



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Torneos Shen coloreados.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
ABRAHAM GUTIÉRREZ SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARÍA DEL ROCÍO ROJAS MONROY

2012





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

“Aunque hablara todas las lenguas de los hombres y de los ángeles, si me faltara el amor sería como bronce que resuena o campana que retiñe.”

Pablo

Índice general

Índice general	v
Introducción.	vii
1. Elementos.*	1
1.1. Gráficas.	1
1.2. El grado de un vértice.	4
1.3. Trayectorias, ciclos y caminos.	5
1.4. Conexidad.	8
1.5. Árboles y Bosques.	8
1.6. Gráficas bipartitas.	9
1.7. Digráficas y núcleos.	10
1.8. Coloraciones y nucleos generalizados.	11
2. Coloraciones Shen.	15
2.1. Cota de colores.	15
2.2. Equivalencias de la Shen coloración.	17
3. Coloraciones Shen Maximales.	21
3.1. Productos coloreados y gráficas Shen maximales.	21
3.2. Estudio de las gráficas Shen maximales.	23
3.3. Gráficas Shen maximales y parentizaciones de $\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2}$ $\{v_3\} *_{c_3} \dots *_{c_{n-1}} \{v_n\}$	31
4. ¿De cuánto estamos hablando?	33
4.1. Coloraciones isomorfas.	33
4.2. Coloraciones Shen maximales isomorfas.	33
4.3. Conteo de coloraciones Shen maximales.	34
4.4. Wedderburn-Etherington y Shen maximales.	35
5. Arcoiris.	41
5.1. Trayectorias y arcoiris.	41
5.2. Gráficas expansivas y bosques arcoiris.	42

6. Triángulos bicolors y coloraciones mínimas.	45
6.1. La pregunta interesante.	45
6.2. Una coloración prometedora.	45
6.3. Respuesta a la pregunta.	46
Bibliografía	47

Introducción.

Este pequeño capítulo explica el trabajo a grandes rasgos. Comenzaremos por el sabor general; seguiremos con una explicación ligera y bastante informal de los conceptos necesarios para comprender con más detalle lo alcanzado.

En términos intuitivos podemos definir al trabajo como un estudio de la estabilidad del teorema de Shen Minggang. Expliquemos lo que se entiende por estabilidad de un teorema: para comenzar, un teorema es usualmente del estilo A implica B , ahora tomamos la condición A y el “espacio” de todos los ejemplos que pueden o no cumplir la condición A , deseamos tener una idea de como se ve el conjunto de ejemplos que cumplen A . En realidad, la “estabilidad de un teorema” no es un concepto formal pero fue la idea rectora en la construcción del trabajo.

Los objetos a trabajar son los llamados “Torneos coloreados por aristas”, nombre usado para describir un conjunto de puntos y flechas coloreadas. Cada flecha empieza y termina en un punto y cualesquiera dos puntos tienen una y sólo una flecha entre ellos.

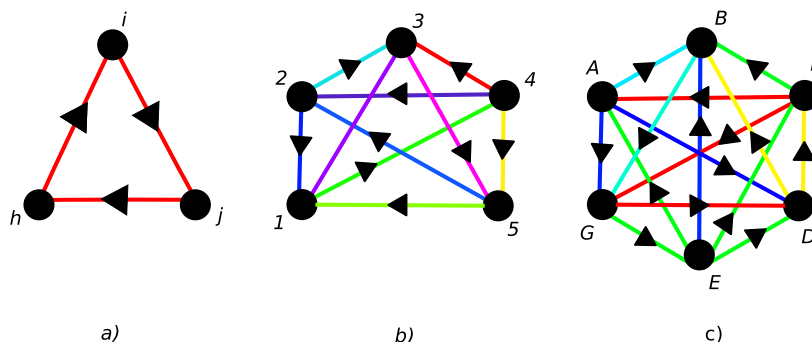


Figura 1: Ejemplos de torneos coloreados por aristas.

El teorema es publicado bajo el nombre “On monochromatic paths in m -colored tournaments” por Shen Minggang desde la lejana China en el año 1987. El re-

sultado entra en la teoría de “Núcleos por trayectorias monocromáticas”¹.

Teorema 1 (Shen Minggang) [8]

Sea T torneo m -coloreado por aristas. Si todo subtorneo de orden 3 de T está a lo más 2 coloreado, T posee núcleo por trayectorias monocromáticas.

Exploremos con más calma este enredo de palabras: un subtorneo de orden 3 de T , es un triángulo de T , es decir, 3 puntos de T con las respectivas flechas entre ellos. Prestemos atención a los colores de estas flechas (son 3 flechas); si hay a lo más 2 colores, decimos que “está a lo más 2 coloreado”. En general, decimos que un torneo T está m -coloreado por aristas si el número de colores usados para colorear las flechas de T , es m .

En honor a Shen Minggang: si cada subtorneo de orden 3 está a lo más dos coloreado en T , diremos que T está Shen coloreado. Reescribamos el teorema:

Teorema 2 (Shen Minggang) [8]

Todo torneo Shen coloreado posee núcleo por trayectorias monocromáticas.

Una trayectoria monocromática es una secuencia de flechas del mismo color, que siguen una misma dirección y no pasan más de una vez por un punto: por ejemplo, la sucesión de puntos GEFB del ejemplo c) en la figura 1 forma una trayectoria de color verde que empieza en G y termina en B. Un núcleo por trayectorias monocromáticas (n.p.t.m) es un subconjunto de puntos de T (llamémoslo N) tales que, entre ellos no existen trayectorias monocromáticas que vayan de uno a otro en ninguna dirección², y dado un punto v fuera de N , existe una trayectoria monocromática que empieza en v y va en dirección de algún punto de N ³. Un ejemplo de n.p.t.m es el punto B en c) de la figura 1, se puede ver fácilmente que la digráfica b no posee, y en a, todo punto es n.p.t.m.

Observemos que si algún N existe, consta de un sólo elemento; recordemos que existe una flecha entre cualesquiera dos puntos; esta flecha es una trayectoria monocromática.

Una pregunta inicial podría ser: Dado un torneo con n puntos, ¿cuál es el máximo número de colores que se pueden usar de modo que éste sea Shen coloreado?⁴ Por ejemplo, no podemos colorear un torneo de tres puntos con tres colores de modo que el torneo sea Shen coloreado, el tope es 2.

El primer resultado del trabajo, encuentra condiciones globales equivalentes a la condición de Shen, y resuelve esta pregunta como corolario.

Teorema 3 *Sea G completa coloreada por aristas, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *G está Shen coloreada.*

¹Teoría creada por Hortensia Galeana; destacada investigadora mexicana.

²Suele decirse que N es independiente por trayectorias monocromáticas.

³Esto se expresa de forma muy ilustrativa diciendo: N es absorbente por trayectorias monocromáticas.

⁴La condición de Shen no contempla la dirección de las flechas en T , así que, la única variable acotando el máximo número de colores es el número de puntos.

2. Dado cualquier $W \subseteq V(G)$, $[W]_G$ posee una componente monocromática conexa y generadora (no necesariamente única).
3. Dado cualquier $H \subseteq A(G)$ cuyos elementos son de colores distintos dos a dos, se tiene que $[H]_G$ es acíclica.
4. Todo ciclo de longitud m en G tiene a lo más $m - 1$ colores.

G completa es lo mismo que un torneo, pero, en vez de flechas, sólo líneas. $V(G)$ es el conjunto de puntos de G y $A(G)$ el conjunto de líneas. Sea $H \subseteq A(G)$, borremos todas aquellas líneas que no estén en H , y todos aquellos puntos que no sean extremos de alguna de las líneas de H : el resultado es $[H]_G$.

Tomemos G completa con n puntos y Shen coloreada: usemos el inciso 3) de las equivalencias, tomando una y sólo una línea por cada uno de los colores existentes en G . Se nos garantiza que $[H]_G$ es acíclica y un resultado bien conocido reza: una gráfica (conjunto de líneas y puntos) acíclica con a lo más n puntos tiene a lo más $n - 1$ líneas. Como H tiene líneas de cada uno de los colores en G , $n - 1$ es la máxima cantidad de colores contenidos en G . Esta cantidad de colores es alcanzable, la figura 2 muestra algunos ejemplos:

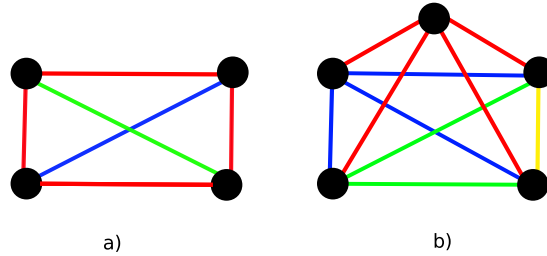


Figura 2: Ejemplos de coloraciones máximas en 4 y 5 puntos.

El capítulo 3 se dedica a encontrar todos y cada uno de los ejemplos maximales esencialmente distintos. Para el caso de cinco puntos, existen tres ejemplos, la figura 3 los muestra.

El capítulo 4 se dedica a calcular el número exacto de ejemplos maximales esencialmente distintos, esta expresión es una formula recursiva que tiene el nombre de “números de Wedderburn-Etherington”, hasta hoy no se conoce una expresión explicita de estos números pero si se conocen varias interpretaciones, algunas de ellas publicadas, en este capítulo obtenemos una nueva interpretación de estos números.

El capítulo 5 expone algunas propiedades curiosas de las coloraciones Shen maximales. Por último, el capítulo 6 presenta un problema interesante que surgió el profesor Jorge Urrutia en una de las exposiciones del trabajo.

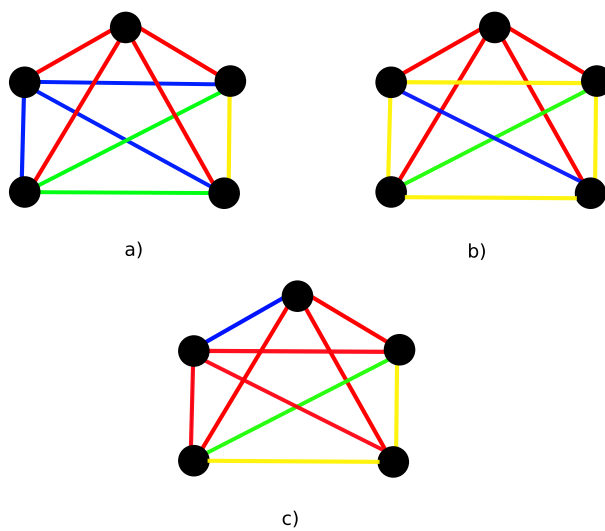


Figura 3: Catálogo de coloraciones Shen maximales en gráficas completas de 5 puntos.

Capítulo 1

Elementos.*

Este capítulo da una introducción concisa a la terminología que será usada a lo largo de la tesis. Por suerte, mucha de la terminología estandar usada en la teoría de gráficas es lo bastante intuitiva para recordar fácilmente; introduciremos con calma y a su debido tiempo los conceptos enredados.

El propósito es recolectar la mayor parte de los términos básicos en un sólo lugar de modo que sean de fácil consulta en una lectura más avanzada. Si se desea, puede ser omitida y regresar cuando se tengan dudas en alguna definición.

Para un número real x denotamos por $\lfloor x \rfloor$ al mayor entero $\leq x$, y por $\lceil x \rceil$ al menor entero $\geq x$. A un conjunto $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ de subconjuntos ajenos dos a dos de un conjunto A se llama *partición* si la unión $\bigcup \mathcal{A}$ de todos los conjuntos $A_i \in \mathcal{A}$ es A y cada $A_i \neq \emptyset$. Por $[A]^k$ denotamos al conjunto de todos los subconjuntos de A con k elementos. A los conjuntos con k elementos los llamaremos *k-conjuntos*; *k-subconjuntos* a los subconjuntos con k elementos.

1.1. Gráficas.

En términos prácticos, una gráfica es un conjunto de rayitas y puntitos de modo que cada rayita termine y empiece con un puntito. La figura 1.1 nos da un ejemplo de esto.

De manera más formal tenemos que una *gráfica* es una pareja ordenada $G = (V, A)$ donde V es el conjunto de *vértices* (puntitos) y $A \subseteq [V]^2$, es el conjunto de *aristas*. Supondremos $V \neq \emptyset$ y $A \subseteq [V]^2$ notemos que esto no permite rayitas que empiezan y terminan en un mismo punto, además, la pareja (\emptyset, \emptyset) no existe por que el conjunto de vértices debe ser no vacío. Como ya mencionamos, la forma usual de representar una gráfica es dibujar un punto por cada vértice y una rayita entre cada pareja de vértices que formen una

* Ésta es una adaptación del capítulo 1 en [2].

