y obligaciones de las partes, obteniendo la siguiente ecuación de valor y por lo tanto el resultado buscado:

$$X = 100{,}000 \cdot (1+.04)^4 + 150{,}000 \cdot (1+.04)^3 + 50{,}000 \cdot (1+.04)^2 = 339{,}795.46$$

En general, la ecuación de valor no es sino la identificación y planteamiento de soluciones para los problemas que involucran el pago de intereses, en otras palabras, es la interpretación y ordenación necesaria para determinar el cálculo de transacciones financieras en cierto plazo o periodo de tiempo, determinadas según lo establecen las obligaciones y derechos pactados en términos de uso y retribución de capitales.

2 CAPITULO

FUNDAMENTOS DE ANUALIDADES

2.1 Introducción

Cualquier persona tiene presente el concepto del término anualidad, ya que han ocupado por lo general algún tipo de ella, por ejemplo, al comprar una casa, una persona lo hace con dinero prestado que se compromete a liquidar mediante pagos durante un lapso que varía generalmente entre los 10 y 30 años, siendo por lo regular a pagos mensuales.

Calcular uno por uno el interés o el descuento entre los 120 o 360 pagos que se deben efectuar resulta muy laborioso, por lo que se desarrollaron fórmulas y tablas que convierten la solución de problemas que involucran a un número muy alto de pagos, algo tan sencillo como es el manejo de una cantidad única.

A las series de pagos mensuales equivalentes que la persona efectúa al comprar una casa se le denomina anualidad, otros ejemplos son: el pago de intereses sobre bonos, las primas de seguros, los pagos sobre gastos de instalación, los pagos mensuales por renta, el cobro quincenal o semanal de sueldos, abonos mensuales a una cuenta de crédito, el crédito de autos, los pagos anuales de primas de pólizas de seguro de vida, etc.

En general, todo conjunto de pagos de igual denominación, a efectuarse en iguales intervalos, constituye una anualidad[2]

En general como se describe anteriormente se denomina anualidad a un conjunto de pagos realizados a intervalos iguales de tiempo, conservando el nombre de anualidad, aunque no siempre se refieran a periodos anuales de pago.

---

[2] Hele Cissel, David C. Flaspohler, *Matemáticas Financieras* pp.177

2.2 Elementos de anualidades:

A continuación de definen algunos conceptos usuales en el uso de anualidades:

Intervalo o periodo de pago:

Tiempo que transcurre entre un pago y otro.

Plazo:

Tiempo que pasa entre el inicio del primer periodo de pago y el final del último.

Renta:

Es el nombre que se le da al pago periódico que se hace.

Tasa de interés:

Tasa asociada a la inversión, por lo regular es efectiva.

Fechas:

Fechas de inicio y término de la operación financiera.

2.3 Tipos de anualidades:

La variación de los elementos que intervienen en las anualidades hace que existan diferentes tipos de ellas, por lo que es conveniente clasificarlas de acuerdo con diversos criterios:

CRITERIO	TIPOS DE ANUALIDADES
a) Tiempo	Ciertas y contingentes
b) Intereses	Simples y generales
c) Pagos	Vencidas y anticipadas
d) Iniciación	Inmediatas y diferidas

Anualidad Cierta:

Se denomina así cuando la operación financiera establecida de antemano contempla fechas fijas, por ejemplo, al realizar una compra a crédito se fija tanto la fecha de pago de las rentas o pagos, el plazo a pagar y la tasa de interés.

Anualidad Contingente:

La anualidad es considerada de este tipo cuando la fecha del primer pago, la fecha del último pago, o ambas no se fijan de antemano; depende de algún hecho que se sabe que ocurrirá, pero no se sabe cuándo, y tiene asociada una probabilidad de ocurrencia del evento, un ejemplo de este tipo de anualidad son las rentas vitalicias que se otorgan a un cónyuge tras la muerte del otro, esto debido a que el inicio de la renta se da al morir el cónyuge y se sabe que éste morirá, pero se desconoce la fecha de ocurrencia.

Anualidad Simple:

Así se definen a las anualidades en las que el periodo de pago coincide con el de capitalización de los intereses, por ejemplo, el pago de una renta mensual “R” con intereses al 6% anual capitalizable o convertible mensualmente.

Anualidad General:

A diferencia de la anterior, el periodo de pago no coincide con el periodo de capitalización: el pago de una renta semestral con intereses del 12% anual capitalizable mensualmente.

Anualidad Vencida:

Conocida también con el nombre de anualidad ordinaria se trata de casos en los que los pagos se efectúan a su vencimiento, es decir, al final de cada periodo de pago.

Anualidad Anticipada:

Es aquella en la que los pagos o rentas se realizan al principio de cada periodo.

Anualidad Inmediata:

Es el caso más común. La realización de los cobros o pagos tiene lugar en el periodo que sigue inmediatamente a la formalización del trato, es decir, si hoy se compra a crédito un artículo que se va a pagar con mensualidades, el primer pago o cobro habrá de realizarse en ese momento o un mes después de adquirida la mercancía (anticipada o vencida).

Anualidad Diferida:

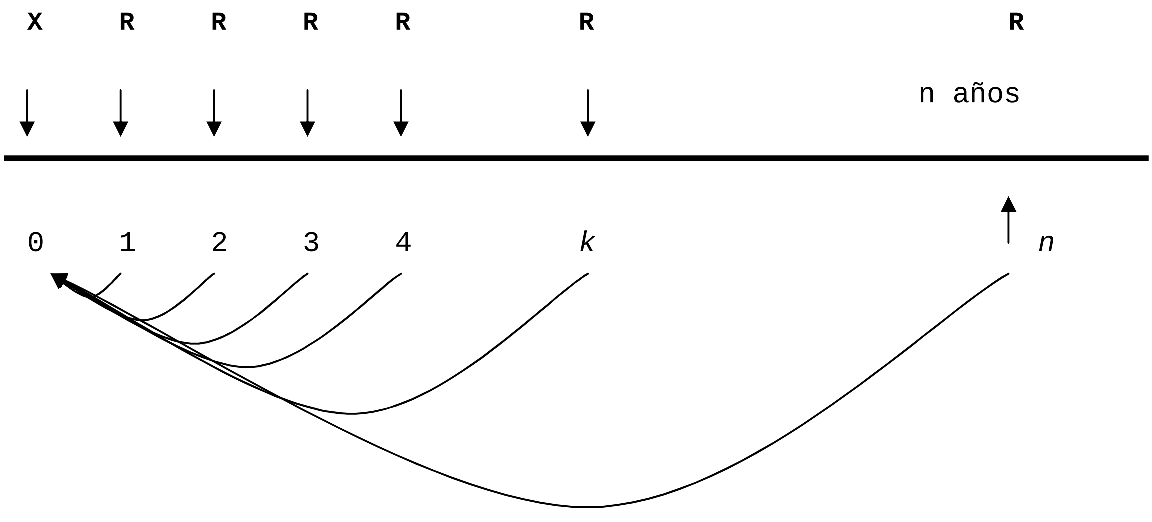
Es aquella anualidad en la que se pospone la realización de los cobros o pagos, esto es, si se adquiere hoy un artículo a crédito, para pagar con abonos mensuales, el primer pago habrá de hacerse 6 meses después de adquirida la mercancía.

De todos los tipos de anualidades, el más común en las transacciones financieras es de la combinación del tipo simples, ciertas, vencidas e inmediatas.

2.3.1 Valor presente o actual de una anualidad vencida

En este primer caso, se toma el punto de valuación al inicio de la transacción como se puede observar en la siguiente gráfica:

Gráfica 5



Por lo que nuestra ecuación de valor de la siguiente forma:

$$X = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + \ldots + R(1+i)^{-n}$$

Se define $v = (1+i)^{-1} = \frac{1}{(1+i)}$

Sustituyendo tenemos que:

$$X = Rv + Rv^2 + Rv^3 + \ldots + Rv^n$$

Entonces

$$X = R(v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n) = R\left[v\left(\frac{1-v^n}{1-v}\right)\right] = R\frac{(1-v^{n})}{i}$$

Sustituyendo $\frac{(1-v^{n})}{i}$ por el símbolo tradicional del valor presente de una anualidad se obtiene que:

$$X = R\frac{(1-v^{n})}{i} = R\ a_{\overline{n}|}$$

La fórmula anterior constituye el valor presente de una anualidad cierta, vencida, inmediata y simple con rentas anuales R, durante n años a la tasa de interés i.

2.3.2 Perpetuidades

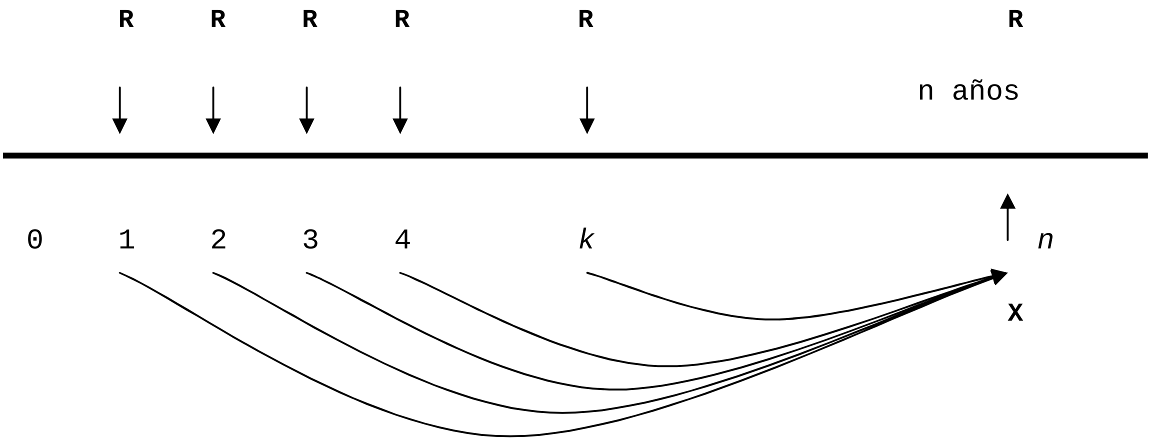
La perpetuidad es definida como la serie de pagos periódicos del mismo valor, cuya características es que dichos pagos no tienen una fecha de terminación determinada, es decir no se les fija límite de tiempo, por lo que la perpetuidad quedaría definida de la siguiente manera como ecuación de valor:

$$X = \frac{\lim}{n \to \infty} R\ a_{\overline{n}|} = \frac{\lim}{n \to \infty} R\frac{(1-v^n)}{i} = R\left[\frac{1}{i} - \cancelto{0}{\frac{v^n}{i}}\right] = \frac{R}{i}$$

2.3.3 Valor futuro o Monto de una anualidad vencida

Para este caso el punto de valuación es al final tal como se muestra en la siguiente línea de tiempo:

Gráfica 6



Por lo que nuestra ecuación de valor de la siguiente forma:

$$X = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3} + ... + R(1+i) + R$$

En virtud de que el primer miembro de la ecuación representa la suma de términos en progresión geométrica de razón (1+i), se tiene que:

$$X = R\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + ... + (1+i) + 1\right] = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Sustituyendo $\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$ por el símbolo tradicional del valor presente de una anualidad se obtiene que:

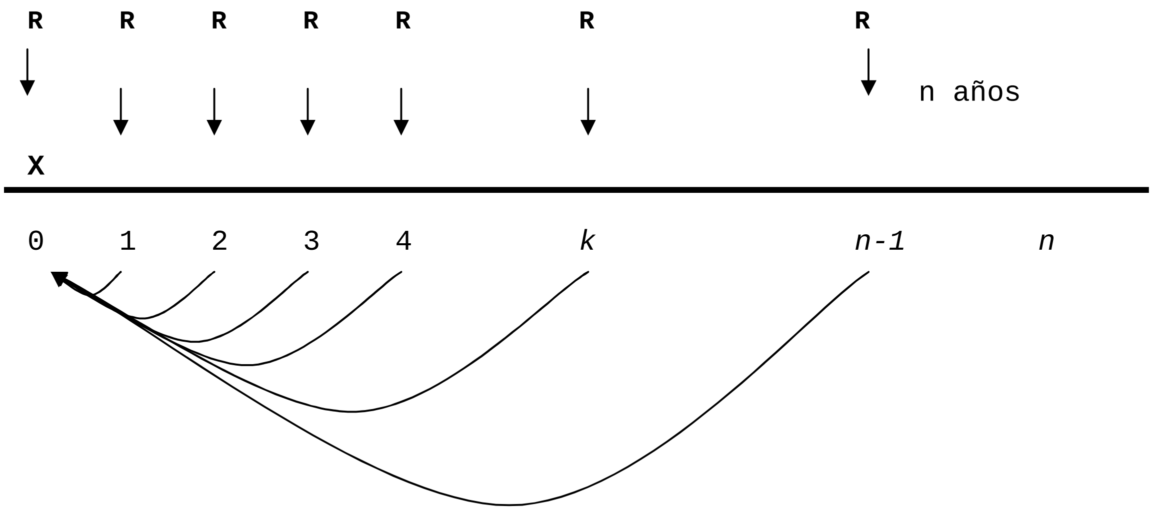
$$X = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = R\, s_{\overline{n|}}$$

Por lo que el resultado anterior representa el monto de una anualidad vencida, cierta, simple e inmediata con rentas anuales R, durante n años a la tasa de interés i.

