



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**MODELO DE SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA ROTURA  
DEL OLEAJE**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA CIVIL – HIDRÁULICA  
P R E S E N T A :

**GERMÁN DANIEL RIVILLAS OSPINA**

TUTOR:  
**Dr. RODOLFO SILVA CASARÍN**



2012



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



A Diana, Sebastián y Santiago  
Consuelo y Tulio.  
Jhon y Juan



## Agradecimientos

Las primeras palabras son sin duda para quienes se han convertido en puntos cardinales de mi proyecto de vida. Diana mi esposa quien con paciencia, serenidad y gran corazón ha acompañado este sueño de volar por tierras lejanas, compartiendo juntos esta serie de nuevas y aventuradas experiencias de los últimos años. Sebas con su pequeño corazón de león humildemente y con gran amor, ha depositado su confianza en mí para aguantar el tiempo que estuvimos separados y luego, como compañero delincuente que ha compartido mi diario vivir en México y a hecho que los días de este doctorado sean más livianos y llevaderos. A Santi, que con su llegada dio nuevas perspectivas a mí vida y con sus locuras no solo me impresiona y llena de felicidad, también, junto con su hermano crean esa necesidad de verlos diariamente dado el amor que son capaces de darme. A mis padres y hermanos que a la distancia dan ese soporte emocional, tan necesario en la soledad que a veces nos embarga en este hermoso México, fundamentalmente en la época más dura del año, la navidad. Siempre con ese amor intenso me han hecho sentir que no estoy solo y generan cada día la necesidad de regresar a nuestro razón de vivir, mi amada Antioquia.

Existe además otra gran familia a la que es importante dar los méritos por lo fundamental que han sido en nuestras vidas, y en lo especial que se han convertido para nosotros. Esta gran familia nos ha arropado, apoyado, abrazado, nos ha dado la mano cuando más lo hemos necesitado. Es poco realmente mencionarlos en una página cuando se podrían llenar volúmenes enteros con cada una de las vivencias y momentos que se han compartido. Gratitud sincera para la familia Velasco, nuestra familia mexicana quien nos adoptó y convirtió en uno más de ellos. A la familia Hernández, que son familia, amigos y hermanos, siempre pendientes de nosotros y nuestros hijos. A la familia Montenegro, que nos permitieron entrar en su hogar, siempre calurosos, cariñosos, atentos y nunca olvidaron el más mínimo detalle. A la familia Posada, a pesar de que hace tiempo no están cerca nunca se han olvidado de nosotros, siempre atentos a nuestras necesidades y a nuestro día a día.

Quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología *CONACYT* el apoyo económico que ha brindado en mi formación profesional, a través del cual fue posible la materialización de mis estudios doctorado.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, mi segunda casa, los conocimientos que adquirí en ésta alma Mater orgullo no sólo para México sino para Latinoamérica entera. Me siento afortunado de haber caminado por sus pasillos, haber ocupado sus aulas, deleitarme con largas caminatas por sus jardines. Además, los conocimientos profesionales adquiridos son invaluable y me dan la fortaleza para enfrentar con más ímpetu y conciencia mi vida profesional.

Agradecimientos especiales merecen el Dr. Ramón Domínguez, co-autor de mi desarrollo profesional y sin el cual nunca hubiera llegado a México. Sin restar importancia y de la manera más humilde expreso mi más profundo agradecimiento y admiración a quién ha sido

mi guía espiritual en el campo científico, quien me ha apoyado en diversas situaciones y que se convierte en pieza clave de este título que voy a obtener, el Dr. Rodolfo Silva Casarín.

Al Dr. Carlos Escalante quien desde un principio han dado todo de sí para brindar su apoyo tanto en lo académico como administrativo. Sus aportes en mi formación son profundos y me han permitido desarrollar un gran sentido crítico, ha sido un honor haber recibido clases de quien a mi modo de ver es el mejor profesor del Posgrado de Ingeniería.

A la Dra. Lilia Reyes agradezco el apoyo y sus peleas con el Coordinador del Posgrado para que mi ingreso a la maestría fuera posible, así como los comentarios y sugerencias que realizó a mi trabajo de investigación.

Al Dr. Adrián Pedrozo, que desde el principio se convirtió en un gran amigo, abriendo su corazón para brindar un poco de su experiencia a quien tanto lo necesitaba. Me siento muy agradecido por haber tenido alguien con quien hablar sobre temas de mi interés y por el gran trabajo que realizamos juntos.

Al Dr. Edgar Mendoza, por ser ese hombro en el cual me apoyé y reagué en los momentos de crisis. Me ayudó a tener la calma y la capacidad para dar el salto cuando más compleja era la situación en mi tema de investigación.

Como no olvidar a aquellos con quien día a día logramos hacer una gran familia. Mis compañeros de cubículo, testigos de mi desarrollo profesional. Fueron momentos maravillosos que pasarán a la posteridad, por que experiencias tan agradables poco suceden y ciertamente nunca se olvidan. Gracias a Carlos, Alejo Cadena, Alejo Garcés, Juan Carlos, Juli Moos, Sergio, Juli Za, Isabel, Jackes, Sandra, Caro, Claudia, Camilo quienes me arroparon como a un niño y me integraron a su gran familia Colombiana. Por ellos resistí en muchas ocasiones la soledad, y se convirtieron en personas de las que mucho aprendí, por su sencillez, calidad humana y ese don de servir. A Gregorio, Gabriel, Edgar, Diego, Simpsone, Angie, Brayan, Dalila, Lela, Maribel, Toño, Daniel, Beto y Marisol compañeros de aventura, familia con los que mucho me reí, molesté y compartí. Amigos que quedarán para la vida y con los que siempre podré contar. Sergio Maldonado, Chipi, Alexandra, Miguel Delgadillo, Casilimas, compañeros que se unieron con el tiempo y con los que forjé gran amistad y compartí además de comidas, buenos momentos, grandes lazos que servirán como recuerdos cada vez que nos encontremos y nos permitan hacer remembranza de nuestra juventud. Y no se puede olvidar a los más pequeños, a las últimas generaciones que han traído gente valiosa de la que se sigue aprendiendo en cada momento compartido. Raúl, Juan P., Jair, Gibran, Cuauhtemoc, Valeria, Monique, Peruano.

También debo resaltar el apoyo de mis familiares desde Colombia. Por ello, doy gracias a la familia Ospina y la familia Rivillas, especialmente, a Gildardo, Fernando, Asdrúbal, Graciela, Mario, Marina, Gloria, Fabián, Camilo, Juanes, Laura y Leidy. Agradezco su apoyo en todo momento, su cariño y momentos de vivencias a lo largo de toda mi vida. Ese apoyo que, a pesar de la distancia se siente y permanece vivo, como si nunca hubiera partido de Colombia.

**Jurado Asignado:**

Presidente: Dr. Carlos Escalante Sandoval.

Secretario: Dr. Edgar Mendoza Baldwin.

Vocal: Dr. Rodolfo Silva Casarín.

1er. Suplente: Dra. Lilia Reyes Chávez.

2do. Suplente: Dr. Adrián Pedrozo Acuña.

Lugar donde se realizó la tesis:

Instituto de Ingeniería, UNAM.

**TUTOR DE LA TESIS**  
Dr. Rodolfo Silva Casarín

---





## Resumen

Este trabajo tiene por objeto desarrollar y describir la resolución numérica de flujos turbulentos en dos dimensiones, tomando en consideración las ecuaciones promediadas de Reynolds (RANS).

El estudio de la teoría de oleaje hace parte de los principios básicos que deben ser abordados, a la hora de estudiar los la rotura del oleaje. En este documento se efectúa una introducción al modelado costero y las diferentes teorías que pueden ser empleadas para estudiar los procesos de generación, propagación y transformación del oleaje hacia la playa.

En la propagación del tren de ondas hacia el continente, se generan fenómenos que deben ser estudiados de manera independiente y, para los cuales, existen diversas teorías que ayudan a su entendimiento. De entre todos ellos, en este trabajo se realiza la investigación de la rotura del oleaje. El estudio comprende la concepción de los procesos físicos que lo gobiernan, partiendo de simples parámetros empíricos hasta elaboradas teorías que muestran la falta de entendimiento de éste y ayudan a describir detalladamente el fenómeno en cuestión. Para ello se ha elaborado un modelo matemático denominado INSURF, compuesto por otros modelos, que bajo una estructura de módulos se encuentra definido por: a) el hidrodinámico o solver; b) el módulo de reconstrucción de la superficie libre; y c) la rutina de turbulencia que trabaja de manera conjunta con los módulos anteriores. Para la discretización se ha utilizado el método de diferencias finitas con una malla regular. El modelo de turbulencia se basa un sistema algebraico de dos ecuaciones tipo  $k - \epsilon$  para la resolución de la turbulencia anisotrópica. Para las componentes convectivas se utiliza un método no-centrado (tipo upwind) conservativo de tercer orden. El resto de cantidades fueron discretizadas a partir de esquemas centrados.

También son analizadas las diferentes metodologías que gobiernan los flujos a superficie libre, así como la estructura de las ecuaciones de Reynolds. Se exponen los métodos que, de manera frecuente, se utilizan en la solución de los modelos numéricos: variables conservativas, esquemas conservativos y no conservativos, esquemas descentrados, por mencionar los más importantes. Son deducidas las ecuaciones bidimensionales necesarias para la construcción del modelo, iniciando desde las ecuaciones de Navier-Stokes hasta alcanzar, a través de un promedio temporal, las ecuaciones de Reynolds.

Los resultados obtenidos a partir del modelo numérico se comparan con datos experimentales. El campo de velocidades se calcula a partir de una presión supuesta y luego de manera explícita se estima el campo de velocidades. Se simulan los casos de rotura de presa, flujo en una cavidad y propagación de una onda solitaria.

# Abstract

The main goal of the research presented in this Thesis is the description and development of a group of equations that can numerically solve turbulent flows, within the theoretical frame of the Reynolds Navier-Stokes equations (RANS).

The theories for mathematical representation of ocean waves is a relevant aspect that needs to be carefully analyzed if the phenomena related to wave breaking are to be studied. Thus, this document presents an introduction to the numerical description and to the different wave theories that can be used to compute the generation, propagation and transformation of waves in their way to the shore.

Waves suffer several transformation processes as they travel from the generation zone to the coast and each can be the subject of research, in the particular case presented in this Thesis, the braking process numerical modeling is investigated. The state of the art revision presented herein goes from the representation of wave braking via very simple empiric and parametric formulae to very complex theories nevertheless lack of knowledge and understanding of the process is pointed out. The numerical study is based on the coding of a model named INSURF, which comprises a group of sub-models: a) the hydrodynamic solver, b) the free surface reconstruction module (VOF) and 3) the turbulence solver. The latter solves an algebraic system of two equations type, for the anisotropic turbulence solution. The numerical domain is discretized in rectangular cells and the equations are applied in a centered scheme except for the convective terms for which a non-centered (upwind) scheme was used.

Different methodologies for computing the free surface flows were analyzed, as well as the Averaged Reynolds equations structure. The most commonly used methods available in the literature are presented, that is, conservative variables, conservative and non-conservative schemes and non-centered schemes. The derivation of the two dimensional equations employed for the construction of the model are presented.

The results obtained from the numerical model are compared to experimental test. The velocity field is calculated from a guessed pressure and later, the velocities are estimated in an explicit way. The dam-break problem, the cavity flux and the solitary wave propagation are the bench cases selected to test the INSURF model accuracy.



## Lista de Símbolos

$A$	Parámetro de disipación
$a, b$	Parámetros de la pendiente de la playa determinados empíricamente
$\aleph$	Constante de Von-Karman
$\alpha$	Constante empírica
$\alpha_\phi$	Constante empírica
$\beta$	Pendiente de la playa
$\beta_0$	Coefficiente de compresibilidad volumétrica
$\beta_\phi$	Constante empírica
$C$	Constante turbulenta empírica
$c'\mu$	Constante empírica
$c_D$	Coefficiente empírico
$C_{1\epsilon, 2\epsilon}$	Coefficientes empíricas
$c_{z1, z2}$	Constantes empíricas
$d$	Profundidad
$d_b$	Profundidad del agua en el punto de rotura
$\delta$	Espesor de la capa límite
$\delta_r$	Parámetro de amplitud
$\delta_T$	Distancia longitud de mezcla
$\delta_{ij}$	Delta Kronecker
$\epsilon$	Tasa de disipación turbulenta
$\epsilon_{ikj}$	Símbolo de Levi-Ceita
$\Delta x$	Incremento espacial en dirección en x
$\Delta z$	Incremento espacial en dirección en z
$\Delta t$	Incremento temporal
$f1$	Función empírica
$fl$	Flotabilidad turbulenta (Boyancia)
$f_m$	Frecuencia de oleaje media
$F$	Función de volumen de fluido
$g$	Gravedad
$\gamma_r$	Índice de rotura
$\Gamma$	Difusividad turbulenta
$H$	Altura de ola.
$H_b$	Altura de ola en rotura
$H_{max}$	Altura de ola máxima
$H_{mo, b}$	Altura de ola del momento de orden cero en el punto de rotura
$H_0$	Altura de ola en aguas profundas no refractada
$H_{rms}$	Altura de ola media cuadrática
$H_{rms, b}$	Altura de ola media cuadrática en el punto de rotura
$k$	Energía cinética turbulenta
$ko$	Número de onda

$k_p$	Coefficiente de permeabilidad
$L$	Longitud de onda
$L_t$	Longitud de escala de la turbulencia
$l$	Escala de la turbulencia
$l_m$	Longitud de mezcla
$\mu$	Viscosidad dinámica
$\mu_l$	Parámetro de longitud de onda
$\mathcal{U}_t$	Promedio estadístico espacial para la turbulencia
$n_{ij}$	Vector unitario normal a la superficie libre
$nc$	Relación de distancia entre los centros de celda
$\nu$	Viscosidad cinemática
$\nu_t$	Viscosidad de remolino
$\nu_{tz}$	Flotabilidad
$\Omega_b$	Índice de altura de rompiente
$p$	Presión
$P_r$	Producción de energía cinética turbulenta
$\pi$	pi
$Q_b$	Porcentaje de rotura de la ola
$R_i$	Número de Richardson
$Re$	Número de Reynolds
$\rho$	Densidad
$s$	Rendimiento
$S$	Parte viscosa del tensor de esfuerzos
$\sigma_{ij}$	Tensor de esfuerzos cortantes
$\sigma_{tz}$	Número Prandtl-Schmidt
$\sigma_k$	Coefficiente de difusión empírica
$\sigma_\epsilon$	Coefficiente empírica
$\sigma_z$	Coefficiente empírico
$T$	Periodo
$t$	Tiempo
$t^k$	Esfuerzos unitarios tangenciales
$\tau$	Esfuerzo turbulento
$\tau_{ij}$	Tensor de esfuerzos viscosos
$\tau_n$	Esfuerzo normal en la superficie libre
$\tau_w$	Esfuerzo tangencial en la pared
$U_r$	Número de Ursell
$\overline{u'_i u'_j}$	Esfuerzos de Reynolds
$u$	Velocidad horizontal instantánea
$u^*$	Velocidad turbulenta

$\bar{u}$	Velocidad horizontal media
$u'$	Velocidad horizontal turbulenta
$u_i^m$	Velocidad final en la iteración n
$u_{max}$	Velocidad horizontal máxima
$u_{min}$	Velocidad horizontal mínima
$\tilde{u}_i$	Velocidad corregida
$\overline{u_i u_j}$	Esfuerzos de Reynolds
$\varepsilon_0$	Número de Iribarren
$\vartheta$	Número de Prandtl
$\varphi$	Cantidad escalar fluctuante
$\hat{v}$	Velocidad de escala
$V$	Volumen de flujo que atraviesa la cara de la celda
$w$	Velocidad vertical instantánea
$\bar{w}$	Velocidad vertical media
$w'$	Velocidad vertical turbulenta



---

# Índice general

<b>1. Aspectos Fundamentales</b>	<b>3</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	3
1.1.1. Transformación del Oleaje . . . . .	4
1.1.2. Pre-rotura . . . . .	4
1.1.3. Rotura del Oleaje . . . . .	5
1.1.4. Tipos de Rotura . . . . .	6
1.1.5. Método de Similitud . . . . .	9
1.2. Estudio del Movimiento del Fluido . . . . .	10
1.3. Número de Dimensiones del Modelo . . . . .	11
1.4. Técnicas de Discretización . . . . .	11
1.5. Ecuaciones Promediadas de Reynolds (RANS) . . . . .	12
<b>2. El Modelado Matemático del Oleaje</b>	<b>17</b>
2.1. Introducción . . . . .	17
2.2. Modelado del Oleaje . . . . .	18
2.2.1. Modelos Analíticos de Oleaje . . . . .	19
2.2.2. Modelos Empíricos de Oleaje . . . . .	19
2.2.3. Modelos Físicos de Oleaje . . . . .	19
2.2.4. Modelos Numéricos . . . . .	20
2.3. Tipos de Modelos Numéricos . . . . .	20
2.3.1. Teoría del Rayo . . . . .	20
2.3.2. Modelos Basados en la Mild-Slope (MSE) . . . . .	21
2.3.3. Modelos Espectrales . . . . .	21
2.3.4. Modelos Boussinesq . . . . .	22
2.3.5. Modelos Basados en las Ecuaciones de Aguas Someras (SWE) . . . . .	23
2.3.6. Modelos de Presión Hidrostática Cuasi-tridimensionales . . . . .	23
2.3.7. Modelos Tridimensionales con Turbulencia: Modelos Navier-Stokes . . . . .	23
2.3.8. Modelos Tridimensionales sin Turbulencia: Modelos de Flujo Potencial . . . . .	24
2.3.9. Disipación de energía . . . . .	24

<b>3. El Modelado de la Turbulencia</b>	<b>27</b>
3.1. Introducción . . . . .	27
3.2. Antecedentes . . . . .	27
3.3. Turbulencia . . . . .	28
3.4. Modelado de La Turbulencia . . . . .	29
3.4.1. Naturaleza de la Turbulencia . . . . .	29
3.4.2. La Cascada de Energía y las Escalas de la Turbulencia . . . . .	30
3.4.2.1. La Cascada de Energía . . . . .	30
3.4.2.2. Escalas de la Turbulencia . . . . .	30
3.4.2.3. Métodos de Cálculo y Análisis de Flujos Turbulentos . . . . .	31
3.4.3. Conceptos Básicos de los Modelos de Turbulencia . . . . .	31
3.4.3.1. Concepto de Viscosidad de Remolino . . . . .	31
3.4.3.2. Difusividad Turbulenta . . . . .	33
3.4.3.3. Clasificación del Modelo . . . . .	33
3.4.3.4. Modelado Escalas de Submalla . . . . .	34
3.4.4. Modelo de Cero Ecuaciones: Modelo de Longitud de Mezcla (primer orden) . . . . .	34
3.4.4.1. Constantes de Viscosidad y Difusividad de Remolino . . . . .	34
3.4.4.2. Modelos de Longitud de Mezcla . . . . .	36
3.4.4.3. Modelo de Capa Límite de Prandtl . . . . .	37
3.4.5. Modelos de una Ecuación . . . . .	37
3.4.5.1. Modelos que Utilizan el Concepto de Viscosidad de Remolino . . . . .	38
3.4.5.2. Modelo de Bradshaw . . . . .	40
3.4.6. Modelos de Dos Ecuaciones ( $k - \epsilon$ ) . . . . .	40
3.4.6.1. Ecuación de la Escala de Longitud . . . . .	40
3.4.7. Otros Modelos de Turbulencia . . . . .	41
3.4.7.1. Simulación Promediada de Reynolds . . . . .	41
3.4.7.2. Simulación Grandes Vórtices (LES) . . . . .	43
<b>4. Fundamento Teórico de las Ecuaciones de Flujo Turbulento</b>	<b>45</b>
4.1. Introducción . . . . .	45
4.2. Modelado de la Rotura . . . . .	45
4.3. Ecuaciones de Gobierno del Flujo . . . . .	47
4.3.1. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	47
4.3.2. Ecuaciones de Reynolds . . . . .	48
4.4. Modelo de Transporte de Turbulencia . . . . .	51
4.4.1. Ecuación de Transporte para la Energía Cinética Turbulenta . . . . .	52
4.4.2. Ecuación de Transporte para la Tasa de Disipación Turbulenta . . . . .	52
4.4.3. Determinación de los Coeficientes del Modelo ( $k - \epsilon$ ) . . . . .	54
4.4.3.1. Estimación de $C_{2\epsilon}$ . . . . .	54
4.4.3.2. Estimación de $C_d$ . . . . .	55
4.4.3.3. Estimación de $C_{1\epsilon}$ . . . . .	55
4.4.3.4. Estimación de $\sigma_\epsilon$ y $\sigma_k$ . . . . .	55
4.4.4. Condiciones de Frontera . . . . .	56
4.5. Solución de las Ecuaciones de Reynolds . . . . .	57

4.5.1.	Discretización de los Términos Convectivos y Viscosos . . . . .	57
4.5.2.	Discretización de los Términos de Presión . . . . .	58
4.5.3.	Propiedades de Conservación . . . . .	59
4.5.4.	Cálculo del Campo de Presiones . . . . .	62
4.5.4.1.	Solución de la Presión . . . . .	63
4.5.4.2.	Esquema explícito de avance en el tiempo . . . . .	63
4.5.4.3.	Esquema implícito de avance en el tiempo . . . . .	65
4.5.4.4.	Métodos implícitos de corrección de la presión . . . . .	66
4.6.	Reconstrucción de la Superficie Libre . . . . .	71
4.6.1.	Función de Altura . . . . .	72
4.6.2.	Segmentos de Línea . . . . .	72
4.6.3.	Marcado de Partículas . . . . .	73
4.6.4.	Método de Volumen de Fluido . . . . .	73
4.6.4.1.	Aproximación de la Ecuación de Continuidad . . . . .	75
4.6.4.2.	Aproximación de la Función de Volumen de Fluido . . . . .	75
4.6.4.3.	Estimación de las interfaces dentro de una celda . . . . .	76
<b>5.</b>	<b>Descripción Simplificada del Modelo</b>	<b>77</b>
5.1.	Introducción . . . . .	77
5.2.	Ecuaciones Diferenciales Parciales . . . . .	77
5.2.1.	Diferencias Finitas . . . . .	78
5.2.2.	Derivadas de Orden Superior . . . . .	79
5.2.3.	Ecuaciones Parabólicas . . . . .	80
5.3.	Convergencia . . . . .	82
5.4.	Variables Conservativas . . . . .	84
5.5.	Leyes de Conservación . . . . .	84
5.5.0.1.	Forma Integral . . . . .	85
5.6.	Esquemas No centrados . . . . .	85
5.7.	Difusión o Viscosidad Numérica . . . . .	88
5.8.	Esquemas Conservativos . . . . .	88
<b>6.</b>	<b>Ecuaciones Flujo Turbulento del Modelo INSURF</b>	<b>91</b>
6.1.	Antecedentes . . . . .	91
6.2.	Promedio de Reynolds . . . . .	91
6.3.	Ecuaciones de Reynolds . . . . .	93
6.4.	Modelo Numérico . . . . .	96
6.4.1.	Esquema del Dominio de Cómputo . . . . .	97
6.4.2.	Método de Solución SIMPLE . . . . .	98
6.4.3.	Integración y Discretización Espacial Mediante Diferencias Finitas . . . . .	98
6.4.3.1.	Discretización de la Derivada Temporal . . . . .	99
6.4.3.2.	Discretización de los Términos Convectivos y Viscosos . . . . .	99
6.4.3.3.	Método de Solución de la Presión . . . . .	100
6.4.3.4.	Método de Volumen de Fluido . . . . .	101
6.4.3.5.	Modelo de Turbulencia . . . . .	102
6.4.3.6.	Discretización de la Derivada Temporal . . . . .	103

## ÍNDICE GENERAL

6.4.4. Validación del Modelo . . . . .	104
6.4.4.1. Caso de Rotura de Presa . . . . .	104
6.4.4.2. Simulación Numérica de Flujo en Cavidad . . . . .	110
6.4.4.3. Simulación Numérica de un Solitón . . . . .	119
<b>7. Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación</b>	<b>125</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	125
7.2. Futuras Líneas de Investigación . . . . .	128

---

## Índice de figuras

6.1. Celda de cálculo típica y notación utilizada en el plano cartesiano . . . . .	97
6.2. Rotura en $t=0$ . . . . .	105
6.3. Rotura en $t=0.6$ . . . . .	106
6.4. Rotura en $t=1.0$ . . . . .	107
6.5. Rotura en $t=2.0$ . . . . .	107
6.6. Comparación Modelo Numérico contra Pruebas Laboratorio de Martyn y Moyce	108
6.7. Campo de Velocidades en $t=0.6s$ . . . . .	109
6.8. Campo de Velocidades en $t=2.0s$ . . . . .	110
6.9. Esquema del dominio computacional . . . . .	111
6.10. Velocidad horizontal en la iteración 1 . . . . .	112
6.11. Velocidad horizontal en la iteración 1 . . . . .	112
6.12. Velocidad horizontal en la iteración 100 . . . . .	113
6.13. Velocidad horizontal en la iteración 100 . . . . .	113
6.14. Velocidad vertical en la iteración 1 . . . . .	115
6.15. Velocidad vertical en la iteración 1 . . . . .	115
6.16. Velocidad vertical en la iteración 100 . . . . .	116
6.17. Velocidad vertical en la iteración 100 . . . . .	116
6.18. Instante Inicial $t=0$ . Vista en planta . . . . .	117
6.19. Flujo en cavidad $t=1$ . . . . .	118
6.20. Flujo en cavidad $t=11$ . . . . .	118
6.21. Flujo en cavidad $t=100$ . . . . .	119
6.22. Solitón localizado $x=6.68$ m. Los círculos verdes representan los datos de Morales. Los diamantes rojos representan los resultados numéricos . . . . .	121
6.23. Solitón localizado $x=14.354$ m. Los círculos verdes representan los datos de Morales. Los diamantes rojos representan los resultados numéricos . . . . .	121
6.24. Solitón localizado en $x=6.68$ m. Los círculos verdes representan los datos de Craig y Sulem. Los diamantes rojos representan los resultados numéricos . .	123
6.25. Solitón localizado en $x=14.35$ m. Los círculos verdes representan los datos de Craig y Sulem. Los diamantes rojos representan los resultados numéricos . .	123

*ÍNDICE DE FIGURAS*

## Introducción

En el primer capítulo se revisan los conceptos fundamentales de la hidrodinámica asociada a los flujos turbulentos, en especial la rotura del oleaje. La revisión inicia desde la definición más básica del tipo de rotura hasta llegar a la solución de este fenómeno a través de las ecuaciones promediadas de Reynolds (RANS, por sus siglas en inglés). Este fenómeno es de gran importancia en la ingeniería de costas dado que bajo ciertas condiciones el oleaje se vuelve inestable y puede llegar a romper. Durante este proceso se genera gran turbulencia, proceso que puede ser solucionado con modelos apropiados que describan todas sus escalas espaciales y temporales.

El oleaje es un fenómeno común en la naturaleza. Por definición es el movimiento de una onda con cierto periodo que describe una trayectoria atrás-adelante y/o visceversa. Por esta razón, se hace en el capítulo 2 una breve definición de las técnicas de dinámica de fluidos computacional que actualmente son empleadas para el adecuado entendimiento del modelado del oleaje. Con sus ventajas y desventajas inherentes a las ecuaciones que los gobiernan, y la forma como pueden ser aplicadas a diferentes problemas en la ingeniería.

En el capítulo 3 se hace una sinópsis de las principales características asociadas al modelado de la turbulencia. Se definen a detalle los principales elementos que componen el campo de flujo durante el fenómeno de la rotura, así como el manejo de las ecuaciones que gobiernan el flujo turbulento. Las limitaciones tecnológicas y de comprensión en las ecuaciones generales de Navier-Stokes son precisadas, con el fin de comprender los problemas que se tienen en la resolución de la turbulencia a nivel de la microescala, lo compleja que llega a ser esta tarea y los medios que se tienen para la estimación completa a través del empleo de condiciones de contorno desarrolladas para tal fin.

Las ecuaciones de Navier-Stokes, responsables de la descripción de forma completa del campo de flujo son desarrolladas en el capítulo 4. Se describen las leyes de conservación para un flujo incompresible conformado por un sistema cerrado y se detallan sus limitaciones en cuanto al modelado del oleaje. Como consecuencia de estas limitaciones se desarrollan las ecuaciones de Reynolds aplicadas al modelo INSURF, que en definitiva son las que comúnmente se emplean para describir los fenómenos turbulentos. Los diferentes métodos para la solución

## ÍNDICE DE FIGURAS

de las ecuaciones de Reynolds son definidos en este capítulo y se sustenta el porqué se utiliza la presión como variable independiente para la solución del sistema de ecuaciones. Junto con la solución de la ecuación de la presión, es definido el método para el cierre de las ecuaciones, constituido por un modelo de turbulencia algebraico de dos ecuaciones tipo  $k - \epsilon$ . Son enunciados los avances en las técnicas para la reconstrucción de la superficie libre. Se hace una precisión desde los primeros desarrollos en las técnicas de reconstrucción hasta los modelos más sofisticados para el análisis de la evolución de la superficie libre.

En el quinto capítulo se repasan algunos conceptos de métodos numéricos para sustentar la descripción numérica de las ecuaciones de gobierno. Se seleccionó este método pues es una clásica aproximación para encontrar la solución numérica de las ecuaciones que gobiernan el modelo matemático de un sistema continuo. Las derivadas son reemplazadas por aproximaciones que convierten el problema de ecuaciones parciales en un sistema algebraico fácil de resolver.

El último capítulo de esta investigación tiene como propósito dar una validación y aplicación al modelo construido. Dada la aleatoriedad del flujo, se pretende analizar el comportamiento de los grandes vórtices de carácter anisotrópico a través de la simulación de sencillos casos físicos. El primer fenómeno descrito es el caso de la onda generada por la rotura de una presa, que tiene como objetivo conocer la evolución de frente de onda en el tiempo. La segunda aplicación está descrita por la simulación del flujo en una cavidad, con el fin de analizar el comportamiento del campo de velocidades en circuitos cerrados. Finalmente, por la importancia que tiene el modelo en el desarrollo de futuras aplicaciones en ingeniería costera, se efectúa la simulación de un solitón en un fondo plano, analizando su forma y la magnitud de las componentes de la velocidad.

Finalmente se presentan las conclusiones de este trabajo y las futuras líneas de investigación que pueden ser desarrolladas, a partir de la base que se deja con la construcción del modelo matemático utilizado en la solución de flujos turbulentos. Esto solo representa un primer intento, una línea de estudio que puede ser explotada para el análisis de las diferentes escalas de la turbulencia, y con seguridad a partir del continuo trabajo en el mejoramiento del código fuente, el modelo podrá ser utilizado en aplicaciones de ingeniería costera.



# 1

---

## Aspectos Fundamentales

### 1.1. Antecedentes

En todo proyecto de ingeniería costera es necesario conocer las características del clima marítimo y los procesos físicos que éste involucra. Por ejemplo, para el diseño portuario o el estudio de la evolución de una playa se deben conocer las condiciones de oleaje y viento de la zona de interés. Para conocer el oleaje se debe realizar la transferencia de las alturas de ola desde mar adentro hacia la costa [? ].

En aguas profundas el oleaje generado por el viento no es influenciado por el fondo. En el proceso de propagación hacia el continente, el tren de ondas se ve afectado por la batimetría y las corrientes, y las olas pierde parte de su energía al modificarse por el efecto de la fricción. Como consecuencia de esto la amplitud de la onda aumenta y su longitud disminuye, provocando el peraltamiento de la ola a través de un proceso de transferencia entre la energía cinética y potencial. En profundidades reducidas el oleaje se desplaza a una velocidad menor que la cresta dando lugar al volteo. El volteo genera un chorro de líquido que se precipita hacia la base de la ola y produce una gran dispersión de agua, traducido en una gran turbulencia del flujo, conocido como rotura del oleaje. El fenómeno de la rotura es el responsable de una gran pérdida de energía y del transporte de sedimentos que se produce en la zona de rompiente.

La rotura del oleaje se presenta en el interior de lo que se conoce como el zona de rotura (*surf zone, por su nombre en inglés*), una región que se extiende desde poco antes del rompimiento del oleaje hasta la zona de lavado en la playa. Se caracteriza por ser la zona más dinámica de la costa, donde se origina el transporte de sedimentos y los cambios en la batimetría, ambos dominados por las condiciones hidrodinámicas que inducen la rotura y las corrientes. El estudio de la transformación del oleaje, el nivel del mar y las corrientes que se generan en ésta zona constituye un paso adelante para la estimación del daño potencial generado por inundaciones y el deterioro de las estructuras por la acción del oleaje, así como el análisis de la evolución de la línea de costa, los cambios del perfil transversal de la playa, el diseño de estructuras costeras, etc.

Después de la propagación del oleaje desde mar adentro hasta la playa, la descripción del oleaje en la zona de surf constituye gran importancia para analizar los fenómenos de turbulencia inherentes a la rotura, además, observar cómo es la evolución de la altura de ola a medida que se propaga a través de esta región.

## CAPÍTULO 1. ASPECTOS FUNDAMENTALES

El oleaje que se aproxima a la playa se peralta a medida que la profundidad disminuye. Cuando el grado de esbeltez alcanza un valor límite (que es función de la profundidad relativa  $\frac{d}{L}$  y la pendiente de la playa  $-\tan\beta$ ), la ola rompe disipando energía, induciendo corrientes en la costa e incrementando el nivel medio del mar. Este fenómeno se presenta en un punto donde la profundidad del fondo marino es aproximadamente igual a la altura de la ola.

### 1.1.1. Transformación del Oleaje

El perfil de una playa se puede dividir en 4 regiones que dependen de las características de transformación del oleaje.

1. Región de someramiento o pre-rotura.
2. La franja exterior de la zona de rotura, donde tiene lugar el rompimiento de grandes olas.
3. La parte interior de la zona de rotura donde rompe la mayoría del oleaje.
4. La zona de lavado.

En resumen, cuando el oleaje ingresa a la parte exterior de la zona de rotura -la cual tiene aproximadamente un ancho de 5 a 10 veces la profundidad- cambia su forma abruptamente. El tren de ondas pierde energía de forma indirecta debido a la formación de grandes vórtices en la superficie.

En su avance hacia la playa, cuando el tren de ondas ingresa a la porción interior de la zona de surf o zona de rompiente, se forma un vórtice periódico y turbulento. Además, se produce la transformación de un flujo continuo y directo en un movimiento turbulento y de baja frecuencia.

### 1.1.2. Pre-rotura

En aguas profundas el perfil del oleaje tipo SWELL tiene forma sinusoidal con una cresta redonda. Cuando el oleaje entra de aguas intermedias a someras la longitud y la celeridad de la onda decrecen, aumenta su altura y el perfil del oleaje cambia de sinusoidal a una onda con pico en la cresta separada por canales planos en sus costados laterales. En aguas poco profundas cuando la ola está cerca de romper, la cresta se vuelve asimétrica, inestable y finalmente rompe. La asimetría y oblicuidad son medidas estadísticas que indican la asimetría horizontal (pico) y vertical (inclinación hacia adelante) de la onda. Son por lo tanto medidas de la no linealidad que incrementa conforme el oleaje que proviene de aguas profundas está a punto de romper.

La región de aguas someras se define como la región donde la longitud de la onda es mucho mayor que la profundidad. Las olas en esta región se conocen como ondas largas. En términos del parámetro de longitud de onda  $\mu_l$  se tiene que:

$$\mu_l = \frac{L}{d} \ll 1 \quad (1.1)$$

En esta región los efectos de difracción no son importantes.

Otro parámetro adimensional muy importante es el parámetro de amplitud  $\delta_r$  que da relativa importancia a la amplitud de la onda respecto a la profundidad.

$$\delta_r = \frac{A}{d} \quad (1.2)$$

La combinación de estos dos parámetros lleva al número de Ursell, definido como:

$$Ur = \frac{\delta_r}{\mu_l^2} = \frac{HL^2}{d^3} \quad (1.3)$$

Este parámetro es una medida de relativa importancia de la no linealidad y la dispersividad, que son relevantes a la hora de distinguir entre 3 diferentes tipos de teorías de oleaje. La aproximación teórica de oleaje adecuada para el estudio de ondas largas depende del valor de este parámetro.

Si  $U_r \ll 0$  corresponde a ondas de aguas someras lineales.

Si  $U_r = 0$  ecuaciones de Boussinesq

Si  $U_r \gg 0$  ondas de aguas someras no lineales

Sin embargo, es muy difícil en la práctica, seleccionar una teoría de oleaje adecuada que abarque todos los componentes del espectro incidente. Debido a esto, las recientes investigaciones se han enfocado al desarrollo de modelos unificados que describan la propagación del oleaje totalmente no lineal desde aguas profundas hasta aguas someras.

### 1.1.3. Rotura del Oleaje

En la zona de rompiente la rotura del oleaje se produce por la disminución de la profundidad (Short, 1999). El mecanismo de rotura permite que la velocidad horizontal de las partículas de agua sea mayor que la velocidad de la fase de la onda. Por consiguiente, el frente de ola se peralta y se desarrolla un frente turbulento donde las partículas de agua caen bajo éste.

En el proceso de rotura se pueden identificar dos tipos de movimientos: rotacional e irrotacional. Durante el peraltamiento, el volteo y la formación del chorro se tiene un movimiento irrotacional. En el cierre del chorro con la parte inferior de la superficie del agua se forma un flujo bifásico, es decir, cuando la onda cae el fluido queda conectado por dos partes. El movimiento en ese instante es irrotacional, pero el gradiente es diferente de cero, lo que topológicamente induce una circulación (rotación) alrededor de la cavidad. Esta cavidad que se genera en el interior de la onda colapsa rápidamente, mientras se mezcla con el agua. El resultado final es una región con movimientos en forma de vórtices y una alta concentración de burbujas que se levantan en la superficie (Battjes, 1998).

## CAPÍTULO 1. ASPECTOS FUNDAMENTALES

Durante el proceso de rotura una gran cantidad de energía es liberada y se convierte en turbulencia. La turbulencia disipa la energía del oleaje con la consecuente disminución de la altura de ola a medida que decrece la profundidad. La rotura causa la generación de movimientos de corto y largo periodo dentro de la zona de rotura.

El punto de rotura se define como el sitio donde inicia la disipación de energía (Singamsetti y Wind, 1980). Dada la dificultad para medir este lugar, aún con experimentos, se adoptan otras definiciones que solo tienen en cuenta las propiedades externas del oleaje. La definición más ampliamente utilizada describe al punto de rotura como la localidad donde la altura de ola alcanza su máximo ( $H_{max}$ ). Otra definición lo sugiere como la relación entre la altura de ola y la profundidad  $(\frac{H}{d})_{max}$ . La altura a la cual rompe la ola se relaciona con la profundidad por el índice de rotura  $\gamma_r$ , definido como:

$$H_b = \gamma_r h_b \quad (1.4)$$

donde,  $H_b$  es la altura de la ola en la rotura y  $h_b$  profundidad del agua en el punto de rotura.

De acuerdo con (Singamsetti y Wind, 1980) cuando la relación  $\frac{H_b}{h_b}$  supera el índice de rotura ( $\approx 0.15$ ) la ola rompe.

Los estudios de laboratorio han demostrado que el índice de rotura incrementa con el gradiente de la playa y disminuye con el peraltamiento de la ola. En los ensayos llevados a cabo con oleaje monocromático el punto de rotura es constante dado que todas las olas poseen la misma altura de ola y en consecuencia rompen a la misma profundidad. Sin embargo, en una playa natural el oleaje es irregular y el punto de rotura se mueve hacia la playa o hacia el mar en función de la altura de ola. Cuando se considera oleaje irregular, la relación se expresa como:

$$H_{rms} = [\gamma_r] h_b \quad (1.5)$$

donde,  $[\gamma_r]$  varía entre 0.3 y 0.6 en playas naturales. Este es el índice de rotura aleatorio y es considerablemente menor que uno para oleaje irregular.

Cuando el oleaje se aproxima a la playa, su longitud  $L$  decrece y su altura puede aumentar, causando que el peralte de la ola  $\frac{H}{L}$  se incremente. El oleaje rompe cuando alcanza el límite de peraltamiento que es función de la profundidad relativa  $\frac{d}{L}$  y la pendiente de la playa  $\tan(\beta)$ .

### 1.1.4. Tipos de Rotura

El tipo de rotura se refiere a las diferentes formas como la ola cae una vez llega al punto límite de peraltamiento. Estos se describen de acuerdo a la clasificación dada por Galvin (1968): descrestamiento, voluta, colapso y oscilación. En la rotura por descrestamiento la cresta de la ola es inestable y se forma en ella una superficie con burbujas de aire. En la voluta la cresta se ondula y se precipita súbitamente sobre la base de la ola formando una gran salpicadura. La rotura por colapso se caracteriza porque en su avance la ola se mantiene esbelta sin romper hasta que llega al punto límite donde finalmente rompe; se forma una superficie irregular y

turbulenta. Finalmente, la rotura en oscilación ocurre muy cerca de la playa; en esta zona la lámina de agua es delgada y puede presentar un pequeño rompimiento cuando avanza sobre la zona de lavado y se encuentra con el flujo en descenso.

El tipo de rotura se puede correlacionar con el número de Iribarren ( $\xi_0$ ), definido como:

$$\xi_0 = \tan\beta \left( \frac{H_0}{L_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.6)$$

donde el subíndice denota la condición de aguas profundas (Galvin 1968, Battjes 1974).

Cuando se tiene una playa con pendiente uniforme, el tipo de rotura (Battjes 1974, Galvin 1968) se puede estimar a partir de:

Oscilación / colapso  $\xi_0 < 3.3$

Voluta  $0.5 < \xi_0 < 3.3$

Descrestamiento  $\xi_0 < 0.5$

De acuerdo con los valores dados para el número de Iribarren, la rotura por descrestamiento se da para un oleaje muy esbelto propagándose sobre una pendiente de playa suave; la voluta se presenta cuando olas moderadamente peraltadas arriban a una costa con una pendiente pronunciada; el rompimiento por colapso y oscilación se produce en condiciones donde las olas no tienen mucha inclinación y viajan sobre una plataforma continental con alta pendiente.

De acuerdo a Divoky, Le Méhauté y Lin (1970) la rotura por descrestamiento difiere muy poco del oleaje que no rompe, forma menos turbulencia en el fondo y por lo tanto genera menor efecto en el transporte de sedimentos por suspensión en comparación con el colapso y la voluta. Dentro de los 4 tipos de rotura, la voluta es la que genera un mayor movimiento local de fluido en el fondo, ya que la cresta se precipita en forma de chorro. La magnitud y dirección del viento tienen gran influencia en el rompimiento del oleaje. Así lo demostró Douglass (1990) quien pudo verificar que los vientos que se mueven desde el continente hacia la playa hacen que las olas rompan y se descresten en aguas profundas, mientras que los vientos que provienen desde mar adentro inducen la rotura en aguas someras, donde las olas rompen en voluta.

Para los criterios de rotura se han desarrollado diversas formulaciones con el objetivo predecir la altura de ola ( $H_b$ ) alcanzada en la rompiente. Se utiliza con frecuencia el índice de rompiente para describir la altura de ola unidimensional de la onda; éste se clasifica en dos. El índice de profundidad de rompiente,

$$\gamma_r = \frac{H_b}{d_b} \quad (1.7)$$

donde  $d_b$  es la profundidad de la rompiente.

Y el índice de altura de rompiente, definido de la siguiente manera:

## CAPÍTULO 1. ASPECTOS FUNDAMENTALES

$$\Omega_b = \frac{H_b}{H_0} \quad (1.8)$$

La rotura del oleaje está señalada bajo diferentes enfoques. Una de ellos la define como el punto donde se alcanza la máxima altura de ola (Singamsetti y Wind, 1980). Otros la precisan como el punto donde el frente de la ola se vuelve vertical (voluta) y luego se produce la formación de burbujas de aire en la cresta (descrestamiento).

Los primeros estudios que abordaron el problema de la rotura del oleaje, se basaron en el análisis de una onda solitaria. En 1891, McCowan determinó que el índice de profundidad de la rompiente es  $\gamma_b = 0.78$  para una onda solitaria que se propagaba sobre un fondo horizontal. Este valor se utiliza generalmente en la ingeniería práctica para realizar una estimación inicial del índice de rotura. Munk (1949) desarrolló una expresión adicional para determinar el índice de profundidad de la rotura para una onda solitaria, como:

$$\Omega_b = 0.3 \frac{H_0^{-\frac{1}{3}}}{L_0} \quad (1.9)$$

Con la experiencia adquirida, surgieron con el tiempo estudios adicionales basados en el análisis de ondas periódicas. Dentro de estos, se encuentran los trabajos desarrollados por Iversen (1952), Goda (1970), Weggel (1972), Singamsetti y Wind (1980), Sunamura (1980), Smith y Kraus (1991) y otros, quienes establecieron que los índices de rotura son función de la pendiente de la playa y de la esbeltez de la onda incidente.

Wegel (1972) desarrolló una ecuación para el índice de profundidad de rompiente a partir de datos obtenidos de laboratorio para una onda monocromática que rompía sobre un talud plano y liso.

$$\gamma_r = b - a \frac{H_b}{gT^2} \quad (1.10)$$

Para  $\tan\beta \leq 0.1$  y  $\frac{H_0}{L_0} \leq 0.06$ , donde T es el periodo, g es la aceleración de la gravedad, y  $H_0$  es equivalente a la altura de ola en aguas profundas no refractada. Los parámetros a y b son funciones empíricas de la pendiente de la playa, dada por:

$$a = 43.8 (1 - e^{-19\tan\beta}) \quad (1.11)$$

$$b = \frac{1.56}{1 + e^{-19\tan\beta}} \quad (1.12)$$

Komar y Gaughan (1973) desarrollaron una relación semi-empírica para el índice de altura de la rotura a partir de la teoría lineal

$$\Omega_b = 0.56 \left( \frac{H_0}{L_0} \right)^{-\frac{1}{5}} \quad (1.13)$$

El valor de 0.56 se obtuvo de datos experimentales de laboratorio y de datos de campo.

Para oleaje irregular, la rotura de las olas se genera en una amplia zona, semejante a ondas individuales con diferentes valores de periodo y altura. En la región de saturación, es decir, el punto donde rompen todas las olas, la altura de ola se puede relacionar con la profundidad local ( $d$ ) así:

para la altura de ola media cuadrática.

$$H_{rms,b} = 0.42d$$

para la altura de ola del momento de orden cero.

$$H_{mo,b} = 0.6d$$

Se espera alguna variabilidad en  $H_{rms,b}$  y  $H_{mo,b}$  con respecto a la esbeltez de la ola y la pendiente de la playa. El modelo numérico de transformación de oleaje espectral STWAVE (Smith et al. 2001) utiliza el criterio modificado de Miche (1951). Ambas expresiones representan la profundidad y el peraltamiento inducido por el rompimiento de la ola.

El modelo numérico NMLONG (Numerical Model of the LONGshore current) desarrollado por Larson y Kraus (1991) calcula la rotura y el decaimiento de oleaje mediante la aproximación de una onda solitaria, aplicando el modelo de abatimiento de olaje de Dally, Dean y Darlymple (1985) para oleaje irregular y monocromático. La principal hipótesis del modelo es que el oleaje y la batimetría deben ser uniformes en la dirección longitudinal de la playa, mientras que el perfil transversal puede ser irregular. El modelo utiliza sólo un periodo y dirección del oleaje, además aplica la distribución Rayleigh a la altura de la ola en la zona de surf.

### 1.1.5. Método de Similitud

Este método se utiliza para determinar la altura de ola a través de la zona de surf suponiendo constante la relación altura de ola - profundidad en el punto de rotura.

$$H_b = \gamma_r d_b \tag{1.14}$$

También referido a rompimiento por saturación ha sido utilizado satisfactoriamente por Longuet - Higgins y Stewart (1963) para calcular la elevación del nivel medio por acción del oleaje (setup), por Bowen (1969a), Longuet - Higgins (1970 a,b) y Thornton (1970) para calcular las corrientes a lo largo de la playa. Este técnica se aplica solo a profundidades que decrecen de forma constante en la zona de surf y arroja buenos resultados para playas con una pendiente aproximada de 1/30. Para playas con pendientes muy pronunciadas la ecuación 1.14 tiende a subestimar las alturas de ola, mientras que para pendientes muy suaves sobreestima la altura de ola; además se basa en la suposición de que la altura del oleaje para el nivel medio del mar es cero.

En la zona de surf se utiliza la distribución de altura de ola como método estadístico para describir la transformación del oleaje hasta la costa. Generalmente es representada con otro

tipo de distribución, la distribución tipo Rayleigh truncada (Collins, 1970; Battjes, 1972; Kuo y Kuo, 1974; Goda 1975). Battjes y Janssen (1978), Thornton y Guza (1983) definen la disipación de energía producto de la rotura como:

$$\delta_r = 0.25\rho g Q_b f_m (H_{max})^2 \quad (1.15)$$

donde  $Q_b$  es el porcentaje de rotura de la ola,  $f_m$  es la frecuencia de oleaje media, y la altura máxima de la ola se basa en el criterio de Miche (1951)

$$H_{max} = 0.14L \tanh(kd) \quad (1.16)$$

donde  $ko$  es el número de onda.

Battjes y Janssen basan el porcentaje de rompimiento de la ola a una distribución tipo Rayleigh truncada en  $H_{max}$ . La especificación de la altura de ola máxima en términos del criterio de Miche tiene la ventaja de que proporciona resultados razonables del peraltamiento límite del oleaje así como de la profundidad límite de rotura (Smith et al. 1997).

## 1.2. Estudio del Movimiento del Fluido

El movimiento de un fluido Newtoniano se encuentra determinado por las ecuaciones de Navier-Stokes, que constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sin solución analítica. Para la resolución numérica del sistema de ecuaciones es posible utilizar diferentes metodologías. La primera y más completa consiste en la simulación numérica directa (*Direct Numerical Simulation*) que resuelve todas las escalas del movimiento del fluido. Tal precisión viene adscrita al uso de una malla tan fina que debe abarcar los vórtices de menor tamaño, conduciendo a pasos temporales demasiado lentos, que en última instancia hacen del empleo de ésta técnica un elemento inabordable en los casos de interés práctico.