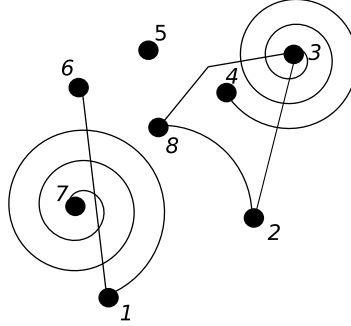


Figura 1.1: Gráfica en $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y conjunto de aristas $A = \{\{1, 7\}, \{1, 6\}, \{2, 8\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 8\}\}$.

arista; el cómo se dibujen los puntos o las aristas se considera irrelevante: lo que es importante, es la cantidad de vértices y si dos de ellos forman o no una arista.

en
 $V(G)$
 $A(G)$

Una gráfica con conjunto de vértices V se dice una gráfica *en* V . El conjunto de vértices de G se denota por $V(G)$, y el de aristas por $A(G)$. Estas convenciones son independientes de los nombres que les son dados a estos conjuntos: el conjunto de vértices de $G = (W, F)$ se sigue denotando por $V(G)$, no por $W(G)$.

orden
 $|G|$
 $\|G\|$

El número de vértices de una gráfica es su *orden*, escrito como $|G|$; su número de aristas se denota por $\|G\|$. Una gráfica puede poseer una cantidad infinita de vértices, pero aquí trabajaremos sólo con aquellas que tienen una cantidad finita de ellos.

gráfica
 trivial

Una gráfica de orden 1 se llamará *gráfica trivial*. Nos preocupamos de mencionar esta gráfica ya que puede representar un contraejemplo trivial para algunos de los teoremas mencionados, y en vez de llenar los teoremas de condiciones que saquen a este ejemplo de su rango de acción, preferimos tratarlo (en mayor parte) con generosa indiferencia.

incidente
 extremo

Un vértice es *incidente* a una arista a si $v \in a$; de modo que a es una arista en v . Un vértice v se dice *extremo* de a si v incide en a . Una arista $\{x, y\}$ se escribe usualmente como xy (o yx). Si $x \in X$ y $y \in Y$, entonces xy se llama una XY arista. El conjunto de todas las XY aristas se denota por $A(X, Y)$; en vez de $A(\{x\}, Y)$ y $A(X, \{y\})$, escribiremos simplemente $A(x, Y)$ y $A(X, y)$. El conjunto de todas las aristas de A en un vértice v se denotará por $A(v)$.

$A(X, Y)$
 $A(v)$

adyacentes
 vecinos

Dos vértices x, y se dicen *adyacentes* o *vecinos* si xy está en $A(G)$. Dos aristas $f \neq a$ se dicen *adyacentes* si tienen un extremo común. Si cualesquiera dos vértices son adyacentes, G se llama completa (o *gráfica completa*). Una gráfica completa en n vértices se denota por K_n ; K_3 se llama triángulo.

gráfica
 completa
 K_n

isomorfas
 \cong

Sean $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$ dos gráficas. Llamamos G y G' *isomorfas*, y lo escribimos $G \cong G'$ si existe una biyección $\varphi : V \rightarrow V'$ con $xy \in A$ si y sólo si

$\varphi(x)\varphi(y) \in A'$ para cualesquiera $x, y \in V$. Una función con tales características se llama *isomorfismo*; si $G = G'$, se llama automorfismo. Normalmente no distinguiremos entre gráficas isomorfas.

isomorfismo

Si G contiene tres vértices adyacentes dos a dos entonces cualquier gráfica isomorfa poseerá una terna similar. Una función que toma gráficas como argumentos se llama una *invariante* si asigna valores iguales a gráficas isomorfas. La función que asigna a cada gráfica su número de vértices y la función que asigna a cada gráfica su número de aristas son ejemplos de invariantes.

invariante

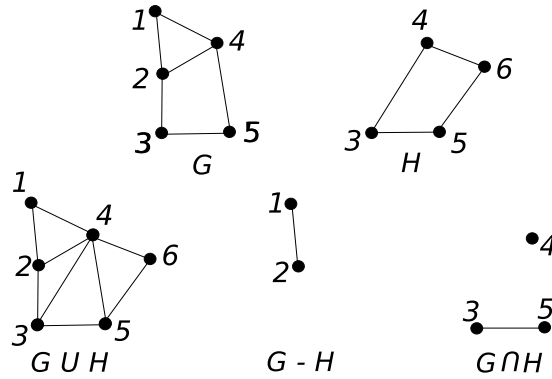


Figura 1.2: Unión, diferencia, intersección.

Definimos que $G \cup G' := (V \cup V', A \cup A')$ y $G \cap G' := (V \cap V', A \cap A')$. Si $V(G) \cap V(G') = \emptyset$, decimos que G y G' son *disjuntas*. Si $V' \subset V$ y $A' \subset A$, entonces decimos que G' es *subgráfica* de G , denotado por $G' \subset G$. De manera más informal, decimos que G contiene a G' . Si $G' \subset G$ y $G' \neq G$, decimos que G' es una subgráfica propia de G .

$G \cap G'$.
disjuntas
subgráfica
 $G' \subset G$

Si $G' \subset G$ y G' contiene todas las aristas $xy \in A(G)$ con $x, y \in V(G') = V'$, entonces G' se dice *subgráfica inducida por vértices* en G ; decimos que V' induce G' en G y escribimos $[V']_G := G'$. Dado $R \subseteq A(G)$ denotamos por $H = [R]_G$ a la subgráfica de G con $V(H) = \bigcup R$ y $A(H) = R$; borremos de G a todos los vértices que no incidan en alguna arista de R y a toda arista que no esté en R , el resultado es $[R]_G$. Decimos que $[R]_G$ es una *subgráfica inducida por aristas* en G . Ver figura 1.3.

subgráfica
inducida
por vértices
induce

Si U es un conjunto de vértices cualquiera (usualmente de G), escribimos $G \setminus U$ por $[V \setminus U]_G$. En otras palabras, $G \setminus U$ se obtiene de G borrando todos los vértices en $U \cap V$ y sus aristas incidentes. Si $U = \{v\}$, escribiremos $G \setminus v$ en lugar de $G \setminus \{v\}$. En vez de $G \setminus V(G')$ escribiremos simplemente $G \setminus G'$. Para un subconjunto F de $[V]^2$ escribimos $G \setminus F := (V, A \setminus F)$ y $G + F := (V, A \cup F)$; como arriba, $G \setminus \{a\}$ y $G + \{a\}$ se abrevia $G \setminus a$ y $G + a$.

subgráfica
inducida
por aristas

Si G y G' son ajenas, denotamos por $G * G'$ a la gráfica obtenida de $G \cup G'$ uniendo todos los vértices de G a todos los vértices de G' . Consideremos por ejemplo, $K^2 * K^3 = K^5$. El *complemento* \bar{G} de G es la gráfica en V donde su

$G * G'$

complemento \bar{G}

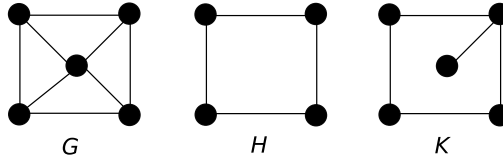


Figura 1.3: Una gráfica G con subgráficas H y K ; H es una subgráfica inducida de G , pero K no lo es.

gráfica de líneas $L(G)$

conjunto de aristas es $[V]^2 \setminus A$. La *gráfica de líneas* $L(G)$ de G es la gráfica en A (tiene A como conjunto de vértices) y $x, y \in A$ son adyacentes si y sólo si son adyacentes en G como aristas.

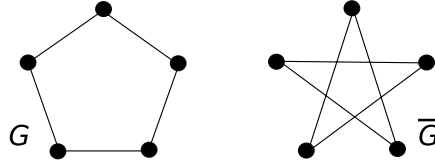


Figura 1.4: Una gráfica isomorfa a su complemento.

1.2. El grado de un vértice.

El conjunto de vecinos de un vértice v en G se denota por $N_G(v)$, o brevemente $N(v)$ (aquí, como el resto del tiempo, nos olvidamos del subíndice que indica la gráfica si la referencia es clara). De manera más general para $U \subset V$, los vecinos en $V \setminus U$ de los vértices en U se dicen *vecinos de U* ; su conjunto se denota por $N(U)$.

El grado $d_G(v) = d(v)$ de un vértice v es el número $|N(v)|$ de un vértice; por nuestra definición de gráfica, esto es igual al número de vecinos de v . Un vértice de grado 0 se llama *aislado*. El número $\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V\}$ es el *mínimo grado de G* , $\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V\}$ su *máximo grado*. Si todos los vértices en G tienen el mismo grado k , entonces llamamos a G *k -regular* o *regular*.

Proposición 1 El número $\sum_{v \in V} d(v)$ es par.

Demostración:

Si sumamos cada $d(v)$ para todo vértice de G estamos contando cada arista exactamente dos veces: una por cada uno de sus extremos.

□

Corolario 1 $|A| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$

$N(v)$

$N(U)$

aislado

$\delta(G)$

$\Delta(G)$

regular

Demostración:

Inmediata de los argumentos usados en la proposición.

□

Corolario 2 *El número de vértices con grado impar es siempre una cantidad par.*

Demostración:

Si no fuese el caso, el número $\sum_{v \in V} d(v)$ sería impar; una contradicción a la proposición 1.

□

1.3. Trayectorias, ciclos y caminos.

Una *trayectoria* es una gráfica no vacía $P = (V, A)$ de la forma

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \quad A = \{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{k-1}x_k\},$$

donde las x_i son todas distintas. Los vértices x_0 y x_k están *conectados* por P y se llaman sus extremos; los vértices x_1, \dots, x_{k-1} son los vértices internos de P . k es la *longitud* de P , la longitud de una trayectoria τ se denota por $l(\tau) = k$.

Regularmente nos referiremos a una trayectoria por la secuencia natural de sus vértices, escribiendo $P = x_0x_1 \dots x_k$ y llamando a P una trayectoria de x_0 a x_k (o de x_k a x_0) también escribiremos a esta secuencia como $P = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ o $P = x_0, x_1, \dots, x_k$. Entenderemos por P^{-1} al recorrido inverso de la trayectoria P , ésta es una nueva trayectoria que se expresa formalmente por $P^{-1} := x_kx_{k-1} \dots x_0$.

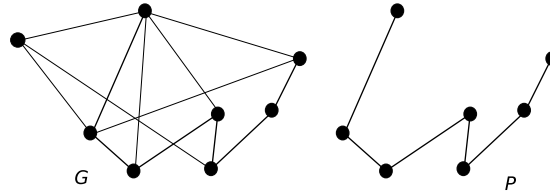


Figura 1.5: Una trayectoria P en G .

Para las subtrayectorias apropiadas de P con $0 \geq i \geq j \geq k$ escribimos:

$$Px_i := x_0 \dots x_i$$

$$x_iP = x_i \dots x_k$$

$$x_iPx_j = x_i \dots x_j$$

además,

$$\begin{aligned} \dot{P} &:= x_1 \dots x_{k-1} \\ P\dot{x}_i &:= x_0 \dots x_{i-1} \\ \dot{x}_i P &:= x_{i+1} \dots x_k \\ \dot{x}_i P \dot{x}_j &:= x_{i+1} \dots x_{j-1} \end{aligned}$$

Usamos una notación intuitiva similar para la concatenación de trayectorias: por ejemplo, si la unión $Px \cup xQy \cup yR$ de tres trayectorias es de nuevo una trayectoria, podemos denotarla simplemente por $PxQyR$.

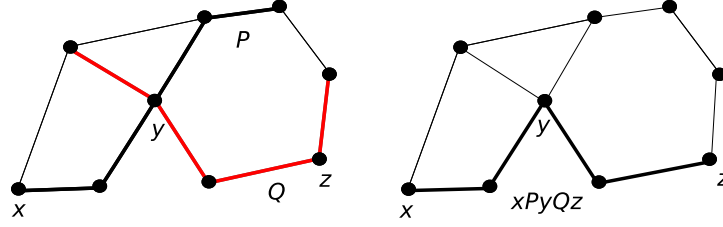
 $PxQyR$ 

Figura 1.6: Trayectorias P , Q y $xPyQz$.

Dados conjuntos de vértices A y B , llamamos $P = x_0 \dots x_k$ una AB -trayectoria si $V(P) \cap A = \{x_0\}$ y $V(P) \cap B = x_k$. Como antes, escribimos aB -trayectoria en vez de $\{a\}B$ -trayectoria, etc.

Si $P = x_0 \dots x_{k-1}$ es una trayectoria y $k \geq 3$, entonces la gráfica $C := P + x_{k-1}x_0$ se llama *ciclo*. Como en las trayectorias, usualmente denotamos a los ciclos por su sucesión natural de vértices; el ciclo de arriba puede ser expresado como $x_0 \dots x_{k-1}x_0$. La *longitud* de un ciclo es su número de aristas (o vértices); un ciclo de longitud k se llama k -ciclo.

Dada G gráfica, un *camino* es una secuencia $C = v_0v_1 \dots v_k$ de vértices en G tal que $\{v_i, v_{i+1}\}$ es una arista de G para toda $i < k$; la longitud de C es k y se denota por $l(C)$. Como en trayectorias, la escritura puede ser $C = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ o $C = v_0, v_1, \dots, v_k$. Si $v_0 = v_k$, el camino es *cerrado*. Si los vértices en el camino son todos distintos, define una trayectoria en G .

Un *subcamino* de un camino $C = x_0 \dots x_k$, es una subsecuencia de C que respeta el orden sucesivo de los elementos en la secuencia C . Digamos, $x_3x_4x_5$ es un subcamino de $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$, pero $x_3x_5x_6$ no lo es. Decimos que un subcamino de C es *propio*, si es de longitud estrictamente menor a la longitud de C . Sea $H = x_r x_{r+1} \dots x_{r+h} x_{r+(h+1)}$ un subcamino propio cerrado de $C = x_0 x_1 \dots x_k$; entendemos por $C - H$ (C menos H) a la sucesión de vértices $x_0 x_1 \dots x_r x_{r+(h+2)} \dots x_k$, ésta, claramente es un $x_0 x_k$ -camino. Para ser precisos: un $x_0 x_k$ -subcamino propio de C .

Lema 1 Sea C un xy -camino de longitud par (resp. impar) y H subcamino de él, cerrado de longitud par. C menos H es un xy -camino de longitud par (resp. impar).

