



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES

CAMPUS ARAGÓN

**“ANÁLISIS DINÁMICO DE UNA
PLATAFORMA DE STEWART 6 UPS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO MECÁNICO ELÉCTRICISTA

P R E S E N T A

FRANCISCO DE MATIAS AGUILAR

ASESOR: M EN I. JOSÉ ANTONIO SOUZA JIMÉNEZ



MÉXICO

2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

Quiero dedicar este trabajo a mis padres, María de Lourdes Aguilar Santelises y José Narciso Hipólito De Matías Pérez porque ha sido gracias a ellos que este sueño ha sido posible.

Una lección que sin duda guió mi camino en lo académico y también en muchos aspectos más, fue de parte de ustedes, me dijeron que para llegar lejos debía siempre esforzarme al máximo, no rendirme y aprender de mis errores. El camino que hemos recorrido ha estado sin duda, lleno de tropiezos, pero afortunadamente también de triunfos que he podido realizar gracias a su apoyo.

He aprendido con ustedes y de ustedes. A lo largo no solo de estos cinco años de carrera sino de toda mi vida, he contado con su apoyo, a pesar de las dificultades que se presentaron, ustedes siempre lucharon y vieron por nosotros sus hijos, por nuestros sueños, anteponiendo sus necesidades y placeres para cumplir los nuestros y darnos una vida que hoy se valorar como nunca antes.

Reconozco que ha sido difícil entenderme, y por eso no encuentro palabras para agradecerles el hecho de que a pesar de todo eso, nunca me pidieron cambiar, sino todo lo contrario.

Por todo esto y más, muchas gracias, los amo.

Agradecimientos

A mis padres por su apoyo incondicional a lo largo de toda mi vida.

A mi tutor José Antonio Souza Jiménez por toda la atención y apoyo en cada momento de la realización de este trabajo. La rapidez, calidad y dedicación con que me apoyo en la revisión y del trabajo.

A todos mis sinodales en general por sus valiosas aportaciones al revisar mi trabajo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y en particular a la Facultad de Estudios Superiores Aragón por haber sido mi casa y por brindarme la oportunidad de cambiar mi vida.

Al Dr. en I. Víctor Javier Gonzales Villela por su apoyo brindado al proporcionar un espacio de trabajo así como por permitirnos tomar medidas al prototipo que se ha estudiado en este trabajo.

Al apoyo proporcionado por la DGAPA, UNAM, a través del proyecto PAPIIT IN115811-3 con nombre: "Research and development in mechatronic systems: mobile robotics, parallel robotics, hybrid robotics and teleoperation".

A los profesores Y. Minami Koyama y H. G. Serrano Miranda por su asesoría en el método experimental de la determinación de momentos de inercia así como su apoyo y comprensión al realizar las pruebas en su equipo.

Al equipo del laboratorio de Mecánica Aplicada del Centro Tecnológico Aragón de la FES Aragón.

Al Dr. en I. Jacinto Cortés Pérez por siempre recibirme bien en su laboratorio y equipo.

Al Ing. Mariano Santana Colín que gracias a su excelente clase de termodinámica decidí seguir adelante y no abandonar esta carrera en algún momento

Al M. en I. Alberto Reyes Solís por brindarme su confianza y ser tan excelente profesor. Convertirme en su ayudante de profesor después de haber pasado por mucho tiempo admirando sus conocimientos y honestidad es un honor.

A mi tía Leonor Aguilar Santelises por ser la primera en revisar mi trabajo y por ser mi tía claro.

A CONAMAT Texcoco por haber sido otro de mis hogares.

A Gabriela Arcos por ser una de las primeras personas que reconoció en mí aptitudes que ni yo mismo creí que tenía. Fue mi profesora, compañera de trabajo pero sobre todo es una gran amiga.

A Víctor López por ser mi profesor y enseñarme otro lado de las matemáticas. Ha sido mi profesor, mi compañero de trabajo, mi guía y también un gran amigo.

A Rogerio Alberto Silva Reyes, por ser mi compañero y amigo en la carrera.

A mi novia y amiga Verónica Cytláli Molina Rojano por ser la razón por la cual aprendí lo que es encontrar el balance entre mi sueño académico sin olvidar los sueños que llegué a tener de niño.