2.3.4 Valor presente o Valor actual de una anualidad anticipada

Ahora, supongamos que los pagos son anticipados en lugar de vencidos, esto significa que se va a estar pagando al inicio de cada periodo, por lo que se tendría lo siguiente:

Gráfica 7



Por lo que nuestra ecuación de valor de la siguiente forma:

$$X = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + ... + R(1+i)^{-(n-1)}$$

Se define $v = (1+i)^{-1} = \dfrac{1}{(1+i)}$

Sustituyendo tenemos que:

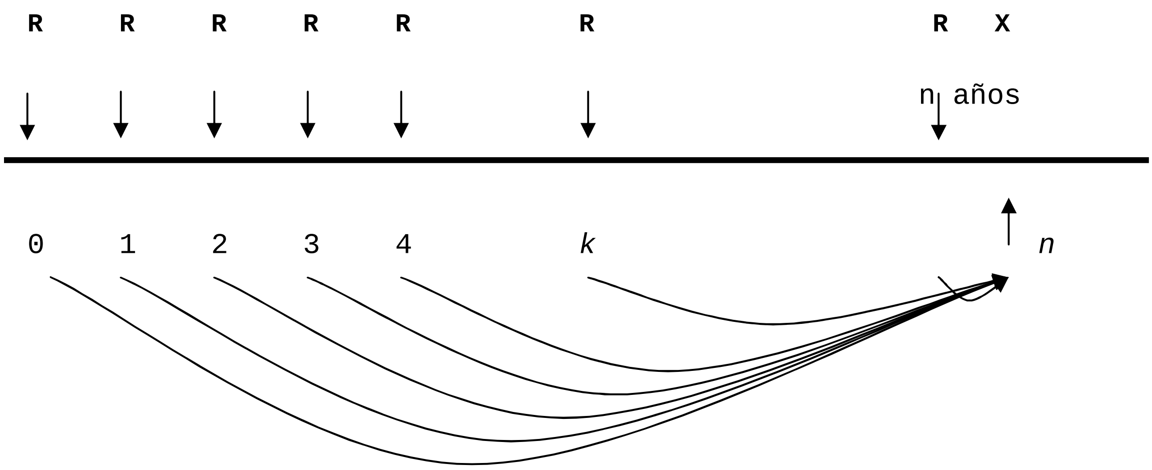
$$X = R + Rv + Rv^2 + Rv^3 + \ldots + Rv^{n-1} = \mathrm{R}(1+\mathrm{i})\, a_{\overline{n|}} = \mathrm{R}\, \ddot{a}_{\overline{n|}}$$

La fórmula anterior indica el valor presente de una anualidad anticipada, cierta, simple e inmediata con rentas anuales R, durante n años a la tasa de interés i.

2.3.5 Valor futuro o Monto de una anualidad anticipada

Análogamente tenemos que el monto para una anualidad anticipada según se describe en esta la siguiente gráfica:

Gráfica 8



Por lo que nuestra ecuación de valor de la siguiente forma:

$$X = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \ldots + R(1+i) = (1+i)\cdot R\left[R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \ldots + R\right]$$

Por lo que el monto de una anualidad anticipada, cierta, simple e inmediata es:

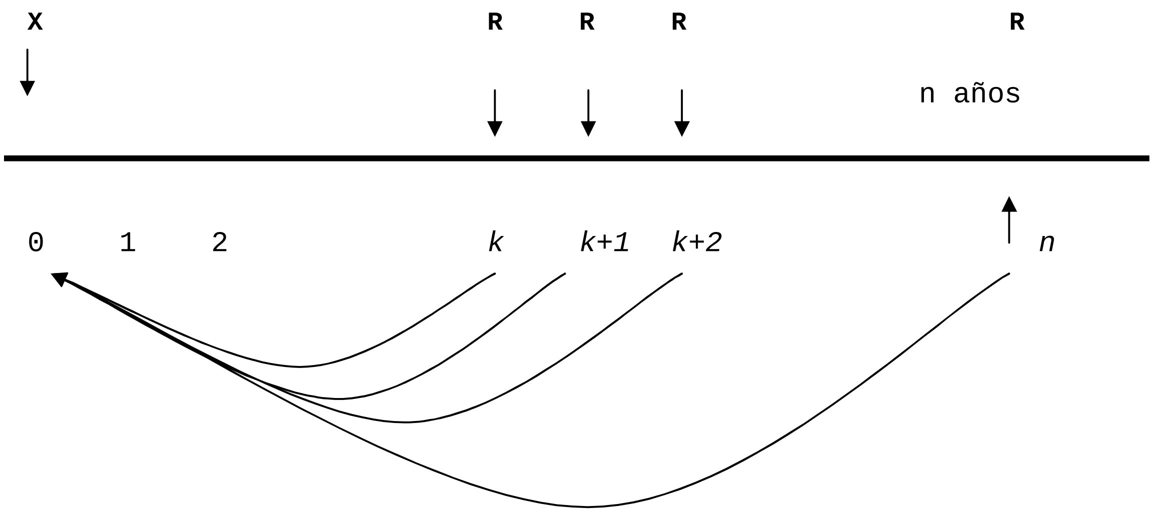
$$X = R(1+i)\, s_{\overline{n}|}$$

2.3.6 Valor presente o actual de una anualidad diferida

Se desarrollaron anteriormente las fórmulas de las anualidades de acuerdo al criterio de pago, sin embargo, si las analizamos desde el punto de vista de su iniciación, se trataron de anualidades inmediatas, por lo que a continuación se desarrollará el valor presente de una anualidad diferida.

En primer lugar, se toma el punto de valuación al inicio de la transacción de acuerdo a la siguiente gráfica:

Gráfica 9



De acuerdo a la gráfica tenemos que el primer pago va a generarse hasta el año k, por lo que la ecuación de valor resultaría de la siguiente forma:

$$X = R(1+i)^{-k} + R(1+i)^{-(k+1)} + R(1+i)^{-(k+2)} + \ldots + R(1+i)^{-n}$$

Factorizando $(1+i)^{1-k} = \dfrac{1}{(1+i)^{k-1}} = v^{k-1}$ tenemos que:

$$X = v^{k-1}\left(Rv + Rv^2 + ... + Rv^{n-(k-1)}\right)$$

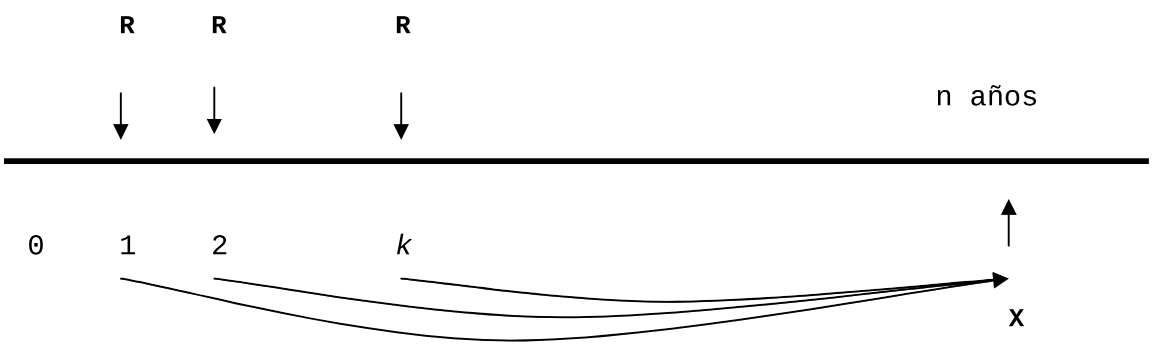
$$X = v^{k-1} \cdot R(v + v^2 + v^3 + ... + v^{n-k+1}) = v^{k-1} \cdot R\frac{(1-v^{n-k+1})}{i} = v^{k-1} \cdot R\ a_{\overline{n-k+1}|i}$$

Lo que constituye el valor presente de una anualidad cierta, vencida, simple y diferida k años, con rentas anuales R, durante n años a la tasa de interés i.

2.3.7 Anualidad con pago de intereses futuros

En este caso, el primer pago se realiza en el primer año hasta el año k y el punto de valuación es al final de la transacción, tal como se muestra en la siguiente línea de tiempo:

Gráfica 10



De acuerdo a la gráfica anterior, se ilustra que hasta el año k se mandan todos los pagos al año n, obteniendo la siguiente ecuación de valor:

$$X = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + ... + R(1+i)^{n-k}$$

Del resultado anterior factorizamos $(1+i)^{n-k}$, esto es, en este caso es mejor acumular los pagos en el año k y posteriormente sacar el valor futuro a partir de ese punto de acumulación, es decir:

$$X = (1+i)^{n-k} \cdot \left[R(1+i)^{k-1} + R(1+i)^{k-2} + \ldots + R\right]$$

Lo que nos da como resultado lo siguiente:

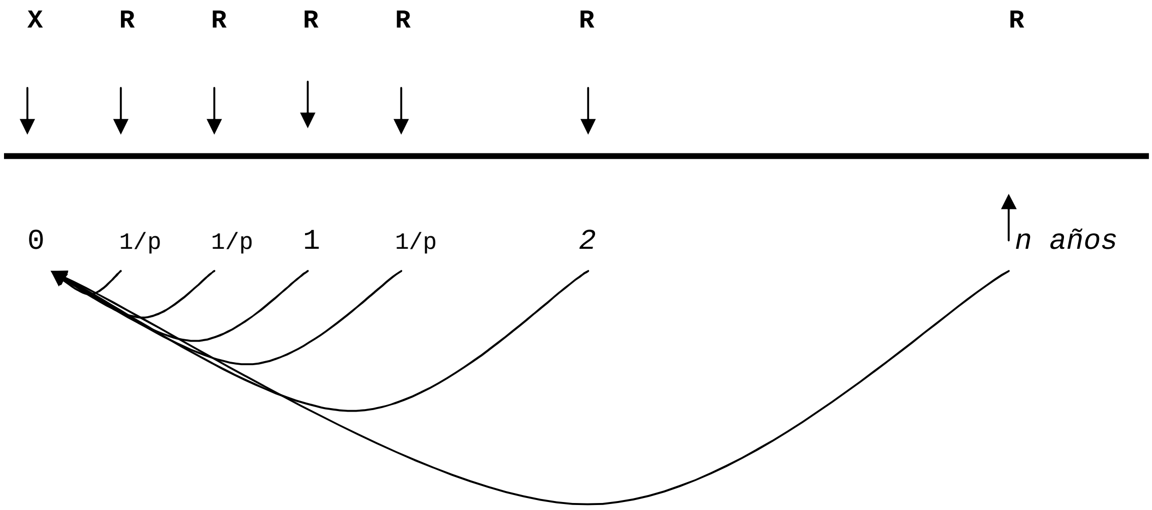
$$X = (1+i)^{n-k} \cdot R\; s_{\overline{k}|}$$

2.3.8 Anualidades generales

Ya se ha visto hasta el momento el desarrollo de fórmulas cuando los pagos son anuales, es decir hemos visto y utilizado en cuanto al criterio de intereses los que se nombran las anualidades simples, sin embargo, en la vida real no existen exclusivamente pagos anuales y tasas de interés también anuales, sino que se presentan una variedad de combinaciones tanto en la periodicidad de los pagos como en los periodos de convertibilidad de la tasa de interés asociada a la operación, razón por la que es necesario generalizar todas esas combinaciones posibles y asociar a la tasa de interés efectiva a la periodicidad de pagos a realizar por la anualidad.