Un segundo enfoque consiste en resolver únicamente los remolinos de gran tamaño (*Large Eddy Simulation*) simulando el efecto de aquellos que tienen menor dimensión, en cuyo caso no pueden ser resueltos con un determinado tamaño de malla. Este proceso se puede traducir como un filtrado del sistema algebraico, donde las ecuaciones de gobierno son manipuladas para que contengan sólo las componentes de mayor tamaño. Para ello se introducen unos términos de tensión que representan la interacción entre ambas escalas de movimiento y su cualidad principal es el hecho de tener un efecto disipativo. El efecto de las tensiones mencionadas es calculado a través de diferentes modelos, conocidos en la literatura como modelos de escala de sub-malla (SGS, *Subgrid Scale Models*) y se basan en los trabajos realizados por Smagorinsky. La ingeniería práctica comúnmente no exige el conocimiento de todos los detalles del flujo, solo de algunas propiedades, como la distribución de la velocidad, el campo de presiones, etc.

La última perspectiva de estudio es una aproximación menos costosa numéricamente que las anteriores y reproduce resultados bastante eficientes y que se ajustan con precisión con los datos reales. Estos modelos de turbulencia se basan en las ecuaciones de Reynolds que son



obtenidas mediante el promediado temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*). Las aproximaciones RANS han sido elegidos para el estudio de la rotura del oleaje y se presentan en el capítulo 4.

El promedio temporal de las variables conservativas produce, de manera similar a los modelos LES, unos términos de tensión conocidos como las tensiones de Reynolds. El cálculo de estos esfuerzos se puede llevar a cabo a través de la estimación de la viscosidad turbulenta, para lo cual es necesario el empleo de un modelo de turbulencia. Los modelos de turbulencia existentes en la literatura se exponen en el capítulo 3.

### 1.3. Número de Dimensiones del Modelo

Los modelos que se citan en el apartado anterior tienen en cuenta el movimiento de las partículas del fluido en las tres direcciones espaciales. En el caso de fluidos que contienen superficie libre, esta representa una frontera más junto con el fondo y los contornos laterales.

Este proyecto es factible representarlo en tres dimensiones pero el grado de complejidad de este tipo de modelos hace de ellos una tarea ardua y difícil de abordar incluso para dominios relativamente sencillos. Se tienen a diferencia de los últimos los modelos de una dimensión. Para fenómenos específicos, como el movimiento del flujo en un canal o la propagación del oleaje hacia la costa, resultan ser muy eficientes. Un problema que se tiene con los modelos unidimensionales es su limitación en cuanto al efecto de cambios de dirección del flujo. Como en este caso solo se realiza el estudio de una ola propagándose hacia la costa, se supone que no habrá cambios de dirección y se selecciona el modelo unidimensional para el estudio de la rotura del oleaje.

### 1.4. Técnicas de Discretización

En el tema referente a la discretización espacial de las ecuaciones, la mayor parte de los modelos empleados en la dinámica de fluidos computacional (*Computational Fluid Dynamics, CFD*), siguen alguna de las siguientes técnicas: a) Diferencias finitas; b) Volúmenes Finitos; c) Elementos Finitos.

El método de diferencias finitas es el más utilizado debido a su antigüedad, aunque en las últimas décadas ha perdido aplicación debido a su poca flexibilidad desde un punto de vista geométrico. Generalmente, esta metodología es aplicada a mallas estructuradas. Su implementación es relativamente sencilla y permite desarrollar con facilidad nuevos esquemas numéricos que pueden ser generalizados a varias dimensiones y ser migrados a las formulaciones de volúmenes finitos. En el capítulo 5 se hace una descripción más detallada de esta metodología.

La formulación en volúmenes finitos es quizás la más ampliamente utilizada en la actualidad, especialmente en los modelos utilizados para aguas someras y en modelos que solucionan las ecuaciones en tres dimensiones. Su versatilidad permite la aplicación a mallas tanto

estructuradas como no estructuradas y la forma de volúmenes elementales puede ser muy variada. Su flexibilidad y sencillez conceptual explican la aceptación que posee. Cuando se aplica a problemas de una sola dimensión, su funcionamiento es equivalente al método de diferencia finitas y, en función de la malla utilizada se puede llegar a emplear a un número de dimensiones mayor.

La principal propiedad del método de elementos finitos se debe a su riguroso fundamento matemático que permite una estimación del error con antelación. Desde un punto de vista conceptual es más complejo que los métodos anteriores y desde un sentido físico es menos comprensible, conservando la misma flexibilidad de aplicación a geometrías complejas que el método de volumen finito.

### 1.5. Ecuaciones Promediadas de Reynolds (RANS)

Muchos modelos numéricos basados en las ecuaciones de Boussinesq se han efectuado para modelar el oleaje en la zona de surf con la implementación empírica de la rotura. En el dominio de tiempo de los modelos Boussinesq, los remolinos en la superficie (Schäffer et al. 1993) y la viscosidad de vórtices se utiliza para representar la rotura y, su efecto en la disipación de energía. La rotura para una onda individual se basa en la velocidad de la cresta y la pendiente de la superficie del agua. Estos modelos representan exactamente la variación temporal, el perfil no lineal de oleaje y la profundidad media de la corriente.

La Simulación de Grandes Vórtices (Watanabe y Saeki 1999; Christensen y Deigaard 2001) se utiliza para el estudio de campos de flujo turbulentos tridimensionales generados por el rompimiento de oleaje. De acuerdo con Nadaoka, Hino y Koyano (1989), estos modelos pueden representar los vórtices oblicuos generados por la rotura del oleaje, que a su vez incrementan la intensidad de la turbulencia, la viscosidad de remolino y los esfuerzos cortantes cerca al fondo. Los resultados de estos modelos sirven para explicar los modelos de transporte de sedimentos para los tipos de rompimiento de voluta y descrestamiento (Wang, Smith y Ebersole 2002). Sin embargo, los modelos de turbulencia a gran escala a pesar de que son buenas herramientas para la investigación, requieren grandes recursos computacionales para cortas simulaciones.

Como última opción se tienen las ecuaciones RANS, que a diferencia de las anteriores han sido la más utilizadas en las últimas décadas con el desarrollo de modelos de diferente complejidad. Esta técnica se basa en reemplazar en las ecuaciones de Navier - Stokes el valor instantáneo de la velocidad por la suma de su valor medio más una fluctuación, y posteriormente promediar en el tiempo las ecuaciones resultantes. La desventaja que presenta esta técnica es que al final se obtienen más incógnitas que ecuaciones, conocido con el nombre de problema de cierre de la turbulencia, donde es necesario establecer dos ecuaciones adicionales para que el sistema sea dimensional.

Este problema se resuelve: 1) Suponiendo que los vórtices del proceso de mezcla y transporte turbulento poseen una dimensión y velocidad característica. 2) Se procede al cálculo de estas escalas a nivel espacio temporal. Este procedimiento se efectúa a través de modelos de dos

ecuaciones o de segundo orden, donde el más utilizado es el modelo de turbulencia  $k - \epsilon$ .

Este modelo fue propuesto por Kolmogorov (1942) y Prandtl (1945) y se basa en desarrollar una ecuación adicional de transporte para la energía cinética turbulenta  $k$  y otra para la disipación de la turbulencia  $\epsilon$ . Físicamente  $k$  se puede asociar a una velocidad y al combinarse  $k - \epsilon$  se obtiene una variable que se asimila a una longitud. A partir de estas dos variables se pueden estimar las incógnitas adicionales que resultan de promediar temporalmente las ecuaciones de Navier - Stokes. El desarrollo de estas ecuaciones se puede realizar de forma analítica pero por cuestiones prácticas la mayoría de sus términos resultan del empleo de coeficientes empíricos (Rodi, 1984).

El primer intento de un modelo numérico de oleaje que resolviera las RANS fue desarrollado por Lemos (1992). Heinrich (1992) modificó el modelo VOF2D el cual es un modelo de superficie libre no lineal bidimensional. Este modelo se basa en las ecuaciones de Navier - Stokes y estudia la generación, propagación y flujo máximo de ascenso de tsunamis creados por movimientos de masa, pero no considera los efectos de turbulencia. Heinrich compara sus resultados con experimentos hechos por su autoría, donde observa resultados razonables excepto en zonas donde es importante la turbulencia inducida por el rompimiento del oleaje. La rotura bidimensional de ondas ha sido estudiada mediante el método MAC (Marker an Cell) (Johnson *et al.*, 1994) y el volumen de fluido (VOF) (Ng y Kot, 1992).

Chen y Lee (1996) emplean simulaciones numéricas con modelos basados en las ecuaciones RANS que tienen en cuenta efectos no lineales y viscosos. Weymouth *et al.* (2005) utilizan dichos modelos para analizar el cabeceo y el giro de botes. La finalidad de todas estas simulaciones es analizar la hidrodinámica de embarcaciones y su posterior aplicación en el diseño de éstas.

Miyata *et al.* (1996) y Kawamura (1998) presentan modelos numéricos para el estudio tridimensional de ondas generadas por barcos, mediante la simulación de una superficie libre uniforme pasando a lo largo de un cilindro vertical. Sin embargo, el proceso dinámico cuasi estacionario de las ondas generadas por barcos es muy diferente al proceso de la rotura del oleaje en la zona de rompiente.

Más tarde, [?] mejoran el modelo de Lemos con el objeto de simular la rotura por descrestamiento y voluta del oleaje en la zona de rompiente. Los resultados de estas modelaciones fueron comparados con datos de laboratorio por Ting y Kirby (1995, 1996). [?] Lin y Liu (1998 a) muestran que la rotura en descrestamiento y voluta del oleaje en la zona de rompientes puede modelarse en dos dimensiones mediante las ecuaciones promediadas de Reynolds (RANS), acopladas con un modelo de cierre de la turbulencia del tipo  $k - \epsilon$ , de segundo orden. Su modelo numérico simula la rotura de olas y flujos con fuerte variación tanto espacial como temporal. El modelo llamado COBRAS (Cornell Breaking - Waves and Structure), ha sido aplicado a diversos problemas de someramiento, rotura y runup, así como problemas de interacción onda - estructura con contornos semi-cerrados. Sin embargo, hasta el momento se ha hecho muy poco trabajo en el modelado tridimensional del proceso de rotura y condiciones de radiación al infinito.

## CAPÍTULO 1. ASPECTOS FUNDAMENTALES

El modelo de rotura ha sido extendido para investigar la interacción del oleaje con estructuras de protección incluyendo el proceso de rotura (Liu et al. 1999). Las estructuras consideradas pueden ser sumergidas o emergidas.

Grilli y Watts (1999) adoptaron el método de la ecuación de frontera integrado (BIEM, por sus siglas en inglés) basado en la teoría de flujo potencial, y desarrollaron un modelo totalmente no lineal para ondas generadas por movimientos de masa. Sin embargo, su aproximación no tiene en cuenta la rotura del oleaje la cual es muy importante en las vecindades de la zona de generación, así como las zonas donde se presenta el runup.

Desde entonces un gran número de estudios fueron desarrollados para modelar el oleaje en la zona de rompiente utilizando las mismas aproximaciones pero con diferentes modelos de turbulencia (Bradford, 2000; Mayer y Madsen, 2000).

Lynett y Liu (2002) presentaron un modelo numérico basado en las ecuaciones de onda no lineales integradas en la vertical, el cual incluye efectos de la dispersión de la frecuencia. Su modelo puede simular relativamente bien ondas cortas que pueden ser generadas por movimientos de masa submarinos.

Numerosas aproximaciones han sido realizadas por diversos autores en el desarrollo de las ecuaciones promediadas de Reynolds (RANS). Christensen et al. (2001) realizaron una revisión de las técnicas de muestreo y los modelos numéricos disponibles para la zona de ascenso y de descenso de una playa. Estos logran identificar tres tipos de modelos: modelos tipo Boussinesq que resuelven la fase, modelos promediados en la fase y modelos tipo Navier - Stokes.

Chang y Scotti (2004) modelan flujos turbulentos inestables sobre ondulaciones de fondo de pequeña escala. La simulación la hacen comparando los resultados arrojados por el modelo Wilcox's, basado en las ecuaciones RANS, acoplado contra un modelo de cierre de turbulencia  $k - \omega$ , teniéndose como resultado que éste es mejor que los modelos  $k - \epsilon$  en regiones donde se tienen fuertes gradientes de presión (Guizien et al., 2003) y el modelo LES (Simulación de vórtices a gran escala) que emplea un modelo de viscosidad de remolino bajo el enfoque Lagrangiano. Los resultados se discuten en relación al problema de transporte de sedimentos. La comparación de los resultados indicaron que el modelo LES es más preciso para modelar este tipo de flujos, ya que el modelo basado en las ecuaciones RANS no es apropiado para simular la suspensión y el transporte de sedimentos debido a que no modela apropiadamente la física del flujo cuando las cantidades turbulentas no están en equilibrio o cerca a éste (Scotti y Piomelli, 2002). Concluye también que los modelos RANS proveen una descripción correcta del campo de velocidades al tener en cuenta apropiadamente las componentes advectivas. Guizien et al. (2003) propuso una modificación al modelo RANS que toma en consideración los efectos del flujo inestable, aunque aún se tienen discrepancias significativas con respecto a los resultados experimentales.

D Yuk et al. (2005) modifican el modelo COBRAS para modelar la generación de ondas

## *CAPÍTULO 1. ASPECTOS FUNDAMENTALES*

producidas por movimientos de tierra; adicionalmente a las bondades de este modelo que son la simulación de la turbulencia por rompimiento de oleaje, el runup y rundown.

## *CAPÍTULO 1. ASPECTOS FUNDAMENTALES*

# 2

---

## El Modelado Matemático del Oleaje

### 2.1. Introducción

El oleaje es generado fundamentalmente por la acción del viento en aguas profundas. Otras posibles fuentes generadoras son las fuerzas de atracción astronómicas como las mareas, las ondas generadas por los sismos (tsunamis) o las erupciones volcánicas. Las ondas generadas en la superficie del mar requieren de fuerzas restauradoras para que sea posible su propagación, siendo en la mayoría de los casos la atracción gravitacional la principal fuerza restauradora. En aguas profundas las ondas generadas por la acción del viento no son afectadas por la batimetría. En regiones costeras, pueden surgir en el oleaje complejas transformaciones ahunadas al efecto combinado de fenómenos como el someramiento, la refracción, la difracción y la rotura del oleaje.

En profundidades indefinidas la altura de ola y el periodo son las componentes principales a la hora de realizar un diseño. Las aplicaciones prácticas comprenden desde la maniobrabilidad de los buques, las condiciones de operación de las grandes estructuras ubicadas en estas regiones, como son las embarcaciones de almacenamiento de producción flotante (FPSO, *por sus siglas en inglés*), hasta terminales o aeropuertos flotantes en zonas con climas marítimos severos. Para el establecimiento de los diseños mar adentro, el principal mecanismo analizado es la difracción del oleaje debido a que la profundidad del océano es mayor comparada con la longitud de la onda. En zonas menos profundas se pueden activar transferencias no lineales de energía a través de las componentes armónicas cuando el oleaje se propaga sobre cambios abruptos en la topografía. Este tipo de situaciones son las que hacen del entendimiento del oleaje en aguas someras una tarea más compleja respecto a su estudio en aguas profundas.

Para el diseño de una obra marítima, su construcción y operación, se requiere de un estudio detallado de las acciones hidrodinámicas actuantes. En virtud de esto, surge la necesidad de caracterizar el oleaje desde aguas profundas a partir de la información existente de datos instrumentales, visuales o datos obtenidos mediante simulación numérica. Los datos instrumentales son adquiridos principalmente por boyas de oleaje y tienen la ventaja de proporcionar información con muy buena calidad. Los datos visuales, obtenidos de manera constante y ordenada desde los años 50, son un medio empírico de obtener información sobre la altura de ola, periodo y dirección de los estados de mar. Este tipo de información tiene la ventaja de poseer series de datos bastante amplias, sin embargo, posee la limitante de no caracterizar los episodios con mayor contenido energético por el peligro que esto supone para la navegación. Cuando no es posible estimar la información de forma visual o instrumental,

es posible representar el oleaje a partir de información meteorológica mediante el uso de modelos numéricos de predicción de oleaje. La simulación numérica en la actualidad, se convierte cada vez más en una herramienta imprescindible tanto en investigación como en diseño, no olvidando el hecho de que requiere la calibración de los modelos utilizados. La gran desventaja es el alto costo computacional que suponen.

El estudio del oleaje en todos sus aspectos requiere del apoyo de la modelación numérica como herramienta necesaria para analizar y entender muchos de los procesos que ocurren en una playa, o bien, para el análisis del clima marítimo en un área de interés (por la complejidad de la medición en campo o por las limitaciones que representan los modelos a escala en el laboratorio). La necesidad de estimar el oleaje como dato de entrada para alimentar modelos de propagación o rotura, ha dado lugar al desarrollo acelerado de la modelación numérica en ingeniería costera en los últimos 20 años, permitiendo el surgimiento de modelos unificados utilizados en el estudio de ondas transitorias.

### **2.2. Modelado del Oleaje**

Desde la aplicación de la teoría del rayo, utilizada para determinar las características del oleaje hace ya varias décadas, en la actualidad los métodos computacionales se han convertido en el medio ideal a partir del cual los ingenieros pueden emplear modelos numéricos sofisticados para establecer todos los aspectos relacionados con el oleaje. Los modelos numéricos se basan en diferentes ecuaciones, condiciones de contorno y esquemas numéricos, que llevan inherentes diversas limitaciones a la hora de establecer su aplicabilidad a casos particulares. Esto conduce a la necesidad de clasificar los modelos de acuerdo con la forma como se va a abordar el estudio del oleaje. Existen los modelos utilizados para la transformación del oleaje que resuelven la fase, cuyas ecuaciones de gobierno se basan en los principios de conservación de la masa y el momento estacionarias integradas en la vertical. Como complemento de los anteriores, se utilizan también los modelos promediados en la fase que se basan en la conservación de la energía espectral. La aplicación de los modelos que resuelven la fase se limita a áreas pequeñas mientras que los modelos promediados en la fase pueden aplicarse a áreas mucho mayores.

Los esfuerzos de los últimos años en el estudio de la dinámica de fluidos computacional han sido conducidos hacia el desarrollo de modelos capaces de describir la propagación transitoria de ondas completamente no lineales desde profundidades indefinidas hasta aguas más someras, con lo que se tiene un área de estudio bastante amplia. Existen diferentes tipos de modelos que pueden ser utilizados para el estudio del oleaje: a) Modelos analíticos; b) Modelos empíricos; c) Modelos Físicos; d) Modelos numéricos. Cada una de las técnicas mencionadas tienen ventajas y limitaciones que hacen de su empleo una gran herramienta para diversas aplicaciones.



### 2.2.1. Modelos Analíticos de Oleaje

Un modelo físico a escala real es una tarea práctica muy compleja de adoptar, pues difícilmente se logran reproducir con exactitud los fenómenos que se presentan en el medio físico, por su magnitud y por el costo económico que representan. Una vía que permite representar el oleaje por medios analíticos es un modelo teórico simple, cuya característica fundamental es la propiedad de englobar las características más importantes del fenómeno que está representando. Este tipo de modelos generalmente se expresan mediante ecuaciones matemáticas descritas en forma de ecuaciones diferenciales parciales o ecuaciones diferenciales ordinarias, donde los modelos en cuestión, contienen las ecuaciones de gobierno que exponen la relación espacio-temporal de las cantidades conservativas más importantes del oleaje. Un modelo teórico respetable se encuentra constituido por ecuaciones matemáticas rigurosas, presentando de forma clara las hipótesis físicas, matemáticas y las implicaciones que éstas tienen en la representación del fenómeno. Generalmente, el desarrollo del sistema de ecuaciones obedece a una condición específica, llegando a una solución cerrada, utilizada para predecir el comportamiento de forma exacta del fenómeno del oleaje. El procedimiento de búsqueda de la solución que describe el modelo analítico es una poderosa herramienta que permite llegar al entendimiento físico de los procesos asociados al oleaje.

### 2.2.2. Modelos Empíricos de Oleaje

Este tipo de metodología corresponde a una expresión matemática simple que resume las características del prototipo. Este procedimiento describe el comportamiento en términos de ecuaciones algebraicas simples y contienen parámetros asociados a las variables físicas que permiten materializar el proceso que se desea encontrar. La característica fundamental de estos modelos es la simplicidad, lo que ha conducido a que sea una de las técnicas más implementadas en la ingeniería de diseño. En la modelación empírica del oleaje, son empleadas ecuaciones que pueden ser utilizadas para estimar, por ejemplo, las cargas máximas sobre una estructura, el coeficiente de reflexión para un tipo de estructura en particular o el run-up en una playa. La desventaja del método radica en que la formulación desarrollada para un problema conocido solo es posible aplicarlo para este aspecto en particular, en caso de realizar un nuevo prototipo para otro problema diferente, las anteriores ecuaciones pueden perder validez.

### 2.2.3. Modelos Físicos de Oleaje

En ciertas ocasiones, es necesario construir modelos a escala que permitan llegar a un entendimiento de cómo es el funcionamiento del modelo en la realidad. Este tipo de modelos permite obtener, a partir de mediciones de laboratorio, las características del oleaje. Cuando se tiene la información necesaria, la base de datos obtenida es extrapolada mediante las leyes de similitud hidráulica para estimar lo que realmente sucede con el prototipo. Este procedimiento es conocido como modelado físico del oleaje. Además de su sencillez, permite visualizar y entender importantes procesos físicos a partir del estudio de un modelo más pequeño. En ciertas circunstancias, cuando el sistema a escala real llega a ser muy complejo, un modelo físico que satisface las características más importantes de las leyes de similitud

para el cual dicho modelo fue diseñado y construido puede no ser aplicable en la ingeniería práctica. Otros enfoques deben ser buscados entonces bajo estas circunstancias o cuando el modelo físico estudiado es tan caro y consume tanto tiempo que es poco práctico llevarlo a la realidad (Hughes 1993, Chakrabarti 1994).

### 2.2.4. Modelos Numéricos

Un modelo numérico es la conjunción de una representación matemática de un problema físico de oleaje y una aproximación numérica de las ecuaciones matemáticas que gobiernan el fenómeno. Al comparar este tipo de modelos con los modelos teóricos, la única diferencia que existe es la forma como se llega a la solución del sistema de ecuaciones. Para modelar numéricamente un problema relacionado con oleaje, primero debe seleccionarse el tipo de ecuaciones que representan el fenómeno las cuales son obtenidas de estudios teóricos. En diversas situaciones, se pueden tener más de una ecuación que describa el mismo tipo de fenómeno, que son función de las diferentes aproximaciones hechas al desarrollo teórico desde su concepción. Por otro lado, los modelos de oleaje se pueden aplicar a diferentes tipos de problemas, siempre y cuando las hipótesis básicas del modelo sean válidas.

## 2.3. Tipos de Modelos Numéricos

El movimiento oscilatorio característico del oleaje se puede modelar mediante las ecuaciones de Navier-Stokes que representan los principios de conservación de la masa y del momento lineal. Para la determinación de la evolución de la superficie libre, son requeridas las condiciones de contorno que garantizan la existencia de una interfase y la continuidad del tensor de esfuerzos a través de ésta. La característica principal tanto de las ecuaciones de Navier-Stokes como las condiciones de contorno es su no linealidad. Por tanto, y aunque a veces no se considera la turbulencia, el esfuerzo de cómputo necesario para resolver el problema tridimensional de la propagación de una onda es demasiado alto para que sea práctico en el ámbito ingenieril.

### 2.3.1. Teoría del Rayo

En la búsqueda de una solución que permita reducir el costo computacional, la investigación se ha dirigido hacia el desarrollo de un modelo unificado capaz de propagar el oleaje desde profundidades indefinidas hasta reducidas, incluso dentro de la zona de rompiente. Un ejemplo de ello es la aproximación de la teoría del rayo para ondas infinitesimales propagándose por una batimetría suavemente variable en distancias mucho mayores que la longitud de onda local. Los rayos son calculados mediante la teoría óptico-geométrica que define los rayos mediante una línea tangente al vector del número de onda. Se calcula la variación espacial de la envolvente con base en el principio de conservación de la energía. La discretización numérica puede realizarse paso a paso a lo largo del rayo, con incrementos que no tienen la limitante de ser pequeños en contraste con la longitud de onda característica. Como la base teórica de esta metodología no permite el flujo de energía a través del rayo, pierde su validez cerca de los rayos que se reflejan o refractan, donde se produce la intersección entre estos.

### 2.3.2. Modelos Basados en la Mild-Slope (MSE)

Berkhoff (1972, 1976) y Eckart (1952) propusieron una mejora a la aproximación del rayo introduciendo una teoría para dos dimensiones. Esta teoría se basa fundamentalmente en considerar que los modos evanescentes no son importantes cuando las ondas se propagan sobre una batimetría suavemente variable, excepto en las cercanías de obstáculos tridimensionales. La ecuación se puede utilizar para describir los efectos combinados de la difracción y la refracción tanto para aguas profundas como someras. En muchos casos, se emplea para el estudio de ondas monocromáticas, sin que ello constituya una limitante para su aplicación a oleaje irregular al sumar diferentes componentes armónicas de la onda. El manejo de las ecuaciones de la MSE a topografías con variaciones abruptas y oleaje de gran amplitud también han sido objeto de estudio durante las últimas décadas. La mayoría de las aplicaciones de los modelos MSE están limitadas a la región comprendida desde un punto localizado en aguas profundas hasta otro que se encuentra a una distancia alejada de la línea de costa en un punto donde el oleaje no lineal llega a ser considerable. Una excepción a la regla la constituye la aplicación del modelado en el fenómeno de resonancia en puertos debido a que la profundidad en estos es usualmente grande incluso en sus fronteras. Existen tres diferentes formulaciones derivadas de los modelos MSE, esto es, las de tipo hiperbólico para un campo de oleaje dependiente del tiempo; las ecuaciones elípticas para un campo de oleaje estacionario; una versión simplificada de las ecuaciones parabólicas para un campo de flujo en estado estacionario que poseen una dirección de propagación principal hacia adelante.

### 2.3.3. Modelos Espectrales

Dentro de la clasificación de los modelos conocidos hasta la fecha, son los modelos espectrales los que generalmente se utilizan para simular el movimiento del oleaje a gran escala. Este tipo de herramientas se construye bajo la hipótesis de un estado de mar aleatorio compuesto por un número infinito de componentes lineales, cuya altura de ola es función de la frecuencia y dirección en la cual se propaga el oleaje. Para un tren de ondas individual, la tasa de cambio del flujo de energía se encuentra balanceada por la transferencia de energía entre dichas componentes para diferentes direcciones y diferentes frecuencias, añadiendo la entrada y la disipación de energía al sistema analizado. Los modelos espectrales más representativos y con mayor aplicación a nivel ingenieril son el WAM (WAVE prediction Model, *por sus siglas en inglés*) desarrollado por Hasselmann et al. (1988) y el Wave Watch III desarrollado por Tolman (1999), que son utilizados para modelar las variaciones a gran escala de las alturas de ola en aguas profundas. Este tipo de modelos, acoplados con un buen modelo atmosférico tienen la capacidad de predecir el clima marítimo a nivel global. Además, si son considerados los efectos de la corriente, la acción del modelo espectral puede ser formulada y utilizada para estimar la interacción oleaje-corriente cerca a la costa. El modelo que describe dicha interacción es conocido como SWAN (Simulating Waves Nearshore) desarrollado por Ris et al. (1999).

Si se tiene la capacidad de filtrar la fase de la onda de las ecuaciones, los modelos espectrales pueden llegar a ser utilizados en mallas de cálculo mucho mayores que la longitud de onda, lo que brinda la posibilidad de aplicarlos en áreas muy grandes. En caso contrario, si es

desconocida la fase de la onda, el modelo es incapaz de simular la difracción del oleaje que está estrechamente relacionado con la fase. Es por esto que este tipo de modelos, usualmente son utilizados para brindar información del campo de oleaje lejos de la costa. Una serie de datos detallada de la información del oleaje cerca de estructuras costeras donde la difracción llega a ser importante se deja a la aplicación de otro tipo de modelos.

### 2.3.4. Modelos Boussinesq

Suponiendo que tanto la no linealidad como la dispersión frecuencial son débiles y del mismo orden de magnitud, Peregrine (1967) derivó las ecuaciones de Boussinesq para fondo variable. A pesar de que expresó sus ecuaciones utilizando la velocidad integrada en la vertical como variable dependiente, dichas ecuaciones pueden obtenerse con una estructura similar utilizando como variable la velocidad en el fondo o en la superficie libre. La ecuación de dispersión y la celeridad de la onda derivadas, son algo diferentes para esta segunda versión de las ecuaciones, aunque el orden de magnitud de la exactitud de dichas ecuaciones es la misma.

Cuando se desea modelar las ondas que se propagan hacia la costa con componentes altamente no lineales, los modelos basados en las ecuaciones Boussinesq se convierten en la opción más acertada. Las ecuaciones en que se basa este tipo de modelos son las ecuaciones de Navier-Stokes integradas en la vertical con términos dispersivos que representan de forma parcial los efectos de la aceleración del fluido en la componente vertical. Dado que esta aproximación exige considerar que los efectos de la dispersión frecuencial y no lineales sean débiles, las ecuaciones estándar de Boussinesq no son aplicables en profundidades muy reducidas donde los efectos no lineales empiezan a ser más importantes que los efectos de la dispersión, ni en profundidades indefinidas donde la dispersión frecuencial es del orden de la unidad. Los modelos Boussinesq son válidos desde aguas intermedias hasta profundidades someras justo antes de presentarse la rotura de la ola. En ingeniería se ha tratado de aplicar este modelo un poco más allá de lo que usualmente dicta la teoría y su utilización implica incluso el cálculo del run-up en la zona de lavado. Si a las ecuaciones de gobierno se añaden términos de disipación de energía es posible llegar a una solución aproximada del campo de velocidades durante la fase de la rotura. Además, diversas investigaciones han encaminado sus esfuerzos en la extensión de este tipo de modelos hacia aguas profundas. A diferencia de los modelos espectrales o los modelos basados en las ecuaciones de la pendiente suave (MSE), los modelos Boussinesq no tienen la hipótesis de que el flujo es periódico. Por lo tanto, se pueden aplicar a movimientos inducidos por impulsos, como son la onda solitaria, movimientos inducidos por deslizamientos de tierra y tsunamis.

Cuando las ecuaciones de Boussinesq son formuladas en función de la velocidad promediada en la vertical, dejan de ser válidas cuando la profundidad es mayor que un quinto de la longitud de onda equivalente en profundidades indefinidas. Para poder extender la aplicación a mayores profundidades, se han introducido varias formulaciones modificadas de las ecuaciones de Boussinesq (e.g. Madsen et al. 1991, Nwogu 1993, Chen y Liu 1995). A pesar de que los métodos son diferentes, las relaciones de dispersión de las componentes lineales de esas ecuaciones de Boussinesq son similares, y se consideran como ligeras modificaciones de la

aproximación de Padé, de la ecuación de la dispersión completa para ondas lineales. Las ecuaciones de continuidad y conservación del momento integradas en la vertical pueden expresarse en función del desplazamiento de la superficie libre y del vector horizontal de velocidades.

### **2.3.5. Modelos Basados en las Ecuaciones de Aguas Someras (SWE)**

Para modelar las ondas largas (mareas) o modelar un tsunami, los modelos basados en las ecuaciones de aguas someras son los más utilizados. Comparados con los modelos Boussinesq, los modelos SWE son más sencillos debido a que se acepta que el flujo es uniforme a lo largo de la profundidad y son despreciados los efectos dispersivos. Dentro de las aplicaciones que abarcan estos modelos se encuentran la simulación de tsunamis, mareas de tormenta y flujo en ríos. La principal limitación de estos modelos es que no se pueden aplicar cuando las escalas verticales son mucho mayores que las escalas horizontales. En la teoría clásica de los modelos de Aguas Someras, la aceleración vertical de las partículas de fluido son despreciadas debido a que las aceleraciones son muy pequeñas con respecto a la aceleración de la gravedad. También, la distribución de la velocidad vertical de las partículas se desprecia.

### **2.3.6. Modelos de Presión Hidrostática Cuasi-tridimensionales**

En el cálculo de la circulación oceánica las escalas horizontales son mucho más grandes que las escalas verticales, lo que conduce al conocimiento en diversas ocasiones de la forma como varía la profundidad. A pesar de que la circulación en la dirección vertical es poca, en ciertos estudios se hace necesaria su comprensión, lo que obliga a la formulación de modelos tridimensionales que resuelvan las ecuaciones de Navier-Stokes directamente solo bajo la hipótesis de la presión hidrostática. Bajo esta suposición, el procedimiento de solución de las ecuaciones de gobierno se simplifica y el modelo se puede describir como un cuasi-tridimensional. Los modelos que presentan estas características generalmente resuelven la coordenada  $\sigma$  trazando un mapa de un dominio físico irregular a un dominio computacional regular para facilitar la aplicación de las condiciones de frontera.

### **2.3.7. Modelos Tridimensionales con Turbulencia: Modelos Navier-Stokes**

Para el modelado de problemas en tres dimensiones, es necesario analizar las ecuaciones de Navier-Stokes sin tener en cuenta la hipótesis de presión hidrostática. Estas ecuaciones parten del principio de conservación de la masa y el momento que tiene la propiedad de describir cualquier tipo de flujo de fluidos, incluyendo las ondas. Si a estas ecuaciones se añade un modelo apropiado de turbulencia, es posible obtener un modelo Navier-Stokes con la propiedad de simular complejos problemas de fluidos, como la rotura del oleaje, interacción oleaje-corrientes e interacción oleaje-estructura. Cuando se simula la rotura de una onda, existe la posibilidad de incluir en el flujo la entrada de aire en la superficie libre. Sin ninguna limitación teórica, este tipo de modelo parece ser la mejor opción para modelar cualquier tipo de problemas de fluidos. Sin embargo, la principal limitación de estos modelos es el gran

esfuerzo computacional que supone. En consecuencia, la aplicación de los modelos Navier-Stokes tridimensionales en dinámica de fluidos computacional se encuentra enfocado a la solución de fenómenos locales cerca del punto de interés, por ejemplo, la simulación en la zona de rotura cuando la ola rompe y/o se considera el transporte de sedimentos, o los flujos cerca a la costa o considerando la interacción del oleaje-estructura.

### 2.3.8. Modelos Tridimensionales sin Turbulencia: Modelos de Flujo Potencial

Cuando no es necesario considerar los efectos turbulentos y el espesor de la capa límite es delgado (oleaje sin rotura), las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a la ecuación de Laplace (teoría de flujo potencial). La teoría se aplica a oleaje lineal o no lineal sin rotura y su interacción con grandes cuerpos. La ecuación de Laplace se puede resolver numéricamente con la ayuda de muchos de los métodos numéricos que existen en la literatura. Una de las metodologías más utilizadas es el método de elemento de contorno (BEM), que convierte el dominio de integración a una integración de superficie a partir del teorema de Green. Estos modelos tienen la capacidad de simular oleaje altamente no lineal tanto en aguas profundas como aguas someras. Son muy prácticos y efectivos en la simulación de la transformación del oleaje con profundidad variable, en el modelado de la difracción sobre un obstáculo y en el cálculo de las fuerzas del oleaje sobre una estructura. La limitación de este modelo se halla en que bajo la hipótesis de flujo potencial el flujo tiene que cumplir con la condición de irrotacionalidad. Por esta razón, estos modelos no pueden representar el fenómeno de la rotura o bien la interacción con pequeñas estructuras, donde el flujo puede llegar a ser rotacional. Adicionalmente, el costo computacional del modelado tridimensional utilizando los métodos de elemento de frontera es demasiado alto.

### 2.3.9. Disipación de energía

Las teorías presentadas en cada uno de los modelos se basan en hipótesis de que durante el proceso de transformación de las ondas no se produce disipación de energía. Sin embargo, en la mayor parte de los fenómenos que se producen en la costa, la disipación de energía producida bien por fricción con el fondo o la generada por los procesos de rotura, es muy importante. La ecuación de la pendiente suave puede ser modificada para tener en cuenta estos fenómenos incluyendo una función de disipación de energía que describa la tasa de variación de la energía asociada a la onda. Las funciones de disipación de energía suelen ser definidas de forma empírica de acuerdo con los diferentes procesos de disipación que pretenden ser modelados. En los modelos numéricos basados en las ecuaciones de Boussinesq, la rotura puede ser parametrizada introduciendo un nuevo término en la ecuación de momento integrada en la vertical. Existen diferentes técnicas para representar la rotura en estas ecuaciones, como los modelos basados en la viscosidad de remolino (Zelt 1991, Karambas y Koutitas (1992), Kennedy *et al.* (2000)), mientras que Brochini *et al.* (1992) y Schäfer *et al.* (1993) optan por la implementación de un modelo basado en el concepto de "roller" superficial que se produce en el momento de la rotura en decaimiento (spilling). En este modelo el espesor del "roller" en cada punto y su orientación deben ser datos conocidos. Además, en cualquiera de las dos aproximaciones al problema, es necesario establecer el inicio del proceso de rotura

## *CAPÍTULO 2. EL MODELADO MATEMÁTICO DEL OLEAJE*

con base en ciertas hipótesis. El ajuste entre los resultados numéricos y los datos de la evolución de la superficie libre con respecto a datos de campo y laboratorio es bueno, siempre y cuando se calibren los parámetros añadidos al modelo de rotura. Sin embargo, ninguno de los modelos presentados tiene la capacidad de reproducir adecuadamente el campo de velocidades o estimar con exactitud la distribución espacial de la energía cinética turbulenta. En este caso se hace imprescindible el uso de modelos más específicos para analizar el proceso de la rotura, lo cual será detallado más adelante.





# 3

---

## El Modelado de la Turbulencia

### 3.1. Introducción

El campo de flujo durante el fenómeno de la rotura es turbulento y engloba muchas escalas espaciales y temporales. En primer lugar, con el manejo de las ecuaciones que gobiernan el flujo se debería tener la capacidad de describir el movimiento del fenómeno en cuestión. Sin embargo, dado el carácter aleatorio e irregular del movimiento turbulento es imposible obtener soluciones exactas por medio de métodos computacionales debido al gran número de parámetros que actúan durante el colapso del fluido. No se dispone de herramientas lo suficientemente potentes para realizar este proceso de cálculo. En segundo lugar, en el determinado caso de que fuera posible resolver las ecuaciones al nivel de la microescala, una tarea con el mismo nivel de dificultad, es la estimación del conjunto completo de condiciones de contorno a las cuales se debe someter el sistema de ecuaciones.

Por lo tanto, antes de exponer los métodos para analizar los flujos turbulentos, es necesario indicar los aspectos más relevantes de dicho fenómeno.

### 3.2. Antecedentes

Después de las investigaciones llevadas a cabo por Prandtl, se han realizado numerosos trabajos en este campo. Los primeros modelos de turbulencia se basaban en la hipótesis de longitud de mezcla (Prandtl) que relacionan los términos de transporte a las cantidades locales del flujo medio. Son muy útiles en la simulación de flujos simples donde las ecuaciones de gobierno conforman un sistema ordinario. En situaciones donde se desea obtener modelaciones más generales del flujo, ya no aplican debido a que las ecuaciones de conservación no pueden ser modeladas en el tiempo para este tipo de procedimiento. Aún para los escasos flujos que pudieran ser aplicados estos modelos carecen de aplicabilidad por que requieren de constantes empíricas para diferentes tipos de flujos. Realmente esta limitante fue la que llevó a desarrollar modelos más complejos. Los últimos expresan de forma directa la relación entre los términos de transporte turbulento y las cantidades medias del flujo, donde se emplean la ecuación de transporte para la energía cinética turbulenta y la tasa de disipación turbulenta. Estos trabajos tuvieron que esperar muchos años para ser probados por las carencias computacionales y sólo hasta la década de los 80's las computadoras fueron lo suficientemente potentes para permitir por medio de técnicas numéricas resolver las ecuaciones diferenciales parciales para el flujo medio y modelos de turbulencia más complejos.

### 3.3. Turbulencia

La ingeniería marítima es una de las ramas de la hidráulica que continuamente se enfrenta con flujos turbulentos en muchas de sus aplicaciones prácticas, caracterizados por movimientos aleatorios, inestables y tridimensionales. Esta complejidad del flujo conlleva a que la descripción y desarrollo teórico de los movimientos turbulentos, los fenómenos de transformación de masa, momento y energía sean profundamente complejos, en especial si se estudia el fenómeno de la rotura.

Paradójicamente, a pesar de los grandes avances que se han logrado en los últimos años, los flujos turbulentos no pueden ser calculados con un método exacto. Las ecuaciones que permiten dar un significado físico, dada su precisión, son las conocidas ecuaciones de Navier - Stokes; se desarrollan por medio de procedimientos numéricos que aún en la actualidad son insuficientes para obtener alguna solución práctica en cuanto a flujos turbulentos se refiere. Este inconveniente se debe a las pequeñas escalas que se presentan en el fenómeno de la turbulencia en general. Esto implica que al resolver este tipo de flujos la resolución de la malla debe ser muy fina, del orden de  $10^9$  puntos para cubrir adecuadamente el dominio del flujo. Hasta hace muy poco no se percibía una forma de resolver las ecuaciones para flujo turbulento, por lo que se recurría a métodos empíricos y semiempíricos. Con la ayuda del análisis dimensional los resultados experimentales fueron condensados en ecuaciones empíricas, aunque son muy limitadas pues solo describían el fenómeno de forma general y para geometrías simples. Esto condujo al desarrollo de métodos adicionales basados en las ecuaciones de conservación. Esta metodología, en contraste con la mencionada inicialmente, tiene la ventaja que por tener en cuenta los cambios en la masa, el momento y la energía pueden describir con mayor detalle los movimientos del fluido, adquiriendo con esto mayor validez.

Como consecuencia de la falta de exactitud en la solución total de las ecuaciones de Navier - Stokes y por el desinterés que supone para los ingenieros el resolver las pequeñas escalas del movimiento turbulento, Reynolds desarrolló una aproximación estadística promediando las relaciones de las cantidades conservadas sobre una escala temporal, que abarca ampliamente el flujo turbulento. El proceso de promediar ha traído consigo un nuevo inconveniente debido a que el sistema de ecuaciones resultantes no conforma un sistema cerrado, es decir, igual número incógnitas y ecuaciones dado que aparecen unos términos nuevos que son desconocidos y que representan el transporte medio de masa, momento y energía para el movimiento turbulento. Para cerrar el sistema es necesario ingresar datos de entrada empíricos por medio de dos vías: La primera opción son los métodos integrales utilizados principalmente para capas de esfuerzos delgados (tipo capa límite), generando perfiles empíricos que reducen las ecuaciones a un sistema ordinario. Con este método se logran describir los efectos globales de la turbulencia como por ejemplo, la disipación de energía. El segundo mecanismo que se maneja es la utilización de los métodos de campo que emplean las ecuaciones diferenciales parciales originales y se especifican en éstas los términos asociados a la turbulencia. Para ajustar el sistema de ecuaciones se toma un modelo matemático que tiene en cuenta los procesos de transporte de turbulento, y que se conocen generalmente como modelos de turbulencia. Este tipo de modelos pueden concebir un conjunto de ecuaciones (algebraicas

o diferenciales) por medio de las cuales es posible determinar los términos de transporte de turbulencia para el flujo medio, cerrando con esto el sistema de ecuaciones. Estos no simulan los detalles de la turbulencia, solo se enfocan en los efectos del flujo medio.

Los procesos de transporte turbulento son altamente dependientes de los estados a los que se encuentra sometido el flujo, como las condiciones geométricas de grande y pequeña escala, los efectos de la viscosidad de remolino y de flotabilidad. Los modelos de turbulencia solo dan una descripción aproximada del flujo con unas constantes empíricas particulares, lo que da la ventaja de ser aplicables a un amplio rango de flujos. Lo que se espera comúnmente de los modelos de turbulencia es que tengan buena aproximación con un solo sistema de constantes en una amplia variedad de flujos, aunque los modelos donde las constantes se pueden ajustar para varios flujos son menos robustos que otro en el que se deban efectuar interpolaciones con los datos experimentales.

## **3.4. Modelado de La Turbulencia**

### **3.4.1. Naturaleza de la Turbulencia**

En 1883 Reynolds realizó un experimento que le permitió diferenciar el flujo laminar del turbulento. El primero se caracteriza por ser permanente y porque las líneas de corriente son paralelas a las paredes del conducto por el cual circulan. Reynolds observó que el movimiento solo existe si la velocidad del flujo es pequeña para un caudal dado, formándose una pequeña difusión en la dirección radial debida al transporte molecular. Por el contrario, si la velocidad del flujo o el diámetro del conducto es suficientemente grande el movimiento del fluido se hace sensible a cualquier perturbación, caracterizado por una forma irregular, perdiendo además el carácter estacionario.

La turbulencia es, entonces, un movimiento en forma de remolinos de diferentes tamaños que se mantiene en flujos con altos números de Reynolds. Se identifica por tener movimientos rotacionales que se observan como una serie de vórtices cruzados cuyos vectores de velocidad se encuentran dispuestos en diferentes direcciones expresando alta inestabilidad. Los vórtices grandes se asocian a movimientos de baja frecuencia y sus tamaños son del orden de las escalas de flujo, mientras que los vórtices pequeños son generados por movimientos de alta frecuencia.

Para garantizar la continuidad de un fenómeno físico en una escala espacial y temporal, éste debe ser estable y debe cumplir con las leyes de conservación. Un flujo laminar es estable ante pequeñas perturbaciones dentro de ciertas condiciones. Si esto no sucede, se generan perturbaciones infinitesimales. En algunas situaciones estas perturbaciones crecen hasta cierta amplitud y desarrollan un nuevo estado, que a su vez puede ser inestable frente a otra perturbación del medio y crece hasta otro estado nuevo; finalmente, el flujo se convierte en la superposición de numerosas perturbaciones aleatorias y alcanza una nueva condición, que es lo que se denomina como flujo turbulento. Esta es la sustentación de la aparición de las escalas en el flujo para altos números de Reynolds.

## CAPÍTULO 3. EL MODELADO DE LA TURBULENCIA

Desde un punto de vista matemático, esta inestabilidad del flujo está relacionada con la interacción del término viscoso y de los términos no lineales convectivos. En una modelación es posible ingresar una perturbación a las ecuaciones constitutivas y analizar si la perturbación crece o decae con el tiempo. Se puede llegar a la situación que un flujo sea estable frente a perturbaciones infinitesimales pero inestable a perturbaciones más grandes.

El fenómeno expresado en cuanto a las perturbaciones es lo que genera la inestabilidad de la capa de cortadura. Una capa de cortadura es una región de flujo en la que existen altos gradientes de velocidad y en sus extremos las velocidades son completamente diferentes. En consecuencia se genera una región delgada donde hay un cambio en la magnitud de la velocidad y se puede modelar como una superficie discontinua.

En dicha discontinuidad las velocidades a ambos lados de la capa de cortadura son iguales y opuestas, lo que ocasiona el desarrollo de una ondulación por efecto de dichas velocidades con superficies cóncavas y convexas. Si el flujo se considera estacionario, la aplicación de la cantidad de movimiento indica que una fuerza actúa amplificando las perturbaciones, la capa de cortadura se vuelve inestable y tiende a enrollarse. La ondulación inicial se distorsiona cada vez más y termina convirtiéndose en una serie de vórtices o torbellinos contra-rotantes. Debido a la ausencia de una teoría única en cuanto a la definición de la turbulencia generalmente se describen las propiedades que permiten clasificar un flujo turbulento: irregularidad, tridimensionalidad, difusividad (mixing), disipación, altos números de Reynolds.

### 3.4.2. La Cascada de Energía y las Escalas de la Turbulencia

#### 3.4.2.1. La Cascada de Energía

En el proceso de la turbulencia los vórtices grandes interactúan con el flujo principal extrayendo energía de él. Debido a su inestabilidad y por efecto de la cortadura o interacción entre ellos, se dividen en vórtices más pequeños que a su vez tienden a dividirse. Este proceso de rompimiento se produce en forma de cascada y es el responsable de que en un flujo turbulento exista una gran variedad de escalas correspondientes a diferentes tamaños de vórtices, los cuales son transportados y estirados por la acción de los gradientes de velocidad del flujo medio y por la interacción con los otros vórtices.

#### 3.4.2.2. Escalas de la Turbulencia

La variedad de tamaños que existen en un flujo turbulento se clasifican de la siguiente manera: Macroescala: Se asocia a los vórtices grandes. Las características de estos torbellinos grandes dependen de las condiciones del flujo y presentan un carácter anisotrópico (dependen de la dirección).

Intermedia: Son de tamaño inferior a la macroescala. Aún no presentan disipación de energía.

Microescala: Es la escala más pequeña y es la responsable de la disipación de energía. Los torbellinos son de carácter isotrópico, es decir, el flujo ha olvidado de donde procede.

### 3.4.2.3. Métodos de Cálculo y Análisis de Flujos Turbulentos

Para el cálculo de la turbulencia se pueden aplicar las ecuaciones constitutivas de la Mecánica de Fluidos para un medio continuo, dado que en las escalas más pequeñas y con fluctuaciones más rápidas están varios órdenes de magnitud por encima de las escalas moleculares.

Como se ha mencionado, en la actualidad no es posible la resolución directa de las ecuaciones que gobiernan el flujo, a pesar de que en los últimos años se han logrado avances significativos en el desarrollo de algoritmos específicos que han dado surgimiento a lo que se conoce como dinámica de fluidos computacional (DFC).

La solución directa de las ecuaciones de Navier-Stokes es la manera más precisa de predecir un flujo turbulento. Éstas permiten desarrollar todas las escalas espaciales y temporales del flujo sin promedios ni aproximaciones; los únicos errores provienen de las discretizaciones numéricas.