Índice General

1. Generalidades	1
1.1 Introducción.....	1
1.2 Objetivo General.....	3
1.3 Justificación.....	3
1.4 Metodología.....	4
1.5 Marco Teórico y Estado del Arte.....	5
1.6 Configuración del robot paralelo.....	6
1.7 Grados de libertad.....	8
2. Análisis Cinemático	9
2.1. Introducción.....	9
2.2. Matrices Homogéneas.....	9
2.3. Matriz Phi.....	10
2.4. Generación de sistemas locales.....	12
2.5. Generación de trayectoria.....	18
2.6. Ecuaciones de posición.....	25
2.7. Ecuaciones de velocidad.....	26
2.8. Ecuaciones de aceleración.....	27
2.9. Solución numérica.....	28
2.10. Resultados.....	30
3. Determinación de Momentos de Inercia	35
3.1. Introducción.....	35
3.2. Método experimental y justificación del mismo.....	36
3.3. Calibración del dispositivo experimental.....	39
3.4. Cálculo del momento de inercia del cuerpo C_{2i}	43
3.5. Cálculo del momento de inercia del cuerpo C_{3i}	46
3.6. Cálculo del momento de inercia del cuerpo C_0 y C_5	47
3.7. Aplicación del método experimental en piezas de masas pequeñas.....	49

4. Análisis Dinámico	51
4.1. Introducción.....	51
4.2. Análisis del cuerpo $1i$	53
4.2.1. Ecuaciones Dinámicas.....	53
4.3. Análisis del cuerpo $2i$	55
4.3.1. Ecuaciones dinámicas.....	55
4.3.2. Ecuaciones cinemáticas.....	57
4.4. Análisis del cuerpo $3i$	60
4.4.1. Ecuaciones dinámicas.....	60
4.4.2. Ecuaciones cinemáticas.....	62
4.5. Análisis del cuerpo $4i$	65
4.5.1. Ecuaciones dinámicas.....	66
4.5.2. Ecuaciones cinemáticas.....	67
4.6. Análisis del cuerpo 5	71
4.6.1. Ecuaciones dinámicas.....	72
4.6.2. Ecuaciones cinemáticas.....	74
4.7. Solución del método Newton-Euler.....	77
Conclusiones	81
Apéndice A	83
Apéndice B	91
Bibliografía	97

Capítulo 1

Generalidades.

1.1 Introducción

Siempre se ha buscado mejorar la producción en la industria de manera que pueda hacerse más y a menor precio. Una de las formas de lograrlo es optimizando la efectividad de los trabajadores previéndolos de herramientas o ayuda que les permita hacer su labor más productiva.

Los robots surgen como una herramienta de ayuda a los trabajadores para brindarles un soporte en tareas donde se necesite manipular pesos grandes o materiales en condiciones que un humano no podría, como materiales fundidos o extremadamente fríos.

Aunque idealmente si un robot toma el trabajo de un humano no debería dejar a éste sin empleo, cada vez son más las aplicaciones y actividades realizadas exclusivamente por robots.

Existen diversas formas de clasificar a los robots, entre ellas, por su aplicación, que a grandes rasgos puede dividirse en industriales y de usos especiales.

Los robots de uso industrial tienen como objetivo servir a un propósito universal y de mano de obra no calificada o semicalificada, por ejemplo, para soldar, pintar, realizar mecanizados, etc. Por otro lado, un robot de uso especial es el que se utiliza en ambientes distintos del entorno normal de una fábrica, [1] como plataformas manipuladores que sirven como simuladores de montañas rusas, automóviles o cabinas de avión, así como robots de tipo militar con fines particulares como transporte de carga en terrenos accidentados o desmantelar bombas.

Los robots también se pueden clasificar por su arquitectura, de manera amplia en robots seriales, móviles y paralelos.

Los robots seriales son los más utilizados en la industria para realizar tareas de manipulación. Su principal característica es que están formados por eslabones conectados en serie obteniendo una cadena cinemática abierta.

Debido a la arquitectura que tienen son usualmente conocidos también como brazos mecánicos. Estos robots brindan un gran espacio de trabajo y una gran movilidad aunque sacrificando rigidez, capacidad de carga y precisión a causa de sus eslabones conectados en una cadena abierta.

Los robots móviles también conocidos como vehículos guiados automáticamente o AGV's por sus siglas en inglés, se usan comúnmente para el manejo de materiales en fábricas al seguir automáticamente trayectorias señaladas en el piso. También se han aplicado en usos especiales de exploración como algunos robots exploradores de la NASA o también de uso militar o de protección como los robots desmanteladores de bombas.