Demostración:

 AB -trayectoria

ciclo

longitud

 k -ciclo

camino

cerrado

subcamino

propio

 $C - H$

menos

Sea $C = x_0x_1 \dots x_k$ xy -camino cerrado de longitud k y $H = x_r x_{r+1} \dots x_{r+2u}$ un subcamino propio cerrado (con longitud $2u$) de él.

Tenemos que $C - H = x_0x_1 \dots x_r x_{r+(2u+1)} \dots x_k$, su longitud es $k - 2u$. Este número tiene la misma paridad de k , que es la longitud de C . El lema queda demostrado.

□

En general, cada camino entre dos vértices contiene una trayectoria entre estos vértices, veamos la prueba de esto:

Teorema 4 *Un xy -camino contiene una xy -trayectoria.*

Demostración:

Hagamos esto por inducción sobre la longitud del camino. Para un camino de longitud 1 no hay nada que hacer puesto que él es una trayectoria; esto completa la base de inducción. Supongamos que todo xy -camino de longitud menor o igual a n , contiene una xy -trayectoria; demostremos esto para xy -caminos de longitud $n + 1$.

Sea C un camino de longitud $n + 1$. Si C no es una trayectoria, contiene un subcamino propio cerrado. C menos H es un xy -subcamino propio de C ; éste último contiene (por tanto C también) una xy -trayectoria según la hipótesis. El paso inductivo queda demostrado.

□

Lema 2 *Un camino cerrado de longitud mayor o igual a 3 que no es un ciclo, contiene un subcamino propio cerrado de longitud mayor o igual a 2.*

Demostración:

Escribimos al camino cerrado de longitud mayor igual a tres como $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1} = v_0)$, si para cada vértice v_i con $i \neq 0$ se tiene que $v_j \neq v_i$ para toda $j > i$, tendríamos que $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1} = v_0)$ es un ciclo (recordemos que es de longitud al menos tres), esto contradice la hipótesis. Esto nos dice que hay un v_{i^*} con $i^* \neq 0$ tal que $v_{i^*} = v_j$ con $j > i^*$.

Tenemos entonces la subsecuencia propia $(v_{i^*}, v_{i^*+1}, \dots, v_h, v_{h+1} = v_{i^*})$ que es de longitud al menos dos ya que no existen aristas que empiecen y terminen en un mismo punto, además, esta subsecuencia es cerrada. Ésta es un subcamino cerrado de longitud al menos dos como deseábamos encontrar.

□

Teorema 5 *Un camino C cerrado de longitud impar contiene un ciclo α de longitud impar.*

Demostración:

Demostremos esto por inducción sobre la longitud de C . Para la base de inducción, empezamos con un camino cerrado de longitud 3 (puesto que no existen caminos cerrados de longitud 1). Uno se convence fácilmente que un triángulo es la única posibilidad para este camino. Así, él es un ciclo de longitud impar.

Supongamos que todo camino cerrado de longitud $2n + 1$ contiene un ciclo de longitud impar, demostremos que lo mismo es cierto para caminos cerrados de longitud impar $2n + 3$.

Sea C camino cerrado de longitud $2n + 3$, si C es un ciclo, hemos terminado. Si no es un ciclo, C contiene un subcamino propio cerrado. Si este subcamino propio es de longitud impar, la hipótesis de inducción nos dice que contiene un ciclo de longitud impar; ciertamente contenido en C . Si el subcamino propio es de longitud par, podemos restarlo a C para obtener un subcamino propio cerrado de longitud impar, que, contiene un ciclo de longitud impar por la hipótesis. En todo caso, C contiene un ciclo de longitud impar, como se quería mostrar.

□

1.4. Conexidad.

conexa

Una gráfica G se dice *conexa* si cualesquiera dos de sus vértices están conectados por una trayectoria en G . Si $U \subseteq V(G)$ y $[U]_G$ es conexa, decimos que U es conexo en G . En vez de “no conexo” solemos decir *disconexo*.

disconexo

componente
conexa

Sea $G = (V, A)$ una gráfica. Una subgráfica conexa maximal¹ de G se llama *componente conexa* de G . Podemos notar que una componente conexa es siempre no vacía.

1.5. Árboles y Bosques.

gráfica
acíclica
bosque
árbol
hojas

Una *gráfica acíclica* (una que no contiene ciclos), se llama *bosque*. Un bosque conexo se llama *árbol* (de este modo, un bosque es una gráfica cuyas componentes son árboles). Los vértices de grado 1 en un árbol se llaman *hojas*. Cada árbol no trivial posee una hoja (considera, por ejemplo, los extremos de una trayectoria de longitud máxima). Resaltemos un sencillo hecho que nos será de utilidad en las pruebas inductivas: si a un árbol se le quita una hoja, lo que resta seguirá siendo un árbol.

Teorema 6 *Un árbol con n vértices tiene $n - 1$ aristas.*

¹Un conjunto de vértices se dice maximal respecto a una propiedad si no existe un conjunto de vértices que lo contenga y posea la propiedad.

Demostración: (inducción sobre el número de vértices.)

Para el caso $n = 1$, es claro que una gráfica con sólo un vértice posee $0 = n - 1$ aristas. Supongamos válida la afirmación para árboles con n vértices y demostrémosla para árboles con $n + 1$ vértices.

Sea T árbol con $n + 1$ vértices. Dado que es un árbol no trivial, posee una hoja h . Consideremos el nuevo árbol $T' = V \setminus h$, éste es un árbol con n vértices y por hipótesis de inducción posee $n - 1$ aristas. Dado que T' sólo posee una arista menos que T , tenemos que T posee $n = (n + 1) - 1$ aristas como se deseaba mostrar.

□

1.6. Gráficas bipartitas.

Sea $r \geq 2$ un entero. Una gráfica $G = (V, A)$ se llama *r-partita* si V admite una partición en r clases tales que cada arista tenga sus extremos en clases distintas; vértices en la misma clase de la partición no pueden ser adyacentes. Usualmente nombramos a las 2-partitas como *bipartitas*.

La gráfica $\{v\} * \overline{K_n}$ es una bipartita llamada *estrella*, el vértice v es el *centro de la estrella*.

Una gráfica bipartita no puede contener ciclos de longitud impar, considérese por ejemplo, un triángulo; tres vértices que deberían estar en clases distintas 2 a 2, lo que es imposible ya que sólo hay dos clases en la partición. Esta propiedad caracteriza a las gráficas bipartitas:

Teorema 7 *Una gráfica no trivial es bipartita si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.*

Demostración:

Como sabemos que una bipartita no contiene ciclos de longitud impar, demostremos que ésta es una condición suficiente para ser bipartita. Sea $G = (V, A)$ una gráfica conexa no trivial sin ciclos de longitud impar; tomemos un vértice $r \in V$ fijo y consideremos los siguientes subconjuntos de los vértices de G :

$$P_1 = \{v \in V : \text{existe una trayectoria de longitud impar de } r \text{ a } v\}$$

$$P_2 = \{v \in V : \text{existe una trayectoria de longitud par de } r \text{ a } v\}$$

Notemos que P_1 y P_2 son no vacíos ya que r pertenece a P_2 y al ser G no trivial y conexa existe un vértice adyacente a r que pertenece a P_1 .

Notamos que todo vértice entra en alguna de las categorías al ser G conexa. Basta ver que estas clases son en realidad ajenas y no hay adyacencias entre sus elementos; supongamos que no es el caso, es decir existe $v \in P_1 \cap P_2$. Tenemos una trayectoria de longitud par τ_1 de r a v y una trayectoria de longitud impar τ_2 de v a r , sumando estas trayectorias obtenemos un camino cerrado de longitud

r-partita

bipartitas

estrella

centro
de la estrella.

impar del que podemos extraer un ciclo de longitud impar (ver teorema 5). Esto es una clara contradicción ya que suponemos que G no posee ciclos de longitud impar; de este modo, P_1 y P_2 son ajenos.

Veamos que no hay adyacencias entre elementos de una misma clase. Si hubiese vértices w, v adyacentes en P_1 (resp. P_2), tomamos trayectorias de r a ellos τ_w, τ_v de longitud impar (resp. par). Como w y v son adyacentes, tenemos que $\tau_w w v \tau_v^{-1}$ es un camino cerrado de longitud impar en G . El teorema 5 puede extraer un ciclo de longitud impar de este camino; esto es una contradicción y concluimos que: elementos de una misma clase no pueden ser adyacentes.

Estos argumentos garantizan que $P = \{P_1, P_2\}$ es partición de $V(G)$ donde elementos de una misma clase son no adyacentes; dicho de otro modo, G es bipartita.

Cuando G no es conexa nos fijamos en cada una de sus componentes conexas y repetimos el proceso anterior para cada una de ellas, esto nos arroja biparticiones para cada una, las cuales podemos agrupar fácilmente de modo que obtengamos una bipartición adecuada de G .

□

1.7. Digráficas y núcleos.

digráfica

flechas

Una *digráfica* D (o gráfica dirigida) es una pareja ordenada $(V(D), F(D))$ de conjuntos ajenos (vértices y flechas) donde $F(D)$ consta de parejas ordenadas (x, y) llamadas *flechas*, con $x, y \in V$ y $x \neq y$. Veamos un dibujo:

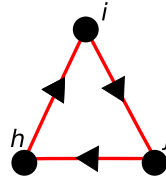


Figura 1.7: Digráfica con $V = \{h, i, j\}$ y $F = \{(h, i), (i, j), (j, h)\}$.

extremo inicial

extremo final

extremos

torneo

exgrado

ingrado

flechas

independientes

Dada una flecha $f = (x, y)$, nombramos a x, y *extremo inicial* y *extremo final* de f respectivamente; x, y son los *extremos* de f . Un *torneo* T es una digráfica donde una y sólo una de las parejas $(x, y), (y, x)$, pertenece a las flechas de T . El *exgrado* o grado exterior (resp. *ingrado* o grado interior) de un vértice v es el número de flechas que poseen a v como extremo inicial (resp. final) en D . Dos flechas $(w, x), (y, z)$, son *flechas independientes* si no comparten extremos. En la figura 1.7 cada vértice tiene exgrado e ingrado 1, no hay flechas independientes y es un torneo de orden 3.

Trayectorias, caminos y ciclos en digráficas son casi lo mismo que en gráficas pero respetando la dirección de las flechas; se llaman trayectorias, caminos

y ciclos dirigidos². Un *camino dirigido* en una digráfica D es una sucesión de vértices $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ donde cualesquiera dos vértices consecutivos (\dots, x, y, \dots) forman una flecha (x, y) de D . Una *trayectoria dirigida* es un camino dirigido $\tau = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ donde cualesquiera dos vértices son diferentes. Un *ciclo dirigido* es un camino dirigido $\alpha = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ donde $\alpha v_{n-1} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ es una trayectoria. Echemos un vistazo al camino (h, i, j, h, i, j) , la trayectoria (h, i, j) y el ciclo (h, i, j, h) de la figura 1.7.

Un conjunto $S \subseteq V(D)$ se dice *absorbente* si, para cada vértice $v \in D \setminus S$, existe una flecha en D con extremo inicial v y algún vértice en S como extremo final. Dos vértices x, y se dicen *independientes* si las parejas $(x, y), (y, x)$ no son flechas en D .

A un conjunto absorbente $H \subseteq V(D)$ con elementos independientes dos a dos en D , lo llamamos *núcleo*. Notemos que un núcleo de una digráfica no vacía es no vacío.³

Mencionemos algunos resultados clásicos de la teoría de núcleos:

Teorema 8 [9] *Toda digráfica bipartita posee núcleo.*

Teorema 9 [10, 11] *Toda digráfica sin ciclos (dirigidos) de longitud impar posee núcleo.*

1.8. Coloraciones y núcleos por trayectorias monocromáticas.

A lo largo de la tesis, la coloración de aristas y flechas es muy importante, y aunque todos pensamos en lo mismo al leer “coloración de aristas y flechas”, debemos introducir formalmente el concepto: Una digráfica D se dice *m-coloreada* si tiene una función g sobreyectiva de $F(D)$ a un conjunto \mathcal{C} de m elementos (los colores), llamamos a g *función de coloración monocromática*. Si $m = 1$, D se dice *monocromática*. También podemos colorear una gráfica G tomando $A(G)$ como dominio de la función, G se dice *m-coloreada por aristas*. Decimos que un *color* $i \in \mathcal{C}$ *incide* en $v \in V(G)$ si existe una arista a de color i en G tal que $v \in a$.

Sea G coloreada por aristas y $v \in V(G)$, definimos a $\xi(v)_G$ como el conjunto de colores que inciden en v dentro de G , $\xi(v)_G$ se llama el *gamut* de v en G . Decimos además que un color i *converge* en v si $\xi(G \setminus \{v\})$ no contiene al color i .

Dada una gráfica G coloreada por aristas y $a \in A(G)$ decimos que $\xi(a)$ es el color de a en G . En general si $K \subseteq A(G)$ definimos a $\xi(K) := \{\xi(a) : a \in K\}$.

Un conjunto $S \subseteq V(D)$ se dice *absorbente por trayectorias monocromáticas* si dado cualquier x en $V(D) \setminus S$, existe una xw -trayectoria monocromática

²Extrapolaremos a digráficas toda la notación expuesta en la sección 1.3.