Dentro del amplio rango de escalas espaciales y temporales de los flujos turbulentos las escalas grandes son las más efectivas en cuanto al transporte de propiedades, mientras que las escalas pequeñas son más débiles y su capacidad de transporte es menor. Comúnmente se intenta simular con mayor exactitud las escalas grandes dando lugar a lo que se conoce como simulación de grandes vórtices o (Large Eddy Simulation, LES, *por sus siglas en inglés*). Debido a la mayor universalidad y homogeneidad de las escalas pequeñas los modelos son más sencillos y no son necesarios muchos ajustes, sin embargo, este tipo de simulación es exigente en cuanto a capacidad y tiempo de cálculo de los computadores.

El tipo de aproximaciones que se utiliza con más frecuencia en aplicaciones de ingeniería para predecir flujos turbulentos son los basados en métodos estadísticos, particularmente los modelos basados en el promediado de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes o modelos RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations, *por sus siglas en inglés*).

## 3.4.3. Conceptos Básicos de los Modelos de Turbulencia

### 3.4.3.1. Concepto de Viscosidad de Remolino

La base fundamental de los modelos de turbulencia expresada en términos de los esfuerzos de Reynolds ( $\overline{u'_i}$ ) se debe al concepto propuesto por Boussinesq (1877) de viscosidad de remolino. Este supone, en analogía con los esfuerzos viscosos en un flujo laminar, que los esfuerzos turbulentos son proporcionales a los gradientes de velocidad media. Este concepto se puede expresar de la siguiente manera,

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t (\partial_j u_i + \partial_i u_j) - \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} \quad (3.1)$$

donde  $\partial_i$  denota la diferenciación con respecto a  $x_i$  y  $z_i$  y  $\partial_t$  la diferenciación con respecto al tiempo  $t$ ;  $\nu_t$  es la viscosidad turbulenta o de remolino, en contraste con la viscosidad molecular  $\nu$ , que no es una propiedad del fluido pero si depende forzosamente del estado de la turbulencia. Este parámetro puede variar significativamente de un punto a otro y de un

### CAPÍTULO 3. EL MODELADO DE LA TURBULENCIA

flujo a otro. La ecuación 3.1 por sí sola no constituye un modelo de turbulencia, pero sirve de esquema para construirlo; por lo tanto, el problema gira en cuanto a la obtención de la distribución de la viscosidad de remolino.

El término delta Kronecker ( $\delta_{ij}$ ) es necesario para hacer que la expresión también sea aplicable a los esfuerzos normales ( $i=j$ ). La primera parte de la ecuación 3.1 que comprende los gradientes de velocidad alcanzará los esfuerzos normales:

$$-\overline{u_1^2} = -2\nu_t \partial_{x_1} u_1, \overline{u_2^2} = -2\nu_t \partial_{x_2} u_2, \overline{u_3^2} = -2\nu_t \partial_{x_3} \quad (3.2)$$

que por el principio de continuidad su suma es cero. Como los esfuerzos normales son cantidades positivas la suma de estos términos es dos veces la energía cinética del movimiento fluctuante.

$$\kappa = \frac{1}{2}(\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}) \quad (3.3)$$

El resultado de incluir el término de viscosidad de remolino en la segunda parte de la ecuación 3.1 asegura que la suma de los esfuerzos normales sea dos veces la energía cinética turbulenta  $\kappa$ . Los esfuerzos normales actúan como fuerzas de presión (perpendiculares a las caras del volumen de control); debido a que la presión es una cantidad escalar, en consecuencia  $\kappa$  también lo es, y produce que la segunda parte de la ecuación 3.1 constituya un término de presión. En virtud de lo anterior, cuando se llega a la solución del sistema de ecuaciones, la formulación 3.1 se utiliza para resolver el término  $\overline{u_i u_j}$  en la ecuación de momento. En este punto el segundo término puede ser absorbido por su correspondiente término de presión, esto significa que el efecto de la presión estática se reemplaza por una cantidad desconocida, la presión  $p + \frac{2}{3}\kappa$ . Por lo tanto, así  $\kappa$  aparezca en la ecuación 3.1 no es necesaria su estimación, puesto que la cantidad que se debe determinar es la distribución de la viscosidad de remolino.

El concepto de viscosidad de remolino se puede definir por medio de la hipótesis que sugiere una analogía entre el movimiento molecular que conduce a la ley de viscosidad de Stokes para flujo laminar y el movimiento turbulento. Los movimientos turbulentos generan remolinos que son precisados como porciones de fluido cuyas moléculas colisionan e intercambian momento. La viscosidad molecular se relaciona directamente con la velocidad media y con la trayectoria media libre de las moléculas; como consecuencia de esto, la velocidad media se considera proporcional a la velocidad que caracteriza la fluctuación del movimiento y a la longitud propia de éste, lo que Prandtl definió como longitud de mezclado. Sin embargo, en la literatura señalan que la equivalencia entre el movimiento molecular y turbulento no es tan precisa al determinarla por medio de la magnitud de la escala de cada movimiento, es decir, esta afirmación en principio no puede ser correcta porque los vórtices turbulentos al no ser cuerpos rígidos, no mantienen su identidad y también porque los grandes vórtices que tienen la tarea de transferir momento, siguen trayectorias que no son tan pequeñas si se comparan con el dominio de flujo, como lo indica la teoría cinética de los gases. A pesar de todas las indicaciones negativas que se tiene del tema, el concepto de viscosidad de remolino presentado en la ecuación 3.1 demuestra tener buen comportamiento en la práctica por cuanto es posible obtener este parámetro con buena aproximación para muchas situaciones de flujo. El objeto principal del concepto de viscosidad de remolino es la estimación de los esfuerzos cortantes,

donde el esfuerzo turbulento  $\tau = \rho \overline{uv}$  es el de mayor importancia. Los esfuerzos se pueden expresar como:

$$\tau = \rho \nu_t \partial_y u \quad (3.4)$$

### 3.4.3.2. Difusividad Turbulenta

De forma similar al transporte de momento turbulento, el transporte de masa y calor turbulento es posible relacionarlos con el gradiente de la cantidad transportada mediante:

$$-\overline{ui\phi} = \Gamma \partial_i \phi \quad (3.5)$$

Donde  $\Gamma$  es la difusividad turbulenta de masa o calor. De la misma manera que la viscosidad de remolino,  $\Gamma$  no es una propiedad del fluido pero depende del estado en que se encuentre la turbulencia. De hecho, la analogía realizada por Reynolds entre el transporte de calor, masa y momento sugiere que  $\Gamma$  está estrechamente relacionado con la viscosidad de remolino  $\nu_t$ , así:

$$-\Gamma = \frac{\nu_t}{\vartheta_t} \quad (3.6)$$

$\vartheta_t$  se conoce como el número de Prandtl (transporte de calor) o Schmit (transporte de masa). Diversas pruebas de laboratorio han mostrado que  $\vartheta_t$  varía muy poco. En consecuencia, muchos modelos utilizan la ecuación 3.6 como una constante. Sin embargo, se debe precisar que los efectos de flotabilidad y curvatura de la línea de flujo afectan este parámetro, lo que limita su aplicación en ciertas regiones del flujo y lo hace dependiente de la dirección del flujo de calor o momento. A pesar de esta dificultad se puede emplear en aplicaciones prácticas y en modelos de transporte de turbulencia.

### 3.4.3.3. Clasificación del Modelo

Los modelos de turbulencia que manejan el concepto de viscosidad/difusividad turbulenta emplean la ecuación de transporte de masa y momento turbulento  $\overline{u_i u_j}$ . El uso de una constante adoptada para ajustar el problema tiene poco efecto en el modelado de la turbulencia porque no tiene en cuenta los cambios locales de la estructura turbulenta y por lo tanto no puede simular correctamente los detalles del campo de flujo medio. Los modelos más sencillos que determinan la viscosidad de remolino la relacionan directamente con la distribución de velocidades media, como son los gradientes locales. La hipótesis que manejan dichos modelos es que la turbulencia es disipada de forma implícita cuando en realidad se está generando, lo que significa en última instancia es que no hay transporte turbulento en el flujo medio. De acuerdo con lo anterior, en los casos donde el estado de la turbulencia en un punto en particular es influenciado por la generación de éste desde otro punto del flujo, es incorrecto considerar que no hay turbulencia.

Generalmente los modelos que utilizan las ecuaciones de transporte caracterizan la turbulencia por medio de cantidades que se encuentran representadas en términos de: a) transporte convectivo por medio del movimiento medio; b) transporte difusivo por medio del movimiento turbulento (adicional a la tasa de cambio del flujo inestable). Algunos modelos utilizan solo una ecuación de transporte para la escala de velocidades  $\hat{\nu}$  supuesta al caracterizar las

## CAPÍTULO 3. EL MODELADO DE LA TURBULENCIA

velocidades fluctuantes, otras por el contrario utilizan una ecuación para la escala de longitud  $\hat{l}$ . Adicionalmente, otros modelos resuelven las ecuaciones para más de una escala, que son conocidas como las ecuaciones de transporte para  $\overline{u_i u_j}$ , puesto que determinan diferentes procesos o tamaños de vórtices en diferentes direcciones.

### 3.4.3.4. Modelado Escalas de Submalla

Existen modelos que permiten simular la turbulencia pero que no tienen por objeto la solución de las ecuaciones de conservación. Por las limitaciones que se tienen en cuanto a la capacidad de los computadores que permitan modelar las pequeñas escalas del movimiento turbulento y por otro lado a modelos que se enfoquen solamente en los movimientos de gran escala, se debe realizar una aproximación con los modelos escalas de submalla. La ventaja de utilizar este tipo de simulación a pequeña escala es que a diferencia de los modelos de gran escala, son menos dependientes del tiempo y en consecuencia los métodos de solución utilizados son relativamente más simples. Adicionalmente, se tiene la ventaja que en estos los detalles del modelo están influenciados en menor medida por el comportamiento del flujo en comparación con los modelos de cierre aplicados a las ecuaciones de Reynolds, por el hecho que la principal contribución a la estructura del flujo turbulento del movimiento a gran escala se puede resolver en un dominio numérico grande. El procedimiento desarrollado por estos modelos es calcular los movimientos a gran escala por medio de las ecuaciones de conservación dependientes del tiempo en tres dimensiones y los de pequeña escala se determinan con la ayuda de otro modelo más sencillo.

### 3.4.4. Modelo de Cero Ecuaciones: Modelo de Longitud de Mezcla (primer orden)

Este tipo de modelos de turbulencia no utilizan las ecuaciones de transporte para la evaluación de las cantidades turbulentas; son modelos simples que emplean el concepto de viscosidad de remolino por medio de experimentos de laboratorio, prueba y error a través de ecuaciones empíricas o relacionando la distribución de velocidades media.

#### 3.4.4.1. Constantes de Viscosidad y Difusividad de Remolino

En la literatura existen diversos métodos de cálculo aplicados a grandes cuerpos de agua que utilizan las constantes de viscosidad y difusividad de remolino a todo el campo de flujo. Los valores de estos se obtienen directamente de experimentos de difusión de tinta, de la información empírica disponible a partir de ensayos prueba y error al confrontar las observaciones con el problema propuesto. Aunque estos modelos no son muy apropiados se utilizan con frecuencia en muchos problemas de hidráulica. En el cálculo de las propiedades hidrodinámicas la constante de viscosidad de remolino tiene poca importancia; además, en cálculos de flujo en grandes cuerpos de agua los términos que representan los fenómenos turbulentos adquieren poca relevancia, dado que en muchas situaciones solo son introducidos para mejorar la estabilidad numérica. Adicionalmente en los casos donde son importantes los términos turbulentos el modelo es muy limitado para describir el comportamiento del flujo



correctamente.

El uso de la constante de difusividad  $\Gamma$  para calcular el campo de concentración o temperatura es de gran importancia práctica. Este modelo sin embargo, se queda igualmente limitado y solo se puede aplicar a los denominados campos lejanos, donde la constante de difusividad varía relativamente poco, dado que la turbulencia está gobernada por las condiciones del cuerpo de agua y no por las distorsiones locales tales como captaciones o descargas.

La suposición de una viscosidad o difusividad de remolino isotrópica es muy informal en algunas ocasiones, y se adoptan entonces diferentes valores de difusividad para el transporte vertical y horizontal. Generalmente  $\Gamma_h$  es mayor que  $\Gamma_v$  de dos a tres veces el valor de la profundidad media.

**3.4.4.1.1. Efectos de Flotabilidad** El transporte vertical de la turbulencia tanto de momento como de las cantidades escalares, está estrechamente relacionado con el fenómeno de flotabilidad. Este fenómeno se puede describir por medio de la siguiente formulación empírica:

$$-v_{tz} = (v_{tz})_0(1 + \beta_0 R_i)^\alpha, \Gamma_z = \Gamma_{z0}(1 + \beta_\phi R_i)^{\alpha\phi} \quad (3.7)$$

$$R_i = \frac{-g\partial_z\rho}{\rho(\partial_z u)^2} \quad (3.8)$$

$R_i$  es el número de gradiente de Richardson el cual es una relación de las fuerzas de gravedad con las fuerzas inerciales, y caracteriza la importancia de los efectos de flotabilidad. Los parámetros  $(v_{tz})_0$  y  $\Gamma_{z0}$  se conocen como valores de estratificación neutral ( $R_i$ ). De acuerdo con Anderson las relaciones que generan el mejor ajuste con los datos experimentales son:

$$\alpha = -0.5, \beta = 10, \alpha_\phi = -1.5, \beta_\phi = 3.33$$

La relación  $\frac{v_t}{\Gamma_z}$  es el número de turbulencia de Prandtl-Schmidt ( $\sigma_{tz}$ ) que incrementa con  $R_i$  y con la estratificación estable de forma gradual.

**3.4.4.1.2. Viscosidad/Difusividad Promediada en la Vertical** El concepto mencionado es de gran importancia en cálculos promediados en la vertical donde solo se considera el transporte horizontal, dado que este transporte se representa por los esfuerzos en el fondo. En este caso los valores medios de  $(v_t)$  y  $\Gamma$  se utilizan para relacionar el momento promediado en la vertical con el gradiente de temperatura y velocidad media. El modelo tiene algunas restricciones en el cálculo de campos lejanos a la pared y se utiliza fundamentalmente para resolver la ecuación de temperatura/concentración. De hecho, el modelo de constante de difusividad tiene su mayor aplicación en los métodos de difusión, que asume que el campo de velocidad es bien conocido y solo resuelven, la ecuación de temperatura/concentración promediada en la vertical. En los casos de canales abiertos donde la turbulencia es producida principalmente en el fondo, la difusividad media se relaciona razonablemente con la velocidad de fricción y la profundidad:

$$\bar{\Gamma} = CU * h \quad (3.9)$$

## CAPÍTULO 3. EL MODELADO DE LA TURBULENCIA

C es una constante empírica y depende un poco de la geometría. Para canales amplios posee un valor de 0.135 pero varía con la relación ancho-profundidad.

La turbulencia en el océano y en lagos aparece como resultado de la división de la circulación a gran escala y de los efectos del oleaje. La ecuación más ampliamente utilizada es:

$$\bar{\Gamma} = AL_t^{\frac{4}{3}} \quad (3.10)$$

A es un parámetro de disipación y L es una escala típica de los procesos de generación de la turbulencia.

### 3.4.4.2. Modelos de Longitud de Mezcla

El modelo desarrollado y el más adecuado para describir la distribución de la viscosidad de remolino, propiamente el primer modelo de turbulencia, fue el desarrollado por Prandtl en 1925 y se conoce como la hipótesis de longitud de mezcla. Prandtl supuso que la viscosidad de remolino es proporcional a la velocidad fluctuante media  $\bar{v}$  y a la longitud de mezclado  $l_m$  (3.4). El modelo considera capas de esfuerzos cortantes donde los aportes más significativos son generados por los esfuerzos asociados a la turbulencia ( $\overline{uv}$ ) y por el gradiente de velocidades ( $\partial_y u$ ). Su postulado afirma que la velocidad media es igual a  $l_m$  veces la longitud de mezcla del gradiente de velocidades, así:

$$\bar{v} = l_m |\partial_y u| \quad (3.11)$$

La longitud de mezcla se define cuando una porción del flujo que viaja con su velocidad media inicial es desplazada por el movimiento turbulento en la dirección transversal una distancia  $y_1$  a  $y_2$ ; como resultado de esto la velocidad de las áreas adyacentes difieren de la velocidad media por una cantidad  $\Delta u$ . La distancia  $y_2 - y_1$  a la cual  $\Delta u$  es igual a la velocidad transversal media de la fluctuación se conoce como longitud de mezclado. A partir de esta hipótesis es posible construir una expresión que defina la viscosidad de remolino de la siguiente forma:

$$v_t = l_m^2 |\partial_y u| \quad (3.12)$$

conocida como la hipótesis de longitud de mezcla de Prandtl, la cual relaciona la viscosidad de remolino con el gradiente de velocidad media local e involucra el parámetro de longitud de mezclado  $l_m$ .

La hipótesis de Prandtl es aplicada con gran éxito en muchas situaciones prácticas que comprenden flujos relativamente simples, en virtud que se puede especificar mediante ecuaciones empíricas muy simples. La constante empírica en este modelo de turbulencia depende del tipo de flujo considerado.

**3.4.4.2.1. Flujos Generales** La hipótesis de longitud de mezcla se encuentra restringida para flujos con capa límite en dos dimensiones y se puede expresar de la siguiente manera:

$$v_t = l_m^2 [(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \partial_j u_i]^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

el uso de esta relación se ha visto limitado como resultado de la dificultad que implica especificar  $l_m$  en flujos complejos, es decir, flujos de capa límite. El parámetro  $l_m$  para flujo en ductos es posible determinarlo mediante la ecuación de Buleev:

$$l_m = \aleph \frac{1}{\pi} \int_D \frac{1}{\delta_T} d\Omega \quad (3.14)$$

donde  $\aleph$  es la constante de von Kármán,  $\delta$  es la distancia a la cual se determina  $l_m$  desde la pared en dirección  $\Omega$  y  $D$  es el dominio de integración (sección transversal al ducto).

**3.4.4.2. Conclusiones sobre el Modelo** El modelo de longitud de mezcla no es apropiado cuando los procesos de convección o difusión en el transporte de turbulencia son importantes, como por ejemplo, los flujos rápidamente variados, la transferencia de calor a través de un plano con gradiente de velocidades cero o los flujos de recirculación. Este modelo se utiliza con poca frecuencia debido a las dificultades que se tienen para definir  $l_m$ . Sin embargo, en muchas situaciones donde se tienen flujos simples y siempre que se pueda definir empíricamente  $l_m$ , el modelo de longitud de mezcla se convierte en una gran herramienta.

### 3.4.4.3. Modelo de Capa Límite de Prandtl

En 1942 Prandtl propuso un modelo aplicado solo a capa límite. En su trabajo supone que la viscosidad de remolino  $\nu_t$  es constante sobre cualquier sección transversal de la capa de esfuerzos; la longitud de escala de turbulencia,  $l$ , es proporcional al ancho de la capa,  $\delta$ , y la velocidad de escala,  $\hat{v}$ , es proporcional a la diferencia máxima de velocidades  $|u_{max} - u_{min}|$  a través de la capa límite. De acuerdo con esto propone la siguiente ecuación:

$$\nu_t = c\delta |u_{max} - u_{min}| \quad (3.15)$$

$c$  es una constante empírica y depende del tipo de flujo que se analice.

Por su simplicidad el modelo de capa límite de Prandtl es muy utilizado en el cálculo de capas mezcladas, chorros o estelas de flujo. El modelo trabaja muy bien para valores apropiados de  $c$  cuando el flujo se encuentra en un estado bien desarrollado, pero en transiciones de un tipo de flujo a otro no predice adecuadamente por que la constante  $c$  carece de valores universales.

### 3.4.5. Modelos de una Ecuación

Los modelos de turbulencia de una ecuación surgen bajo la necesidad de superar las limitaciones de los modelos que utilizan la hipótesis de longitud de mezclado, los cuales tienen en cuenta la continuidad del transporte turbulento mediante la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales. La base fundamental en el desarrollo de estos modelos se da al relacionar la velocidad de escala fluctuante y los gradientes de velocidad media, así como determinar su formulación desde una ecuación de transporte.

### 3.4.5.1. Modelos que Utilizan el Concepto de Viscosidad de Remolino

Cuando se caracterizan las velocidades fluctuantes, la escala física más significativa es  $\sqrt{k}$ , donde  $k$  es la energía cinética del movimiento turbulento por unidad de masa, y constituye la medida directa de la intensidad de las fluctuaciones turbulentas en las tres direcciones coordenadas. En este sentido  $k$  se encuentra contenido dentro de las fluctuaciones a gran escala, por lo tanto,  $\sqrt{k}$  es la escala de velocidades para los movimientos turbulentos a gran escala. Este término se relaciona con la viscosidad de remolino mediante la siguiente ecuación:

$$v_t = c' \mu \sqrt{k} L_t \quad (3.16)$$

$c' \mu$  es una constante empírica. La expresión se conoce como la ecuación de kolmogorov-Prandtl porque ambos la desarrollaron en forma independiente. Los autores, en su formulación, sugieren la determinación de la distribución de  $k$  al resolver la ecuación de transporte de  $k$ . La ecuación de transporte surge directamente de las ecuaciones de Navier-Stokes. Para altos números de Reynolds esta ecuación se expresa de la siguiente manera:

$$\underbrace{\partial_t k}_a + \underbrace{u_i \partial_i k}_b = -\underbrace{\partial_i \left[ \overline{u_i \left( \frac{u_j u_j}{2} + \frac{p}{\rho} \right)} \right]}_c - \underbrace{\overline{u_i u_j \partial_j u_i}}_d - \underbrace{\beta g_i \overline{u_i \varphi}}_e - \underbrace{\overline{v \partial_j u_i \partial_j u_i}}_f \quad (3.17)$$

donde, (a): tasa de cambio de  $k$  por unidad de tiempo, (b): transporte convectivo, (c): transporte difusivo, (d): producción de esfuerzos ( $P_r$ ), (e): producción de fuerzas de flotación/distribución ( $fl$ ), (f): disipación viscosa  $\epsilon$ .

La tasa de cambio de  $k$  es balanceada por el transporte convectivo debido al movimiento del flujo medio; el transporte difusivo debido a la velocidad y a la presión fluctuante; la producción de  $k$  es contrarrestada por la interacción de los esfuerzos de Reynolds y los gradientes de velocidad media; finalmente la disipación de  $k$  por la acción viscosa. El término de producción representa la transferencia de energía cinética desde el movimiento medio al movimiento turbulento, donde éste aparece con signo contrario, similar a un término de decaimiento en la ecuación de energía cinética del movimiento medio,  $\frac{1}{2} u_i u_i$ . El término de flotabilidad turbulenta (boyancia),  $fl$ , representa el intercambio de energía cinética a potencial asociada al movimiento turbulento. En la estratificación de las capas de esfuerzos en el proceso de turbulencia estable, el término es negativo así que  $k$  se reduce y la turbulencia es aislada mientras la energía potencial del sistema aumenta. En la estratificación inestable la energía turbulenta se genera a expensas de la energía potencial. La disipación viscosa,  $\epsilon$ , transfiere energía cinética a energía interna del fluido, trabajando como una función tipo sumidero.

**3.4.5.1.1. Forma de Modelar la Ecuación para  $k$**  La ecuación 3.17 generalmente no se emplea debido a la aparición de algunos términos desconocidos tanto en las componentes de difusión como de disipación, por lo tanto, se hace necesaria la introducción de nuevas hipótesis para obtener un sistema de ecuaciones cerrado. En general, el flujo difusivo de  $k$  frecuentemente se asume proporcional al gradiente de  $k$ , de esta forma:

$$-u_i \left[ \left( \frac{u_j u_j}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right] = \frac{v_t}{\sigma_k} \partial_i k \quad (3.18)$$

$\sigma_k$  es una constante de difusión empírica. La disipación de energía cinética turbulenta se modela usualmente por medio de la siguiente expresión:

$$\epsilon = C_D \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L_t} \quad (3.19)$$

donde  $C_D$  es un coeficiente empírico.

La tasa de disipación está gobernada por los movimientos a gran escala aún cuando la disipación tiene participación en los pequeños remolinos.

Con las suposiciones realizadas, además de las expresiones de la viscosidad de remolino y de difusividad para  $\overline{u_i u_j}$  y  $\overline{u_i \varphi}$  respectivamente, la ecuación de  $k$  se transforma en:

$$\partial_t k + u_i \partial_i k = \partial_i \left( \frac{v_t}{\sigma_k} + \partial_i k \right) + v_t (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \partial_j u_i + \beta_0 g_i \frac{v_t}{\sigma_k} \partial_i \phi - C_D \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L_t} \quad (3.20)$$

Los términos  $C_D \approx 0.08$  y  $\sigma \approx 1$  son los valores más razonables para estas constantes empíricas.

Este flujo presenta algunas restricciones para capas de esfuerzos en flujos cercanos a la pared y flujos con altos números de Reynolds. El término de difusión viscosa también aparece en esta ecuación y las constantes empíricas son función del número de Reynolds turbulento,  $Re = \frac{\sqrt{kl}}{\nu}$ . Se han realizado desarrollos adicionales al modelo que tienen en cuenta los efectos viscosos, pero por cuestiones prácticas en ingeniería no se presentan por tener poca importancia en el área de hidráulica.

**3.4.5.1.2. Caso Especial de la Hipótesis de Longitud de Mezcla** Cuando la tasa de cambio y los términos de transporte convectivo y difusivo son despreciables en la ecuación de  $k$ , el término de producción de energía cinética turbulenta es igual a la disipación y se dice entonces que la turbulencia está en equilibrio local. Para capas de esfuerzos sin efectos de flotación lo anteriormente expresado indica que:

$$v_t (\partial_y u)^2 = C_D \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L_t} \quad (3.21)$$

Cuando la ecuación 3.21 se utiliza para determinar  $k$  en la expresión de Kolmogorov (ecuación, 3.16) resulta:

$$v_t = \left( \frac{c' \mu}{C_D} \right)^{\frac{1}{2}} L_t^2 |\partial_y u| \quad (3.22)$$

la cual es la longitud de mezcla, y tiene forma similar a la ecuación 3.13. La longitud de mezclado  $l_m$  parece ser  $\left( \frac{c' \mu^3}{C_D} \right)^{\frac{1}{4}}$  veces la escala de longitud  $L_t$ . La derivada indica claramente que el modelo de longitud de mezcla solo es apropiado cuando la turbulencia está en estado local.

### 3.4.5.2. Modelo de Bradshaw

Bradshaw (1969) y su grupo de trabajo desarrollaron un modelo de esfuerzos que no emplea el concepto de viscosidad de remolino. En lugar de esto, resuelve una ecuación de transporte para obtener el tensor de esfuerzos  $\overline{uv}$  que se obtiene al transformar la ecuación de energía cinética turbulenta 3.17. El modelo se fue previsto inicialmente para capas límite donde los experimentos arrojaron la siguiente expresión:

$$\frac{\overline{uv}}{k} = a_1 \approx cte \approx 0.03 \quad (3.23)$$

La ecuación 3.23 se utiliza como una relación entre  $k$  y  $\overline{uv}$ . En virtud de que esta ecuación se puede transformar en una del tipo  $\overline{uv}$ , se tiene la siguiente expresión:

$$u\partial_x \frac{\overline{uv}}{a_1} + v\partial_y \frac{\overline{uv}}{a_1} = -\partial_y \left[ G\overline{uv} (\overline{uv}_{max})^{\frac{1}{2}} \right] - \overline{uv}\partial_y u - \frac{\overline{uv}^{\frac{3}{2}}}{L_t} \quad (3.24)$$

Esta ecuación es similar a la ecuación 3.20 y la única diferencia se da en el término de difusión. El acierto del modelo se basa en que Bradshaw es consistente al no utilizar el concepto de gradiente-difusión y supuso a diferencia de la ecuación 3.18 que el flujo de difusión de  $k$  ó  $\overline{uv}$  es proporcional a una gran velocidad denominada  $(\overline{uv}_{max})^{\frac{1}{2}}$ . El parámetro  $fl$  en la expresión de difusión es ahora:

$$fl = \left( \frac{\overline{uv}_{max}}{u_\infty^2} \right)^{\frac{1}{2}} f_1 \left( \frac{y}{\delta} \right) \quad (3.25)$$

Donde  $f_1$  es una función empírica. La escala de longitud  $L$  tal como aparece en la ecuación 3.24 se determina mediante la función:

$$L_t = f_2 \left( \frac{y}{\delta} \right) \quad (3.26)$$

El modelo de Bradshaw se ha aplicado con buena precisión en cálculos de capa límite. En flujos de esfuerzos donde las tensiones cambian de orientación (signo) como son los flujos en ductos, chorros, etc., la ecuación 3.23 no es válida porque  $k$  no cambia de signo.

### 3.4.6. Modelos de Dos Ecuaciones ( $k - \epsilon$ )

La caracterización de la escala de longitud en los vórtices grandes y la energía contenida en los torbellinos, están sujetas a procesos de transporte de forma similar que la energía cinética turbulenta. Otro proceso que tiene influencia en la escala de longitud es la disipación, pues destruye los vórtices pequeños y suscita la formación de otros vórtices nuevos pero de mayor tamaño. Para el balance de todos estos procesos es necesario expresar una ecuación de transporte de para calcular su distribución. La mayor parte de este tipo de modelos existentes en la literatura utiliza el concepto de viscosidad de remolino y la expresión de kolmogorov-Prandtl (3.16).

#### 3.4.6.1. Ecuación de la Escala de Longitud

Los modelos de dos ecuaciones, por ejemplo  $\epsilon$  y  $kl$ , se obtienen del desarrollo de las ecuaciones de Navier-Stokes y se escriben posteriormente en forma apropiada para su uso mediante una

serie de hipótesis. Otros modelos por el contrario, se han obtenido mediante procedimientos heurísticos. Ambos resultados son muy similares y se enuncian de la siguiente manera:

$$\underbrace{\partial_t z}_a + \underbrace{u_i \partial_i z}_b = \underbrace{\partial_i \left( \frac{\sqrt{kl}}{\sigma_z} \partial_i z \right)}_c + \underbrace{c_{z1} \frac{z}{k} P}_d - \underbrace{c_{z2} z \frac{\sqrt{k}}{L}}_e + \underbrace{S}_f \quad (3.27)$$

Donde, (a): tasa de cambio; (b): convección; (c): difusión; (d): producción; (e): destrucción donde  $\sigma_z$ ,  $c_{z1}$  y  $c_{z2}$  son constantes empíricas;  $P$  es la producción de energía cinética tal como se definió en la ecuación 3.17, y  $S$  es un segundo término fuente que varía de acuerdo a la selección de  $z$ . Exceptuando el segundo término que es importante principalmente en las zonas cercanas a la pared, y el término de difusión, los términos de la ecuación expuesta para diferentes profundidades se pueden presentar como equivalentes, con la ayuda de la ecuación de  $k$  (ecuación 3.20). La principal diferencia se presenta en el término de difusión. Experiencias con otro tipo de ecuaciones han demostrado que en flujos a superficie libre esta diferencia no es representativa, y la hipótesis del gradiente en las proximidades de la pared para la simulación de la difusión trabaja mucho mejor para ( $z = \epsilon$ ) que cualquier otra variable. La ventaja de la ecuación con respecto a otro tipo de formulación es que no requiere de un segundo término fuente adicional, cuando en muchos casos otras expresiones necesitan una correlación del término  $S$  en las cercanías a las paredes del flujo. En virtud de lo anterior, la ecuación  $\epsilon$  se ha convertido en una de las más populares con respecto a las ecuaciones de escala de longitud.

### 3.4.7. Otros Modelos de Turbulencia

A continuación se presenta un resumen de los modelos de turbulencia desarrollados en las últimas décadas, desarrollados por la fundación OpenFOAM, los cuales se clasifican en función de las ecuaciones de gobierno.

#### 3.4.7.1. Simulación Promediada de Reynolds

Conocidos como modelos de Reynolds o modelos RANS debido a que resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes con un promedio estadístico. Las ecuaciones son aproximadas mediante un promedio de las cantidades instantáneas e incluye modelos adicionales para tener en cuenta el efecto de la turbulencia. A continuación se presenta los modelos desarrollados en los últimos años.

##### 1. Modelos RANS para Fluidos Incompresibles

- *laminar*  
Modelado de la turbulencia para flujo laminar
- *kEpsilon*  
Modelo del tipo  $k - \epsilon$  para flujos estándar con altos números de Reynolds (Re)
- *kOmega*  
Modelo del tipo  $k - \omega$  para flujos estándar con altos números de Reynolds (Re)

## CAPÍTULO 3. EL MODELADO DE LA TURBULENCIA

- *kOmegaSST*  
Modelo del tipo  $k - \omega - SST$
- *RNGkEpsilon*  
Modelo del grupo renormalizado RNG del tipo  $RNG - k - \epsilon$
- *NonlinearKEShih*  
Modelo no lineal del tipo  $k - \epsilon$
- *LienCubicKE*  
Modelo del tipo  $k - \epsilon$
- *qZeta*  
modelo del tipo  $q - \zeta$
- *LauderSharmaKE*  
Modelo del tipo  $k - \epsilon$  para flujos con bajos números de Reynolds (Re)
- *LamBremhorstKE*  
Modelo del tipo  $k - \epsilon$  para flujos con bajos números de Reynolds (Re)
- *LienCubicKELowRe*  
Modelo del tipo  $k - \epsilon$  para flujos con bajos números de Reynolds (Re)
- *LienLeschzinerLowRe*  
Modelo del tipo  $k - \epsilon$  para flujos con bajos números de Reynolds (Re)
- *LRR*  
Modelo del tipo Transporte de Esfuerzos de Reynolds (RSTM) Launder-Reece-Rodi
- *LauderGibsonRSTM*  
Modelo tipo RSTM para considerar reflexión en las paredes del dominio
- *realizableKE*  
Modelo del tipo  $k - \epsilon$
- *SpalartAllmaras*  
Modelo de longitud de mezcla de una ecuación

### 2. Modelos RANS para Fluidos Compresibles

- *laminar* Modelado de la turbulencia para flujo laminar
- *kEpsilon*  
Modelo del tipo  $k - \epsilon$  para flujos estándar
- *kOmegaSST*  
Modelo del tipo  $k - \omega - SST$
- *RNGkEpsilon*  
Modelo del grupo renormalizado RNG del tipo  $RNG - k - \epsilon$
- *LauderSharmaKE*  
Modelo del tipo  $k - \epsilon$  para flujos con bajos números de Reynolds (Re)
- *LRR*  
Modelo de Launder-Reece-Rodi tipo RSTM



- *LaunderGibsonRSTM*  
Modelo tipo RSTM
- *realizableKE*  
Modelo del tipo  $k - \epsilon$
- *SpalartAllmaras*  
Modelo de longitud de mezcla de una ecuación

### 3.4.7.2. Simulación Grandes Vórtices (LES)

Las grandes estructuras turbulentas en el flujo se resuelven a través de las ecuaciones de gobierno, mientras que las escalas menores son descritas con los modelos Escalas de Submalla (SGS). La separación de escala se obtiene aplicando filtros a las ecuaciones de gobierno que tienen influencia en los modelos SGS. A continuación se presenta el listado de los modelos LES.

#### 1. Modelos LES para Turbulencia Isotrópica

- *Smagorinsky*
- *Smagorinsky2*  
Modelo de Smagorinsky con un filtro 3D
- *dynSmagorinsky*  
Modelo Smagorinsky dinámico
- *homogeneousDynSmagorinsky*  
Modelo Smagorinsky dinámico homogéneo
- *dynLagrangian*  
Modelo Lagrangiano de viscosidad de remolino de dos ecuaciones
- *scaleSimilarity*
- *mixedSmagorinsky*  
Modelo de mezcla de escala Smagorinsky
- *dynMixedSmagorinsky*  
Modelo de mezcla dinámico de escala Smagorinsky
- *OneEqEddy*  
Modelo de viscosidad de remolino de una ecuación tipo  $k$
- *dynOneEqEddy*  
Modelo dinámico de viscosidad de remolino tipo  $k$
- *locDynOneEqEddy*  
Modelo dinámico localizado de viscosidad de remolino de una ecuación tipo  $k$
- *spectEddyVisc*  
Modelo espectral de viscosidad de remolino
- *LRDDiffStress*  
Modelo de esfuerzos diferenciales LRR

## CAPÍTULO 3. EL MODELADO DE LA TURBULENCIA

- *DeardorffDiffStress*  
Modelo de esfuerzos diferenciales Dearddorff
- *SpalartAllmaras*
- *SpalartAllmarasDDES*  
Modelo tipo DDES de simulación de vórtices SpalartAllmaras
- *SpallartAllmarasIDDES*  
modelo tipo IDDES mejorado de SpallartAllmaras

### 2. Modelos LES para Turbulencia Anisotrópica

- *Smagorinsky*
- *OneEqEddy*  
Modelo de viscosidad de remolino de una ecuación tipo  $k$
- *dynOneEqEddy*  
Modelo dinámico de viscosidad de remolino tipo  $k$
- *lowReOneEqEddy*  
Modelo de viscosidad de remolino de una ecuación tipo  $k$  para bajos números de Reynolds (Re)
- *DeardorffDiffStress*  
Modelo de esfuerzos diferenciales Dearddorff
- *SpalartAllmaras*

### 3. Modelos LES deltas

- *PrandtlDelta*
- *cubeRootVolDelta*
- *maxDeltaxyz*
- *smoothDelta*

### 4. Filtros LES

- *laplaceFilter*
- *simpleFilter*
- *anisotropicFilter*

# 4

---

## Fundamento Teórico de las Ecuaciones de Flujo Turbulento

### 4.1. Introducción

Las ecuaciones que describen de forma completa los fenómenos turbulentos se conocen como ecuaciones de Navier-Stokes. Como se ha mencionado anteriormente, éstas parten en principio de las leyes de conservación para un flujo incompresible conformando un sistema cerrado y permiten modelar todos los detalles del movimiento turbulento de forma exacta, aunque no sea posible resolverlas para aplicaciones prácticas.

Se presenta a continuación los fundamentos teóricos y analíticos para la descripción de un flujo turbulento mediante las ecuaciones de Reynolds (RANS), que en definitiva permitirán la descripción del fenómeno de la rotura del oleaje y que son aplicados a un modelo de turbulencia denominado INSURF.

### 4.2. Modelado de la Rotura

Los fenómenos de transformación del oleaje de aguas profundas a someras son de gran interés teórico y práctico para los ingenieros costeros. La rotura del oleaje juega un papel fundamental en muchos de los procesos que se llevan a cabo en la costa como son el transporte de sedimentos y las corrientes costeras; además, durante este fenómeno se originan burbujas de aire y la expulsión de gotas de agua que son importantes cuando se estudia el transporte de contaminantes.

En los últimos años se han llevado a cabo diversas investigaciones cuyo objeto ha sido determinar cada uno de los mecanismos inherentes a la rotura. A pesar de que los esfuerzos se han dirigido a la obtención de datos de laboratorio y aproximaciones teóricas a la postre se han construido algunos modelos numéricos lo suficientemente precisos, empleados en la construcción del campo de velocidades y el perfil de la superficie libre.

Las primeras aproximaciones numéricas provienen de las ecuaciones promediadas en la vertical, que comprenden a las ecuaciones de aguas someras y las ecuaciones de Boussinesq. Los términos disipativos se incluían en las ecuaciones para representar la pérdida de energía durante la rotura. Esto conducía a modelos muy eficientes permitiendo realizar grandes simulaciones que generalmente se aplicaban a tsunamis y runup. Sin embargo, es

## **CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO**

importante tener en cuenta las limitaciones de estos modelos con respecto a uno que desarrolle completamente las ecuaciones, pues los primeros no pueden predecir detalladamente la configuración de la superficie libre durante la rotura y no contienen la información sobre la generación/transporte de la vorticidad y la turbulencia.

Para simular el inicio de la rotura la teoría de flujo potencial es muy adecuada. Antes de que la ola rompa el movimiento del flujo es totalmente irrotacional, excepto en las regiones de capa límite. Por lo tanto, los procesos de evolución del oleaje se pueden describir teóricamente por la proposición de flujo potencial.

Independientemente de las ecuaciones o la técnica que se utilice para simular la rotura, las ecuaciones completas de Reynolds son las que mejor describen el movimiento medio de cualquier flujo turbulento. Éstas tienen forma similar a las ecuaciones de Navier-Stokes, son un caso especial de las últimas cuando el flujo es laminar.

La técnica de la búsqueda de la superficie libre fue propuesta por Harlow y Welch (1965) y fue empleada para solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes junto con el método de Marker and Cell (MAC, *por sus siglas en inglés*). Con el paso de los años fue mejorando; una de las metodologías más destacadas es la que desarrolló Chorin (1968-1969). Es un método muy robusto que sirve como solucionador de las ecuaciones de Reynolds.

Un aspecto muy importante en la simulación de la rotura es la reconstrucción de la superficie libre. Existen diferentes técnicas para este proceso, sin embargo, algunas de ellas poseen fuertes limitaciones que impiden su aplicación. Por ejemplo, no se utiliza el método de la Función de Altura pues requiere evaluar el desplazamiento de la superficie libre individualmente. El método MAC no tiene restricciones para geometrías complejas, pero requiere mucha capacidad en máquina para el almacenamiento de la información del marcador. Además, como el marcador no se posiciona en el lugar donde está exactamente definida la velocidad los movimientos de ésta se basan en su interpolación, lo que puede conducir a la acumulación de grandes errores. El método de seguimiento de la superficie (Mitaya, 1986) o el de marcador superficial (Chen et al. 1991) reducen la cantidad de información almacenada, pero está más complicado el reordenamiento del marcador superficial. Esta limitación no es posible solucionarla cuando se da una rotura muy fuerte porque se generan pequeñas burbujas y gotas de agua. El método de volumen de fluido (VOF, *por sus siglas en inglés*) desarrollado por Hirt y Nichols (1981) es una buena alternativa para la reconstrucción de la superficie libre, atendiendo a la necesidad de seguir los cambios de densidad dentro de cada celda computacional en lugar de la localización de la superficie libre.

Lin y Liu (1998 a,b) resolvieron las ecuaciones RANS utilizando el método de proyección de Harlow y Welch (1965) y reconstruyeron la superficie libre con la técnica de volumen de fluido, pues con la conjunción de estas dos metodologías es posible resolver, en principio, cualquier flujo laminar con la ausencia de rotura. Con respecto al modelado de este último fenómeno y en lo que a turbulencia se refiere es necesario introducir un modelo que represente adecuadamente los efectos turbulentos del flujo medio. Generalmente no se introducen modelos turbulentos muy robustos o los más precisos debido a los esfuerzos que supone,

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

por el nivel de dificultad que se maneja, por la ausencia de un adecuado conocimiento y entendimiento de las características de la turbulencia asociadas al fenómeno de la rompiente.

Para tener en cuenta los verdaderos efectos turbulentos, es necesario emplear modelos de cierre que describan de la forma más precisa posible la generación, transporte y el decaimiento de la turbulencia. Los modelos más conocidos e importantes son los modelos de cierre de la turbulencia que permiten cerrar directamente el sistema de ecuaciones de transporte de tensiones de Reynolds. La falta de conocimiento acerca del comportamiento de los fenómenos turbulentos hace que el problema de cierre de la turbulencia sea siempre un tema cuestionable. Esto aplica directamente a los términos de los esfuerzos de presión pues tienen la tarea de redistribuir la energía turbulenta hacia diferentes direcciones. Si el modelo  $(k - \epsilon)$  se compara con el modelo de cierre de las tensiones de Reynolds se observa que es de menor nivel, pues en el primero no se busca el cierre de las ecuaciones de transporte de Reynolds sino que se basa en la hipótesis de viscosidad de remolino, relacionando los esfuerzos de Reynolds con la energía cinética turbulenta  $k$ , con la tasa de disipación turbulenta  $\epsilon$  y la tasa de esfuerzos del flujo medio.

La suposición de viscosidad de remolino reduce sustancialmente el número de ecuaciones del sistema, pasando de seis en los modelos de cierre de esfuerzos de Reynolds a uno para la ecuación de  $k$ ; además de simplificar la hipótesis de cierre. La secuencia de solución es desarrollar las ecuaciones de Navier-Stokes y a partir de sus resultados evaluar las ecuaciones de transporte para obtener  $k$  y  $\epsilon$ . El problema de tal asunción es que también limita la aplicación del modelo a flujos cuasi-isotrópicos turbulentos difusivos.

### 4.3. Ecuaciones de Gobierno del Flujo

#### 4.3.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

El movimiento de un flujo incompresible se puede describir por las ecuaciones de Navier-Stokes en una frontera dada:

$$\partial_i u_i = 0 \quad (4.1)$$

$$\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i p + g_i + \frac{1}{\rho} \partial_j^2 \tau_{ij} \quad (4.2)$$

Donde  $i, j = 1, 2$  para el movimiento de un fluido bidimensional. Las ecuaciones de Navier-Stokes representan la conservación de la masa y el momento por unidad de masa, en la cual  $u_i$  es la  $i$ -ésima componente del vector velocidad,  $\rho$  indica la densidad del fluido,  $p$  la presión,  $g_i$  la  $i$ -ésima componente de la aceleración de la gravedad y  $\tau_{ij}$  es el tensor de esfuerzos viscosos. Para un fluido newtoniano  $\tau_{ij} = 2\mu\sigma_{ij}$  y  $\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$  donde  $\mu$  es la viscosidad y  $\sigma_{ij}$  es del tensor de esfuerzos cortantes.

Para el modelado de las ecuaciones se van a considerar dos tipos de condiciones de frontera: una frontera sólida en el fondo y la frontera de la superficie libre. La velocidad en la frontera sólida se denota como  $u_i$ , además se requiere de una condición de frontera no deslizante.

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

$$u_i = U_i \quad (4.3)$$

En la superficie libre se requiere la continuidad de las componentes del esfuerzo. Para ello es necesario denotar  $n$  como un vector unitario normal a la superficie libre, y  $n_i$  como su proyección en el eje  $x_i$ . En consecuencia, la continuidad de las componentes de los esfuerzos se expresan como:

$$p - \mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j) n_i n_j = \tau_n \quad (4.4)$$

$\tau_n$  es el esfuerzo normal aplicado sobre la superficie libre, además se ignora la tensión superficial. En problemas tridimensionales se requieren dos vectores unitarios tangenciales  $t^k$  ( $k = 1, 2$ ) al definir el plano tangente local en la superficie libre y  $t_i^k$  está definido como la proyección de  $t^k$  en la dirección  $x_i$ . Si se aplican en la superficie libre esfuerzos externos,  $t_k^1$  y  $t_k^2$ , la continuidad de los esfuerzos es:

$$\mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j) n_i t_j^k = \tau_t^k; k = 1, 2 \quad (4.5)$$

Adicional a la condición de frontera de la continuidad en los esfuerzos en la superficie libre, la cual es también referida a la condición de frontera dinámica, se debe satisfacer la condición cinemática. Antes de la rotura del oleaje esta condición de frontera asume la continuidad de la velocidad lo que asegura que la superficie libre sea un material sólido. Dado que la superficie material siempre está compuesta por las mismas partículas, entonces la derivada total de cualquier propiedad física debe desaparecer en la superficie libre. De acuerdo con esto:

$$\partial_t F + u_i \partial_i F = 0 \quad (4.6)$$

Después de la rotura la superficie libre no es un material continuo y por tanto la ecuación 4.5 no es válida. La función  $F$  es la función de densidad, es decir,  $F(x, t) = \rho(x, t)$ . Generalmente la ecuación 4.5 es cierta para flujo incompresible, antes y después de la rotura. Si la densidad se mantiene constante la expresión anterior se satisface automáticamente.

Sin embargo, en el método de volumen de fluido (VOF) la densidad del fluido en cada celda computacional se define como la densidad media de la celda. Por lo tanto, en la celda de cálculo donde aparece la superficie libre la densidad del fluido es menor que la densidad real de éste, mientras la densidad del flujo en la celda analizada ocupada por aire es cero. Al reconstruir los cambios de densidad en cada celda se puede estimar el movimiento de la superficie libre.

### 4.3.2. Ecuaciones de Reynolds

En las aplicaciones de ingeniería se da más valor a los efectos del flujo medio que a los detalles de las fluctuaciones turbulentas, por lo que se adopta la aproximación estadística promediando las ecuaciones de conservación (promedio en el tiempo) durante un periodo de tiempo mucho más grande que el periodo característico de las fluctuaciones.

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

Las ecuaciones de gobierno (Navier-Stokes) y sus condiciones de frontera describen los movimientos de un flujo incompresible con superficie libre incluyendo flujos potenciales, laminares y turbulentos. Una vez se especifican unas condiciones de frontera iniciales adecuadas para los campos de presión y velocidad en conjunto con la configuración de tales condiciones el sistema está dispuesto para resolverse numéricamente.

Sin embargo, en el caso de flujos turbulentos con números de Reynolds muy altos, la resolución de las fluctuaciones turbulentas de pequeña escala es tan alta que la simulación numérica directa es extremadamente compleja. Una opción es analizar el campo de flujo medio que considere la influencia de dicha fluctuación. Tanto el campo de presiones como de velocidades se puede dividir en una componente media y una fluctuación turbulenta. De acuerdo con este proceso, se descompone cada variable instantánea en la suma de un valor medio y de una fluctuación. Para analizar los efectos de las fluctuaciones se introducen estos términos en las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento.

$$u = \bar{u} + u' \quad (4.7)$$

$$v = \bar{v} + v' \quad (4.8)$$

$$w = \bar{w} + w' \quad (4.9)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (4.10)$$

Donde las condiciones medias se pueden definir como:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u_i dt; \bar{p} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p dt \quad (4.11)$$

El delta de tiempo ( $t_2 - t_1$ ) es muy grande si se compara con la escala temporal del movimiento turbulento y es muy corto al contrastarlo con la escala de tiempo del flujo medio en problemas transitorios.

