



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

EL UNIVERSO OSCURO: UN MODELO INSPIRADO
EN GEOMETROTERMODINAMICA

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICAS)

PRESENTA:
LORENA CAMPUZANO DUQUE

DIRECTOR:
DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS



posgrado en ciencias físicas
u n a m

COMITÉ TUTORAL:
DR. JERÓNIMO CORTEZ
DR. MIGUEL ALCUBIERRE

OCTUBRE DE 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

1. Fundamentos de la geometrotermodinámica	2
1.1. Termodinámica de sistemas en equilibrio	3
1.1.1. Transformaciones de Legendre	5
1.2. Descripción geometrotermodinámica	8
1.2.1. Geodésicas en el espacio de estados de equilibrio	13
1.2.2. Dos ejemplos: Gas ideal y Van der Waals	14
1.3. La variedad de equilibrio como superficie extremal	17
2. Un modelo cosmológico sin interacción termodinámica	20
2.1. Modelo cosmológico estándar	21
2.2. Ecuación de estado	24
2.2.1. Era dominada por la materia: $c_2 = 0 \rightarrow P = 0$	25
2.2.2. Era dominada por la radiación: $c_2/c_1 = 1/3 \rightarrow P = \frac{1}{3}\rho$	26
2.2.3. Era dominada por la constante cosmológica: $\omega = -1, P + \rho = 0$	27
2.2.4. Materia oscura: $-1 < \omega < 0, P + \omega\rho = 0$	28
2.3. Termodinámica de variables no extensivas	28
2.3.1. No extensividad en GTD	29

2.4. Capacidad calorífica negativa	30
3. El fluido oscuro generalizado: un modelo unificado	41
4. Conclusiones y perspectivas	47
A. Artículo	55

Resumen

En el presente trabajo se explora si las soluciones de la GTD son soluciones viables para construir modelos cosmológicos. En los modelos cosmológicos inspirados en la geometrotermodinámica, las ecuaciones del modelo de FLRW no son modificadas. Se parte de las mismas premisas que el modelo cosmológico estándar, pero al momento de construir la ecuación de estado necesaria para la descripción del universo, aducimos al formalismo de la GTD, para dar lugar a dos ecuaciones que usamos como relaciones fundamentales en la construcción de un modelo sin interacción termodinámica y un segundo modelo con interacción. Obtuvimos que para la primera ecuación, en el modelo cosmológico sin interacción termodinámica la descripción cosmológica coincide con el modelo cosmológico estándar más simple, el de Friedman. Con la segunda ecuación construimos un modelo que describe el sector oscuro del universo de manera unificada y los resultados se ajustan bien con los obtenidos por el modelo LambdaCDM, el cuál es el más exitoso hasta el momento. Adicionalmente se obtiene para ciertos valores de los parámetros el modelo de Gas de Chaplygin y el de flúidos barotrópicos. Queda abierta la posibilidad de estudiar la termodinámica del universo, pues al abordar las ecuaciones de estado con el formalismo de GTD, algunos flúidos que componen el universo poseen capacidad calorífica negativa.

Abstract

In this paper we explore whether the GTD solutions are viable solutions to build cosmological models. In models inspired cosmological geometrothermodynamics the FLRW model equations are not modified. It starts from the same premise as the standard cosmological model, but when building the state equation necessary to describe the universe, we adduce the formalism of GTD, to give rise to two equations we use as fundamental relationships in the construction of a model without thermodynamic interaction and a second model with interaction. We made it to the first equation in the cosmological model without interaction thermodynamics cosmological description matches the simplest standard cosmological model, the Friedman. With the second equation we construct a model describing the dark sector of the universe in a unified way and the results are fit well with those obtained by the model LambdaCDM, which is the most successful so far. Additionally obtained for certain values of the model parameters Chaplygin gas and barotropic Fluid. Left open the possibility of studying the thermodynamics of the universe, for addressing the state equations with the formalism of GTD, Some fluids that make up the universe have negative heat capacity.

Agradecimientos

Primero que todo quiero agradecer a mi director de tesis Hernando Quevedo por su soporte a este trabajo. Este trabajo es suyo. Sin su calidad humana y su acompañamiento académico no habría sido posible para mí culminar la maestría. Por sus ideas, por el trato amable y su disposición, mil gracias.

A Alejandro Aviles por su participación crucial en la publicación del artículo. A la UNAM, al ICN y CONACyT, por el espacio y los recursos para la realización del programa.

También quiero agradecer a todas las personas que hicieron mi estancia en México una experiencia enriquecedora y muy feliz, entre ellos mis compañeros Paulino, Hans, Ulises, César Agón, Jesús, Diego Gómez, Adrián, Diego Tapias, Marisol, Sara, Angela y Sebas, César López, Saúl, Pedro y todos los compañeros de trabajo en el Colegio Princeton. Quiero agradecer especialmente a mis compañeras de hogar, Vicky y Marcela, con quienes habité mucho más que un espacio, de quienes aprendí cosas muy valiosas y con quienes compartí alegrías y sueños. Hicieron de mis últimos meses en México unos meses inolvidables.

Por último, a mis padres, que aunque distantes espacialmente, estuvieron acompañandome con sus palabras, con su confianza y su amor durante estos años en México.

A los que nombro y a los que no, como dice la canción, gracias por haber venido a abrigarme el corazón.

Lorena Campuzano

Introducción

Uno de los mayores problemas de la cosmología moderna es la explicación física de los llamados componentes oscuros del universo. Asumir la existencia de la energía oscura y de la materia oscura es actualmente uno de los métodos más populares para explicar las observaciones recientes sobre la expansión acelerada del universo, las curvas de rotación en galaxias, las velocidades orbitales de galaxias en cúmulos, entre otros.

Las ecuaciones de estado que resultan de considerar la expansión del universo bajo el modelo relativista conocido como Lambda CDM, son no-estándar y no existe ningún tipo de materia ordinaria que satisfaga estas ecuaciones. Es por esto que se propone a la energía y materia oscura. El objetivo de este trabajo es plantear un camino alternativo en el contexto de la geometrotermodinámica(GTD). En este, se encuentra que la materia ordinaria puede satisfacer estas ecuaciones no-estándar de estado, pero que estos sistemas poseen variables termodinámicas no extensivas.

La geometrotermodinámica es un formalismo que permite estudiar los sistemas termodinámicos descritos por la relación fundamental $\Phi = \Phi(E^a)$ a través de un análisis geométrico del espacio de equilibrio \mathcal{E} . En general Φ representa un potencial termodinámico y E^a con $a = 1, 2, \dots, n$ es el conjunto de las n variables extensivas necesarias para describir el sistema. La GTD permite tener en cuenta el hecho de que la termodinámica clásica es independiente del potencial termodinámico, es decir, es invariante de Legendre. Para esto, se construye un espacio de fase como una variedad Riemanniana de contacto (\mathcal{T}, Θ, G) donde \mathcal{T} , es una variedad $2n + 1$ -dimensional, Θ es una 1-forma que satisface que $\Theta \wedge (d\Theta)^n \neq 0$, y G es una métrica en \mathcal{T} no degenerada e invariante

ante transformaciones de Legendre. En esta variedad el subespacio de los estados de equilibrio \mathcal{E} , cuya métrica es $g = \varphi^*(G)$, debe satisfacer $\varphi^*(d\Phi - \delta_{ab}I^a dE^b) = 0$, donde $\varphi : \{E^a\} \rightarrow \{Z^A(E^a)\} = \{\Phi(E^a), E^a, I^b(E^a)\}$.

Es mediante la interpretación de manera invariante de la curvatura del espacio de equilibrio como una manifestación de la interacción termodinámica que obtenemos información de este formalismo.

Además de la información acerca de la interacción termodinámica, también es posible obtener ecuaciones de estado que pueden ser usadas como relaciones fundamentales del sistema termodinámico. Estas relaciones resultan al solucionar las ecuaciones diferenciales que satisface el potencial termodinámico Φ al asumir que la métrica g determina una superficie extremal embebida en \mathcal{T} . Las dos soluciones encontradas en [20] serán las relaciones que usaremos para construir en primer lugar un modelo cosmológico sin interacción termodinámica que aunque conduce a la ecuación de estado utilizada en el modelo cosmológico estándar, entraña diferentes interpretaciones físicas. En segundo lugar, la segunda solución obtenida es utilizada para construir un modelo unificado para el sector oscuro, solución que conduce a una ecuación de estado que coincide para diferentes valores de los parámetros con el gas de Chapligyn, el fluido oscuro o fluidos barotrópicos.

En el primer capítulo se exploran los fundamentos de la geometrotermodinámica que darán lugar a las dos ecuaciones fundamentales de las cuales partimos para realizar nuestro modelo cosmológico.

En el segundo capítulo propondremos con una de las soluciones de la GTD un modelo cosmológico sin interacción termodinámica, que corresponde a un sistema termodinámico donde el espacio de equilibrio es plano. Veremos que esta relación fundamental nos permite describir todos los fluidos que componen el universo de manera consecuente con el modelo estándar, pero además de ello abre la posibilidad de que el fluido asociado con la energía oscura tenga capacidad calorífica negativa. Por ello, haremos un breve recuento de cómo opera la termodinámica de las variables no extensivas, su relación con las

interacciones de largo alcance y la evolución de sistemas con capacidades caloríficas negativas. Es a través de estos comportamientos “atípicos” de la materia que pretendemos explicar las componentes oscuras del universo. No hemos encontrado ninguna inconsistencia o imposibilidad de describir el universo mediante esta línea de pensamiento. Los sistemas termodinámicos que hemos obtenido guardan relaciones con los sistemas originales, porque sus partículas constituyentes son de la misma naturaleza, pero sus ecuaciones de estado transforman su comportamiento de una manera tan drástica que cambia su manera de interactuar.

Finalmente, en el tercer capítulo, usando otra relación fundamental se desarrolla el modelo cosmológico unificado para el sector oscuro, el cual mostraremos que posee una métrica con curvatura diferente de cero lo que indica que si existe interacción termodinámica. Mostraremos como a través de este modelo se puede describir el sector oscuro de manera conjunta a través de la ecuación de estado que tiene como caso particular a la ecuación de estado del gas de Chaplygin. En suma, lo que pretendemos mostrar en esta tesis, es que las dos soluciones particulares aportadas por la GTD pueden usarse para construir modelos cosmológicos en el marco de la relatividad general.

Fundamentos de la geometrotermodinámica

Existen en la física clásica dos paradigmas para estudiar los fenómenos. Uno de ellos es la mecánica y el otro es la teoría electromagnética. En ambos el tiempo está presente y juega un papel decisivo. Por otra parte se encuentra la termodinámica en equilibrio, teoría de los fenómenos macroscópicos independientes del tiempo. El problema básico que resuelve es la determinación del estado de equilibrio que eventualmente resulta de remover las restricciones internas en un sistema compuesto. En otras palabras, le interesa conocer hacia donde evolucionan los sistemas cuando buscan el equilibrio. Para ello los procesos son modelados cuasiestáticamente, es decir, como una sucesión de estados de equilibrio. Entre más rápido sea el tiempo de relajación del sistema, más cercano a lo real es el proceso cuasiestático.

Estos estados son descritos a través de las variables de estado que caracterizan los sistemas termodinámicos. Las variables están inspiradas parcialmente por las observaciones macroscópicas, por ejemplo, el volumen (V), la presión (P), número de partículas (N). Además de su carácter macroscópico las variables están relacionadas con promedios estadísticos y se clasifican en *intensivas* y *extensivas*. Las primeras son aquellas

que no dependen del tamaño del sistema tales como la presión, la temperatura, o el potencial químico. Las segundas dependen del tamaño del sistema, como la energía interna, el volumen, la entropía, el número de partículas, entre otras.

La mayoría de problemas que resuelve la termodinámica y la estadística clásica son de sistemas donde se satisface que las variables de estado son extensivas. No se acostumbra por ejemplo modelar con ensambles canónicos sistemas donde mezclar dos sustancias el volumen resultante no sea la suma de los volúmenes de cada sustancia. El análisis de este tipo de sistemas no es abordado por la termodinámica convencional. Los sistemas extensivos abarcan un espectro bastante amplio de fenómenos naturales y la termodinámica los aborda convencionalmente de tres maneras. La primera es el método ingenieril, con los postulados de Kelvin-Planck, Celsius y el estudio del ciclo de Carnot; el segundo es el método de Caratheodory, el cuál restringe los estados que pueden alcanzarse mediante procesos adiabáticos reversibles, y finalmente el método variacional.

Además de estos acercamientos al sistema termodinámico, está el estudio de los sistemas en término de conceptos geométricos. Este enfoque fue iniciado por Caratheodory y Gibbs y desarrollado posteriormente por Hermann[8], Weinhold[22], Ruppeiner[16], Quevedo[15] entre otros. Este acercamiento se conoce ahora como *geometrotermodinámica*.

Lo que haremos a continuación es una descripción de la estructura básica de la termodinámica desde el formalismo del método variacional con el fin de contrastarlo con la geometrotermodinámica y mostrar de que manera el segundo enfoque nos resultará útil para estudiar la expansión del universo.

1.1. Termodinámica de sistemas en equilibrio

En termodinámica clásica de sistemas en equilibrio [5], se especifica un conjunto de n (igual al número de grados de libertad termodinámicos del sistema) variables extensivas E^a ($a = 1, \dots, n$), las correspondientes variables intensivas I^a , y un potencial

termodinámico Φ . Todas las propiedades del sistema termodinámico (un gas, un alambre con corriente, etc) están contenidas en una relación fundamental que debe satisfacer la primera ley de la termodinámica, de la cuál a su vez se deducen las ecuaciones de estado del sistema.

En la tabla 1.1 está resumida la estructura de la termodinámica en dos representaciones, la de la entropía y la de la energía. Además de estas dos representaciones, existen las representaciones de los potenciales termodinámicos. En el laboratorio no poseemos ni entropímetros, ni mecanismos para medir directamente la energía interna o la entropía y muchas veces se requiere otra formulación alterna basada en cantidades medibles directamente. Aunque la conveniencia de usar una representación particular es dictada por el problema termodinámico a tratar, más allá de una facilidad alrededor de lo experimental, la invarianza de la termodinámica ante la formulación en diferentes potenciales tiene razones matemáticamente más profundas.

	Rep. de la energía	Rep. de la entropía
<i>Relación fundamental</i>	$U = U(S, V, N)$	$S = S(U, V, N)$
$E_a(S, U, V, N)$ extensivas	$dU = \sum_{a=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial E_a} \right) dE_a$	$dS = \sum_{a=1}^n \frac{\partial S}{\partial E_a} dE_a$
	$\swarrow \downarrow \searrow$ $T \quad P \quad \mu$	$\swarrow \downarrow \searrow$ $\frac{1}{T} \quad \frac{P}{T} \quad \frac{-\mu}{T}$
<i>Intensivas</i>		
<i>Ec. Euler</i>	$U = TS - PV + \mu N$	$S = \frac{1}{T}U + \frac{P}{T}V - \frac{\mu}{T}N$
<i>Rel. Gibbs-Duhem</i>	$SdT + \sum_j N_j d\mu_j - VdP = 0$	$Ud\left(\frac{1}{T}\right) - Vd\left(\frac{P}{T}\right) - \sum_j N_j d\left(\frac{\mu_j}{T}\right) = 0$
<i>Ec. de estado</i>	$T = T(U, V, N)$ $P = P(U, V, N)$ $\mu = \mu(U, V, N)$	$T = T(S, V, N)$ $P = P(S, V, N)$ $\mu = \mu(S, V, N)$

Cuadro 1.1: Principales relaciones termodinámicas en la representación de la energía y la entropía. T es la temperatura del sistema y μ es el potencial químico.

Decíamos que la termodinámica resuelve su problema básico a través de la relación fundamental. Conocer la relación fundamental es conocer a cabalidad el comportamiento del sistema. De la tabla 1.1, valga anotar que conocer las tres ecuaciones de esta-

do es equivalente a conocer la relación fundamental y por tanto resolver el problema termodinámico. También es importante resaltar que la ecuación de Euler en ambas representaciones, se encontró cuando la energía interna y la entropía son homogéneas de primer orden. Es decir, cuando satisfacen

$$\begin{aligned} U(\lambda S, \lambda X_j) &= \lambda^\gamma U(S, E_j) \\ S(\lambda U, \lambda X_j) &= \lambda^\gamma S(U, E_j) \end{aligned} \quad (1.1)$$

con $\gamma = 1$.

La primera ley de la termodinámica está contenida en la ecuación de Euler y la condición de equilibrio en la relación entre variables extensivas e intensivas. Concretamente la condición de equilibrio esta dada como se ve en la tabla 1.1 por

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E_a} = I_a \quad (1.2)$$

que para el caso de la representación de la energía y la entropía Φ es U y S respectivamente; E_a es $S, V, N...$ y I_a es T, P, μ para la representación de la energía por ejemplo. Resaltamos de nuevo que Φ puede ser cualquier potencial termodinámico y E_a e I_a las variables extensivas e intensivas del sistema a describir.

1.1.1. Transformaciones de Legendre

El *espacio de configuración termodinámico* es un espacio abstracto cuyas coordenadas son la entropía y otras variables extensivas del sistema. La relación fundamental $S = S(U, V, N)$ define una superficie en este espacio. Esta superficie debe satisfacer $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} > 0$ y U debe ser una función univaluada de S y viceversa. [5]. El *subespacio de estados de equilibrio* está contenido en el espacio de configuración, y dependiendo de la representación está restringido por el plano de energía constante $U = U_0$ para la representación de entropía y por el de entropía constante $S = S_0$ en la representación de energía. Es decir, la intersección entre el plano constante y la superficie formada por

la ecuación fundamental constituye el subespacio de estados de equilibrio accesibles al sistema. (Ver Figura (1.1.1))

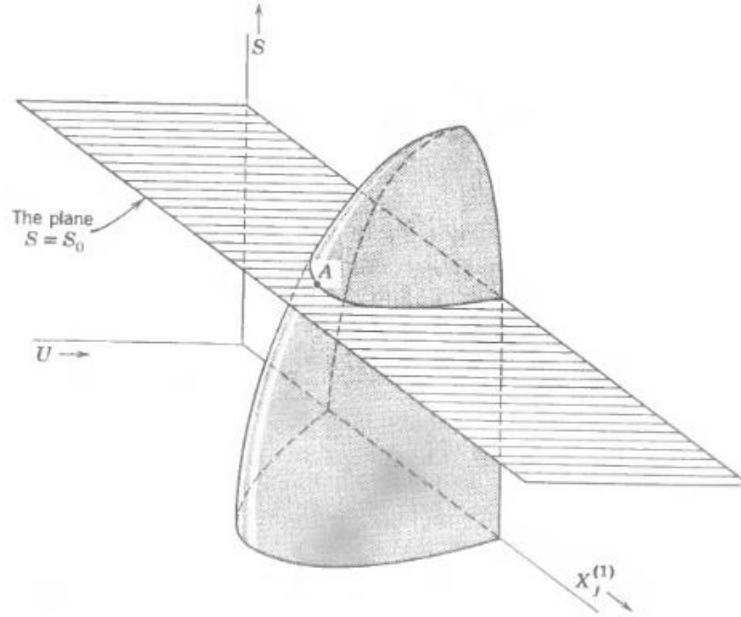


Figura 1.1: El plano $S = S_0$ al intersectar la superficie formada por la relación fundamental, determina una curva de estados a entropía constante. El punto A es el estado que minimiza la energía a lo largo de la curva.