Se distinguen principalmente por tener apariencia de vehículos debido a la implementación de ruedas en su estructura.

Hoy en día, a pesar de la existencia de la automatización en muchos procesos industriales y la implementación de robots para realizar diversas tareas que antes realizaba un operador, sigue habiendo la necesidad de poder hacer más rápida, más precisa o incluso más segura la operación. En respuesta de esta necesidad surgen los robots paralelos que ofrecen precisamente estas características cuando tienen involucrados en su construcción un sistema de control completo.

Son llamados robots paralelos ya que se caracterizan por tener una configuración paralela como su nombre lo indica.

Esta configuración se construye generalmente mediante dos plataformas unidas por cadenas cinemáticas seriales cerrando el lazo entre las dos plataformas. El hecho de unir a las dos plataformas utilizando cadenas seriales les proporciona a este tipo de robots una estabilidad sobresaliente en comparación con los robots seriales, se sacrifica accesibilidad y espacio de trabajo pero a cambio se cuenta con una gran rigidez, precisión, rapidez y gran capacidad de carga.

Ya se ha mencionado que los robots son máquinas autómatas que tienen el objetivo de apoyar al humano en realizar una tarea aburrida, repetitiva o peligrosa, lo anterior hace caer en una confusión al separar a las máquinas-herramienta de los robots ya que las máquinas herramientas también apoyan al humano a realizar su trabajo y también son capaces de manipular objetos y aumentar la producción. Un robot se diferencia de una máquina-herramienta por su grado de reprogramabilidad.

Por otro lado, es común escuchar el término de robot manipulador, ya que tanto los robots seriales como paralelos pueden cumplir la tarea de manipular objetos pero debe hacerse una distinción entre un robot y un manipulador.

Ya se han mencionado características de un robot y se ha entendido que pueden utilizarse para la manipulación de objetos, pero de ahora en adelante, en este trabajo se entenderá que al hablar de un manipulador se habla de una máquina con cierto grado de reprogramabilidad pero careciendo de autonomía a diferencia de un robot que es completamente autónomo.

El tema que nos atañe en esta tesis es el análisis dinámico de la Plataforma de Stewart 6 UPS (universal, prismatic and Spherical). Este es un manipulador paralelo espacial que se está utilizando como un módulo estabilizador para un manipulador móvil [Souza]. Dicho proyecto se encuentra en proceso de desarrollo, y el presente trabajo es una parte fundamental tanto del modelado mecánico como del diseño de control del mismo. Esto permitirá establecer que tanto mejora el mecanismo el equilibrio del manipulador móvil.

En éste capítulo se presentan los objetivos de este trabajo de tesis, la justificación del mismo, el marco teórico, el estado del arte y la mención de la metodología utilizada.

1.2 Objetivo General

Resolver las ecuaciones dinámicas de la Plataforma Stewart de tal forma que en un trabajo de investigación futuro se pueda utilizar un algoritmo de control que sea capaz de considerar el comportamiento dinámico de los eslabones de la Plataforma.

1.3 Justificación

En 2009 Moosavian [2] utilizó un manipulador paralelo plano tipo estrella (similar al tipo delta) para mejorar la estabilidad en un manipulador móvil, colocándolo como interface entre un brazo serial y la base móvil. Esto permite que la base del brazo serial sea desplazada para generar un mejor apoyo de acuerdo a su posición.

En 2008 Souza[3] utilizó una plataforma de Stewart como interface, entre el brazo y el móvil, para un manipulador móvil, buscando aprovechar sus características físicas (rigidez, capacidad de carga, velocidad) para mejorar la estabilidad del sistema, permitiéndole soportar mayor carga y tener una mayor capacidad de operación sobre superficies inclinadas.

Hasta el momento se han realizado pruebas estáticas para determinar cómo mejorar la permanencia en equilibrio en un manipulador móvil, incorporando la Plataforma de Stewart, se ha podido demostrar la hipótesis planteada en el trabajo

de Souza respecto al aumento de la capacidad de carga con este dispositivo, sin embargo, para poder abarcar aplicaciones que involucren movimientos considerables que generen fuerzas de inercia importantes es necesario realizar estudios dinámicos para poder observar el comportamiento del manipulador bajo estas condiciones; esto justifica la obtención del modelo dinámico de la Plataforma. Además, por supuesto, de servir para diseñar el control de la misma.

Para poder cuantificar el grado de estabilidad en un manipulador, existen diferentes criterios o medidas que consideran las cargas que actúan sobre éste, las cargas dinámicas tienen un peso importante en el equilibrio de un manipulador.