Cuando las ecuaciones 4.7, 4.8 y 4.9 son sustituidas en 4.1 y 4.2 y tomando un promedio del conjunto de las ecuaciones se llega a la ecuación de gobierno para un campo de flujo medio.

$$\partial_i \bar{u}_i = 0 \quad (4.12)$$

$$\partial_t \bar{u}_i + \bar{u}_j \partial_j \bar{u}_i = -\frac{1}{\bar{\rho}} \partial_i \bar{p} + g_i + \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_j \bar{\tau}_{ij} - \partial_j \overline{u'_i u'_j} - \frac{1}{\bar{\rho}'} \partial_i \bar{p}' + \frac{1}{\bar{\rho}' } \partial_j \bar{\sigma}'_{ij} \quad (4.13)$$

Una de las ventajas de este sistema de ecuaciones es que aún después de reemplazar las cantidades instantáneas por las cantidades medias continúan siendo muy exactas dado que no se ha introducido algún tipo de simplificación. Este procedimiento genera un inconveniente en el sistema de ecuaciones por el hecho de que ya no es un sistema cerrado debido a la no linealidad de la ecuación de momento y a los términos desconocidos entre las velocidades

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

fluctuantes  $\overline{u'_i u'_j}$ . Físicamente estos términos multiplicados por la densidad representan el transporte de masa, momento y calor debido al movimiento fluctuante originado por la turbulencia. El término  $\overline{\rho u'_i u'_j}$  indica el momento en la dirección  $x_i$  aplicado en la dirección  $j$ ; éste actúa como un esfuerzo sobre el fluido y por lo tanto se conoce como el término turbulento o esfuerzos de Reynolds. En muchas regiones del flujo los esfuerzos y flujos turbulentos son mucho mayores que sus contrapartes laminares  $\nu \partial_j \bar{u}_i$ , esto hace que en muchas ocasiones sean despreciados.

Estas ecuaciones se resuelven para los valores medios de la velocidad y la presión al mismo tiempo que para las cantidades turbulentas  $\overline{u'_i u'_j}$ . Es necesario derivar expresiones de transporte a partir de  $\overline{u'_i u'_j}$  sin recurrir a los términos de orden superior; en lugar de esto lo que comúnmente se realiza es tomar expresiones de menor orden o directamente las ecuaciones del flujo medio. Las leyes descritas por el modelo de turbulencia simulan el carácter medio de una situación de turbulencia real y se expresan mediante ecuaciones diferenciales o algebraicas que en conjunto con las ecuaciones del flujo medio conforman un sistema cerrado. La calidad de los resultados de la turbulencia en la simulación depende fundamentalmente de los términos de transporte en la ecuación de momento. En algunas regiones del flujo los términos inerciales del lado izquierdo de la ecuación se compensan principalmente por los gradientes de presión y los términos de flotación, aún si el flujo es turbulento. Un ejemplo de esto se tiene en capas límites donde la separación del flujo ocurre dentro de una capa de poco espesor o en flujos preponderantemente horizontales de profundidad somera, esto supone que la modelación de la turbulencia es inefectiva y se puede utilizar una solución de flujo potencial para enfrentar el problema. En otras condiciones como chorros o estelas de flujo, estos términos adquieren mayor relevancia en el balance de las componentes inerciales y son muy importantes a la hora de modelar la turbulencia.

Las ecuaciones 4.12 y 4.13 conforman el conjunto de expresiones conocido como ecuaciones de Reynolds. Al efectuar una comparación con las ecuaciones iniciales de gobierno se observan dos términos adicionales para las correlaciones entre la densidad, el gradiente de presiones y los esfuerzos viscosos fluctuantes. Como se acepta que la densidad es constante en el interior del fluido, estos términos solo son importantes en las zonas cercanas a la superficie libre. Además, la importancia de estas expresiones aún no está comprendida en su totalidad por lo que serán despreciados ahora para efectos de cálculo. El único factor que será tomado en cuenta en el cálculo del flujo medio es el de los esfuerzos de Reynolds.

$$R_{ij} = -\overline{u'_i u'_j} \quad (4.14)$$

Dado que tanto las condiciones de frontera para el fondo y la condición dinámica de superficie libre son lineales en términos de la velocidad y la presión, las ecuaciones 4.3, 4.4 y 4.5 se pueden aplicar al campo de flujo medio, precisando que las cantidades instantáneas se reemplazan por sus correspondientes cantidades medias. En la ecuación 4.6 como se tienen términos no lineales en la función advectiva  $F(x, t) = \rho$ , los términos adicionales aparecen en la ecuación de flujo medio. Una vez que se efectúa el promedio del conjunto de términos de la ecuación 4.6 se ejecuta el mismo procedimiento empleado en las ecuaciones de conservación de la masa y momento a excepción de las componentes de densidad  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ , obteniendo



## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

lo siguiente:

$$\partial_t \bar{\rho} + \bar{u}_i \partial_i \bar{\rho} = -\partial_i \overline{u'_i \rho'} \quad (4.15)$$

La parte derecha de la ecuación 4.15 representa la correlación entre la densidad fluctuante cerca de la superficie libre y la velocidad fluctuante. Nuevamente, debido a la falta de conocimiento de este término en las inmediaciones de la superficie del flujo, es despreciado. La forma de esta ecuación es idéntica que la ecuación 4.6; la única diferencia se presenta en que las cantidades instantáneas fueron reemplazadas por las cantidades medias. Es importante mencionar que para flujo turbulento la superficie libre del campo de flujo medio no está bien definida; las oscilaciones causadas por la velocidad que fluctúa en las vecindades de ésta generan una región con un espesor finito y la densidad media,  $\rho$ , varía entonces de  $\rho_f$  a cero (aire). Esta región se puede considerar como la región media de superficie libre (media), y su espesor depende totalmente de la intensidad de la turbulencia.

Los problemas de cierre de la turbulencia contienen demasiadas dificultades en cuanto a las fluctuaciones de la superficie libre, por lo tanto no se tendrá en cuenta este efecto aceptando que la superficie libre está claramente definida aún en flujo turbulento, lo cual sugiere que  $\bar{\rho} = \rho = \rho_f$  a lo largo de todo el fluido.

Esta aproximación permite considerar que la densidad es constante dentro de todo el dominio de cálculo definido. Así, el término viscoso de la ecuación 4.13 es reemplazado por  $\partial_j (2\nu\sigma_{ij})$ , donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática ( $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ). En el desarrollo del modelo este término viscoso es modificado y es más utilizado que el original de la ecuación 4.13.

### 4.4. Modelo de Transporte de Turbulencia

En la solución de las ecuaciones de Reynolds para un flujo medio se deben relacionar los esfuerzos de Reynolds con la velocidad media. Entre las investigaciones realizadas para encontrar un modelo de cierre apropiado se ha encontrado al modelo  $k - \epsilon$  como uno de los más precisos, donde  $k$  es la energía cinética turbulenta y  $\epsilon$  la tasa de disipación turbulenta.

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (4.16)$$

$$\epsilon = \nu \overline{(\partial_j u'_i)^2} \quad (4.17)$$

La idea fundamental de este modelo es manifestar la relación entre los esfuerzos de Reynolds y la tasa de esfuerzos del flujo medio.

$$\overline{u'_i u'_j} = -2\nu_t \overline{\sigma_{ij}} + \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} \quad (4.18)$$

$\nu_t$  es la viscosidad de remolino que depende del estado local de la turbulencia, y  $\delta_{ij}$  es el delta Kronecker. La viscosidad de remolino se considera como función de  $k$  y  $\epsilon$ .

#### 4.4.1. Ecuación de Transporte para la Energía Cinética Turbulenta

Para obtener la ecuación de transporte para la energía cinética turbulenta se multiplica la ecuación de momento 4.2 por la componente de velocidad turbulenta  $u'_i$  y se toma entonces el promedio de la ecuación resultante.

$$\partial_t k + \overline{u_j} \partial_j k = -\frac{1}{\rho} \partial_j \left( \overline{u'_j p'} + \frac{\rho}{2} \overline{u_i'^2 u_j'} \right) + v \partial_j^2 k - \overline{u'_i u'_j} \partial_j \overline{u_i} - v \overline{(\partial_j u'_i)^2} \quad (4.19)$$

La parte izquierda de la ecuación 4.19 calcula la tasa de cambio de la energía cinética turbulenta para el campo de flujo medio. El primer término del lado derecho indica la difusión turbulenta de  $k$  a través del trabajo hecho por la presión turbulenta y el flujo de energía cinética. El segundo término representa la difusión molecular de  $k$ , la cual usualmente es mucho más pequeña que la difusión turbulenta. El tercer término denota la tasa de cambio de  $k$  debida al trabajo de los esfuerzos de Reynolds en oposición a los gradientes del flujo medio. Este término representa el intercambio de energía del flujo medio, la energía del flujo turbulento y el llamado término de producción. La última expresión es la tasa de disipación de energía de  $\epsilon$  ocasionada por los esfuerzos viscosos.

La ecuación de gobierno para  $k$  (4.19) no puede ser resuelta porque aparecen correlaciones de alto orden,  $\overline{u'_j p}$  y  $\overline{u_i'^2 u_j'}$ . Se podrían desarrollar otras ecuaciones para éstos, pero los términos de orden superior siempre van a aparecer. Por lo tanto, se deben imponer condiciones de cierre adicionales a la hora de definir el problema. Si se analizan los trabajos desarrollados por Launder y Spalding (1972) y Rodi (1984) los términos de difusión turbulenta se modelaron empleando la hipótesis de gradiente-difusión.

$$-\frac{1}{\rho} \partial_j \left( \overline{u'_j p} + \frac{\rho}{2} \overline{u_i'^2 u_j'} \right) = \partial_j \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \partial_j k \right) \quad (4.20)$$

en la cual  $\sigma_k$  es una constante de difusión empírica. Sustituyendo 4.16, 4.17, 4.18 y 4.20 en 4.19 se obtiene la ecuación para la energía cinética turbulenta.

$$\partial_t k + \overline{u_j} \partial_j k = \partial_j \left[ \left( \frac{v_t}{\sigma_k} + v \right) \partial_j k \right] + v_t (\partial_j \overline{u_i} + \partial_i \overline{u_j}) \partial_j \overline{u_i} - \epsilon \quad (4.21)$$

Donde se ha empleado la ecuación de continuidad para el flujo medio. Al resolver la ecuación 4.21 se requiere la información del campo de flujo medio que es descrita por las ecuaciones de Reynolds 4.13 y la tasa de disipación turbulenta,  $\epsilon$ . Por lo tanto, es necesario encontrar otra ecuación para  $\epsilon$ .

#### 4.4.2. Ecuación de Transporte para la Tasa de Disipación Turbulenta

La ecuación para  $\epsilon$  se puede obtener al derivar la componente  $x_i$  en la ecuación de momento 4.2, multiplicando luego la ecuación resultante por  $v \partial_j u'_i$  y finalmente se toma el promedio del conjunto resultante.

**CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO**

$$\begin{aligned}
 \partial_t \epsilon + \overline{u_j} \partial_j \epsilon &= 2v \overline{\partial_k u'_i \partial_j u'_i \partial_j u'_k} - 2 \overline{(v \partial_{k,j} u'_i)^2} - \dots \\
 &\quad \frac{1}{\rho} \partial_k \left[ \overline{\rho v u_k (\partial_j u'_i)^2} + 2v \overline{\partial_i u'_k \partial_i p'} - \overline{\rho v \partial_k \epsilon} \right] - \dots \\
 &\quad 2v \left( \overline{\partial_j u'_i \partial_j u'_k} + \overline{\partial_i u'_j \partial_k u'_j} \right) \partial_k \overline{u_i} - 2v \overline{u'_k \partial_j u'_i \partial_{k,j}^2 u'_i}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

De forma similar a la ecuación 4.19 la anterior ecuación tiene términos de orden superior. El significado físico de cada término del lado derecho es: a) el primer término representa la producción por la extensión de la vorticidad como consecuencia de la vorticidad turbulenta; b) el segundo término la disipación viscosa debido a los gradientes espaciales de la vorticidad turbulenta; c) el tercer término tiene forma de divergencia espacial e indica la difusión molecular y turbulenta de  $\epsilon$ ; d) los dos últimos términos representan la producción debido a la interacción entre la relación turbulenta y los gradientes de velocidades medios.

Los problemas de cierre correspondientes a los términos del lado derecho de la ecuación 4.22 tienen que ser aproximados. Inicialmente se modelan los términos de difusión utilizando la hipótesis de gradiente-difusión:

$$\text{Difusión } \epsilon \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \partial_j \epsilon \right) \tag{4.23}$$

$\sigma_\epsilon$  es una constante empírica. En segundo lugar se modela la diferencia entre la producción y la disipación.

$$(\text{Producción-Disipación})_\epsilon \rightarrow C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} v_t (\partial_j \overline{u_i} + \partial_i \overline{u_j}) \partial_j \overline{u_i} - C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \tag{4.24}$$

donde  $C_{1\epsilon}$  y  $C_{2\epsilon}$  son dos coeficientes empíricos relacionados a la producción y disipación de  $\epsilon$ . La relación  $\frac{k}{\epsilon}$  denota la característica de tiempo de decaimiento. La ecuación 4.22 se puede simplificar de la siguiente forma:

$$\partial_t \epsilon + \overline{u_j} \partial_j \epsilon = \partial_j \left( \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \partial_j \epsilon \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} v_t (\partial_j \overline{u_i} + \partial_i \overline{u_j}) \partial_j \overline{u_i} - C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \tag{4.25}$$

Mediante análisis dimensional, la viscosidad tiene unidades de  $\left(\frac{l^2}{t}\right)$ . Entonces la relación empírica  $v_t$ ,  $k$  y  $\epsilon$  se puede escribir:

$$v_t = C_d \frac{k^2}{\epsilon} \tag{4.26}$$

$C_d$  es una constante empírica. Aunque las hipótesis de cierre empleadas en las ecuaciones  $k-\epsilon$  son ordinarias (sin refinar), este modelo se ha empleado satisfactoriamente para predecir diversos flujos complejos. Los valores recomendados para los coeficientes son de acuerdo con Rodi (1984):

$$C_d = 0.09; \quad C_{1\epsilon} = 1.44; \quad C_{2\epsilon} = 1.92; \quad \sigma_k = 1.0; \quad \sigma_\epsilon = 1.3$$

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

### 4.4.3. Determinación de los Coeficientes del Modelo ( $k - \epsilon$ )

A pesar de que los coeficientes del modelo ( $k - \epsilon$ ) son considerados de alguna forma como referencia para diversos tipos de flujos turbulentos, es importante saber cómo se obtienen y qué hipótesis son tomadas en cuenta. Estas hipótesis también sugieren las limitaciones del modelo y las posibilidades que permiten mejorarlo.

Se observa que las ecuaciones originales se obtienen de las ecuaciones básicas para el movimiento de un fluido, es decir, las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones de los esfuerzos de Reynolds sin tomar en consideración hipótesis alguna. Sin embargo, las ecuaciones ( $k - \epsilon$ ) están compuestas de una serie de suposiciones orientadas a la solución de cierre de los términos de orden superior. Además de estas hipótesis en el modelo de turbulencia, se acepta que las características de éstas no cambian bajo diferentes condiciones de flujo. Se ocupa por ejemplo, que los modelos con los mismos coeficientes se deben aplicar tanto para flujos turbulentos bien desarrollados como para flujos turbulentos transitorios. La razón fundamental de esta afirmación es que muchas de las mediciones de turbulencia que se utilizan para estimar los parámetros del modelo solo se pueden realizar y analizar bajo estados simples o cuasi-estables (turbulencia bien desarrollada); mientras que en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería los flujos son complejos y transitorios. La brecha entre los estudios teóricos de un flujo turbulento simple y la aplicación práctica de flujos turbulentos complejos hasta la fecha no ha sido resuelta; lo que resta entonces es mantener la hipótesis propuesta para el estudio de flujos turbulentos y complejos utilizando modelos de turbulencia en los que los coeficientes son determinados bajo suposiciones simples.

#### 4.4.3.1. Estimación de $C_{2\epsilon}$

Para la determinación del coeficiente  $C_{2\epsilon}$  se consideran flujos turbulentos disipativos simples. Las condiciones de este tipo de flujos no comprenden gradientes de velocidad media y de ese modo no hay producción de turbulencia. Un caso típico es el de una red unidimensional turbulenta que se genera al hacer pasar el flujo por un sistema de redes. Si la advección es mucho mayor que la difusión  $C_{2\epsilon}$  es el único coeficiente que va a aparecer en las ecuaciones 4.21 y 4.25. Para un flujo turbulento bien desarrollado se desprecia el término de la derivada temporal, entonces  $k$  y  $\epsilon$  solo son funciones de  $x$ . Las ecuaciones simplificadas son:

$$\bar{u}d_x k = -\epsilon \quad (4.27)$$

$$\bar{u}d_x \epsilon = -C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (4.28)$$

La solución general de este sistema de ecuaciones es:

$$k = k_0 (1 + \xi x)^{-n} \quad (4.29)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \xi x)^{-n-1} \quad (4.30)$$

Con  $\xi$  y  $n$  como coeficientes, además

**CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO**

$$C_{2\epsilon} = \frac{n+1}{n} \quad (4.31)$$

Las mediciones del índice de decaimiento de  $k$  en la red de turbulencia  $-n$ , indican que  $C_{2\epsilon}$  está en el rango de 1.8 y 2.0 (Rodi, 1984). Generalmente la mayor parte de los modelos adoptan el valor de 1.9.

**4.4.3.2. Estimación de  $C_d$**

El coeficiente  $C_d$  es el que relaciona los valores de  $k$  y  $\epsilon$  con la viscosidad de remolino,  $\nu_t$ . Por el equilibrio de las capas de esfuerzos locales,  $P = \epsilon$ ; esto se da generalmente en capas límites turbulentas de esfuerzos constantes. Como  $P = \nu_t (\partial_y \bar{u})^2 = \frac{(\overline{u'v'})^2}{\nu_t}$ , donde  $y$  es la coordenada normal al flujo medio  $\bar{u}$ ; por definición  $\epsilon = C_d \frac{k^2}{\nu_t}$ , se tiene:

$$C_d = \left( \frac{\overline{u'v'}}{k} \right)^2 \quad (4.32)$$

Como resultado de las mediciones realizadas, el valor de  $\frac{\overline{u'v'}}{k}$  en flujos medios está alrededor de 0.3, lo que da un  $C_d = 0.09$ .

**4.4.3.3. Estimación de  $C_{1\epsilon}$**

En la región donde la velocidad tiene perfil logarítmico en un canal con flujo totalmente desarrollado, se asume que  $P = \epsilon$  y se desprecia la advección. El gradiente de la velocidad media se puede expresar como:  $\partial_y \bar{u} = \frac{u_*}{ky}$ , donde  $y$  es la coordenada normal al flujo medio,  $u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$  la velocidad de fricción,  $k = 0.41$  la constante de Von Karman y  $\tau_w$  son los esfuerzos cortantes en dirección transversal al flujo sobre la pared. Esto muestra entonces que en la región con perfil logarítmico  $k$  se mantiene constante sobre  $y$ ,  $k = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_d}}$ ,  $\epsilon = \frac{u_*^3}{ky}$  y  $u_*^2 = -\overline{u'v'}$ . Como consecuencia de las suposiciones realizadas, la ecuación 4.25 se puede reducir a:

$$\frac{C_d k^2}{\sigma_\epsilon \epsilon} d_y^2 \epsilon - \frac{C_d k^2}{\sigma_\epsilon \epsilon^2} (d_y \epsilon)^2 + (C_{1\epsilon} - C_{2\epsilon}) \frac{\epsilon^2}{k} = 0 \quad (4.33)$$

Al sustituir la forma de solución para  $\epsilon$  en la ecuación anterior se obtiene:

$$C_{1\epsilon} = C_{2\epsilon} - \frac{k^2}{\sigma_\epsilon \sqrt{C_d}} \quad (4.34)$$

Los valores de los coeficientes  $C_d$ ,  $C_{2\epsilon}$  y  $\sigma_\epsilon$  son conocidos. El valor de  $C_{1\epsilon}$  es fijo. Lo único que falta es determinar el valor de  $\sigma_\epsilon$  y así poder obtener  $C_{1\epsilon}$ .

**4.4.3.4. Estimación de  $\sigma_\epsilon$  y  $\sigma_k$**

Es de esperarse que  $\sigma_\epsilon$  y  $\sigma_k$  sean cercanos a la unidad, lo que implica que  $k$  y  $\epsilon$  se difunden altamente a la misma tasa que la velocidad media. Por cuestiones de optimizar tiempo máquina, los valores que se adquieren para estos coeficientes son 1.3 y 1.0. El valor de  $\sigma_\epsilon$

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

fija el valor de  $C_{1\epsilon}$  a 1.49. Sin embargo, en muchas aplicaciones de los modelos  $k - \epsilon$  este coeficiente se aproxima a 1.44.

### 4.4.4. Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera para el flujo a lo largo de fronteras sólidas y de la superficie libre se describieron en las ecuaciones 4.3, 4.4 y 4.5, sin embargo, es necesario desarrollar las condiciones de frontera para las ecuaciones  $k$  y  $\epsilon$ . La determinación de éstas no es sencilla, en parte por la falta de un adecuado entendimiento de la física de la rotura. En las situaciones donde existe la ausencia de fuerzas externas en la superficie libre parece ser razonable la afirmación de que la turbulencia no es difusa a través de ésta. En consecuencia, los flujos normales de  $k$  y  $\epsilon$  desaparecen en la superficie libre.

$$\partial_i k n_i = 0; \quad \partial_i \epsilon n_i = 0 \quad (4.35)$$

En teoría la turbulencia desaparece de la pared, esto indica que  $k$  y  $\epsilon$  son cero. Sin embargo, en la práctica la solución de la subcapa viscosa no puede ser pequeña. Por consiguiente, las condiciones de frontera para  $k$  y  $\epsilon$  se especifican generalmente en la capa límite turbulenta, en lugar de la pared, pues en esta última dominan y se mantienen constantes los esfuerzos cortantes transversales al flujo. Si se toma la aproximación de capa límite se llega a:

$$-\partial_y \overline{u'v'} + \nu \partial_y^2 \bar{u} = 0 \quad (4.36)$$

donde  $y$  es la coordenada normal a la pared. Si se realiza la integración desde la pared a un punto ubicado fuera de la capa viscosa, es decir, donde sus efectos puedan ser despreciados, se tiene:

$$(-\overline{u'v'})_{y=y} = (-\nu \partial_y \bar{u})_{y=0} = \frac{1}{\rho} \tau_w = u_*^2 \quad (4.37)$$

Como se indicó en la sección anterior el gradiente de la velocidad media se puede expresar como:

$$d_y \bar{u} = \frac{u_*}{ky} \quad (4.38)$$

Integrando la ecuación anterior tenemos el llamado perfil logarítmico (ley logarítmica de pared).

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \left( E \frac{u_* y}{\nu} \right) \quad (4.39)$$

donde  $E = 9.0$  para una pared lisa. Como la tasa de producción es la misma que la de disipación,  $\epsilon = P$ , de las ecuaciones 4.37 y 4.38 se llega a:

$$\epsilon = -\overline{u'v'} d_y \bar{u} = \frac{u_*^3}{ky} \quad (4.40)$$

De la ecuación 4.18 la viscosidad de remolino se puede obtener como:

$$v_t = -\frac{\overline{u'v'}}{\partial_y \bar{u}} = k u_* y \quad (4.41)$$

Dado que la viscosidad de remolino es proporcional a la distancia existente entre la pared y la capa límite turbulenta, se sustituyen las ecuaciones 4.40 y 4.41 en la 4.26.

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_d}} \quad (4.42)$$

Las ecuaciones 4.40 y 4.41 son las condiciones de frontera para  $k$  y  $\epsilon$  en los puntos de cálculo adyacentes a la frontera sólida (condición de fondo). La velocidad de fricción se puede determinar a partir de la ecuación 4.39 una vez que ha sido obtenido el campo de velocidades.

## 4.5. Solución de las Ecuaciones de Reynolds

Una parte importante en la solución de las ecuaciones de Reynolds es la forma de interpretar cada uno de los términos que la componen, los cuales difieren sustancialmente de los términos encontrados al aplicar los principios de conservación de la masa y momento.

Los términos advectivos en la ecuación de momento tienen la misma forma que los encontrados en la ecuación de conservación. Sin embargo, las componentes difusivas (términos viscosos) a pesar de ser similares que sus homólogos de la ecuación de origen por el hecho de tener forma vectorial, tienen contribuciones más complejas y por lo tanto el tratamiento numérico debe ser más detallado. Por otro lado, la contribución de la presión en las ecuaciones de momento no es análoga a la ecuación genérica, pues la presión debe ser considerada como un término fuente (campo de presiones como fuerza de cuerpo) o como fuerza de superficie (tratamiento conservativo). Esto se debe a la estrecha conexión existente entre la presión y la ecuación de continuidad y hace de su tratamiento un caso especial. Finalmente, el hecho de que las nuevas componentes tengan carácter vectorial da la ventaja de tener más libertad en la selección de la malla.

### 4.5.1. Discretización de los Términos Convectivos y Viscosos

El término convectivo en la ecuación de momento es no lineal tanto en su forma diferencial como integral.

$$\partial_j(\rho u_i u_j) \quad y \quad \int_S \rho u_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.43)$$

El tratamiento de los términos convectivos puede ser realizado por cualquier método de discretización, que para este caso fue un método upwind de tercer orden de aproximación.

Los términos viscosos en la ecuación de momento corresponden a los términos de difusión en la ecuación de conservación. Su forma integral y diferencial viene dada por la siguiente expresión:

$$\partial_j(\tau_{ij}) \quad y \quad \int_S (\tau_{ij} \mathbf{i}_j) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.44)$$

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

para un fluido Newtoniano e incompresible,

$$\tau_{ij} = \mu(\partial_j(u_i) + \partial_i(u_j)) \quad (4.45)$$

Por la forma vectorial de la ecuación de momento, los términos viscosos son más difíciles de manejar que los difusivos. La parte del término viscoso que en la ecuación de momento corresponde al término difusivo en la ecuación de conservación es

$$\partial_j(\mu\partial_j u_i) \quad \text{y} \quad \int_S (\mu\nabla u_i) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.46)$$

Este término es discretizado utilizando diferencias centradas e indican solo una contribución de los efectos viscosos en la componente  $i$ -ésima de momento. Las ecuaciones de conservación en su forma canónica permiten identificar las otras contribuciones de la viscosidad (cuando es diferente de cero para fluidos compresibles) y otras contribuciones debidas a la variabilidad espacial de la viscosidad. Aunque se debe notar que para fluidos incompresibles con propiedades constantes, esas contribuciones desaparecen gracias a la ecuación de continuidad.

Los términos adicionales que son diferentes de cero cuando la viscosidad es parcialmente variable en un fluido incompresible son tratados de la misma manera que la ecuación 4.45.

$$\partial_j(\mu\partial_i u_j) \quad \text{y} \quad \int_S (\mu\partial_i u_j \mathbf{i}_j) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.47)$$

$\mathbf{n}$  es un vector unitario normal a la superficie del volumen de control. Estos dos últimos términos desaparecen cuando la viscosidad es constante. Por esta razón este término se trata de forma explícita aún cuando se utilicen métodos implícitos. Cuando se presenta el caso que la viscosidad varía un poco, este término es muy pequeño comparado con la ecuación 4.47 por lo que su influencia es muy ligera a la hora de la convergencia.

### 4.5.2. Discretización de los Términos de Presión

La forma original de la ecuación de momento que contiene el gradiente de presiones se puede aproximar con métodos de diferencias finitas. Sin embargo, como los nodos de la presión y la velocidad no coinciden en los puntos de la malla, las aproximaciones utilizadas para su solución no necesariamente coinciden.

En los métodos de volumen finito, la presión se aplica comúnmente como una fuerza de superficie (aproximación conservativa), es decir, la ecuación para la velocidad horizontal se muestra como:

$$- \int_S p \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.48)$$

El tratamiento del término de la presión y el arreglo de las variables en la malla juega un papel fundamental a la hora de asegurar la eficiencia y precisión del método de solución numérica.



## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

La presión se puede tratar de forma no conservativa, al aplicar la forma integral en su forma volumétrica.

$$- \int_{\Omega_c} \nabla p \cdot \mathbf{i}_i d\Omega_c \quad (4.49)$$

La derivada se debe aproximar en una o más posiciones dentro del volumen de control (para mallas no ortogonales). La forma no conservativa de la ecuación introduce un error global no conservativo, aunque este error tiende a cero cuando el tamaño de la malla es muy pequeño y puede ser significativo para mallas de tamaño finito.

Otras fuerzas de cuerpo, como las no conservativas surgen cuando las velocidades covariantes o contravariantes se utilizan en sistemas coordenados no cartesianos, que son fáciles de tratar con esquemas de diferencias finitas. Si estos términos contienen componentes viscosas desconocidas se pueden manejar implícitamente:  $-2\mu \frac{v_r}{r^2}$

En el método de volumen finito este término se integra sobre el volumen de control. Generalmente, se utiliza la aproximación del valor medio, por lo que el valor del centro se multiplica por el volumen de la celda. En algunos casos los términos no conservativos, considerados como fuerzas de cuerpo, dominan la ecuación de transporte.

### 4.5.3. Propiedades de Conservación

El sistema de ecuaciones que se está analizando tiene la propiedad que la ecuación de momento para cualquier punto del volumen de control (microscópico o macroscópico) cambia por el solo hecho de que el flujo pase a través de su superficie, por las fuerzas que actúan en la superficie y por las fuerzas de cuerpo volumétrico.

La conservación de la energía es un aspecto más complejo. En flujos isotérmicos incompresibles, la única energía significativa es la energía cinética. Cuando la transferencia de calor es importante, la energía cinética es pequeña comparada con la energía térmica, lo que convierte a la ecuación introducida para determinar el transporte de energía en una ecuación de conservación de calor. Siempre y cuando la dependencia de la temperatura en las propiedades del fluido no sea significativa, la ecuación de calor se puede resolver luego de que la solución de la ecuación de momento sea obtenido.

La ecuación de la energía cinética es obtenida al tomar el producto escalar de la ecuación de momento con la velocidad, un procedimiento similar al utilizado en la derivación de la ecuación de energía clásica de la mecánica. En contraste al flujo compresible, para el cual existe una ecuación de conservación adicional para la energía total, en los flujos isotérmicos incompresibles tanto la conservación del momento como la energía son una consecuencia de la misma ecuación.

Generalmente el tema que mayor interés despierta es la ecuación de conservación de energía cinética para un volumen de control macroscópico, que puede ser el volumen entero o una

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

pequeña parte de éste. Si la ecuación de energía cinética local se integra sobre el volumen de control, se puede obtener, a partir del teorema del Gauss la siguiente expresión.

$$\partial_t \int_{\Omega_c} \rho \frac{v^2}{2} d\Omega_c = - \int_S \rho \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS - \int_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_S (\mathbf{S} : \nabla \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + p \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) d\Omega_S \quad (4.50)$$

La  $\mathbf{S}$  es la parte viscosa del tensor de esfuerzos. El primer término en la integral de volumen del lado derecho de la ecuación desaparece si el flujo se encuentra carente de viscosidad. El segundo término es cero si el fluido es incompresible. El tercer término es cero si en el fluido hay ausencia de fuerzas viscosas.

Por otro lado, los tres primeros términos del lado derecho de la ecuación son integrales sobre la superficie del volumen de control. Esto significa que la energía cinética en el volumen de control no cambia por la acción de la convección y/o la presión dentro de éste. En la ausencia de viscosidad, solo el flujo de energía a través de la superficie o el trabajo hecho por las fuerzas viscosas actuando en la superficie del volumen de control pueden afectar la energía cinética dentro de éste. De acuerdo con esto, la energía cinética se conserva de manera global. Es importante tener en cuenta que esta propiedad se debe preservar a la hora de aplicar el método numérico.

Garantizar la conservación de la energía a escala global es el objetivo deseado, aunque no es una tarea fácil de lograr. Esto se debe a que la energía cinética es una consecuencia de la ecuación de momento, no una ley de conservación diferente, por lo que no puede ser cumplida de forma diferente.

Si el método numérico permite la conservación de energía y el flujo neto de energía a través de la superficie es cero, entonces la energía cinética total no incrementará con el tiempo. Si se utiliza este tipo de métodos, la velocidad en cada punto del dominio se debe conservar en la frontera, lo que provee un tipo de estabilidad numérica. La conservación de la energía no dice nada acerca de la estabilidad numérica o la precisión del método. Las soluciones más precisas se obtienen por lo general con métodos no conservativos para la energía cinética.

Dado que la ecuación de la energía cinética es consecuencia de la ecuación de momento, la conservación de la energía cinética global debe ser una consecuencia de las ecuaciones de momento discretizadas. Para ver la forma como esto surge, se forma la ecuación de momento de la energía correspondiente a la ecuación de momento discretizada tomando el producto escalar con la velocidad y sumando sobre todo el volumen de control.

El término de gradiente de presiones es muy importante, así que debe analizarse a fondo. Para obtener este término se usa la siguiente igualdad:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla p = \nabla \cdot (p\mathbf{n}) - p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (4.51)$$

Para flujos incompresibles,  $p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , así que el primer término del lado derecho se mantiene. Como es una divergencia, la integral de volumen se puede convertir en una integral de superficie. Esto significa que la presión influencia la energía cinética total solo por su acción

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

en la superficie.

La ecuación de Poisson se utiliza con frecuencia para solucionar la ecuación de la presión. Como se explica más adelante, ésta es determinada al tomar la divergencia de la ecuación de momento. El operador Laplaciano en la ecuación de Poisson es el producto del operador divergencia en la ecuación de continuidad y el operador gradiente en la ecuación de momento. La aproximación de la ecuación de Poisson no puede ser seleccionada de forma independiente; esta debe ser consistente con la divergencia y el gradiente al aplicar el principio de conservación de la masa.

Para un flujo incompresible sin la presencia de fuerzas de cuerpo, la única integral de volumen es la correspondiente al término viscoso. Para un fluido Newtoniano, este término se representa por,

$$- \int_{\Omega} \tau_{ij} \partial_i u_j d\Omega \quad (4.52)$$

Este término asociado a las fuerzas viscosas es una suma de cuadrados, lo que demuestra es que su valor siempre será cero o un valor negativo. Esto representa la irreversible conversión de energía cinética del flujo en energía interna, que es lo que generalmente se conoce como disipación viscosa. Como los flujos incompresibles son usualmente flujos de bajas velocidades, la adición de la energía interna rara vez es significativa aunque la pérdida de energía cinética si es frecuentemente importante.

Cuando se realiza la discretización de la ecuación, el método de diferencias puede generar que se pierda la propiedad de la conservación de la energía. Por esto, el método de Crank-Nicolson es una buena opción de discretización. En éste, la ecuación de momento se puede aproximar así,

$$- \frac{\rho \Delta \Omega}{\Delta t} (u_i^{n+1} - u_i^n) \quad (4.53)$$

Se debe considera el producto escalar de este término con  $u_i^{n+\frac{1}{2}}$ , que con este esquema se aproxima por  $(u_i^{n+1} + u_i^n)/2$ . Al aplicar esto resulta el cambio de energía cinética.

$$\frac{\rho \Delta \Omega}{\Delta t} \left[ \left( \frac{v^2}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{v^2}{2} \right)^n \right] \quad (4.54)$$

Donde  $v^2 == u_i u_i$ . Con la apropiada selección del método de aproximación de las ecuaciones de diferencias a los otros términos, el esquema de Crank-Nicolson es conservativo.

El hecho de que las ecuaciones de conservación momento y energía estén gobernadas por la misma ecuación hace que la construcción de la aproximación numérica sea un poco compleja. Dado que la conservación de la energía no puede ser forzada y si las ecuaciones de momento son escritas mediante una forma de conservación fuerte utilizando, por ejemplo, el método de volumen finito, entonces se puede concluir que la conservación del momento está asegurada. En ese sentido se debe seleccionar el método y determinar si es conservativo o no. Si no es

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

conservativo se deben hacer ajustes para hasta que se alcance la conservación.

Un método alternativo de garantizar la conservación de la energía cinética es utilizar una forma diferente de la ecuación de momento. Para un flujo incompresible se puede utilizar la siguiente ecuación.

$$\partial_t u_i + \epsilon_{ijk} u_j w_k = \partial_i \left( \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u_j u_i \right) + \nu \partial_j^2 u_i \quad (4.55)$$

Donde  $\epsilon_{ijk}$  es el símbolo de Levi-Cevita (este es (+1) si  $\{ijk\} = \{123\}$ ) o en una permutación de éste se puede dar que (sea (-1) si  $\{ijk\}$  es una permutación impar de  $\{321\}$ ) sino su valor es cero.  $w$  es la vorticidad. En este caso la conservación de la energía sigue a la forma de la ecuación de conservación por simetría. Cuando la ecuación anterior es multiplicada por  $u_i$  el segundo término del lado izquierdo de la ecuación es cero como consecuencia de una propiedad asimétrica del  $\epsilon_{ijk}$ .

La conservación de la energía adquiere particular importancia en el cálculo de flujos transitorios. Ejemplos de esto se pueden ver en la simulación de modelos de corrientes a escala global o simulación de flujos turbulentos. La falta de control en la conservación de la energía en ese tipo de simulaciones, frecuentemente conduce al incremento de la energía cinética y a la inestabilidad del modelo. Para flujo estacionario, la conservación de la energía es menos importante pero no evita ciertas inestabilidades asociadas al método de solución iterativo.

La energía cinética no es solo la cantidad cuya conservación debe ser asegurada. La cantidad de momento angular es otra cantidad que debe ser evaluada. Los flujos en máquinas rotatorias, de combustión interna y otros tipo de dispositivos pueden generar rotaciones en el flujo. Si el método numérico no garantiza la conservación del momento angular es probable que se tengan problemas para llegar a la solución. Los esquemas de diferencias centradas generalmente son mejores que los esquemas descentrados con respecto al momento angular.

### 4.5.4. Cálculo del Campo de Presiones

La solución de las ecuaciones de Navier-Stokes es complejo por la ausencia de un término independiente para el cálculo de la presión, cuyo gradiente contribuye a cada una de las tres ecuaciones de momento. Además, la ecuación de continuidad no tiene una variable dominante en los flujos incompresibles. La conservación de la masa es una restricción cinemática en el campo de velocidades más que una ecuación dinámica. Una manera de evitar esta dificultad es construir un campo de presiones que garantice la ecuación de continuidad. En primera instancia esto parece un poco raro, pero se da muy a menudo. Esto se nota al analizar el campo de presiones, donde se observa claramente que la presión absoluta no es de importancia en los flujos incompresibles; solo el gradiente de presiones es el que afecta el flujo.

La ecuación de continuidad en flujos incompresibles se utiliza para determinar la densidad y la presión se estima de una ecuación de estado. Esta aproximación no es apropiada para flujos incompresibles o flujos con números de Mach bajos.

#### 4.5.4.1. Solución de la Presión

La ecuación de momento determina las componentes de velocidad, por lo que su papel está claramente definido. Esto deja la responsabilidad a la ecuación de continuidad, la cual no contiene el término de la presión, la estimación de la presión. El método más común de lograr este objetivo es la combinación de dos ecuaciones.

La forma de la ecuación de continuidad sugiere que se debe tomar la divergencia de la ecuación de momento. Con este procedimiento la ecuación de conservación de la masa se puede utilizar para simplificar la ecuación resultante, con lo que resulta la ecuación de Poisson para la presión y viene definida de la siguiente forma:

$$\operatorname{div}(\nabla p) = -\operatorname{div}[\operatorname{div}(\rho v v - S) - \rho b + \partial_t(\rho v)] \quad (4.56)$$

En coordenadas cartesianas esta ecuación tiene la siguiente forma.

$$\partial_i(\partial_i p) = -\partial_i[\partial_j(\rho u_i u_j - \tau_{ij})] + \partial_i(\rho b_i) + \partial_t^2 \rho \quad (4.57)$$

Para el caso de densidad constante y viscosidad, la ecuación se simplifica aún más; los términos transitorios y viscosos desaparecen en virtud de la ecuación de continuidad, resultando:

$$\partial_i(\partial_i p) = -\partial_i[\partial_j(\rho u_i u_j)] \quad (4.58)$$

La ecuación de la presión se puede resolver con la ayuda de un método numérico aplicable a la resolución de ecuaciones elípticas. Se debe notar que el lado derecho de la ecuación de la presión es una suma de derivadas de términos que aparecen en la ecuación de momento.

Es importante notar que el Laplaciano en la ecuación de la presión es el producto de la divergencia originada en la ecuación de continuidad y el gradiente que viene de la ecuación de momento. En caso que esta condición no sea válida genera el incumplimiento de la ecuación de continuidad. Para analizar la importancia de este aspecto, se puede observar que la derivada exterior sale de la ecuación de continuidad mientras que la derivada interna surge de la ecuación de momento.

Este tipo de ecuación se utiliza para calcular la presión bien por métodos explícitos como implícitos. Para mantener la consistencia entre las aproximaciones empleadas, la mejor opción es estimar la ecuación de la presión de las aproximaciones discretizadas de la conservación del momento y la masa en lugar de usar la ecuación de Poisson. De acuerdo con esto, la ecuación de la presión se utiliza para estimar el campo de presiones a partir del campo de velocidades obtenido al resolver la ecuación de la vorticidad.

#### 4.5.4.2. Esquema explícito de avance en el tiempo

La selección del tipo de aproximaciones empleadas en las derivadas espaciales no adquiere un carácter tan riguroso, así que las ecuaciones de momento discretizadas (discretas solo en el espacio) se pueden escribir de la siguiente manera:

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

$$\partial_t (\rho u_i) = -\partial_j (\partial u_i u_j) - \partial_i p + \partial_j \tau_{ij} = H_i - \partial_i p \quad (4.59)$$

$\partial_i$  representa la derivada espacial discretizada (esta se puede representar de manera diferente en cada término) y  $H_i$  es una notación abreviada para los términos de advectivos y viscosos, que para el tratamiento del cálculo de la presión no son importantes.

Si la ecuación 4.59 se desea resolver con el método explícito de Euler con el avance en el tiempo, se tiene la siguiente expresión:

$$(\rho u_i)^{n+1} - (\rho u_i)^n = \Delta t (H_i^n - \partial_i p^n) \quad (4.60)$$

Si se utiliza este método, la velocidad en el paso de tiempo,  $n$ , es utilizada para calcular  $H_i^n$  y si se conoce en este paso la presión,  $\partial_i p^n$ , también se puede calcular. Esto permite una nueva estimación de  $\rho u_i$  en el nuevo paso de tiempo ( $n + 1$ ). En general, este campo de velocidades no satisface la ecuación de continuidad.

$$\Delta_i (\rho u_i)^{n+1} = 0 \quad (4.61)$$

Para ver cómo puede ser forzado el cumplimiento de la ecuación de continuidad, el camino a seguir es tomar la divergencia de la ecuación 4.61, donde resulta:

$$\partial_i (\rho u_i)^{n+1} - \partial_i (\rho u_i)^n = \Delta t [\partial_i (H_i^n - \partial_i p^n)] \quad (4.62)$$

El primer término de la ecuación corresponde a la divergencia del nuevo campo de velocidades, el cual debe ser cero. El segundo término es cero si la continuidad es forzada en el paso de tiempo  $n$ . Este término es necesario conservarlo cuando se utiliza un método iterativo para resolver la ecuación de Poisson para la presión y el método no llega a la convergencia completamente. Por otro lado, la convergencia del término viscoso  $H_i$  es cero cuando la densidad es constante. De acuerdo con lo anterior, la ecuación discreta de Poisson toma la siguiente forma:

$$\partial_i (\partial_i p^n) = \partial_i (H_i^n) \quad (4.63)$$

El operador  $\partial_i$  fuera del paréntesis es la divergencia inherente a la ecuación de continuidad, mientras que  $\partial_i p^n$  es el gradiente de presiones derivado de la ecuación de momento. Si la presión  $p^n$  satisface la ecuación de Poisson, el campo de velocidades en el tiempo  $n + 1$  estará libre de la divergencia en términos del operador de divergencia en las ecuaciones discretas. Si el campo de presiones ha sido tratado implícitamente, se tendría  $p^{n+1}$  en lugar de  $p^n$  pero todo lo demás se mantiene sin cambio alguno.

Existen métodos similares que se utilizan para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes cuando se necesita precisión con el paso de tiempo. La diferencia principal se basa en que los métodos con avance en el tiempo son más precisos y utilizados que el método de Euler y que algunos de sus términos deben ser tratados de manera implícita.

#### 4.5.4.3. Esquema implícito de avance en el tiempo

Algunas dificultades surgen cuando se desea resolver las ecuaciones de Navier-Stokes a través de métodos implícitos. Un método implícito muy conocido es el método de Euler o método de diferencias desplazadas a la izquierda, que comúnmente se utiliza como ejemplo para entender el funcionamiento de un método implícito, cuya ecuación viene dada así:

$$(\rho u_i)^{n+1} - (\rho u_i)^n = \Delta t (\partial_j (\rho u_i u_j)^{n+1} - \partial_i p^{n+1} + \partial_j \tau_{ij}^{n+1}) \quad (4.64)$$

Dentro de las diferencias que se observan a primera vista es que la presión no se obtiene de forma tan directa. La divergencia del campo de velocidades en el nuevo paso de tiempo debe ser cero, propiedad que comparte con el método explícito. Al tomar la divergencia de la ecuación 4.64 se asume que el campo de velocidades en el paso de tiempo  $n$  está libre de divergencia y demanda que la divergencia en el nuevo paso de tiempo  $n + 1$  también sea cero. Esto conduce a la siguiente ecuación:

$$\partial_i (\partial_i p^{n+1}) = \partial_i (\partial_j (\rho u_i u_j)^{n+1}) \quad (4.65)$$

El problema del término del lado derecho de la ecuación 4.65 se conserva hasta que no se obtenga el campo de velocidades en el paso de tiempo  $n + 1$  y viceversa. Por lo tanto, las ecuaciones de Poisson y momento se deben calcular simultáneamente, y esto solo se puede hacer realizando un proceso iterativo.

Además, aun conociendo el valor de la presión, la ecuación 4.64 es un sistema de ecuaciones no lineales que debe ser resuelto para el campo de velocidades. La estructura del sistema de ecuaciones es esencialmente la misma que la matriz de la ecuación de Laplace en diferencias finitas, la cual se puede resolver a través de muchos sistemas de solución de ecuaciones de forma simple. Si se desea resolver de forma precisa, el mejor procedimiento consiste en tomar los valores que resultaron de la convergencia del paso de tiempo anterior como valor supuesto inicial para el cálculo del nuevo campo de velocidades, lo que hace que el tiempo de convergencia del nuevo ciclo de tiempo sea más corto.

Otro método alternativo de tratar con la no-linealidad de las ecuaciones es construir un sistema linealizado acerca del resultado obtenido en el paso de tiempo anterior. Si se tiene la siguiente ecuación

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta u_i \quad (4.66)$$

entonces los términos no lineales de la ecuación 4.64 se expresan como

$$u_i^{n+1} u_j^{n+1} = u_i^n u_j^n + u_i^n \Delta u_j + u_j^n \Delta u_i + \Delta u_i u_j \quad (4.67)$$

Se espera que al menos para  $\Delta t$  pequeños,  $\Delta u_i \sim \Delta t \partial_t u_i$ , así que el último término de la ecuación es de segundo orden en  $\Delta t$  y es menor que la magnitud del error de la discretización. Por lo tanto este se puede despreciar. Si se utiliza un método de segundo orden de aproximación en el tiempo, como el método de Cranck-Nicholson, este deberá tener el mismo error que la discretización espacial y con esto se tiene la justificación necesaria para despreciarlo.

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

$$\rho\Delta u_i = \Delta t (\partial_j (\rho u_i u_j)^n + \partial_j (\rho u_i^n \Delta u_j) + \partial_j (\rho \Delta u_i u_j^n) - \partial_i p^n - \partial_i \Delta p + \partial_j \tau_{ij}^n + \partial_j \Delta \tau_{ij}) \quad (4.68)$$

Este método toma ventaja del hecho que la no-linealidad es cuadrática y desaparecen muchas de las dificultades que surgen de la ecuación. Sin embargo, aún queda por resolver el sistema de ecuaciones. Una solución directa de éste es muy costosa desde el punto de vista numérico por ser resuelta iterativamente. Una posibilidad es utilizar el método implícito de dirección alternativa (ADI), al dividir las ecuaciones en una serie de problemas unidimensionales, cada uno de los cuales es un bloque tridiagonal. La solución del nuevo paso de tiempo se puede encontrar con suficiente precisión con una sola iteración.

Una estrategia razonable es utilizar la linealización local basada en la ecuación 4.65 y actualizar la ecuación con el método ADI utilizando el gradiente de presión anterior. Para ello se utiliza el siguiente esquema.

- Se calcula el campo de velocidades con el campo de presiones hallado en el paso de tiempo anterior. Esta no satisface la ecuación de continuidad.
- Resolver la ecuación de Poisson para la corrección de la presión.

$$\partial_i^2 \Delta p = \partial_i (\rho u_i^*) \quad (4.69)$$

- Calcular la velocidad final

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \partial_i \Delta p \quad (4.70)$$

que satisface la ecuación de continuidad.

El método implícito descrito está diseñado para producir una solución precisa de un problema transitorio. En problemas de este tipo, la precisión requerida usualmente fija el paso de tiempo, el cual será más bajo. Como permite grandes pasos de tiempo para que no presente inestabilidades, los métodos implícitos se utilizan frecuentemente para resolver problemas de flujos en estado estacionario.

### 4.5.4.4. Métodos implícitos de corrección de la presión

Muchos métodos utilizados en la solución de problemas estacionarios se pueden considerar para resolver flujos transitorios hasta que se alcanza un estado estacionario. Los métodos implícitos son más utilizados para la solución de flujos en estado estacionario y transitorio, porque tienen restricciones menos estrictas en el paso de tiempo con respecto a los métodos explícitos.

Existen en la literatura métodos de solución para flujos incompresibles de tipo implícito, y en particular, algunos de los procedimientos más utilizados para la solución de la presión son considerados como variaciones del método descrito en la sección anterior. Estos últimos emplean la ecuación de la presión (o corrección de la presión) para forzar la conservación de



## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

la masa en cada paso de tiempo.