Sea la relación fundamental general de la forma

$$Y = Y(X_k) \quad (1.3)$$

donde Y son las variables extensivas y X_k las variables independientes. Si queremos escribir a las variables intensivas $P_k = \frac{\partial Y}{\partial X_k}$ como variables independientes sin perder información de la relación fundamental, debemos realizar una **transformación de Legendre**.

Es sabido en matemáticas, que una curva puede ser representada por la envolvente de la familia de curvas tangentes o por los puntos que satisfacen la ecuación $Y = Y(X)$. Cualquier ecuación que permita construir la familia de curvas tangentes, describe igualmente bien la relación fundamental [5]. Dado que cada recta tangente está caracterizada

por la pendiente P y el intercepto con el origen θ , la relación $\theta = \theta(P)$ nos permite construir la familia de rectas tangentes y por tanto la curva. Así pues, la relación $\theta = \theta(P)$ es equivalente a $Y = Y(X)$ y es la relación fundamental en la θ -representación. Cuando $Y = Y(X_0, X_1, \dots)$ en lugar de una curva se tiene una superficie, y en lugar de líneas tangentes se tiene planos tangentes.

Para construir $\theta = \theta(P)$ dada $Y = Y(X)$, consideramos una línea tangente que pase por el punto (X, Y) con pendiente P e intercepto θ . Por tanto

$$P = \frac{Y - \theta}{X - 0} \quad (1.4)$$

de donde

$$\theta = Y - PX \quad (1.5)$$

La función θ se conoce como la *transformada de Legendre* de Y . En suma, y comparando para ejemplificar con la representación de la energía

$$Y = Y(X_0, X_1, \dots) \rightarrow U = U(S, V, N) \quad (1.6)$$

$$P_k = \frac{\partial Y}{\partial X_k} \rightarrow T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad (1.7)$$

$$\theta = Y - \sum_k P_k X_k \rightarrow F = U - TS \quad (1.8)$$

$$d\theta = - \sum_k X_k dP_k \rightarrow dF = dU - TdS \quad (1.9)$$

$$-X_k = \frac{\partial \theta}{\partial P_k} \rightarrow -S = \frac{\partial F}{\partial T} \quad (1.10)$$

Donde el **potencial de Helmholtz** F es la transformada de Legendre de U , que reemplaza la entropía por la temperatura como variable independiente. En la tabla (1.2) resumimos las principales transformaciones de Legendre conocidas como potenciales termodinámicos. Valga anotar que la termodinámica es invariante ante transformaciones de Legendre, es decir, toda la información termodinámica contenida en la relación fundamental sigue presente en las relaciones fundamentales de los potenciales

Transformaciones de Legendre		
Entalpía (H)	$U = U(S, V, N)$	$H = H(S, P, N)$
Cambia V por P	$-P = \frac{\partial U}{\partial V}$ $H = U + PV$	$V = \frac{\partial H}{\partial P}$
En. libre de Gibbs	$U = U(S, V, N)$	$G = G(T, P, N)$
Cambia S por T	$T = \frac{\partial U}{\partial S}$	$-S = \frac{\partial G}{\partial T}$
Cambia V por P	$-P = \frac{\partial U}{\partial V}$ $G = U - TS + PV$	$V = \frac{\partial G}{\partial P}$

Cuadro 1.2: Potenciales termodinámicos

termodinámicos. Para finalizar, cabe anotar que el principio de mínima energía o de máxima entropía que aparece en los postulados se manifiesta en la formulación termodinámica en potenciales, como un principio de mínima acción. Es decir, los valores asumidos por las variables extensivas en ausencia de constricciones internas del sistema, son aquellos que minimizan el potencial termodinámico sobre la variedad de estados de equilibrio. En las representaciones de los potenciales, el subespacio de estados de equilibrio está delimitado por la intersección de cada superficie fundamental y los planos $T = T_0$, para el potencial de Helmholtz, $P = P_0$ para la entalpía, $T = T_0$ y $P = P_0$ para la energía libre de Gibbs.

1.2. Descripción geometrotermodinámica

La siguiente descripción es desarrollada en los artículos [15],[20]. Para describir el sistema termodinámico de n grados de libertad desde la **geometrotermodinámica** (GTD), necesitamos introducir el concepto de *espacio de fase termodinámico* como una variedad Riemanniana de contacto (\mathcal{T}, Θ, G) donde \mathcal{T} es una variedad $2n+1$ -dimensional, Θ es una 1-forma que satisface $\Theta \wedge (d\Theta)^n \neq 0$, y G es una métrica en \mathcal{T} no degenerada e invariante ante transformaciones de Legendre. Lo que se pretende averiguar ahora es cómo las propiedades geométricas de el espacio de fase influyen sobre las propiedades geométricas del espacio de equilibrio y pueden darnos información del sistema termodinámico y sus interacciones a través de la curvatura del espacio fase de equilibrio.

Las coordenadas de la variedad son $Z^A = \{\Phi, E^a, I^a\}$ y como mencionamos en la sección anterior, Φ es el potencial termodinámico y E^a e I^a son las variables extensivas e intensivas respectivamente.

$A = 0, \dots, 2n$ y $a = 1, \dots, n$, por tanto $\Phi = Z^0$, $E^a = Z^a$ y $I^a = Z^{n+a}$. La 1-forma de Gibbs está dada por

$$\Theta = d\Phi - \delta_{ab} I^a dE^b \quad (1.11)$$

Sea ahora el espacio n -dimensional \mathcal{E} con coordenadas E^a , *construido* a través de la aplicación $\varphi : \{(E^a)\} \rightarrow \{\Phi(E^a), E^a, I^a(E^a)\}$. Este espacio es un subespacio de \mathcal{T} y constituye el *espacio de estados de equilibrio termodinámico* siempre y cuando se cumpla que

$$\varphi^*(\Theta) = \varphi^*(d\Phi - \delta_{ab} I^a dE^b) = 0 \quad (1.12)$$

siendo φ^* el pullback. La relación (1.12) se puede leer como la **condición de equilibrio termodinámico**

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E^a} = \delta_{ab} I^b = I_a, \quad (1.13)$$

y también como la **primera ley de la termodinámica**

$$d\Phi - \delta_{ab} I^a dE^b = 0 \quad (1.14)$$

Es a través de las propiedades geométricas del espacio \mathcal{E} que se describen las propiedades termodinámicas de un sistema físico en GTD.

La **segunda ley de la termodinámica**, está contenida en GTD en la condición de concavidad

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^a \partial E^b} \geq 0, \quad (1.15)$$

De igual manera que se obtuvo la ecuación de Euler en la termodinámica clásica, exigimos al potencial termodinámico, que satisfaga la condición de homogeneidad

$$\Phi(\lambda E^a) = \lambda^\gamma \Phi(E^a). \quad (1.16)$$

Derivando la ecuación con respecto a λ , evaluando el resultado en $\lambda = 1$ y utilizando la ecuación (1.13), obtenemos la **ecuación de Euler**

$$\gamma\Phi(E^a) = \delta_{ab}I^b E^a \quad (1.17)$$

Ahora calculando la derivada exterior de la ecuación de Euler, obtenemos la **relación de Gibbs-Duhem** generalizada

$$(1 - \gamma)\delta_{ab}I^a dE^b + \delta_{ab}E^a dI^b = 0. \quad (1.18)$$

Note que para $\gamma = 1$ se obtienen las ecuaciones de Euler y Gibbs-Duhem de la termodinámica ordinaria, suponiendo que todas las variables tienen el mismo grado de extensividad.

Nos falta entonces para tener un análogo completo de la GTD y la termodinámica, la invariancia ante transformaciones de Legendre de la que hablamos anteriormente. Decir que la variedad Riemanniana es de contacto, significa que \mathcal{T} es diferenciable y que $\Theta \wedge (d\Theta)^n \neq 0$. Si existe otra 1-forma $\tilde{\Theta}$ que satisface $\tilde{\Theta} \wedge (d\tilde{\Theta})^n \neq 0$ deben estar relacionadas por una transformación de Legendre. Veamos explícitamente: sea $Z^A \rightarrow \tilde{Z}^A = (\tilde{\Phi}, \tilde{E}^a, \tilde{I}^a)$ una transformación de Legendre,

$$\Phi = \tilde{\Phi} - \delta_{kl}\tilde{E}^k\tilde{I}^l, \quad E^i = -\tilde{I}^i, \quad E^j = \tilde{E}^j, \quad I^i = \tilde{E}^i, I^j = \tilde{I}^j \quad (1.19)$$

donde $i \cup j$ es cualquier descomposición disjunta del conjunto de índices $\{1, \dots, n\}$ y $k, l = 1, \dots, i$. La GTD impone como condición que todas las estructuras geométricas usadas en \mathcal{T} deben ser invariantes ante transformaciones de Legendre. Note además la semejanza de las ecuaciones (1.19) con las ecuaciones (1.8). Una transformación de Legendre es un caso especial de las transformaciones de contacto que dejan invariantes la estructura de contacto en \mathcal{T} .

Hasta aquí puede decirse que el estudio de las propiedades geométricas del espacio

de fase nos ha arrojado al menos las mismas ecuaciones de la termodinámica clásica, lo que permite reproducir la descripción conocida de los sistemas. Es clara la equivalencia entre los dos acercamientos y podemos arriesgarnos a decir que simplemente hemos escrito las ecuaciones de una manera más general. Adicionalmente y dado que estamos explorando las propiedades geométricas de la variedad (\mathcal{T}, Θ, G) , procederemos a discutir la métrica G y cumplir el propósito de estudiar las interacciones termodinámicas desde una perspectiva geométrica.

Dado que G es la métrica definida en \mathcal{T} , $g = \varphi^*(G)$ es la métrica termodinámica de \mathcal{E} cuyas componentes están dadas por

$$g_{ab} = \frac{\partial Z^A}{\partial E^a} \frac{\partial Z^B}{\partial E^b} G_{AB} \quad (1.20)$$

Esto nos dice, que una transformación de Legendre de G corresponde simplemente a una transformación de coordenadas de g .

Concretamente, la métrica más general que satisface invariancia ante transformaciones parciales y totales de Legendre es

$$G = (d\Phi - I_a dE^a)^2 + \Lambda(Z^A) \sum_{a=1}^n E^a I_a dE^a dI_a \quad (1.21)$$

donde Λ es una función de E^a y de I^a invariante ante transformaciones de Legendre. Esta métrica se ha construido de manera que satisfaga las condiciones necesarias de geometría diferencial. Note que el primer término es Θ^2 , el cual es invariante ante transformaciones de Legendre y aunque su pullback es cero y no aparece en g , es indispensable incluirlo en la ecuación (1.21) para que $\text{Det}(G) \neq 0$ y G sea una métrica riemanniana. El segundo término en la métrica es lineal en las variables extensivas e intensivas y nuevamente es invariante ante transformaciones totales y parciales de Legendre.

Ahora saquemos el pullback de (1.21) para obtener la métrica en el espacio de

equilibrio (1.20). Sustituyendo las ecuaciones (1.12) y (1.13) en (1.21) se obtiene

$$G = \Theta^2 + \Lambda E_a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} dE^a d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial E^a}\right) \quad (1.22)$$

$$g = \varphi^*(G) = \varphi^*\left(\Theta^2 + \Lambda E_a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} dE^a d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial E^a}\right)\right)$$

Dado que $\varphi^*(\Theta) = 0$ y $\Phi = \Phi(E^a)$ obtenemos

$$g = \varphi^*(G) = \Lambda \left(E^a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^b \partial E^c} \delta^{ab} dE^a dE^c, \quad (1.23)$$

la cual también es invariante ante transformaciones de Legendre. De la ecuación (1.23) podemos notar que basta con especificar la relación fundamental $\Phi = \Phi(E^a)$ para determinar analíticamente las componentes de g .

Hemos encontrado entonces las principales relaciones y características de la termodinámica desde el punto de vista de la GTD, lo cual era el objetivo principal de esta sección. En la siguiente sección estudiaremos el papel que desempeña la métrica y cómo en ella está contenida toda la información termodinámica.

	Termodinámica clásica	GTD
<i>Relación fundamental</i>	$U = U(S, V, N)$	$\Phi = \Phi(E^a)$
<i>Primera ley</i>	$dU = \sum_{a=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial E^a} \right) dE^a$	$d\Phi = \delta_{ab} I^a dE^b$
<i>Ec. Euler</i>	$U = TS + \sum_{j=1}^t P_j E_j$	$\gamma \Phi(E^a) = \delta_{ab} I^b E^a$
<i>Rel. Gibbs-Duhem</i>	$SdT + \sum_j P_j dE_j = 0$	$(1 - \gamma) \delta_{ab} I^a dE^b + \delta_{ab} E^a dI^b = 0.$
<i>Trans. Legendre(TL)</i>	(ver tabla 1.2)	TL de G es trans. coordenadas de g .

Cuadro 1.3: Comparación entre las ecuaciones de la termodinámica clásica y la geometrotermodinámica. En el caso de la termodinámica las ecuaciones están en la representación de la energía para mostrar un ejemplo concreto. T es la temperatura del sistema y P_j con $j = 1, 2, 3$ son los parámetros intensivos de la energía.

1.2.1. Geodésicas en el espacio de estados de equilibrio

Uno de los principales objetivos de la GTD es encontrar la relación entre las propiedades geométricas del espacio de equilibrio \mathcal{E} y las propiedades termodinámicas del sistema cuya relación fundamental es $\Phi = \Phi(E^a)$. En el espacio \mathcal{E} , la distancia entre dos puntos E^a y $E^a + dE^a$ está dada por $ds = g_{ab}dE^a dE^b$. La longitud termodinámica se define como[20]

$$L = \int_{t_2}^{t_1} ds = \int_{t_2}^{t_1} (g_{ab}dE^a dE^b)^{\frac{1}{2}} = \int_{t_2}^{t_1} (g_{ab}\dot{E}^a \dot{E}^b)^{\frac{1}{2}} d\tau, \quad (1.24)$$

donde el punto representa derivada respecto a τ . De la condición de $\delta L = 0$

$$\frac{d^2 E^a}{d\tau^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dE^b}{d\tau} \frac{dE^c}{d\tau} = 0. \quad (1.25)$$

Γ_{bc}^a son los símbolos de Christoffel de la métrica g_{ab} . Estas ecuaciones son las ecuaciones geodésicas en el espacio \mathcal{E} con parámetro afín τ . Las soluciones a estas ecuaciones dependen de la métrica y de la relación fundamental $\Phi = \Phi(E^a)$. No todas las soluciones son físicamente compatibles con las leyes termodinámicas. Esto se interpreta diciendo que las únicas soluciones con sentido físico, son aquellas que representan procesos cuasiestáticos. Esto está en total acuerdo con la interpretación convencional de los procesos cuasiestáticos como una sucesión de estados de equilibrio. El parámetro afín τ etiqueta los estados y nos dice hacia donde evoluciona el proceso, lo cuál puede verse como una dirección temporal que apunta hacia estados de mayor entropía.

En resumen, la geometrotermodinámica es un formalismo que describe de manera invariante ante transformaciones de Legendre, las propiedades de un sistema termodinámico mediante un análisis geométrico de el espacio de estados de equilibrio. Para esto, se construye una espacio de fase como una variedad Riemanniana de contacto (\mathcal{T}, Θ, G) donde \mathcal{T} , es una variedad $2n + 1$ -dimensional, Θ es una 1-forma que satisface que $\Theta \wedge (d\Theta)^n \neq 0$, y G es una métrica en \mathcal{T} no degenerada e invariante ante transformaciones de Legendre. En esta variedad existe un subespacio, el de los estados de

equilibrio \mathcal{E} cuya métrica es $g = \varphi^*(G)$ que debe satisfacer $\varphi^*(d\Phi - \delta_{ab}I^a dE^b) = 0$, donde $\varphi : \{E^a\} \rightarrow \{Z^A(E^a)\} = \{\Phi(E^a), E^a, I^b(E^a)\}$. Es mediante la interpretación de manera invariante de la curvatura del espacio de equilibrio como una manifestación de la interacción termodinámica que obtenemos información de este formalismo. Esto lo veremos a continuación para el caso del gas ideal y el de Van der Waals. En el primer caso, cuando no hay interacción termodinámica, la curvatura de la variedad es cero. Por el contrario, cuando hay interacción como en el caso de Van der Waals, la curvatura es diferente de cero. Para estos casos interactuantes donde hay transiciones de fase, el formalismo permite reproducir el comportamiento cerca de los puntos de transición mediante las singularidades de la curvatura.

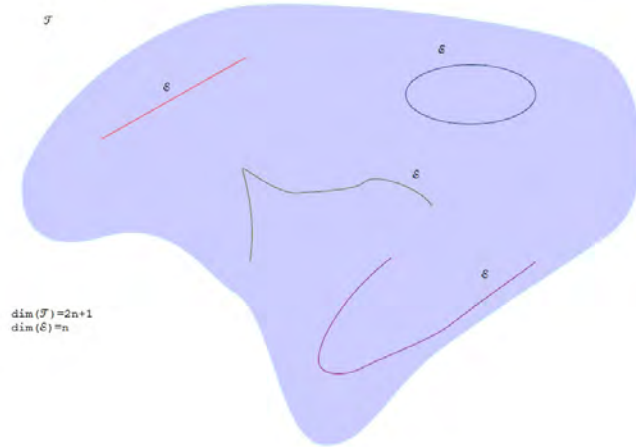


Figura 1.2: Sea (\mathcal{T}, Θ, G) donde \mathcal{T} una variedad $2n + 1$ -dimensional, donde Θ es una 1-forma que satisface que $\Theta \wedge (d\Theta)^n \neq 0$, y G es una métrica no degenerada e invariante ante transformaciones de Legendre. En esta variedad existe un subespacio, el de los estados de equilibrio \mathcal{E} cuya métrica es $g = \varphi^*(G)$ que debe satisfacer $\varphi^*(d\Phi - \delta_{ab}I^a dE^b) = 0$, donde $\varphi : \{E^a\} \rightarrow \{Z^A(E^a)\} = \{\Phi(E^a), E^a, I^b(E^a)\}$. En esta variedad pueden haber muchos espacios de equilibrio $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, etc; cada uno de los cuales puede representar un sistema termodinámico.

1.2.2. Dos ejemplos: Gas ideal y Van der Waals

Gas ideal

Considere la relación fundamental del gas ideal en la representación de la entropía

$$S(U, V) = \frac{3}{2} \ln U + \ln V \quad (1.26)$$

Y en la representación de la energía es

$$U(S, V) = V^{-2/3} \exp \frac{2S}{3} \quad (1.27)$$

En la representación de la entropía $Z^A = \{\Phi = S, E^a = U, V, I^a = \frac{1}{T}, \frac{P}{T}\}$ con $a=1,2$.