³Mas, no toda digráfica posee núcleo; considera la figura 1.7.

camino dirigido
trayectoria dirigida
ciclo dirigido
absorbente
independientes
núcleo
m-coloreada
función de coloración monocromática
m-coloreada por aristas
incidencia de color en v
 $\xi(v)_G$
 $G, \xi(v)_G$
gamut converge
 $\xi(a)$
 $\xi(K)$
absorbente por trayectorias monocromáticas

independientes
por trayectorias
monocromáticas

para algún w en S . Dos vértices x, y se dicen *independientes por trayectorias monocromáticas* si no existe xy -trayectoria ni yx -trayectoria monocromática en D .

Una digráfica H se dice *casimonocromática* si todas las flechas en H salvo a lo más una son del mismo color.

Un conjunto $N \subseteq V(D)$ se dice un *núcleo por trayectorias monocromáticas* o *n.t.m.* si cumple con las siguientes condiciones:

núcleo
por trayectorias
monocromáticas
n.t.m

1. N es absorbente por trayectorias monocromáticas.
2. Los elementos de N son independientes por trayectorias monocromáticas dos a dos.

Sands, Sauer y Woodrow [12] demostraron en 1982 un resultado clásico de la teoría de núcleos por trayectorias monocromáticas:

Teorema 10 [12]

Toda digráfica 2-coloreada posee n.t.m.

No es verdadero que toda digráfica 3-coloreada posea n.t.m, considérese un ciclo dirigido 3-coloreado. Para el caso de 3-coloraciones se han agregado varias condiciones y se ha trabajado sobre distintos grupos de digráficas para garantizar la existencia de n.t.m. Una hermosa conjetura propone lo siguiente:

Conjetura 1 (Shen Minggang) [8]

Si T es un torneo 3-coloreado donde todo ciclo dirigido de longitud m es casimonocromático, T posee n.t.m.

En [6] se encuentran contraejemplos para el caso de torneos m -coloreados con $m \geq 4$. El último bastión de la conjetura es $m = 3$.

El problema para torneos m -coloreados donde todo ciclo dirigido de longitud 3 es monocromático, es resuelto afirmativamente en 1998 por Hortensia Galeana en [5].

A pesar de que el resto de la tesis no se ocupa tanto de los n.t.m, quisieramos dar alguna intuición sobre el tema. Para esto, demostraremos que toda digráfica monocromática posee n.t.m⁴.

Teorema 11 *Toda digráfica monocromática posee n.t.m.*

Demostración:(esbozo)

El teorema es una consecuencia inmediata del teorema de Sands, Sauer y Woodrow pero preferimos hacer una prueba independiente.

Partimos tomando un conjunto H tal que todo vértice de $D \setminus H$ sea absorbido por algún elemento de H ($H = V(G)$ por ejemplo).

El problema para proponer a D como n.t.m es que elementos de él pueden no ser independientes; si los elementos de H son independientes dos a dos,

⁴Pero, no necesariamente núcleo.

habríamos terminado. En caso contrario tomemos v, w en H tales que existe una vw -trayectoria monocromática (llamémosla τ_{vw}); es decir, v es absorbido por w , más aún, todo lo que absorbe v lo absorbe w ; si r es absorbido por v existe una rv -trayectoria monocromática (llamémosla τ_{rv}), el camino dirigido $\tau_{rv}\tau_{vw}$ lleva r a w y es monocromático ya que las aristas de G son todas del mismo color, de este camino se puede extraer una trayectoria dirigida monocromática de r a w .

Así, podemos eliminar v de H sin afectar su propiedad absorbente. El proceso se repite cuantas veces sea necesario hasta obtener un conjunto con elementos independientes dos a dos que es absorbente por trayectorias monocromáticas⁵; un núcleo por trayectorias monocromáticas.

□

⁵El proceso termina dado que G tiene una cantidad finita de vértices.

Capítulo 2

Coloraciones Shen.

En honor a Shen Minggang, decimos que una gráfica G coloreada por aristas está *Shen coloreada* si todo triángulo es casimonocromático.

En este capítulo deseamos estudiar las gráficas completas Shen coloreadas. Acotamos el máximo número de colores que pueden tener y obtenemos propiedades globales equivalentes a la Shen coloración.

Shen
coloreada

2.1. Cota de colores.

Teorema 12 *Sea C gráfica completa de orden n m -coloreada por aristas y Shen coloreada, entonces $m \leq n - 1$.*

Para demostrar el teorema necesitamos los siguientes lemas:

Lema 3 *Una gráfica acíclica W de orden n tiene a lo más $n - 1$ aristas.*

Lema 4 *Sea C completa y Shen coloreada. Dado cualquier $R \subseteq A(C)$ con elementos de colores distintos dos a dos, se tiene que $[R]_C$ es acíclica.*

Demostración: (Teorema 12)

Tomemos R como se menciona en el lema 4 para todos los colores que contiene C , las flechas de R generan en C una gráfica acíclica (lema 4), como la gráfica generada es de orden a lo más n , el lema 3 nos garantiza que esta gráfica tiene a lo más $n - 1$ aristas, o lo que es lo mismo, R no contiene más de $n - 1$ representantes.

R tenía representantes de cada color, esto hace justo el teorema.

□

Demostración: (lema 3)

Notemos que una gráfica acíclica W siempre se puede ver como subgráfica de un árbol del mismo orden. Del teorema 6 concluimos que W tiene $n - 1$ aristas a lo más.

□

Demostración: (lema 4)

Basta demostrar que no existen en C ciclos con aristas de colores distintos dos a dos dado que un ciclo de $[R]_C$ con $R \subseteq A(C)$ es un ciclo de C , en particular si tomamos a R con elementos de colores distintos dos a dos.

Demostremos, por inducción sobre d que no existen ciclos de longitud d con aristas de colores distintos dos a dos.

Para $d = 3$ la Shen coloración nos garantiza que cualquier triángulo tiene al menos dos aristas del mismo color.

Supongamos que no existen ciclos de longitud d con aristas de colores distintos dos a dos y demostremos la afirmación para $d + 1$.

Digamos que existe un ciclo de longitud $d + 1$ con aristas de colores distintos dos a dos, $\alpha = v_0v_1v_2v_3 \dots v_dv_0$.

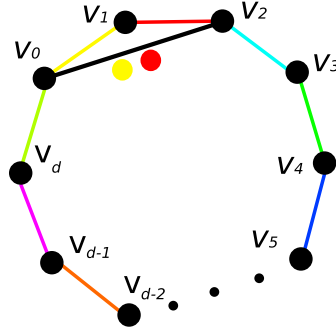


Figura 2.1: Ciclo de longitud $d + 1$ con aristas de colores distintos dos a dos.

Acordemos que el color de las aristas v_0v_1 y v_1v_2 sean amarillo y rojo respectivamente. Consideramos el color de la arista v_0v_2 , ésta es de color amarillo o rojo ya que el triángulo $v_0v_1v_2$ es casimonocromático. Ver figura 2.1.

El ciclo $v_0v_2v_3 \dots v_dv_0$ es de longitud d y sus aristas son de colores distintos dos a dos. Esto contradice a la hipótesis de inducción, por tanto, α no puede existir. La afirmación se demuestra para $d + 1$ y el lema 4 queda demostrado.

□

El teorema 12 se puede interpretar desde la perspectiva de un juego. Se dibujan n puntos en una hoja; en su turno, los jugadores podrán hacer adyacentes a dos de los puntos con un color de su elección; no es válido hacer adyacentes

a puntos que ya lo eran. Pierde el primero que forme un triángulo tres coloreado, o si lo prefieren, usemos una regla estilo "jenga": gana el anterior al que lo formó. En cualquier caso, el teorema 12 garantiza la existencia de un ganador o perdedor si el número de colores usados es al menos el número de puntos dibujados.

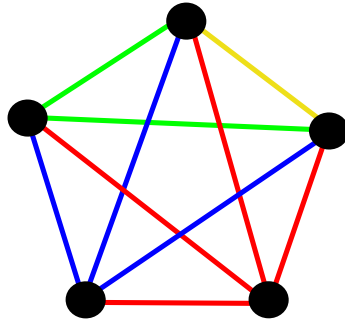


Figura 2.2: Ejemplo de gráfica completa Shen coloreada, notemos que es de orden 5 con 4 colores, el máximo posible para este orden.

2.2. Equivalencias de la Shen coloración.

Sea G una gráfica coloreada por aristas y $H_i \subseteq A(G)$ el conjunto de todas las aristas de color i . Nombramos a $[H_i]_G$ la *componente monocromática* de color i en G . Decimos que una subgráfica W de G es *generadora* si $V(W) = V(G)$. Además, un color es *generador* si su componente monocromática es generadora.

componente
monocromática
generadora
color
generador

El siguiente teorema nos describe con más detalle el significado de las coloraciones Shen:

Teorema 13 *Sea C gráfica completa coloreada por aristas, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. C está Shen coloreada.
2. Dado cualquier $W \subseteq V(G)$, $[W]_C$ posee una componente monocromática conexa y generadora (no necesariamente única).
3. Dado cualquier $R \subseteq A(C)$ con elementos de colores distintos dos a dos, se tiene que $[R]_C$ es acíclica.
4. Dado un ciclo cualquiera de longitud d en C , tiene a lo más $d - 1$ colores.

Demostración:

$1 \Rightarrow 2$ (Inducción sobre el orden de C)

Dado que la inducida por vértices de una completa Shen coloreada es una completa y Shen coloreada, basta demostrar que toda completa Shen coloreada posee una componente monocromática conexa generadora.

Para $n = 1$ tenemos un vértice; es claro que un vértice posee una componente monocromática conexa generadora (c.m.c.g).

Supongamos que toda completa Shen coloreada con q vértices posee una componente monocromática conexa generadora y demostremos la afirmación para $q + 1$.

Tomemos una completa Shen coloreada E con $q + 1$ vértices. Elegimos un vértice v cualquiera de E . Si las aristas que inciden en v son todas del mismo color, ahí tenemos la componente monocromática conexa generadora que buscamos para E . Ver figura 2.3.

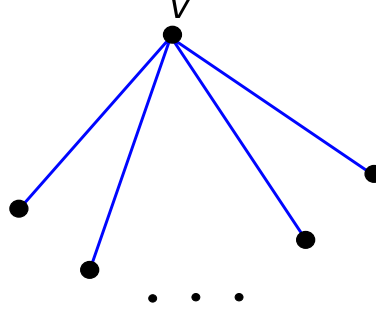


Figura 2.3: Si todas las aristas que inciden en v son del mismo color se forma una estrella en E .

En caso contrario consideremos a la gráfica completa Shen coloreada con q vértices $E - v$. Ella posee una c.m.c.g por hipótesis de inducción; acordemos que sea de color rojo.

Si en v incide una arista de color rojo, la componente roja de E sería generadora ya que era generadora en $E - v$, además, sería conexa ya que la arista que incide de color rojo en v tiene su otro extremo en uno de los vértices de $E - v$ y allí la componente roja era conexa. De modo que si en v incide una arista de color rojo, E posee una c.m.c.g y acabamos. Supongamos que no es el caso.

Hasta ahora podemos suponer que en v inciden al menos dos colores distintos y ninguna arista incidente en v es de color rojo. Veamos la figura 2.4.

Dicho lo anterior, sean r_0 y r_{k+1} vértices tales que las aristas r_0v y $r_{k+1}v$ sean de color azul y verde respectivamente.

De r_0 a r_{k+1} existe un camino de color rojo ya que la componente roja es conexa en $E - v$. De este camino podemos extraer una trayectoria $r_0r_1r_2 \dots r_kr_{k+1}$. Veamos la figura 2.5.

Consideremos la arista vr_1 , ésta es de color rojo o azul ya que el triángulo vr_0r_1v tiene los colores rojo y azul. No puede ser roja por que las aristas que inciden en v no son de color rojo de modo que vr_1 es azul. Supongamos que la

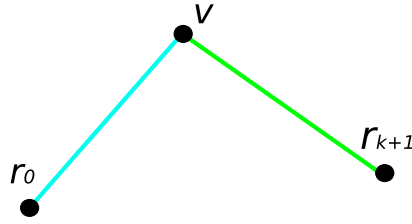


Figura 2.4: En v inciden al menos dos colores y ninguna arista de color rojo.

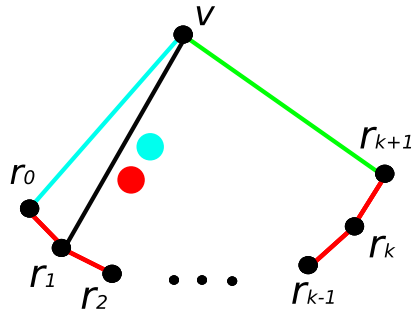


Figura 2.5: La trayectoria $r_0 r_1 r_2 \dots r_k r_{k+1}$ y las opciones de color para la arista vr_1 .

arista vr_h es de color azul, consideremos la arista vr_{h+1} ; dado que el triángulo $vr_h r_{h+1} v$ contiene a los colores rojo y azul, vr_{h+1} es de color rojo o azul, pero no es rojo ya que v no tiene aristas incidentes de color rojo, entonces vr_{h+1} es azul. Como vr_0 es azul, tenemos que vr_t es de color azul para $0 \leq t \leq k+1$, en particular vr_{k+1} que suponíamos de color verde. Esto es una contradicción proveniente de suponer que no incide arista de color rojo en v .

Así, la c.m.c.g de $E - v$ se extiende a E y hemos acabado.

$2 \Rightarrow 1$. Consideremos un triángulo cualquiera de G , la hipótesis nos dice que posee una componente monocromática conexa generadora, es decir es casi-monocromático.

$1 \Rightarrow 3$. Ver lema 4.