Supongamos que queremos calcular el valor presente de una anualidad vencida, la cual consiste en una serie de pagos o rentas R que se realizan p veces al año durante n años, a una tasa nominal convertible m veces al año, en la siguiente gráfica se tratará de ilustrar lo anterior:

Gráfica 11



Se observa que 1/p es el resultado de dividir cada año entre el número de pagos a realizar durante este, es decir, el pago periódico, además como dicha transacción tiene asociada una tasa de interés pagadera m veces al año $\frac{i^{(m)}}{m}$, es necesario convertir dicha tasa en una tasa efectiva i_p a la periodicidad de pago, lo que significa que:

$$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{m} = (1+i) = (1+i_p)^{p}$$

De donde obtenemos que $i_p = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^{m/p} - 1$ y se considera como la tasa efectiva aplicable a cada intervalo 1/p.

De esta manera tenemos que la ecuación de valor queda de la siguiente forma:

$$X = R(1+i_p)^{-1} + R(1+i_p)^{-2} + R(1+i_p)^{-3} + ... + R(1+i_p)^{-np}$$

Se define $v_p = (1+i_p)^{-1} = \frac{1}{(1+i_p)}$

$$X = R(v_p + v_p^2 + v_p^3 + \ldots + v_p^{np}) = R\, a_{\overline{np}|i_p}$$

Por lo que se obtiene la fórmula para el cálculo del valor presente de las anualidades generales; de igual manera y en forma análoga se puede se puede obtener la fórmula para el monto.

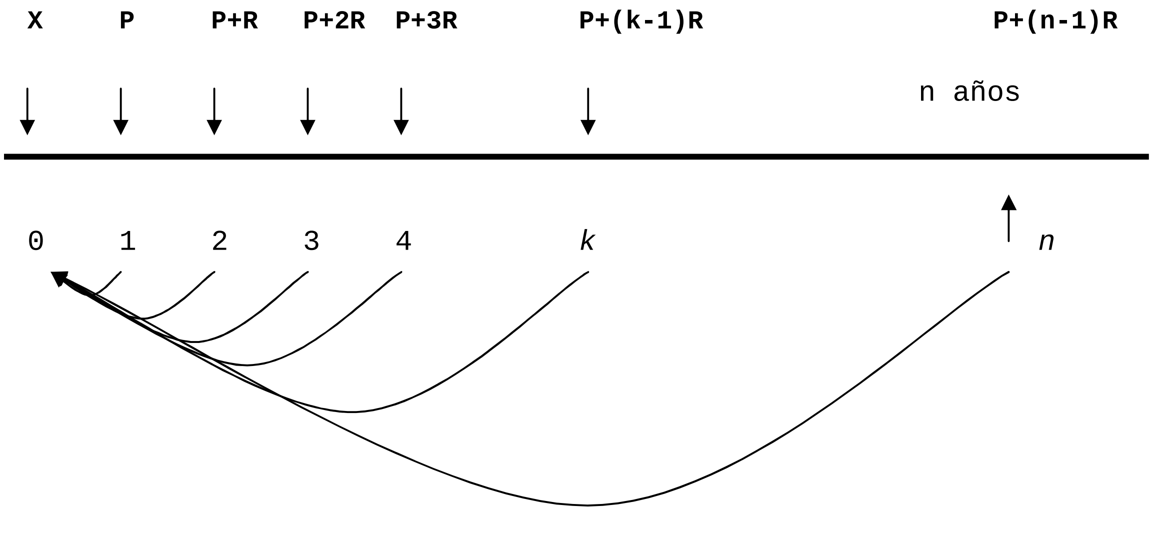
2.3.9 Anualidades variables

Hasta ahora las anualidades realizadas han sido con pagos que se mantienen constantes durante el periodo de la transacción, sin embargo existen casos en los que no es así, los casos más comunes son la variación de pagos con progresión aritmética por y geométrica mencionados a continuación.

2.3.9.1 Valor presente de anualidades con variación de pagos en progresión aritmética

Continuando con la mecánica hasta ahora empleada, la gráfica siguiente muestra de forma general los pagos en la línea de tiempo.

Gráfica 12



La ecuación de valor asociada a la gráfica anterior es

$$X = vP + v^2(P+R) + v^3(P+2R) + ... + v^{(n-1)}(P+(n-2)R) + v^n(P+(n-1)R) \quad \textbf{(1)}$$

Multiplicando por (1+i) la ecuación anterior se genera

$$(1+i)X = P + v(P+R) + v^2(P+2R) + ... + v^{(n-2)}(P+(n-2)R) + v^{(n-1)}(P+(n-1)R)$$

Restando (1) a la expresión anterior

$$iX = P + vR + v^2R + ... + v^{(n-2)}R + v^{(n-1)}R - v^nP - nv^nR$$

Despejando X y asociando términos tenemos

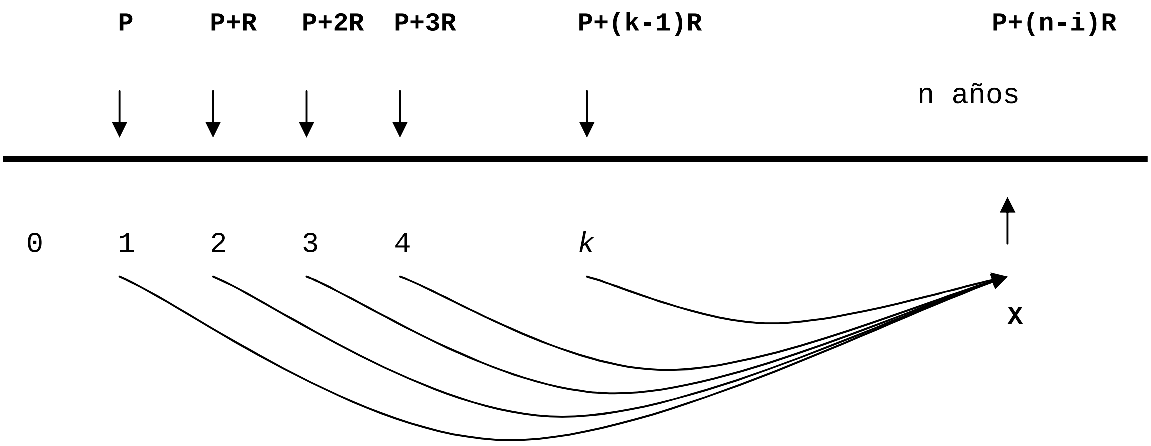
$$X = \frac{P - v^nP + R(v + v^2 + ... + v^{(n-2)} + v^{(n-1)}) - nv^nR}{i}$$

Resultando: $X = P\frac{(1-v^n)}{i} + R\frac{a_{\overline{n}|i} - nv^n}{i} = Pa_{\overline{n}|i} + R\frac{a_{\overline{n}|i} - nv^n}{i} = (Ia)_{\overline{n}|i}$

2.3.9.2 Monto de anualidades con variación de pagos en progresión aritmética

Al igual que en el ejercicio anterior se muestra la acumulación de los pagos a realizar por este tipo de anualidad.

Gráfica 13



La ecuación de valor asociada a la gráfica anterior es

$$X = (1+i)^{(n-1)}P + (1+i)^{(n-2)}(P+R) + \ldots + (1+i)(P+(n-2)R) + (P+(n-1)R) \quad \textbf{(2)}$$

Análogamente al valor presente, multiplicando por (1+i) la ecuación anterior se genera

$$(1+i)X = (1+i)^{n}P + (1+i)^{n-1}(P+R) + \ldots + (1+i)^{2}(P+(n-2)R) + (1+i)(P+(n-1)R)$$

Restando (2) a la expresión anterior tenemos

$$iX = P(1+i)^{n} - 1 + R\left[((1+i)^{(n-1)} + (1+i)^{(n-2)} + \ldots + 1\right] - nR$$

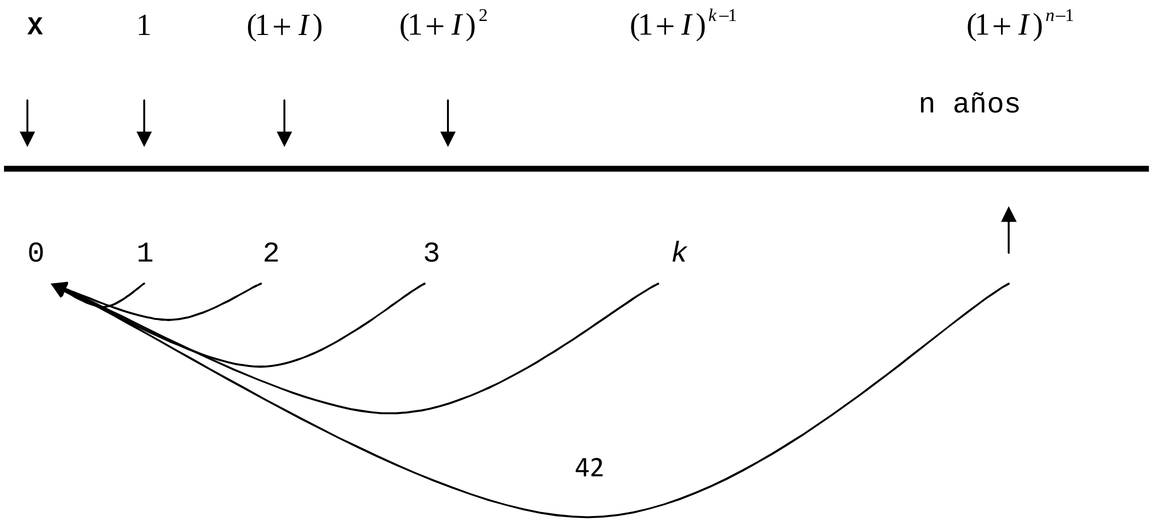
Despejando X y asociando términos llegamos al resultado

$$X = P\frac{((1+i)^{n}-1)}{i} + R\frac{S_{\overline{n}|i} - n}{i} = PS_{\overline{n}|i} + R\frac{S_{\overline{n}|i} - n}{i} = (IS)_{\overline{n}|i}$$

2.3.9.3 Valor presente de anualidades con variación de pagos en progresión geométrica

En la siguiente ilustración se muestra como se traerán los pagos a valor presente de los pagos periódicos variables.