Las condiciones de equilibrio termodinámico son

$$I^1 = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} \quad I^2 = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T}. \quad (1.28)$$

de donde la métrica (1.21) toma la forma

$$G = \left[dS - \frac{1}{T} dU - \frac{P}{T} dV \right]^2 + \Lambda \left[\left(\frac{U}{T} \right) dU d \left(\frac{1}{T} \right) + \left(\frac{VP}{T} \right) dV d \left(\frac{P}{T} \right) \right]. \quad (1.29)$$

Al usar la relación fundamental (1.26) obtenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U} = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{3}{2U} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial V} = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1}{V} \quad (1.30)$$

Y de (1.23),

$$g_{ig} = -\Lambda \left[\frac{9}{4} \frac{dU^2}{U^2} + \frac{dV^2}{V^2} \right] \quad (1.31)$$

donde toda la información termodinámica está contenida. El escalar de curvatura $R = g^{ac} g^{bd} = R_{abcd}$ en este caso es:

$$R = -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \left[\left(\frac{g_{11,2} - g_{12,1}}{\sqrt{\det(g)}} \right)_2 + \left(\frac{g_{22,1} - g_{12,2}}{\sqrt{\det(g)}} \right)_1 \right] - \frac{1}{2\det(g)^2} \det(H) \quad (1.32)$$

con

$$H = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ g_{11,1} & g_{12,1} & g_{22,1} \\ g_{11,2} & g_{12,2} & g_{22,2} \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

donde la coma denota derivación parcial. Calculando R para (1.31) se encuentra que la curvatura es cero.

En lugar de calcular en este escrito R para saber si hay interacción termodinámica, hacemos el cambio de coordenadas $d\xi = \Lambda^{1/2} \frac{dU}{2}$ y $d\eta = \Lambda^{1/2} \frac{dV}{V}$ con el cuál la métrica toma la forma euclidiana $g = -(d\xi^2 + d\eta^2)$, cuya curvatura es cero y la solución a las ecuaciones geodésicas son líneas rectas en el plano. Según GTD, esto indica que el sistema es no interactuante, como ya es bien sabido en termodinámica.

Gas de Van der Waals

La relación fundamental para el gas de Van der Waals en la representación de la entropía es

$$U(S, V) = \frac{e^{2S/3k}}{(V-b)^{2/3}} - \frac{a}{V} \quad (1.34)$$

donde k es la constante de Boltzman y a y b las constante de Van der Waals. Mediante un procedimiento completamente análogo al del gas ideal, obtenemos que la métrica del espacio de estados de equilibrio es

$$g = \frac{2}{9k^2} U \left(U + \frac{a}{V} \right) \left[2dS^2 - \frac{4k}{V-b} dSdV + \frac{5k^2}{(V-b)^2} dV^2 \right] - \frac{2aU}{V^3} dV^2, \quad (1.35)$$

y el escalar de curvatura es

$$R = \frac{a\mathcal{P}(U, V, a, b)}{U^3(PV^3 - aV + 2ab)^2} \quad (1.36)$$

donde $\mathcal{P}(U, V, a, b)$ es un polinomio diferente de cero para todo valor real de a y b . Para $a = b = 0$, la curvatura es cero y recuperamos el gas ideal. R también es cero para $a = 0$, $b \neq 0$, lo cual indica que a es responsable de la interacción termodinámica.

Cuando

$$PV^3 - aV + 2ab = 0 \tag{1.37}$$

existen singularidades en la curvatura de las cuales podemos extraer información acerca de las transiciones de fase de segundo orden, pues estas singularidades representan el fin de la estabilidad local. En la termodinámica ordinaria, se sabe que las raíces del polinomio (1.37) corresponden a los puntos donde ocurren las transiciones de fase.

1.3. La variedad de equilibrio como superficie extremal

El formalismo de la GTD nos permite encontrar algunas relaciones fundamentales como (1.26) usando un principio variacional. Supongamos que la subvariedad de equilibrio \mathcal{E} represente una superficie extremal en \mathcal{T} . Esto es que la variación del elemento de volumen es cero

$$\delta \int_{\mathcal{E}} \sqrt{\det(g)} d^n E = 0 \tag{1.38}$$

Dado que g es la métrica inducida por G que depende de Z^A , se puede mostrar[20] que esta variación lleva al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales conocidas como ecuaciones de Nambu-Gotto

$$\square Z^A = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} (\sqrt{\det(g)} g^{ab} Z_{,a}^A)_{,b} + \Gamma_{BC}^A Z_{,b}^B Z_{,c}^C g^{bc} = 0 \tag{1.39}$$

donde \square es el d'Alambertiano. Esta variación implica que el potencial Φ debe cumplir un conjunto de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones se escriben en términos de las variables extensivas, es decir que estas soluciones son las ecuaciones fundamentales. Dos soluciones particulares para el potencial $\Phi = S$ y $E^a = \{U, V\}$ usando la métrica (1.23)

en (1.25) halladas en en [20] son:

$$S = c_1 \ln U + c_2 \ln V \quad (1.40)$$

$$S = S_o \ln(U^{1+\alpha} + cV^{1+\beta}) \quad (1.41)$$

Donde c_1, c_2, α, β y S_o son constantes que cobraran sentido en el futuro. Valga anotar que la primera de las anteriores ecuaciones, es una generalización que abarca para $c_1 = 3/2$ y $c_2 = 1$ la relación fundamental del gas ideal (1.26) utilizada en el ejemplo de la sección anterior.

Terminamos este capítulo resaltando el hecho de que en GTD hay dos caminos, uno es, dada la relación fundamental se construye la métrica g y se encuentra a través de la curvatura si existe o no interacción termodinámica. El otro camino es encontrar la relación fundamental a través del principio variacional como acabamos de hacerlo en esta sección. Más adelante veremos que a partir de estas soluciones al problema geométrico, podremos describir un sistema termodinámico, derivar todas sus propiedades y usarlas para construir dos modelos cosmológicos.

Un modelo cosmológico sin interacción termodinámica

*So, even though we do not understand our universe,
we have been quite successful in parametrising
our ignorance in terms of well-chosen numbers.*

T. Padmanabhan

Conocer la evolución del universo es conocer las funciones del tiempo: el factor de escala $a(t)$, la densidad $\rho(t)$ y la presión $p(t)$. Es decir, poder describir la manera en que se expande o contrae o permanece a través del factor de escala $a(t)$ que nos dice como aumentan la distancia entre dos partículas fijas (en coordenadas comoviles) conforme pasa el tiempo; describir la densidad del universo $\rho(t)$ en el tiempo y la presión $p(t)$. Básicamente es conocer el tamaño y lo que lo conforma en cada instante de su vida. El modelo cosmológico estándar aporta las ecuaciones para $a(t)$ y utiliza una ecuación de estado para cada componente del universo. Las ecuaciones de estado necesarias para describir las curvas de rotación en galaxias y la expansión acelerada del universo no las pueden cumplir ningún tipo de materia ordinaria o radiación. Es acá donde entra la materia y energía oscura como las formas de energía que dominan el universo. Haremos

un recuento del modelo cosmológico estandar y posteriormente construiremos en un modelo cosmológico sin interacción termodinámica utilizando la relación fundamental (1.40) encontrada en GTD en el capítulo 1.

2.1. Modelo cosmológico estándar

Para la tarea que nos ocupa uno de los modelos más simples que podemos plantearnos es el de un universo isotrópico y homogéneo. Durante las últimas décadas, observaciones como las de supernovas [14] indican que el universo se expande aceleradamente. Este comportamiento ha sido hasta el momento imposible de explicar aduciendo exclusivamente a materia convencional y radiación. (Para ver un recuento en cosmología, véase [6]).

El modelo cosmológico estándar¹ conocido también como modelo Λ CDM (Cold Dark Matter), [10] está soportado en las ecuaciones de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW), las cuales son equivalentes a las ecuaciones de campo de Einstein. En este modelo, la métrica[21] está dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala con tiempo cosmológico t . Las coordenadas r , θ y ϕ son las coordenadas en un sistema de referencia comóvil, es decir, en un sistema de referencia donde una partícula libre en movimiento está en reposo. Las ecuaciones diferenciales para el factor de escala y la densidad del universo se encuentran mediante las ecuaciones de Einstein[21]

$$G_\nu^\mu = R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R = 8\pi T_\nu^\mu \quad (2.2)$$

¹Este modelo es el que hasta ahora se ajusta mejor a las pruebas observacionales como CMB, supernovas, anisotropías, entre otros.

22 UN MODELO COSMOLÓGICO SIN INTERACCIÓN TERMODINÁMICA

donde G_{ν}^{μ} es el tensor de Einstein, R_{ν}^{μ} es el tensor de Ricci que depende de la métrica y sus derivadas, R es el escalar de curvatura y T_{ν}^{μ} es el tensor de momento y energía. Usando la métrica de FLRW (2.1), las componentes del tensor de Ricci y el escalar de curvatura están dados respectivamente por [9]

$$R_0^0 = \frac{3\ddot{a}}{a} \quad (2.3)$$

$$R_j^i = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2K}{a^2} \right) \delta_j^i \quad (2.4)$$

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} \right) \quad (2.5)$$

A medida que a disminuye, las componentes de R_j^i aumentan y cuando $a = 0$ divergen, dando lugar a la así llamada singularidad del 'Big Bang'. Esta singularidad se puede 'evitar' diciendo que cuando el radio de curvatura del espaciotiempo se vuelve comparable a la longitud de Planck $\sqrt{G\hbar c^{-3}} \approx 10^{-33} cm$ los efectos cuánticos predominan y las ecuaciones de Einstein ya no son válidas. Esto nos dice que aunque el inicio del universo es en $t = 0$, $a = 0$ solo después de algún tiempo es posible usar la relatividad y las ecuaciones expuestas hasta ahora. En ese intervalo de tiempo inicial, ya no es posible conocer el comportamiento del universo.

Ahora, si consideramos un fluido perfecto como la fuente de energía $T_{\nu}^{\mu} = (-\rho, p, p, p)$ donde ρ es la densidad total del universo y p es la presión, la ecuación 2.2 arroja las dos ecuaciones

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho - \frac{K}{a^2} \quad (2.6)$$

$$2\dot{H} = -8\pi p - \frac{K}{a^2} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \quad (2.7)$$

donde H es el parámetro de Hubble. Además de estas ecuaciones, podemos hallar la del fluido mediante conservación de energía, es decir $T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$ usando solo la componente temporal.

$$T_{\nu,\mu}^{\mu} + \Gamma_{\gamma\mu}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\gamma} T_{\alpha}^{\mu} = 0$$

$$\Gamma_{00}^0 = 0 \quad \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.8)$$

Eliminando K/a^2 de 2.6 y 2.7 se obtiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p), \quad (2.9)$$

de donde podemos observar que la expansión acelerada ocurre para $\rho + 3p < 0$. Esta restricción no la puede cumplir ningún tipo de materia bariónica para la cuál $\rho + 3p > 0$ lo que lleva a $\ddot{a} < 0$, es decir a la desaceleración.

Para solucionar las ecuaciones 2.6 y 2.8 para $a(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$, es decir, para describir como evoluciona el universo, es necesario conocer una relación entre la presión y la densidad, una *ecuación de estado*.

Si reescribimos la ecuación 2.6 como

$$\Omega(t) = 1 + \frac{K}{(aH)^2} \quad (2.10)$$

donde $\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}$ es un parámetro adimensional que da cuenta de la densidad, y $\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi}$ es la densidad crítica; vemos la relación entre la densidad y la geometría del universo. Así,

$$\Omega > 1, \quad \rho > \rho_c \Rightarrow K = 1 \quad (2.11)$$

$$\Omega = 1, \quad \rho = \rho_c \Rightarrow K = 0 \quad (2.12)$$

$$\Omega < 1, \quad \rho < \rho_c \Rightarrow K = -1 \quad (2.13)$$

Las observaciones[17] muestran que el universo tiene una geometría plana ($\Omega \approx 1$, $K = 0$), por tanto consideraremos en adelante un universo plano ($K = 0$).

No es posible encontrar una ecuación de estado simple que describa las diferentes

componentes del universo en una sola, así que se estudiarán las diferentes contribuciones a la evolución del universo por separado.

2.2. Ecuación de estado

Las aplicaciones de la GTD presentadas en el primer capítulo, nos hacen pensar que es posible construir relaciones fundamentales que sean compatibles con las estructuras geométricas en GTD y que caractericen sistemas termodinámicos. Si queremos modelar un universo isotrópico, homogéneo, como un gas de partículas no interactuantes podemos partir de la ecuación general de un gas ideal (1.40) mencionada en el capítulo 1

$$\boxed{S(U, V) = c_1 \ln U + c_2 \ln V}, \quad (2.14)$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Al igual que en el capítulo 1, la métrica en \mathcal{T} y \mathcal{E} está definida por 1.29 y si calculamos g del espacio de estados de equilibrio, con $\phi = S$ y $E^a = \{U, V\}$ obtenemos

$$g = -\Lambda \left[c_1^2 \frac{dU^2}{U^2} + c_2^2 \frac{dV^2}{V^2} \right]. \quad (2.15)$$

Si introducimos las coordenadas $d\chi = \Lambda^{1/2} c_1 \frac{dU}{U}$ y $d\eta = \Lambda^{1/2} c_2 \frac{dV}{V}$ la métrica toma forma euclidiana $g = -(d\chi^2 + d\eta^2)$ y claramente la curvatura de esta métrica es cero, evidencia de que no existe interacción termodinámica.

Tomando el diferencial de (2.14)

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV \quad (2.16)$$

de donde

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T} \quad (2.17)$$

que al combinar obtenemos la ecuación de estado

$$\boxed{P = \frac{c_2 U}{c_1 V} = \omega \rho} \quad (2.18)$$

con $\omega = \frac{c_2}{c_1}$. Esta ecuación barotrópica de estado es la ecuación que convencionalmente se usa para describir las diferentes componentes del universo en el modelo cosmológico estándar. La asociación de diferentes valores al parámetro ω se debe principalmente a que las observaciones indican que el universo está en expansión y para explicarlo, es necesario en el modelo estándar que exista un componente del universo con presión negativa ($\omega = -1$), que no puede satisfacer ni la radiación ni la materia ordinaria, por lo cual se asocia la energía oscura a esta ecuación de estado con $\omega = -1$.

Si bien la ecuación de estado que obtenemos por este camino es exactamente igual, la interpretación física es radicalmente distinta a la interpretación de la energía oscura.

La energía interna del sistema esta dada por

$$U = c_2 T \quad (2.19)$$

y por tanto la capacidad calorífica es

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = c_2 \quad (2.20)$$

Ahora bien, si asumimos que el universo es un fluido perfecto cuya ecuación de estado es (2.18), las diferentes épocas del universo pueden obtenerse escogiendo las constantes apropiadamente.

2.2.1. Era dominada por la materia: $c_2 = 0 \rightarrow P = 0$

Si $\frac{c_2}{c_1} = 0$ la ecuación de estado es $P = 0$ y tenemos materia ordinaria con capacidad calorífica igual a cero. Usualmente se considera que al ser un gas de partículas no

interactuantes, la presión es cero para el caso de la materia ordinaria, lo cuál no sucede con la radiación, donde la presión no es cero. Recordemos que estamos usando $K = 0$, por tanto la ecuación de fluido para $P = 0$ se reescribe [10]

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \quad (2.21)$$

de donde

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3} \quad (2.22)$$

con ρ_0 la densidad actual del universo. Esta ecuación nos dice que la densidad del universo disminuye a medida que el volumen aumenta, lo cual no es de extrañarse.

Ahora hallemos cómo evoluciona a . Sustituyendo ρ en la ecuación 2.6, se obtiene

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi\rho_0}{3} \quad (2.23)$$

Para solucionar esta ecuación proponemos $a \propto t^{-q}$ y se obtiene que la solución es

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}. \quad (2.24)$$

En esta solución se observa que el universo se expande para siempre aunque la tasa de expansión disminuye con el tiempo $\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$.

2.2.2. Era dominada por la radiación: $c_2/c_1 = 1/3 \rightarrow P = \frac{1}{3}\rho$

Dado que la ecuación para radiación obedece $P = \frac{1}{3}\rho$, la ecuación de fluido es[10]

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0$$

De la misma manera que se hizo en la era dominada por la radiación, se obtiene

$$\rho \propto \frac{1}{a^4} \quad a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \quad \rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4}.$$

Estas ecuaciones también nos dicen que el universo se está expandiendo pero a una tasa más lenta que en la era dominada por la materia. Como en ésta, la densidad está disminuyendo.

En esta parte no se ha obtenido nada diferente al modelo convencional, la capacidad calorífica del fluido es positiva y la presión también.

2.2.3. Era dominada por la constante cosmológica: $\omega = -1$,

$$P + \rho = 0$$

Si $\omega = \frac{c_2}{c_1} = -1$, $P + \rho = 0$ y tenemos la ecuación de estado asociada en el modelo Λ -CDM a la energía oscura. Note que bajo esta restricción, la ecuación de estado puede ser negativa para $c_2 > 0$ y $c_1 < 0$, o para $c_2 < 0$ y $c_1 > 0$. En el primer caso se tiene la interpretación convencional de que la capacidad calorífica debe ser positiva y que la presión del sistema es negativa. En el modelo Λ -CDM la presión negativa es la responsable de la expansión del universo. En el segundo caso, *la presión es negativa, y la capacidad calorífica es negativa*.

Este resultado abre la posibilidad de considerar la energía oscura como un sistema termodinámico no interactuante con capacidad calorífica negativa. En la próxima sección, exploraremos estos sistemas con capacidad calorífica negativa pues este resultado nos da un indicio que es posible buscar en esta dirección, dado que si la parte de universo asociada a energía oscura tiene capacidad calorífica negativa sus variables son no extensivas y podríamos relacionar la no extensividad con la fractalidad de nuestro universo.

2.2.4. Materia oscura: $-1 < \omega < 0$, $P + \omega\rho = 0$

Si $-1 < \frac{c_1}{c_2} < 0$, se obtiene la ecuación de estado que modela la materia oscura. Al igual que en el caso anterior, posiblemente la parte del universo que se asocia con materia oscura, tiene capacidad calorífica negativa.

Como ya habíamos mencionado, las ecuaciones de estado asociadas a materia y energía oscura, no pueden ser satisfechas por ningún tipo de materia conocida. Es por esto que usualmente se asocian con estos tipos de materia exótica que hasta el momento no ha podido ser detectada bajo ninguna prueba experimental. Estas ecuaciones, aunque luzcan exactamente iguales a las del modelo estándar, entrañan una interpretación muy diferente en nuestro modelo. En este, el universo es isótropico, homogéneo, parte de una singularidad inicial y se puede describir cierto tiempo después del “origen”, pero sus componentes esenciales no son materia bariónica, radiación y materia y energía oscura, sino materia bariónica con diferentes capacidades caloríficas y radiación.

Finalizamos este capítulo haciendo una exposición de las propiedades de los sistemas con capacidad calorífica negativa, simplemente para hacer énfasis en la viabilidad de explorar el camino de la energía y la materia oscura como un sistema termodinámico con capacidad calorífica negativa.