$3 \Rightarrow 4$. Si existiera un ciclo de longitud d con más de $d - 1$ colores en sus aristas, todas sus aristas serían de colores distintos ya que un ciclo de longitud d tiene d aristas. Tomando la gráfica inducida por este conjunto de aristas de colores distintos dos a dos ésta contendría precisamente al ciclo de longitud d , esto contradice a 3.

$4 \Rightarrow 1$. Considerando un triángulo cualquiera de G , lo podemos ver como un ciclo de longitud 3, la hipótesis dice que tiene a lo más 2 colores, o lo que es lo

mismo, es casimonocromático.

Esto muestra la equivalencia de las afirmaciones hechas en el teorema.

□

Capítulo 3

Coloraciones Shen Maximales.

Una gráfica Shen coloreada de orden n con $n - 1$ colores se llama gráfica *Shen maximal*.

En este capítulo se construyen todas las gráficas Shen maximales.

Shen
maximal

3.1. Productos coloreados y gráficas Shen maximales.

Definamos la siguiente operación: Sean G_1 y G_2 gráficas coloreadas por aristas, definimos a $G_1 *_c G_2$ como la gráfica $G_1 * G_2$ donde el color de la arista $v_1 v_2$ está dado por:

*_c
producto
coloreado

- El color que tenía en G_1 si $v_1 v_2$ están en $A(G_1)$.
- El color que tenía en G_2 si $v_1 v_2$ están en $A(G_2)$.
- El color c si $v_1 v_2$ no está en $A(G_1)$ ni en $A(G_2)$.

Teorema 14 *Dadas G_1 y G_2 gráficas Shen coloreadas, $G_1 *_c G_2$ es Shen coloreada.*

Demostración:

Sea $v_1 v_2 v_3 v_1$ triángulo de $G_1 *_c G_2$, basta demostrar que no es tricolor. Hay dos posibilidades:

1. Si v_1, v_2 y v_3 están en $V(G_1)$, el triángulo $v_1 v_2 v_3 v_1$ está coloreada como lo estaría en G_1 y como G_1 es Shen coloreada, $v_1 v_2 v_3 v_1$ no puede ser tricolor. Análogamente si v_1, v_2, v_3 están en $V(G_2)$.

2. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que v_1 y v_2 están en $V(G_1)$ y v_3 está en $V(G_2)$, esto implica que las aristas v_1v_3 y v_2v_3 son de color c en el triángulo $v_1v_2v_3v_1$ por tanto no puede ser tricolor.

Esto muestra que ningún triángulo es tricolor en $G_1 *_c G_2$, por tanto es Shen coloreada.

□

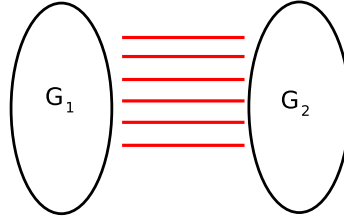


Figura 3.1: $G_1 *_c G_2$

Corolario 1 Dadas G_1 y G_2 gráficas Shen maximales con colores distintos ($\xi(G_1) \cap \xi(G_2) = \emptyset$) y c un color que no pertenece a ninguno de los colores de G_1 ni de G_2 , se tiene que $G_1 *_c G_2$ también es Shen maximal.

Demostración:

Por el teorema 14 tenemos que $G_1 *_c G_2$ es Shen coloreada. Como $G_1 *_c G_2$ es de orden $|G_1| + |G_2|$ tenemos que probar que tiene $|G_1| + |G_2| - 1$ colores para demostrar que es Shen maximal.

Como G_1 y G_2 no comparten colores y están contenidas en $G_1 *_c G_2$ hay al menos $(|G_1| - 1) + (|G_2| - 1)$ colores en $G_1 *_c G_2$. Además, existe una arista de color c ya que G_1 y G_2 continen al menos un vértice, por tanto, $G_1 *_c G_2$ contiene al menos $(|G_1| - 1) + (|G_2| - 1) + 1 = (|G_1| + |G_2|) - 1$ colores que es el máximo posible para una gráfica Shen coloreada de orden $|G_1| + |G_2|$, es decir: $G_1 *_c G_2$ es Shen maximal.

□

Consideremos la siguiente expresión:

$$R_n = V_1 *_c V_2 *_c V_3 *_c \dots *_c V_n$$

Si definimos $V_i = \{v_i\}$ tenemos gráficas para operar con $*_{c_j}$ pero la expresión R_n aún no tiene un significado bien definido ya que la forma en que ponemos los paréntesis afecta de forma esencial la gráfica final. Tomemos como ejemplo la figura 3.2.

Teorema 15 Toda parentización de $\{v_1\} *_c \{v_2\} *_c \{v_3\} *_c \dots *_c \{v_n\}$ es una gráfica Shen maximal.

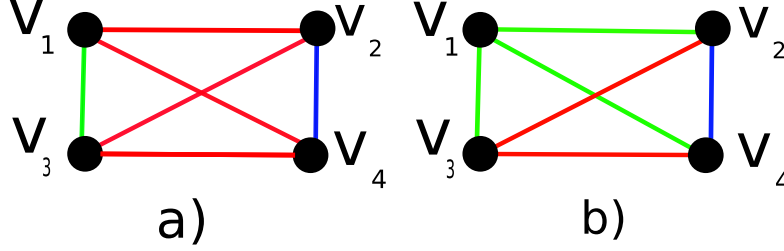


Figura 3.2: a) $(V_1 *_{verde} V_2) *_{rojo} (V_3 *_{azul} V_4)$ b) $V_1 *_{verde} (V_2 *_{rojo} (V_3 *_{azul} V_4))$

Demostración:

Haremos inducción sobre n en $\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \{v_3\} *_{c_3} \dots *_{c_{n-1}} \{v_n\}$. Para $n = 1$ tenemos un vértice, que es una gráfica Shen maximal. Supongamos que toda parentización $\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \{v_3\} *_{c_3} \dots *_{c_{k-1}} \{v_k\}$ con $k \leq n$ es una gráfica Shen maximal y demostremos la afirmación para $n + 1$.

Tomemos una parentización de $\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \{v_3\} *_{c_3} \dots *_{c_n} \{v_{n+1}\}$, consideremos los paréntesis exteriores, es decir, aquellos que parten la expresión entera en dos: $(\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \dots \{v_j\}) *_{c_j} (\{v_{j+1}\} *_{c_{j+1}} \dots *_{c_n} \{v_{n+1}\})$. De esta última expresión tenemos dos gráficas a las que podemos aplicar la hipótesis de inducción, a saber: $(\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \dots \{v_j\})$ y $(\{v_{j+1}\} *_{c_{j+1}} \dots *_{c_n} \{v_{n+1}\})$.

De lo argumentado anteriormente tenemos que una parentización de $\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \{v_3\} *_{c_3} \dots *_{c_n} \{v_{n+1}\}$ se puede ver como un producto de color c_j con gráficas Shen maximales que no comparten colores y c_j un color que no está en ninguna de las gráficas Shen maximales. El corolario 1 nos garantiza que un producto de esta forma es una gráfica Shen maximal, es decir: toda parentización de $\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \{v_3\} *_{c_3} \dots *_{c_n} \{v_{n+1}\}$ es una gráfica Shen maximal.

□

Las figuras 3.3, 3.4, 3.5 muestran ejemplos de parentizaciones para R_5 .

Tenemos ahora una forma de generar una gran cantidad de gráficas Shen maximales, deseamos saber si toda gráfica Shen maximal se puede generar de esta manera. La respuesta a esta pregunta se dará al final del capítulo.

3.2. Estudio de las gráficas Shen maximales.

Uno sospecharía que si una coloración es Shen maximal, toda subgráfica inducida de ella tendría una coloración Shen maximal, así por ejemplo ningún triángulo sería monocromático en una coloración Shen maximal. Resumamos esto con el siguiente teorema:

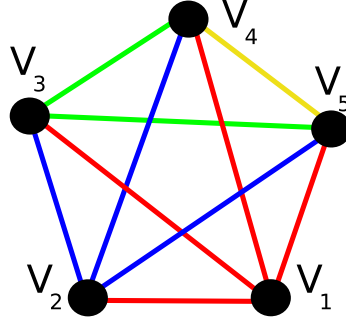


Figura 3.3: V_1 *rojo (V_2 *azul (V_3 *verde (V_4 *amarillo V_5)))

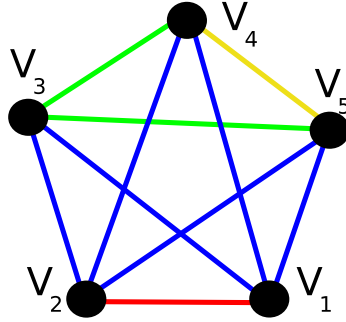


Figura 3.4: $(V_1$ *rojo V_2) *azul (V_3 *verde (V_4 *amarillo V_5))

Teorema 16 Sea G gráfica completa Shen maximal y $H \subset V(G)$, se tiene que $[H]_G$ es Shen maximal.

Para demostrar el teorema necesitamos el siguiente lema:

Lema 5 Sea G gráfica Shen maximal y $v \in V(G)$, entonces uno y sólo un color converge en v , es decir, $G \setminus \{v\}$ es Shen maximal.

Demostración: (teorema 16)

Sea $n - i$ la cardinalidad del conjunto H , la prueba del teorema se hará por inducción sobre i .

La veracidad de $k = 1$ se sigue del lema 5 ya que $[H]_G = G \setminus \{v\}$. Así pues, supongamos válido que $[H]_G$ es Shen maximal para toda H de cardinalidad $n - k$ y demostremos que $[H]_G$ es Shen maximal para todo conjunto H de cardinalidad $n - (k + 1)$.

Sea $1 < k + 1 < n$ (si $k + 1 \geq n$ obtenemos el vacío que no consideramos como gráfica en este trabajo), tomemos un conjunto H de cardinalidad $n - (k + 1)$, demostremos que $[H]_G$ es Shen maximal. Para esto agreguemos un vértice al

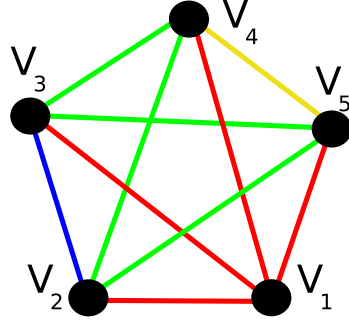


Figura 3.5: V_1 *rojo $((V_2$ *azul $V_3)$ *verde $(V_4$ *amarillo $V_5))$

conjunto H que no esté en H , digamos w (éste existe ya que la cardinalidad de H no es mayor a $n - 2$), consideremos a $[H \cup \{w\}]_G$, esta gráfica es Shen maximal ya que el conjunto $H \cup \{w\}$ es de cardinalidad $n - k$. Tomando como gráfica Shen maximal a $[H \cup \{w\}]_G$ y como vértice a w para usar el lema 5, obtenemos que $[(H \cup \{w\}) \setminus w]_{[H \cup \{w\}]_G}$ es Shen maximal. Esta última gráfica es claramente $[H]_G$ con lo que queda demostrado el paso inductivo y con él, el teorema.

□

Demostración: (lema 5)

Empecemos probando que hay a lo más un color que converge en v . Supongamos que no es el caso, es decir, al menos dos colores convergen en v , nombremos 1 y 2 a estos colores. Sean (v, v_1) y (v, v_2) aristas de colores 1 y 2, respectivamente.

Sabemos que la gráfica $[G \setminus \{v\}]_G$ no contiene los colores 1 y 2 porque esos colores convergen en v , de modo que la arista (v_1, v_2) no es de color 1 ni 2.

Tenemos que el triángulo (v, v_1, v_2) es tricoloreado, contradiciendo la Shen coloración de G . Esta contradicción proviene de suponer que en v convergen al menos 2 colores. Concluimos que en v converge un color a lo más.

Si en v no converge color alguno, la gráfica completa y Shen coloreada $[G \setminus \{v\}]_G$ de orden $n - 1$, tendría $n - 1$ colores. Considerando que en el capítulo anterior demostramos que una gráfica completa Shen coloreada de orden $n - 1$ posee $n - 2$ colores a lo más, tenemos una contradicción que proviene de suponer que en v no converge color alguno. Concluimos que en v converge al menos un color y añadiendo la conclusión de arriba, exactamente uno como queríamos demostrar.

□

Ahora sabemos que los colores están bien repartidos en el sentido de que toda subgráfica inducida de una gráfica Shen maximal es Shen maximal, además,

la forma en que estos colores se acomodan no es arbitraria, de hecho, es singularmente ordenada como veremos a continuación. Comencemos por mostrar que las componentes monocromáticas son conexas:

Lema 6 *Toda componente monocromática de una gráfica Shen maximal es conexa.*

Demostración: (Contradicción)

Sea A componente monocromática de color i con al menos dos componentes conexas: C_1, C_2 . Estas contienen aristas ya que al ser no vacías (por definición) contienen un vértice al menos; este vértice pertenece a la componente monocromática A y para pertenecer a ésta, debe tener una arista incidente de color i que pertenece a su vez a la componente conexa de donde proviene el vértice. Es decir, C_1 y C_2 contienen aristas.

Construimos una nueva gráfica G' de este modo: $V(G') = V(G)$, $A(G') = A(G)$, si $a \in A(G) \setminus C_1$ la coloreamos igual que en G y si está en C_1 la pintamos con α (color que no existe en G). Notemos un par de cosas: G' es del mismo orden que G , G' tiene un color más que G .

Afirmamos que G' es Shen coloreada. Si no es el caso, existe un triángulo tricolor t que debe incluir una arista q de color α ya que el resto de las aristas en G se quedaron intactas y G es Shen coloreada. Ninguna de las aristas en t es de color i ya que la arista q era de color i en G y en caso de existir una arista de color i en t estaría en C_1 , pero, toda arista de C_1 es de color α en G' .