Gráfica 14



En este caso se tiene

$$X = v + v^2(1+I) + v^3(1+I)^2 + \ldots + v^{n-1}(1+I)^{n-2} + v^n(1+I)^{n-1}$$

Factorizando resulta

$$X = \frac{1}{(1+i)}\left[1 + \frac{1+I}{1+i} + \left(\frac{1+I}{1+i}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1+I}{1+i}\right)^{n-1}\right]$$

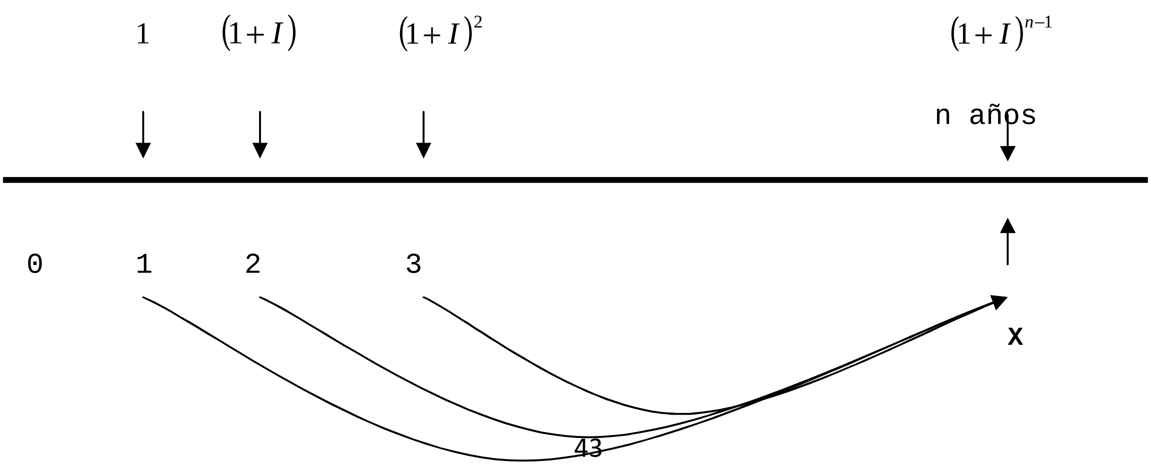
Luego entonces se obtiene el siguiente resultado

$$X = v\frac{\left(1-\frac{(1+I)^n}{(1+i)^n}\right)}{\left(1-\frac{(1+I)}{(1+i)}\right)} = \frac{\left(1-\frac{(1+I)^n}{(1+i)^n}\right)}{(i-I)} = (Ia)_{\overline{n|}\,i,I}$$

2.3.9.4 Monto de anualidades con variación de pagos en progresión aritmética

Si acumulamos los pagos al final del periodo se tendría lo siguiente

Gráfica 15



Por lo que la ecuación de valor asociada a la gráfica anterior es

$$X=(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}(1+I)+...+(1+i)(1+I)^{n-2}+(1+I)^{n-1}$$

$$X=\frac{(1+i)^n-(1+I)^n}{(1+i)+(1+I)}=\frac{(1+i)^n-(1+I)^n}{i-I}=(IS)_{\overline{n|}i,I}$$

2.3.10 Anualidades contingentes

Hasta ahora se han desarrollado fórmulas de las distintas combinaciones de anualidades ciertas, no obstante, existen otras anualidades denominadas contingentes, que son aplicadas a un conjunto de problemas asociados principalmente a la industria del seguro que incorporan algún elemento aleatorio que conlleva una cierta probabilidad de ocurrencia, determinada por la aplicación de las tablas de mortalidad.

Para la anualidad contingente, la diferencia está en que el número de pagos de las rentas dependerá de eventos probabilísticos, es decir, dependerán de que una persona al adquirir esta anualidad continúe o no con vida dentro de los plazos convenidos, ya sea a cierto número de años o quizá a la supervivencia de dicha persona, transformándose dichos pagos en una variable aleatoria.

Debido a las múltiples aplicaciones y variaciones de las anualidades contingentes, su profundo estudio fundamenta y genera le materia del cálculo actuarial, por lo que sólo se ilustrarán algunos ejemplos generales de este tipo de anualidades.

Para ilustrar claramente este tipo de anualidades es necesario tener en cuenta los siguientes conceptos o notación básica definida por el cálculo actuarial:

$l_x =$ Número de vivos a edad x

$l_{x+n} =$ Numero de vivos a edad x+n

$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ Probabilidad de que una persona de edad x alcance la edad x+1

También se definen los siguientes conceptos denominados valores conmutados: $D_X = v_i^n l_x$ y $N_X = \sum_{t=0} D_{x+t}$

Tomando en cuenta lo anterior, se ejemplificarán únicamente dos casos de este tipo de anualidades:

2.3.10.1 Valor presente de una Anualidad Vitalicia

Se le denomina así al tipo de anualidad que realiza como consecuencia de la ocurrencia de un evento determinado, dichas rentas serán pagadas mientras la persona contratante permanezca con vida, independientemente de cualquier plazo.

En general este tipo de rentas se pagan al principio de cada año o del periodo contratado, es decir de manera anticipada.

Para ilustrar lo anterior, supongamos el caso de una anualidad que corresponde al pago de $1 al principio de cada año, a cada una de las personas de edad x integrantes de un grupo asociado a una cierta tabla de mortalidad, mientras éstas permanezcan con vida y suponiendo que la inversión de los fondos remanentes denominados reservas tienen una tasa de interés efectiva i.

De acuerdo a una definición descrita anteriormente, se conoce que l_x denota a la población del grupo a edad x, además de que dicho grupo está asociado a determinada tasa de mortalidad cuyo último valor contenido será la edad w.

De lo anterior se puede expresar la siguiente ecuación de valor, correspondiente entre las obligaciones del comprador y las del emisor:

$$\ddot{a}_x \, l_x = l_x + v_i l_{x+1} + v_i^2 l_{x+2} + \ldots + v_i^k l_{x+k} + \ldots + v_i^{w-x} l_w$$

Lo que significa que el valor presente de la anualidad vitalicia con pagos anticipados, es decir, el valor presente que corresponde pagar de manera individual a cada una de las personas que componen el grupo se denota como:

$$\ddot{a}_x = \frac{l_x + v_i l_{x+1} + v_i^2 l_{x+2} + \ldots + v_i^k l_{x+k} + \ldots + v_i^{w-x} l_w}{l_x}$$

De igual manera utilizando los valores conmutados antes descritos de obtiene que

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

2.3.10.2 Valor presente de una Anualidad Temporal

De manera análoga, se puede determinar el valor presente de una anualidad temporal pagadera durante n años, emitida a edad x y asociada a una tasa efectiva i, la cual consiste en que las rentas se pagarán hasta el número de máximo de años que defina el plazo contratado, siempre que la persona permanezca con vida en dicho plazo.

Por lo que la ecuación que corresponde es:

$$ä_{\overline{x:n|}} = \frac{l_x + v_i l_{x+1} + v_i^2 l_{x+2} + ... + v_i^k l_{x+k} + ... + v_i^{n-1} l_{x+n-1}}{l_x}$$

Utilizando valores conmutados tendríamos:

$$ä_{\overline{x:n|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Para finalizar este capítulo es importante destacar que en los ejemplos de anualidades vitalicias se está considerando que todas las personas de edad x tal y como se define en la tabla de mortalidad contratan la anualidad, lo cual no es completamente cierto, de aquí que en la industria del seguro se formen grandes grupos de asegurados para cubrir con las hipótesis de cálculo y evitar desviaciones estadísticas en la medida de lo posible.

3 CAPITULO

Inflación y Tasa Real, definiciones y conceptos.

3.1 Concepto de Inflación

Se presenta de manera general el fenómeno denominado inflación como el desequilibrio económico caracterizado por la subida general de precios y que proviene del aumento del papel moneda, deterioro y mal manejo de la economía de un país, trayendo como consecuencia desajustes en los contratos de trabajos, préstamos, etc.

Para los economistas la inflación, es el aumento progresivo, constante generalizado de los precios teniendo como base un aumento anterior, un aumento genera a otro aumento esto es lo que se denomina "la espiral inflacionaria".

El concepto de inflación es de difícil interpretación como un síntoma del estado de deterioro de la economía del país, de una mala política económica, del desequilibrio económico del país.

La inflación no es otra cosa sino el crecimiento continuo y generalizado de los precios de los bienes y servicios existentes en una economía, crecimiento medido y observado mediante la evolución de algún índice de precios.

Otras definiciones la explican como el movimiento persistente al alza del nivel general de precios o disminución del poder adquisitivo del dinero.

A continuación se expondrán sus orígenes, causas, consecuencias, efectos, y medición de la inflación.

3.1.1 El origen de la inflación.

La inflación surge cuando las empresas elevan los precios en respuesta a las demandas sistemáticas de las economías domésticas de más bienes de los que pueden producirse.

Analizando la relación entre la demanda y la producción: Cuando la demanda planeada es superior a la producción, tiene lugar una reducción no deseada de los inventarios, lo que estimula a las empresas a incrementar la producción, ahora si suponemos que las empresas están produciendo una cantidad suficiente, de tal modo que todo el que desea trabajar lo está haciendo, es decir, que la economía ha alcanzado su nivel de producción óptimo o ingreso de pleno empleo, esto tiene como consecuencia que los consumidores piensen que les gustaría consumir más que antes, decidiendo incrementar su demanda de bienes y servicios, sin embargo, las empresas se enfrentarían a una seria dificultad, que ya no podrán producir más, pues todos los recursos de la economía están plenamente empleados.

Imaginemos que estuviéramos en el modelo de precios fijos, en el cual el precio no cambia, la única solución sería comunicar a los consumidores que no pueden atender sus deseos de incrementar la demanda, es decir, las empresas tendrían que colocar el letrero de "no hay inventarios", poner a sus clientes en listas de espera y racionar los productos disponibles.

En la realidad, cuando tiene lugar un incremento de la demanda de forma simultánea a la reducción de los inventarios disponibles, se observa una elevación de los precios, de esta forma surge la inflación como una reacción normal de los mercados cuando aparece un exceso de demanda generalizado en todos ellos.

3.1.2 Causas de la inflación

La inflación, como fenómeno económico tiene causas y efectos, la definición de sus causas no es una cuestión sencilla debido a que un aumento generalizado de los precios suele convertirse en un complejo mecanismo circular, del cuál no resulta sencillo determinar los factores que impulsan al incremento de los precios, esta dificultad para determinar las causas de la inflación, ha sido el motor que impulsó a diversos teóricos a ensayar diferentes explicaciones sobre los procesos inflacionarios.

Las teorías explicativas suelen agruparse en tres categorías:

Por una parte, están las que consideran como explicación de la inflación un exceso de demanda agregada, o sea inflación de demanda, es decir, se puede producir por el uso interno de la reserva monetaria del país (Cantidad de dinero que se tiene guardado en los bancos ya sea el estado o particulares), ese uso interno puede ser: por gastos de consumo, aumento de gasto de inversión.

Por otra parte, se encuentran aquellos que apuntan a la oferta agregada como disparadora del proceso inflacionario, esto es lo que se denomina inflación de costos, es decir, por elevación en los costos de producción: ocurre por un aumento de salario, por decreto oficial tratando de calmar el desespero de la gente, aumenta la producción.

Por último, existe un grupo de teóricos que entienden a la inflación como el resultado de la rigidez social, esto es lo que se denomina inflación estructural, un clásico ejemplo de este tipo, es la inflación de guerra: un país puede estar bien económicamente y de repente se presentan conflictos bélicos o guerras, cuando se ve envuelto en un conflictos tiene que desviar su producción hacia los armamentos, proyectiles etc., para defender el país, tomando los recursos que se tienen destinados al salario, a la educación, a la producción, etc., en ese entorno, el gobierno no puede crear impuestos para ello por lo que todo está destinado para la generación de material bélico.