2.3. Termodinámica de variables no extensivas

Como mencionamos antes, las variables extensivas en termodinámica son variables aditivas y por tanto proporcionales al tamaño del sistema. Por el contrario, las variables intensivas son variables definidas solo localmente. En un sistema en equilibrio, las variables intensivas valen lo mismo en todo el espacio de fase. La temperatura y la presión son ejemplos de variables intensivas. Sin importar el tamaño del sistema, estas tienen el mismo valor.

La termodinámica clásica para sistemas en equilibrio, contiene solamente variables extensivas e intensivas. Las interacciones de corto alcance son quienes rigen las rela-

ciones entre los constituyentes de la materia, y si se mezclan dos cantidades V_1 y V_2 de materia, lo que se espera es que el volumen total sea $V = V_1 + V_2$. Sin embargo, el universo está regido también por interacciones de largo alcance como la gravitacional. Algunos autores como Tsallis[19] y Abe[1], afirman que las interacciones de largo alcance dan lugar a la no extensividad de las variables termodinámicas. Pero, ¿cómo modelar un sistema donde la entropía, o el volumen no sean aditivos en primer grado de homogeneidad? En GTD no hay restricciones acerca de la extensividad de las variables para analizar geoméricamente el espacio de fase, es por esto además que este formalismo arroja nuevas luces al problema.

2.3.1. No extensividad en GTD

Partiendo de la relación fundamental en la representación de la energía que habíamos usado antes en el gas ideal

$$U(S, V) = \frac{e^{\frac{S}{c_1}}}{V^{\frac{c_2}{c_1}}}, \quad (2.25)$$

aplicando las condiciones de equilibrio

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T = \frac{U}{c_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial V} = -P = -\frac{c_2 U}{c_1 V} \quad (2.26)$$

se obtiene las ecuaciones de estado,

$$U = c_1 T \quad PV = c_2 T. \quad (2.27)$$

Usando las ecuaciones de estado y la ecuación de Euler (1.17)

$$\gamma U = \frac{\partial U}{\partial S} S + \frac{\partial U}{\partial V} V$$

$$\gamma U = \frac{U}{c_1} S - \frac{c_2 U}{c_1 V} V$$

que simplificando nos conduce a

$$S = c_1 \gamma + c_2 \quad (2.28)$$

donde γ es el grado de homogeneidad del potencial termodinámico, en este caso de la entropía. Si $\gamma < 1$ a las variables se les conoce como *subextensivas* y cuando $\gamma > 1$ las variables son *supraextensivas*. Las relaciones de Euler y Gibbs-Duhem generalizadas para cualquier valor de γ son

$$\gamma\Phi(E^a) = \delta_{ab}I^b E^a \quad (2.29)$$

$$(1 - \gamma)\delta_{ab}I^a dE^b + \delta_{ab}E^a dI^b = 0. \quad (2.30)$$

como ya habíamos obtenido en la descripción geometrotermodinámica. Si $\gamma = 1$, tenemos que la entropía es una cantidad extensiva y satisface las ecuaciones de Euler y Gibbs-Duhem de la termodinámica ordinaria. Si $\gamma \neq 1$ la entropía es no extensiva y es a través de estas ecuaciones generalizadas de la GTD que podemos dar cuenta de los sistemas no extensivos.

La no extensividad de las variables termodinámicas no está prohibida por ninguna teoría física. Es conocido que en sistemas con interacciones de largo alcance como sistemas autogravitantes, estrellas politrópicas y cúmulos de galaxias, entre otros, las variables termodinámicas pueden ser no extensivas. La relación que existe entonces entre las interacciones de largo alcance, la no extensividad de las variables y la capacidad calorífica negativa que resulta de esto, nos da un indicio para plantear un modelo cosmológico basado en la relación fundamental proporcionada por la GTD.

2.4. Capacidad calorífica negativa

Como vemos, el sistema que nos interesa estudiar, el universo, posee variables termodinámicas no extensivas. En esta sección queremos esclarecer la relación entre interacciones de largo alcance², no extensividad y capacidad calorífica negativa.

A finales de 1800s los astrofísicos conocían que añadiéndole energía a una estrella esta puede expandirse, enfriarse e implotar. Este fenómeno claramente viola el principio estadístico que afirma que la capacidad calorífica de un sistema siempre es positiva, es

²Las interacciones de largo alcance son aquellas donde el principal aporte del potencial que siente una partícula proviene del volumen de partículas distantes y no de los vecinos inmediatos.

decir que si al sistema se le da calor, él aumenta su temperatura y no lo contrario que es lo que se observa en ciertos objetos astrofísicos. En termodinámica clásica, la capacidad calorífica se define como la energía necesaria para incrementar un grado de temperatura cierta cantidad de sustancia.

En la colectividad canónica la energía media de un sistema en equilibrio térmico, está dada por

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_i E_i e^{\frac{E_i}{kT}}}{\sum_i e^{\frac{E_i}{kT}}} \quad (2.31)$$

y por tanto la capacidad calorífica es

$$c = \frac{d \langle E \rangle}{dT} = \frac{1}{kT^2} \langle (E_i - \langle E \rangle)^2 \rangle \quad (2.32)$$

con lo que se prueba, como dije anteriormente, que la capacidad calorífica debe ser positiva.

Sin embargo se conocen sistemas no solo en astrofísica sino también en conglomerados de átomos[] y fragmentación de núcleos[], donde la capacidad calorífica adquiere valores negativos. Estos sistemas son usualmente sistemas autogravitantes y donde las interacciones son de largo alcance. Por ejemplo, en un sistema autogravitante, el teorema del Virial para un potencial de la forma

$$\phi = Cr^{-n}, \quad (2.33)$$

es [12]

$$2E_c + n\phi = 3p_e V. \quad (2.34)$$

Con p_e la presión externa y V el volumen. Para gravedad $n = 1$ y $E = E_c + \phi$. Si consideramos un sistema gravitacional aislado $p_e = 0$,

$$E = -E_c = -\frac{3}{2}NkT$$

de donde

$$C_v = \frac{dE}{dT} = -\frac{3}{2}NkT$$

La capacidad calorífica es negativa. La razón por la cual un sistema puede tener capacidad calorífica negativa se encuentra relacionada con la no extensividad de las variables termodinámicas y esta a su vez con las interacciones de largo alcance[13]. Los sistemas en equilibrio como gases y plasmas que se estudian en mecánica estadística están regidos por interacciones de corto alcance o interacciones de largo alcance apantalladas. Sobresimplificando un poco, estos sistemas pueden estar en fase sólida, líquida o gaseosa. A altas temperaturas la energía cinética es superior a la potencial y el sistema está en fase gaseosa. Cuando la temperatura disminuye, la energía cinética es comparable a la potencial y el sistema realiza una transición a la fase líquida. Estadísticamente es sencillo estudiar los sistemas en determinada fase más no durante la transición. En los sistemas gravitacionales en equilibrio, la energía cinética y potencial son comparables y por tanto estudiar estos sistemas estadísticamente es similar a estudiar los sistemas termodinámicos a las puertas de una transición.

Una buena analogía que nos permite entender el origen de la no extensividad en relación con largo alcance, es considerar una región esférica de radio R donde las partículas están distribuidas uniformemente. Supongamos que añadimos otra partícula en el origen. La energía potencial que siente esta partícula debido a las demás está dada por

$$U \propto \int_0^R 4\pi r^2 dr \rho r^{-3-\epsilon} \propto \int_0^R dr r^{-1-\epsilon} \quad (2.35)$$

Si $\epsilon > 0$ las contribuciones a la energía son principalmente de partículas cerca del origen. Si $\epsilon < 0$ como es el caso de las interacciones de largo alcance, la energía de cada partícula está afectada por la energía de las partículas lejanas y por tanto la energía no puede ser un parámetro extensivo. Contrario a esto, en sistemas donde la interacción es de corto alcance la energía total del sistema es un parámetro extensivo dado que si dividimos el sistema en subsistemas macroscópicos la energía del sistema completo

dependerá de la suma de los subsistemas. Esto se debe a que en estas interacciones, la energía de interacción entre los subsistemas es proporcional al área superficial de los mismos. La energía de los subsistemas incrementará entonces con el volumen. De esta forma cuando la interacción es de corto alcance la energía de interacción contribuye en una manera despreciable a la energía total del sistema.

Volviendo a la afirmación del inicio del texto, ¿hay violación a alguna imposición de la mecánica estadística? ¿Cómo podemos justificar que existan algunos sistemas con capacidad calorífica negativa? Al respecto, dice Thirring: Si colocamos dos sistemas en contacto térmico, con intercambio de energía mas no de partículas, y el sistema uno tiene $c < 0$, la expresión para la variación de la energía es

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S_i}{\partial E_i}, \quad \frac{1}{c_i} = -T_i^2 \frac{\partial^2 S_i}{\partial E_i^2}$$

$$S(E) = S_1(E_1) + S_2(E - E_1)$$

$$\delta S = \delta E_1 \left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right] - \frac{(\delta E_1)^2}{2} \left[\frac{1}{c_1 T_1^2} + \frac{1}{c_2 T_2^2} \right] \quad (2.36)$$

Dado que $T_i > 0$ la entropía aumenta cuando $T_1 \neq T_2$ mediante la transferencia de energía del sistema más caliente al más frío.

Para $T_1 = T_2$ tenemos una situación estable si

$$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} > 0$$

Por tanto, si ambos sistemas tienen $c < 0$ *nunca* llegarán al equilibrio estable. Por ejemplo, si los dos tienen $c < 0$ y uno de los sistemas es ligeramente más caliente, éste transferirá energía al otro. Entre más energía transfiera, más se calentará y más energía podrá transferir. De este modo, los sistemas se alejarán cada vez más de una temperatura común y el equilibrio solo será posible si alguno de los dos pasa a un estado con $c > 0$.

Para $c_2 > -c_1 > 0$ y $T_1 > T_2$ la energía fluye de 1 a 2. Ambas temperaturas se

incrementan, pero T_1 lo hace más rápido que T_2 pues $|c_1| < c_2$ por tanto tampoco alcanzan los sistemas el equilibrio térmico.

Si como en la colectividad canónica el sistema 2 es el baño térmico, $c_2 > |c_1|$ y tampoco se puede llegar al equilibrio térmico mientras que $c_1 < 0$. Por el contrario, si $c_2 > 0$ los sistemas alcanzan el equilibrio mientras $|c_1| > |c_2|$.

Estas consideraciones son muy importantes dado que reflejan la no extensividad de los sistemas con capacidad calorífica negativa. Dado que dos sistemas con capacidad calorífica negativa no pueden alcanzar el equilibrio térmico, *es imposible formar una colectividad canónica*. Esto nos refuerza una de las preguntas del inicio, la capacidad calorífica en la colectividad canónica, en una situación de equilibrio termodinámico es siempre positiva; pero en un sistema fuera del equilibrio que no puede ser descrito estadísticamente mediante la colectividad canónica, esta restricción no aplica. Es decir que físicamente no hay restricción para la capacidad calorífica en general. La restricción de $c > 0$ aplica a sistemas que se describen estadísticamente en una colectividad canónica, a sistemas con interacción de corto alcance.

En resumen, los sistemas con capacidad calorífica negativa tienen tres propiedades [12]:

1. Dos sistemas con capacidad calorífica negativa en contacto térmico no alcanzan el equilibrio térmico. Por tanto, es imposible dividir en subsistemas cada uno con capacidad calorífica negativa, lo que conlleva a la no extensividad de las variables del sistema.
2. Pueden alcanzar el equilibrio térmico con otro sistema de capacidad calorífica positiva siempre y cuando la capacidad calorífica de la combinación de los sistemas sea negativa.
3. Un sistema con capacidad calorífica negativa no puede alcanzar el equilibrio térmico con un baño térmico.

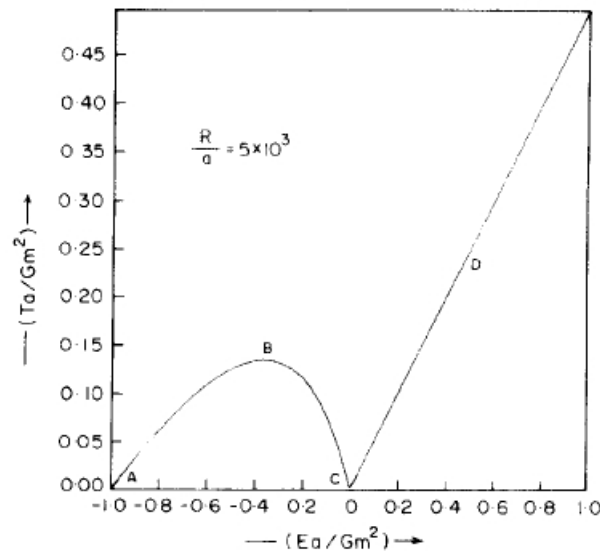


Figura 2.1: Ejemplo de sistema con estados de capacidad calorífica negativa [13]. Función $T(E)$ para una estrella binaria. El calor específico es positivo a lo largo de AB y CD , y negativo a lo largo de BC . Una gráfica muy similar es obtenida por Lynden-Bell para su modelo de la caja esférica de partículas puntuales con energía fija.

Dado que no es posible trabajar con una colectividad canónica, los sistemas gravitantes de este tipo son estudiados mediante una colectividad microcanónica. En los modelos estudiados por Lynden-Bell [12], Thirring [18] y Padmanabhan [13], estos sistemas tienen dos fases. La primera es de alta temperatura, dominada por la energía cinética; la segunda es de baja temperatura donde domina el potencial. Estas dos fases poseen capacidad calorífica positiva y están conectadas por estados con capacidad calorífica negativa en las temperaturas intermedias donde la energía cinética y potencial son comparables.

Si se estudian los mismos sistemas a través de una colectividad canónica, lo que se encuentra en estos estados intermedios es una transición de fase. Es por esta razón que Lynden-Bell y los demás autores mencionados, asocian esta fase del sistema con capacidad calorífica negativa con una transición. (Ver figura ??)

Aunque algunos como Thirring y Lynden-Bell afirman que las interacciones de

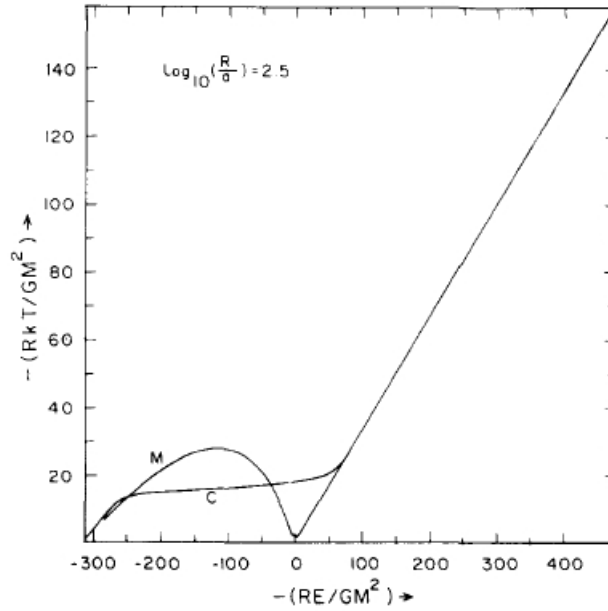


Figura 2.2: Comparación entre $T(E)$ de una estrella binaria estudiada mediante la colectividad canónica y $T(E)$ usando la colectividad microcanónica. [13]. La región de calor específico negativo en la colectividad microcanónica es reemplazada en la colectividad canónica por una transición de fase acompañada por grandes fluctuaciones en la energía. La zona de energías en las cuales las dos colectividades difieren, es la región energética más común en los sistemas astrofísicos.

largo alcance son las responsables de este fenómeno atípico³, otros como Einarsson [7] plantean que las dimensiones del sistema (D) y el exponente (n) del potencial (2.33), son cruciales en generar estados de capacidad calorífica negativa en el sistema y que para algunos valores de n y D no son las interacciones de largo alcance las responsables de estos estados. En sistemas con potencial de la forma (2.33), independiente de la dimensión del sistema, los sistemas pueden tener capacidad calorífica negativa para $n = -1$. Para sistemas tridimensionales y $n < 0$ la capacidad calorífica negativa está asociada al parecer con interacciones de largo alcance. Estas son, en tres dimensiones las interacciones cuyo potencial es (2.33) con $n \geq -2$. Dado que la capacidad calorífica negativa se puede dar en sistemas con dimensión $D \geq 3$ aún para $n = -1$ cabe preguntarse si las interacciones de largo alcance son las únicas responsables de este fenómeno [7].

³Atípico en los sistemas donde la interacción es de corto alcance, sistemas que son más conocidos y trabajados en termodinámica clásica.

En la sección final del artículo de Thirring, hay buenos ejemplos de sistemas que exhiben capacidad calorífica negativa. El más ilustrativo consiste de una estrella que ha acabado su combustible y por tanto su núcleo se contrae y se vuelve más caliente cediendo su energía a la parte externa, que a su vez se expande y se vuelve más fría. Esta situación puede ser explicada mediante un intercambio de calor entre dos sistemas con capacidad calorífica negativa, siendo el más caliente el núcleo. Estos eventos pueden ser estudiados como una transición de fase debida a la inestabilidad de los sistemas con capacidad calorífica negativa. Lyndel Bell en esta misma línea propone que el intervalo de energía en el cual el sistema tiene capacidad calorífica negativa, puede reemplazarse por una transición de fase de primer orden.

Una pregunta que viene en la relación entre sistemas con capacidad calorífica negativa y los componentes oscuros del universo, es si es posible diferenciar los sectores con capacidad calorífica negativa de los sectores con capacidad calorífica positiva. Respecto a esto, es crucial comprender la propuesta de Lynden-Bell en cuanto a las transiciones de fase. Cuando se ponen en contacto sistemas con capacidad calorífica positiva con sistemas con capacidad calorífica negativa, si combinados poseen capacidad calorífica positiva, ocurre una transición de fase y el sistema llega al equilibrio. Además de esto, el lector se habrá preguntado por qué a pesar de la imposibilidad de formar una colectividad canónica para sistemas donde las interacciones son de largo alcance, hicimos una comparación en la figura ?? entre el sistema en la canónica y en la microcanónica. Para aclarar esto reproduzcamos los ejemplos del gas de Van der Waals y el de disociación química de Lynden-Bell [12].

Sean dos partículas A y B apareadas en el estado base. Las partículas están ligadas mediante un potencial tipo δ tal que en el estado base hay un estado con energía de enlace χ . y n_{AB} es la densidad de pares en un estado inicial base. Este sistema es modelado como una colectividad microcanónica de cajas cada una con volumen $L^3 = n_{AB}^{-1}$ y cada una con una partícula tipo A y una B . Lynden-Bell demuestra que cada uno de esos microsistemas presenta capacidad calorífica negativa cuando la energía

de cada caja es mayor que la energía de disociación. Si el sistema está en una caja grande muchos se disocian a medida que la energía aumenta y la energía cinética por partícula libre va disminuyendo debido a que la energía es absorbida por la disociación. En este ejemplo, los elementos con capacidad calorífica negativa están asociados con las reacciones químicas de disociación.