Si q fuera de color i , t seguiría tres coloreado aún, y con esta coloración, t existe en G , supuesta gráfica Shen coloreada. Esta contradicción proviene de suponer que G' no era Shen coloreada. Concluimos que G' es Shen coloreada.

Por otro lado, G' y G tienen el mismo orden y G' tiene un color más que G . Como G es Shen maximal, G' no puede ser Shen coloreada.

Entonces, G' es y no es Shen coloreada; esta contradicción proviene de suponer la existencia de una componente monocromática no conexa en G . El lema queda demostrado. □

Del estudio general de coloraciones Shen en gráficas completas sabemos que existe al menos una componente monocromática generadora. En el caso de las gráficas Shen maximales existe una única componente monocromática generadora y no sólo eso, además, es un torneo bipartito. Resumamos esto con el siguiente teorema:

Teorema 17 *Si G es Shen maximal no trivial, entonces G posee una componente monocromática bipartita completa y generadora.*

Demostración: (Inducción sobre el orden de G)

Para $n = 2$ tenemos un segmento, que claramente cumple la afirmación, para $n = 3$ tenemos un triángulo bicolor donde el color con dos aristas es la bipartita

completa buscada. Supongamos el teorema para cualquier Shen maximal de orden n y demostrémoslo para $n + 1$.

Sea G Shen maximal de orden $n+1$ y $v \in V(G)$, consideremos la gráfica $G-v$, ésta es de orden n y Shen maximal por el teorema 16. La hipótesis de inducción nos garantiza la existencia de una componente monocromática generadora y bipartita completa en $G - v$; llamemos al color de esta componente d y sean $\{v_1, \dots, v_k\}$ y $\{w_1, \dots, w_l\}$ la bipartición de su respectiva componente.

Como G es Shen maximal, el lema 5 nos garantiza que en v incide un color x tal que $G - v$ no lo posee; llamemos x este color, y supongamos sin pérdida de generalidad que una arista de este color es la vv_1 . Ver figura 3.6.

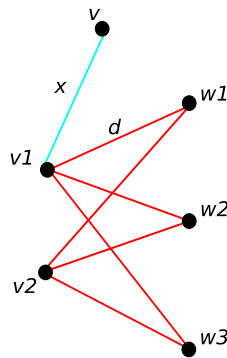


Figura 3.6: La componente generadora bipartita completa de color d y la arista vv_1 de color x (x no existe en $G - v$).

¿De qué color pueden ser las aristas vw_i ?, contemplando la figura 3.6 por un momento concluimos que las únicas posibilidades son d o x , de otro modo el triángulo vw_iv_1 sería tres coloreado. Ver figura 3.7.

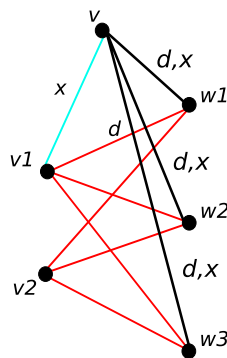


Figura 3.7: Las aristas vw_i sólo pueden ser de color d o x .

¿Pueden dos aristas vw_i, vw_j ser de colores distintos? No, veamos que si vw_i es de color d y vw_j de color x (podemos suponer esto sin preocupaciones) el triángulo vw_iw_j sería tres coloreado ya que: la arista w_iw_j no es de color d por ser w_i y w_j elementos del mismo elemento de la bipartición con color d , tampoco es de color x porque el color x no existe en $G - v$. Ver figura 3.8

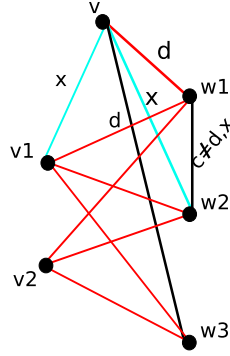


Figura 3.8: Las aristas vw_i son del mismo color.

Ahora analizamos casos:

Caso 1 : Las aristas vw_i son de color d . Ver figura 3.9

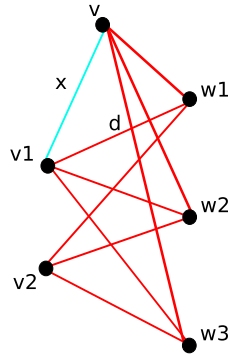


Figura 3.9: Caso 1.

En el caso 1, ¿puede una arista vw_i ser de color d ? No, dado que el triángulo vw_iw_1 sería monocromático y el teorema 16 garantiza que todo triángulo es bicolor en una Shen maximal. Ver figura 3.10.

Hemos encontrado la componente monocromática generadora y bipartita completa para G , es la componente de color d . La bipartición $\{v, v_1, \dots, v_k\}$ y $\{w_1, \dots, w_l\}$ de $V(G)$, es una buena partición ya que todo vértice del primer conjunto es adyacente a todo vértice del segundo con una arista de color d y dos elementos de un mismo conjunto no son adyacentes con una arista de color d .

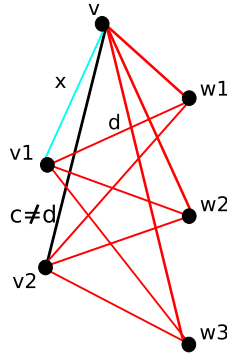


Figura 3.10: Las aristas vv_i no pueden ser de color d .

Caso 2 : Las aristas vv_i son de color x . Ver figura 3.11. $\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \{v_3\} *_{c_3} \dots *_{c_{n-1}} \{v_n\}$.

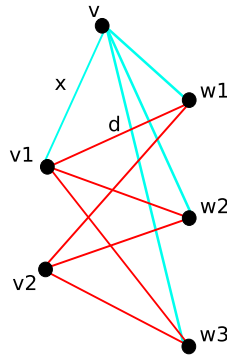


Figura 3.11: Caso 2.

En el caso 2 afirmamos que la componente de color x es generadora y bipartita completa, la bipartición es sencilla: $\{v\}, V(G) - v$. Dado que el color x no existe en $G - v$, dos vértices en $G - v$ no son adyacentes con aristas de color x . Resta probar que cualesquiera dos elementos de conjuntos distintos son adyacentes; es suficiente ver que las aristas vv_i con $i \geq 2$ son de color x .

¿De qué color pueden ser las aristas vv_i ? Viendo la figura 3.11 por un momento concluimos que sólo pueden ser de color d o x ; si no fuera el caso, el triángulo vv_iw_1 sería tres coloreado.

¿Pueden dos vv_i, vv_j ser de colores distintos? No, si fuera el caso el triángulo vv_iv_j sería tres coloreado ya que la arista v_iv_j no es de color d porque v_i, v_j pertenecen al mismo conjunto en la bipartición de la componente de color d y tampoco es de color x ya que este color no existe en $G - v$. Ver figura 3.12

¿Pueden las aristas vv_i ser de color d ? No, si vv_i es de color d , el triángulo vv_1v_i sería tres coloreado ya que la arista v_1v_i no es de color d ni x usando los mismos argumentos del párrafo anterior.

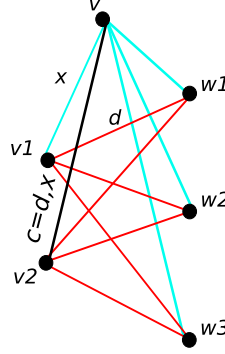


Figura 3.12: Las aristas vv_i son de color d o x .

Así, la componente de color x es generadora y bipartita completa en G como deseábamos mostrar. Esto termina la prueba del teorema.

□

Teorema 18 *Una Shen maximal posee una única componente monocromática generadora.*

Demostración:

Si existe otra, de color azul digamos, ésta debe ser conexa por el lema 6. Basta demostrar que existen dos vértices no conectables por un camino de color azul para demostrar el teorema.

Sean P_1 y P_2 los conjuntos de la bipartición para la componente monocromática generadora y bipartita completa que existe por el teorema 17; acordemos que sea de color rojo. Tomemos $x_1 \in P_1$ y $x_2 \in P_2$, afirmamos que cualquier x_1x_2 -camino contiene una arista de color rojo.

Tomamos $\Omega = (x_1 = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, x_2 = v_{k+1})$ un x_1x_2 -camino cualquiera. Como $v_0 = x_1 \in P_1$ podemos fijarnos en el v_i con subíndice más grande que tiene la siguiente propiedad: $v_i \in P_1$ y $v_j \in P_1$ para cualquier $j \leq i$. Llamemos a este vértice v_i^* . Tal vez algunos de ustedes piensen que deberíamos hacer esto más formalmente, con principio del buen orden y esas cosas, hagámoslo entonces, quienes no lo piensen así pueden saltar el siguiente párrafo.

Consideramos el conjunto $Z = \{(k+1) - i : i \in \{0, 1, \dots, k+1\}, v_i \in \Omega, v_i \in P_1 \text{ y } v_j \in P_1 \text{ para cualquier } j \leq i\}$, es claro que Z es un subconjunto de los naturales y 0 pertenece a Z . El principio del buen orden nos garantiza que Z

posee elemento mínimo, es decir, un elemento $(k+1) - i^*$ tal que $(k+1) - i^* \leq (k+1) - i$ (o equivalentemente $i \leq i^*$) para toda i con las propiedades descritas.

Notamos que $i^* \leq k$ dado que $v_{k+1} = x_2 \in P_2$, entonces v_{i^*+1} existe y pertenece a P_2 (recordemos: $P_1 \cup P_2 = V(G)$, i^* es máximo con la propiedad). La arista $v_i v_{i^*+1}$ es de color rojo y la prueba se completa.

□

3.3. Gráficas Shen maximales y parentizaciones de $\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \{v_3\} *_{c_3} \dots *_{c_{n-1}} \{v_n\}$.

Teorema 19 *Toda gráfica Shen maximal de orden n es isomorfa a una parentización de $\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \{v_3\} *_{c_3} \dots *_{c_{n-1}} \{v_n\}$.*

Demostración:

Procederemos por inducción sobre el orden de la gráfica Shen maximal. Para $n = 1$ tenemos un vértice que cumple la afirmación claramente. Supongamos que toda gráfica Shen maximal de orden $k \leq n$ es isomorfa a una parentización de $\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \{v_3\} *_{c_3} \dots *_{c_{k-1}} \{v_k\}$ y demostremos la afirmación para $n+1$.

Dada una gráfica Shen maximal G de orden n consideramos su componente monocromática bipartita completa generadora de color *rojo* digamos (ver teorema 17), si la eliminamos de G nos quedamos con dos componentes conexas, llamémoslas G_1 y G_2 . De este modo $G = G_1 *_{rojo} G_2$, como G_1 y G_2 son en si mismas gráficas Shen maximales podemos aplicar la hipótesis de inducción y decir que son isomorfas a parentizaciones de $\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \{v_3\} *_{c_3} \dots *_{c_{j-1}} \{v_j\}$ y $\{v_{j+1}\} *_{c_{j+1}} \{v_{j+3}\} *_{c_{j+3}} \dots *_{c_n} \{v_{n+1}\}$ respectivamente. También podemos decir que no comparten colores ya que G_1 y G_2 son ajenas y las componentes monocromáticas en la gráfica Shen maximal G son conexas por el lema 6, además, ninguna contiene al color rojo ya G_1 y G_2 fueron obtenidas como resultado de quitar a todas las aristas de color rojo de G .

Con todo lo argumentado anteriormente podemos concluir que G es isomorfa a una parentización de $\left(\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \{v_3\} *_{c_3} \dots *_{c_{j-1}} \{v_j\} \right) *_{h} \left(\{v_{j+1}\} *_{c_{j+1}} \{v_{j+3}\} *_{c_{j+3}} \dots *_{c_n} \{v_{n+1}\} \right)$ con h un color distinto de todo c_i . Una parentización de esta última expresión es claramente isomorfa a una parentización de $\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \{v_3\} *_{c_3} \dots *_{c_n} \{v_{n+1}\}$ como deseabamos demostrar.

□

Capítulo 4

¿De cuánto estamos hablando?

En este capítulo calcularemos de forma exacta la cantidad de gráficas Shen maximales esencialmente distintas (i.e. no isomorfas) con respecto al orden.

Las Shen maximales son gráficas completas, así que no tiene sentido hablar de isomorfismo en el sentido usual, queremos introducir el significado de coloraciones isomorfas.

4.1. Coloraciones isomorfas.

Sea G una gráfica, decimos que G' es una *coloración* de G si $G' \cong G$ y G' está coloreada por aristas.

coloración

Dado un isomorfismo g de G_1 en G_2 , definimos $g(vw)$ donde $vw \in A(G_1)$ como $g(v)g(w) \in A(G_2)$, ésto está bien definido ya que g respeta adyacencias.

Sea G una gráfica, sean G_1 y G_2 coloraciones de G , decimos que G_1 y G_2 son *coloraciones isomorfas* si existe un isomorfismo f entre ellas donde f y f^{-1} mandan aristas de igual color ($\xi(ab) = \xi(cd)$) en aristas de igual color ($\xi(f^{(-1)}(ab)) = \xi(f^{(-1)}(cd))$).

coloraciones isomorfas

4.2. Coloraciones Shen maximales isomorfas.

Si K' es una coloración de K_n y además K' es una gráfica Shen maximal decimos que K' es una *coloración Shen maximal*.

coloración Shen maximal

¿Qué es necesario para que dos coloraciones Shen maximales sean isomorfas? Sean G_1 y G_2 coloraciones Shen maximales isomorfas de K_{n+1} , sean $P_{1,1}, P_{1,2}$ y $P_{2,1}, P_{2,2}$ los respectivos conjuntos de las biparticiones para las c.m.c.g, es claro que los colores generadores deben ir de uno en otro bajo el isomorfismo ya que

al ser isomorfismo en el sentido estandar manda componentes conexas en componentes conexas, completas bipartitas en completas bipartitas y generadoras en generadoras, además, la condición de enviar aristas de un mismo color en aristas de un mismo color garantiza que la c.m.c.g de G_1 va en una c.m.c.g en G_2 pero en G_2 sólo hay una componente así.