Si un método implícito se utiliza para calcular el valor de la propiedad conservativa en la ecuación de momento en cada iteración, las ecuaciones discretizadas del campo de velocidades en el paso de tiempo siguiente son no lineales. Si el término del gradiente de presión no se incluye en el término fuente, la ecuación de momento se expresa como:

$$A_P^{u_i} u_{i,P}^{n+1} + \sum_l A_l^{u_i} u_{i,l}^{n+1} = Q_{u_i}^{n+1} - (\partial_i p^{n+1})_P \quad (4.71)$$

$P$  es el índice de un nodo arbitrario de la velocidad y el índice  $l$  denota los puntos vecinos que aparecen en la discretización de la ecuación de momento. El término fuente  $Q$ , contiene todos los términos que pueden ser calculados explícitamente en términos de  $u_i^n$  así como las fuerzas de cuerpo u otros términos linearizados que dependen de término  $u_i^{n+1}$  u otras variables en el nuevo paso de tiempo. El término de la presión está escrito de forma simbólica como diferencias para profundizar en la independencia del método de solución en su forma discreta para las derivadas espaciales. La discretización de estas derivadas pueden ser de cualquier tipo y orden.

Debido a la no-linealidad y acoplamiento de las ecuaciones diferenciales, el sistema de ecuaciones 4.71 no se puede resolver directamente para el coeficiente  $A$ , y posiblemente, el término fuente, depende de la solución desconocida del término  $u_i^{n+1}$ . La única vía es la solución iterativa. Si se está calculando un flujo transitorio y se requiere precisión en el tiempo, la iteración se debe continuar dentro de cada paso de tiempo hasta que el sistema no lineal de ecuaciones esté satisfecho para la tolerancia establecida. Para flujos estacionarios, la tolerancia puede ser menos rígida que en el caso anterior; se tienen dos opciones para el procedimiento iterativo, tomar bien un paso de tiempo infinito o iterativo hasta que las ecuaciones lleguen a la convergencia, o avanzar en el tiempo con la condición de la satisfacción completa del sistema no lineal en cada paso de tiempo.

Las iteraciones dentro de un paso de tiempo, donde se calculan para cada ciclo los coeficientes y la matriz fuente, son conocidas como iteraciones exteriores al distinguirlas de iteraciones interiores calculadas en sistemas lineales con coeficientes fijos. En cada iteración exterior, las ecuaciones se resuelven así:

$$A_P^{u_i} u_{i,P}^{m*} + \sum_l A_l^{u_i} u_{i,l}^{m*} = Q_{u_i}^{m-1} - (\partial_i p^{m-1})_P \quad (4.72)$$

Se disminuyó el índice del paso de tiempo ( $n+1$ ) y se introdujo un contador de la iteración  $m$ ;  $u_i^m$  representa la estimación actual de la solución  $u_i^{n+1}$ . En el inicio de cada iteración exterior, los términos del lado derecho de la ecuación 4.72 se evalúan tomando las variables de la iteración anterior.

Las ecuaciones de momento generalmente son solucionadas de manera secuencial, es decir, el conjunto de ecuaciones algebraicas para cada componente de la ecuación de momento se soluciona en turno, donde los valores de los puntos de la malla para las componentes

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

dominantes de la velocidad son tratados como un conjunto de variables desconocidas. Como la presión utilizada en esta iteración fue obtenida de la iteración anterior, las velocidades calculadas a partir de la ecuación 4.72 no satisfacen la ecuación de continuidad discretizada. Para forzar esta condición, las velocidades se deben corregir. Esto requiere de una modificación del campo de presiones.

La velocidad en el nodo P, obtenida al resolver la ecuación de momento linealizada y descrita por la ecuación 4.72 se puede expresar de manera formal así:

$$u_{i,P}^{m*} = \frac{Q_{u_i}^{m-1} - \sum_l A_l^{u_i} u_{i,l}^{m*}}{A_p^{u_i}} - \frac{1}{A_p^{u_i}} (\partial_i p^{m-1})_P \quad (4.73)$$

El campo de velocidades no satisface la ecuación de continuidad, así que  $u_{i,P}^{m*}$  no es el valor de la velocidad final en la iteración  $m$ ; este corresponde a un valor supuesto y por eso lleva un asterisco. El valor de la velocidad final tiene que cumplir la conservación de la masa. En virtud de esto, el primer término del lado derecho de la ecuación queda representado por la ecuación siguiente:

$$u_{i,P}^{m*} = \tilde{u}_{i,P}^{m*} - \frac{1}{A_p^{u_i}} (\partial_i p^{m-1})_P \quad (4.74)$$

El campo de velocidades  $u_i^{m*}$  se puede considerar como un término en el cual la contribución del gradiente de presiones ha sido eliminada. Como el método es implícito, esta no es la velocidad que debería ser obtenida al disminuir el gradiente de presiones de forma completa en la ecuación 4.71.

Al corregir las velocidades para satisfacer la ecuación de continuidad, se tiene:

$$\partial_i (\rho u_i^m) = 0 \quad (4.75)$$

que puede ser obtenida de la corrección del campo de presiones. Las presiones y velocidades corregidas se encuentran unidas por medio de la siguiente ecuación:

$$u_{i,P}^{m*} = \tilde{u}_{i,P}^{m*} - \frac{1}{A_p^{u_i}} (\partial_i p^m)_P \quad (4.76)$$

La ecuación de continuidad ahora es forzada al insertar la expresión anterior para  $u_i^m$  en la ecuación de continuidad 4.75, generando la ecuación de Poisson discreta para la presión:

$$\partial_i \left[ \frac{\rho}{A_p^{u_i}} (\partial_i p^m) \right]_p = [\partial_i (\rho \tilde{u}_i^{m*})]_P \quad (4.77)$$

Las derivadas de la presión, como se había mencionado en el interior de los corchetes, se deben discretizar de la misma forma que las ecuaciones de momento. Las derivadas exteriores, que vienen de la ecuación de continuidad se deben discretizar de la misma forma que la ecuación de origen.

Después de resolver la ecuación de Poisson con la ecuación 4.77, el campo de velocidad final en la nueva iteración,  $u_i^m$ , se calcula con la ecuación ???. Este último campo de velocidades

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

satisface ya la ecuación de continuidad, pero los campos de presión y la velocidad no satisfacen la ecuación de momento. En ese punto es donde inicia el proceso de iteración que debe ser continuado hasta que la velocidad satisfaga tanto la conservación de continuidad como de momento.

Los métodos de este tipo, donde se construye primero un campo de velocidades que no satisface la conservación de la masa y luego se corrige al sustraer un término (en este caso la presión) se conocen como métodos de proyección. Este nombre se deriva del concepto que la divergencia aplicada parte del campo proyectado.

En uno de los métodos más comunes de este tipo, la corrección de la presión se utiliza en lugar de calcular la presión en tiempo  $n$ . Las velocidades calculadas de las ecuaciones linealizadas de momento y la presión  $p^{m-1}$  se toma como valores provisionales a los cuales se les debe añadir una pequeña corrección:

$$u_i^m = u_i^{m*} + u' \quad yp^m = p^{m-1} + p' \quad (4.78)$$

Si esta ecuación se sustituye en las ecuaciones de momento dadas por las ecuaciones 4.72, se puede obtener una relación entre las velocidades y las presiones corregidas:

$$u'_{i,P} = \tilde{u}'_{i,P} - \frac{1}{A_P^{u_i}} \left( \partial_i p' \right)_P \quad (4.79)$$

Donde  $\tilde{u}'_i$  es definida por:

$$\tilde{u}'_{i,P} = - \frac{\sum_l A_l^{u_i} u'_{i,l}}{A_P^{u_i}} \quad (4.80)$$

La aplicación de la ecuación de continuidad discreta 4.75 para corregir la velocidad y empleando la ecuación 4.79 produce la ecuación de corrección de la presión:

$$\partial_i \left[ \frac{\rho}{A_P^{u_i}} \left( \partial_i p' \right) \right]_P = [\partial_i (\rho u_i^{m*})]_P + \left[ \partial_i \left( \rho \tilde{u}'_i \right) \right]_P \quad (4.81)$$

La velocidad corregida  $\tilde{u}'_i$  es desconocida en este punto, así que comúnmente es despreciada. Esta hipótesis es difícil de justificar y probablemente es la principal razón por la que el método resultante no llega a la convergencia rápidamente.

Existen métodos menos rigurosos para la corrección de la velocidad. En el método que se acaba de describir, una vez se ha resuelto la presión corregida, las velocidades son actualizadas utilizando las ecuaciones 4.78 y 4.79. Esta metodología es conocida como algoritmo *SIMPLE* (Caretto et al., 1972).

Una metodología a la hora de tratar el último término de la corrección de la presión en la ecuación 4.81 es efectuar una aproximación en lugar de evitar abordarlo. Uno podría aproximar la velocidad corregida  $u'_i$  en cualquier nodo por un promedio pesado de los valores vecinos, por ejemplo:

**CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO**

$$u'_{i,P} \approx \frac{\sum_l A_l^{u_i} u'_{i,l}}{\sum_l A_l^{u_i}} \quad (4.82)$$

Esto permite realizar una aproximación  $u'_{i,P}$  de la ecuación 4.80 como

$$\tilde{u}'_{i,P} \approx -u'_{i,P} \frac{\sum_l A_l^{u_i}}{A_P^{u_i}} \quad (4.83)$$

Cuando este término se inserta en la ecuación 4.79, lo que conduce a la siguiente relación de aproximación entre  $u'_i$  y  $p'$ :

$$u'_{i,P} = -\frac{1}{A_P^{u_i} + \sum_l A_l^{u_i}} \left( \partial_i p' \right)_P \quad (4.84)$$

Con esta aproximación el coeficiente  $A_P^{u_i}$  en la ecuación 4.81 se reemplaza por  $A_P^{u_i} + \sum_l A_l^{u_i}$  y desaparece el último término. Este es el conocido método *SIMPLEC* (van Doormal y Raithby, 1984).

Existe otro método general de este tipo que se obtiene de derivar al despreciar  $\tilde{u}'_i$  en el primer paso de corrección como en el método *SIMPLE*, pero se realiza la corrección con otro tipo de corrector. La segunda corrección que se efectúa al término  $u''$  se define por:

$$u''_{i,P} = \tilde{u}'_{i,P} - \frac{1}{A_P^{u_i}} + (\partial_i p'')_P \quad (4.85)$$

donde,  $u'_i$  se calcula de la ecuación 4.80 después de haber calculado  $u'_i$  de la ecuación 4.79 sin tomar en cuenta el término  $\tilde{u}'_i$ . La aplicación de la ecuación de continuidad discretizada 4.72 para corregir las velocidades conduce a la segunda ecuación de corrección de la presión:

$$\partial_i \left[ \frac{\rho}{A_P^{u_i}} \left( \partial_i p'' \right) \right]_P = \left[ \partial_i \left( \rho \tilde{u}'_i \right) \right] \quad (4.86)$$

Este procedimiento es esencialmente un método iterativo para resolver la ecuación 4.81 solucionando el último término de manera explícita. Se conoce como el algoritmo *PISO* (Issa, 1986).

Un método similar al algoritmo anterior fue propuesto por Patankar (1980) y es conocido como *SIMPLER*. En este, la presión de la ecuación 4.81 se resuelve de manera similar al método *SIMPLE*, eliminando el último término. La componente corregida de la presión se obtiene utilizando solo el campo de velocidades corregidas con el fin de satisfacer la ecuación de continuidad, es decir, para obtener  $u_i^m$ . El nuevo campo de presiones se estima mediante la ecuación 4.77 empleando el término  $\tilde{u}_i^m$  en lugar de  $u_i^{m*}$ .

Se observa que al no tomar en cuenta el término  $\tilde{u}'_i$  en la ecuación 4.81, el algoritmo *SIMPLE* no converge rápidamente. Su buen funcionamiento depende fundamentalmente del valor del paso de tiempo, para flujos estacionarios, en donde el valor del parámetro de sub-relajación se debe utilizar en las ecuaciones de momento. Se ha encontrado mediante métodos de prueba

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

y error que la convergencia de este método mejora notablemente si se añade solo una porción de  $p'$  a  $p^{m-1}$ , es decir, si se toma

$$p^m = p^{m-1} + \alpha_P p' \quad (4.87)$$

Luego que se resuelve la ecuación de corrección de la presión, donde  $0 \leq \alpha_P \leq 1$ . Los métodos PISO, SIMPLE y SIMPLEC no necesitan de un factor de sub-relajación para la corrección de la presión.

En determinado caso, se puede obtener una relación entre los factores de sub-relajación de los campos de la presión y la velocidad mediante el siguiente argumento.

$$u'_{i,P} = -\frac{1}{A_P^{u_i}} \left( \partial_i p' \right)_P \quad (4.88)$$

Se puede alcanzar una expresión para  $\alpha_P$  si se utiliza la ecuación 4.87

$$\alpha_P = 1 - \frac{\tilde{u}'_{i,P}}{u'_{i,P}} \quad (4.89)$$

Se puede calcular  $u'_{i,P}$  utilizando la ecuación 4.78, pero en problemas multidimensionales, se tiene más de una ecuación desde las cuales  $\alpha_P$  se puede calcular. Sin embargo, si en lugar de calcular  $u'_{i,P}$  se utiliza la aproximación 4.81 empleada en el algoritmo *SIMPLEC*, la ecuación de arriba se reduce a:

$$\alpha_P = 1 + \frac{\sum_l A_l^{u_i}}{A_P^{u_i}} \quad (4.90)$$

### 4.6. Reconstrucción de la Superficie Libre

En la actualidad los métodos de diferencias finitas para el cálculo de la dinámica de fluidos incompresibles están muy bien establecidos. El primer método de que funcionó satisfactoriamente en el tratamiento de movimientos complejos de superficie libre fue el *método de Marker and Cell* (MAC). También fue la primera técnica en utilizar la velocidad y la presión como variables dependientes. MAC utiliza una distribución de partículas marcadas para definir regiones de flujo junto con un simple arreglo de presiones en la superficie libre en el centro de las celdas, definiendo con esto la superficie contenida dentro de éstas. Posteriormente, con base en la técnica MAC, Hirt y Nichols (1981) desarrollan el método VDF para el tratamiento de superficies libres.

Las fronteras libres se consideran como superficies en las que se tienen discontinuidades en más de una variable. Ejemplos de esto lo constituyen la superficie libre, interfaces entre materiales, ondas expansivas (de choque) o interfaces entre un fluido y estructuras deformables. El proceso de involucrar superficies discontinuas en una matriz de celdas computacionales involucra tres tareas por separado. Primero, es necesario idear un medio que permita describir numéricamente la localización y forma de la frontera. En segundo lugar, se debe desarrollar un algoritmo para calcular la evolución temporal de la frontera. Finalmente, se debe generar

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

un esquema para imponer las condiciones de frontera de superficie deseadas sobre todo el borde de la malla de cálculo. Los dos primeros problemas están relacionados debido a que el método de descripción gobernará la selección del algoritmo de evolución. Por otro lado, la aplicación de las condiciones de frontera es independiente de la forma como sea definido el flujo.

El método de Volumen de Fluido (VDF) parte del principio que en cada celda de la malla se utiliza generalmente un solo valor para cada variable independiente que define el estado del fluido. El hecho de utilizar muchos puntos en una celda para definir la región de flujo da la impresión de ser excesivo. Por este motivo se define una función  $F$  cuyo valor es unitario y que varía en función de una convención numérica adoptada. Se establece entonces que cualquier punto ocupado por fluido va a tener el valor de la unidad en la función  $F$  y será cero en caso contrario. Dicho valor unitario corresponde a una celda totalmente llena de fluido, mientras que el valor de cero indica que la celda está vacía. Las celdas que presentan valores de la función  $F$  entre cero y uno deben contener entonces la superficie libre. La técnica de VDF permite localizar las fronteras libre cercanas así como la distribución de las partículas marcadas, pero es necesario desarrollar un algoritmo que permita obtener de forma precisa la evolución del campo de  $F$ .

### 4.6.1. Función de Altura

Generalmente, la superficie libre se define a partir de la distancia que se encuentra desde una línea de referencia expresada como una función de la posición  $h=f(x,t)$  a lo largo de ésta. En los flujos a superficie libre, la evolución de dicha función se encuentra gobernada por una ecuación cinemática que describe la forma como evoluciona la superficie libre con el movimiento del fluido.

$$\partial_t h + u \partial_x h = w \quad (4.91)$$

Donde  $(u,w)$  son las componentes de la velocidad en las direcciones coordenadas  $(x,z)$ .

### 4.6.2. Segmentos de Línea

Una forma colectiva del método de función de altura utiliza segmentos cortos de línea o puntos conectados por segmentos de línea. Para construir la superficie libre se deben ingresar las coordenadas de los puntos y para tener más precisión se debe limitar la distancia entre estos puntos con la mínima separación, que es función del espaciamiento de la malla.

La evolución de cada segmento se da al mover cada punto con su correspondiente velocidad local, determinada mediante interpolaciones en las fronteras de cada celda de la malla. La limitante del método se debe al ordenamiento lineal de los segmentos y en el instante de la adición o eliminación de un segmento para mejorar la resolución. Especialmente cuando se encuentran o dividen dos superficies los segmentos de línea deben ser reordenados, quizás añadiendo o borrando algún segmento. Si existiese algún método para ver con antelación la intercepción de las fronteras no se crearían problemas en el proceso de reordenamiento, sin embargo, la detección de este punto o el hecho de determinar cómo se debe reordenar

el segmento de línea no es sencillo. En consecuencia, la estimación de los puntos siguientes requeridos para la configuración de la superficie libre requiere muchos esfuerzos.

### **4.6.3. Marcado de Partículas**

Este procedimiento, a diferencia del anterior, se basa en analizar las regiones ocupadas por fluido, evaluando no sólo la posición sino también la velocidad de una partícula específica. Esto supone por supuesto, un aumento en la capacidad de memoria y almacenamiento de la información en el computador como consecuencia del incremento en el número de puntos de la malla que se deben ingresar. Las superficies se definen como fronteras con y sin partículas marcadas, es decir, una celda de la malla que contiene un marcador puede tener un vecino cercano que probablemente no esté ocupado por fluido y por tanto estará sin marcador, por lo tanto se dice que la celda marcada es contenedora de la superficie libre. La localización de la superficie libre en el punto e instante de análisis se determina mediante un cálculo adicional basado en la distribución de los marcadores dentro de la celda.

El método de marcación de partículas ofrece diferentes ventajas a la hora de abordar los problemas lógicos asociados con la intercepción de dos o más superficies. Esto es un hecho asociado al ordenamiento obligatorio de las partículas con sus vecinas en el momento de marcar la superficie, sin embargo, no se debe realizar dicho ordenamiento al marcar una región. En conclusión, este método se utiliza para definir regiones de flujo en lugar de interfaces, lo que asegura mayor simplicidad lógica para situaciones que involucran la interacción de fronteras múltiples en problemas de flujo no confinado. En virtud de lo anterior, el hecho de tener mayor simplicidad genera un gran aumento en cuanto al almacenamiento de la información y una mejora significativa en tiempo de cálculo necesario para mover todos los puntos a nuevas posiciones.

### **4.6.4. Método de Volumen de Fluido**

Este procedimiento se basa en almacenar en cada celda de la malla una propiedad del flujo con lo que se define el estado en el que se encuentra el fluido, dado que utilizar diversos puntos en una celda para definir la región ocupada por el fluido es poco práctico. Se debe considerar una velocidad continua en la superficie libre para asegurar que el cuerpo de agua sea continuo (continuidad de las partículas) en el proceso de la rotura. La ecuación de gobierno que describe el transporte del flujo y la dependencia de la función  $F$  en el tiempo es:

$$\partial_t F + u_i \partial_i F = 0 \tag{4.92}$$

Cuando se produce la rotura el fluido no es una superficie continua y la ecuación 4.92 pierde validez. Debido a esto  $F$  debe ser asumida como una función de densidad  $F(x, t) = \rho(x, t)$  lo que da validez a la ecuación 4.92 antes y después de la rotura.

La función  $F$  adquiere un valor unitario en cualquier punto ocupado por fluido y cero en caso contrario. Un valor medio de esta función representa la fracción de volumen de la celda que es ocupada por fluido. En particular, el valor unitario de  $F$  indica que la celda está totalmente llena por el flujo que circula, y cero corresponde a una celda vacía. Las celdas que tienen

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

asociados valores de  $F$  entre cero y uno contienen la superficie libre. El método de fracción de volumen de fluido (VDF) arroja el mismo tamaño de información que el método del marcador de partícula.

Para definir el instante en que una celda posee una frontera, el marcador de partículas calcula el punto donde el fluido se encuentra en el límite de esta. El mismo procedimiento es empleado en el método VDF. En esta técnica las cantidades conservativas ( $u, v, p, F$ ) se calculan en dirección normal a las fronteras de la celda, esto permite analizar la dirección en la cual los valores de  $F$  cambian más rápidamente. Cuando la función  $F$  se calcula apropiadamente sus resultados pueden ser utilizados para determinar las fronteras normales al flujo. Finalmente, cuando la dirección y los valores de  $F$  se conocen, la línea que corta la celda se puede reconstruir al aproximar la interface del flujo.

A pesar de que la técnica VDF permite localizar fronteras de superficie libre en un nivel de precisión igual al del marcador de partículas, y posiblemente con menor información, el método es inútil si no se desarrolla un algoritmo que calcule con precisión la evolución de la función  $F$ .

La ecuación que gobierna la dependencia del  $F$  en el tiempo es:

$$\partial_t F + u\partial_x F + w\partial_z F = 0 \quad (4.93)$$

Esta ecuación diferencial parcial establece que  $F$  se mueve con el fluido. Desde un punto de vista Lagrangiano e la función  $F$  se mantiene constante en cada celda. En una malla definida desde un punto de vista Euleriano-Lagrangiano es necesario calcular el flujo de  $F$  que se mueve con el fluido a través de la celda, evitando en lo posible aproximaciones en diferencias finitas comunes donde se promedian las propiedades de todos los elementos constitutivos del fluido, que en última instancia conducen a inexactitudes de  $F$  y hacen que se pierda la definición de las interfaces entre las fronteras. Debido a la propiedad que presenta  $F$  de ser una función de paso, además de tener solo dos valores (0-1) permite tener un flujo aproximado que preserve la naturaleza de la discontinuidad.

El método VDF posee un fácil y sencillo procedimiento para reconstruir la superficie libre en problemas bidimensionales y tridimensionales. En principio el método se puede utilizar para delimitar superficies discontinuas en las propiedades del material, en el cálculo de las velocidades tangenciales o en cualquier otra propiedad del fluido. En este trabajo se determinan las condiciones de frontera que se deban aplicar para la localización de la superficie libre.

Se debe tener cuidado cuando se utilizan mallas con tamaño de celda variable. En este caso es mejor combinar la ecuación de momento con la condición de incompresibilidad para que los flujos convectivos se puedan escribir en forma divergente, ya que provee una forma más simple de asegurar la conservación del momento con la sola aplicación del teorema de Gauss. Este procedimiento se utiliza para convertir el valor de la integral de los términos de disipación viscosa en el volumen de control (VC) a flujos en las fronteras de los lados. En consecuencia,



## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

los flujos que abandonan el volumen de control (VC) automáticamente serán aumentados por el volumen de celdas adyacentes y la conservación durante la advección estará garantizada. Se debe precisar que la razón por la cual los términos advectivos pierden precisión en la conservación es que el volumen de control no se encuentra centrado en la posición donde se localizan las variables. Debido a esto, los términos advectivos se deberían corregir teniendo en cuenta las diferencias entre la localización de las variables calculadas y los centroides de su VC. Cuando esto no se hace se está introduciendo un pequeño error. Si la forma divergente se utiliza para el flujo de advección, las ventajas de estabilidad del método se conservan para una malla variable sin una reducción apreciable de la precisión.

### 4.6.4.1. Aproximación de la Ecuación de Continuidad

Las velocidades calculadas con la ecuación de momento deben satisfacer la ecuación de continuidad. Para satisfacer este criterio la presión y la velocidad se ajustan en cada celda ocupada por fluido mediante un proceso iterativo. En cada celda llena de fluido la presión es cambiada para el flujo que circula, hacia adentro o hacia afuera según el caso. Como los ajustes de la celda afectan a sus vecinos en un número de pasos a través de la malla se debe satisfacer la ecuación de continuidad en todo el dominio.

En las celdas que contienen la superficie libre el procedimiento es diferente porque la presión se asume como el valor establecido en la superficie. En este sentido, la presión de la celda de superficie con presión  $P_{i,j}$ , es igual al valor obtenido de la interpolación entre la presión deseada en la superficie ( $P_s$ ), y la presión dentro del fluido ( $P_N$ ).

$$P_{i,j} = (1 - \eta_c) P_N + \eta_c P_s \quad (4.94)$$

Donde:

$$\eta_c = \frac{d_c}{d}$$

$\eta_c$  es la relación de la distancia entre los centros de las celdas y entre la distancia de la superficie libre y el centro de la celda vecina.

La celda que se selecciona para la interpolación debería ser aquella tal que al unir sus centros (celda de superficie libre y celda llena de fluido), la línea que los une es casi normal a la superficie libre.

### 4.6.4.2. Aproximación de la Función de Volumen de Fluido

La función de VDF es gobernada por la ecuación 4.93. La idea básica del método es utilizar información aguas arriba y aguas abajo de F en las fronteras del flujo para establecer la forma de la interface y utilizar ésta en el cálculo del flujo. En primer lugar, emplea información de la superficie para mejorar el algoritmo de flujo. Segundo, la función F se utiliza para determinar la localización de la superficie y su orientación para la utilización de diversas condiciones de frontera, incluyendo las fuerzas de tensión superficial. El método de advección desarrollado en la técnica VDF se puede entender como la cantidad de F que fluye por la cara derecha de la celda durante un paso de tiempo de duración  $\delta t$ . Los flujos a través de las otras caras

## CAPÍTULO 4. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO TURBULENTO

es completamente igual. El flujo total de VDF que cruza por la cara derecha de la celda por unidad de área transversal es:

$$V = u\delta t \quad (4.95)$$

donde  $u$  es la velocidad normal a la cara de la celda. El signo de  $u$  determina si la celda es donante o receptora, es decir, si la celda pierde o gana volumen. Si  $u$  es positiva el flujo va hacia adelante, o bien, la cara izquierda de la celda es donante y aguas abajo la cara derecha es receptora. La cantidad de flujo de  $F$  que atraviesa la cara de la celda en un paso de tiempo es  $\delta F$  veces el área de la sección transversal de la cara.

$$\delta F = \text{Min} \{F_{AD}|V| + CF, F_D\delta x_D\} \quad (4.96)$$

$$CF = \text{Max} \{(1.0 - F_{AD})|V| - (1.0 - F_D)\delta x_D\}$$

Los subíndices solos indican donante y receptor. Los subíndices dobles sugieren donante o receptor dependiente de la orientación de la interface, relativa a la dirección del flujo. La característica MIN previene el flujo de fluido adicional desde la cara donante, evitando con esto que se presente más flujo del que se puede dar; MAX es tenido en cuenta para un flujo adicional, CF, si la cantidad de vacío al que está siendo fluido, excede una cantidad disponible.

### 4.6.4.3. Estimación de las interfaces dentro de una celda

Para la aplicación exacta de las condiciones de frontera se requiere conocer la localización de la frontera dentro de la celda. En la técnica VOF la frontera se puede aproximar por una línea recta de corte a través de la celda. Primero se debe determinar la pendiente de la recta, por lo que uno se puede mover a través de la celda hasta una posición que intersecte la cantidad de VOF conocida.

Al determinar la pendiente de la superficie, se puede observar que ésta se puede representar como una única función ( $y$ ) o  $x()$  en función de su orientación. Si se representa con ( $y$ ) se puede calcular  $\frac{dy}{dx}$ . Una buena aproximación de ( $y$ ) es:

$$y_i = y(x_i) = F(i, j - 1)\delta y_{j-1} + F(i, j)\delta y_j + F(i, j + 1)\delta y_{j+1} \quad (4.97)$$

Una vez que la pendiente y el lado ocupado por fluido se determinan, se construye una línea en la celda con la cantidad correcta de VDF pasando del lado del flujo. Esta línea se utiliza como una aproximación de la superficie actual y posee la información necesaria para calcular la superficie libre para aplicar las condiciones de frontera.

# 5

---

## Descripción Simplificada del Modelo

### 5.1. Introducción

La mayor parte de los fenómenos que estudia la ingeniería, y en particular la hidráulica se representan por medio de modelos matemáticos, donde se emplean ecuaciones algebraicas, diferenciales ordinarias o parciales, sistemas de ecuaciones, etc. En numerosas ocasiones estas ecuaciones son de difícil solución con métodos analíticos, o bien son desconocidas. En estas condiciones se pueden emplear métodos numéricos de análisis.

Históricamente, el primer método desarrollado para discretizar ecuaciones diferenciales fue el método de diferencias finitas. En el dominio, donde se busca la solución de un problema diferencial parcial se introduce una malla (regular o no regular) y cada función del problema se aproxima por un conjunto de sus valores en los puntos de la malla, llamado función discreta. Una función discreta también puede considerarse como un vector. Todas las derivadas del problema también se aproximan en los puntos de la malla usando fórmulas de diferenciación numérica. Como resultado, cada ecuación diferencial se cambia por un sistema de ecuaciones discretas obtenidas en cada punto de la malla.

El método de diferencias finitas es una clásica aproximación para encontrar la solución numérica de las ecuaciones que gobiernan el modelo matemático de un sistema continuo. Básicamente, en una solución por diferencias finitas, las derivadas son reemplazadas por aproximaciones en diferencias finitas convirtiendo entonces un problema de ecuaciones diferenciales en un problema algebraico fácil de resolver por medios matriciales comunes.

### 5.2. Ecuaciones Diferenciales Parciales

Una ecuación diferencial parcial es aquella en la cual aparecen derivadas parciales de una función desconocida con respecto a dos o más variables independientes.

$$a^2 \partial_x^2 h = \partial_t h \quad (5.1)$$

La solución de una ecuación diferencial parcial en una región  $R$  es una función definida en esta región, al igual que todas sus derivadas parciales, y la función reduce a la ecuación diferencial a una identidad en cada punto de la región  $R$ . Se dice que esta función satisface a la ecuación en  $R$ .

## CAPÍTULO 5. DESCRIPCIÓN SIMPLIFICADA DEL MODELO

Raras veces se puede hacer un proceso formal en ecuaciones no lineales, afortunadamente, muchas de las ecuaciones de interés práctico son lineales o casi lineales.

Una clase de ecuación diferencial que es frecuente encontrar son las del tipo:

$$A\partial_x^2 f + B\partial_{xy}^2 f + C\partial_y^2 f + D\partial_x f + E\partial_y f + Ff + G = 0 \quad (5.2)$$

Cuando  $A, B, C, D, E, F$  y  $G$  son funciones de  $x$  e  $y$  corresponde al caso de una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden.

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC < 0 & \text{ Ec. Elíptica} \\ B^2 - 4AC = 0 & \text{ Ec. Parabólica} \\ B^2 - 4AC > 0 & \text{ Ec. Hiperbólico} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Si se cumple la condición mostrada en la ecuación anterior podemos definir el tipo de función con la cual se va a trabajar.

En la ingeniería muchas de las ecuaciones diferenciales parciales son difíciles de resolver o bien no están resueltas por métodos analíticos. A veces se ha encontrado su solución para condiciones iniciales o de frontera particulares; sin embargo, alguna de estas soluciones no son útiles en la práctica. Para resolver las ecuaciones diferenciales parciales se puede recurrir a varios métodos numéricos.

### 5.2.1. Diferencias Finitas

Al sustituir las derivadas por cocientes de diferencias en las ecuaciones diferenciales hace posible, en muchas ocasiones, encontrar una solución que si bien no cumple exactamente con la ecuación diferencial, desde un punto de vista práctico se toma como tal.

Los cocientes de diferencias de valores de la función que sustituyen a las derivadas se llaman diferencias finitas.

Se considera entonces la serie de Taylor de una función  $f$  en la variable  $z$ .

$$f(z + \Delta z) = f(z) + f'(z) \Delta z + f''(z) \frac{\Delta z^2}{2} + f'''(z) \frac{\Delta z^3}{6} + O(\Delta z^4) \quad (5.4)$$

Donde  $O(\Delta z^4)$ : Error de truncado en la serie de Taylor de orden  $n$ , por haber despreciado los términos que involucran las derivadas de orden  $n$  en adelante.  $\Delta z$ : Incremento del valor  $z$ .

Si en la ecuación 5.4 se considera  $z = x$ ,  $\Delta z = \Delta x$  y  $\Delta z = -\Delta x$  se obtiene:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \Delta x + f''(x) \frac{\Delta x^2}{2} + f'''(x) \frac{\Delta x^3}{6} + O_1(\Delta x^4) \quad (5.5)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x) \Delta x + f''(x) \frac{\Delta x^2}{2} - f'''(x) \frac{\Delta x^3}{6} + O_2(\Delta x^4) \quad (5.6)$$

Si en las ecuaciones 5.5 y 5.6 no se toman en cuenta los términos de segundo orden y se despeja la derivada, se obtiene:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{O_1(\Delta x^2)}{\Delta x} \quad (5.7)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{O_2(\Delta x^2)}{\Delta x} \quad (5.8)$$

Si se eliminan los términos de orden tres en la ecuación 5.4 y se restan las ecuaciones 5.5 y 5.6, se llega a:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \frac{O_1(\Delta x^3) - O_2(\Delta x^3)}{2\Delta x} \quad (5.9)$$

Si los errores de truncado son muy pequeños, al despreciarlos se tiene de las ecuaciones 5.7, 5.8 y 5.12:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (5.10)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (5.11)$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (5.12)$$

Donde las ecuaciones 5.10, 5.11 y 5.12 son conocidas como diferencias finitas hacia la derecha, izquierda y central, respectivamente.

### 5.2.2. Derivadas de Orden Superior

Pueden plantearse aproximaciones a las derivadas de orden dos en adelante, sin embargo, es preferible utilizar la serie de Taylor.

Se desea obtener entonces la siguiente expresión:

$$\partial_x^2 f = 0 \quad (5.13)$$

Si se suman las ecuaciones 5.5 y 5.6 se tiene:

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + f''(x) \Delta x^2 + O_3(\Delta x^4) \quad (5.14)$$

donde,

$$O_3(\Delta x^4) = O_1(\Delta x^4) + O_2(\Delta x^4) \quad (5.15)$$

Despejando la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2} - \frac{O_3(\Delta x^4)}{\Delta x^2} \quad (5.16)$$

## CAPÍTULO 5. DESCRIPCIÓN SIMPLIFICADA DEL MODELO

Si se desprecia el error  $O_3(\Delta x^4)$  se tiene:

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2} \quad (5.17)$$

Realizando otra derivada de interés, esta se obtiene al restar la ecuación 5.6 a la ecuación 5.5.

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2f'(x)\Delta x + f'''(x)\frac{\Delta x^3}{3} + O_4(\Delta x^4) \quad (5.18)$$

$$O_4(\Delta x^4) = O_1(\Delta x^4) - O_2(\Delta x^4) \quad (5.19)$$

Reemplazando la ecuación 5.7 en la ecuación 5.18 se llega a:

$$f'''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) - 2\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \frac{O_1(\Delta x^2)}{\Delta x}\right)\Delta x - O_4(\Delta x^4)}{\frac{\Delta x^3}{3}} \quad (5.20)$$

$$f'''(x) = \frac{-f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) + 2f(x)}{\frac{\Delta x^3}{3}} + \frac{O_1(\Delta x^2) - O_4(\Delta x^4)}{\frac{\Delta x^3}{3}} \quad (5.21)$$

$$f'''(x) = \frac{-3f(x + \Delta x) - 3f(x - \Delta x) + 6f(x)}{\Delta x^3} + \frac{O_1(\Delta x^2) - O_4(\Delta x^4)}{\frac{\Delta x^3}{3}} \quad (5.22)$$

Despreciando los errores,

$$f'''(x) = \frac{-3f(x + \Delta x) - 3f(x - \Delta x) + 6f(x)}{\Delta x^3} \quad (5.23)$$

### 5.2.3. Ecuaciones Parabólicas

Se analiza este caso por medio de un ejemplo en el cual se aborda un problema de flujo potencial, donde se desea calcular la posición de la línea de saturación. La ecuación diferencial que describe el problema es:

$$\partial_t h = a^2 \partial_x^2 h \quad (5.24)$$

siendo,

$$a^2 = \frac{k_p \bar{h}}{s}$$

Donde,  $k_p$  : coeficiente de permeabilidad  $s$  : rendimiento  $\bar{h}$  : nivel promedio entre el espacio y el tiempo  $h$   
Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden parabólica que:

$$b^2 - 4ac = 0 \quad (5.25)$$

$$A = a^2; \quad B = 0; \quad C = 0 \quad (5.26)$$

$$b^2 - 4ac = 0 \rightarrow \text{Ec. Parabólica} \quad (5.27)$$

Al sustituir por diferencias finitas:

$$\partial_x^2 h \rightarrow \text{Dif. Centradas} \quad (5.28)$$

$$\partial_t h \rightarrow \text{Dif. hacia adelante} \quad (5.29)$$

Reemplazando en la ecuación de flujo

$$\frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} = \frac{f(x - \Delta x, t) - 2f(x, t) + f(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2} a^2 \quad (5.30)$$

Simplificando la expresión

$$f(x, t + \Delta t) = \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2} f(x - \Delta x, t) - 2f(x, t) + f(x + \Delta x, t) + f(x, t) \quad (5.31)$$

$$\lambda c = \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2} \quad (5.32)$$

$$f(x, t + \Delta t) = \lambda [f(x - \Delta x, t) - 2f(x, t) + f(x + \Delta x, t)] + f(x, t) \quad (5.33)$$

Considerando,

$$x = m\Delta x$$

$$x + \Delta x = (m + 1) \Delta x$$

$$x - \Delta x = (m - 1) \Delta x$$

$$t = p\Delta t$$

$$t + \Delta t = (p + 1) \Delta t$$

$$h(x, t) = h(m\Delta x, p\Delta t) = h_{m,p}$$

$$h(x + \Delta x, t) = h[(m + 1) \Delta x, p\Delta t] = h_{m+1,p}$$

$$h(x - \Delta x, t) = h[(m - 1) \Delta x, p\Delta t] = h_{m-1,p}$$

$$h(x, t + \Delta t) = h[m\Delta x, (p + 1) \Delta t] = h_{m,p+1}$$

$$h_{m,p+1} - h_{m,p} = a^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} h_{m-1,p} - 2h_{m,p} + h_{m,p+1}$$

La ecuación resultante es:

$$h_{m,p+1} - h_{m,p} = \lambda (h_{m-1,p} - 2h_{m,p} + h_{m,p+1}) \quad (5.34)$$

Donde,

$$\lambda c = \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2}$$

La ecuación 5.34 recibe el nombre de esquemas de diferencias explícito, pues en la ecuación aparece solo una incógnita y para evaluarla no se necesita resolver ningún sistema de ecuaciones.

### 5.3. Convergencia

Si  $H$  es la solución exacta de una ecuación cualquiera y  $h$  la solución exacta del esquema de diferencias finitas utilizado para aproximar dicha ecuación. La ecuación de diferencias finitas se dice convergente cuando  $h$  tiende a  $H$  en un punto fijo a lo largo de un nivel y cuando  $\Delta x$  y  $\Delta t$  tienden a cero. Esto significa que el error de discretización o truncado tiende a cero a medida que también lo hacen  $\Delta x$  y  $\Delta t$ .

Si el error  $\Delta x$  y  $E = H - h$  y  $\partial_t h = a^2 \partial_x^2 h$ ;  $0 < x < 1$

$H$  es conocida para:

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 & \text{ cuando } t = 0 \\ x = 1 & \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Considerando el esquema explícito

$$h_{m,p} = H_{m,p} - \epsilon p_{m,p} \quad (5.35)$$

$$h_{m+1,p} = H_{m+1,p} - E_{m+1,p} \quad (5.36)$$

De acuerdo al error de truncado de la serie de Taylor

$$\theta (\Delta z^n) = \partial_{z^n} f (z + \theta \Delta z); \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (5.37)$$

Lo anterior significa que  $\theta$  se debe escoger entre cero y uno de modo tal que la derivada de  $f$  de orden  $n$  respecto a  $z$  sea máxima entre  $z$  y  $\Delta z$ .

De la serie de Taylor se tiene:

$$H(x, t + \Delta t) - H(x, t) = \partial_t H(x, t + \theta \Delta t) \quad (5.38)$$

Desarrollando la serie de Taylor según  $x$

$$H(x + \Delta x, t) = H(x, t) + \partial_x h(x, t) \Delta x + \partial_x^2 H(x + \theta_2 \Delta x, t) \frac{\Delta x^2}{2} \quad (5.39)$$

$$H(x - \Delta x, t) = H(x, t) - \partial_x h(x, t) \Delta x + \partial_x^2 H(x + \theta_3 \Delta x, t) \frac{\Delta x^2}{2} \quad (5.40)$$

Sumando

$$H(x - \Delta x, t) - 2H(x, t) + H(x + \Delta x, t) = \partial_x^2 H(x + \theta_4 \Delta x, t) \Delta x \quad (5.41)$$

Utilizando los subíndices en 5.40 y 5.41

$$H_{m,p+1} - H_{m,p} = \partial_t h(m\Delta x, p\Delta t + \theta_1 \Delta t) \quad (5.42)$$



$$H_{m-1,p} - 2H_{m,p} + H_{m+1,p} = \partial_x^2 H(m\Delta x, \theta_4\Delta x, p\Delta t) \quad (5.43)$$

Según el esquema de diferencias finitas y definición del error

$$H_{m,p+1} - E_{m,p+1} = \lambda(H_{m-1,p} - E_{m-1,p}) + (1 - 2\lambda)(H_{m,p} - E_{m,p}) + \lambda(H_{m+1,p} - E_{m+1,p}) \quad (5.44)$$

Ordenando

$$\lambda(H_{m,p+1} - H_{m,p}) - \lambda(H_{m-1,p} - 2H_{m,p} + H_{m+1,p}) = 0 \quad (5.45)$$

Sustituyendo 5.42 y 5.43 en 5.45

$$E_{m,p+1} = \lambda E_{m-1,p} + (1 - 2\lambda) E_{m,p} + \lambda E_{m+1,p} + M\Delta t \quad (5.46)$$

Donde,

$$M = \partial_t H \{ (m\Delta x, p\Delta t + \theta_1\Delta t) - \lambda \partial_x^2 H(m\Delta x + \theta_4\Delta x, p\Delta t) \} \quad (5.47)$$

Para asegurar que los errores tengan signo positivo y continuar con el control del error se toma el valor absoluto de 5.46.

$$|E_{m,p+1}| = \lambda |E_{m-1,p}| + (1 - 2\lambda) |E_{m,p}| + \lambda |E_{m+1,p}| + |M| \Delta t \quad (5.48)$$

Esta ecuación es cierta cuando los coeficientes son positivos o iguales a cero. Si el mayor de los errores para cualquier pendiente en el instante  $p$  es  $E_p$ , al asignar:

$$E_p \rightarrow E_{m-1,p} \quad (5.49)$$

$$E_p \rightarrow E_{m,p} \quad (5.50)$$

$$E_{m,p} \rightarrow E_{m+1,p} \quad (5.51)$$

La ecuación 5.48 está del lado conservador (pues está considerando más error que el real y se transforma en:

$$E_{m,p+1} \leq \lambda E_p + (1 - 2\lambda) |E_p| + \lambda |E_p| + |M| \Delta t \quad (5.52)$$

$$E_{p+1} \leq E_p + |M| \Delta t \quad (5.53)$$

Si  $M$  se considera constante

$$\begin{aligned} E_1 &\leq E_0 + |M| \Delta t \\ E_2 &\leq E_1 + |M| \Delta t; & E_2 &\leq E_0 + |M| \Delta t \\ E_3 &\leq E_2 + |M| \Delta t; & E_3 &\leq E_0 + |M| \Delta t \\ E_4 &\leq \dots \end{aligned}$$

$$E_{p+1} \leq E_0 + (p + 1) |M| \Delta t \quad (5.54)$$

Como a  $t = 0$  no existe error, por tanto

$$E_{p+1} \leq (p + 1) |M| \Delta t \quad (5.55)$$

Si  $\Delta t \rightarrow 0$  y 5.47 tiende también a cero

En consecuencia, 5.55 es cero y la solución converge a  $H$ . para esto se requiere que los coeficientes de 5.48 sean positivos o iguales a cero. Para que lo sean se debe cumplir que:

$$0 \leq \lambda \leq 0.5$$

Lo que constituye la llamada condición de convergencia.

## 5.4. Variables Conservativas

A la hora de establecer las variables de cálculo para describir el problema de flujo en estudio existen diferentes opciones a considerar. Por un lado, una elección comúnmente adoptada es estimar las variables primitivas o físicas, que corresponden a la densidad  $\rho$ , la presión  $p$  y las tres componentes del campo de velocidades  $(u, v, w)$ . Por otro lado, se pueden emplear las variables conservativas, que son el resultado de la aplicación de las leyes fundamentales de conservación de la Mecánica de Fluidos (masa, momento y energía). Estas variables están constituidas por la densidad  $\rho$ , las componentes de la cantidad de movimiento por unidad de volumen  $(\rho u, \rho v, \rho w)$  y la energía total por unidad de volumen.

## 5.5. Leyes de Conservación

Son sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que expresan la conservación de ciertas cantidades expresadas en función de la masa, el momento y la energía. Si se obtienen a partir de un volumen de control fijo en el espacio, que es atravesado por un fluido (para este caso de estudio) en movimiento, se puede expresar que se encuentran escritas en forma conservativa. Este procedimiento es similar a un balance de flujos de masa y cantidad de movimiento. Cuando el volumen de control está en continuo desplazamiento con el fluido, de manera que contiene siempre las mismas partículas, el concepto cambia y se conoce como la forma no conservativa. Una ley de conservación en forma conservativa presenta el siguiente esquema:

$$\partial_t U + \partial F_x = 0 \quad (5.56)$$

$U$  se denomina vector de variables y  $F$  el vector de funciones de flujo. Cuando se expresan las leyes de conservación en forma diferencial, se asume que las ecuaciones satisfacen los correspondientes requisitos necesarios para la regularidad.

### 5.5.0.1. Forma Integral

Estas leyes de conservación pueden expresarse también bajo un enfoque integral. La ventaja de la utilización de esta técnica es que las ecuaciones se pueden obtener de las ecuaciones bajo principios físicos de conservación expresados como relaciones integrales. Por otro lado, la formulación integral requiere de condiciones de derivabilidad en la solución, brindando la posibilidad de obtener soluciones discontinuas. Las soluciones de la forma integral son conocidas como soluciones débiles.

## 5.6. Esquemas No centrados

A partir del desarrollo en series de Taylor se pueden calcular diferentes discretizaciones para la ecuación de transporte que se muestra a continuación:

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0, \quad u = u(x, t) \quad (5.57)$$

Al considerar el índice  $i$  como la componente espacial y  $n$  la temporal se tiene la siguiente expresión:

$$u_i^{n+1} = u_i^n \partial_t u|_i^n \Delta t + \frac{1}{2} \partial_t^2 u|_i^n \Delta t^2 + O(\Delta t^3) \quad (5.58)$$

La derivada temporal se puede aproximar como lo demuestra la ecuación que a continuación es presentada:

$$\partial_t u|_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \partial_t^2 u|_i^n \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (5.59)$$

La anterior ecuación constituye una discretización de primer orden hacia adelante

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \partial_x u|_i^n \Delta x + \frac{1}{2} \partial_x^2 u|_i^n \Delta x^2 + \frac{1}{6} \partial_x^3 u|_i^n \Delta x^3 + O(\Delta x^4) \quad (5.60)$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \partial_x u|_i^n \Delta x + \frac{1}{2} \partial_x^2 u|_i^n \Delta x^2 - \frac{1}{6} \partial_x^3 u|_i^n \Delta x^3 + O(\Delta x^4) \quad (5.61)$$

Al restar estas ecuaciones se obtiene una discretización centrada en el espacio de segundo orden

$$\partial_x u|_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{6} \partial_x^3 u|_i^n \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \quad (5.62)$$

La ecuación 5.57 discretizada se puede escribir como

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (5.63)$$

donde la velocidad en el paso de tiempo siguiente se determina mediante la ecuación:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \frac{a \Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (5.64)$$

Este esquema de primer orden en el tiempo y de segundo en el espacio se conoce como esquema explícito de Euler y se puede demostrar que es incondicionalmente inestable.

## CAPÍTULO 5. DESCRIPCIÓN SIMPLIFICADA DEL MODELO

Para solucionar el problema de la inestabilidad del esquema de Euler, se debe llevar a cabo una discretización descentrada para lo cual se tienen dos opciones:

$$\partial_x u|_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (5.65)$$

$$\partial_x u|_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \quad (5.66)$$

los resultados obtenidos son adecuados en función del signo de la velocidad de propagación de la onda  $a$ . Si  $a > 0$ , la ecuación 5.65 junto con la ecuación 5.59 da como resultado

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mu_c (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (5.67)$$

Siendo

$$\mu_c = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \quad (5.68)$$

El esquema 5.70 es estable con la siguiente condición

$$0 \leq \mu_c \leq 1 \quad (5.69)$$

El parámetro  $\mu_c$  se denomina número de Courant, número de Friedrichs-Lewy o número CFL. Consiste solamente en el cociente de dos longitudes. La recorrida por la onda en un tiempo  $\Delta t$  y el tamaño de la malla  $\Delta x$ . Como  $a$  es conocido y  $\Delta x$  se fija por el grado de precisión deseado, sólo se puede variar  $\Delta t$  para satisfacer la condición de estabilidad. El esquema presentado en la ecuación 5.69 es conocido como un esquema *upwind* de primer orden. Se debe a Courant, Isaacson y Rees, por lo que también es conocido como esquema CIR. El nombre *upwind* se refiere a que la discretización espacial utiliza puntos de la malla del lado del que viene la información. El CIR tiene la desventaja propia de los métodos de primer orden y es su carácter difusivo. Esto significa que las discontinuidades en la solución tienden a extenderse y los valores extremos a recortarse.