En el gas de Van der Waals, conocemos que las crestas y valles de las isothermas son reemplazadas en la construcción de Maxwell por una transición de fase a presión constante. Esto es lo que sucede en un sistema extensivo donde es posible dividir el sistema en subsistemas. Sin embargo, a nivel molecular no hay extensividad en Van der Waals pero se supone que pequeños elementos indivisibles de gas de Van der Waals obedecen la ecuación de Van der Waals y es solo la cooperación de muchos de ellos en una colectividad canónica la que hace obedecer la construcción de Maxwell y da lugar a las transiciones de fase.

En los dos ejemplo anteriores, repetimos entonces lo que hemos dicho desde el comienzo, y es que las transiciones de fase en el ensamble canónico corresponden a estados energéticos del sistema donde la capacidad calorífica es negativa.

Hemos analizado las propiedades y la naturaleza de algunos sistemas con capacidad calorífica negativa debido a que el sistema que nos interesa, el universo, es gobernado por interacciones de largo alcance siendo pertinente abordar su estudio mediante otros métodos diferentes a la estadística de sistemas donde las interacciones son de corto alcance. Si bien existe un modelo popular para incluir sistemas con interacciones de largo alcance conocido como la superestadística de Tsallis, el camino que emprenderemos es abordar el problema desde la GTD. En este capítulo se planteó el modelo cosmológico utilizando la relación fundamental del gas ideal generalizada de la GTD y esta al ser no extensiva, nos condujo naturalmente a que cierto sector del universo posee capacidad calorífica negativa. Conclusiones más concretas requerirían estudiar el sector oscuro del Universo a través de su interacción de largo alcance, su relación directa con la capacidad calorífica negativa y, por ende, con la posibilidad de introducir dimensiones efectivas a

nivel cosmológico, que no necesariamente habrán de coincidir con las tres dimensiones espaciales en las que se basa nuestra percepción actual del universo. Sin embargo, este tema de investigación está fuera de los alcances de esta tesis y será un tema a desarrollar en el futuro próximo.

El fluido oscuro generalizado: un modelo unificado

En el capítulo 1 habíamos dicho que las ecuaciones (1.40) y (1.41) son dos soluciones posibles a la ecuación de las geodésicas. La primera solución ya cobró un sentido en el modelo cosmológico sin interacción termodinámica. En este capítulo final indagaremos en la segunda solución, esta es

$$S = S_0 \ln(U^{1+\alpha} + cV^{1+\beta}) \quad (3.1)$$

donde S_0 , α , c y β son constantes. Con esta ecuación nuevamente generamos la métrica en \mathcal{E} introduciendo $\Phi = S$ y $E^a = \{U, V\}$ en la ecuación (1.23) tal y como se hizo en el ejemplo del gas ideal en el capítulo 1

$$\begin{aligned} g = & \frac{\Lambda S_0^2}{(U^{1+\alpha} + cV^{1+\beta})^3} [(1 + \alpha)^2 U^{2\alpha} (\alpha c V^{1+\beta} - U^{1+\alpha}) dU^2 + \\ & + (1 + \beta)^2 c^2 V^{2\beta} (\beta U^{1+\alpha} - cV^{1+\beta}) dV^2 - \\ & - (1 + \alpha)(1 + \beta)cU^{1+\alpha}V^{1+\beta} ((1 + \alpha)U^{1+\alpha} + (1 + \beta)cV^{1+\beta}) dU dV] \quad (3.2) \end{aligned}$$

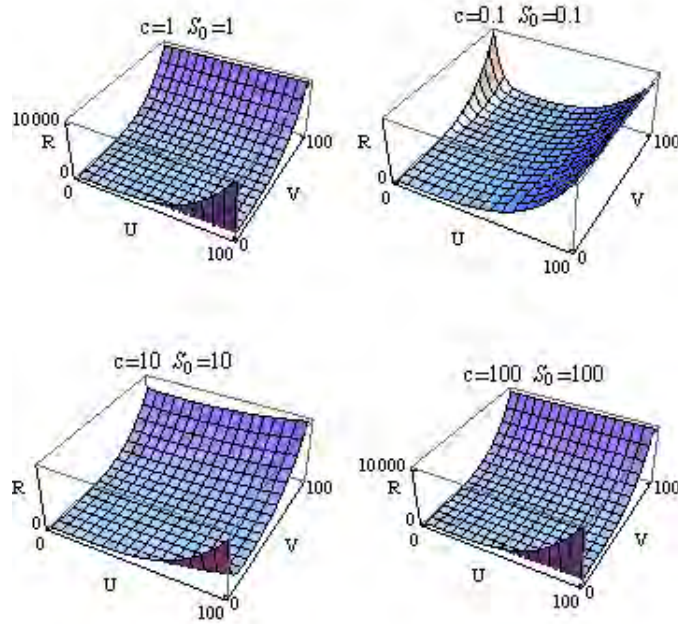


Figura 3.1: Curvatura $R(U,V)$ para $\alpha = \beta = 1$ y diferentes valores de c y S_0 .

La curvatura para esta métrica es diferente de cero en general como se puede observar en la figura 3.1 y esta dada para $\alpha = \beta = 1$ por

$$R = \frac{6U^4V^4c^2 + 4U^2V^6c^3 + V^8c^4 + U^8}{S_o^2(U^2 + cUV + c^2V^2)^2}, \quad (3.3)$$

lo cual indica que si hay interacción termodinámica. Sin embargo, no hay singularidades y por tanto no hay transiciones de fase.

La primera ley de la termodinámica (1.14) y las condiciones de equilibrio (1.13) usando la ecuación (3.1) son

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{S_o(1 + \alpha)U^\alpha}{U^{1+\alpha} + cV^{1+\beta}}, \quad \frac{P}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{S_oc(1 + \beta)V^\beta}{U^{1+\alpha} + cV^{1+\beta}} \quad (3.4)$$

que combinándolas nos permite obtener una ecuación de estado

$$\boxed{P(U, V) = \frac{c(1 + \beta)V^\beta}{(1 + \alpha)U^\alpha}} \quad (3.5)$$

Consideremos ahora el universo compuesto de partículas convencionales y un sector oscuro descrito por GTD al cual distinguiremos por el subíndice d . Para escribir la ecuación de estado (3.5) de este sector oscuro en términos del factor de escala $a(t)$ y la densidad de energía, usamos $V = V_o(a/a_o)^3$, hacemos el valor de a hoy igual a 1 y definimos la constante

$$\mathcal{C} = \frac{-c(1 + \beta)V_o^{\beta-\alpha}}{(1 + \alpha)}. \quad (3.6)$$

En estos términos la ecuación de estado es

$$\boxed{P_d = \mathcal{C}a^{-3(\alpha-\beta)}\rho_d^{-\alpha}} \quad (3.7)$$

De esta ecuación podemos ver que en el caso de $\alpha = \beta$ y $0 < \alpha \leq 1$ se obtiene el *gas generalizado de Chaplygin*[4]. Al hacer $\alpha = \beta$ para $\alpha < 0$ se obtiene adicionalmente la ecuación de estado de *fluidos politrópicos*.

Además de esto, si $\alpha = \beta = 0$ se obtiene el comunmente llamado *fluido oscuro* el cual es descriptivamente igual que el modelo Λ CDM [3][2][11]. Veamos a que corresponde este caso límite desde la perspectiva de la GTD. Substituyendo $\alpha = \beta = 0$ en la ecuación (3.2) obtenemos una métrica cuya curvatura es igual a cero, por lo cuál concluimos que el fluido oscuro es un sistema sin interacción termodinámica con ecuación fundamental $S = S_o(\ln U + c \ln V)$. Vemos que a nivel de GTD se explica fácilmente por qué el fluido oscuro es equivalente al modelo Λ CDM presentado en el capítulo anterior. Aunque los dos sistemas tienen ecuaciones fundamentales diferentes, sus espacios de equilibrio son planos y por tanto no presentan interacción termodinámica.

La ecuación de continuidad

$$\rho'_d = -3H(\rho_d + P_d) \quad (3.8)$$

puede integrarse usando Mathematica y se obtiene

$$\rho_d = \left[\frac{1 + \alpha}{1 + \beta} \mathcal{C} a^{-3(\alpha-\beta) + C_I a^{-3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (3.9)$$

donde C_I es una constante de integración. Reorganizando esta expresión en

$$\rho = \rho_{do} (\mathcal{A} a^{-3(\alpha-\beta)} + (1 - \mathcal{A}) a^{-3(1+\alpha)}) \quad (3.10)$$

donde las constantes están dadas por

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C} + C_I \frac{(1+\beta)}{(1+\alpha)}}, \quad (3.11)$$

$$\rho_{do} = \left(\frac{1 + \alpha}{1 + \beta} \mathcal{C} + C_I \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (3.12)$$

$$\mathcal{C} = \frac{(1 + \beta)}{(1 + \alpha)}, \quad (3.13)$$

$$C_I = \rho_{do}^{1+\alpha} (1 - \mathcal{A}) \quad (3.14)$$

Para garantizar que ρ_d sea positiva y real todo el tiempo, impondremos la condición

$$\mathcal{A} > 0 \quad \text{lo que implica} \quad \frac{c(1 + \beta)}{(1 + \alpha)} < 0.$$

Esto es relevante dado que para $1 + \alpha$ y $S_o > 0$, $\frac{\partial S}{\partial U} < 0$ y nuevamente surge la posibilidad de que el fluido oscuro generalizado posea capacidad calorífica negativa. Como mencionamos el capítulo pasado esto abre otras posibilidades en la interpretación de esta parte del fluido cosmológico, pero en este capítulo no seguiremos esa ruta de interpretación.

Finalmente, según la ecuación (1.41) la entropía del sistema debe disminuir a medida que el espacio de configuración crece y una consecuencia de esto es que el fluido oscuro de la GTD tiene presión negativa lo cual es responsable de la aceleración del universo.

Ahora exploremos la dependencia del parámetro $\omega_d = P_d/\rho_d$ del sector oscuro en

GTD en relación con el valor de los parámetros α, β y \mathcal{A} . De la ecuación (3.7) y (3.10) obtenemos la expresión

$$\omega_d(a) = -\frac{1+\beta}{1+\alpha} \left[\frac{1}{1+(1-\mathcal{A})a^{-3(1+\beta)}/\mathcal{A}} \right], \quad (3.15)$$

la cual tiende a

$$\omega_d(a \rightarrow 0) \rightarrow 0, \quad (3.16)$$

$$\omega_d(a \rightarrow \infty) \rightarrow -\frac{1+\beta}{1+\alpha} \quad (3.17)$$

$$\omega_d(a = 1) \rightarrow -\frac{1+\beta}{1+\alpha} \mathcal{A} \quad (3.18)$$

En la figura 3.2 se muestra la evolución de ω_d como una función de el corrimiento al rojo $z = \frac{1}{a} - 1$ para diferentes valores de α y β . \mathcal{A} tiene un valor fijo de

$$\mathcal{A} = \frac{1}{1 + \frac{\Omega_{DM}}{\Omega_\Lambda}} \simeq 0,76$$

con $\Omega_i = \frac{8\pi\rho_{i0}}{3H_0^2}$.

Ahora bien, para finalizar con la descripción del universo isotrópico y homogéneo queremos solucionar numéricamente la ecuación de Friedmann dada por

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho_d + \rho_b + \rho_\gamma) \quad (3.19)$$

donde la densidad de energía de bariones es $\rho_b = \rho_{b0}a^{-3}$ y la densidad de componentes relativistas es $\rho_\gamma = \rho_{\gamma0}a^{-4}$. Los valores de α, β y \mathcal{A} son los mismos que los usados para construir la figura 3.2. El valor de ρ_{d0} lo fija la condición de universo plano, $\Omega_d + \Omega_b + \Omega_r = 1$ con $\Omega_d = 0,96$. En la figura 3.3 graficamos el factor de escala en función del tiempo cosmológico para los diferentes valores de los parámetros usados en la figura 3.2.

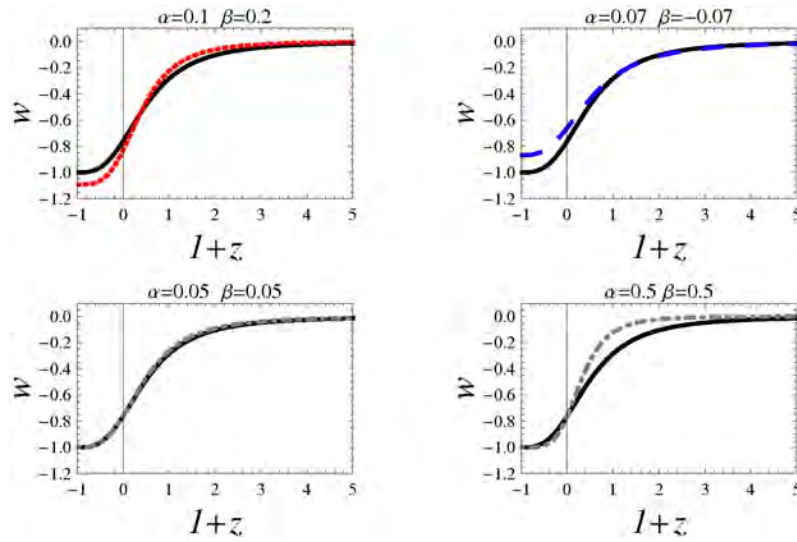


Figura 3.2: Evolución de ω_d en función del corrimiento al rojo z . La línea sólida corresponde a $\alpha = \beta = 0$ es decir al modelo Λ CDM. Las líneas punteadas corresponden a valores de α y β como están etiquetados encada recuadro. $\alpha = \beta = 0,5$ corresponde al gas de Chaplygin.

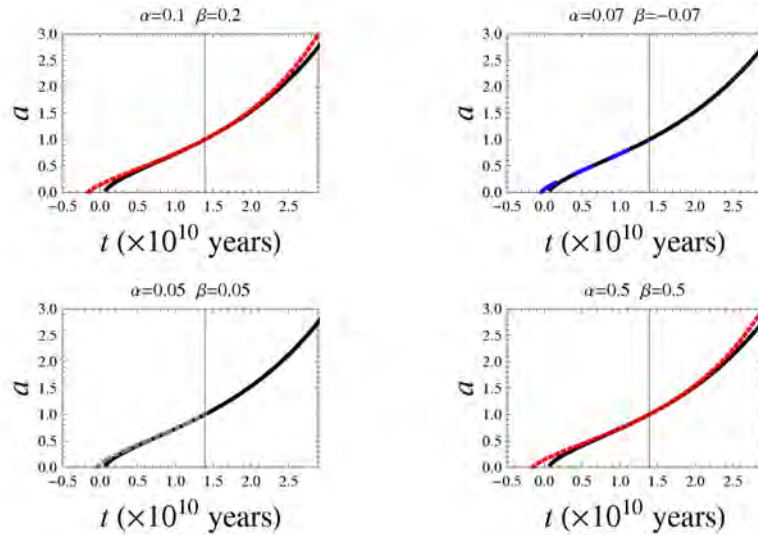


Figura 3.3: Evolución del factor de escala a en función del tiempo cosmológico. La línea sólida corresponde a $\alpha = \beta = 0$ el modelo cosmológico estándar. La línea vertical denota el tiempo presente.

Este análisis muestra que el fluido oscuro generalizado representa un modelo viable para describir de forma unificada la energía oscura y la materia oscura.

Conclusiones y perspectivas

Existe un descontento generalizado entre los cosmólogos al momento de realizar un modelo que describa correctamente las observaciones del universo. Si confiamos en que los datos de observación de supernovas, de la sonda WMAP, de el CMB, entre otros son correctos, el universo se expande aceleradamente. Esta observación, hasta el momento es explicada con mayor éxito por el modelo Λ -CDM. En este modelo, es la constante cosmológica la responsable de la expansión, y asociada a la constante cosmológica está la energía oscura, que aunque responsable del 73 % de la constitución del universo, no hay ninguna idea experimentalmente comprobable que arroje luces sobre su naturaleza.

En los modelos cosmológicos inspirados en la geometrotermodinámica, las ecuaciones del modelo de FLRW no son modificadas. Se parte de las mismas premisas que el modelo cosmológico estándar, pero al momento de construir la ecuación de estado necesaria para la descripción del universo, aducimos al formalismo de la GTD, para dar lugar a dos ecuaciones que usamos como relaciones fundamentales en la construcción de un modelo

sin interacción termodinámica y un segundo modelo con interacción. Estas fueron:

$$S = c_1 \ln U + c_2 \ln V \quad \text{Sin interacción} \quad (4.1)$$

$$S = S_o \ln(U^{1+\alpha} + cV^{1+\beta}) \quad \text{Con interacción} \quad (4.2)$$

Utilizando la primera relación encontramos la misma ecuación de estado usada en el modelo estandar

$$P - \omega\rho = 0. \quad (4.3)$$

Esta ecuación cobró un nuevo significado al dotar de valores a $\omega = c_2/c_1$ para describir las componentes del universo, que al igual que en el modelo estándar se describen por separado. Para $\omega = 0$, es decir $P = 0$ se tiene la ecuación de estado que describe la materia bariónica y para $\omega = 1/3$ la ecuación que describe a la radiación. Dado que la capacidad calorífica del sistema es

$$C = c_2 \quad (4.4)$$

Estas dos ecuaciones, en nuestra interpretación, dan cuenta de que la capacidad calorífica de la materia y la radiación son positivas y por esto tiene el comportamiento usual.

Para $\frac{c_2}{c_1} = \omega = -1$, obtenemos como es usual que la ecuación de estado es $P = -\rho$. Esta ecuación en nuestro formalismo se puede interpretar de dos maneras:

1. Si $c_1 < 0$ y $c_2 > 0$, se tiene la interpretación del modelo Λ -CDM. La causa de la expansión es la presión negativa de cierto componente del universo conocido como energía oscura. La capacidad calorífica es positiva, y el problema a enfrentarse en este modelo es la justificación física de la energía oscura. Es decir, ¿qué es la energía oscura? La respuesta para algunos es que la energía oscura es la misma que la constante cosmológica, para otros es un campo escalar, entre otras propuestas. En ninguna de ellas se sabe físicamente a que corresponde la energía oscura.
2. Si $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$, *la presión es negativa, y la capacidad calorífica es negativa.* La causa de la expansión del universo es la interacción entre la materia bariónica

con capacidad calorífica positiva y la materia con capacidad calorífica negativa. En nuestro modelo, no es que exista una energía oscura con presión negativa, sino que es la materia ordinaria quien satisface estas ecuaciones no-estándar de estado, pero esta porción de materia tiene capacidad calorífica negativa. Esto conlleva a que las variables termodinámicas son no extensivas. Partiendo de una de las ecuaciones fundamentales del gas ideal obtenida mediante métodos de la geometrotermodinámica, podemos obtener una ecuación de estado general que describe la expansión acelerada del universo sin recurrir a la energía y a la materia oscura. En resumen, hemos estudiado cómo opera la termodinámica de las variables no extensivas, su relación con las interacciones de largo alcance y la evolución de sistemas con capacidades caloríficas negativas. Es a través de estos comportamientos “atípicos” de la materia que pretendemos explicar las componentes oscuras del universo.