Sean D_1, D_2 las c.m.c.g de G_1 y G_2 , respectivamente. Consideremos las nuevas gráficas $G_1 \setminus D_1$ y $G_2 \setminus D_2$, obtenemos dos componentes conexas por cada una, $[P_{1,1}]_{G_1}, [P_{1,2}]_{G_1}$ y $[P_{2,1}]_{G_2}, [P_{2,2}]_{G_2}$, como los isomorfismos mandan componente conexas en componentes conexas, una de las primeras debe ser isomorfa a una de las segundas, además, cada una de estas componentes es Shen maximal: veamos que $[P_{1,1}]_{G_1} = G_1 \setminus P_{1,2}$ y según el Teorema 16 esta última expresión es una Shen maximal ya que G_1 lo es; análogamente con el resto de las componentes.

De este modo, dadas dos gráficas Shen maximales isomorfas es necesario que las parejas de componentes conexas que restan al extraer las componentes generadoras sean isomorfas, además es suficiente que lo sean para que el isomorfismo se dé.

Sean G_1 y G_2 coloraciones Shen maximales de K_{n+1} , sean $P_{1,1}, P_{1,2}$ y $P_{2,1}, P_{2,2}$ los respectivos conjuntos de las biparticiones para las c.m.c.g donde $[P_{1,1}]_{G_1}$ es isomorfa a $[P_{2,1}]_{G_2}$ y $[P_{1,2}]_{G_1}$ es isomorfa a $[P_{2,2}]_{G_2}$, los isomorfismos implican que $e = |P_{2,1}| = |P_{1,1}|$ y $h = |P_{2,2}| = |P_{1,2}|$ de modo que las componentes generadoras de G_1 y G_2 son isomorfas a $K_{e,h}$, es fácil ver que esto implica que G_1 y G_2 son isomorfas.

Así tenemos:

Teorema 20 *Dadas G_1, G_2 gráficas Shen maximales es necesario y suficiente que $[P_{1,1}]_{G_1} \cong [P_{2,1}]_{G_2}$, $[P_{1,2}]_{G_1} \cong [P_{2,2}]_{G_2}$ o que $[P_{1,1}]_{G_1} \cong [P_{2,2}]_{G_2}$, $[P_{1,2}]_{G_1} \cong [P_{2,1}]_{G_2}$ para que $G_1 \cong G_2$.*

4.3. Conteo de coloraciones Shen maximales.

Denotemos por $D(t)$ el número de gráficas Shen maximales esencialmente distintas de orden t .

Supongamos que hemos calculado el número de gráficas Shen maximales esencialmente distintas hasta orden $n - 1$ y queremos calcular la cantidad de gráficas Shen maximales esencialmente distintas de orden n .

El Teorema 20 dice que calcular $D(n)$ es lo mismo que calcular las combinaciones esencialmente distintas de parejas de gráficas Shen maximales G_1, G_2 donde $|G_1| + |G_2| = n$. Esto es un problema sencillo y nos tomaremos la libertad de omitir las cuentas, el resultado final es la siguiente fórmula recursiva:

Para $n = 2r + 1$ tenemos:

$$D(n) = D(2r + 1) = D(1)D(2r) + D(2)D(2r - 1) + \dots + D(r - 1)D(r + 2) + D(r)D(r + 1)$$

Para $n = 2r$ tenemos:

$$D(n) = D(2r) = D(1)D(2r-1) + D(2)D(2r-2) + \dots + D(r-1)D(r+1) + \frac{D(r)(D(r)+1)}{2}$$

Explicuemos un poco el último término para los pares. Cuando $|G_1| < |G_2|$ las parejas esencialmente distintas se pueden calcular como $D(|G_1|)D(|G_2|)$, ninguna pareja contada aquí se repite y por tanto es una buena cuenta. La historia cambia cuando $|G_1| = |G_2| = t$ ya que el producto $D(|G_1|)D(|G_2|)$ cuenta dos veces las parejas cuando $G_1 = G_2$. Hagamos una tabla, dejemos vacía la casilla del extremo superior izquierdo, en las casillas de la fila superior y las casillas de la columna del extremo izquierdo introducimos una a una (y en el mismo orden) a las coloraciones no isomorfas de K_r , a estas coloraciones las denotaremos por $K_{r,i}$. Si interpretamos el resto de las casillas como la parejas correspondientes de las coloraciones que pertenecen a la columna y fila donde están ubicadas, es claro que el problema de calcular las parejas esencialmente distintas se reduce a encontrarlas en esta tabla (ver tabla abajo). Así, por ejemplo, la diagonal que va del extremo superior izquierdo al inferior derecho son las parejas del estilo $K_{r,j}K_{r,j}$.

Nos convenceremos fácilmente que las casillas ubicadas sobre y debajo de la diagonal que va del extremo superior izquierdo al inferior derecho dan la respuesta que buscamos. Una vez hecho esto, la cuenta de las casillas es fácil ya que tenemos una suma del estilo $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + D(r)$ que es justamente el termino $\frac{D(r)(D(r)+1)}{2}$.

	$K_{r,1}$	$K_{r,2}$	$K_{r,3}$	\dots	$K_{r,D(r)}$
$K_{r,1}$	$K_{r,1}, K_{r,1}$	$K_{r,1}, K_{r,2}$	$K_{r,1}, K_{r,3}$	\dots	$K_{r,1}, K_{r,D(r)}$
$K_{r,2}$	$K_{r,2}, K_{r,1}$	$K_{r,2}, K_{r,2}$	$K_{r,2}, K_{r,3}$	\dots	$K_{r,2}, K_{r,D(r)}$
$K_{r,3}$	$K_{r,3}, K_{r,1}$	$K_{r,3}, K_{r,2}$	$K_{r,3}, K_{r,3}$	\dots	$K_{r,3}, K_{r,D(r)}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
$K_{r,D(r)}$	$K_{r,D(r)}, K_{r,1}$	$K_{r,D(r)}, K_{r,2}$	$K_{r,D(r)}, K_{r,3}$	\dots	$K_{r,D(r)}, K_{r,D(r)}$

4.4. Los números de Wedderburn-Etherington y las coloraciones Shen maximales.

Trabajé un poco con esta secuencia intentado obtener una expresión explícita pero la cosa estaba enredada. Decidí consultar a mi buen amigo Daniel Garrido, él me recomienda darme una vuelta por <http://oeis.org> un sitio donde pones los primeros términos de tu secuencia y los encaja con secuencias conocidas dando sus respectivas expresiones recursivas para asegurar que es la tuya. Aproximadamente una hora después de contarle esto a Daniel, me envía un mensaje de texto diciendo que la ha encontrado en el sitio, “no sólo es conocida, ¡tiene nombre!: los números de Wedderburn-Etherington”.

Los números de Wedderburn-Etherington se pueden interpretar como:

- [3, 4] El número de formas para escribir x^n cuando la multiplicación es conmutativa pero no asociativa. Por ejemplo $a(4) = 2$, x^4 se puede escribir como $x*(x*x^2)$ o x^2*x^2 , para $a(5) = 3$, x^5 se puede escribir de 3 maneras distintas $(x*x^2)*x^2$, $x*(x*x*x^2)$ y $x*(x^2*x^2)$.
- [13] Número de árboles binarios con raíz y n hojas.
- [7] Número de maneras de ubicar n estrellas en un sistema de estrellas multiple jerarquico estable y acotado; i.e. tomando únicamente configuraciones de A003214 donde todas las estrellas estan en paréntesis externos.

Ahora podemos agregar una nueva interpretación para los números de Wedderburn-Etherington:

- Número de coloraciones para K_n con $n-1$ colores tales que ningún triángulo es tres coloreado.

A continuación presentamos los primeros docientos números de Wedderburn-Etherington:

0	0
1	1
2	1
3	1
4	2
5	3
6	6
7	11
8	23
9	46
10	98
11	207
12	451
13	983
14	2179
15	4850
16	10905
17	24631
18	56011
19	127912
20	293547
21	676157
22	1563372
23	3626149
24	8436379
25	19680277

26	46026618
27	107890609
28	253450711
29	596572387
30	1406818759
31	3323236238
32	7862958391
33	18632325319
34	44214569100
35	105061603969
36	249959727972
37	595405363473
38	1419855914607
39	3389524479050
40	8099766813570
41	19374186136140
42	46384328517112
43	111146809165122
44	266552682265118
45	639754054803187
46	1536638374367584
47	3693555574543651
48	8884204649055027
49	21383602613828364
50	51501493576783437
51	124115016908960463
52	299284329327592851
53	722086038540594854
54	1743130822668362889
55	4210157426126929793
56	10173859583519033930
57	24597126243198759014
58	59495869434450194896
59	143974655017644718094
60	348558271005906100616
61	844206159208807054529
62	2045499569096283221895
63	4958179972866730572551
64	12022969328821086710364
65	29165037890838539578082
66	70773347864023719770582
67	171802146496610097519585
68	417190639528111446770779
69	1013405655241184415852284
70	2462468880790152941279280
71	5985395828928747830707833
72	14552778100739451597075215
73	35393719712730809489290451
74	86105380575713265798811097
75	209534148915752971906161599

76	510030986091596821585587504
77	1241802284488914041806071461
78	3024262793585753830542718048
79	7367072230435035735914703359
80	17950473826186485808766524097
81	43748166298406074100165156764
82	106645908705895186413843585533
83	260031824362822308996718870500
84	634168120133303611054509027359
85	1546947706732104170486643361489
86	3774313656277441559498755236651
87	9210630365092252808401739685165
88	22481624182119802928656075014331
89	54884662988678948399811499433020
90	134016230818483951131182484937715
91	327299265300988751439224581625959
92	799488296094557358578760802052204
93	1953245860469458186958527594063777
94	4772849784961405441248983134896131
95	11664686021905422496334056044980747
96	28512887984332668599209035723441823
97	69707693362642383731710653732858756
98	170447287925675703040430908531836451
99	416838603237108467066464398213155878
100	1019560119620720464013531852138491082
101	2494155217372585318678938493802359939
102	6102370103043124907132656574525442310
103	14932646222277976709522890339749590119
104	36545755841390833926169389806152022843
105	89453609619950651869990530718477458844
106	218987025027646975267889907183860376172
107	536163648604027056575764000763503798497
108	131290627487952340720678272222446521530
109	3215336242754009028207947382705999391980
110	7875431320810988192695838029268282019731
111	19291969970334493781479211366113169144069
112	47264177476007024906142547743590658050750
113	115808377896574763140788957475926222075355
114	283791428178365386548039754689843119556698
115	695519142889755039466085775967275112839522
116	1704780787909150315908009907351298044803324
117	4179042447305082820984920358693253043819325
118	10245495663158225959027412517725047107135485
119	25120964183755160346731761827231624196789907
120	61600747457390880267540553798968959819811028
121	151071045338618952660748936216237191713371610
122	370528235780991164120377745685151785740972844
123	908877746836225887991465880797270387455669603

124 2229631043277362054382023421238929578710259046
125 5470200011643105848672987664961926609049063024
126 13421943263029298076936569358676490023084631910
127 32935852860100494026219791396737676499772524856
128 80828236038035278032347183459032544634427190459
129 198379743815074341941879282815486112477471967578
130 486934970234947148263349666129381361482353663713
131 1195317879855619558557292673480253986095163784405
132 2934499798451786288398781646167107616981747379516
133 7204807656006393530495650095157017349435974080774
134 17690812163571687513245304152178763697755384812733
135 43441986012983568019012936260352999316716078013890
136 106686029066181134300205043684042325727424352766042
137 262023884078469703422898611339818985692903354694700
138 643589784825617490301992371018435292887820796258193
139 1580927052985834626563156844689370550406067745740483
140 3883724830146481471471595047899201656159923293632269
141 9541540962384704906318412121746269257159656806762600
142 23443451900910196548662033756621009389386905782112694
143 57604592365382148502258367991776575756859694766451820
144 141554835746688865979038162132057056252229360977358546
145 347875562431465578539049977856706493468570183250718037
146 854976752044591060564496261087299601037507561475474333
147 2101432459930156319315620904651430103988839714912596886
148 5165434927189429481816227482625546935144880380522036372
149 12697793835778734894374281202493532932186830764080283358
150 31216137498192190666603318248853493505956213287264788416
151 76746606582849161288088649208219720182798548536350349884
152 188698277801008448345809028328960320513939666686367416327
153 463986186125063919054149608511302252918730214004416739203
154 1140959304504933555566148822572791857771325900279087163911
155 2805839879991162976680669035163701097226008995734508701110
156 6900536896433783771441817626200363363444420322659121277434
157 16971874081124148650010744232054440363248554210439773700288
158 41744887661551017497276189862502779535303765597507728461506
159 102684060324389841960580810587603968332058269894922922986762
160 252597286273159127123021239350592438010385070758113960137414
161 621412399552458909375305413409209465865435668220609996385376
162 1528820221603411022314467913149203369069447646280871237718638
163 3761472399999401094368953898051065392879242274046351141291005
164 9255161294425691178804442203171230185795321260199023264549920
165 22773745072947734041305742454154877827690916045013848953461076