Aunque idealmente es la formulación Euler-Lagrange la que permite crear un modelo dinámico más completo y sencillo, es preferible comenzar el estudio con la formulación Newton-Euler ya que con base en sus resultados permite hacer la selección de materiales y actuadores ideales para los requerimientos del manipulador, ya que permite determinar todas las reacciones que se generan en el manipulador.

Por tales razones el desarrollo contenido en este trabajo proporciona todo lo necesario para el diseño de un manipulador, de acuerdo a las especificaciones particulares de carga y dimensiones que se requieran, así como la base para obtener en un futuro un algoritmo de control más simple al resolver la formulación Euler-Lagrange.

1.4 Metodología

El presente trabajo comprende el análisis cinemático, estudiado en el segundo capítulo, que incluye los cálculos de la posición, velocidad y aceleración, utilizando como herramienta las transformaciones homogéneas para crear las ecuaciones cinemáticas y resolverlas por un método numérico con ayuda del software Mathematica 8. El tercer capítulo se dedica a la determinación de los momentos de inercia de cada uno de los cuerpos que conforman al manipulador, combinando cálculos analíticos, experimentales y mediante el uso del CAD Solid Works desarrollado por Dassault Systemes SolidWorks Corp; en la última parte del análisis se resuelve la dinámica del robot paralelo por medio de la formulación de Newton-Euler.

1.5 Marco Teórico y Estado del Arte

Desde la invención de los robots manipuladores seriales, estos han sido utilizados para realizar trabajos repetitivos y de cierta precisión, que al tratarse de configuraciones a base de una sola cadena cinemática abierta carecen de rigidez en su estructura, esto se manifiesta en una falta de precisión al realizar trabajos que impliquen mover rápidamente cargas relativamente grandes en su extensión final limitando su productividad en tareas que requieran específicamente de estas características.

Este problema es resuelto con la aparición de los robots paralelos que se caracterizan por contar con una plataforma fija y otra móvil unidas por cadenas cinemáticas consideradas de tipo serial, que a diferencia de la cadena cinemática que conforma a un robot manipulador serial con todas sus juntas actuadas, la cadena serial de un robot paralelo cuenta con juntas no actuadas incrementando su complejidad en cuanto al análisis cinemático, pero también aumentando la estabilidad del robot así como su capacidad de carga, permitiendo entonces realizar operaciones de posicionamiento de cargas a altas velocidades y con gran precisión. [4]

La Plataforma Stewart se distingue entre los robots paralelos por contar con un único actuador lineal en cada una de sus cadenas cinemáticas, generalmente hidráulico, lo que le permite cambiar la longitud de cada una de sus “patas” y le brinda una estabilidad sobresaliente entre todas las plataformas paralelas, así como una gran capacidad de carga. Tales virtudes han hecho a la Plataforma Stewart, ideal en tareas donde se necesite generar movimiento general en el espacio como los simuladores de vuelo [5], cabe mencionar que para esta aplicación se necesitan mover réplicas de cabinas de vuelo que llegan a tener masas de hasta 15000 Kg.

Hoy en día, los métodos más usados para realizar el análisis cinemático son los parámetros de Denavit y Hartenberg que en pocas palabras describen de manera sucesiva los parámetros que permiten moverse entre eslabones sucesivos a través de uno intermedio mediante la posición relativa de los eslabones, así como su tamaño y forma. Dependiendo del tipo de articulación, los parámetros de posición relativa pueden ser variables o constantes, definiendo así las variables de articulación y los parámetros de eslabones. [1]

Otro método utilizado es el geométrico que implementa las leyes y ecuaciones de la geometría y trigonometría permitiendo también un mejor entendimiento gráfico.

Por último, la metodología de las transformaciones homogéneas brinda una gran sencillez en cuanto a su utilización, ya que un movimiento general puede representarse por la multiplicación de un vector por una o varias matrices para describir su traslación y rotación, más no así en su eficacia computacional ya que la matriz de transformación de 4×4 implica realizar operaciones innecesarias con unos y ceros extras en cada matriz. [1]

Es claro que las aplicaciones de los robots paralelos siguen en descubrimiento y evolución al adaptarse a diversos problemas a donde la robótica y sus ventajas no habían llegado, como son los manipuladores móviles que cada vez más han evolucionado en aplicaciones donde el ambiente o el terreno son de difícil acceso o crean peligro para la integridad del ser humano, como lo es la transportación de desechos tóxicos o el desmantelamiento de bombas. Se están desarrollando manipuladores que sean capaces de desplazarse sobre superficies difíciles para que cumplan con su misión y eviten sufrir daños tanto para el mecanismo como para el operario en el caso de los que son tripulados.