Si para  $a > 0$  se introducen las ecuaciones 5.59 y 5.66 en la ecuación de transporte 5.57, el esquema resultante se conoce como *downwind* resultante

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mu_c (u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (5.70)$$

Que de igual manera es incondicionalmente inestable. Es decir, para obtener un esquema descentrado útil debe tenerse en cuenta el signo de propagación de  $a$  en la discretización espacial.

Otro esquema de primer orden es el de Lax-Friedrichs, que se caracteriza por sustituir el término  $u_i^n$  de la ecuación 5.64 por la siguiente expresión

$$\frac{1}{2} (u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) \quad (5.71)$$

Es decir, la media de los valores en los dos nodos vecinos. El esquema que se obtiene de este procedimiento es

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (1 + \mu_c) u_{i-1}^n + \frac{1}{2} (1 - \mu_c) u_{i+1}^n \quad (5.72)$$

Se tiene además de los otros esquemas el de Lax-Wendroff. Para ellos se despeja de la ecuación 5.57 la derivada temporal

$$\partial_t u = -a \partial_x u \quad (5.73)$$

Derivando respecto a  $t$ , se asume que son cumplidas las condiciones de la propiedad de Schwarz, y aplicando a la ecuación 5.73, resultando

$$\partial_t^2 u = \partial_t (-a \partial_x u) = -a \partial_x (\partial_t u) = a^2 \partial_x^2 u \quad (5.74)$$

A partir del desarrollo de Taylor propuesto en la ecuación 5.59

$$u_i^{n+1} = u_i^n + (-a \partial_x u) \Delta t + \frac{1}{2} (a^2 \partial_x^2 u) \Delta t^2 + O(\Delta_x^2) \quad (5.75)$$

La derivada espacial es resuelta para la componente espacial de forma similar que la ecuación 5.62

$$\partial_x u|u_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (5.76)$$

Para la segunda derivada, en lugar de restarlas, se suman las ecuaciones 5.60 y 5.61, con lo que se obtiene una discretización para la segunda derivada centrada en el espacio y de segundo orden.

$$\partial_x^2 u|u_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (5.77)$$

Si se sustituyen ambas discretizaciones en la ecuación 5.75 resulta un esquema de segundo orden en el tiempo y en el espacio.

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\mu_c}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\mu_c^2}{2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \\ &= u_{i-1}^n \frac{\mu_c}{2} (\mu_c + 1) + u_i^n (1 - \mu_c^2) + u_{i+1}^n \frac{\mu_c}{2} (\mu_c - 1) \end{aligned} \quad (5.78)$$

Del Toro (1997), deduce este esquema de manera particular. Realiza una discretización hacia adelante para la componente temporal y para la componente espacial efectúa una media ponderada entre las discretizaciones upwind y downwind de las ecuaciones 5.65 y 5.66.

$$\partial_x u|u_i^n = \frac{(1 + \mu_c) u_i^n - u_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \frac{(1 - \mu_c) u_{i+1}^n - u_i^n}{2 \Delta x} \quad (5.79)$$

El anterior esquema es de segundo orden en el espacio y el tiempo, es estable con la condición presentada en la ecuación 5.69 aún cuando la discretización a partir de las cuales se conforma el esquema son de primer orden. Esto lleva a la conclusión de que la precisión de un esquema no depende de la precisión de las aproximaciones en diferencias finitas de las derivadas parciales que se están analizando.

## 5.7. Difusión o Viscosidad Numérica

Este término se dedujo en el apartado anterior. Para su definición el término que se presenta a continuación es considerado.

$$a\partial_x u = 0 \quad ; a > 0 \quad (5.80)$$

Realizando un proceso de discretización como el expuesto en la ecuación 5.65 en la cual no es tomada en cuenta la parte temporal, se obtiene

$$a\partial_x u|_i = a \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (5.81)$$

Si se aplica el desarrollo en series de Taylor de manera análoga a la ecuación 5.61 se llega a la expresión

$$u_{i-1} = u_i - \partial_x u|_i \Delta x + \frac{1}{2} \partial_x^2 u|_i \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \quad (5.82)$$

Al multiplicar por el coeficiente de viscosidad numérica

$$a \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = a \partial_x u|_i - \frac{1}{2} a \Delta x \partial_x^2 u|_i + O(\Delta x^2) \quad (5.83)$$

La expresión,

$$a \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}, \quad (5.84)$$

Representa una discretización de primer orden de la forma de la ecuación 5.79 y de igual modo una discretización de segundo orden de la ecuación

$$a\partial_x u - a \frac{\Delta x}{2} \partial_x^2 u = 0, \quad (5.85)$$

En la ecuación anterior se puede observar que se genera un término difusivo de coeficiente  $a\Delta x/2$ .

A partir de lo anterior se llega a la conclusión de que la discretización del método *upwind*, se está introduciendo en la ecuación 5.80 difusión numérica. El coeficiente que pondera esta difusión depende del tamaño de la malla, por lo que si  $\Delta x$  es demasiado pequeño, si se presenta un incremento del tiempo de cálculo, el efecto difusivo tiene a desaparecer. Puede verse un estudio más detallado en Anderson (1984).

## 5.8. Esquemas Conservativos

Para llegar al entendimiento de este concepto se toma en consideración la ecuación

$$\partial_x u + \partial_x f = 0, \quad u = u(x, t), \quad f = f(u) \quad (5.86)$$

Para tener en cuenta las soluciones débiles, la anterior ecuación se debe integrar para  $x$  y  $t$ . El dominio espacial y temporal es tomado así

$$I_i = \left[ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] = \left[ x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2} \right], I_n = [t_n, t_{n+1}] = [n\Delta t, (n+1)\Delta t] \quad (5.87)$$

La integral de la ecuación 5.86 queda definida como

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} [\partial_t u + \partial_x f] = 0, \quad (5.88)$$

Resulta entonces

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} [u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)] dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ f\left(u\left(x_{i+\frac{1}{2}}, t\right)\right) - f\left(u\left(x_{i-\frac{1}{2}}, t\right)\right) \right] dt = 0 \quad (5.89)$$

La anterior ecuación 5.89 permite expresar que la cantidad de  $u$  que en el intervalo  $I_i$  se encuentra contenida, solo varía en el tiempo  $\Delta t$  debido al valor del flujo  $f$  en los extremos del mismo (fronteras de la celda).

Donde,  $u(x, t)$  es la función que tiene como promedio  $u_i^n$  en el intervalo  $I_i$ , en el instante de tiempo  $t_n = n\Delta t$ , así,

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx, \quad (5.90)$$

La ecuación resultante de la expresión 5.89

$$(u_i^{n+1} - u_i^n) \Delta x + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ f\left(u\left(x_{i+\frac{1}{2}}, t\right)\right) - f\left(u\left(x_{i-\frac{1}{2}}, t\right)\right) \right] dt = 0 \quad (5.91)$$

Al aproximar la ecuación anterior en forma integral a través de los valores de  $f_{i\pm\frac{1}{2}}^n$

$$f_{i\pm\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(u\left(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t\right)\right) dt, \quad (5.92)$$

Al sustituir la expresión 5.92 en la ecuación 5.91 se tiene,

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( f_{i-\frac{1}{2}}^n - f_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \quad (5.93)$$

Los valores  $f_{i\pm\frac{1}{2}}^n$  se conocen como flujos numéricos y representan las aproximaciones del promedio temporal del flujo físico en las caras de la celda. De acuerdo a la forma como son obtenidos los flujos pueden obtenerse esquema diferentes. Adicionalmente, el cálculo de dichos flujos se realiza a partir de las variables de las celdas consecutivas a la variable  $I_i$ , según la expresión siguiente,

$$f_{i\pm\frac{1}{2}}^n = \phi\left(u_{i-m}^n, u_{i-m+1}^n, \dots, u_{i+1}^n\right), \quad (5.94)$$

Donde las constantes  $m$  y  $l$  son dos enteros no negativos. En virtud de lo anterior se puede expresar que un esquema conservativo para la ley de conservación presentada por la ecuación

## CAPÍTULO 5. DESCRIPCIÓN SIMPLIFICADA DEL MODELO

5.87 es un método numérico de la forma 5.93 tal que cumple la expresión 5.95. Si se desea cumplir con la condición de consistencia, es decir, que se represente con precisión la ecuación diferencial para  $\Delta t \rightarrow 0$  y  $\Delta x \rightarrow 0$ , en consecuencia  $\phi$  debe cumplir la condición que,

$$\phi(v, v, \dots, v) = f(v) \quad (5.95)$$

El flujo numérico que tiende a aproximar el flujo físico en un cierto estado, a partir de valores del flujo en puntos próximos, debe ser exactamente igual a  $f(v)$  cuando los estados próximos coinciden con  $v$ . Este se denomina estado a un determinado valor del conjunto de las variables.



# 6

---

## Ecuaciones Flujo Turbulento del Modelo INSURF

### 6.1. Antecedentes

Dada la aleatoriedad del flujo turbulento y la alta dispersión en las magnitudes que lo involucran, es muy difícil determinar de manera práctica los movimientos de todas las partículas del fluido. Esto es lo que conlleva a promediar el valor de las componentes instantáneas del flujo en una cantidad media y el valor de la fluctuación, además de observar la formación de remolinos en el interior del fluido dispuestos en diferentes tamaños, donde las fuerzas de inercia están dispuestas en los remolinos de mayor tamaño.

El movimiento de los remolinos de mayor tamaño está dado por la energía que proviene directamente del flujo medio. A diferencia de los pequeños remolinos que toman la energía de los remolinos grandes y una pequeña porción proviene del flujo medio. La energía cinética se transfiere a los remolinos más pequeños aún, en forma de cascada, hasta que se disipa totalmente por la acción de las fuerzas viscosas. La disipación descrita produce las pérdidas de energía asociadas a los flujos turbulentos.

El comportamiento de los grandes vórtices es de carácter anisotrópico y dependiente del flujo, por la fuerte interacción con éste. La acción de difusión por causa de la viscosidad genera una pérdida de dirección como Resultado del proceso de la cascada de la turbulencia, por lo que para números de Reynolds altos, el comportamiento de los pequeños vórtices se considera isotrópico.

### 6.2. Promedio de Reynolds

Este concepto fue introducido por Reynolds (1895). El promedio temporal es muy apropiado para el caso de la turbulencia estacionaria, es decir, un flujo turbulento que en promedio no varía con el tiempo. Para este tipo de flujos, un flujo instantáneo se define de la siguiente manera.

$$\bar{U}_t(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{T+t} f(x, t) dt \quad (6.1)$$

El promedio espacial se utiliza con frecuencia para la turbulencia homogénea, constituida por un flujo que, en promedio, es uniforme en todas las direcciones. Para esto se promedió en todas las coordenadas espaciales integrando sobre el volumen de control.

**CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF**

$$\mathcal{U}_v(x) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \iiint f(x, t) dv \quad (6.2)$$

El promedio conjunto es el tipo de promediado más general. Es un ejemplo idealizado en términos de las medidas de  $N$  muestras donde  $f(x, t) = f_n(x, t)$  en el experimento  $N$ . Así el promedio queda definido de la siguiente manera.

$$\mathcal{U}_c(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x, t) \quad (6.3)$$

para la turbulencia que cumple con la condición de estacionaria y homogénea, se puede aceptar que cualquier tipo de promediado es igual. Esta suposición se conoce como hipótesis de ergodicidad.

La mayoría de los problemas a los que se enfrenta la ingeniería, poseen flujos características no-homogéneas, así que el promediado Reynolds en el tiempo es la técnica más utilizada. Este proceso estadístico se puede explicar de manera más sencilla bajo el concepto de turbulencia estacionaria. Para este tipo de flujos, la velocidad instantánea  $u_i(x, t)$  se expresa como la suma de una cantidad media  $U_i(x)$  y una parte fluctuante  $u'_i(x, t)$ .

$$u_i(x, t) = U_i(x) + u'_i(x, t) \quad (6.4)$$

El término  $U_i(x)$  es un término medio promediado en el tiempo y definido de la siguiente manera.

$$U_i(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i(x, t) dt \quad (6.5)$$

El promedio de la velocidad media es

$$\bar{U}_i(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} U_i(x, t) dt = U_i(x) \quad (6.6)$$

El valor medio de la velocidad fluctuante es cero. Se demuestra de la siguiente manera:

$$\bar{U}'_i(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (u_i(x, t) - U_i(x)) dt = U_i(x) - \bar{U}_i(x) = 0 \quad (6.7)$$

Mientras la ecuación 6.5 está bien definida matemáticamente, nunca se puede realmente comprender un  $T$  infinito en un problema físico. En el momento de promediar en el tiempo, se debe seleccionar un tiempo  $T$  lo más largo posible que sea relativo al periodo máximo de la fluctuación de la velocidad.  $T_1$ .

Existen fluidos donde el flujo medio contiene pequeñas variaciones con el tiempo y que en esencia no son flujos turbulentos por naturaleza. En estos casos, las ecuaciones 6.4 y 6.5 deben ser modificadas para ajustarlo a estas aplicaciones. Un método arbitrario de ajuste, es reemplazar las ecuaciones 6.4 y 6.5 con

$$u_i(x, t) = U_i(x, t) + u'_i(x, t) \quad (6.8)$$

y

$$U_i(x, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i(x, t) dt, \quad T_1 \ll T \ll T_2 \quad (6.9)$$

Donde  $T_2$  es la escala de tiempo característica de las variaciones en el flujo que no se desean considerar como parte de la turbulencia.

### 6.3. Ecuaciones de Reynolds

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido incompresible en régimen turbulento se obtienen de realizar un promedio estadístico a las ecuaciones de Navier-Stokes. En estas ecuaciones los valores de los componentes de la velocidad ( $u, v$ ) y los de la presión  $p$  dependen del tiempo. Para ello se sustituye en las ecuaciones y las componentes de la velocidad y la presión por sus valores medios más los términos fluctuantes.

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad p = \bar{p} + p' \quad (6.10)$$

Se calcula el promedio temporal de cada ecuación, aplicando las relaciones obtenidas en el apartado anterior, obteniendo

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (6.11)$$

$$\partial_t \bar{u} + \nabla \cdot \overline{u\mathbf{u}} + \nabla \cdot \overline{u'\mathbf{u}'} = F_x - \frac{1}{\rho} \partial_x \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{u} \quad (6.12)$$

$$\partial_t \bar{v} + \nabla \cdot \overline{v\mathbf{u}} + \nabla \cdot \overline{v'\mathbf{u}'} = F_y - \frac{1}{\rho} \partial_y \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{v} \quad (6.13)$$

Las anteriores ecuaciones poseen los mismos términos que las ecuaciones de Navier-Stokes pero con la adición de nuevas componentes, que están en la parte derecha de la ecuación y se desarrollan para obtener el conjunto de ecuaciones de Reynolds:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (6.14)$$

$$\partial_t \bar{u} + \nabla \cdot \overline{u\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho} \partial_x \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{u} - [\partial_x \overline{u'^2} + \partial_y \overline{u'v'}] \quad (6.15)$$

$$\partial_t \bar{v} + \nabla \cdot \overline{v\mathbf{u}} = F_y - \frac{1}{\rho} \partial_y \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{v} - [\partial_x \overline{u'v'} + \partial_y \overline{u'^2}] \quad (6.16)$$

Las ecuaciones y se pueden escribir abreviadamente, utilizando el convenio de Einstein:

$$\partial_t \bar{u}_i + \nabla \cdot \overline{u_i \mathbf{u}} = F_i - \frac{1}{\rho} \partial_i \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i - \partial_j \overline{u'_i u'_j}; \quad i, j = 1, 2 \quad (6.17)$$

## CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF

Los productos cruzados de las fluctuaciones turbulentas de las componentes de velocidad multiplicados por la densidad tienen dimensiones de fuerza/superficie y se denominan tensiones de Reynolds.

$$\tau_{xx} = -\rho\overline{u'^2}, \quad \tau_{yy} = -\rho\overline{v'^2}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho\overline{u'v'} \quad (6.18)$$

La ley de viscosidad de Newton establece que las tensiones viscosas son proporcionales a la tasa o velocidad de deformación angular de los elementos de fluido, que para un fluido incompresible, se expresa en notación de subíndices como

$$\tau_{ij} = \mu(\partial_j u_i + \partial_i u_j); \quad i, j = 1, 2 \quad (6.19)$$

Boussinesq propuso en 1887 una relación análoga entre los promedios temporales de las velocidades de deformación y las tensiones de Reynolds:

$$-\rho\overline{u'_i u'_j} = \mu_t(\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2 \quad (6.20)$$

El coeficiente  $\mu_t$  se denomina viscosidad dinámica turbulenta o de remolino y  $k$  es la energía cinética turbulenta por unidad de masa

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2}) \quad (6.21)$$

Por otra parte la energía cinética media será

$$K = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \quad (6.22)$$

Al calcular el promedio temporal  $k_i$  de la energía cinética instantánea se obtiene

$$k_i = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) = \frac{1}{2}(\overline{(u + u')^2} + \overline{(v + v')^2}) \quad (6.23)$$

Expandiendo los binomios anteriores resulta

$$\frac{1}{2}(\overline{\bar{u}^2 + u'^2 + 2\bar{u}u'} + \overline{\bar{v}^2 + v'^2 + 2\bar{v}v'} + \overline{\bar{w}^2 + w'^2 + 2\bar{w}w'}) \quad (6.24)$$

Agrupando los términos medios y viscosos por separado se llega a

$$\frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) + \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2}) = K + k \quad (6.25)$$

Que comprenden la suma de la energía cinética media y turbulenta.

La viscosidad de remolino  $\mu_t$  empleada la ecuación 6.20 depende de la dirección considerada, siendo realmente un tensor de viscosidad turbulenta. Para el modelo INSURF se consideró que este término tiene el mismo valor para todas las direcciones coordenadas.

La componente  $-\frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$  es un esfuerzo normal y hace que la ecuación se cumpla para las tensiones en las direcciones  $\tau_{xx}, \tau_{yy}$ .

**CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO  
INSURF**

Al sustituir la ecuación 6.20 para la condición  $i = j$ , sabiendo que  $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}$  a la viscosidad cinemática turbulenta se pueden obtener las componentes siguientes:

$$-\overline{u'^2} = \nu_t(2\partial_x\bar{u}) - \frac{2}{3}k, \quad -\overline{v'^2} = \nu_t(2\partial_y\bar{v}) - \frac{2}{3}k, \quad (6.26)$$

Al sumar las tres expresiones y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad (6.3), se puede verificar la ecuación 6.21. En caso de no incluir el término  $\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$  en la ecuación 6.20 la energía cinética turbulenta resulta nula y la ecuación queda como la suma de tres términos positivos. Por lo tanto, se está asignando a los esfuerzos de Reynolds una tercera parte de la cantidad  $2\rho k$ . Para esto se debe asumir una distribución isotrópica de los esfuerzos normales, lo que en la práctica está acorde con muchos tipos de flujos.

Se sustituye ahora la ecuación 6.20 en 6.14 a 6.3. El conjunto de ecuaciones toma la siguiente forma

$$\partial_t\bar{u} + \nabla \cdot \overline{u\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho}\partial_x\bar{p} + \nu\nabla^2\bar{u} + \partial_x \left[ \nu_t(\partial_x\bar{u} + \partial_x\bar{u}) - \frac{2}{3}k \right] + \partial_y [\nu_t(\partial_y\bar{u} + \partial_x\bar{v})] \quad (6.27)$$

Agrupando términos semejantes se obtiene

$$\partial_t\bar{u} + \nabla \cdot \overline{u\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho}\partial_x\bar{p} - \frac{2}{3}\partial_x k + \nu\nabla^2\bar{u} + \nabla \cdot \nu_t\nabla\bar{u} + \nabla \cdot \nu_t\partial_x\bar{u} \quad (6.28)$$

Operando de manera similar, se puede obtener la ecuación para la dirección  $y$

$$\partial_t\bar{v} + \nabla \cdot \overline{v\mathbf{u}} = F_y - \frac{1}{\rho}\partial_y\bar{p} - \frac{2}{3}\partial_y k + \nu\nabla^2\bar{v} + \nabla \cdot \nu_t\nabla\bar{v} + \nabla \cdot \nu_t\partial_y\bar{u} \quad (6.29)$$

Como la viscosidad cinemática del fluido es constante, se pueden abreviar los términos  $\nu\nabla^2\bar{u}_i \approx \nabla \cdot \nu\nabla\bar{u}_i$  y agrupar la viscosidad molecular con la turbulenta. En consecuencia se tiene

$$\partial_t\bar{u} + \nabla \cdot \overline{u\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho}\partial_x\bar{p} - \frac{2}{3}\partial_x k + \nabla \cdot (\nu + \nu_t)\nabla\bar{u} + \nabla \cdot \nu_t\partial_x\bar{u} \quad (6.30)$$

$$\partial_t\bar{v} + \nabla \cdot \overline{v\mathbf{u}} = F_y - \frac{1}{\rho}\partial_y\bar{p} - \frac{2}{3}\partial_y k + \nabla \cdot (\nu + \nu_t)\nabla\bar{v} + \nabla \cdot \nu_t\partial_y\bar{u} \quad (6.31)$$

El hecho de que los términos turbulentos respecto a  $x$  y  $y$  proceden de la derivación de las tensiones de Reynolds en las direcciones normales, el efecto de estos esfuerzos es similar a la presión actuando perpendicularmente en las caras del volumen de control, por lo que pueden ser incluidas en los términos que contienen las derivadas de la presión.

Como el valor de la viscosidad de remolino  $\nu_t$  es mayor que el valor de  $\nu$ , puede ser despreciada frente al primer término. Esto conduce a la siguiente simplificación:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (6.32)$$

$$\partial_t \bar{u} + \nabla \cdot \bar{u}\bar{u} = F_x - \frac{1}{\rho} \partial_x \bar{p} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \partial_x \bar{u} \quad (6.33)$$

$$\partial_t \bar{v} + \nabla \cdot \bar{v}\bar{u} = F_y - \frac{1}{\rho} \partial_y \bar{p} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \nu_t \partial_y \bar{u} \quad (6.34)$$

La similitud de las ecuaciones anteriores con las de Navier-Stokes es apreciable, con la diferencia que los valores instantáneos de la velocidad y la presión han sido sustituidos por los promedios temporales, la viscosidad cinemática por la viscosidad de remolino.

$$\nabla \cdot \nu_t \partial_x \bar{u} \approx \nu_t \nabla \cdot \partial_x \bar{u} = \nu_t (\partial_x^2 \bar{u} + \partial_{xy}^2 \bar{v}) \quad (6.35)$$

Al aplicar la propiedad de Schwarz de las segundas derivadas cruzadas y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad, se llega al siguiente resultado

$$\nu_t (\partial_x^2 \bar{u} + \partial_{yx}^2 \bar{v}) = \nu_t \partial_x (\partial_x \bar{u} + \partial_y \bar{v}) = 0 \quad (6.36)$$

## 6.4. Modelo Numérico

Como se ha mencionado durante el documento, las ecuaciones matemáticas que representan las leyes fundamentales que gobiernan los fenómenos físicos de un flujo a superficie libre, son las ecuaciones de Navier-Stokes (NS). El papel de las ecuaciones de Reynolds se enfoca hacia su utilización en flujos bidimensionales, por el hecho que las ecuaciones de NS comprenden un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que aunque describen detalladamente flujos viscosos incompresibles, no tienen una solución analítica para casos reales, obligando a obtener soluciones numéricas. Se va a desarrollar un modelo numérico (INSURF) que parten de las ecuaciones promediadas de Reynolds junto con los métodos fundamentales para la solución numérica del sistema de ecuaciones, como son, los métodos de diferencias finitas, volumen finito o elemento finito, es necesario emplear procedimientos que ayuden a encontrar la solución de las ecuaciones mencionadas. Un método muy popular, que hace parte de los esquemas conocidos como métodos de proyección, que como lo indica su nombre, su concepto se debe a que se aplica la divergencia del campo proyectado. En la mayoría de los métodos de este tipo, se utiliza una corrección de la presión. A diferencia del Método de Proyección de dos Pasos desarrollado por Chorin (1968, 1969), una vez se realiza la corrección de la presión no se toman valores provisionales del campo de velocidades para efectuar la corrección, sino que las velocidades se determinan directamente de las ecuaciones de momento. Esto es un elemento que justifica y probablemente es la razón principal del por qué los métodos de proyección no convergen rápidamente. El método conocido como SIMPLE (Caretto et al. 1972) corresponde estos métodos mejorados donde no se determina la velocidad supuesta. Es uno de los métodos más populares, que generalmente utiliza métodos semi-implícitos para la solución de la presión. Este método es una aproximación iterativa que en las últimas décadas se utiliza con frecuencia para resolver las ecuaciones RANS considerando su divergencia. Esto conduce a la ecuación de Poisson, la cual describe la evolución del campo de presiones. El método SIMPLE es utilizado en este trabajo para resolver las ecuaciones RANS bidimensionales en una malla rectangular.

Las ecuaciones RANS se utilizan para describir el movimiento de un flujo a superficie libre en un canal, donde debe resolverse el problema del movimiento de la superficie libre. Dado que el movimiento de la superficie libre se encuentra dado por la velocidad de las partículas del fluido localizadas en la frontera de superficie, el objetivo del modelo INSURF es determinar la posición de ésta durante el tiempo de cálculo.

### 6.4.1. Esquema del Dominio de Cómputo

A continuación se aplica el método de Diferencias Finitas a las ecuaciones de Reynolds, cuya expresión en forma conservativa se ha deducido en los apartados anteriores. Estas ecuaciones comprenden la ecuación de continuidad y las ecuaciones de momentos (6.32 y 6.34). Éstas son resueltas para el plano Cartesiano  $x - y$ , tanto para las componentes de velocidad horizontal, vertical y para la presión. Las fuerzas de cuerpo incluyen la aceleración de la gravedad. Para los casos presentados en esta etapa no se incluye el modelo de turbulencia en la solución de las ecuaciones RANS y por lo tanto los efectos de la tensión superficial no son tenidos en cuenta.

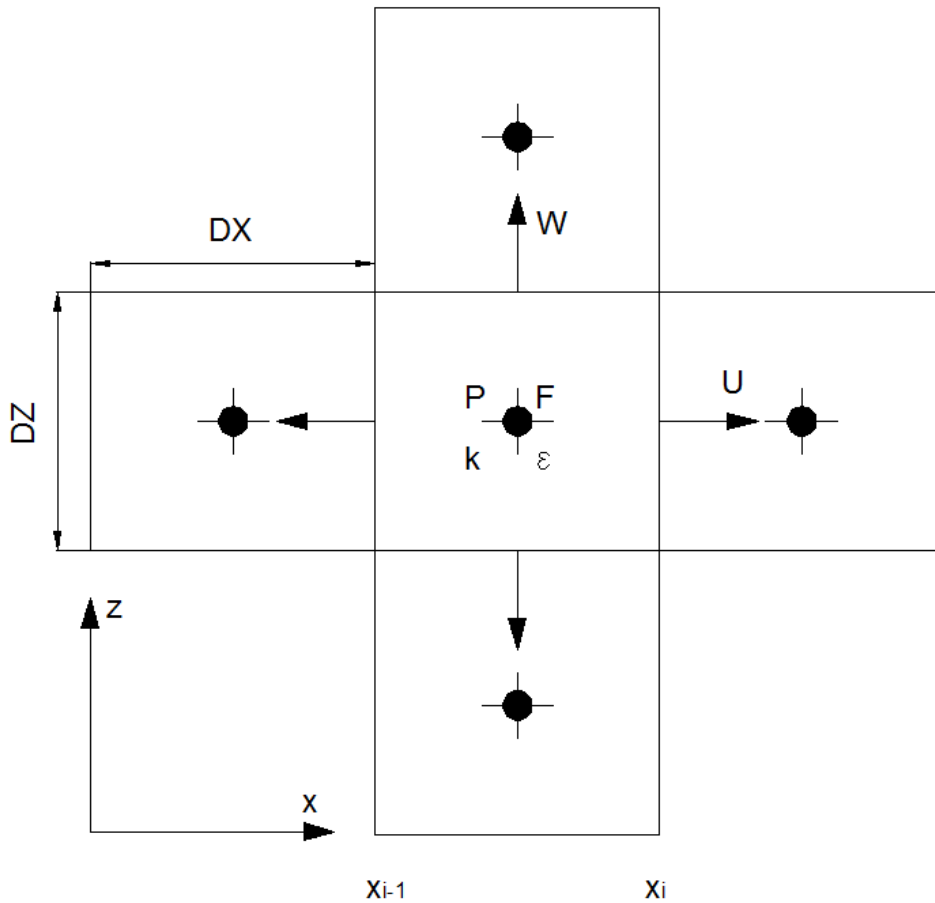


Figura 6.1: Celda de cálculo típica y notación utilizada en el plano cartesiano

Las ecuaciones de gobierno deducidas en forma conservativa fueron discretizadas para una malla con celdas rectangulares  $i \times j$  de ancho uniforme  $\Delta x$  y altura  $\Delta y$ . La región del fluido

## CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF

se encuentra rodeada por una capa de celdas fantasma (*ghostcells*) utilizadas para imponer las condiciones de frontera. Las cantidades escalares como la presión o la función (VDF) son calculadas en el centro de la celda. Las cantidades vectoriales como las componentes horizontal y vertical del campo de velocidades se definen en las caras de la celda (figura 6.1). Debido a que en el código no se utilizan índices fraccionales; la correspondencia entre el código y las variables con índices de fracción que indican los puntos medios en las caras de la celda se exhiben en la (figura 6.1).

Dado que no se calcula la posición exacta de la superficie libre, solo se siguen los cambios de densidad en la celda para establecer la localización de la superficie libre. Se acepta, entonces, que la densidad es constante en el fluido. Para simplificar el problema a la hora del cálculo de la densidad, se utiliza una función  $F$  que no es más que una densidad media normalizada. Se considera como convención general que una celda se encuentra vacía si la función  $F$  es igual a cero, y no se realiza calculo alguno. Si la función  $F$  es mayor que cero, y se tiene al menos una celda contigua vacía se considera como una celda frontera que alberga la superficie libre. Una celda llena de fluido se determina como aquella que no contenga celdas vecinas vacías y es donde se procede a realizar el cálculo de la densidad.

### 6.4.2. Método de Solución SIMPLE

La idea principal del método SIMPLE es aplicar la técnica *splitting* para la solución de la presión. El primer paso consiste en calcular el campo de velocidades integrando la ecuación de momento (6.34). Este esquema explícito se utiliza para obtener las componentes de la velocidad con los valores de la presión de pasos de tiempo previos. El segundo paso a seguir consiste en realizar una corrección del campo de presiones utilizando la ecuación 4.77, ecuación que corrige la velocidad satisfayendo la condición de  $\nabla \cdot u_i = 0$ . Al desarrollar esta ecuación escrita en forma tensorial, de acuerdo a la convención propuesta por Einstein, se tiene:

$$\partial_x^2 \bar{p} + \partial_y^2 \bar{p} = - \{ (\partial_x u_x)^2 + 2 (\partial_y u_x) (\partial_x u_y) + (\partial_y u_y)^2 \} \quad (6.37)$$

Al calcular la divergencia para proyectar el campo de velocidades, y aplicando la ecuación 6.32 para satisfacer la ecuación de continuidad resulta la ecuación de Poisson:

$$\partial_{x_i} \left( \frac{1}{\rho^n} \partial_{x_i} p^{n+1} \right) = \frac{1}{\Delta t} \partial_{x_i} \tilde{u}_i^{n+1} \quad (6.38)$$

### 6.4.3. Integración y Discretización Espacial Mediante Diferencias Finitas

En orden de integrar el sistema de ecuaciones RANS (6.32 y 6.34) y la ecuación de Poisson (6.38) en el espacio con el método de diferencias finitas, el dominio bidimensional ( $x - y$ ) se discretizó en un dominio computacional utilizando el método de Euler para una malla estacionaria. El método de solución de la presión se resolvió utilizando un método sucesivo de sobre-relajación (*SOR*, por sus siglas en inglés). Se aplicaron las condiciones de frontera



para todos los contornos y se han satisfecho sus condiciones de estabilidad. La velocidad inicial, la presión y la disposición inicial de la superficie libre fueron establecidas en las condiciones iniciales. Los términos convectivos de la ecuación de momento son explícitas y fue utilizado un método de tercer orden de aproximación tipo upwind con el fin de reducir la viscosidad numérica, además de ser calculadas a partir de datos conocidos. La presión es un término implícito, basada en los valores de la presión desconocidos en el paso de tiempo posterior, discretizado con un método de diferencias centradas. El valor de la función VDF para la reconstrucción de la superficie libre se toman de los cálculos realizados con la velocidad corregida.

### 6.4.3.1. Discretización de la Derivada Temporal

La solución de la ecuación 6.34) se aproxima por medio de  $U_i^n$ , constantes para la celda  $x_i$  y cada instante de tiempo  $t_n$  que se asignan al nodo  $i$  correspondiente a la celda.

La derivada temporal se discretiza mediante el método de Euler hacia adelante

$$\partial_t u \approx \frac{U_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (6.39)$$

### 6.4.3.2. Discretización de los Términos Convectivos y Viscosos

La ecuación de continuidad, al proyectarla en un plano divergente, permite la utilización de un esquema semi-implícito de sobre-relajación, que es equivalente a la solución de las ecuaciones 6.37 y 6.38.

Para el cálculo de la velocidad temporal se utiliza un esquema explícito, donde el campo de velocidades se determina mediante un esquema no-centrado, así:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n = & -\alpha \left[ a^+ \left( 2\bar{u}_{i+1,j}^n + 3\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n - 6\bar{u}_{i,j}^n + \bar{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) \right] - \dots \\ & \alpha \left[ a^- \left( -\bar{u}_{i+\frac{3}{2},j}^n + 6\bar{u}_{i+1,j}^n - 3\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n - 2\bar{u}_{i,j}^n \right) \right] - \dots \\ & \beta \left[ b^+ \left( 2\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + 3\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n - 6\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n + \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j-1}^n \right) \right] - \dots \\ & \beta \left[ b^- \left( -\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j+1}^n + 6\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - 3\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n - 2\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n \right) \right] + \dots \\ & (v + v_t) \left\{ \delta \left( \bar{u}_{i+\frac{3}{2},j}^n - \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n \right) - E \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \bar{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) \right\} + \dots \\ & (v + v_t) \left\{ \phi \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n \right) + \gamma \left( \bar{w}_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - \bar{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right) \right\} - \dots \\ & (v + v_t) \left\{ \eta \left( \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j-1}^n \right) + \kappa \left( \bar{w}_{i+1,j-\frac{1}{2}}^n - \bar{w}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Donde:

**CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF**

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\Delta t}{3\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} & \beta &= \frac{\Delta t}{3\Delta z_j} & \delta &= \frac{2\Delta t}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\Delta x_{i+1}} & E &= \frac{2\Delta t}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\Delta x_i} \\ \phi &= \frac{\Delta t}{\Delta z_j\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} & \gamma &= \frac{\Delta t}{\Delta z_j\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} & \eta &= \frac{\Delta t}{\Delta z_j\Delta z_{j-\frac{1}{2}}} & \kappa &= \frac{\Delta t}{\Delta z_j\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \bar{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^n &= -\lambda \left[ c^+ \left( 2\bar{w}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + 3\bar{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - 6\bar{w}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + \bar{w}_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n \right) \right] - \dots \\ &\quad \lambda \left[ c^- \left( -\bar{w}_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n + 6\bar{w}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - 3\bar{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - 2\bar{w}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n \right) \right] - \dots \\ &\quad \pi \left[ d^+ \left( 2\bar{w}_{i,j+1}^n + 3\bar{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - 6\bar{w}_{i,j}^n + \bar{w}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \right] - \dots \\ &\quad \pi \left[ d^- \left( -\bar{w}_{i,j+\frac{3}{2}}^n + 6\bar{w}_{i,j+1}^n - 3\bar{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - 2\bar{w}_{i,j}^n \right) \right] + g + \dots \\ &\quad (v + v_t) \left\{ \theta \left( \bar{w}_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - \bar{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right) + \vartheta \left( \bar{w}_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - \bar{w}_{i+\frac{1}{2},j}^n \right) \right\} - \dots \\ &\quad (v + v_t) \left\{ \varsigma \left( \bar{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \bar{w}_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n \right) + \xi \left( \bar{w}_{i-\frac{1}{2},j+1}^n - \bar{w}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) \right\} + \dots \\ &\quad (v + v_t) \left\{ \psi \left( \bar{w}_{i,j+\frac{3}{2}}^n - \bar{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right) - \zeta \left( \bar{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \bar{w}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.41)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\Delta t}{3\Delta x_i} & \pi &= \frac{\Delta t}{3\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} & \theta &= \frac{\Delta t}{\Delta x_i\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} & \vartheta &= \frac{\Delta t}{\Delta x_i\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} \\ \varsigma &= \frac{\Delta t}{\Delta x_i\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} & \xi &= \frac{\Delta t}{\Delta x_i\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} & \psi &= \frac{2\Delta t}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}\Delta z_{j+1}} & \zeta &= \frac{2\Delta t}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}\Delta z_j} \end{aligned}$$

Las aproximaciones explícitas de la ecuación de momento pueden ser más estables y precisas al contener términos de corrección upstream en las interpolaciones de los flujos convectivos.

### 6.4.3.3. Método de Solución de la Presión

Con este método se soluciona el problema de tener una ecuación independiente para la presión, cuyos gradientes contribuyen de forma directa al flujo en la ecuación de momento, en particular, la componente cinemática del campo de velocidades. Por esta razón es que se debe construir un campo de presiones, puesto que la ecuación de continuidad no tiene una variable dominante en los flujos incompresibles y la presión absoluta no es tan significativa en un flujo compresible, pues es el gradiente de presiones quien afecta realmente al flujo.

En el método SIMPLE es necesario resolver la ecuación de Poisson (6.38). Dado que la presión se evalúa en el centro de la celda de la malla, esta ecuación debe ser resuelta en el mismo lugar. Así, la ecuación 6.37 se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta x_i} \left( \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \right) + \frac{1}{\Delta z_j} \left( \tilde{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tilde{w}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) = \\
 & \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left\{ \frac{1}{\rho_{i+\frac{1}{2},j}} \left[ \frac{1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}) \right] - \frac{1}{\rho_{i-\frac{1}{2},j}} \left[ \frac{1}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (P_{i,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}) \right] \right\} + \dots \\
 & + \frac{\Delta t}{\Delta z_j} \left\{ \frac{1}{\rho_{i,j+\frac{1}{2}}} \left[ \frac{1}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} (P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}) \right] - \frac{1}{\rho_{i,j-\frac{1}{2}}} \left[ \frac{1}{\Delta z_{j-\frac{1}{2}}} (P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}) \right] \right\} \quad (6.42)
 \end{aligned}$$

#### 6.4.3.4. Método de Volumen de Fluido

El método de Volumen de Fluido (VDF) permite localizar las fronteras libres, así como la distribución de las partículas en las celdas a través de una función  $F$  cuyo valor es unitario. Este método permite definir regiones continuas de flujo y permite reconstruir dichas fronteras libres en mallas bidimensionales. Este método utiliza información aguas arriba y aguas abajo de  $F$  en las fronteras del flujo para establecer la forma de la interface y utilizar ésta en el cálculo del flujo. La ecuación de Volumen de Fluido viene dada por:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta t} (F_{i,j}^{n+1} - F_{i,j}^n) + \frac{1}{\Delta x_i} \left( u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \right) \\
 & \left\{ AB \left[ (\overline{F_{i+1,j}^n} - \overline{F_{i,j}^n}) BC + (\overline{F_{i,j}^n} - \overline{F_{i-1,j}^n}) CD \right] \right\} + \dots \\
 & + \frac{1}{\Delta z_j} \left( w_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \left\{ DE \left[ (\overline{F_{i,j+1}^n} - \overline{F_{i,j}^n}) EF + (\overline{F_{i,j}^n} - \overline{F_{i,j-\frac{1}{2}}^n}) FG \right] \right\} = 0 \quad (6.43)
 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 AB &= \frac{1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}} + \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} & BC &= \frac{1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} & CD &= \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \\
 DE &= \frac{1}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}} + \Delta z_{j-\frac{1}{2}}} & EF &= \frac{\Delta z_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} & FG &= \frac{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta z_{j-\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

6.4.3.5. Modelo de Turbulencia

Las ecuaciones de gobierno para la energía cinética turbulenta y la tasa de disipación turbulenta son:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta t} (K_{i,j}^{n+1} - K_{i,j}^n) + Vx^+ \left\{ \frac{1}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (K_{i,j}^n - K_{i-1,j}^n) \right\} + Vx^- \left\{ \frac{1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (K_{i+1,j}^n - K_{i,j}^n) \right\} + \dots \\
 & Vz^+ \left\{ \frac{1}{\Delta z_{j-\frac{1}{2}}} (K_{i,j}^n - K_{i,j-1}^n) \right\} + Vz^- \left\{ \frac{1}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} (K_{i,j+1}^n - K_{i,j}^n) \right\} = \\
 & \frac{1}{\Delta x_i} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_k} + v \right)_{i,j}^n \Delta x_{i+1} \right\rangle \frac{K_{i+1,j}^n - K_{i,j}^n}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right] \right\} + \dots \\
 & \frac{1}{\Delta x_i} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_k} + v \right)_{i+1,j}^n \Delta x_i \right\rangle \frac{K_{i+1,j}^n - K_{i,j}^n}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right] \right\} - \dots \\
 & \frac{1}{\Delta x_i} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_k} + v \right)_{i-1,j}^n \Delta x_i \right\rangle \frac{K_{i,j}^n - K_{i-1,j}^n}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right] \right\} - \dots \\
 & \frac{1}{\Delta x_i} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_k} + v \right)_{i,j}^n \Delta x_{i-1} \right\rangle \frac{K_{i,j}^n - K_{i-1,j}^n}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right] \right\} + \dots \\
 & \frac{1}{\Delta z_j} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta z_j + \Delta z_{j+1}} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_k} + v \right)_{i,j}^n \Delta z_{j+1} \right\rangle \frac{K_{i,j+1}^n - K_{i,j}^n}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} \right] \right\} + \dots \\
 & \frac{1}{\Delta z_j} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta z_j + \Delta z_{j+1}} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_k} + v \right)_{i,j+1}^n \Delta z_j \right\rangle \frac{K_{i,j+1}^n - K_{i,j}^n}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} \right] \right\} - \dots \\
 & \frac{1}{\Delta z_j} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta z_{j-1} + \Delta z_j} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_k} + v \right)_{i,j-1}^n \Delta z_j \right\rangle \frac{K_{i,j}^n - K_{i,j-1}^n}{\Delta z_{j-\frac{1}{2}}} \right] \right\} - \dots \\
 & \frac{1}{\Delta z_j} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta z_{j-1} + \Delta z_j} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_k} + v \right)_{i,j}^n \Delta z_{j-1} \right\rangle \frac{K_{i,j}^n - K_{i,j-1}^n}{\Delta z_{j-\frac{1}{2}}} \right] \right\} + \dots \\
 & v_{tij} \left\{ 2 \left[ \frac{\overline{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \overline{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x_i} \right]^2 + 2 \left[ \frac{\overline{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \overline{w}_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z_j} \right]^2 \right\} + \dots \\
 & v_{tij} \left\{ \left[ \frac{\overline{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \overline{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z_j} \right] + \left[ \frac{\overline{w}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \overline{w}_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x_i} \right] \right\}^2 + \dots \\
 & v_{tij} \left\{ 2 \left[ \frac{\overline{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \overline{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta x_i} \right]^2 + 2 \left[ \frac{\overline{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \overline{w}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta z_j} \right]^2 \right\} + \dots \\
 & v_{tij} \left\{ \left[ \frac{\overline{w}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \overline{w}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta x_i} + \frac{\overline{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \overline{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta z_j} \right]^2 \right\} - \epsilon_{i,j}^{n+1} - \epsilon_{i,j}^n \tag{6.44}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} (\epsilon_{i,j}^{n+1} - \epsilon_{i,j}^n) + Wx^+ \left\{ \frac{1}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (\epsilon_{i,j}^n - \epsilon_{i-1,j}^n) \right\} + Wx^- \left\{ \frac{1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (\epsilon_{i+1,j}^n - \epsilon_{i,j}^n) \right\} + \dots \\
& Wz^+ \left\{ \frac{1}{\Delta z_{j-\frac{1}{2}}} (\epsilon_{i,j}^n - \epsilon_{i,j-1}^n) \right\} + Wz^- \left\{ \frac{1}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} (\epsilon_{i,j+1}^n - \epsilon_{i,j}^n) \right\} = \dots \\
& \frac{1}{\Delta x_i} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right)_{i+1,j}^n \Delta x_i \right\rangle \frac{\epsilon_{i+1,j}^n - \epsilon_{i,j}^n}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right] \right\} + \dots \\
& \frac{1}{\Delta x_i} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right)_{i,j}^n \Delta x_{i+1} \right\rangle \frac{\epsilon_{i+1,j}^n - \epsilon_{i,j}^n}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right] \right\} + \dots \\
& \frac{1}{\Delta x_i} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right)_{i-1,j}^n \Delta x_i \right\rangle \frac{\epsilon_{i,j}^n - \epsilon_{i-1,j}^n}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right] \right\} + \dots \\
& \frac{1}{\Delta x_i} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right)_{i,j}^n \Delta x_{i-1} \right\rangle \frac{\epsilon_{i,j}^n - \epsilon_{i-1,j}^n}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right] \right\} + \dots \\
& \frac{1}{\Delta z_j} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta z_j + \Delta z_{j+1}} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right)_{i,j}^n \Delta z_{j+1} \right\rangle \frac{\epsilon_{i,j+1}^n - \epsilon_{i,j}^n}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} \right] \right\} + \dots \\
& \frac{1}{\Delta z_j} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta z_j + \Delta z_{j+1}} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right)_{i,j+1}^n \Delta z_j \right\rangle \frac{\epsilon_{i,j+1}^n - \epsilon_{i,j}^n}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} \right] \right\} + \dots \\
& \frac{1}{\Delta z_j} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta z_{j-1} + \Delta z_j} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right)_{i,j-1}^n \Delta z_j \right\rangle \frac{\epsilon_{i,j}^n - \epsilon_{i,j-1}^n}{\Delta z_{j-\frac{1}{2}}} \right] \right\} + \dots \\
& \frac{1}{\Delta z_j} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta z_{j-1} + \Delta z_j} \left\langle \left( \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right)_{i,j}^n \Delta z_{j-1} \right\rangle \frac{\epsilon_{i,j}^n - \epsilon_{i,j-1}^n}{\Delta z_{j-\frac{1}{2}}} \right] \right\} + \dots \\
& C_{1\epsilon} \frac{\epsilon_{i,j}^n}{K_{i,j}^n} v_t \left\{ 2 \left[ \frac{\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \bar{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta x_i} \right]^2 + 2 \left[ \frac{\bar{w}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \bar{w}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta z_j} \right]^2 \right\} + \dots \\
& C_{1\epsilon} \frac{\epsilon_{i,j}^n}{K_{i,j}^n} v_t \left\{ \left[ \frac{\bar{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \bar{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta z_j} \right] + \left[ \frac{\bar{w}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \bar{w}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta x_i} \right] \right\}^2 - \dots \\
& C_{2\epsilon} \frac{\epsilon_{i,j}^n}{K_{i,j}^n} \epsilon_{i,j}^{n+1}
\end{aligned} \tag{6.45}$$

#### 6.4.3.6. Discretización de la Derivada Temporal

Inicialmente se utiliza un procedimiento conocido como arranque en frío con la condición  $u_b = (0, 0)$  para el paso de tiempo  $t = 0$ , seguido de un cambio gradual de la velocidad en la frontera.

Las condiciones de frontera son impuestas en el primer paso de cálculo y durante la iteración

## CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF

de la presión, localizadas en las celdas fantasma. Estas condiciones son desarrolladas para el cálculo del campo de velocidad cuando este se obtiene de forma explícita. Si se utiliza esta vía, la condición de frontera es impuesta en la forma  $u_b = (u_b, v_b)$  en  $\partial\Omega$ , por lo que las velocidades en las celdas ficticias se establecen así:

$$u_{1,j} = u_b \quad (6.46)$$

$$v_{1,j} = 2v_b - v_{2,j} \quad (6.47)$$

Para la condición particular de tener fronteras no deslizantes, estas condiciones se convierten a  $u_{1,j} = 0$  y  $v_{1,v} = -v_{2,j}$ . Si la frontera es rígida, la velocidad normal y el gradiente de velocidades tangencial se vuelve cero. En esta situación, la condición de frontera apropiada es:

$$u_{1,j} = 0 \quad (6.48)$$

$$v_{1,j} = v_{2,j} \quad (6.49)$$

La condición deslizante se puede utilizar para simular el comportamiento de un flujo no viscoso cuando la malla es demasiado gruesa para modelar los detalles de la capa límite.

Para satisfacer la condición de divergencia en la ecuación de Poisson, la presión se debe ajustar en cada celda ocupada por fluido. En las celdas llenas, con excepción de la superficie libre, se va ajustando la presión hasta que la ecuación 6.11 se satisface hasta un nivel de precisión deseado. Las celdas de superficie poseen otro tipo de tratamiento, pues se deben satisfacer las condiciones de frontera de la superficie libre. En ocasiones se utilizan ecuaciones específicas para ello (ver Lin y Liu, 1998 a,b). En este caso se satisfacen estableciendo la presión como el resultado de la interpolación lineal entre la presión en la superficie y presión interpolada en el centro de la celda.

### 6.4.4. Validación del Modelo

Existe una gran cantidad de aplicaciones unidimensionales que poseen solución exacta y han sido objeto de diversas comparaciones. Por ello se presentan diversos casos de aplicación con el fin de validar el modelo hidrodinámico. En virtud de esto, se simularan casos de aplicación en ingeniería hidráulica donde los resultados obtenidos se analizarán al compararlos con las pruebas que por las sencillas condiciones de contorno, el comportamiento del fluido se puede validar con casos unidimensionales.