166 56041399682889754887730422575204834372024482061034834480355352
167 137913651817759830593340560279221720716896109082734547381394178
168 339413431402965675795970218608647041879385743821677710857186636
169 835360608897250802643237666528877716386351069325152170147510512
170 2056088897164460633711367222540894722141758350571592499891095414
171 5060954597218742301653442594040392767053361314984876695824339217
172 12457915687729563888505713444482687852191575625573051367535510771
173 30667647734799027875417265075394712795379078682454267323466376918
174 75498343264868564057300673979154310030215214705833137235802751162
175 185872869015280489586114411080724882361492882369165522135016394375
176 457631554002699105123255385516798471330701195706318862086605282876
177 1126774620602834649658741298342839041449867996072239279613382657313
178 2774463704848669347937716423219540429350716151606048596156950024927
179 6831903151439053602099718666042768911017264375446859263627634095208
180 16823826688075549714544485475453764761529600011545238082097478006790
181 41431253649677740046533023421818881758015858758485702062000640856077
182 102035511169386078881221024381803019020570397274553164748101867215099
183 251301092112356933950809782178357843826265483857374272016322373660287
184 618951975009795806004484207146973346031347643075245230061480109807596
185 1524540139687740732354402101710265329641118997248566784249765457148498
186 3755259020974113119880341484249226124406581540978765023093570100973530
187 9250385916757690780485625236403240995851769423684419830191749721634394
188 22787596524608418652678091461848869071359280126276293460909494042546815
189 56137841304511644352100418361521858635052515055939066390159464034614962
190 138302877867565142198915369299223638551739628542869929547675704030620818
191 340741361671128804043522929459060174082696315109124112852563643368961857
192 839530407818692091790525780420215168429377264466965195034765862983081834
193 2068548744608100722742900468311961764603843653470329639383837280586479321
194 5096976790173284351248722311052021596562561460465038481792384364885550139
195 12559632724862954541428670944950413070166279298976254264558259472119312326
196 30949841719621428929268120201854820802099171869033706491294387582349434438
197 76270564063775698678512663888679345613008495281605288723119934114490872358
198 187962989867302065208530546194342288643928342544697451190305396577520270971
199 463238259389052502938793538602716298246399174204663595176292221072052399270
200 1141702678822176831157009785526651690179398155888199965734911032502338584734

Capítulo 5

Arcoiris.

Demostremos algunas propiedades divertidas y coloridas de las gráficas Shen maximales.

5.1. Trayectorias y arcoiris.

Sea G coloreada por aristas. Un *arcoiris* en G es una trayectoria hamiltoniana¹ donde cualesquiera dos aristas son de color distinto, i.e. con $n - 1$ colores distintos.

arcoiris

Teorema 21 *Una gráfica Shen coloreada es maximal si y sólo si tiene un arcoiris.*

Demostración:

Si G tiene un arcoiris, entonces existe una trayectoria hamiltoniana τ con aristas de colores distintos dos a dos, τ es de longitud $|G| - 1$ por ser hamiltoniana. Así, G es Shen coloreada y en ella hay $|G| - 1$ colores distintos, esto es ser Shen maximal.

Dada una G Shen maximal demostremos que tiene un arcoiris. Hagamos esto por inducción sobre el orden de G , para $|G| = 1$ tenemos un punto, ésta es una trayectoria peculiar que técnicamente es un arcoiris. Para $|G| = 2$ tenemos un segmento que también es un arcoiris. Supongamos que toda Shen maximal de orden menor o igual a n tiene un arcoiris y demostremos que toda Shen maximal de orden $n + 1$ también tiene un arcoiris.

Sea G Shen maximal de orden $n + 1$, el Teorema 17 nos dice que existe una partición P_1, P_2 de $V(G)$ tal que todas las aristas v_1v_2 con $v_1 \in P_1, v_2 \in P_2$ son de un mismo color; el color generador y sólo hay un color generador. El Teorema 16 nos dice que $[P_1]_G$ y $[P_2]_G$ son Shen maximales y no comparten

¹Pasa por todos los vértices.

colores ya que son disjuntas (ver Lema 6), la hipótesis de inducción nos dice que existen τ_1 y τ_2 arcoiris para $[P_1]_G$ y $[P_2]_G$ respectivamente. Si $\tau_1 = x_1 \dots x_k$ y $\tau_2 = y_{k+1} \dots y_{n+1}$ la trayectoria $\tau = x_1 \dots x_k y_{k+1} \dots y_{n+1}$ existe ya que la arista $x_k y_{k+1}$ existe, además, $x_k y_{k+1}$ es de color generador y ninguna otra arista en τ es de color generador, por tanto todas las aristas en τ son de colores distintos dos a dos.

Como $P_1 \cup P_2 = V(G)$ y $V(\tau_1) = P_1, V(\tau_2) = P_2$, tenemos que $V(\tau) = V(G)$ y concluimos que τ es un arcoiris en G . □

5.2. Gráficas expansivas y bosques arcoiris.

expansiva

Llamamos *expansivas* a las gráficas:

$$\{v_1\} *_1 (\{v_2\} *_2 (\{v_3\} *_3 (\{v_4\} *_4 (\dots (\{v_{n-1}\} *_n \{v_n\}) \dots)))$$

Estas son gráficas Shen maximales por el corolario 1, notemos además que todas sus componentes monocromáticas son estrellas, incluida la componente del color generador. Veamos un ejemplo en la figura 5.1.

Sea G una gráfica coloreada por aristas y H una gráfica. Decimos que G tiene una *copia arcoiris* de H o que H tiene una *copia arcoiris* en G , si G contiene una subgráfica isomorfa de H donde todas las aristas son de colores distintos dos a dos.

copia arcoiris

Decimos que una gráfica G es un *bosque arcoiris* si contiene una copia arcoiris de todo árbol T de orden menor o igual a $|G|$.

bosque arcoiris

Teorema 22 *Toda gráfica expansiva es un bosque arcoiris.*

Demostración:

Demostremos esto por inducción sobre el orden de la gráfica expansiva. Para $n = 2$ es claro, ahora supongamos que toda gráfica expansiva de orden menor o igual a n es un bosque arcoiris y demostremos la afirmación para $n + 1$.

Sea $G = \{v_1\} *_1 (\{v_2\} *_2 (\{v_3\} *_3 (\{v_4\} *_4 (\dots (\{v_n\} *_n \{v_{n+1}\}) \dots)))$ una gráfica expansiva de orden $n + 1$ y T un árbol de orden $2 \leq r \leq n + 1$. Deseamos demostrar que G tiene una copia arcoiris de T .

Notemos que la gráfica expansiva $Y = \{v_2\} *_2 (\{v_3\} *_3 (\{v_4\} *_4 (\dots (\{v_n\} *_n \{v_{n+1}\}) \dots)))$ es una subgráfica inducida de G , además, Y es de orden n .

Como T es un árbol no trivial, tiene una hoja h (al menos), consideremos al árbol $T \setminus h$ que es de orden a lo más n . El árbol $T \setminus h$ tiene una copia arcoiris A_0 en Y por la hipótesis de inducción.

En T existe un único vértice w adyacente a h por ser h una hoja, consideremos al vértice v_{i_0} correspondiente a w en la copia arcoiris A_0 . Como v_1 está conectado a todos los vértices de Y con aristas de color 1, podemos considerar a la subgráfica de G construida como sigue: A_0 unión el vértice v_1 y la arista $v_1 v_{i_0}$, esta subgráfica es claramente isomorfa al árbol T y dado que el color 1 no existe en Y podemos afirmar que construimos una copia arcoiris de T en G como deseabamos.

□

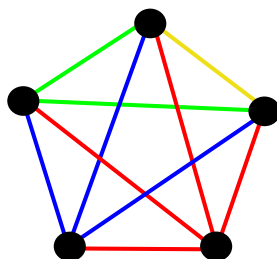


Figura 5.1: Gráfica expansiva.

Un bosque arcoiris B tiene al menos $|B| - 1$ colores ya que tiene una copia arcoiris de tu árbol preferido de orden $|B|$ que tiene exactamente $|B| - 1$ aristas. Una gráfica completa con todas las aristas de color distinto es claramente un bosque arcoiris, podemos decir que una gráfica expansiva es un buen bosque arcoiris ya que tiene la cantidad mínima de colores necesarios para ser uno.

Capítulo 6

Triángulos bicolors y coloraciones mínimas.

6.1. La pregunta interesante.

Hablando con el profesor Jorgue Urrutia sobre el trabajo surgió una pregunta interesante y no muy sencilla (al parecer).

Como sabemos ahora, cada triángulo en una gráfica Shen maximal es bicolor, la pregunta del profesor Urrutia es: ¿cuál es el mínimo número de colores requeridos para colorear a la completa de n vértices de modo que cada triángulo sea bicolor?

Llamemos $B(n)$ al número requerido en la pregunta del profesor Urrutia. Nos convencemos fácilmente de que $B(n)$ es creciente, además las coloraciones que hacen lo requerido no son únicas.

6.2. Una coloración prometedora.

El profesor Urrutia obtuvo una coloración muy sencilla para el caso de las completas de 2^n vértices, donde el número de colores usados es n . Describamos la coloración: bipartimos a los 2^{n+1} vértices en 2^n y 2^n y ahí ponemos la componente bipartita completa de color 1 digamos, luego bipartimos cada una de las componentes de 2^n vértices en 2^{n-1} y 2^{n-1} y las coloreamos con el color 2 (ambas del mismo color para ahorrar colores) y el proceso se repite, ver figura 6.1.

Cada triángulo es bicolor en las coloraciones antes descritas, expliquemos esto: en primer lugar, no existen triángulos tres coloreados porque estas gráficas se pueden ver como una parentización de $\{v_1\} *_{c_1} \{v_2\} *_{c_2} \{v_3\} *_{c_3} \{v_4\} *_{c_4} \{v_5\} *_{c_5} \dots *_{c_{2^n-1}} \{v_{2^n}\}$ donde $c_i = c_j$ si $i \equiv j \pmod{2^{n-1}}$, la coloración en ocho vértices

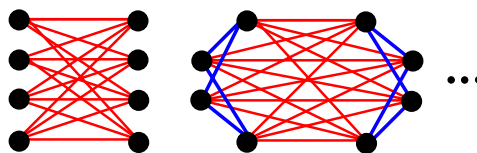


Figura 6.1: Proceso descrito en ocho vértices.

se puede ver como: $((v_1 * v_2) * (v_3 * v_4)) * ((v_5 * v_6) * (v_7 * v_8))$. Reemplazando la palabra “Shen maximal” por “Shen coloreada” en la redacción y demostración del teorema 15 (el argumento se puede aplicar sin cambios) obtenemos que estas parentizaciones son gráficas Shen coloreadas, además, ningún triángulo puede ser monocromático ya que las componentes monocromáticas son un conjunto de bipartitas completas ajenas y una bipartita completa no contiene ciclos impares, en particular triángulos; de este modo, todo triángulo es bicolor.

6.3. Respuesta a la pregunta.

La conjetura del profesor Urrutia es que $r \leq B(m) \leq r + 1$ donde $2^r \leq m \leq 2^{r+1}$, hemos comprobado esto hasta $m = 8$.

La conjetura se reduce a probar que las coloraciones que propone el profesor Urrutia para completas de 2^n vértices son en verdad mínimas pero las técnicas usadas hasta ahora no son generalizables.

Cuando mis ideas sobre el problema se agotaron decidí consultar a mi amigo Javier Cano Vila. Un par de noches después, revisando “facebook” vi un mensaje de Javier anunciándome que la conjetura de Jorge era cierta y había sido probada en 2008 por Maria Axenovich y Perry Iverson en [1].

Bibliografía

- [1] M. Axenovich and P. Iverson, *Edge-colorings avoiding rainbow and monochromatic subgraphs*, Discrete Math. **308** (2008), 4710–4723.
- [2] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer Verlag, New York (2000), Cap.1.
- [3] I. M. H. Etherington, *Non-associate powers and a functional equation*, Math. Gaz. **21** (1937), 36–39 and 153.
- [4] I. M. H. Etherington, *On non-associative combinations*, Proc. Royal Soc. Edinburgh. **59** (part 2, 1938-39), 153–162.
- [5] H. Galeana-Sánchez, *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments*, Discrete Math. **156** (1996), 103–112.
- [6] H. Galeana-Sánchez and R. Rojas-Monroy, *A counterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments*, Discrete Math. **282**, (2004), 275–276.
- [7] P. Hut, *Comment added to entry A001190*, <http://oeis.org/A001190>. (Nov. 7, 2003).
- [8] S. Minggang, *On monochromatic paths in m -coloured tournaments*, J. Combin. Theory Ser. B **45** (1988), 108-111.
- [9] M. Richardson, *On weakly ordered systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 113.
- [10] M. Richardson, *Solutions of irreflexive relations*, Ann. Math. (2) **52** (1953), 573.
- [11] M. Richardson, *Extension Theorems for solutions of irreflexive relations*, Proc. Nat. Acad. Sci., USA., **39** (1953), 649.
- [12] B. Sands, N. Sauer and R. Woodrow, *On monochromatic paths in edge-coloured digraphs*, J. Combin. Theory Ser. B **33** (1982), 271–275.
- [13] N. J. A. Sloane, *Entry A001190*, <http://oeis.org/A001190>.
- [14] J. H. M. Wedderburn, *The functional equation $g(x^2) = 2ax + [g(x)]^2$* , Ann. Math. **24** (1922-23), 121–140.