Como puede observarse, el uso de manipuladores paralelos es reciente y traza una línea de investigación enfocada en encontrar y/o desarrollar plataformas paralelas que mejoren la capacidad de carga y el desplazamiento sobre superficies irregulares.

1.6 Configuración del manipulador paralelo

La configuración del manipulador en estudio se presenta en la Figura 1.1 donde se indican los componentes de éste, y en la Figura 1.2 se muestra una sola cadena cinemática del robot donde se encuentran los nombres simplificados asignados a cada parte o conjunto del robot que se usará para referirse a ellos en el resto del trabajo.

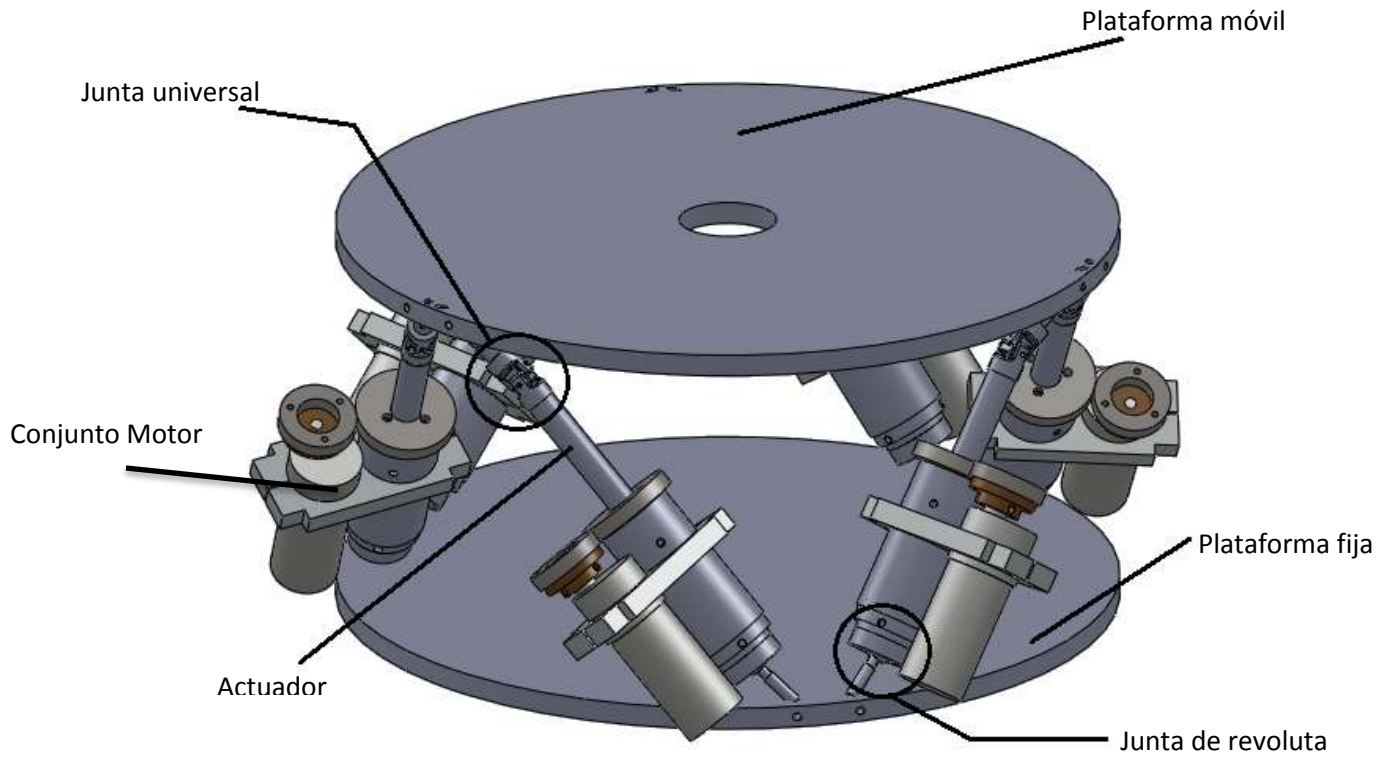


Figura 1.1 Configuración del robot paralelo

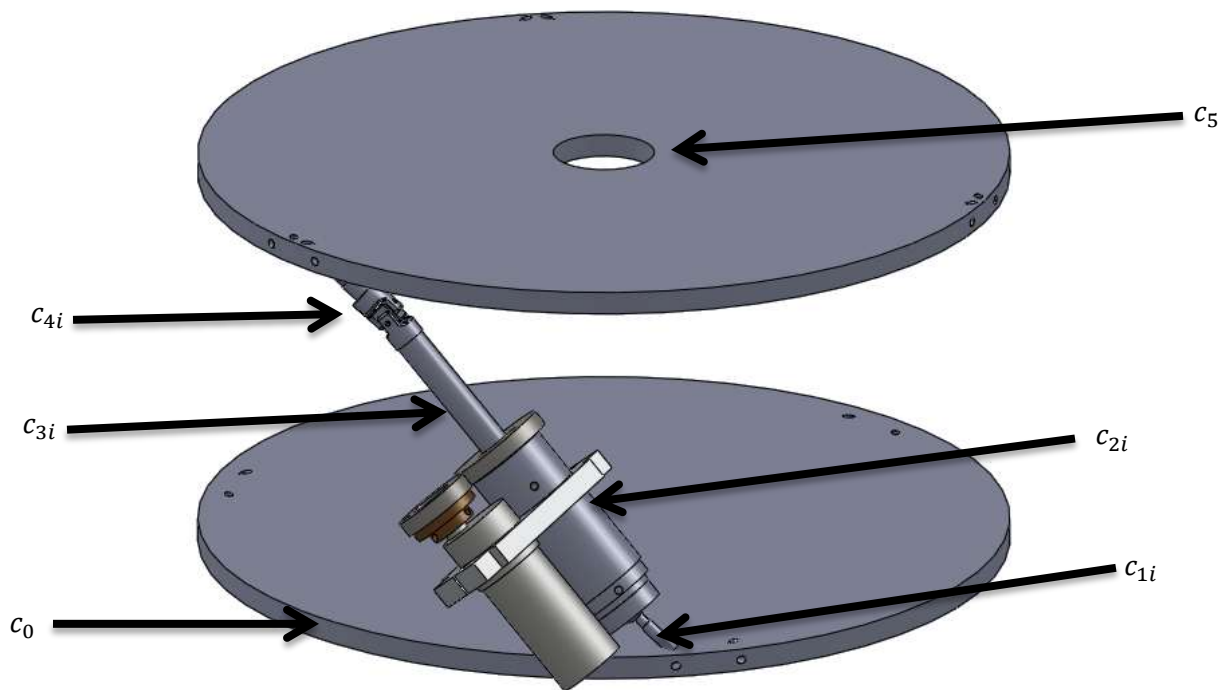


Figura 1.2 Cuerpos de una cadena cinemática

1.7 Grados de Libertad

Los grados de libertad en un mecanismo se definen como el número de datos o de entradas necesarias para determinar su configuración. La fórmula de Chebyshev-Grübler-Kutzbach permite calcularlos:

$$L = 6(b - g - 1) + \sum f_k$$

Donde b es el número de eslabones o cuerpos del manipulador, g es el número de juntas cinemáticas y f_k es el número de grados de libertad de la junta k , para la Plataforma de Stewart los números son:

$$b = 20$$

$$g = 24$$

$$\sum f_k = 36$$

de tal forma que el número de grados de libertad es:

$$L = 6(20 - 24 - 1) + 36 = 6$$

Capítulo 2

Análisis Cinemático

2.1 Introducción

La cinemática es la parte de la Dinámica que describe el movimiento de los cuerpos sin referencia a las fuerzas que lo causan ni a las que se generan a consecuencia del mismo. Es frecuente referirse a ella como la “geometría del movimiento”. El conocimiento práctico profundo de la cinemática es un requisito previo imprescindible para estudiar Cinética, en la que se estudian las relaciones entre el movimiento y las correspondientes fuerzas que lo causan o lo acompañan [6].

2.2 Matrices Homogéneas

Se han tomado como herramientas las matrices de transformación homogéneas para el análisis de posición, ya que mediante ellas puede explicarse los movimientos de traslación y rotación de un cuerpo en el espacio [7].