#### 6.4.4.1. Caso de Rotura de Presa

Debido a la relevancia que tiene para la ingeniería, en cuanto a la evaluación del riesgo y por la pérdida de vidas humanas, los flujos que se producen en el rompimiento de una presa han sido objeto de análisis en la hidráulica desde hace varias décadas y se han llevado a la práctica mediante la simulación numérica, dado que las soluciones analíticas se encuentran sujetas al caso unidimensional por la consideración de presión hidrostática. La simulación

## CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF

bidimensional de este tipo de fenómenos se realiza en este trabajo a través de las ecuaciones de Reynolds porque son las que representan de manera más apropiada las formulaciones físicas que gobiernan el flujo a superficie libre. Dentro de las aplicaciones que tienen alcance con este tipo de estudios se encuentran los daños aguas abajo de la presa por la descarga repentina de un gran flujo, la estimación del tiempo de llegada del frente de onda, la distribución del campo de velocidades y presiones para estimar la erosión en el fondo del canal (Shigematsu et al., 2004).

Para llegar a un adecuado entendimiento de los flujos que se originan durante el rompimiento de una presa, es necesario recurrir a la modelación numérica o física. De manera económica, solo mediante el empleo de un modelo numérico se pueden seguir los complejos procesos ocurridos durante este fenómeno, especialmente los flujos con fuertes variaciones espaciales y temporales.

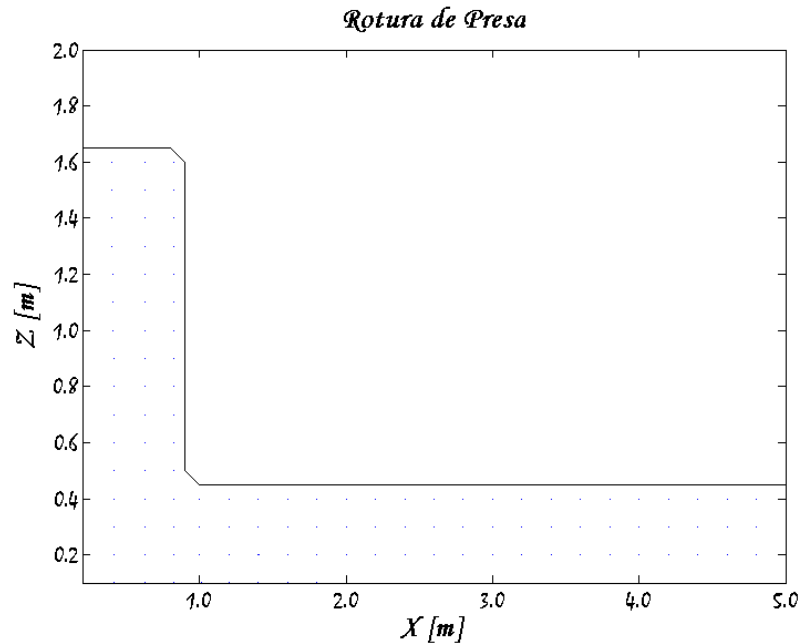


Figura 6.2: Rotura en  $t=0$

En las figuras 6.2 hasta la 6.5 se presentan los resultados de la modelación numérica de la rotura de una presa. La profundidad de agua en el embalse es de  $h = 1.5$  m y la descarga se produce en un lecho con una lámina de 5 cm, simulando la descarga del flujo en el lecho de un río. La extensión del dominio computacional es de 500 cm y la presa posee un ancho de espesor unitario, localizado en  $x = 0$  cm. En este caso se utiliza una malla regular con incrementos espaciales de  $x = 0.2$  m y  $y = 0.1$  m. Para este trabajo no se presentan modelaciones que consideren un lecho seco, ya que no se han implementado las condiciones de deslizamiento en la frontera del fondo requeridas para este tipo de modelación, donde el sistema de mallado no tiene los elementos necesarios para resolver los efectos producidos en la subcapa laminar. Adicionalmente, en las caras laterales se han empleado condiciones de frontera abierta. En la figura 6.2 se puede observar la configuración inicial de la presa en el instante previo al

## CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF

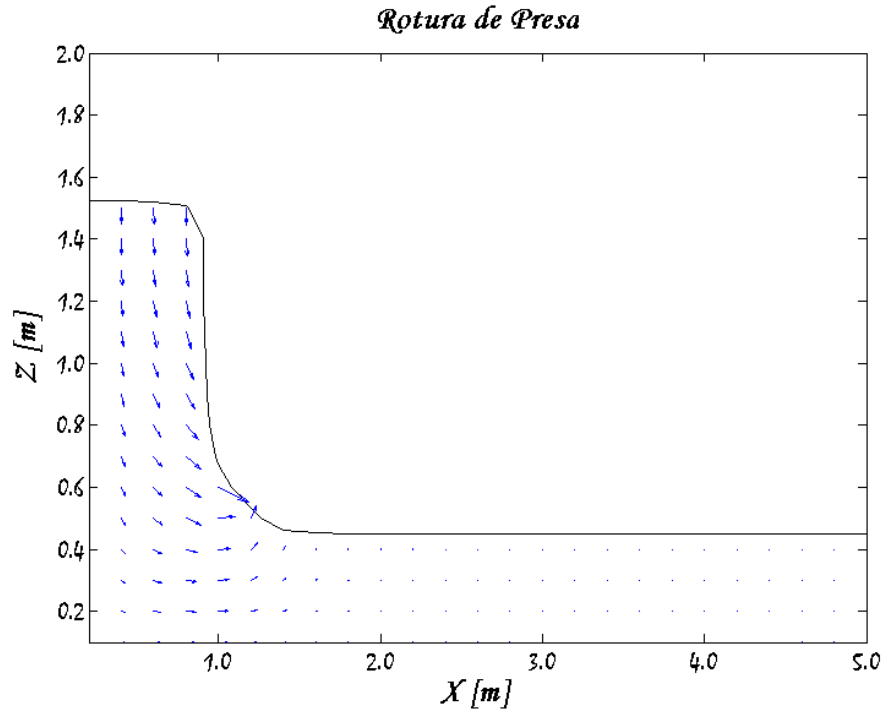


Figura 6.3: Rotura en  $t=0.6$

rompimiento. En el instante inicial, representado por el tiempo normalizado  $t' = t(\sqrt{2g/a}) = 0$  se produce una falla en el cuerpo de la presa que genera un rompimiento instantáneo.

El rompimiento origina el colapso de la columna de agua, generándose un movimiento en la parte inferior de la columna de agua por la acción de la fuerza de gravedad y obligando a que el campo de velocidades cambie súbitamente, traducido en un movimiento rápido y desordenado del flujo figura 6.3.

Con el paso del tiempo se observa como la columna de agua colapsa Figura 6.4, y se identifica un frente de onda claramente definido que se desplaza hacia adelante con velocidades mayores comparadas con las del inicio del rompimiento. La evolución temporal exhibe fuertes cambios en el campo de velocidades del frente de onda y en la cresta, generadas por el súbito cambio en las condiciones de contorno al retirar la presa (Shigematsu et al., 2004). Conforme se desarrolla el fenómeno de rompimiento, es claramente notoria la disminución en las componentes verticales de la velocidad, mientras que en el frente de onda la velocidad posee un carácter supercrítico.

Al finalizar la etapa de colapso se produce un choque entre la lámina de fluido localizado aguas abajo de la presa y el frente de onda producto de la rotura, Figura 6.5. Esto origina la formación de una gran onda que avanza hacia adelante con altas velocidades horizontales y que llegará a su fin por el efecto del fondo como consecuencia de la formación de esfuerzos en la capa límite viscosa.

Se presenta a continuación una comparación entre los resultados obtenidos con el modelo



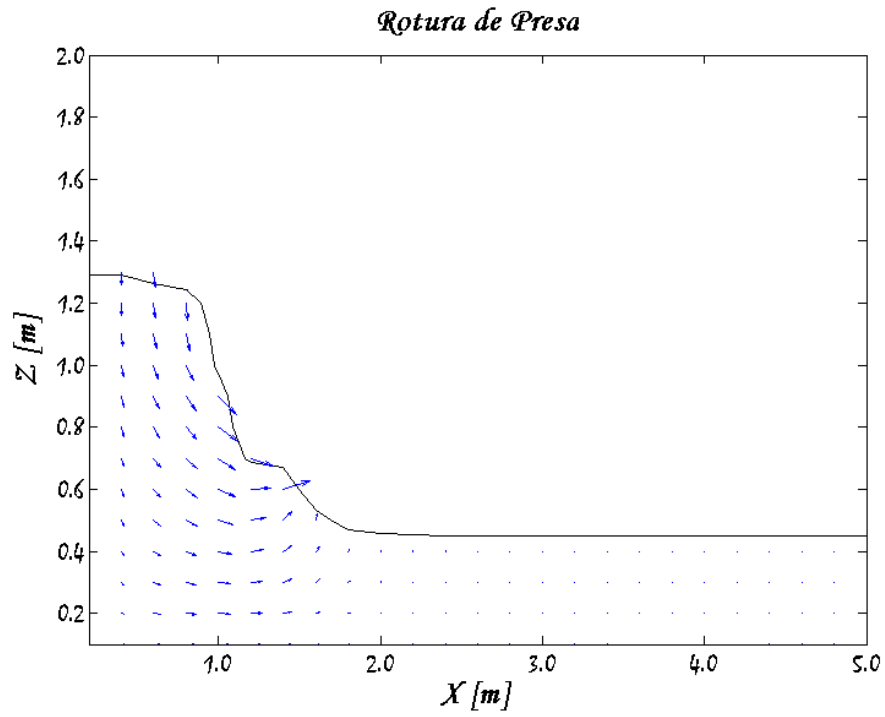


Figura 6.4: Rotura en  $t=1.0$

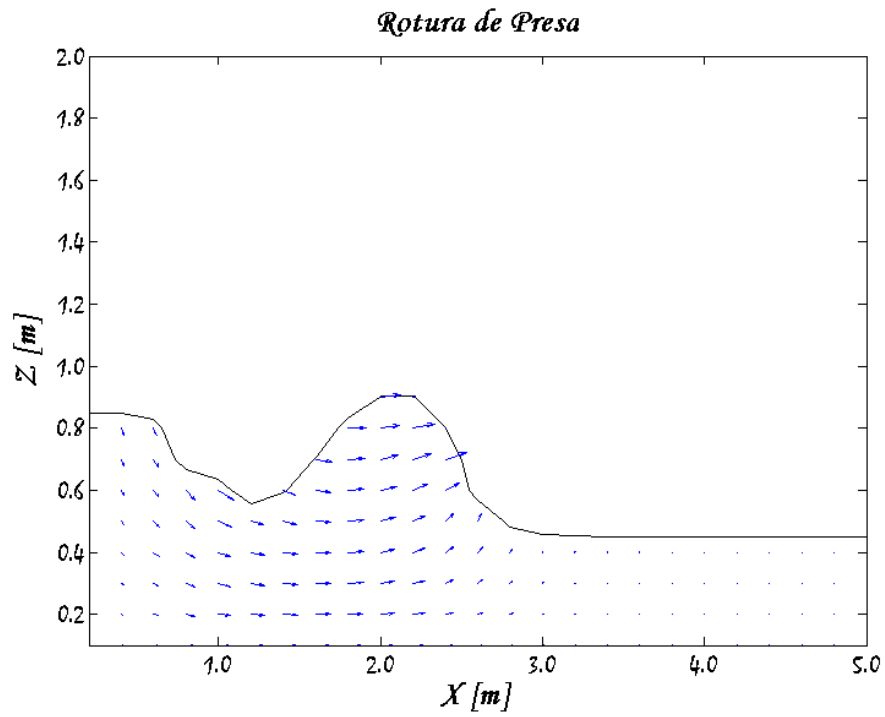


Figura 6.5: Rotura en  $t=2.0$

## CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF

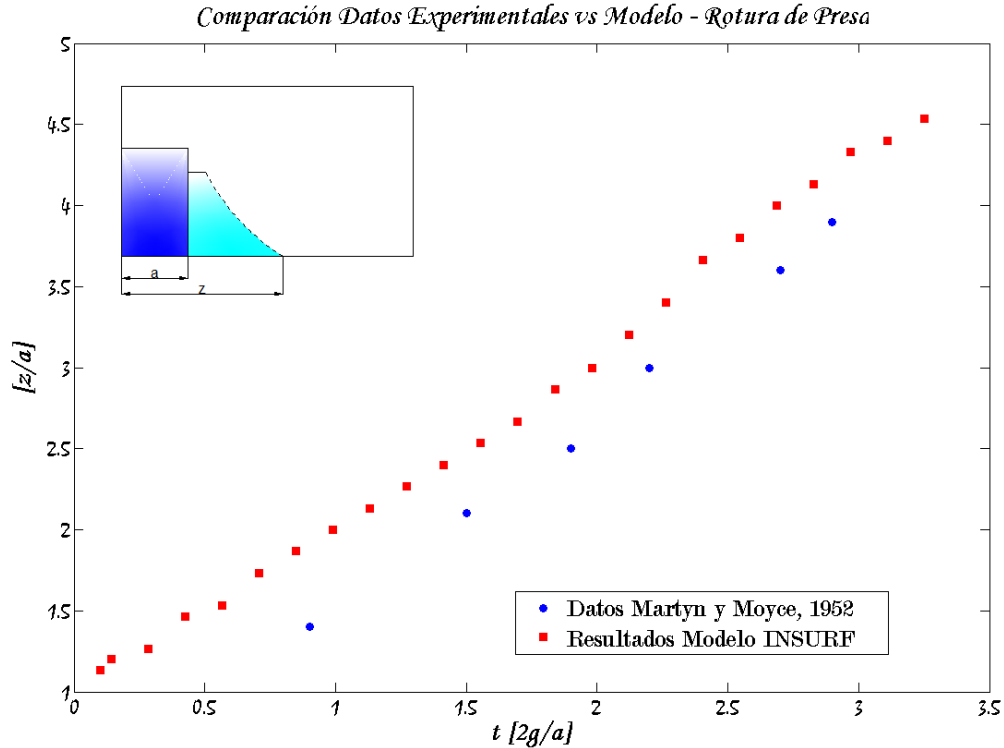


Figura 6.6: Comparación Modelo Numérico contra Pruebas Laboratorio de Martyn y Moyce

INSURF y los datos experimentales desarrollados por Martyn y Moyce (1952). Esta es una prueba bastante efectiva por la simplicidad en las condiciones de frontera y por la configuración inicial tan sencilla. Martyn y Moyce desarrollaron una prueba experimental en un embalse para una configuración inicial y profundidad del embalse dada. En sus experimentos, midieron el nivel de la superficie del embalse así como la distancia relativa del frente de onda ( $z$ ) respecto del punto inicial localizado en la presa ( $a$ ). Los resultados numéricos para la configuración descrita del embalse y el dominio de cálculo propuesto se contrastan con estos datos experimentales, para observar el comportamiento y precisión del modelo a la hora de simular este tipo de fenómenos.

Esta comparación se presenta en la figura 6.6, donde se observa claramente la posición de la presa, el frente de onda y la elevación de la superficie libre. En el eje horizontal, el tiempo adimensional es normalizado con  $(\sqrt{2g/a})$ . A pesar de que los resultados numéricos siguen la tendencia de los datos experimentales se observa una diferencia entre ambos resultados. Esto se debe a que los ensayos de laboratorio fueron realizados con un lecho seco aguas abajo de la presa, lo que origina mayor fricción con el fondo y por lo tanto el frente de onda avanza mucho más lento que en el caso donde se tiene lecho húmedo. Mientras que la modelación numérica tuvo en cuenta una lámina de agua debido a que el modelo no cuenta con una condición de frontera de deslizamiento para el fondo, con el fin de resolver la subcapa laminar. La mayor diferencia en cuanto a la velocidad de avance del flujo se da en la etapa inicial, donde la discrepancia entre los datos es mayor que al final, donde ambos flujos disminuyen la velocidad y presentan valores cercanos. Según Stansby et al. (1998) para el caso de lecho

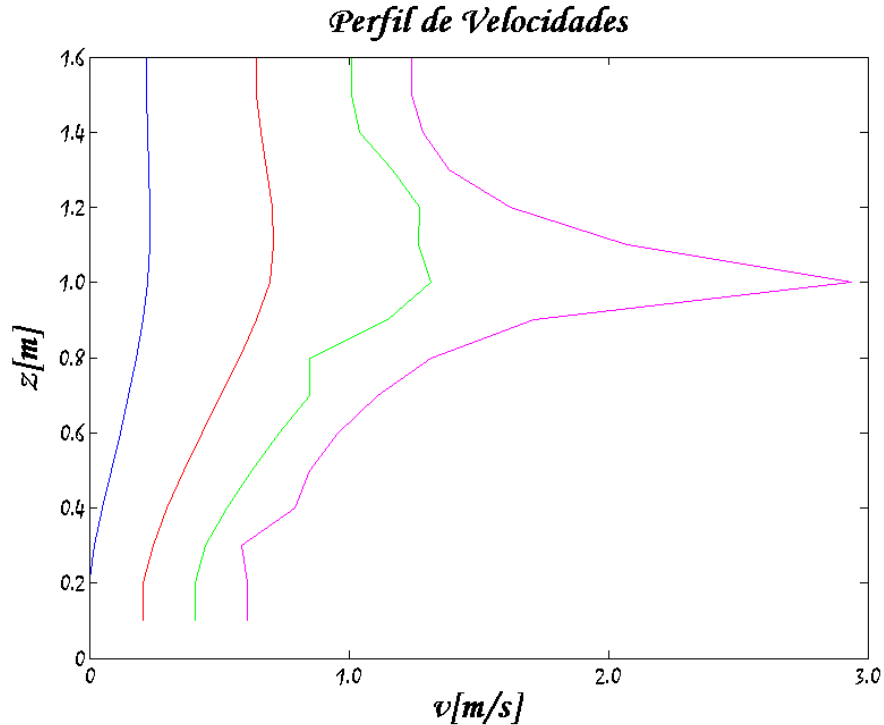


Figura 6.7: Campo de Velocidades en  $t=0.6s$

húmedo, el rompimiento de la presa genera un comportamiento más violento que en lecho seco, lo que justifica el hecho que el avance del frente de onda sea mayor en los resultados de las modelaciones. Entre mayor espesor tenga la lámina de agua en la parte delantera de la presa, más suave es el efecto del rompimiento, pero aun así es mucho mayor que para la condición seca.

Aunado a lo antes señalado, los resultados numéricos han sido obtenidos bajo la condición de flujo viscoso, en el cual no intervienen las diferentes escalas turbulentas ni los esfuerzos de Reynolds quienes son los encargados de tener en cuenta los procesos de turbulencia y rotura. Sin embargo, se observa una correspondencia entre las tendencias de los resultados, lo que permite afirmar que el avance del frente de onda y el cálculo de la superficie libre en el tiempo es adecuado. Estos resultados permiten afirmar que el modelo numérico desarrollado puede ser utilizado en futuras investigaciones para estudiar la hidrodinámica asociada a la rotura de presas.

En la figura 6.7 se muestran los perfiles de velocidad media para diferentes posiciones, en el tiempo. Se puede observar en esta gráfica la evolución del campo de velocidades conforme se desarrolla el fenómeno del rompimiento de la presa. Como era de esperarse, las mayores velocidades se identifican en el frente de onda, donde se producen los máximos gradientes de velocidad tanto en el espacio como en el tiempo. Este instante es quizás el más crítico, pues en él se describe propiamente el inicio del rompimiento de la presa y donde las velocidades pasan de 0 a 1.5 m/s en pocos segundos.

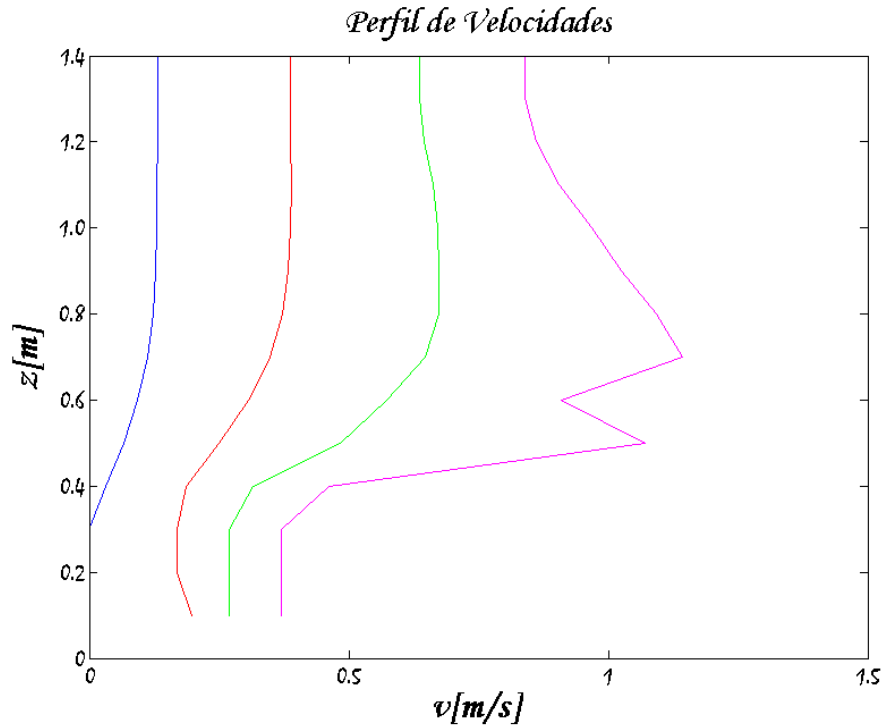


Figura 6.8: Campo de Velocidades en  $t=2.0s$

El efecto de la interacción con la lámina de agua afecta el perfil de velocidades, Figura 6.8. Por eso en el instante  $t = 0.2$  seg. la magnitud del campo de velocidades disminuye, lo que origina que los perfiles tengan mayor espaciamiento entre ellos debido a los efectos friccionantes y por ende que la forma del perfil y la magnitud del campo de velocidades sean menores.

La disminución de la velocidad provoca en los perfiles de velocidad, la apariencia de ser más uniformes y solo se presentan variaciones en el frente de onda, que representa el punto donde se dan, en todo momento, las velocidades más altas.

#### 6.4.4.2. Simulación Numérica de Flujo en Cavidad

Para propósitos ilustrativos y de validación, se examina el ampliamente estudiado flujo en cavidades rectangulares. Se considera un flujo viscoso incompresible confinado en una cavidad rectangular cuyos lados tienen unas condiciones de frontera específicas. Dado el carácter de las ecuaciones de Reynolds y las características de la ecuación de momento, es necesario como lo plantean Hirt y Nichols (1981), Greenspan y Casulli (1988), Hou et al (1994) así como Gloerfelt et. al (2002) asignar a la viscosidad cinemática el valor de 0.1 para reducir los efectos de los esfuerzos viscosos. Adicionalmente, es necesario para la simulación de este tipo de flujos, no tener en cuenta los efectos de la aceleración de la gravedad, pues se debe simular el flujo en el plano horizontal. Se desea obtener el patrón del campo de velocidades y presiones cuando el flujo se encuentra confinado. El estudio de este tipo de fenómenos tiene

*CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO  
INSURF*

mucha aplicación en el análisis de la hidrodinámica de lagunas, pozos de decantación donde es muy importante conocer las zonas donde no hay movimiento del fluido, en las reservas petroleras, depósitos de desechos nucleares y en los dispositivos de enfriamiento de los equipos electrónicos.

Se acepta adicionalmente, que el fluido en la frontera tiene la misma velocidad de la frontera. Las fronteras de fondo y laterales son fijas, mientras que la frontera superior se mueve a partir de una componente horizontal de la velocidad utilizada como forzamiento. Así, la condición de frontera de la velocidad tangencial viene dada por:

$$u(x, 0, t) = v(0, y, t) = v(1, y, t) = 0 \quad u(x, 1, t) = u_t = 1 \quad (6.50)$$

Las condiciones de frontera para la velocidad normal son

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = v(x, 0, t) = v(x, 1, t) = 0 \quad (6.51)$$

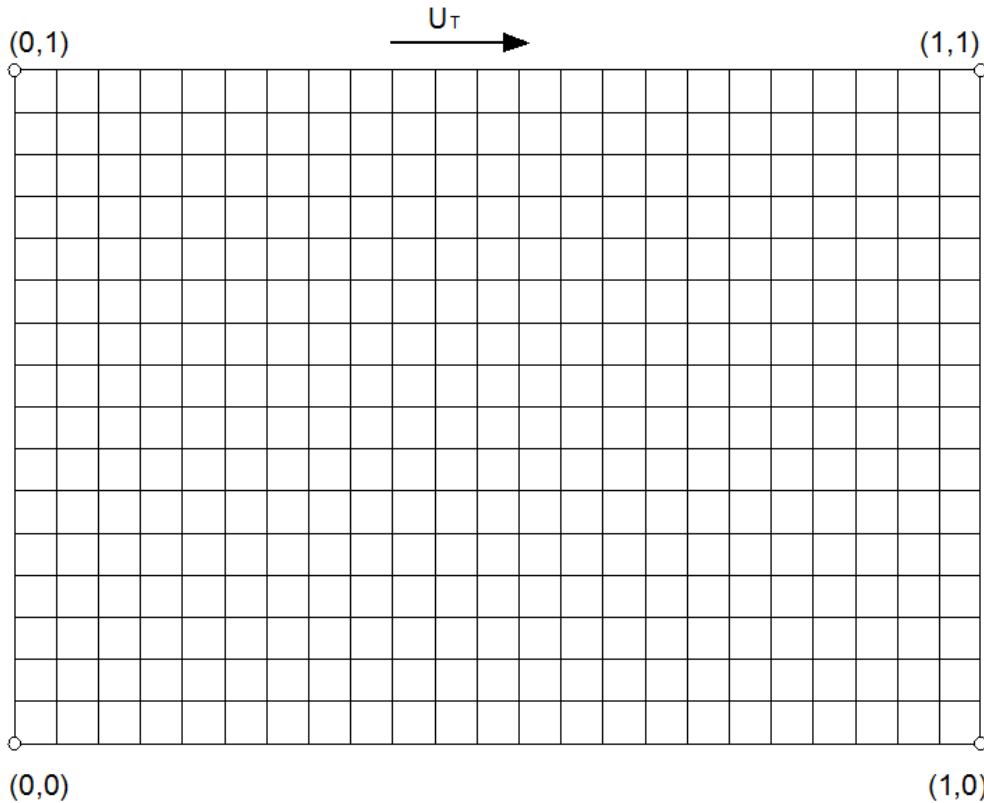


Figura 6.9: Esquema del dominio computacional

Las condiciones iniciales para las ecuaciones de la velocidad dentro del dominio se igualan a cero ya que el fluido está inicialmente en reposo.

## CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF

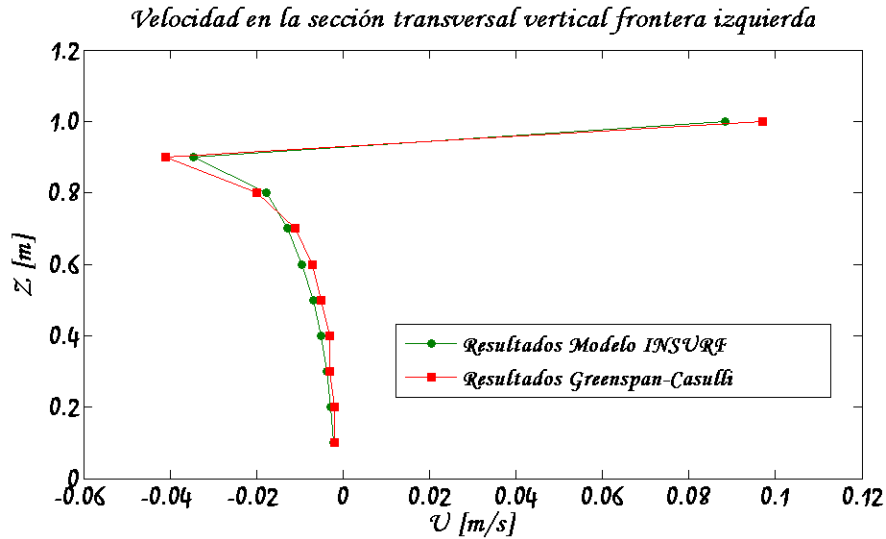


Figura 6.10: Velocidad horizontal en la iteración 1

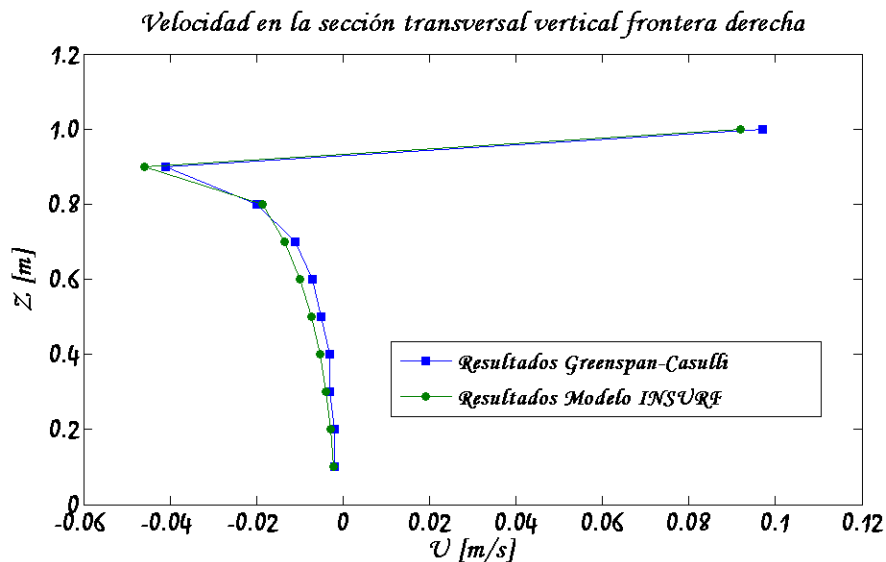


Figura 6.11: Velocidad horizontal en la iteración 1

El fenómeno bajo estudio se presenta en cavidad rectangular en las direcciones x e y. El fluido es newtonaiano, laminar e incompresible, considerando que las propiedades del fluidos son constantes en cualquier instante de tiempo.

La discretización empleada es la misma que para el caso de Rotura de Presa, con incrementos espaciales de  $\Delta t = 0.01s$ ,  $\Delta x = 0.1m$  y  $\Delta y = 0.1m$ .

Se presenta a continuación los resultados obtenidos con el modelo INSURF, que son contrastados con los resultados de Greenspan y Casulli (1988), que se realiza con el objetivo de medir la precisión del modelo durante las simulaciones en una cavidad.

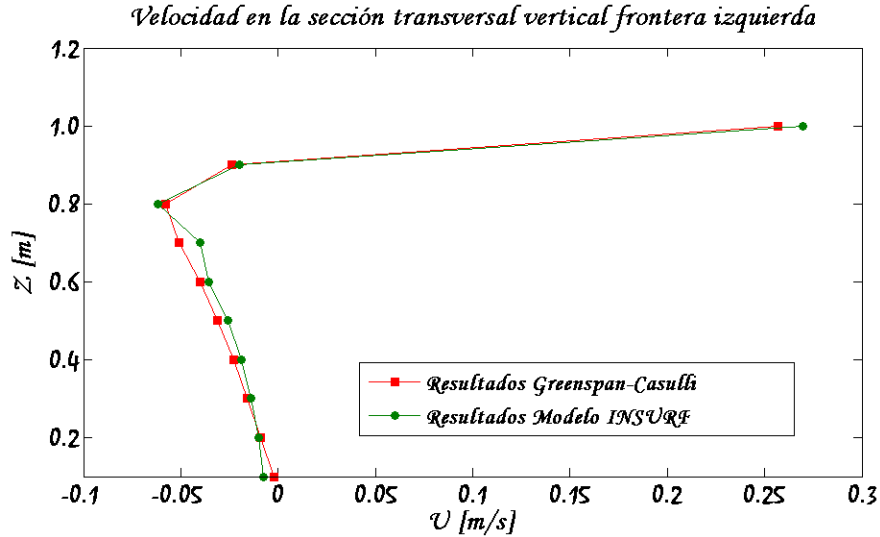


Figura 6.12: Velocidad horizontal en la iteración 100

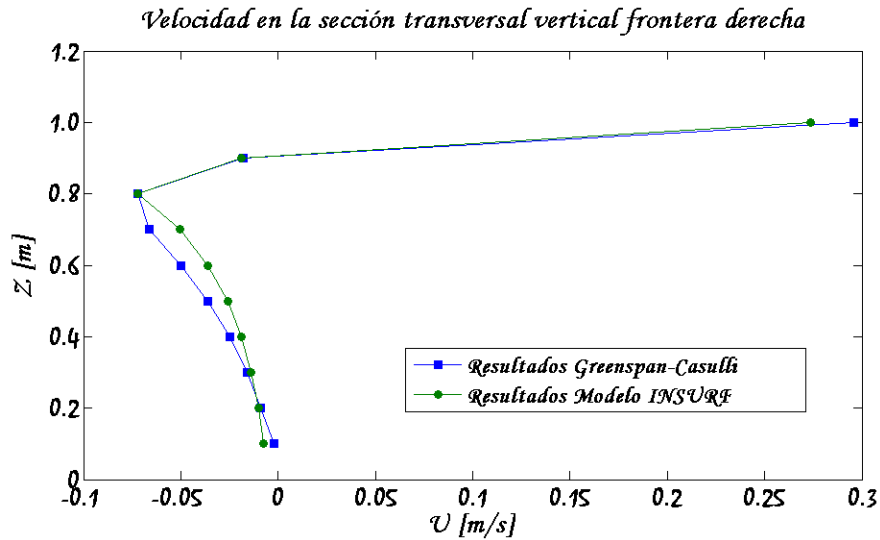


Figura 6.13: Velocidad horizontal en la iteración 100

En la figura (6.10) se presenta el campo de velocidades horizontales en la frontera izquierda del dominio para la primera iteración. Se observa que al inicio se tiene un valor de la velocidad nulo en el fondo del dominio, que indica que el flujo inicial se encuentra en reposo. En la frontera superior, donde se efectúa el forzamiento del sistema presenta un valor de uno. Hay una buena correspondencia entre ambos resultados, fundamentalmente en la parte inferior. Las discrepancias surgen quizás como consecuencia de los métodos numéricos, ya que Greenspan utiliza métodos centrados de primer orden, mientras que INSURF utiliza esquemas no-centrados de tercer orden.

Los resultados del campo de velocidades en la frontera derecha tienen un comportamiento similar a la figura (6.11). Esto demuestra las pocas perturbaciones que existen en el flujo,

## **CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF**

dando como resultado un comportamiento muy similar entre ambos modelos. Las velocidades del modelo INSURF (Línea continua con círculos) se ajusta muy bien en la parte inferior del dominio. En la parte central, donde se presenta ya la influencia de la perturbación en el sistema, aumentan las velocidades en ambos modelos. En la frontera superior, la velocidad continúa con valores constantes dado que allí el valor ingresado en la frontera es de (1 m/s).

En las figuras (6.12 y 6.13) se comparan nuevamente las velocidades horizontales en las mismas posiciones para la iteración 100. El comportamiento del modelo no difiere mucho de la primera iteración. Sin embargo, sí se presenta un aumento en la magnitud de la velocidad, fundamentalmente en la parte superior del dominio, debido a que las velocidades del flujo que recircula se suman a las del forzamiento en esta zona, lo que genera el incremento descrito. Las mayores velocidades se encuentran en la frontera derecha, con resultados del orden de 0.28 m/s, a diferencia de su lado inmediatamente opuesto, con valores de 0.26 m/s. Para los casos presentados, las menores velocidades se encuentran en el fondo del dominio y en las esquinas, que desde un punto de vista práctico son conocidas como zonas de estancamiento, con pocas perturbaciones en el flujo. En la frontera derecha se observan algunas diferencias al contrastar los resultados obtenidos en el borde izquierdo, pues es la primera frontera afectada como producto de la perturbación en la cara superior del dominio. En general, se observa la misma tendencia en el perfil de velocidades entre ambas iteraciones, lo que indica el flujo en este tipo de condiciones es uniforme y solo se presentan pequeñas perturbaciones en la frontera de forzamiento y su cara adyacente.

En la figura 6.14 se describe la velocidad vertical para las fronteras laterales en la primera iteración. La velocidad inicia desde el reposo con valores de cero hasta llegar a (1 m/s) en la cara superior. Los valores de la velocidad permiten descifrar la naturaleza recirculante del flujo dado que la velocidad cambia de signo a medida que se aproxima a las fronteras horizontales. Los cambios de dirección se producen cuando el flujo se encuentra en dirección perpendicular a las paredes de la cavidad.

La frontera derecha presenta velocidades negativas (figura, 6.15), lo que indica que la dirección del flujo va en el sentido de las manecillas del reloj, dado que todas las velocidades en la cara izquierda poseen valores positivos. El comportamiento es adecuado e indica que el modelo es estable y es adecuado para simular la hidrodinámica de este tipo de flujos.

Las velocidades del flujo al igual que las velocidades horizontales incrementan a medida que el flujo comienza el movimiento (figuras 6.16 y 6.17), lo que va asociado al movimiento de recirculación que se está presentando debido al forzamiento en la frontera. La velocidad máxima alcanzada en la cara derecha del dominio es de 0.27 m/s, valores consecuentes con los valores de las velocidades horizontales ya que el dominio de cálculo es rectangular, por lo que las propiedades en cada una de las caras debe conservarse.

Si se realiza una comparación de los perfiles de velocidad en las mismas posiciones, se puede observar que la forma de los perfiles de la velocidad vertical tiene variaciones menores respecto de los perfiles que describen la velocidad horizontal del flujo. Lo que sucede es que los máximos gradientes se dan para las caras laterales, quizás a la forma de la cavidad que por su carácter



## CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF

rectangular es más estrecha en los costados. Por esta razón es que los perfiles verticales tienen una forma más esbelta cerca de las fronteras laterales.

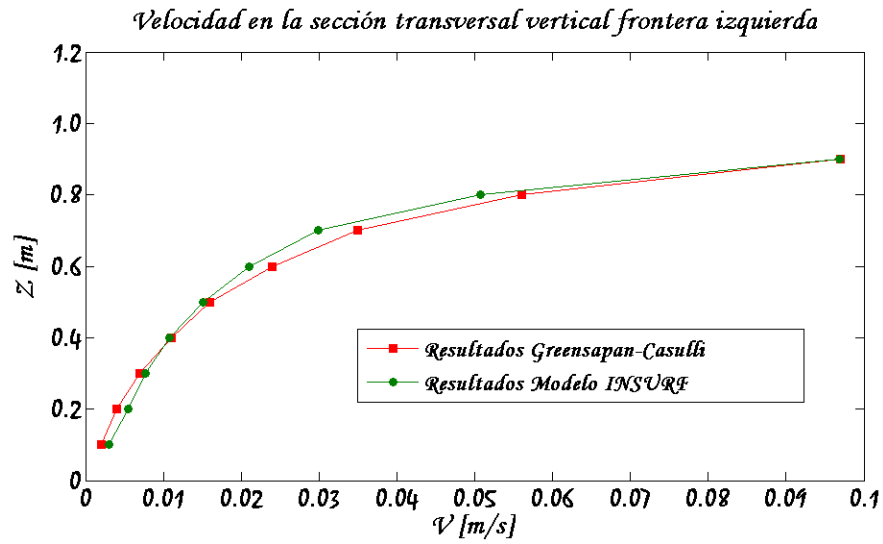


Figura 6.14: Velocidad vertical en la iteración 1

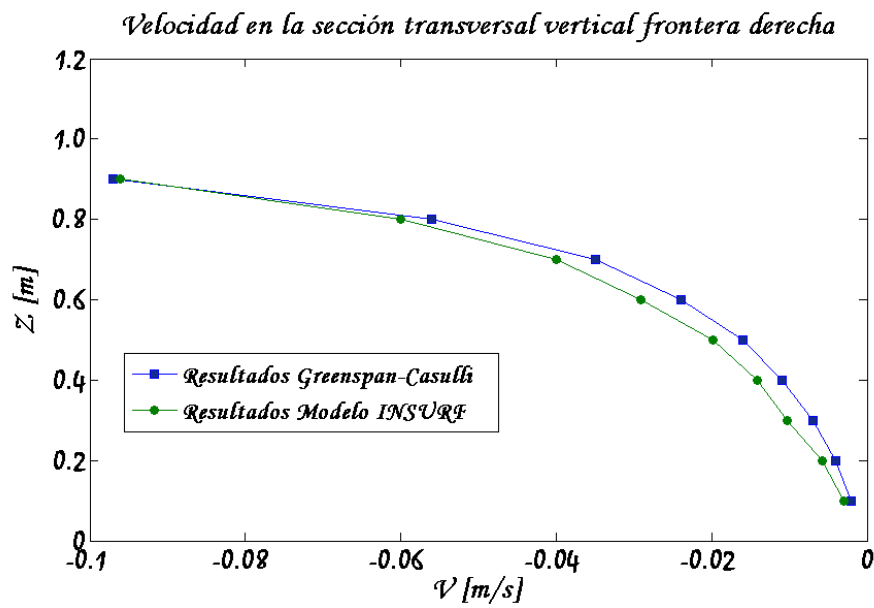


Figura 6.15: Velocidad vertical en la iteración 1

CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF

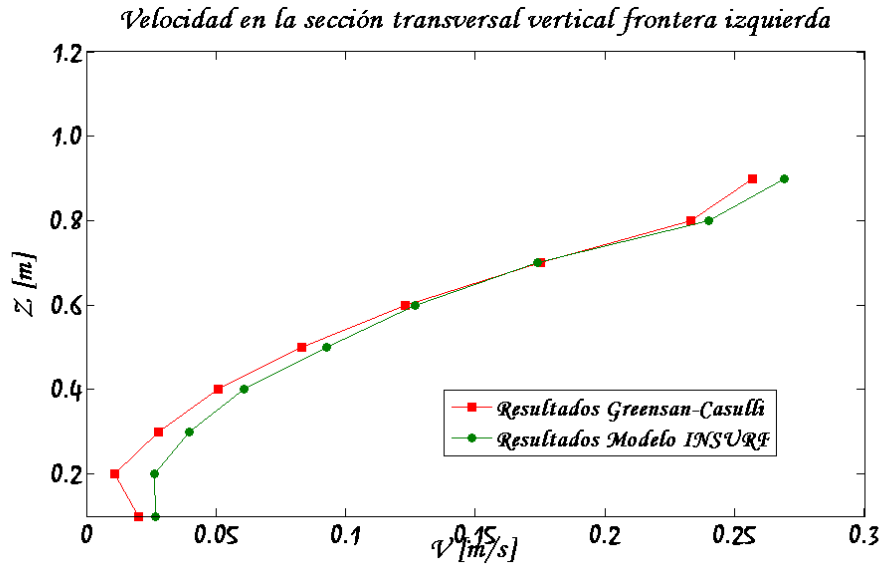


Figura 6.16: Velocidad vertical en la iteración 100

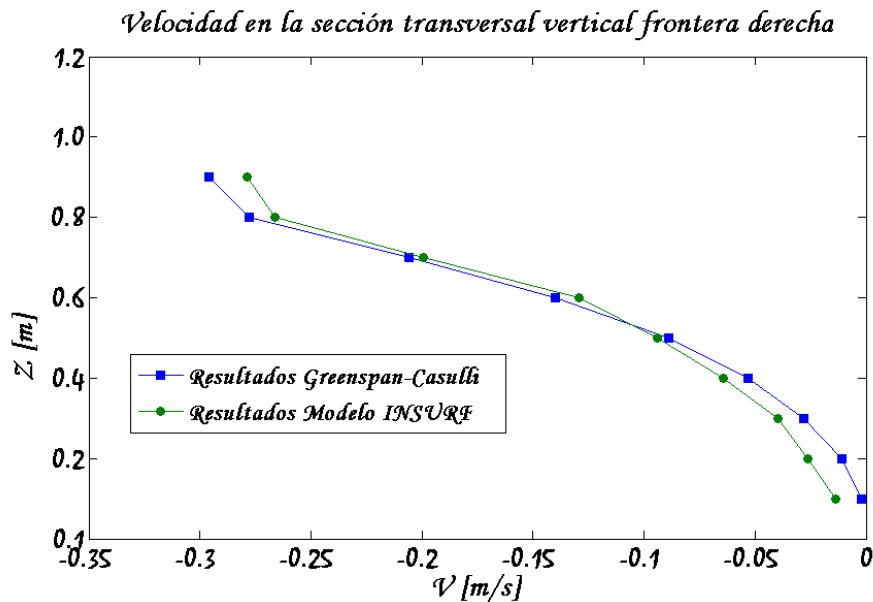


Figura 6.17: Velocidad vertical en la iteración 100

A continuación se presenta la simulación numérica del flujo en una cavidad representada por la magnitud y dirección de los vectores de velocidad. La figura 6.18 presenta la configuración del flujo en el momento del forzamiento y la frontera a través de la cual se está forzando el sistema. En este punto se ingresa un valor inicial de la velocidad de 1 m/s.

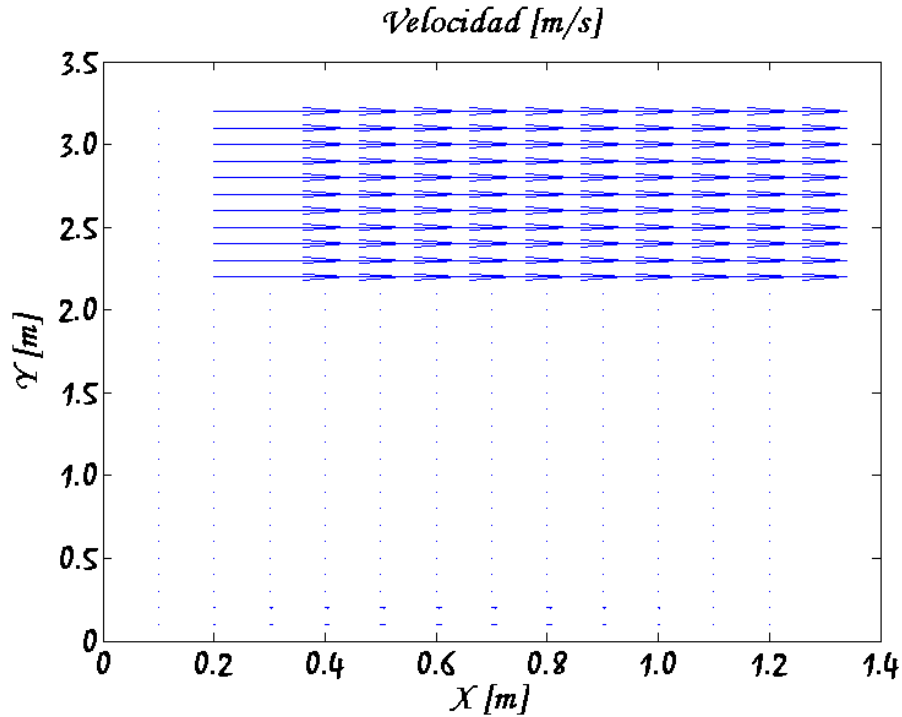


Figura 6.18: Instante Inicial  $t=0$ . Vista en planta

La gráfica 6.19 presenta la configuración del flujo un instante después, donde las isolíneas vectoriales enseñan como el flujo recircula en sentido de las manecillas del reloj, donde las mayores velocidades se presentan en la periferia del vórtice. Además se observa como se producen fuertes variaciones de las componentes de la velocidad en las caras del dominio, a diferencia de los valores obtenidos en la parte superior e inferior, donde la velocidad es homogénea y constante. A medida que las componentes convectivas se alejan del vórtice se aprecia como cambia la velocidad, reduciendo su magnitud hasta valores cercanos a cero. Se presenta en el fondo algunos vectores de velocidad que representan algunos problemas del método numérico, debido a que presentan una dirección opuesta a las presentadas en todo el campo de flujo.

En la iteración número 11 (figura 6.20) las velocidades han aumentado considerablemente. En todo el dominio se presentan valores de la velocidad que van desde 0.5 m/s hasta 1.0 m/s, siendo este último el valor máximo obtenido. El incremento en los valores de la velocidad originan mayor advección en el flujo, fundamentalmente en las caras del volumen de control. El tamaño de remolino ahora tiene menor diámetro y la distancia entre las isolíneas es menor, lo que físicamente es correcto, pues el flujo se mueve con mayor aceleración. Por otro lado, se va mayor influencia del remolino en las componentes verticales, generando movimientos en puntos que en paso de tiempo anterior se caracterizaban por ser puntos de estancamiento.