No hemos encontrado ninguna inconsistencia o imposibilidad de describir el universo mediante esta línea de pensamiento. Los sistemas termodinámicos que hemos obtenido guardan relaciones con los sistemas originales, porque sus partículas constituyentes son de la misma naturaleza, pero sus ecuaciones de estado transforman su comportamiento de una manera tan drástica que cambia su manera de interactuar. Sin embargo más allá del planteamiento del sector oscuro como materia ordinaria con capacidad calorífica negativa, queda mucho por explorar en la fenomenología de esta afirmación. Hablar más sobre ello es entrar al terreno de la especulación.

Además del modelo sin interacción, usando la segunda relación fundamental encontrada en GTD, investigamos un fluido con curvatura en la variedad de equilibrio diferente de cero, lo cual indica que existe interacción termodinámica. Este fluido lleva a un nuevo modelo cosmológico cuya ecuación de estado abarca como casos especiales al gas generalizado de Chaplygin, el modelo del fluido oscuro y el fluido politrópico. Nuestro análisis mostró que se trata de un modelo generalizado de fluido oscuro que describe de manera unificada a la energía y materia oscura.

En conclusión, las indagaciones llevadas a cabo en este trabajo nos llevan a pensar que es completamente plausible usar las ecuaciones fundamentales que se obtienen en GTD para desarrollar modelos cosmológicos que están en acuerdo con las observaciones experimentales. Solo resta indagar el otro camino propuesto, el de la relación entre capacidad calorífica negativa y la expansión del universo y por supuesto, ensayar otras soluciones de la GTD más complejas en el contexto de la cosmología relativista.

Bibliografía

- [1] Sumiyoshi Abe. Reply to comment on stability of tsallis entropy and instabilities of renyi and normalized tsallis entropies: A basis for q-exponential distributions. *Phys. Rev. E*, 72, Aug 2005.
- [2] P. P. Avelino, L. M. G. Beca, J. P. M. de Carvalho, and C. J. A. P. Martins. The Λ CDM limit of the generalized chaplygin gas scenario. *JCAP*, 9, September 2003.
- [3] A. Aviles and J. L. Cervantes-Cota. Dark degeneracy and interacting cosmic components. *Physics Review D*, 84(8), October 2011.
- [4] M. C. Bento, O. Bertolami, and A. A. Sen. Generalized chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification. *Physics Review D*, 66(4), August 2002.
- [5] Herbert Callen. *Thermodynamics and an Introduction to thermostatistics*. John Wiley and Sons, US, 1985.
- [6] J. L. Cervantes-Cota and G. Smoot. Cosmology today—a brief review. In *American Institute of Physics Conference Series*, volume 1396 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 28–52, October 2011.
- [7] Bjorn Einarsson. Conditions for negative specific heat in systems of attracting classical particles. *Phys.Lett.A*, 332:335, 2004.

- [8] R Hemann. *Geometry, physics and systems*. Marcel Dekker, New York, 1973.
- [9] E.W. Kolb and M Turner. *The Early Universe*. Addison Wesley, 1990.
- [10] Andrew Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. John Wiley and Sons, US, 2003.
- [11] O. Luongo and H. Quevedo. Reconstructing the expansion history of the universe with a one-fluid approach. *ArXiv e-prints*, April 2011.
- [12] D. Lynden-Bell. Negative specific heat in astronomy, physics and chemistry. *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, 263:293–304, feb 1999.
- [13] T Padmanabhan. Statistical mechanics of gravitating systems. *Physic Letters*, 5(188), 1990.
- [14] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, and Supernova Cosmology Project. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. *apj*, 517:565–586, June 1999.
- [15] H. Quevedo. Geometrothermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 48, January 2007.
- [16] George Ruppeiner. Thermodynamics: A riemannian geometric model. *Phys. Rev. A*, 20:1608–1613, Oct 1979.
- [17] Spergel and et al. Three-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Implications for cosmology. *apjs*, 170:377–408, June 2007.
- [18] W Thirring. Systems with negative specific heat. *Z. Physik*, 235(339), 1970.

-
- [19] C. Tsallis and E. Brigatti. Nonextensive statistical mechanics: A brief introduction. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 16:223–235, 2004.
- [20] A. Vazquez, H. Quevedo, and A. Sanchez. Thermodynamic systems as extremal hypersurfaces. *Journal of Geometry and Physics*, 60:1942–1949, December 2010.
- [21] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general relativity*. John Wiley and Sons, US, 1972.
- [22] F. Weinhold. Metric geometry of equilibrium thermodynamics. *The Journal of Chemical Physics*, 63(6):2479–2483, 1975.

APÉNDICE A

Artículo

Extending the generalized Chaplygin gas model by using geometrothermodynamicsAlejandro Aviles,^{1,2,*} Aztlán Bastarrachea-Almodovar,^{1,†} Lorena Campuzano,^{1,‡} and Hernando Quevedo^{1,3,§}¹*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autonoma de México, Mexico*²*Departamento de Física, Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares, Mexico*³*Dipartimento di Fisica and ICRA, Università di Roma “La Sapienza”, I-00185 Roma, Italy*

(Received 6 April 2012; published 7 September 2012)

We use the formalism of geometrothermodynamics to derive fundamental thermodynamic equations that are used to construct general relativistic cosmological models. In particular, we show that the simplest possible fundamental equation, which corresponds in geometrothermodynamics to a system with no internal thermodynamic interaction, describes the different fluids of the standard model of cosmology. In addition, a particular fundamental equation with internal thermodynamic interaction is shown to generate a new cosmological model that correctly describes the dark sector of the Universe and contains as a special case the generalized Chaplygin gas model.

DOI: [10.1103/PhysRevD.86.063508](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.063508)

PACS numbers: 98.80.-k, 98.80.Jk, 95.36.+x, 95.35.+d

I. INTRODUCTION

Geometrothermodynamics (GTD) is a formalism that has been developed during the past few years to describe ordinary thermodynamics by using differential geometry [1]. To this end, the states of thermodynamic equilibrium are considered as points of an abstract space called the equilibrium space \mathcal{E} . Furthermore, we associate to \mathcal{E} a Riemannian metric g in which all the geometric properties of \mathcal{E} are encoded. In classical thermodynamics, all the properties of a system can be derived from the fundamental equation [2]; analogously, it can be shown that in GTD the explicit form of the metric g can be derived from the fundamental equation. It is then expected that the thermodynamic properties of the system can be represented in terms of the geometric properties of \mathcal{E} . In particular, the curvature of \mathcal{E} could be associated with the internal mechanical interaction between the constituents of the thermodynamic system, i.e., the thermodynamic interaction, so that curvature singularities, in turn, correspond to phase transitions.

In the above approach, starting from a particular fundamental equation, GTD provides the geometric structure of the corresponding equilibrium space. However, the formalism can also be used to generate fundamental equations. Indeed, if the metric g is assumed to define an extremal surface embedded in a phase space \mathcal{T} (this will be explained in detail in Sec. II), certain differential equations must be satisfied whose solutions turn out to be mathematically well-defined fundamental equations. The consequent question is whether this method can be used to generate fundamental equations that could be applied to describe physical systems. The main goal of this work is to show two particular cases that can be used to construct

cosmological models in the framework of general relativity. The idea is to derive all the thermodynamic properties from the fundamental equations, and to use them as input to construct cosmological models.

Nowadays, the standard paradigm in the late-time description of the Universe is that it is homogeneous and isotropic when averaging over large scales, and that today it is dominated by two unknown forms of energy: dark energy which accelerates the Universe, and dark matter that clusters by gravitational instability and is responsible for the formation of the structures we see at a very wide range of scales in the cosmos. For a review on the current status of cosmology see Ref. [3].

Because of the lack of a fundamental description of these two ingredients, several alternative proposals have appeared in the literature. In fact, the split of the dark sector into dark energy and dark matter is arbitrary, because what we measure in gravitational experiments is the energy-momentum tensor of the total dark sector, a property that has been called dark degeneracy by Kunz in Ref. [4]; see also Refs. [5–11]. In part for this reason, over the last decade the models of unified descriptions of the dark sector have played an increasingly important role to describe our Universe. The Chaplygin gas [12,13] and its generalization [14] will be of special interest for us in this work.

In this paper, we find first that the different epochs of the standard cosmological model can be described in the context of GTD and that these correspond to the simplest case of a system with no internal thermodynamic interaction. Thereafter, we consider a second GTD system with thermodynamic interaction that turns out to describe a unified dark sector fluid which has as a special case the generalized Chaplygin gas. As a bonus, the so-called polytropic fluids can be obtained from this GTD fluid in a certain limit.

This paper is organized as follows. In Sec. II, we briefly review the fundamentals of GTD. Then, in Sec. III, we present the cosmological model that follows from a GTD

*aviles@ciencias.unam.mx

†aztlanalmodovar@comunidad.unam.mx

‡loduque@gmail.com

§quevedo@nucleares.unam.mx

system without thermodynamic interaction. In Sec. IV, we study the cosmology of the dark sector GTD fluid at the homogeneous and isotropic level. In Sec. V, we work out the linear perturbation theory in order to constrain the free parameters of the GTD model with thermodynamic interaction. Finally, Sec. VI is devoted to discussions of our results and suggestions for further research. Throughout this paper we use geometric units in which $G = c = k_B = \hbar = 1$, unless otherwise stated.

II. BASIC ASPECTS OF GEOMETROTHERMODYNAMICS

In classical equilibrium thermodynamics [2], the standard method to describe a thermodynamic system consists of specifying a set of n extensive variables E^a ($a = 1, \dots, n$), their corresponding dual intensive variables I^a , and the thermodynamic potential Φ . The integer n determines the number of thermodynamic degrees of freedom of the system. For instance, in the case of the ideal gas ($n = 2$), if we choose the internal energy U as the thermodynamic potential Φ , then $E^a = (S, V)$ and $I^a = (T, -P)$ so that the temperature T is the dual of the entropy S and the (negative) pressure P is the dual of the volume V . All the properties of the ideal gas are contained in the fundamental equation $U = U(S, V) = (e^S/V)^{2/3}$ that satisfies the first law of thermodynamics $dU = TdS - PdV$ from which the expressions for the temperature and the pressure, i.e., the equations of state can be derived. Since an equilibrium state of the ideal gas can be represented by the corresponding values of S and V , all possible equilibrium states form a space \mathcal{E} whose points can be represented by the coordinates S and V .

Notice that using the above notation for an arbitrary system with n thermodynamic degrees of freedom, the fundamental equation can be written as $\Phi = \Phi(E^a)$, the first law of thermodynamics as $d\Phi = I_a dE^a$ with $I_a = \delta_{ab} I^b$, and the coordinates of the equilibrium space \mathcal{E} are E^a . An advantage of this notation is that it can be used with any thermodynamic potential and representation. For instance, to write the above example of the ideal gas in the entropy representation, one only needs to rewrite the first law of thermodynamics as $dS = (1/T)dU + (P/V)dV$ so that the thermodynamic variables are now $\Phi = S$, $E^a = (U, V)$, and $I^a = (1/T, P/T)$.

An important property of classical thermodynamics is that it is invariant with respect to Legendre transformations, i.e., it does not depend on the choice of thermodynamic potential. Indeed, for the description of the ideal gas instead of U one can also use as thermodynamic potential the Helmholtz free energy $F = U - TS$, the enthalpy $H = U + PV$ or the Gibbs energy $G = U - TS + PV$, without changing the properties of the system. The Legendre transformations that generate the potentials F and H are called partial transformations whereas G is generated by a total transformation.

The main idea of GTD consists in associating a differential geometric structure to the equilibrium space of a given thermodynamic system in such a way that it does not depend on the choice of the thermodynamic potential, i.e., it is Legendre invariant. To this end, it is necessary to introduce an auxiliary structure called the phase space in which the equilibrium space is embedded. To be more specific, let us define the phase space as the $(2n + 1)$ -dimensional differential manifold \mathcal{T} , with coordinates $Z^A = \{\Phi, E^a, I^a\}$, $A = 0, \dots, 2n$, equipped with the fundamental Gibbs one-form $\Theta = d\Phi - I_a dE^a$ [15], and a metric G that must be invariant with respect to Legendre transformations. The last condition is necessary in order to incorporate in GTD the fact that classical thermodynamics is Legendre invariant. In this notation, a Legendre transformation is given by

$$\{Z^A\} \rightarrow \{\tilde{Z}^A\} = \{\tilde{\Phi}, \tilde{E}^a, \tilde{I}^a\}, \quad (1)$$

with

$$\begin{aligned} \Phi &= \tilde{\Phi} - \delta_{kl} \tilde{E}^k \tilde{I}^l, & E^i &= -\tilde{I}^i, \\ I^i &= \tilde{E}^i, & E^j &= \tilde{E}^j, & I^j &= \tilde{I}^j. \end{aligned} \quad (2)$$

Here $i, k, l \in I$ and $j \in J$, where $I \cup J$ is any disjoint decomposition of the set of indices $\{1, \dots, n\}$. The metric [16] (summation over all repeated indices)

$$G = (d\Phi - I_a dE^a)^2 + \Lambda E_a I_a dE^a dI^a \quad (3)$$

where Λ is a real constant, is the most general metric we have found so far that is invariant under partial and total Legendre transformations, and the last term linear in the extensive and intensive variables.

The equilibrium submanifold $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$ is defined by the smooth map $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$, or in coordinates $\varphi: \{E^a\} \mapsto \{\Phi(E^a), E^a, I^a(E^a)\}$, under the condition that $\varphi^*(\Theta) = 0$, i.e.,

$$d\Phi = I_a dE^a, \quad \text{i.e.,} \quad I_a = \frac{\partial \Phi}{\partial E^a}, \quad (4)$$

where φ^* is the pullback of φ . These equations are equivalent to the first law of thermodynamics and the conditions for thermodynamic equilibrium, respectively. We can associate with \mathcal{E} the induced metric

$$g = \varphi^*(G) = \Lambda \left(E_a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^b \partial E^c} \delta^{ab} dE^a dE^c \quad (5)$$

in a canonical manner. One of the main objectives of GTD is to find relations between the geometric properties of the equilibrium space \mathcal{E} and the thermodynamic properties of the system determined by the fundamental equation $\Phi = \Phi(E^a)$ [2] that, in turn, is specified by the map φ . In particular, one expects that the curvature of \mathcal{E} can be used as a measure of the thermodynamic interaction. For instance, in the case of vanishing interaction, one expects the curvature to be zero. Let us recall that our interpretation

of thermodynamic interaction is based upon the statistical approach to thermodynamics in which all the properties of the system can be derived from the explicit form of the corresponding Hamiltonian [17], and the interaction between the particles of the system is described by the potential part of the Hamiltonian. Consequently, if the potential vanishes, we say that the system has zero thermodynamic interaction and the curvature should vanish. The equivalence between the curvature of \mathcal{E} and the thermodynamic interaction has been shown to be true in the case of ordinary classical systems, like the ideal gas and the van der Waals gas [16], and black hole configurations in different theories (see Ref. [18] for a review). Moreover, the curvature singularities of \mathcal{E} turn out to correspond to phase transitions of the thermodynamic system.

The above description of GTD shows that in order to find explicitly the metric g of the equilibrium manifold \mathcal{E} one only needs to specify the fundamental equation $\Phi = \Phi(E^a)$. This means that one needs the fundamental equation to study the corresponding geometry. However, the formalism of GTD allows us to generate fundamental equations by using a variational principle as follows. Suppose that the equilibrium manifold \mathcal{E} determines an extremal surface in \mathcal{T} , i.e., the variation of the volume element of \mathcal{E} vanishes:

$$\delta \int_{\mathcal{E}} \sqrt{\det(g)} d^n E = 0. \quad (6)$$

Since g is induced by the metric G that depends on Z^A , it can be shown [16] that this variation leads to a system of differential equations

$$\square Z^A = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} (\sqrt{\det(g)} g^{ab} Z^A_{,a})_{,b} + \Gamma^A_{BC} Z^B_{,b} Z^C_{,c} g^{bc} = 0, \quad (7)$$

where \square is the d'Alembert operator. Moreover, this variation implies that the thermodynamic potential Φ must satisfy a set of differential equations whose solutions can be written as functions of the extensive variables $\Phi = \Phi(E^a)$, i.e., as fundamental equations. Two particularly simple solutions with $\Phi = S$ and $E^a = \{U, V\}$ found in Ref. [16] are given by

$$S = c_1 \ln U + c_2 \ln V, \quad (8)$$

and

$$S = S_0 \ln(U^{1+\alpha} + cV^{1+\beta}), \quad (9)$$

where c_1 , c_2 , α and β are real constants.

The question arises whether these functions, which are obtained as solutions of a geometric problem, can be used as fundamental equations to describe a thermodynamic system with realistic physical properties. This question will be treated in the following sections.

III. THE FLUIDS OF THE STANDARD COSMOLOGICAL MODEL

The simplest solution with two thermodynamic degrees of freedom ($n = 2$) is given by equation (8). In the special case $c_1 = 3/2$ and $c_2 = 1$, we obtain the Sackur-Tetrode equation that is interpreted as the fundamental equation for the ideal gas [2]. This solution is the simplest one in the sense that it corresponds to a system with no internal thermodynamic interaction. In fact, introducing the Eq. (8) into the general metric (5) with $\Phi = S$ and $E^a = \{U, V\}$, we obtain the particular metric

$$g = -\Lambda \left(c_1^2 \frac{dU^2}{U^2} + c_2^2 \frac{dV^2}{V^2} \right). \quad (10)$$

A straightforward calculation shows that the curvature of this metric vanishes identically, showing that the metric is flat. This can be seen explicitly by introducing the coordinates $d\xi = \Lambda^{1/2} c_1 dU/U$ and $d\eta = \Lambda^{1/2} c_2 dV/V$ in which the metric takes the Euclidean form $g = -(d\xi^2 + d\eta^2)$. As mentioned above, in GTD we interpret the curvature as a measure of the thermodynamic interaction so that a flat metric corresponds to the simplest case of a system without interaction.

The first law of thermodynamics (4) in the entropy representation can be written as

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV. \quad (11)$$

Then, from the equilibrium conditions (4) we obtain the relationships $T = U/c_1$ and $P/T = c_2/V$ which lead to the equation of state

$$P = \frac{c_2}{c_1} \rho, \quad (12)$$

where $\rho = U/V$. To consider this thermodynamic system in general relativity, we assume the simplest case of a homogeneous and isotropic spacetime that is described by the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) line element

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (13)$$

Then, if we assume a perfect fluid source with equation of state (12), it is clear that the different epochs of the Universe evolution can be obtained by choosing the constants appropriately. So, the choice $c_2/c_1 = 1/3$ corresponds to the radiation dominated era, $c_2 = 0$ describes the matter dominated era, and $c_2/c_1 = -1$ corresponds to a vacuum dominated cosmology. Consequently, the different fluids of the standard model can be described by applying the simplest GTD fundamental equation (8) in the context of general relativity; in other words, the fluids of the standard cosmological model correspond thermodynamically to the simplest possible fundamental equation of GTD.