Puede explicarse el movimiento general de un cuerpo en el espacio mediante una sola transformación homogénea, representada por una matriz de 4×4 , pero ya que necesitan definirse las ecuaciones de lazo correspondientes a cada cadena cinemática, es necesario usar las transformaciones homogéneas de traslaciones puras con respecto a los ejes x , y y z mostradas en las ecuaciones (2.1):

$$T_{z1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{z2}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.1)

$$T_{z3}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices de transformaciones homogéneas de rotaciones puras con respecto a los ejes x , y y z están dadas por las ecuaciones (2.2):

$$T_{z4}(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x & 0 \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{z5}(\theta_y) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & -s\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s\theta_y & 0 & c\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$T_{z6}(\theta_z) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Matriz Phi

La plataforma superior del robot paralelo Stewart será capaz de seguir trayectorias al mismo tiempo que cambia su orientación en el espacio para lograr la configuración que le permita cubrir el desplazamiento diseñado por dicha trayectoria.

Es entonces indispensable utilizar otra matriz de rotación espacial, además de las homogéneas puras ya que éstas sólo pueden explicar giros con respecto a los ejes x , y y z , y la plataforma requerirá de rotaciones con respecto a ejes arbitrarios que no sean necesariamente los ejes coordenados fijos como lo harían los ángulos de Euler.

Esto se resuelve utilizando la matriz de rotación espacial Phi que permite la rotación en términos de un ángulo ϕ y un eje \mathbf{u} [8].

La matriz Phi puede ser explicada mediante las proyecciones del vector unitario a lo largo del eje \mathbf{u} y poder explicar la rotación ϕ relativa a los ejes coordenados fijos, ejecutando los siguientes pasos que se ilustran también en la Figura 2.1:

1. Rotar el cuerpo rígido para traer el eje \mathbf{u} paralelo al eje z .
2. Ejecutar la rotación ϕ alrededor del eje \mathbf{u} ubicado temporalmente en un eje coordenado.
3. Regresar \mathbf{u} a su posición original.

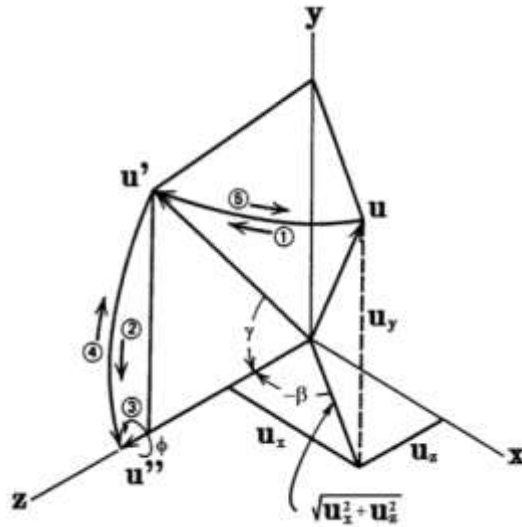


Figura 2.1 Secuencia de pasos para obtener la matriz Phi.

De acuerdo a la secuencia de pasos puede deducirse la matriz de rotación Phi al igual que su forma homogénea, ambas utilizadas en este trabajo, ecuaciones (2.3) y (2.4) respectivamente:

$$[R_{\phi,u}] = \begin{bmatrix} u_x^2 V\phi + c\phi & u_x u_y V\phi - u_z s\phi & u_x u_z V\phi + u_y s\phi \\ u_x u_y V\phi - u_z s\phi & u_y^2 V\phi + c\phi & u_y u_z V\phi + u_x s\phi \\ u_x u_z V\phi + u_y s\phi & u_y u_z V\phi + u_x s\phi & u_z^2 V\phi + c\phi \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$[M_{\phi,u}] = \begin{bmatrix} u_x^2 V\phi f + \text{Cos}[\phi f] & u_x u_y V\phi f - u_z \text{Sin}[\phi f] & u_x u_z V\phi f + u_y \text{Sin}[\phi f] & 0 \\ u_x u_y V\phi f + u_z \text{Sin}[\phi f] & u_y^2 V\phi f + \text{Cos}[\phi f] & u_y u_z V\phi f - u_x \text{Sin}[\phi f] & 0 \\ u_x u_z V\phi f - u_y \text{Sin}[\phi f] & u_y u_z V\phi f + u_x \text{Sin}[\phi f] & u_z^2 V\phi f + \text{Cos}[\phi f] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Dónde:

$$V\phi = 1 - \cos\phi$$

$$s\phi = \sin\phi$$

$$c\phi = \cos\phi$$

Para calcular la velocidad y la aceleración es necesario multiplicar a la matriz phi por otra matriz, de tal modo que pueda expresarse la velocidad y aceleración de la plataforma superior capaz de girar con respecto a un eje arbitrario. Estas

ecuaciones son las ecuaciones (2.5) para el caso de la velocidad y la ecuación (2.6) para el caso de la aceleración.