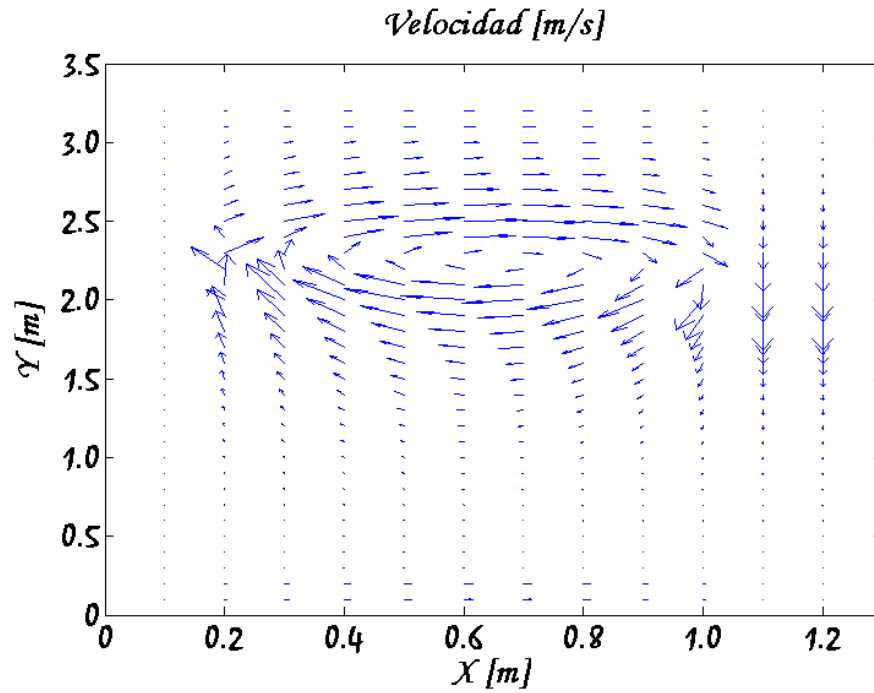


Figura 6.19: Flujo en cavidad  $t=1$

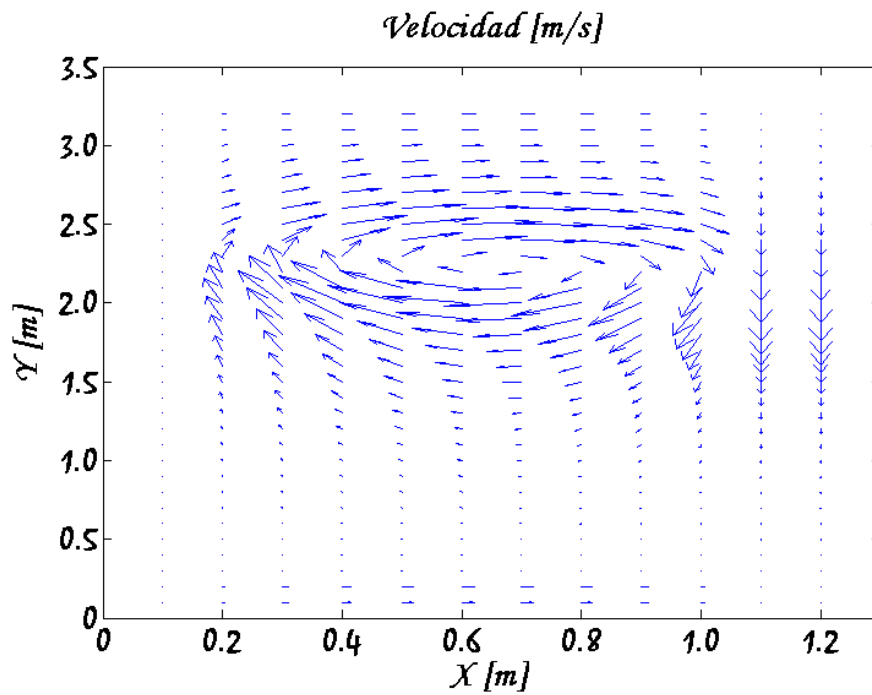


Figura 6.20: Flujo en cavidad  $t=11$

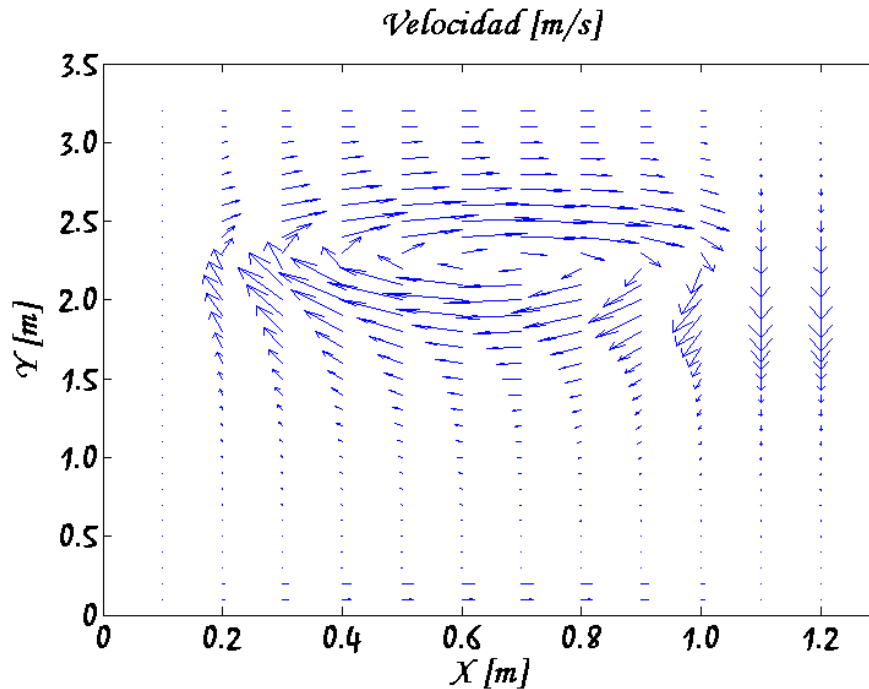


Figura 6.21: Flujo en cavidad  $t=100$

En la iteración número 100 (figura 6.21) no se observan cambios considerables en el flujo, donde las dimensiones del remolino y la magnitud de los vectores de velocidad son continuas. Esto demuestra que la estructura y el campo de velocidades de la vorticidad pueden ser estudiados con este modelo, así como los campos de velocidades, dado que se observa un comportamiento físicamente realista y concuerdan desde un punto de vista cualitativo con los casos reportados en la literatura y con los cuales fueron comparados Greenspan y Casulli (1988). Los resultados no exponen oscilaciones e inestabilidades en ningún instante de tiempo. Finalmente, se puede expresar que tanto la presencia de los vórtices como del flujo de recirculación son evidentes en los gráficos expuestos.

#### 6.4.4.3. Simulación Numérica de un Solitón

La descripción matemática del fenómeno del oleaje es un complejo proceso. Sin embargo, muchas características de este pueden ser descritas dentro de límites aceptables. Muchas teorías consideran el oleaje como un proceso oscilatorio o cuasi-oscilatorio, es decir, las partículas se mueven hacia adelante o hacia atrás cuando la onda pasa por éstas. La teoría lineal describe oleaje fundamentalmente oscilatorio, mientras que las teorías de orden superior señalan que para ondas de amplitud finita, las partículas si bien se presentan el mismo movimiento, cada partícula se mueve más hacia adelante de lo que lo hace hacia atrás, por lo que la partícula es trasladada una pequeña cantidad neta hacia adelante con el paso de cada onda. En sistemas cerrados donde debe haber transporte neto de masa nulo, las partículas de agua en algunas capas son trasladadas hacia adelante y otras hacia atrás. Cuando las partículas se mueven solo en la dirección de avance de la onda, dicho movimiento progresivo es conocido como onda de traslación. Una onda solitaria se encuentra bajo esta clasificación. Una onda solitaria pura

## CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF

es complicado construirla, por lo que se recurre a generar una aproximación de ésta, una con un extremo formado por pequeñas ondas dispersivas. La onda solitaria original se encuentra en una posición más baja que el nivel medio del agua. Ésta puede ser generada añadiendo un flujo al cuerpo de agua, dejando caer un cuerpo de agua en otro, o generando un pulso en el extremo del tanque (dominio de cálculo).

**6.4.4.3.1. Teoría** Se utiliza para el cálculo de la onda solitaria la aproximación teórica desarrollada por Laitone (1959, 1960). La velocidad de la onda se determina a partir de la ecuación empírica estimada por Russell (1844) y desarrollada en estudios teóricos por Boussinesq (1887), Rayleigh (1876) y McCowan (1891).

$$C = \sqrt{gd\left(1 + \frac{H}{d}\right)} \quad (6.52)$$

De acuerdo a la teoría de Laitone(1959) la aproximación para las componentes horizontales y verticales de la velocidad son:

$$\frac{u}{\sqrt{gd}} = \frac{H}{d} \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{3H}{4d^3}}(x - Ct) \right] \quad (6.53)$$

$$\frac{v}{\sqrt{gd}} = \sqrt{3} \left( \frac{H}{d} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{y}{d} \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{3H}{4d^3}}(x - Ct) \right] \operatorname{tanh} \left[ \sqrt{\frac{3H}{4d^3}}(x - Ct) \right] \quad (6.54)$$

donde  $u$  y  $v$  son las componentes horizontal y vertical de la velocidad,  $g$  es la gravedad,  $d$  la profundidad del cuerpo de agua,  $H$  la altura de ola,  $C$  la celeridad de la onda y  $t$  el tiempo.

**6.4.4.3.2. Experimentos de Laboratorio** Los resultados numéricos fueron comparados con datos experimentales, desarrollados por Morales (2008) en el laboratorio de Costas y Puertos del Instituto de Ingeniería, en un Canal de Oleaje de 36m de largo, 0.55m de ancho y 1.2m de altura. La pala tiene una amplitud máxima de 0.8 m, una velocidad máxima de 0.81  $cm^{-1}$  y un rango de frecuencias de 0.5 a 2.0  $Hz$  y se encuentra localizado en uno de los extremos del canal y es controlado por un motor de cómputo HP *Wavemaker*. Con esta aplicación se puede generar un tipo de oleaje pre-configurado en función de los parámetros del oleaje, o bien, mediante un archivo de datos previamente establecido en donde se debe indicar la posición del pistón a lo largo de un intervalo de tiempo (Morales, 2008). Además, posee un sistema de absorción que previene los efectos reflexión de ondas. La señal se modifica en tiempo real para considerar la energía del oleaje. Este trabajo experimental tuvo por objetivo analizar la interacción de ondas solitarias.

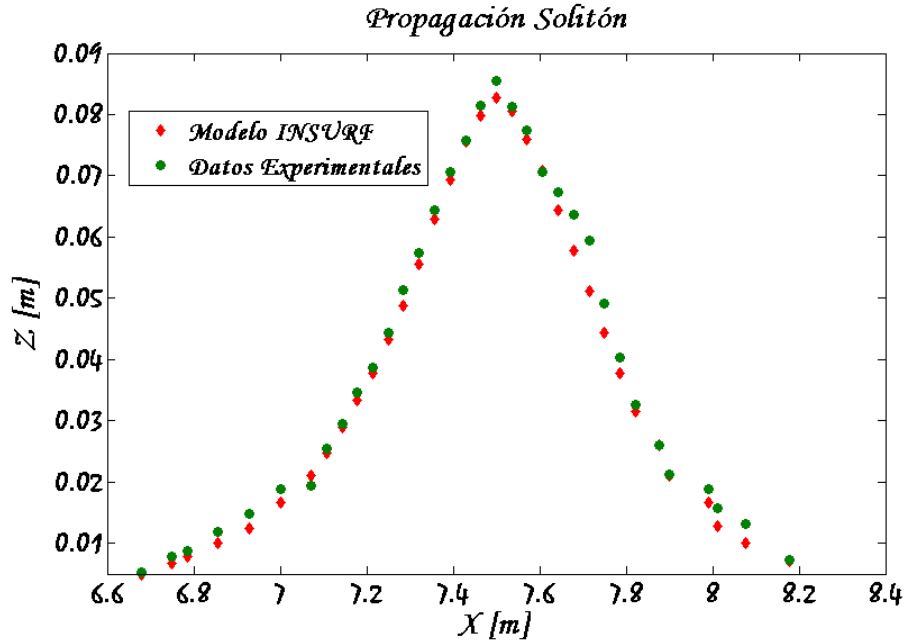


Figura 6.22: Solitón localizado  $x=6.68$  m. Los círculos verdes representan los datos de Morales. Los diamantes rojos representan los resultados numéricos

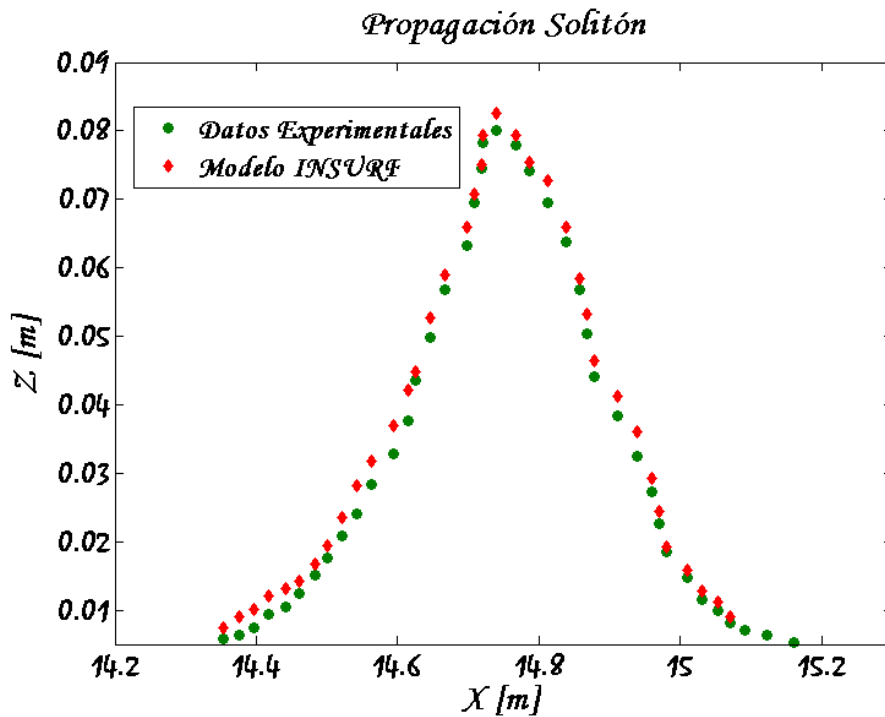


Figura 6.23: Solitón localizado  $x=14.354$  m. Los círculos verdes representan los datos de Morales. Los diamantes rojos representan los resultados numéricos

Para la estimación de la altura de ola se utilizó una serie de sensores resistivos de nivel,

## **CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF**

localizados en posiciones fijas. Se disponen verticalmente en un soporte horizontal y se deja parcialmente sumergido. Con éstos se puede medir, a través de la salida de voltaje, la elevación del agua respecto del nivel de la superficie en reposo.

Se generaron ondas solitarias de diferentes alturas. Para este trabajo se tomó una onda de 8.27 cm, una profundidad de 5 cm. Dado que el solitón generado y expuesto en el trabajo experimental solo tomó en cuenta tres estados de propagación, onda inicial-superposición de ondas-onda después de la propagación, los resultados fueron comparados con la onda inicial y final.

En cuanto al modelo numérico, se tomaron las mismas condiciones de oleaje para validar el modelo. Además, se utilizaron incrementos espaciales de  $\Delta x = \Delta y = 0.1$  y temporal de  $\Delta t = 0.01$ . Las gráficas expuestas de los resultados experimentales no muestran el perfil de la superficie en un tiempo dado, sino que indican la elevación del agua sobre la posición fija del sensor en distintos tiempos de medición.

En la figura 6.22 se muestran los perfiles de las ondas solitarias registradas experimentalmente y las obtenidas a través de modelación numérica. El ajuste de las curvas es aceptable, a pesar del hecho que se presentan algunas zonas con diferencias cuantitativas, que vale la pena mencionar, entre ambos resultados. La amplitud de la onda numérica en la etapa inicial es menor que la experimental, condición que cambia luego de su avance por el canal, debido al hecho de un efecto disipativo en las pruebas experimentales. En el modelo numérico también se produce una disminución en la altura del solitón, disipación inducida por la acción de los esfuerzos viscosos de las ecuaciones de momento que generan un efecto de amortiguamiento.

La gráfica 6.23 muestra las ondas finales con algunas perturbaciones en la cara frontal del solitón. Es una evidencia de los efectos reflexivos en la superficie libre a medida que la onda se acerca al final del canal, puesto que el forzamiento se hace con una teoría de oleaje, no con un forzamiento propio del modelo numérico, lo que genera inestabilidades en la solución.

Adicionalmente se realizó una comparación de los resultados numéricos y los datos desarrollados por Craig y Sulem (1993) donde analizan la superficie libre luego de una interacción entre dos solitones. Los experimentos fueron desarrollados en un canal de oleaje de 13.2 m de largo y 0.25 m de ancho, con una profundidad de 5cm. La amplitud de la onda generada fue de 2.295 cm. El generador de ondas en este caso también fue un pistón controlado por una computadora, al que se le especificaba la posición y la velocidad.



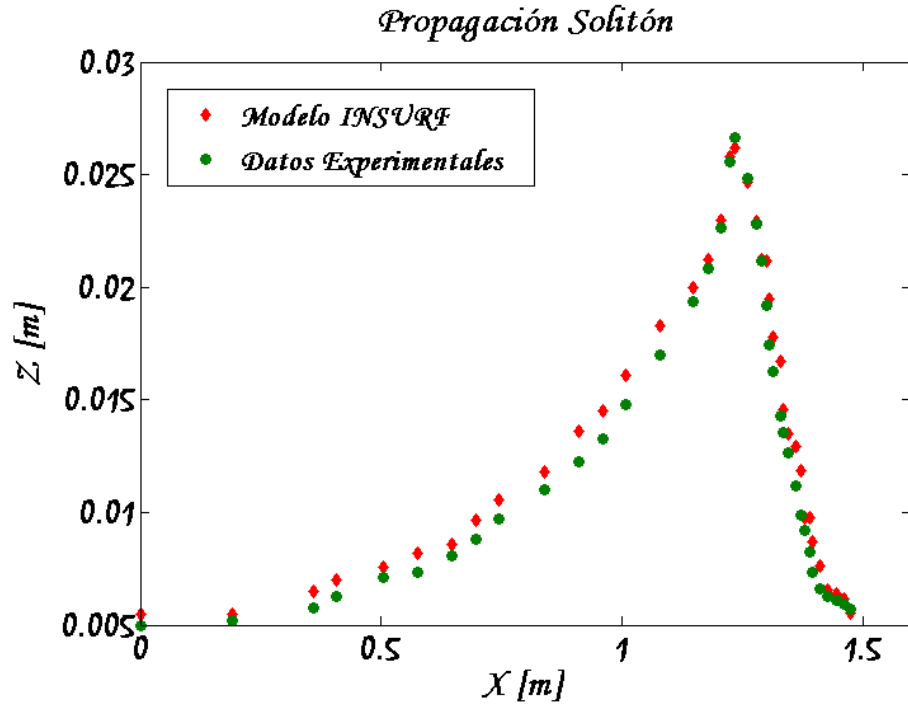


Figura 6.24: Solitón localizado en  $x=6.68$  m. Los círculos verdes representan los datos de Craig y Sulem. Los diamantes rojos representan los resultados numéricos

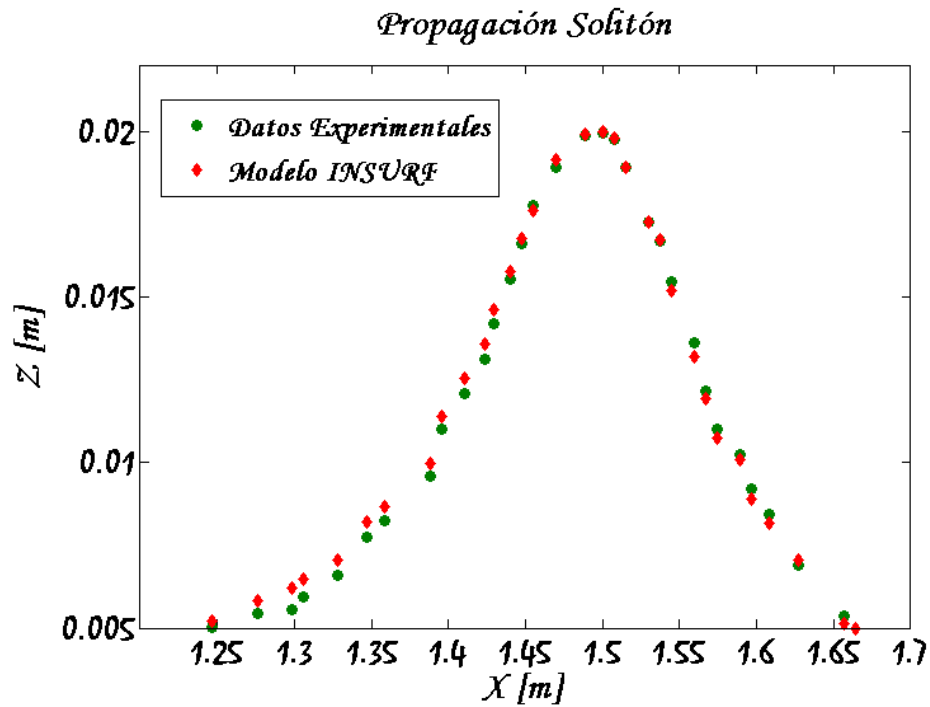


Figura 6.25: Solitón localizado en  $x=14.35$  m. Los círculos verdes representan los datos de Craig y Sulem. Los diamantes rojos representan los resultados numéricos

## ***CAPÍTULO 6. ECUACIONES FLUJO TURBULENTO DEL MODELO INSURF***

Al comparar los resultados se observa que la forma geométrica de la superficie registrada en las pruebas de laboratorio concuerdan tanto en la onda inicial como final, con los resultados obtenidos a partir de las simulaciones numéricas. Las diferencias se encuentran en la parte trasera de la onda donde los datos numéricos poseen valores mayores que las pruebas de laboratorio. Las diferencias son mayores en la etapa inicial (figura 6.24) cuando la onda aún no se ha establecido completamente. Conforme se desarrolla el avance de ésta, toma una forma más estable y los datos se ajustan mejor con respecto a las mediciones realizadas por Craig y Sulem (1993) (figura 6.25). Otro aspecto a considerar, es la pérdida de amplitud de las ondas, más acentuada en los resultados experimentales que en los datos numéricos, lo que puede inducir en algunos casos a un desfase en la posición de las ondas. Esto se debe a procesos disipativos tanto en el experimento como en las simulaciones. En el primero se debe a los procesos de estabilidad de las ondas generadas experimentalmente. Por otro lado, otro factor que influye se da en la calibración de los sensores durante las pruebas.

## Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación

### 7.1. Conclusiones

Se repasan algunos de los conceptos básicos de la teoría de oleaje asociada al fenómeno de la rotura en el capítulo 1. Se citan los fenómenos de transformación del oleaje y los tipos de rotura que ocurren una vez el oleaje arriba a la costa. Además los diferentes métodos que permiten caracterizar la rotura en función del perfil de la playa y la zona en que se presenta. Esta es una excelente base a la hora de abordar la teoría que describe el fenómeno de la rotura y brinda los conocimientos mínimos necesarios para su completa comprensión.

En el capítulo 2 se hace una descripción detallada de los modelos de oleaje, a manera de introducción hacia los modelos RANS, brindando una idea clara de la aplicación de cada uno, sus desventajas y ventajas y las zonas de la costa donde se puede aplicar cada teoría de oleaje. Esto allana el camino hacia la concepción de la características de los modelos de Reynolds, fundamentalmente en el tratamiento de los esfuerzos turbulentos que hace de su comprensión una tarea bastante compleja y de su tratamiento un esfuerzo loable.

Una vez se ha mostrado el camino para la deducción y construcción de los modelos RANS, se precisa con un buen nivel de detalle los conceptos turbulentos asociados a la deducción del promedio estadístico. Se exponen para ello en el capítulo 3, los fundamentos de la teoría clásica de la turbulencia y la manera como debe ser abordada en función de los alcances que se desean obtener en la descripción de la cascada de la turbulencia. Es por esto que se presentan los diferentes modelos de turbulencia, cero, una y dos ecuaciones así como los modelos algebraicos, que además de dar criterios de estabilidad, permiten establecer el conjunto cerrado de ecuaciones que debe ser resuelto para poder estimar los campo de velocidad, presión, energía cinética de la turbulencia y tasa de disipación turbulenta.

Expuestos los precedentes de los fenómenos que engloba la rotura del oleaje, el paso siguiente consiste en determinar el conjunto de parámetros que componen las ecuaciones de flujo turbulento, que aplicadas en este caso, constituyen las ecuaciones de Reynolds para estimar la rotura del oleaje. El capítulo 4 está compuesto por la descripción del sistema de ecuaciones objeto de interés. Se presenta las ecuaciones canónicas de Navier-Stokes y cómo a partir de un simple promedio estadístico se puede llegar a las ecuaciones de Reynolds, donde se detallan cada uno de los nuevos términos generados en esta deducción. Dada la nueva condición que adquiere el sistema de ecuaciones, se exponen las razones del papel fundamental que juegan

## CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

los modelos de turbulencia en la solución de las ecuaciones de momento. Además, se precisa punto por punto cada uno de los componentes de dichos sistemas y las teorías que conducen a su estimación.

Establecido el conjunto algebraico de las ecuaciones de flujo turbulento, el paso siguiente en este sendero matemático es la discretización de las ecuaciones de Reynolds. Se hace relevancia en la forma de solución y la vía que permite separar la presión de las componentes que hacen parte de las ecuaciones de momento. Para esto se utilizó el método semi-implícito de solución de la presión conocido como SIMPLE, donde se estima el campo de velocidades a partir del cálculo de la presión que a su vez, depende de la presión de un paso previo.

Finalmente se introduce el concepto de Volumen de Fluido, que simplemente constituye una técnica que permite realizar la construcción del flujo en cada ciclo de cálculo, demostrando como es la evolución de éste en el tiempo y las variaciones que se producen en los campos vectoriales de la presión y la velocidad.

El método de discretización que permite llegar a la soluciones de las ecuaciones mencionadas se conoce como método de diferencias finitas (capítulo 5). Por esto se dedica un apartado a describir y demostrar como es posible su implementación y la forma de aplicarlo a cualquier sistema de ecuaciones. Esta aproximación fue seleccionada por su sencillez, por la estabilidad que se logra aplicando técnicas particulares basadas en y desarrolladas con base en el esquema que se está describiendo. Además, los actuales modelos RANS que intentan simular flujos incompresibles solo pueden ser resueltos con esquemas de diferencias. No se ha encontrado una manera que permita llegar a la solución de este tipo de flujos con las ecuaciones de Reynolds sin aplicar hipótesis que de manera directa cambian las condiciones del mismo y hace que se pierda el objetivo al que se desea llegar. Algunas de las hipótesis que se menciona por ejemplo, es la que la NASA y algunos investigadores vienen aplicando en la última década, la teoría de compresibilidad limitada. Ésta permite que a las ecuaciones de flujo turbulento sea posible aplicarles el método de Volumen Finito, pero se debe hacer énfasis que las condiciones para un flujo incompresible ya han cambiado.

En el último capítulo se presenta una sinópsis del modelo INSURF. Aquí se exponen las ecuaciones de Reynolds desarrolladas tanto matemáticamente como en su forma numérica. También se detalla numéricamente el método de solución de la presión, las ecuaciones de momento, el método de reconstrucción de la superficie libre y el modelo de turbulencia. Se ha desarrollado un modelo numérico bajo el esquema denominado *splitting*, construido bajo la base de tres módulos que comprenden el hidrodinámico, el módulo de reconstrucción de la superficie libre y el módulo de turbulencia. El módulo hidrodinámico o solver) resuelve numéricamente las ecuaciones promediadas de Reynolds (RANS), de las que se ha expuesto una detallada descripción en el capítulo 4 y deducción en el capítulo 6, donde se obtienen dos expresiones que representan las ecuaciones de momento para un flujo bidimensional. Además realiza la discretización de la derivada temporal mediante el método de diferencias centradas. El módulo de superficie libre contiene la solución de la técnica de Volumen de Fluido (VDF) y la evolución de su ecuación de advección. El tercer módulo contiene las ecuaciones que conllevan a la solución de la turbulencia. El módulo de turbulencia fue elaborado a partir de

## *CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN*

la forma conservativa de las ecuaciones  $k - \epsilon$ .

El modelo fue validado para diferentes escenarios, con el objetivo de presentar su rango de aplicabilidad y precisión de las componentes de las ecuaciones de flujo turbulento, así como comprobar el buen funcionamiento de los módulos en su conjunto. Cabe destacar que el módulo de turbulencia no funciona adecuadamente. El problema fundamental que se tiene con respecto a éste, es que el modelo no tiene la capacidad de modelar grandes separaciones del flujo, que ocurren cuando se da el fenómeno de la rotura por ejemplo. Esto conduce a que el modelo se inestabilice y limita la aplicabilidad del modelo de turbulencia, dado que se rompe el principio de conservación de la masa. Se probaron tres casos: a) una onda de rotura de una presa; b) la simulación del flujo en una cavidad; y c) la propagación de una onda solitaria.

Se puede concluir que la comparación con los resultados experimentales para la onda de rotura no se ajustan de la manera que se esperaba. Esto se debe a las diferencias presentes en los experimentos de laboratorio y las condiciones seleccionadas en el modelo numérico, dado que las pruebas experimentales fueron desarrolladas bajo lecho seco, mientras que el modelo solo utiliza la condición de lecho húmedo dado que no cuenta con una condición de frontera de deslizamiento para el fondo y por lo tanto no resuelve adecuadamente la subcapa laminar, condición que lo conduce a grandes inestabilidades. Se presentaron además los campos de velocidades asociados al frente de onda generado por el fenómeno de la rotura de la presa.

Para la validación del flujo en una cavidad se observa buena correlación entre los resultados calculados y obtenidos mediante la simulación numérica. Se realiza una comparación en diferentes zonas del dominio de cálculo. Las principales diferencias se presentan en las zonas medias de la cavidad, zonas donde se producen los mayores cambios en los gradientes de velocidad debido al cambio de dirección en el flujo.

La validación de la onda solitaria permite observar resultados aceptables. Se tienen diferencias en la onda inicial generada en la frontera izquierda, debido a problemas de reflexión originados en la parte trasera de la onda. Estas inestabilidades son inherentes al método numérico y al modelo mismo, por el hecho que se emplea una teoría de oleaje externa y que genera discrepancias con las ecuaciones de hidrodinámico. Los resultados más precisos se dan en las ondas finales, una vez que la onda ha recorrido una distancia considerable que le permite estabilizarse.

Existen en la literatura y en la iniciativa privada muchos y muy variados modelos que resuelven las ecuaciones de Reynolds con la misma variedad de modelos de turbulencia. Sin embargo, la implementación de un código de este tipo bajo los esquemas conservativos y descentrados constituye en sí un gran avance. Es poco frecuente encontrar un modelo con el sistema de solución implementado y con los órdenes de aproximación que fueron impuestos a la solución numérica de las ecuaciones. Para dar una idea de ello se trae a mención el modelo COBRAS, un potente modelo basado en las ecuaciones RANS al cual fue implementado un esquema de diferencias centradas y tipo upwind de primer orden. El método de solución de la presión que utiliza hace que sea lento y que se requiera de mucho tiempo de cálculo en una simulación.

## ***CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN***

Esto conduce a las siguientes conclusiones:

- Se ha aplicado un esquema upwind de tercer orden con el fin de reducir los efectos de la viscosidad numérica
- El hecho de aplicar este método habilita la posibilidad de utilizar esquemas de diferencias para las otras componentes de las ecuaciones de momento.
- El método SIMPLE es mucho más eficiente que el método de proyección y consume menos capacidad de memoria
- Parte de la eficiencia del método es que solo se utiliza información de pasos previos de la presión y el cálculo de la velocidad final se realiza de manera implícita
- Se demuestra el buen funcionamiento conjunto del modelo hidrodinámico y el que describe la reconstrucción de la superficie libre.

### **7.2. Futuras Líneas de Investigación**

Con base en los resultados obtenidos por el modelo INSURF se detallan las siguientes líneas de profundización:

- El modelo se comporta bien cuando el flujo es continuo y constituye una misma lámina de fluido. Por lo que debe implementarse una condición que permita que ante eventuales separaciones del flujo se mantenga la propiedad de conservación de la masa y el modelo no se inestabilice y llegue al colapso.
- Una vez realizado el paso anterior, se deben validar los datos obtenidos con el módulo de turbulencia
- Mejorar el sistema de mallado por uno más robusto. Se sugiere implementar el método "Quadtree"
- Se puede llegar a mejorar el método de solución por uno que calcule la presión de forma más directa y se llegue a la convergencia en menor tiempo. Existen para esto diversos métodos en la literatura
- Implementar las condiciones de frontera de superficie libre
- Realizar pruebas de aplicación del modelo a situaciones presentes en la ingeniería como la interacción oleaje estructura y el medio poroso.

---

## Bibliografía

- [1] *Breaking in a spectral wave model*. Proceedings, waves 2001. American Society of Civil Engineers, 2001.
- [2] Tannehill J. C. Pletcher R. H. Anderson, D. A. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Hemisphere, New York., 1984.
- [3] J. A. Battjes. Set-up due to irregular waves. *Proc. 13th Conf. Coast. Eng.*, 2:1993–2001, 1972.
- [4] J. A. Battjes. Surf similarity. *Proceedings of the 14th Coastal Engineering Conference*, 14:466–480, 1974.
- [5] J. A. Battjes. Surf-zone dynamics. *Annu Rev Fluid Mech*, 20:257–293, 1988.
- [6] J. P. F. M. Battjes, J. A. y Janssen. Energy loss and setup due to breaking of random waves. *Proceedings of the 16th Coastal Engineering Conference. American Society of Civil Engineers*, 32:569–587, 1978.
- [7] J. W. Berkhoff. Computation of combined refraction diffraction. *Proc. 13 th Int. Coast. Eng. Conf. New York, USA*, -:471–490, 1976.
- [8] J. W. Berkhoff. *Mathematical models for simple harmonic linear water waves, wave diffraction and refraction*. PhD thesis, Delft Hydraulics Laboratory, Delft, The Netherlands., 1976.
- [9] J. (1877) Boussinesq. Theorie des onde et de remous qui se propagent le long dŠun canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquid contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J. Math. Pures Appliquées, ser*, 17:55–108, 1877.
- [10] J. (1887) Boussinesq. Essai sur la théorie des eaux courantes-mémoires. *lŠAcadémie des Sciences*, 23:1–680, 1887.
- [11] A. J. Bowen. The generation of longshore currents on a plane beach. *Journal of Marine Research*, 27:206–215, 1969.
- [12] S.F. Bradford. Numerical simulation of surf zone dynamics. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng.*, 126:1–13, 2000.

- 
- [13] P. Bradshaw. The use of transport equations for reynolds stresses. *Proceedings Boeing Symposium on Turbulence, Seattle*, 36:593–616, 1969.
- [14] Drago M. y Iovenitti L. Brochini, M. Modelling of short waves in shallow waters and in the surf zone. *Proc. Final Workshop Coast. Morph.*, G6M-MAST:1–14, 1992.
- [15] Gosman A. D. Patankar S. V. Spalding D. B. Caretto, L. S. Two calculation procedures for steady, three-dimensional flows with recirculation. *Proc. Third Int. Conf. Numer. Methods Fluid Dyn., Paris.*, 19:60–68, 1972.
- [16] S. K. Chakrabarti. *Offshore structures modeling*, volume 9. Advanced Series on Ocean Engineering, Feb 1994.
- [17] Scotti A. Chang Y. Modeling unsteady turbulent flows over ripples: Reynolds-averaged navier-stokes equations (rans) vs. large-eddy simulations (les). *Journal of Geophysical Research*, 109:1–16, 2004.
- [18] Johnson D. B. y Raad P. E. Chen, S. The surface maker method. computational modeling of free and moving boundary problems. *Fluid Flow*, 1:223–324, 1991.
- [19] P.L.F. Chen, Y. y Liu. Modified boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation. *J. Fluid Mech*, 288:351–381, 1995.
- [20] Lee S. Chen H. Interactive rans / laplace method for nonlinear free surface flows. *Journal of Engineering Mechanics*, 122:153–162, 1996.
- [21] A. J. Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Math. Comp.*, 22:745–762, 1968.
- [22] A. J. Chorin. On the convergence of discrete approximations of the navier-stokes equations. *Math. Comp.*, 23:341–353, 1969.
- [23] y Deigaard R. Christensen, E. D. Large eddy simulation of breaking waves. *Coastal Engineering*, 42:53–86, 2001.
- [24] J. I. Collins. Probabilities of breaking wave characteristics. *Proceedings of the 12th Coastal Engineering Conference. American Society of Civil Engineers*, 108:73–83, 1993.
- [25] Coastal Engineering Conference, editor. *Variation of longshore current across the surf zone*. American Society of Civil Engineers, 1970.
- [26] Sulem C. Craig, W. Numerical simulation for gravity waves. *J. Comp. Phys.*, 108:73–83, 1993.
- [27] Dean R. G. y Dalrymple R. A. Dally, W. R. Wave height variation across beaches of arbitrary profile. *Journal of Geophysical Research.*, 90:11917–11927, 1985.



- 
- [28] Dean R. G. y Dalrymple R. A. Dally, W. R. Wave height variation across beaches of arbitrary profile. *Journal of Geophysical Research*, 90(C6):11917–11927, 1985.
- [29] Méhauté Le B. Lin A. Divoky, D. Breaking wave son gente slopes. *J. Geophys. Res.*, 75:1681–1692, 1970.
- [30] S.L. Douglass. Influence of wind on breaking waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 116(6):651–663, 1990.
- [31] C. Eckart. The propagation of gravity waves from deep to shallow water, circular 20. *National Bureau of Standards*, -:165–173, 1952.
- [32] C. J. Galvin. Breaker type classification on three laboratory beaches. *J. Geophys. Res.*, 102(C7):797–805, 1968.
- [33] Bogey C. Bailly C. Juvé D. Gloerfelt, X. Aerodynamic noise induced by laminar and turbulent boundary layers over rectangular cavities. *AIAA paper*, -:2002–2349, 2002.
- [34] Y. Goda. A synthesis of breaker indices. *Proc. JSCE*, 80:39–49, 1970.
- [35] Y. (1975) Goda. Irregular wave deformation in the surf zone. *Coastal Engineering in Japan*, 18:13–26, 1975.
- [36] V. Greenspan, D. y Casulli. *Numerical analysis for applied mathematics, science, and engineering*. Addison-Wesley publishing company, 1988.
- [37] Watts P. Grilli, S.T. Modeling of waves generated by a moving submerged body. applications to underwater landslides. *Engineering Analysis Boundary Elements*, 23:645–656, 1999.
- [38] M. Dohmen-Janssen Guizien, K. and G. Vittori. 1dv bottom boundary layer modeling under combined wave and current: Turbulent separation and phase lag effects. *J. Geophys. Res.*, 108(C1):3016, 2003.
- [39] y Welch J. E. Harlow, F. H. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow. *Phys. Of Fluids*, 8:2182–2189, 1965.
- [40] Hasselmann K. Bauer E. Janssen P.A.E.M. y Komen G. J. Hasselmann, S. The wam model Ū a third generation ocean wave prediction model. *J. Phys. Oceanogr.*, 18:1775–1810, 1988.
- [41] P. Heinrich. Nonlinear water waves generated by submarine and aerial alndslides. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering ASCE*, 118(3):249–266, 1992.
- [42] B. Hirt, C. y Nichols. Volume of fluid method for the dynamics free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39:201–225, 1981.

- 
- [43] X. Hong and H. Wenrui. Numerical modeling of wave runup and forces on an idealized beachfront house. *Ocean Engineering*, 35(35):106–116, 2008.
- [44] Zou Q. Chen S. Doolen G. Cogley A. Hou, S. Simulation of cavity flow by the lattice boltzmann method. *J. COmput. Phys.*, 118:329–347, 1994.
- [45] S. A. Hughes. *Physical models and laboratory techniques in coastal engineering.* -, 1993.
- [46] R. I. Issa. Solution of implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting. *J. Comput. Phys.*, 62:40–65, 1986.
- [47] W. Iversen, H. Waves and breakers in shoaling water. *Proceedings of the 3rd Coastal Engineering Conference. American Society of Civil Engineers*, -:1–12, 1952.
- [48] Raad P. E. y Chen S. Johnson, B.D. Simulations of impacts of fluid free surfaces with solid boundaries. *Int. J. for Num. Met. In Fluids*, 19(2):153–176, 1994.
- [49] y Koutitas C. A. Karambas, T. V. A breaking wave propagation model base on the boussinesq equations. *Coast. Eng.*, 18(1-2):1–19, 1992.
- [50] T. Kawamura. *Numerical simulation of 3D turbulent free-surface flows.* -, 1998.
- [51] Chen Q. Kirby J. T. y Dalrymple R. A. (2000) Kennedy, A. B. Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and runup, i: 1d. *Waterw. Port. Coast. Ocean. Eng. ASCE.*, 126:39–47, 2000.
- [52] A. N. Kolmogorov. Equations for turbulence motion of an incompressible fluid. *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Fiz.*, 6:56–58, 1942.
- [53] y Inman D. L. Komar, P. D. Airy wave theory and breaker height prediction. *Proceedings of the 13th Coastal Engineering Conference. American Society of Civil Engineers*, -:405–418, 1973.
- [54] S. T. Kuo, C. T. y Kuo. Effect of wave breaking on statistical distribution of wave heights. *Proceedings of Civil Engineering Oceans*, -:1211–1231, 1974.
- [55] E. V. Laitone. Water waves. iv, shallow water waves. *Univ. Calif. Inst. Res., Tech. Rept.*, -:82–111, 1959.
- [56] E. V. Laitone. The second approximation to cnoidal and solitary waves. *J. Fluid Mech.*, 3:430–444, 1960.
- [57] N. C. Larson, M. y Kraus. Numerical model of longshore current for bar and through beaches. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 117(4):326–347, 1991.
- [58] y Spalding D. B. Launder, B. E. *Mathematical models of turbulence.* -, 1972.

- 
- [59] C. M. Lemos. A simple numerical technique for turbulent flows with free surfaces. *Int. Journal of Numerical Methods in Fluids*, 15:127–146, 1992.
- [60] P. Lin and P. L.-F. Liu. A numerical study of breaking waves in the surf zone. *Journal of Fluids Mech.*, 359:239–264, 1998a.
- [61] P. Lin and P. L.-F. Liu. Turbulence transport, vorticity dynamics, and solute mixing under plunging brecker waves in the surf zone. *J. Geophys. Res.*, 103:15667–15694, 1998b.
- [62] Lin P.Z. Chang K.A. Sakakiyama T. Liu, P.L.F. Numerical modeling of wave interaction with porous structures. *Journal of Waterways, Port, Coastal, and Ocean Engineering, ASCE*, 125(6):322–330, 1999.
- [63] M. S. Longuet-Higgins. Longshore currents generated by obliquely incident sea waves, 1. *Journal of Geophysical Research*, 75(33):6778–6789, 1970a.
- [64] M. S. Longuet-Higgins. Longshore currents generated by obliquely incident sea waves, 2. *Journal of Geophysical Research*, 75(33):6790–6801, 1970b.
- [65] R. Stewart Longuet-Higgins, M. S. A note on wave set-up. *Journal of Marine Research*, 75:4–10, 1963.
- [66] I. Losada, J. Lara, R. Guanche, and J. González. Toward an Engineering Application of COBRAS (Cornell Breaking Wave and Structures). In Patrick Lynett, editor, *Nonlinear Wave Dynamics*, pages 89–108. World Scientific, Singapore, 2009.
- [67] Liu P.L.-F. Lynett, P.J. A numerical study of submerged landslide generated waves and runup. *Proceedings of the Royal Society A*, 458:2885–2910, 2002.
- [68] Murray-R. y Sorensen O. R. Madsen, P. A. A new form of the boussinesq equations with improved linear dispersión characteristics. *Coast. Eng.*, 15:371–388, 1991.
- [69] W. J. Martin, J. C. y Moyce. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. *Phil. Trans. R. Soc. London A*, 244:312–324, 1952.
- [70] Madsen P.A. Mayer, S. Simulation of breaking waves in surf zone using a navier-Ū stokes solver. *Proc. 27th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE*, -:928–941, 2000.
- [71] J. McCowan. On the solitary wave. philosophical magazine. Technical report, Philosophical Magazine. 5th series, 1891.
- [72] M. Miche. Le pouvoir réfléchissant des ouvarages maritimes exposés á lřaction de la houle. annals des ponts et chaussess. *Annals des Ponts et Chaussess*, 121:285–319, 1951. Traslated by Lincoln and Chevron, University of California, Berkeley, Wave Research Laboratory.

- 
- [73] H. Mitaya. Finite-difference simulation of breaking waves. *Journal of Computational Phys.*, 65(1):179–241, 1986.
- [74] Kanai A. Kawamura T. Park J.-C. Miyata, H. Numerical simulation of three-dimensional breaking waves. *J. of Marine Sci. and Tech.*, 1:183–197, 1996.
- [75] J. Morales. *Teoría y experimentación de ondas solitarias en agua*. PhD thesis, UNAM, 2008.
- [76] W. H. Munk. Surf beats. *Eos Trans.*, 30:849–854, 1949.
- [77] Hino M. Koyano Y Nadaoka, K. Structure of the turbulent flow field under breaking waves in the surf zone. *Journal of Fluid Mechanics*, 204:359–387, 1989.
- [78] S. C. Ng, C. O. y Kot. Computation of water impact on a two-dimensional flat-bottomed body with a volume of fluid method. *Ocean Engineering*, 19(4):377–393, 1992.
- [79] O. Nwogu. Alternative form of boussinesq equations for nearshore wave propagation. *J. Waterw. Port. Coast. Ocean. Eng., ASCE*, 119:618–638, 1993.
- [80] American Society of Civil Engineers, editor. *Current-induced breaking at an idealized inlet*, 1997.
- [81] Proceedings of the 17th Coastal Engineering Conference, editor. *A laboratory study of offshore transport of sediment and a model for eroding beaches*. American Society of Civil Engineers, 1980.
- [82] Stansby P., A. Chegini, and T. Barnes. The initial stages of Dam break flow. *Journal of Fluid Mechanic*, 374:407–424, 1998.
- [83] S. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences. Taylor&Francis, United States of America, 1980.
- [84] D. H. Peregrine. Long waves on beach. *J. Fluid Mech.*, 27:815–827, 1967.
- [85] L. Prandtl. Bericht über untersuchungen zur ausgebildeten turbulenz. *Z. Angew. Math. Meth.*, 5:136–139, 1925.
- [86] L. Prandtl. *Führer durch die Strömungslehre*. -, 1942.
- [87] L. Prandtl. Ube ein neues formel-system für die ausgebildete turbulenz. *Nachr. Ges. Wiss Göttingen Math.-Phys. Kl.*, -:6–19, 1945.
- [88] P. Qi and Y. Hou. A vof-based numerical model for breaking waves in surf zone. *Chinese Journal of Oceanology and Limnology*, 24(1):57–64, 2006.
- [89] L. Rayleigh. On waves. *London, Edinburgh, Dublin Phil. Mag. J. Sci.*, 1(4):257–279, 1876.

- 
- [90] O. Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 186:123–164, 1895.
- [91] Booij N. y Holthuijsen L. H. Ris, R. C. A third-generation wave model for coastal regions, part ii, verification. *J. Geophys. Res.*, 104(C4):7667–7681, 1999.
- [92] W. Rodi. *Turbulence models and their application in hydraulics - A state of the art review.* -, 1984.
- [93] J. Russell. Report on waves. Technical report, Fourteenth Meeting Brit. Assoc. Advance. Sci., 1844.
- [94] Madsen P. A. y Deigaard R. Schäffer, H. A. A boussinesq model for waves breaking in shallow water. *Coastal Engineering*, 20:185–202, 1993.
- [95] Piomelli U. Scotti, A. Turbulence models in pulsating flows. *AIAA J.*, 40(3):537–544, 2002.
- [96] Liu P.L.F. Oda K. Shigematsu, T. Numerical modeling of the initial stages of dam-break waves. *Journal of Hydraulic Research*, 42(2):183–195, 2004.
- [97] T. Shigematsu. Modelación numérica de estados iniciales de rotura de presas. *Ingeniería del Agua*, 11:425–434, 2004.
- [98] A. D. Short. *Hanbook of Beach and Shoreface Morphodynamics.* -, 1999.
- [99] H. G. Singamsetti, S. R. y Wind. Characteristics of breaking and shoaling periodic waves normally incident on to plane beaches of constant slope. report m1371. Technical report, Delft Hydraulic Laboratory, Delft, The Netherlands, 1980.
- [100] N. C. Smith, E. R. y Kraus. Laboratory study of wave breaking over bars and artificial reefs. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 117(4):307–325, 1991.
- [101] Chegini A. y Barnes T. C. D. Stansby, P. K. The initial stage of dam break flow. *J. Fluid Mech.*, 374:407–424, 1998.
- [102] R. T. Thornton, E. B. y Guza. Transformation of wave height distribution. *Journal of Geophysical Research*, 88(C10):5925–5938, 1983.
- [103] J. T. Kirby Ting, F. C. K. Dynamics of surf-zone turbulence in a strong plunging breaker. *Coastal Eng.*, 24:177–204, 1995.
- [104] Kirby J.T. Ting, F.C.K. Dynamics of surf-zone turbulence in a spilling breaker. *Coastal Eng.*, 27:131–160, 1996.
- [105] H. L. Tolman. User manual and system documentation of wavewatch-iii version 1.18. Technical note 166, NOAA/NWS/NCEP/OBM, 1999.

- 
- [106] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer Verlag, 1997.
- [107] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. 2nd Edition.* -, 1997.
- [108] Raithby G. D. Van Doormal, J. P. Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows. *Numer. Heat Transfer*, 7:147–163, 1984.
- [109] Smith E. R. y Ebersole B. A. Wang, P. Large-scale laboratory measurements of longshore sediment transport under spilling and plunging breakers. *Journal of Coastal Research*, 18(1):118–135, 2002.
- [110] H. Watanabe, Y. y Saeki. Three-dimensional large eddy simulation of breaking waves. *Coastal Engineering in Japan*, 41:281–301, 1999.
- [111] J. R. Weggel. Maximum breaker height. *Journal of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division*, 98(WW4):529–548, 1972.
- [112] Stern F. Weymouth G., Wilson R. Rans computational fluid dynamics prediction on pitch and heave ship motions in head seas. *Journal of Ship Research*, 49(2):80–97, 2005.
- [113] Chang Y. and Scotti A. Modeling unsteady turbulent flows over ripples: Reynolds-averaged navier-stokes equations (rans) vs. large-eddy simulations (les). *Journal of Geophysical Research*, 109:1–16, 2004.
- [114] Yim S.C. Liu P.L.F. Yuk, D. Numerical modeling of submarine mass  $\tilde{U}$  movement generated waves using rans models. *Computers & Geosciences*, 32:927–935, 2005.
- [115] J. A. Zelt. The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves. *Coast. Eng.*, 15(3):205–246, 1991.
- [116] Q. Zhang, P. Lin, and F. Liu. A numerical study of swash flows generated by bores. *Coastal Engineering*, 55:11136–1134, 2008.
- [117] Q. Zhao, S. Armfield, and K. Tanimoto. Numerical simulation of breaking waves by a multi-scale turbulence model. *Coastal Engineering*, 51(51):53–80, 2004.
- [118] P. Zima. Two dimensional vertical analysis of dam break Flow. *Task Quarterly*, 11:315–328, 2007.