It is worth noticing that for the fundamental equation (8) the heat capacity at constant volume is given by $C_V = c_1$. This opens the possibility of considering the dark energy as a non-interacting thermodynamic system with negative heat capacity. In fact, for the dark energy fluid we obtained that $c_2/c_1 = -1$; therefore, we can assume that $c_2 > 0$ which results in a negative C_V . Although most physical systems exhibit a positive heat capacity, there are systems for which the heat capacity is negative. Among others, these include self-gravitating objects such as stars and star clusters [19]. Furthermore, it can be shown [20] that systems with negative C_V are never extensive. We conclude that the dark energy fluid can be considered as a noninteracting system with nonextensive thermodynamic variables. To further investigate this possibility it is necessary to consider nonextensive variables in the framework of GTD. We expect to study this problem in the near future.

IV. A UNIFIED DESCRIPTION FOR DARK MATTER AND DARK ENERGY

In this section we study the fundamental equation (9). According to Eq. (5), this solution generates the thermodynamic metric

$$g = \frac{\Lambda S_0^2}{(U^{1+\alpha} + cV^{1+\beta})^3} [(1+\alpha)^2 U^{2\alpha} [\alpha c V^{1+\beta} - U^{1+\alpha}] dU^2 + (1+\beta)^2 c^2 V^{2\beta} [\beta U^{1+\alpha} - c V^{1+\beta}] dV^2 - (1+\alpha)(1+\beta) c U^{1+\alpha} V^{1+\beta} [(1+\alpha) U^{1+\alpha} + (1+\beta) c V^{1+\beta}] dU dV], \quad (14)$$

for the equilibrium manifold \mathcal{E} . The corresponding curvature is, in general, nonvanishing and in the particular case $\alpha = 1$ and $\beta = 1$ it can be expressed as

$$R = \frac{6U^4 V^4 c^2 + 4U^6 V^2 c + 4U^2 V^6 c^3 + V^8 c^4 + U^8}{S_0^2 (c^2 V^4 + U^4)^2}, \quad (15)$$

indicating the presence of thermodynamic interaction. In this sense, this thermodynamic system represents a generalization of the system with no interaction investigated in the last section. The first law of thermodynamics is again (4) and the conditions of thermodynamic equilibrium lead to

$$\frac{1}{T} = \frac{S_0(1+\alpha)U^\alpha}{U^{1+\alpha} + cV^{1+\beta}}, \quad \frac{P}{T} = \frac{S_0 c(1+\beta)V^\beta}{U^{1+\alpha} + cV^{1+\beta}}. \quad (16)$$

Then, an equation of state can be written as

$$P(U, V) = \frac{c(1+\beta)V^\beta}{(1+\alpha)U^\alpha}. \quad (17)$$

We now consider the large scale evolution of a universe filled with standard model particles and the dark sector described by GTD; a subindex d shall denote GTD dark, single fluid, variables. We write the equation of state of the

dark sector (17) in terms of the scale factor $a(t)$ and its energy density ρ_d

$$P_d = -C a^{-3(\alpha-\beta)} \rho_d^{-\alpha}, \quad (18)$$

where we used $V = V_0(a/a_0)^3$. Also, we set the value of the scale factor today equal to one, and defined the constant $C = -c(1+\beta)V_0^{\beta-\alpha}/(1+\alpha)$. From this equation, one can see that the specific case $\alpha = \beta$ in the interval $0 \leq \alpha \leq 1$ corresponds to a (generalized) Chaplygin gas [12,14]. Moreover, if $\alpha = \beta = 0$ a fluid, often called dark fluid, which gives exactly the same phenomenology as the Λ CDM model is obtained [11,21,22], not only at the cosmological level, but also at astrophysical scales. This is because the dark fluid which comprises about 96% of the energy content of the Universe, partially clusters; for details see Refs. [4,11].

Polytropic fluids, extensively used in modeling astrophysical objects, are obtained if $\alpha = \beta$ in the interval $\alpha < 0$. We also note that the case $\alpha = 1$, dubbed variable Chaplygin gas, has been studied in the past and has the advantage over the standard Chaplygin that it can develop large inhomogeneous perturbations [23,24].

It is interesting to note that the dark fluid model with $\alpha = \beta = 0$ leads to a thermodynamic metric (14) whose curvature vanishes identically. This resembles the case of the GTD fluid described in Sec. III that generates the fluids of the standard cosmological model.

The continuity equation $\rho'_d = -3H(\rho_d + P_d)$ (prime denotes differentiation with respect to cosmic time, contrary to conformal time, to be used in the next section) can be integrated to give

$$\rho_d = \left[\frac{1+\alpha}{1+\beta} C a^{-3(\alpha-\beta)} + C_I a^{-3(1+\alpha)} \right]^{1/(1+\alpha)}, \quad (19)$$

where C_I is an integration constant. It is convenient to recast this expression into the form

$$\rho = \rho_{d0} (\mathcal{A} a^{-3(\alpha-\beta)} + (1-\mathcal{A}) a^{-3(1+\alpha)})^{1/(1+\alpha)}, \quad (20)$$

where we defined ρ_{d0} as the value of the dark sector energy density today. The constants are related by the equations

$$\mathcal{A} = \frac{C}{C + C_I(1+\beta)/(1+\alpha)}, \quad \rho_{d0} = \left(\frac{1+\alpha}{1+\beta} C + C_I \right)^{1/(1+\alpha)} \\ C = \frac{1+\beta}{1+\alpha} \mathcal{A} \rho_{d0}^{1+\alpha}, \quad C_I = \rho_{d0}^{1+\alpha} (1-\mathcal{A}). \quad (21)$$

To ensure the reality and positivity of ρ_d at all times, we must impose the condition $\mathcal{A} > 0$ that implies the relation $c(1+\beta)/(1+\alpha) < 0$. Notice that for $1+\alpha < 0$ and positive S_0 , it follows that $\partial S/\partial U < 0$ and so the possibility of a negative heat capacity arises, as in the case analyzed in the previous section. We will not investigate this case in this section. Thus, following Eq. (9), the entropy of the system must diminish as the configuration space grows, and as a consequence the GTD dark fluid has

a negative pressure which ultimately is responsible to accelerate the Universe.

It is straightforward to calculate the equation of state parameter of the GTD dark sector fluid ($w_d = P_d/\rho_d$), giving

$$w_d(a) = -\frac{1+\beta}{1+\alpha} \frac{1}{1+(1-\mathcal{A})a^{-3(1+\beta)}/\mathcal{A}}, \quad (22)$$

which has the following behavior:

$$w_d(a \rightarrow 0) \rightarrow 0, \quad w_d(a \rightarrow \infty) \rightarrow -\frac{1+\beta}{1+\alpha}, \quad (23)$$

$$w_d(a=1) = -\frac{1+\beta}{1+\alpha} \mathcal{A}. \quad (24)$$

Figure 1 shows the evolution of w_d as a function of the redshift $z = 1/a - 1$ for different combinations of α and β ; \mathcal{A} is kept fixed to the value $\mathcal{A} = 1/(1 + \Omega_{\text{DM}}/\Omega_\Lambda) \simeq 0.76$, with $\Omega_i = 8\pi\rho_{i0}/3H_0^2$.

Now, the Friedmann equation is given by

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho_d + \rho_b + \rho_\gamma), \quad (25)$$

where $H \equiv a'/a$ is the Hubble factor. The energy densities of baryons (ρ_b) and relativistic components (ρ_γ) redshift as $\rho_b = \rho_{b0}a^{-3}$ and $\rho_\gamma = \rho_{\gamma0}a^{-4}$, respectively.

To complete with the homogeneous and isotropic description we solve numerically the Friedmann equation. We choose the same values for α , β and \mathcal{A} as in Fig. 1. The value of ρ_{d0} is fixed by the flat condition, $\Omega_d + \Omega_b + \Omega_r = 1$, giving $\Omega_d \simeq 0.96$. In Fig. 2, we plot the scale factor as a function of the cosmic time for the different chosen combinations of the parameter values.

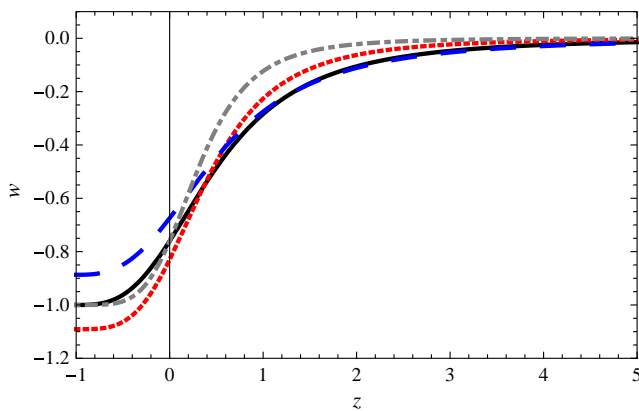


FIG. 1 (color online). Evolution of w_d as a function of the redshift z . The solid (black) curve corresponds to $\alpha = \beta = 0$ (the Λ CDM model); the dashed (blue) curve to $\alpha = 0.06$ and $\beta = -0.06$; the dotted (red) curve to $\alpha = 0.1$ and $\beta = 0.2$; the dashed-dotted (gray) curve to $\alpha = \beta = 0.5$ (a Chaplygin gas). $\mathcal{A} = 0.76$ is kept fixed for all the cases.

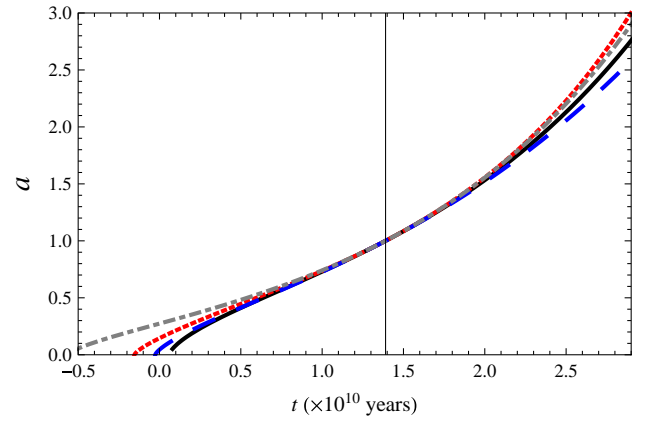


FIG. 2 (color online). Evolution of the scale factor a as a function of the cosmic time t . The solid (black) curve corresponds to $\alpha = \beta = 0$ (the Λ CDM model); the dashed (blue) curve to $\alpha = 0.06$ and $\beta = -0.06$; the dotted (red) curve to $\alpha = 0.1$ and $\beta = 0.2$; the dashed-dotted (gray) curve to $\alpha = \beta = 0.5$. $\mathcal{A} = 0.76$ and $\Omega_d = 0.96$ are kept fixed for all the cases. The vertical line denotes present time.

An important quantity for the investigation of the fluid perturbations—to be analyzed in the next section—to be calculated with purely background quantities is the square of the adiabatic speed of sound, $c_s^2 \equiv \dot{P}_d/\dot{\rho}_d$, which can be shown to be

$$c_s^2 = -w_d \frac{\alpha P_d + \beta \rho_d}{\rho_d + P_d}, \quad (26)$$

or, written as a function of the scale factor,

$$c_s^2 = \frac{1+\beta}{1+\alpha} \frac{1}{1+(1-\mathcal{A})a^{-3(1+\beta)}/\mathcal{A}} \times \frac{(\beta-\alpha)/(1+\alpha) + \beta(1-\mathcal{A})a^{-3(1+\beta)}/\mathcal{A}}{(\alpha-\beta)/(1+\alpha) + (1-\mathcal{A})a^{-3(1+\beta)}/\mathcal{A}}. \quad (27)$$

The limits of this expression are $c_s^2(a \rightarrow 0) = 0$, and $c_s^2(a \rightarrow \infty) = -(1+\beta)/(1+\alpha)$, if $\alpha \neq \beta$, and $c_s^2(a \rightarrow \infty) = \alpha$, if $\alpha = \beta$. This result leads to an important difference between the generalized Chaplygin model and the extension found here with GTD. At the cosmological background level this fact does not have any consequences, but as we shall see, it is of great importance when considering perturbations. To not violate causality, we require $c_s^2 \leq 1$; consequently, further conditions are imposed over the parameters α and β .

The particular case of the Chaplygin gas gives $c_s^2 = -\alpha w_d$, while for the dark fluid, $c_s^2 = 0$. The assumption that the speed of sound vanishes has been the starting point in several works that study the dark fluid model as an alternative to the Λ CDM [11,22]. It turns out that both models are fundamentally indistinguishable as long as some general conditions are imposed beyond the zero order in perturbation theory. Instead of the Chaplygin gas, it is

possible to consider its natural extension based upon a constant speed of sound, an approach adopted in Refs. [25,26].

We note that if $\alpha < \beta$, there is a singularity in the speed of sound at $a = [(1 + \alpha)(1 - \mathcal{A})/\mathcal{A}(\beta - \alpha)]^{1/3(1+\beta)}$, this coincides with the moment at which the equation of state parameter crosses the phantom barrier, $w_d = -1$.

V. THE PERTURBED UNIVERSE

At small scales (nowadays lesser than about 100 Mpc), the homogeneous and isotropic description of the Universe outlined in the last section breaks down. In this section, we study the deviations of the background cosmology up to linear order in perturbation theory. To this end, let us consider scalar perturbations in the Conformal Newtonian gauge, with the line element given by

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1 + 2\Psi)d\tau^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j], \quad (28)$$

where τ is the conformal time, related to the cosmic time by $dt = a d\tau$. The matter fields perturbation variables are defined through the expressions

$$T^0_0 = -\rho(1 + \delta), \quad (29)$$

$$T^i_0 = -(\rho + P)v^i, \quad (30)$$

$$T^i_j = P((1 + \pi_L)\delta^i_j + \Pi^i_j), \quad (31)$$

where Π^i_j is the anisotropic stress tensor. The energy density ρ and the pressure P denote background quantities, and are functions of the conformal time only. The vector v^i is called the peculiar velocity and is related to the four-velocity u^μ of the fluid by the relation $v^i = u^i/u^0$. In the Fourier space, we define the velocity $\theta = -ik_i v^i$ and the scalar anisotropic stress $\sigma = 2k_i k_j \Pi^{ij} w/3(1 + w)$.

For a general fluid, the energy local conservation equations $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ become [27]

$$\dot{\delta} = -(1 + w)(\theta - 3\dot{\Phi}) - 3\mathcal{H}\left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - w\right)\delta, \quad (32)$$

and

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -\mathcal{H}(1 - 3w)\theta - \frac{\dot{w}}{1 + w}\theta \\ & + \frac{\delta P/\delta\rho}{1 + w}k^2\delta + k^2\Psi - k^2\sigma, \end{aligned} \quad (33)$$

where $\delta P = P\pi_L$, $\delta\rho = \rho\delta$, $\mathcal{H} = \dot{a}/a$ and a dot means derivative with respect to conformal time. Note that the adiabatic speed of sound can be expressed as $c_s^2 = w - \dot{w}/3(1 + w)$. To go further on, we make the assumption of a perfect fluid, obtaining no anisotropic stresses, $\sigma = 0$, so that the gravitational potentials coincide, $\Phi = \Psi$. Moreover, if we consider only adiabatic perturbations, then the (gauge invariant) entropy perturbation is zero, $\Gamma = \pi_L - c_s^2\delta/w = 0$, and the equations for the GTD dark sector fluid become

$$\dot{\delta}_d = -(1 + w_d)(\theta_d - 3\dot{\Phi}) - 3\mathcal{H}(c_s^2 - w_d)\delta_d, \quad (34)$$

and

$$\dot{\theta}_d = -\mathcal{H}(1 - 3c_s^2)\theta_d + \frac{c_s^2 k^2 \delta_d}{1 + w_d} + k^2\Phi, \quad (35)$$

where w_d and c_s^2 are given by Eqs. (22) and (26), respectively.

Figure 3 shows the behavior of the baryons and dark sector density contrasts, δ_b and δ_d respectively, for different chosen parameters α and β . We note that in the cases with $\alpha = \beta$ (Chaplygin gases), the density contrasts decay more quickly than those with $\alpha \neq \beta$ (not Chaplygin gases). This is because, as shown in Fig. 4, the squared of the speed of sound of the perturbations is positive for the former cases and negative for the latter, enhancing the growth of structure. See Eq. (26) and the discussion thereafter.

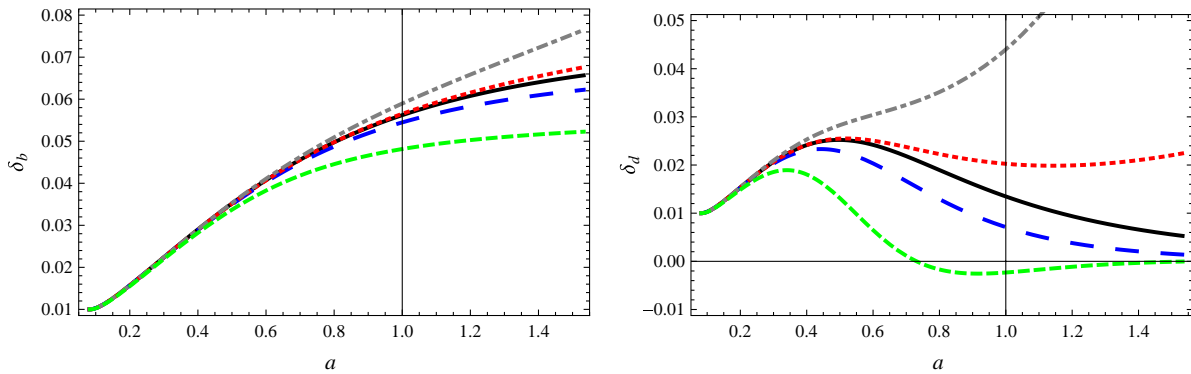


FIG. 3 (color online). Evolution of the baryonic (left panel) and dark sector fluid (right panel) density contrasts as a function of the scale factor a . Solid (black) line corresponds to $\alpha = \beta = 0$ (the dark fluid model). Large-dashed (blue) line to $\alpha = \beta = 0.0001$. Short-dashed (green) line to $\alpha = \beta = 0.0006$. Dashed-dotted (gray) line to $\alpha = 0.0001$ and $\beta = -0.0001$. $\mathcal{A} = 0.76$ and $\Omega_d = 0.96$ are kept fixed for all the cases.

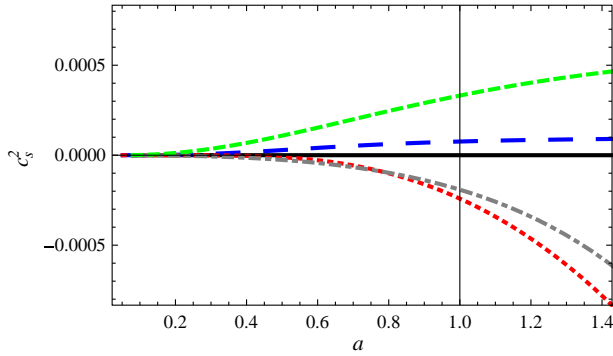


FIG. 4 (color online). Evolution of the adiabatic speed of sound for the cases considered in Fig. 4.