Para conocer las causas de la inflación, tienen que tomarse en cuenta del país de que se trate, ya que no son las mismas causas de un país a otro.

3.1.3 Consecuencias de la inflación

Dentro del proceso inflacionario, un empuje inflacionario origina otro y así sucesivamente: el proceso inflacionario, la inflación en sí es una consecuencia, un sistema del desajuste económico del país, una vez que se inicia es difícil remediarla.

La principal consecuencia de la inflación son las injusticias en el reparto desigual de la riqueza: cuando hay inflación, los que no tienen, tienen menos y los que tienen, tienen más, ganan unos y pierden otros.

Salen ganando:

- *Los deudores*: Por la devaluación del dinero se endeudaron cuando la moneda tenía un valor adquisitivo que no es lo mismo después de cierto tiempo.

- *Los vendedores*: La inflación hace subir los precios, razón por la que se revalorizan los inventarios, es decir, salen ganando ya que la inflación hace subir los precios y revaloriza las mercancías.

Salen perdiendo:

- *Los acreedores*: Por que prestaron dineros que valía en un tiempo pero cuando regresan el dinero ya no es lo mismo, reciben dinero con bajo poder adquisitivo.

- *Los compradores*: Por el alza de los precios.

- *Mecanismos productivos*: Es el proceso a través del cual nacen los productos que se van a poner en el mercado ya que estimulan importaciones y frenan exportaciones.

3.1.4 Efectos de la inflación

Los efectos de la inflación dependen en cierta medida según ésta pueda ser prevista o sea sorpresiva, cualquiera que sea la forma que tome la inflación, acarrea costos y mientras mayor sea la tasa de variación de los precios, mayores serán los costos.

El proceso inflacionario implica, para los comerciantes, costos reales para actualizar los precios, el incremento continuo del nivel general de precios tiene efectos redistributivos, y para los asalariados y todos aquellos que dependan de ingresos nominales fijos, verán disminuir sus ingresos reales.

Según estudios, la inflación también ocasiona costos para el fisco debido al retardo que existe entre el momento en que se realizan los gastos y el cobro de los impuestos.

En resumen, la inflación tiene costos reales que dependen de dos factores: de que la inflación sea esperada o no y de que la economía haya ajustado sus instituciones (incorporando la inflación a los contratos de trabajos y prestamos de capital y revisando los efectos del sistema fiscal ante una situación inflacionaria) para hacerle frente.

3.1.4.1 La inflación esperada o anticipada:

Cuando la inflación es esperada y las instituciones se han adaptado para compensar sus efectos se tienen las siguientes características:

- Los individuos tratarán de minimizar dicha pérdida reduciendo sus saldos medios de dinero.
- Se asignará mayor parte de la riqueza al consumo de bienes durables, como medio de protección contra el impuesto inflacionario.
- El proceso de actualización de los precios nominales implica costos reales asociados a las erogaciones que deben realizar los comerciantes en el proceso de demarcación.
- La inflación puede generar distorsiones en la presión tributaria, esto es, suponiendo que los tramos de impuesto a los ingresos se fijan en términos nominales, con el paso del tiempo los ingresos nominales se incrementarán, y la gente se desplazará a tramos tributarios más altos, incrementándose así su tasa tributaria marginal, de esta forma, una persona cuyo ingreso real antes de impuestos es constante sufrirá un incremento gradual en sus obligaciones tributarias y la pérdida consiguiente de ingreso disponible, debido simplemente a la inflación, esto debido a que

mientras mayor sea la variación en los precios, mayores serán los costos implicados.

- La inflación también implica costos para el Estado, ya que quebranta el valor de los tributos que recauda, debido a que existe un lapso de tiempo entre el momento en que se produce el gasto del Estado y el momento en que se recaudan los impuestos para cubrir dichas erogaciones.

En muchos países, durante este tiempo de rezago, no existe ningún mecanismo para mantener el valor real de la obligación tributaria, a este fenómeno se conoce como el *efecto Oliver-Tanzi*, que puede llevar a un círculo vicioso que puede verse en el incremento del déficit fiscal traducido en un aumento en la inflación, que a su vez, reduce los ingresos tributarios, y a menores ingresos tributarios, se incrementa aún más el déficit fiscal y así sucesivamente.

3.1.4.2 La inflación imprevista:

Los efectos de la inflación imprevista, sorpresiva o no anticipada, sobre el sistema económico se pueden clasificar en dos grandes grupos cuyas características se mencionarán a continuación:

Efectos sobre la distribución del ingreso y la riqueza.

Son los más visibles y más frecuentes destacados, la inflación perjudica a aquellos individuos que reciben ingresos fijos en términos nominales y, en general, a los que reciben ingresos crecen menos que la inflación.

Con las sorpresas en las tasas de inflación conducen a desplazamientos del ingreso y la riqueza entre diferentes grupos de la población, debido a que durante un proceso inflacionario, los deudores se verán beneficiados a costa de los acreedores, ya que la inflación mina las tasas reales de interés.

Dependiendo del grado de aumento en los precios las tasas reales de interés pueden volverse negativas, lo que termina favoreciendo claramente a los sujetos que tomaron préstamos.

En general, todos los poseedores de activos financieros que tengan una tasa de rendimiento nominal fija, sufrirán una pérdida ante aumentos en la tasa de inflación, para evitar el desgaste que sufren estos activos frente al aumento en los precios, se han desarrollado instrumentos indexados, que se comprometen a pagar una tasa de interés real o, dicho de otra manera, ajustan la tasa de interés nominal que pagan por un índice que evita la pérdida de valor provocada por el aumento en los precios.

Los efectos redistributivos de la inflación inesperada también se manifiestan dentro del sector familias, aquellos propietarios de viviendas hipotecadas resultarán beneficiados al ver que la cuota de su hipoteca disminuye en términos reales, por otro lado las personas mayores, mantienen más saldos nominales que las más jóvenes, por este motivo un proceso inflacionario redistribuye ingresos a favor de los individuos de menor edad.

De igual tienen este tipo de efectos los sectores asalariados, esto es, el aumento en los precios reduce el salario real de los trabajadores contratados, aun cuando los contratos laborales incluyan cláusulas de ajuste, la efectividad de estás para evitar la pérdida de los ingresos de los trabajadores, se ve reducida ya que los contratos se revisan esporádicamente, mientras que el aumento en los precios es un proceso continuo.

De esta manera los ajustes en los contratos sólo logran mejorar por cierto tiempo el salario real, a medida que la inflación sigue su curso ascendente, los salarios reales vuelven a caer, así, el proceso inflacionario no solo disminuye el salario real sino que también afecta su variabilidad.

Efectos sobre la asignación de los recursos productivos.

La inflación tiene también efectos sobre la actividad económica, ya que todo proceso inflacionario implica una alteración de la estructura de precios absolutos aumentan por igual, dado que los precios relativos son las señales que guían el funcionamiento del mercado, una alteración de su estructura implica una distorsión en la asignación de los recursos al verse dificultada la información.

En este entorno, la inflación deforma la definición de la renta utilizada a efectos fiscales, haciéndola inconsistente con una definición económica correcta, esta situación se debe a que la contabilidad se expresa en datos históricos, sin embargo, cuando los precios varían como consecuencia de un escenario inflacionario, se distorsionan los resultados de los estados financieros y esto afectará la medición de la base de cálculo del tributo, determinando un efecto en la medida de los ingresos.

3.1.4.3 Hiperinflación

Hiperinflación es una inflación muy elevada, según Philip Cagan es aquella que sobrepasa del 50 por ciento mensual.

3.1.4.4 Ejemplos de efectos de inflación

Ganancias de Capital:

Una de las categorías más afectadas por la inflación son las ganancias de capital, debido a que la conjugación de la expresión nominal del costo histórico y del valor de realización a precios actuales, conlleva un desvío inevitable en la medición de su magnitud, esto es, la apreciación del precio de un activo que refleje sólo un aumento general de precios es una ganancia ficticia, porque no proporciona al inversionista un mayor poder de compra sobre bienes y servicios.

Depreciación y Amortización:

Es notorio que durante períodos inflacionarios, el precio de mercado de los activos depreciables o amortizables, se aparta de su costo según libros y que los apartados para atender la depreciación o amortización, basados en los costos históricos, tienden a incrementar artificialmente los ingresos por su realización, de tal modo, que el sistema de depreciación o amortización sobre costos históricos, no cumple con su función básica de recuperación del costo del activo permanente, imposibilitando su reposición, y en consecuencia, el mantenimiento del capital.

Inventarios:

Los inventarios son susceptibles de ganancias y pérdidas producto de los cambios de precios, a pesar de que estén destinados a rotar con mayor rapidez que los activos fijos, en materia de inventarios, existen algunos conocidos como "*beneficios en existencia*", los cuales se originan como consecuencia de los excedentes nominales de mercancías, esto es, aquellos que resultan de la diferencia entre los costos históricos y los de reposición, pero éstos beneficios no son reales, sino ilusorios y se producen como consecuencia de que el inventario inicial y el final en un período determinado se evalúan con una misma unidad monetaria, pero que en realidad tiene poderes de compra distintos, por lo que se tiende a subestimar los costos reales.

Intereses:

En materia de tasa de interés plantea problemas de ajustes serios y especiales, la experiencia demuestra que la inflación determina aumentos en las tasas efectivas de interés del mercado, supuestamente, la tendencia es que la tasa de interés efectiva supere a la tasa de inflación esperada para un período dado, sin embargo, la evidencia es que en varios países apuntan el hecho que los intereses no han aumentado tanto como la tasa de inflación.

3.1.5 La medición de la inflación

La inflación se define como el aumento del nivel general de precios, este nivel de precios se expresa mediante índices de precios.

Un índice de precios puede interpretarse de dos maneras:

- Como una medida de los precios actuales de los bienes y servicios, calculados en términos relativos respecto del año base, y ponderados mediante coeficientes que indican la proporción del gasto efectuado en cada bien.
- Como el costo de comprar en el año actual un conjunto de bienes que, adquiridos en el año base representaba un gasto de 100.

Dado que un índice de precios no puede comprender todos los bienes existentes en una economía, debe elegirse un conjunto que se considere representativo del total.

En la práctica, la evolución de la inflación en México se mide por la variación del Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), para comprender el fenómeno de la inflación, se debe distinguir entre aumentos generalizados de precios, que se producen de una vez y para siempre, de aquellos aumentos de precios que son persistentes en el tiempo, dentro de estos últimos también se puede hacer una distinción respecto al grado de aumento.

El INPC es un indicador de gran importancia cuya finalidad es medir a través del tiempo la variación de precios de una canasta de bienes y servicios representativa del consumo de hogares, por lo que se transforma en un instrumento estadístico por medio del cual permite conocer la inflación promedio de un país durante un periodo específico, información base para el diseño de la política monetaria orientada a procurar la estabilidad del poder adquisitivo de la moneda.

Lo principales componentes del INPC se agrupan en ocho categorías, de acuerdo con la forma en que los consumidores distribuyen su gasto:

- Alimentos, bebidas y tabaco
- Ropa, calzado y accesorios
- Vivienda
- Muebles, aparatos y accesorios domésticos
- Salud y cuidado personal
- Transporte
- Educación y esparcimiento

Para la elaboración del INPC se hace un seguimiento de los precios y productos específicos, sin embargo, para fines de cálculo del INPC estos específicos se agrupan para formar conjuntos homogéneos de bienes y servicios que se denominan genéricos, dicha agrupación e identificación de los denominados genéricos, se hace con base en las encuestas realizadas por el Instituto de Estadística Geografía e Informática y da lugar a índices de precios relativos, los cuales se ponderan con la fórmula siguiente:

Fórmula de Laspeyres[3]:

$$I_{t/o} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{i0} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \left(p_{it} / p_{i0} \right)$$

Donde:

$I_{t/o} =$ Índice que mide la variación promedio ponderado de los precios del periodo t en relación con los del periodo 0.