To proceed with the analysis we use the publicly available code CAMB [28] to study the anisotropies of the cosmic background radiation. In Fig. 5, we plot the CMB angular power spectrum for different choices of the parameters α and β , keeping fixed the remaining parameters. We note that the larger deviations from the Λ CDM model show up at large scales. This can easily be understood from the equation of state parameter and the adiabatic speed of sound: both of them are nearly zero at high redshifts, thus at early times the GTD dark sector fluid behaves essentially as cold dark matter, then at lower redshifts—after recombination for the cases shown in Fig. 5—they start to diverge from the zero values. Consequently, the differences arise mainly through the integrated Sachs-Wolfe effect. This enhancement of the low CMB power spectrum multipoles has been found in the past for the Chaplygin gas [29], and in general for unified dark models [30].

To constrain the parameters of the model, we use the code CosmoMC [31] to perform a Markov Chain Monte Carlo (MCMC) analysis over the eight-parameter space $\mathcal{M} = \{\Omega_b h^2, \theta, \tau, n_s, \log A_s, \alpha, \beta, \mathcal{A}\}$. θ is defined as 100 times the ratio of the sound horizon to the angular

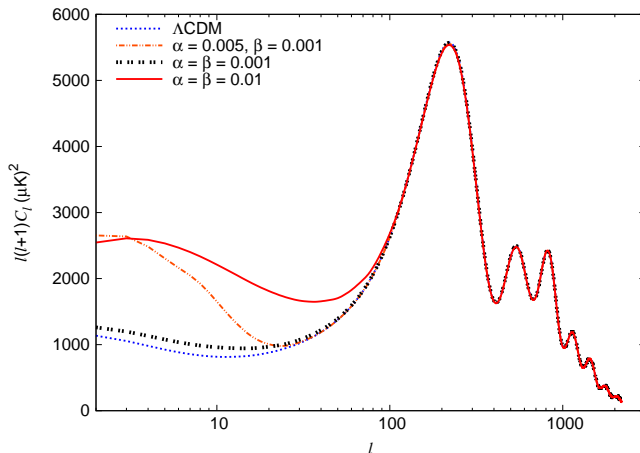


FIG. 5 (color online). CMB angular power spectrum for different values of α and β . $\mathcal{A} = 0.76$ is kept fixed.

diameter distance at recombination, τ is the reionization optical depth, n_s is the spectral index of the primordial scalar perturbations and A_s is its amplitude at a pivot scale of $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$. We take flat priors on the intervals $-0.01 < \alpha, \beta < 0.02$ and $0.2 < \mathcal{A} < 0.99$.

The observations that we choose to constrain the model are the WMAP seven-years results of the observations of the anisotropies of the CMB [32], and the supernovae type Ia Union 2 data set compilation of the Supernovae Cosmology Project [33]. Moreover, we use Hubble Space Telescope (HST) measurements to impose a Gaussian prior on the present value of the Hubble constant of $H_0 = 74 \pm 3.6 \text{ km/s/Mpc}$ [34].

Figure 6 shows the marginalized confidence interval in the subspace $\alpha - \beta$; in this figure, the region of parameters that corresponds to the Chaplygin gas is represented by a solid straight line, and the polytropic case by a dashed line. These lines split the space into two regions, $\alpha > \beta$ (with no singular solutions) and $\alpha < \beta$. The circle corresponds to the dark fluid (or Λ CDM) model.

In Fig. 7 the 1-dimensional posteriors of the explored space parameter \mathcal{M} and the derived parameter Ω_d are shown. For comparison, the results for the dark fluid model are also plotted. To translate the latter quantities to the Λ CDM model language, one only needs to use the equations $\mathcal{A} = 1/(1 + \Omega_{\text{DM}}/\Omega_\Lambda)$ and $\Omega_d = \Omega_{\text{DM}} + \Omega_\Lambda$, for

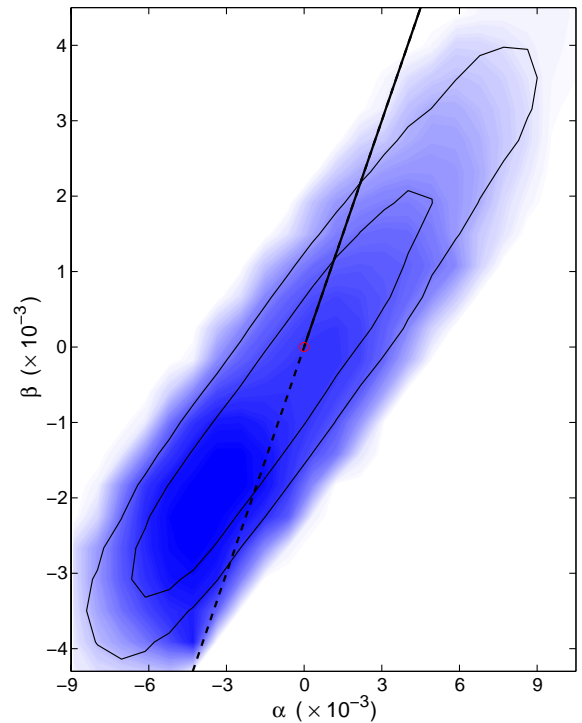


FIG. 6 (color online). Contour confidence intervals for the $\alpha - \beta$ subspace of parameters at 68 and 95% c.l. The solid line corresponds to the generalized Chaplygin gas, the dashed to a polytropic fluid and the circle is the Λ CDM model. The shading shows the mean likelihood of the samples.

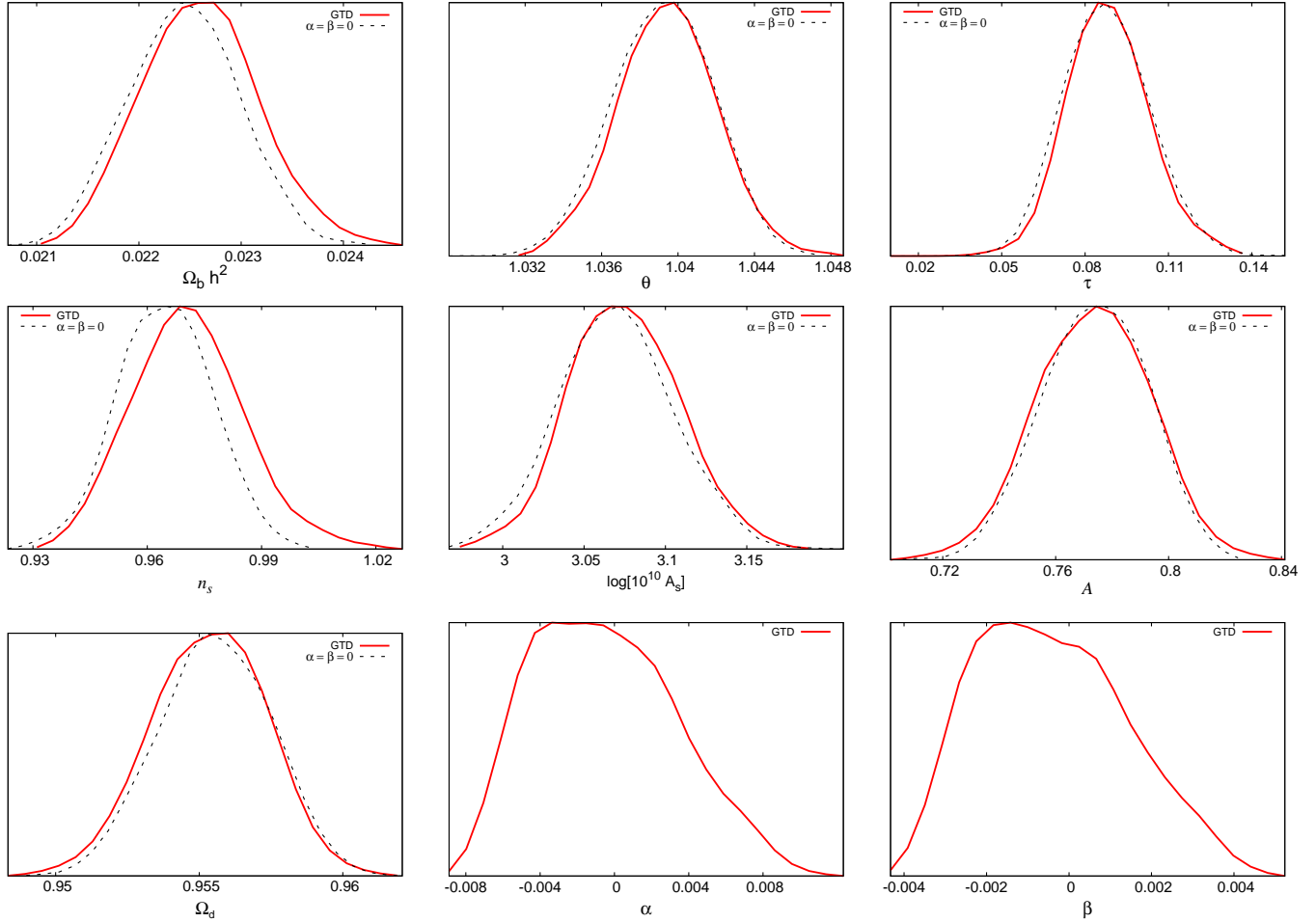


FIG. 7 (color online). 1-dimensional marginalized probability for the complete set of parameters explored with MCMC and the derived parameter Ω_d . The data used are the WMAP seven-year results, Union 2 data set supernovae compilation and a prior of HST on the Hubble constant. The dashed curves are obtained imposing $\alpha = \beta = 0$.

details see Ref. [11]. In Table I we present the summary of the results at 0.68 confidence level (c.l.).

We obtain that the free parameters of the GTD unified fluid have to take values of the order of 10^{-3} or lesser, although in principle they could be as large as causality allows (for the cases $\alpha = \beta$, this is $\alpha < 1$). This constraints are in agreement with those found for the generalized Chaplygin gas in the literature; see e.g., Ref. [35,36].

There is a nonlinear effect that we have not considered so far and that arises from the fact that in general the relation $\langle P \rangle = P(\langle \rho \rangle, a)$ does not hold. Therefore, when some scale grows and becomes nonlinear, the naive averaging procedure is no longer valid. This effect has been investigated in the past in Refs. [37,38]; for alternative approaches see Refs. [39,40]. In fact, in our case it follows a relation

$$\langle P \rangle = -Ca^{-3(\alpha-\beta)} \langle \rho \rangle^{-\alpha} (1 - \alpha\delta + \mathcal{O}_2(\delta)), \quad (36)$$

between averages quantities. It is clear that considering these effects complicates the calculations considerably and

it is out of the scope of this work to treat them accurately. We expect the free parameters of the GTD fluid to be even more constrained by the corrections induced by this nonlinear effect.

VI. CONCLUDING REMARKS

In this work, we applied the formalism of GTD to construct models of fluids that can be used as gravitational sources in the context of relativistic cosmology. First, we considered the simplest GTD fluid that corresponds to a thermodynamic system whose equilibrium manifold is flat, and found that it can be used to generate all the fluids of the standard cosmological model. We also discussed the possibility of considering the dark energy fluid as a noninteracting thermodynamic system with negative heat capacity and nonextensive thermodynamic variables.

We then investigated a GTD fluid whose thermodynamic curvature is nonzero in general, indicating the presence of internal thermodynamic interaction. It turned out that this fluid leads to a new cosmological model whose equation of

TABLE I. Summary of constraints. The upper panel contains the parameter spaces explored with MCMC. The bottom panel contains derived parameters. The data used are the WMAP seven-year data, Union 2 compilation and HST.

Parameter	Best fit ^a
$10^2 \Omega_b h^2$	$2.231^{+0.163}_{-0.123}$
θ	$1.038^{+0.007}_{-0.005}$
τ	$0.0892^{+0.0038}_{-0.0036}$
$10^3 \alpha$	$-3.21^{+11.92}_{-5.00}$
$10^3 \beta$	$-1.56^{+5.59}_{-2.38}$
\mathcal{A}	$0.768^{+0.051}_{-0.047}$
n_s	$0.963^{+0.047}_{-0.027}$
$\log[10^{10} A_s]$	$3.075^{+0.086}_{-0.085}$
Ω_d	$0.955^{+0.005}_{-0.004}$
t_0^b	$13.84^{+0.23}_{-0.35}$
H_0^c	$70.41^{+5.84}_{-3.79}$

^aThe maximum likelihood of the sample. The quoted errors show the 0.68 c.l.

^bThe Age of the Universe (t_0) is given in gigayears.

^c H_0 is given in Km/s/Mpc.

state contains as special cases the generalized Chaplygin gas, the dark fluid model, and the polytropic fluids. We showed that it is possible to interpret this new GTD fluid as corresponding to a unified model for dark matter and dark energy. To prove this, we used the Friedmann equations to perform a detailed analysis of the behavior of the state parameter of the GTD dark sector and of the corresponding scale factor. The obtained results are in accordance with current cosmological observations. The main difference

between the generalized Chaplygin gas and the GTD fluid consists in the behavior of the adiabatic speed of sound. Although at the cosmological background level this difference does not lead to any considerable consequences, the perturbation of the background cosmology shows an essential difference at the level of the density contrasts. The square of the adiabatic speed of sound is always positive for the Chaplygin gas model but negative in general for the GTD fluid, leading to an enhancement of the structure growth in the latter case. Moreover, the analysis of the CMB angular power spectrum shows that deviations from the Λ CDM model appear only at large scales. Finally, we find the best fit parameters of the GTD fluid by using current observational data and show that the parameters α and β must be of the order of 10^{-3} or lesser.

We conclude that from GTD it is possible to obtain fundamental equations for thermodynamic systems that can be used to develop physically reasonable cosmological models. In this work, we analyzed only two simple GTD fluids. It would be interesting to study more complicated GTD solutions and their interpretation in the framework of relativistic cosmology.

The microscopic nature of the GTD dark fluid is unknown, as much as the dark matter and dark energy in the Λ CDM model. In this work we have focused on its geometrical description by using the formalism of GTD.

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank J.L. Cervantes-Cota, C. S. Lopez-Monsalvo, F. Nettel, A. Sánchez, and R. Sussman for helpful comments and discussions. This work was supported in part by DGAPA-UNAM, Grant No. IN166110, and Conacyt-Mexico, Grant No. 166391.

-
- [1] H. Quevedo, *J. Math. Phys. (N.Y.)* **48**, 013506 (2007).
 - [2] H. B. Callen, *Thermodynamics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1960).
 - [3] J. L. Cervantes-Cota and G. Smoot, *AIP Conf. Proc.* **1396**, 28 (2011).
 - [4] M. Kunz, *Phys. Rev. D* **80**, 123001 (2009).
 - [5] W. Hu and D. J. Eisenstein, *Phys. Rev. D* **59**, 083509 (1999).
 - [6] C. Rubano and P. Scudellaro, *Gen. Relativ. Gravit.* **34**, 1931 (2002).
 - [7] I. Wasserman, *Phys. Rev. D* **66**, 123511 (2002).
 - [8] M. Kunz, A. R. Liddle, D. Parkinson, and C. Gao, *Phys. Rev. D* **80**, 083533 (2009).
 - [9] A. Aviles and J. L. Cervantes-Cota, *Phys. Rev. D* **83**, 023510 (2011).
 - [10] L. M. Reyes, J. E. M. Aguilar, and L. A. Urena-Lopez, *Phys. Rev. D* **84**, 027503 (2011).
 - [11] A. Aviles and J. L. Cervantes-Cota, *Phys. Rev. D* **84**, 083515 (2011).
 - [12] A. Y. Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier, *Phys. Lett. B* **511**, 265 (2001).
 - [13] N. Bilic, G. B. Tupper, and R. D. Viollier, *Phys. Lett. B* **535**, 17 (2002).
 - [14] M. Bento, O. Bertolami, and A. Sen, *Phys. Rev. D* **66**, 043507 (2002).
 - [15] R. Hermann, *Geometry, Physics and Systems* (Marcel Dekker, New York, 1973).
 - [16] A. Vazquez, H. Quevedo, and A. Sanchez, *J. Geom. Phys.* **60**, 1942 (2010).
 - [17] W. Greiner, L. Neise, and H. Stöcker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (Springer Verlag, New York, 1995).
 - [18] H. Quevedo, A. Sanchez, S. Taj, and A. Vazquez, *J. Korean Phys. Soc.* **57**, 646 (2010).
 - [19] W. Thirring, *Z. Phys. A* **235**, 339 (1970).

- [20] D. Lynden-Bell, *Physica (Amsterdam)* **263A**, 293 (1999).
- [21] P. Avelino, L. Beca, J. de Carvalho, and C. Martins, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **09** (2003) 002.
- [22] O. Luongo and H. Quevedo, [arXiv:1104.4758](https://arxiv.org/abs/1104.4758).
- [23] Z.-K. Guo and Y.-Z. Zhang, *Phys. Lett. B* **645**, 326 (2007).
- [24] N. Bilic, G. B. Tupper, and R. D. Viollier, *Phys. Rev. D* **80**, 023515 (2009).
- [25] A. Balbi, M. Bruni, and C. Quercellini, *Phys. Rev. D* **76**, 103519 (2007).
- [26] L. Xu, Y. Wang, and H. Noh, *Phys. Rev. D* **85**, 043003 (2012).
- [27] C.-P. Ma and E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **455**, 7 (1995).
- [28] A. Lewis, A. Challinor, and A. Lasenby, *Astrophys. J.* **538**, 473 (2000).
- [29] L. Amendola, F. Finelli, C. Burigana, and D. Carturan, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **07** (2003) 005.
- [30] D. Bertacca and N. Bartolo, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11** (2007) 026.
- [31] A. Lewis and S. Bridle, *Phys. Rev. D* **66**, 103511 (2002).
- [32] D. Larson, J. Dunkley, G. Hinshaw, E. Komatsu, M.olta *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **192**, 16 (2011).
- [33] R. Amanullah, C. Lidman, D. Rubin, G. Aldering, P. Astier *et al.*, *Astrophys. J.* **716**, 712 (2010).
- [34] A. G. Riess, L. Macri, S. Casertano, M. Sosey, H. Lampeitl *et al.*, *Astrophys. J.* **699**, 539 (2009).
- [35] O. F. Piattella, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **03** (2010) 012.
- [36] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, O. Piattella, and A. Starobinsky, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **02** (2008) 016.
- [37] P. P. Avelino, L. Beca, J. de Carvalho, C. Martins, and E. Copeland, *Phys. Rev. D* **69**, 041301 (2004).
- [38] L. Beca and P. Avelino, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **376**, 1169 (2007).
- [39] R. A. Sussman, *Phys. Rev. D* **79**, 025009 (2009).
- [40] X. Roy and T. Buchert, *Classical Quantum Gravity* **27**, 175013 (2010).