$\left(p_{it} / p_{i0} \right) =$ Índice de precios relativos al i-ésimo producto en el periodo t, mide la variación del precio t en relación con el periodo base 0.

$\frac{p_{i0} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} =$ Ponderación del precio relativo del i-ésimo producto en el índice y se obtiene dividiendo el valor de las q unidades del i-ésimo producto en el periodo base 0 entre el valor total de los n productos del índice en el mismo periodo base

[3] Fuente: Diario Oficial de la Federación, Jueves 25 de julio de 2002 (Primera Sección)

La fórmula se aplica en todos los niveles de agregación del índice, es decir, se aplica para obtener índices de agregaciones de artículos cada vez más amplias tanto en número de productos y servicios como ciudades, hasta llegar al índice general.

Por último, el Banco de México publica el nivel del INPC en el Diario Oficial de la Federación de manera quincenal.

3.1.6 Presiones inflacionarias y mecanismos de propagación de la inflación

En todo proceso inflacionario pueden distinguirse dos elementos: por un lado están las presiones inflacionarias, que son los desequilibrios básicos causantes de aumentos autónomos en los precios y por otro los mecanismos de propagación.

Las presiones inflacionarias se originan en un proceso de demanda que provoca un ascenso de los precios en uno o varios mercados.

Los mecanismos de propagación hacen que esos aumentos de precios se extiendan al sistema económico en su conjunto y se repitan a través del tiempo.

Es posible que la presión inflacionaria luego desaparezca, incluso que se presenten tendencias deflacionarias, pero no por ello el proceso inflacionario habrá de detenerse: mecanismos de propagación, fundamentalmente las expectativas de inflación, pueden perpetuarlo y mantener o crear nuevas presiones inflacionarias.

En todo proceso inflacionario prolongado los desequilibrios básicos van cambiando, en tanto que los mecanismos de propagación se hacen permanentes.

3.2 Tasa Real

3.2.1 Antecedentes

La presencia del fenómeno inflacionario como un elemento de deterioro del dinero a través del tiempo, ha tomado gran importancia en el desarrollo de economías de muchos países durante las últimas décadas, por lo que el concepto de tasa real ha cobrado cada vez mayor importancia en razón de que el entorno en el que se ha venido desarrollando el sistema financiero mexicano ha marcado la necesidad de deslindar de los rendimientos la perdida del poder adquisitivo.

3.2.2 Concepto

Cuando se realiza una inversión (de cualquier tipo), se debe tomar en cuenta que el poder adquisitivo del dinero disminuye en el tiempo cuando existe inflación, es decir, cada vez son menos los bienes y servicios que se pueden comprar con la misma cantidad de dinero.

Al realizar una inversión, es necesario eliminar el componente inflacionario para saber en qué proporción los intereses ganados, compensaron el incremento en los precios, o dicho de otra forma, saber cuál fue la tasa de interés real que se obtuvo.

De esta forma la tasa real no es otra cosa más que descontar la inflación implícita de la tasa de efectiva de inversión o tasa de mercado en determinado periodo de tiempo, entonces, si denotamos como I a la tasa de inflación y r como la tasa real tenemos que la tasa real es:

$$r = \left(\frac{1+i}{1+I}\right) - 1$$

Dicha razón, indica si los intereses generados por una inversión superan la pérdida de poder adquisitivo de un capital en un período determinado, y la medida en que se incrementa su valor real.

Si el rendimiento obtenido es mayor que la inflación, la tasa real es positiva.

Por otro lado se denomina deflactar al hecho de eliminar el efecto de inflación en una tasa nominal, para obtener la tasa real.

En virtud de que la inflación determina que el dinero pierde valor, es importante conocer si el rendimiento de una inversión compensa este efecto inflacionario, de esta manera se puede estimar a futuro el rendimiento real de las inversiones al suponer escenarios de inflación en determinado periodo de tiempo y tener una herramienta muy importante en la decisión de invertir o no en determinado proyecto.

Como consecuencia de la utilización de este concepto, han aparecido una serie de instrumentos de la inversión que son cotizados utilizando la tasa real, cuya principal característica es que el rendimiento pactado al inversionista se mide en forma de “inflación más tanto”.

4 CAPITULO

Aplicación de la tasa real a las anualidades

4.1 Introducción

En los capítulos anteriores se han visto los desarrollos teóricos básicos para la solución de problemas de tipo financiero, de igual manera se definió el concepto de inflación, sus causas, efectos, consecuencias y la necesidad de la utilización de la tasa real de interés como forma de eliminar financieramente el deterioro causado por la inflación.

Con los fundamentos anteriores, en este capítulo se analizará la aplicación de la tasa real a los distintos tipos de anualidades, proponiendo su utilización en el mundo financiero mexicano, con la intención de buscar eliminar el efecto inflacionario en las principales transacciones financieras de nuestro país, evitando situaciones desventajosas tanto para el acreedor como para el deudor, sobretodo en operaciones a largo plazo cuando las condiciones de la economía generan cambios en los valores de las tasas de interés del mercado.

4.2 Herramientas para el cálculo de anualidades a tasa real

4.2.1 Tabla de amortización

Para una mayor ilustración de la aplicación de la tasa real en las anualidades, es necesario utilizar otra herramienta de las matemáticas financieras: La tabla de amortización.

Es importante puntualizar que el pago se compone de dos partes:

- Rendimiento de la inversión o interés que recibe por el capital financiado
- El abono o pago parcial al capital

De lo anterior, a la cantidad contenida en el pago periódico correspondiente al abono o pago del capital inicial denominado también *principal* para estos efectos, se le conoce como *amortización.*

La tabla de amortización no es otra cosa que una serie de datos que describen las amortizaciones realizadas al principal en determinada operación financiera, dicha tabla esta conformada por los siguientes elementos:

- Año o periodo de pago
- Capital remanente al principio del año o periodo
- Interés contenido en el pago
- Amortización al principal
- Capital remanente al final del año o periodo

De esta forma tenemos que la tabla de amortización de una anualidad conformada por una serie de n pagos iguales de valor 1, efectuados al final de cada uno de los n años y asociados a una tasa de interés i es:

Año	Capital remanente al principio del periodo	Interés contenido en el pago	Amortización al principal contenida en el pago	Capital remanente al final del periodo
1	$a_{\overline{n}\vert i}$	$ia_{\overline{n}\vert i}$	v_i^n	$a_{\overline{n-1}\vert i}$
2	$a_{\overline{n-1}\vert i}$	$ia_{\overline{n-1}\vert i}$	v_i^{n-1}	$a_{\overline{n-2}\vert i}$
3	$a_{\overline{n-2}\vert i}$	$ia_{\overline{n-2}\vert i}$	v_i^{n-2}	$a_{\overline{n-3}\vert i}$
...				
K	$a_{\overline{n-k+1}\vert i}$	$ia_{\overline{n-k+1}\vert i}$	v_i^{n-k+1}	$a_{\overline{n-k+2}\vert i}$
...				
n	$a_{\overline{1}\vert i}$	$ia_{\overline{1}\vert i}$	v_i	0

Se observa en la tabla anterior que al final de la transacción el capital remanente es 0, lo que indica que dicha anualidad ha sido liquidada por completo.

Análogamente tomando una serie de n pagos de 1, se puede expresar el monto de una anualidad vencida como la acumulación de un fondo para constituir capital la cual estará compuesta por los siguientes elementos:

- o Año o periodo de pago
- o Fondo al principio del año o periodo
- o Interés contenido en el pago
- o Incremento al fondo
- o Fondo al final del año o periodo

Por lo que se genera la siguiente tabla:

Año	Fondo al inicio del periodo	Interés contenido en el pago	Incremento al fondo	Fondo acumulado al final del periodo
1	0	0	1	$S_{\overline{1}\rvert i}$
2	$S_{\overline{1}\rvert i}$	$iS_{\overline{1}\rvert i}$	$(1+i)$	$S_{\overline{2}\rvert i}$
3	$S_{\overline{2}\rvert i}$	$iS_{\overline{2}\rvert i}$	$(1+i)^2$	$S_{\overline{3}\rvert i}$
...				
K	$S_{\overline{k-1}\rvert i}$	$iS_{\overline{k-1}\rvert i}$	$(1+i)^{k-1}$	$S_{\overline{k}\rvert i}$
...				
n	$S_{\overline{n-1}\rvert i}$	$iS_{\overline{n-1}\rvert i}$	$(1+i)^{n-1}$	$S_{\overline{n}\rvert i}$

4.2.2 Obtención de la tasa de inflación con base en el INPC

El Banco de México publica el nivel del INPC en el Diario Oficial de la Federación los días 10 y 25 de cada mes, o en su caso, el día hábil inmediato anterior. Un día previo a esta publicación, la información se difunde en la página electrónica de la Institución: www.banxico.org.mx También se cuenta con el siguiente teléfono de consulta: (55) 5237-2404.

Además de la publicación quincenal del INPC, también se cuenta con una mensual, que se divulga el día 10 de cada mes. Cabe señalar que el dato del INPC mensual y del quincenal es un promedio del periodo respectivo[4]

[4] Fuente: El Índice Nacional de Precios al Consumidor: Características y Actualización de su Base al Año 2002, Junio 2002, Banco de México.

Para efectos de este estudio se tomara únicamente la publicación mensual del INPC.

El método para obtener la tasa efectiva de inflación de acuerdo al INPC publicado en forma mensual por el Banco de México es el siguiente:

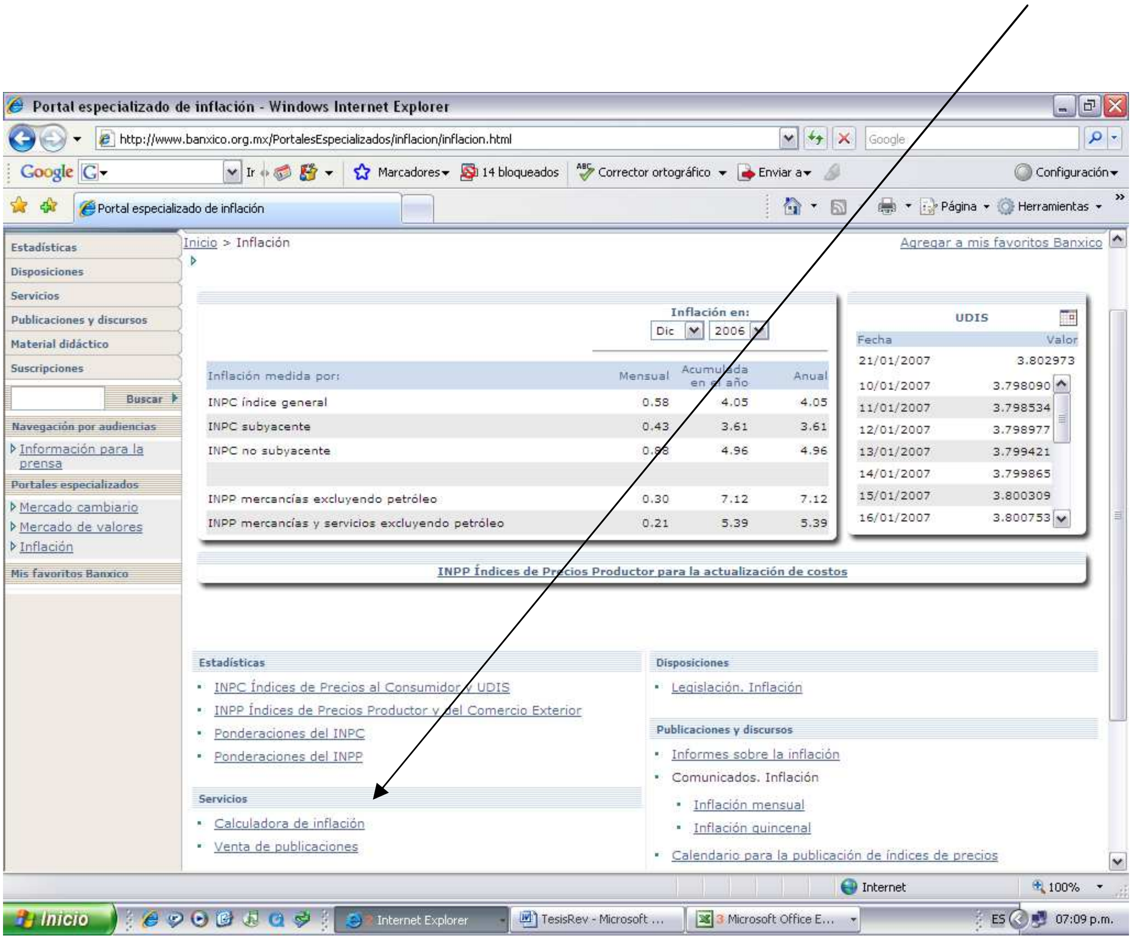
- Identificar los índices necesarios para la obtención de la tasa de inflación de acuerdo al periodo de pago buscado en la operación financiera.
- Se tomarán dos índices: el inicial o base $INPCi$, es decir, aquel que se toma como referencia al inicio del periodo de la transacción financiera y por otro lado el final $INPC_f$, que corresponde al final del periodo de la transacción financiera.
- Calcular la tasa de variación o tasa efectiva de inflación del periodo establecido entre ambos índices de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$I = \frac{INPC_f}{INPC_i} - 1$$

Es muy importante la selección correcta de estos índices, debido a que es muy dado a cometer errores en dicha selección, por ejemplo, supongamos que queremos calcular la tasa efectiva de inflación del año 2005, entonces lo que en primera instancia se piensa es tomar como INPC base el del mes de enero de 2005 y como final el de el mes de enero de 2006, sin embargo esto es incorrecto.

Debido a que el INPC del mes dado es la *inflación ocurrida durante el mes,* es decir, estaríamos calculando la inflación del 1 de febrero de 2005 al 1 de febrero de 2006 y no el año 2005 como tal, por lo que lo correcto en este caso es: tomar como base el índice de diciembre de 2004 y como final el índice a diciembre de 2005, garantizando la inflación efectiva anual del año buscado.

Otro método de cálculo es dirigirse a la página del Banco de México y dar clic en la liga inflación mensual, posteriormente aparecerá la pantalla para ingresar a la calculadora de inflación como se muestra a continuación:



En dicha página únicamente habrá que darle los meses entre los cuales se quiere calcular la inflación, en este caso diciembre de 2004 a diciembre de 2005, se obtiene una tasa efectiva anual del inflación del 3.33%

4.3 Elementos de anualidades a tasa real:

Los elementos en el uso de anualidades a tasa real son:

Intervalo o periodo de pago:

Tiempo que transcurre entre un pago y otro.

Plazo:

Tiempo que pasa entre el inicio del primer periodo de pago y el final del último.

Renta:

Es el nombre que se le da al pago periódico que se hace.

Tasa de interés:

Tasa asociada a la inversión, por lo regular es efectiva, pagadera con periodo de pago de la renta.

Tasa de inflación:

Se define como la tasa de crecimiento de los precios durante el periodo de pago de la renta.

Fechas:

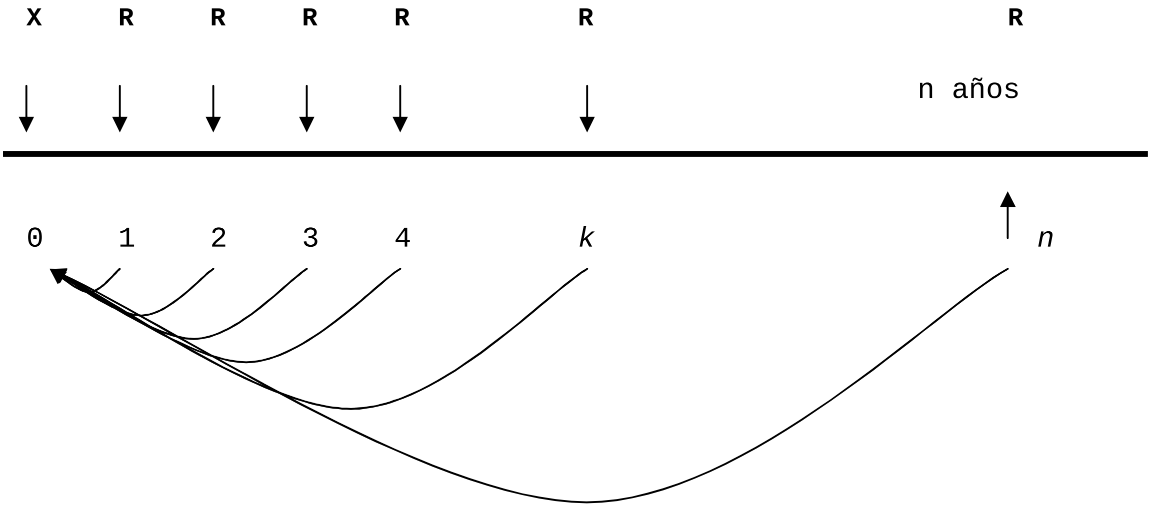
Fechas de inicio y término de la operación financiera.

4.4 *Anualidades ciertas a tasa real:*

4.4.1 Valor presente o actual de una anualidad vencida a tasa real

Retomando el desarrollo presentado en le capítulo 2, se toma de igual forma el punto de valuación al inicio de la transacción de acuerdo a la siguiente gráfica:

Gráfica 16



Se observa que la gráfica nos arroja la ecuación de valor de la siguiente forma:

$$X = R(1+r)^{-1} + R(1+r)^{-2} + R(1+r)^{-3} + \ldots + R(1+r)^{-n} \qquad \textbf{(3)}$$

Donde *r* es la tasa efectiva real pactada en la operación y

$$v_r = (1+r)^{-1} = \frac{1}{(1+r)}$$

Obteniendo de manera similar a la presentada en el capìtulo 2 la siguiente ecuación:

$$X = R\frac{(1-v_r^n)}{r} = R\, a_{\overline{n}|r} \qquad \textbf{(4)}$$

La fórmula anterior es semejante a la obtenida para el mismo tipo de anualidad expuesta en el capítulo 2 con la salvedad de que es a tasa real, sin embargo, su operación es distinta, ya que nominalmente los pagos R van a ser *reales* es decir, dependientes de los valores que la inflación tome.

Se conoce a partir del capítulo 3 que la tasa real está definida con la fórmula siguiente:

$$r = \left(\frac{1+i}{1+I}\right) - 1 \Rightarrow (1+r) = \left(\frac{1+i}{1+I}\right) \Rightarrow (1+r)\cdot(1+I) = (1+i)$$

Sustituyendo la igualdad anterior en (3) se tiene que:

$$R\cdot a_{\overline{n}|r} = R(1+I)v_i + R(1+I)^2 v_i^2 + R(1+I)^3 v_i^3 + \ldots + R(1+I)^n v_i^n$$

La ecuación anterior supone que la tasa de inflación efectiva anual I permanece constante durante el tiempo que dura la operación y por lo tanto la tasa efectiva de mercado i también requerida para obtener la tasa real r también sería constante.

Bajo estas condiciones, la serie de pagos se determinaría en función del pago inicial R_0 de tal manera que $R_0 \cdot (1+I)$ indicará el valor del primer pago corregido al final del primer año y $R_0 \cdot (1+I)^k$ será el valor del pago correspondiente al final del año k.

En caso de que la tasa inflación no se mantuviera constante como en realidad ocurre, definiendo I_k como la inflación obtenida en el año k, la ecuación anterior se podrá escribir de la siguiente manera:

$$R \cdot a_{\overline{n}|r} = R(1+I_1)v_{i_1} + R(1+I_1)v_{i_1}(1+I_2)v_{i_2} + \ldots + R(1+I_1)v_{i_1}(1+I_2)v_{i_2} \ldots (1+I_k)v_{i_k}$$

Donde $(1+r)(1+I_k) = (1+i_k)$

De lo anterior los diferentes valores de R se corregirán de tal manera que estuvieran afectados por un valor equivalente a la inflación real acumulada hasta el año que corresponda, es decir:

$$R_k = R_0 \cdot (1+I_1)(1+I_2)(1+I_3)\ldots(1+I_k)$$

De lo anterior es conveniente que se construya una tabla de amortización para analizar y ver con mayor claridad la forma como evolucionan los valores de los distintos elementos involucrados en la operación cuando es aplicada la tasa real, tal como se muestra a continuación:

Año	Capital remanente al principio del periodo	Interés contenido en el pago	Amortización al principal contenida en el pago	Capital remanente al final del periodo
1	$R_0 a_{\overline{n}\|r}$	$(1+I_1)R_0(1-v_r^n)$	$(1+I_1)R_0(v_r^n)$	$(1+I_1)R_0 a_{\overline{n-1}\|r})$
2	$(1+I_1)R_0 a_{\overline{n-1}\|r})$	$(1+I_1)(1+I_2)R_0(1-v_r^{n-1})$	$(1+I_1)(1+I_2)R_0(v_r^{n-1})$	$(1+I_1)(1+I_2)R_0 a_{\overline{n-1}\|r})$
. .				
n	$(1+I_1)...(1+I_n)R_0 a_{\overline{1}\|r}$	$(1+I_1)...(1+I_n)R_0(1-v_r)$	$(1+I_1)...(1+I_n)R_0 v_r$	0

Para un mejor entendimiento de lo anterior se propone el siguiente ejemplo:

Se considera que un banco otorgó un préstamo por \$100,000.00 a una persona conviniendo una tasa efectiva anual real del 5%, para liquidarlo mediante pagos vencidos anuales a un plazo de 6 años, de aquí que se desea conocer la rentas anuales a pagar, entonces despejando R de la fórmula (4) tenemos que:

$$100{,}000 = R\frac{(1-v_{.05}^{6})}{.05} \Rightarrow R = \frac{100{,}000\cdot(0.05)}{(1-v_{.05}^{6})} \Rightarrow R = \frac{5{,}000}{0.2537} \Rightarrow R = 19{,}701.75$$

Lo anterior significa que se van a realizar 6 pagos *reales* de \$19,701.75 cada año, dichos pagos serían nominales siempre que la inflación durante el periodo de la operación fuera nula.

Sin embargo, en la realidad esto no es necesariamente cierto, ya que vivimos en una economía con inflación, por lo que es necesario adecuar los pagos de acuerdo a la inflación determinada en los periodos respectivos.

Para esto nos ayudaremos de las tablas de amortización mencionadas anteriormente, adicionando dos columnas más:

- Se indicará la tasa de inflación efectiva del periodo respectivo.
- Se indicará el pago periódico necesario para la liquidación de la transacción financiera.

Con los datos del ejemplo se genera la siguiente tabla de amortización, cuyos valores corresponden a los valores nominales de cada período:

Tasa efectiva de inflación	**Capital al inicio**	**Capital remanente**	**Pago anual**	**Interés**	**Amortización**
4.40%	100,000.00	104,403.50	20,569.31	5,220.17	15,349.14
5.70%	89,054.36	94,130.89	21,741.86	4,706.54	17,035.32
3.98%	77,095.57	80,161.29	22,606.43	4,008.06	18,598.37
5.19%	61,562.92	64,758.56	23,779.90	3,237.93	20,541.97
3.33%	44,216.59	45,690.21	24,572.42	2,284.51	22,287.91
4.05%	23,402.31	24,350.86	25,568.41	1,217.54	24,350.86

Como se puede observar en la tabla anterior al final del 6 año el capital remanente es igual a la amortización, llegando a la liquidación de la operación financiera.

4.4.2 Perpetuidades a tasa real

La perpetuidad a tasa real es la serie de pagos cuyas características es que dichos pagos no tienen una fecha de terminación determinada, por lo que la perpetuidad quedaría definida de la siguiente manera como ecuación de valor:

$$X = \lim_{n \to \infty} R\, a_{\overline{n}|r} = \lim_{n \to \infty} R \frac{(1-v^n)}{r} = R\left[\frac{1}{r} - \frac{\overset{0}{\cancel{v^n}}}{r}\right] = \frac{R}{r}$$

Ejemplo:

Un jubilado invirtió a partir de febrero de 2004 en un banco su finiquito de $1,000,000 correspondiente a los años laborales trabajados, recibiendo a cambio rentas mensuales indefinidas hasta la hora de su muerte, si el banco le ofreció una tasa de interés efectiva real del 6% anual, ¿Cual fue la renta mensual que recibió correspondiente al mes de noviembre de 2006?

En primer lugar hay que despejar R de la ecuación anterior, lo que nos da como resultado que $R = X \cdot r$ sin embargo r debe estar en función de los pagos.

Con la fórmula de tasas equivalentes, la tasa de real de interés efectiva mensual es:

$$r_m = (1+0.06)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.49\%$$

Esto quiere decir que $R_0 = 1{,}000{,}000 \cdot (0.49) = 4{,}867.55$

Obteniendo los datos del la inflación mensual del INPC tenemos que:

Ene 2004	0.62%	**Oct 2004**	0.69%	**Jul 2005**	0.39%	**Abr 2006**	0.15%
Feb 2004	0.60%	**Nov 2004**	0.85%	**Ago 2005**	0.12%	**May 2006**	-0.45%
Mar 2004	0.34%	**Dic 2004**	0.21%	**Sep 2005**	0.40%	**Jun 2006**	0.09%
Abr 2004	0.15%	**Ene 2005**	0.00%	**Oct 2005**	0.25%	**Jul 2006**	0.27%
May 2004	-0.25%	**Feb 2005**	0.33%	**Nov 2005**	0.72%	**Ago 2006**	0.51%
Jun 2004	0.16%	**Mar 2005**	0.45%	**Dic 2005**	0.61%	**Sep 2006**	1.01%
Jul 2004	0.26%	**Abr 2005**	0.36%	**Ene 2006**	0.59%	**Oct 2006**	0.44%
Ago 2004	0.62%	**May 2005**	-0.25%	**Feb 2006**	0.15%	**Nov 2006**	0.52%
Sep 2004	0.83%	**Jun 2005**	-0.10%	**Mar 2006**	0.13%	**Dic 2006**	0.58%

La tabla de amortización respectiva quedaría de la siguiente manera:

Fecha	**Inflación**	**Capital al principio**	**Capital remanente**	**Pago mensual**	**Interés**	**Amortización**
Feb 2004	0.60%	1,000,000.00	1,005,981.74	4,896.67	4,896.67	-
Mar 2004	0.34%	1,005,981.74	1,009,390.59	4,913.26	4,913.26	-
Abr 2004	0.15%	1,009,390.59	1,010,913.89	4,920.67	4,920.67	-
May 2004	-0.25%	1,010,913.89	1,008,378.15	4,908.33	4,908.33	-
Jun 2004	0.16%	1,008,378.15	1,009,994.33	4,916.20	4,916.20	-
Jul 2004	0.26%	1,009,994.33	1,012,641.53	4,929.08	4,929.08	-
Ago 2004	0.62%	1,012,641.53	1,018,892.64	4,959.51	4,959.51	-
Sep 2004	0.83%	1,018,892.64	1,027,317.23	5,000.52	5,000.52	-
Oct 2004	0.69%	1,027,317.23	1,034,432.15	5,035.15	5,035.15	-
Nov 2004	0.85%	1,034,432.15	1,043,256.15	5,078.10	5,078.10	-

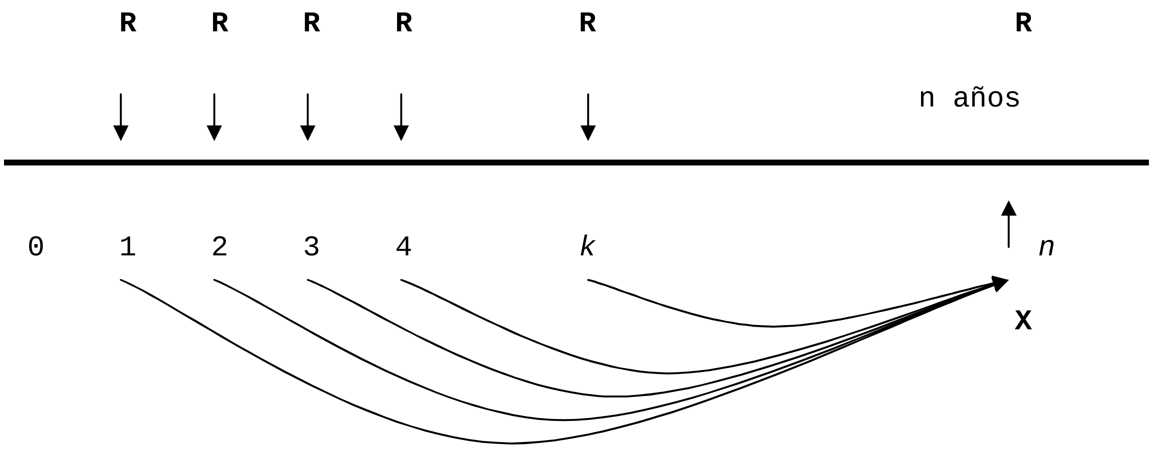
Dic 2004	0.21%	1,043,256.15	1,045,411.06	5,088.59	5,088.59	-
Ene 2005	0.00%	1,045,411.06	1,045,448.21	5,088.77	5,088.77	-
Feb 2005	0.33%	1,045,448.21	1,048,931.37	5,105.73	5,105.73	-
Mar 2005	0.45%	1,048,931.37	1,053,659.17	5,128.74	5,128.74	-
Abr 2005	0.36%	1,053,659.17	1,057,411.69	5,147.00	5,147.00	-
May 2005	-0.25%	1,057,411.69	1,054,755.20	5,134.07	5,134.07	-
Jun 2005	-0.10%	1,054,755.20	1,053,742.77	5,129.15	5,129.15	-
Jul 2005	0.39%	1,053,742.77	1,057,866.82	5,149.22	5,149.22	-
Ago 2005	0.12%	1,057,866.82	1,059,130.05	5,155.37	5,155.37	-
Sep 2005	0.40%	1,059,130.05	1,063,374.85	5,176.03	5,176.03	-
Oct 2005	0.25%	1,063,374.85	1,065,984.90	5,188.74	5,188.74	-
Nov 2005	0.72%	1,065,984.90	1,073,657.13	5,226.08	5,226.08	-
Dic 2005	0.61%	1,073,657.13	1,080,251.90	5,258.18	5,258.18	-
Ene 2006	0.59%	1,080,251.90	1,086,586.60	5,289.02	5,289.02	-
Feb 2006	0.15%	1,086,586.60	1,088,249.23	5,297.11	5,297.11	-
Mar 2006	0.13%	1,088,249.23	1,089,614.62	5,303.75	5,303.75	-
Abr 2006	0.15%	1,089,614.62	1,091,212.23	5,311.53	5,311.53	-
May 2006	-0.45%	1,091,212.23	1,086,354.39	5,287.88	5,287.88	-
Jun 2006	0.09%	1,086,354.39	1,087,292.52	5,292.45	5,292.45	-
Jul 2006	0.27%	1,087,292.52	1,090,274.10	5,306.96	5,306.96	-
Ago 2006	0.51%	1,090,274.10	1,095,837.86	5,334.05	5,334.05	-
Sep 2006	1.01%	1,095,837.86	1,106,900.36	5,387.89	5,387.89	-
Oct 2006	0.44%	1,106,900.36	1,111,739.63	5,411.45	5,411.45	-
Nov 2006	0.52%	1,111,739.63	1,117,572.75	5,439.84	5,439.84	-

Por lo que el pago de acuerdo a las condiciones establecidas fue de $ 5,439.84

4.4.3 Valor futuro o Monto de una anualidad vencida

Para este caso el punto de valuación es al final tal como se muestra en la siguiente línea de tiempo:

Gráfica 17



Por lo que nuestra ecuación de valor de la siguiente forma:

$$X = R(1+r)^{n-1} + R(1+r)^{n-2} + R(1+r)^{n-3} + ... + R(1+r) + R$$

Simplificando obtenemos que:

$$X = R\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right] = R\ s_{n\rceil}$$

CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se realizaron desarrollos detallados de la aplicación del concepto de tasa real en las anualidades, sustentados en los conceptos básicos primordiales, generando una alternativa de modelos de inversión para su uso en el Mercado Financiero Mexicano y en todo de tipo de operaciones financieras, buscando ante todo la equidad entre el comprador y el vendedor al erradicar el factor inflación de las transacciones financieras a través del concepto de tasa real.

Se considera que la aplicación de lo desarrollado tiene un gran interés en la Industria del Seguro de Vida, en los Sistemas de Pensiones y Jubilaciones, y principalmente en la Banca Comercial, ya que con esto tendrían una mayor promoción de sus productos financieros ofrecidos al público en general, generando mayor cartera de clientes así como la garantía de que sus inversionistas no tendrán el problema de la pérdida del valor adquisitivo de sus ahorros como ha ocurrido en otros años, logrando con esto un mayor ahorro interno en México.

BIBLIOGRAFIA

Aguilar Monteverde, Alonso *et al*
La inflación en México
México: Editorial Nuestro Tiempo, 1988

Blank, Leland *et al*
Ingeniería Económica
México: Editorial Mc Graw-Hill, 2004

Cánovas Theriot, Roberto
Matemáticas financieras: Fundamentos y aplicaciones
México: Editorial Trillas, 2004

Cissel, Cissel, Flashpohler
Matemáticas Financieras
México: Editorial Compañía Editorial Continental, 2006

Coss Bu, Raúl
Análisis y Evaluación de Proyectos de Inversión
México, Editorial Limusa, 2006

Cuellar Romo, Nicolás H. *et al*
Matemáticas Aplicadas a los Negocios
México: Editorial Banca y Comercio, 1997

Díaz Mata Alfredo, Aguilera Gómez Víctor Manuel
Matemáticas Financieras
México: Editorial Mc Graw-Hill, 1999

Friedman, Irving S.
La inflación: Desastre Mundial
México: Editorial Diana, 1974

Jordan, Chester Wallace
Life Contingencies
U.S.A.: The Society of Actuaries, 1991

Maclean, Joseph B.
El Seguro de Vida
México: Editorial Mc Graw-Hill, 1965

Salas Torá, Jorge
Teoría del interés y aplicaciones financieras
México: Editorial UNAM, 1992

Diario Oficial de la Federación http://dof.gob.mx/

Índice Nacional de Precios al Consumidor http://www.banxico.org.mx/