$$[W_{\phi,u}] = \begin{bmatrix} 0 & -u_z d\phi f & u_y d\phi f & 0 \\ u_z d\phi f & 0 & -u_x d\phi f & 0 \\ -u_y d\phi f & u_x d\phi f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$[A_{\phi,u}] = \begin{bmatrix} -(u_y d\phi f)^2 - (u_z d\phi f)^2 & u_x u_y d\phi f^2 - u_z dd\phi f & u_x u_z d\phi f^2 + u_y dd\phi f & 0 \\ u_x u_y d\phi f^2 + u_z dd\phi f & -(u_x d\phi f)^2 - (u_z d\phi f)^2 & u_y u_z d\phi f^2 - u_x dd\phi f & 0 \\ u_x u_z d\phi f^2 - u_y dd\phi f & u_y u_z d\phi f^2 + u_x dd\phi f & -(u_x d\phi f)^2 - (u_y d\phi f)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

2.4 Generación de sistemas locales.

Se han definido sistemas de referencia locales colocados en distintos puntos del manipulador, los cuales se irán generando uno a partir de otro mediante las transformaciones necesarias y así definir las ecuaciones de lazo necesarias para la soluciones de las posiciones.

De acuerdo a Souza [3] la Plataforma de Stewart estará montada sobre un móvil, el sistema de referencia que lo representa (i_c, j_c, k_c) se genera con una serie de tres transformaciones de traslación con respecto a los ejes x , y y z en ese orden, y tres transformaciones de giro con respecto a los ejes z , x y nuevamente otro giro en z , Figura 2.2:

$$T_{0C} = T_{z1(xc)} T_{z2(yc)} T_{z3(zc)} T_{z6(\psi c)} T_{z4(\theta c)} T_{z6(\phi c)} \quad (2.7)$$

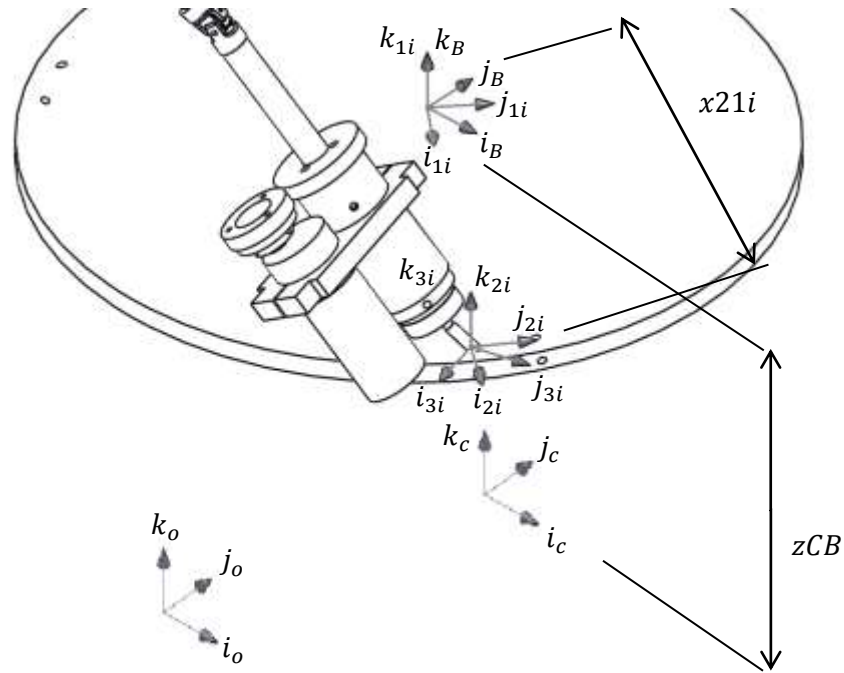


Figura 2.2 Sistemas de referencia del inercial al 3i

A continuación se realiza una transformación de traslación a lo largo del eje z (mostrado en la Figura 2.2) para ubicar un nuevo sistema en la plataforma fija de la Plataforma de Stewart (i_B, j_B, k_B).

$$T_{CB} = T_{z3(z_{CB})} \quad (2.8)$$

Se han dividido las secuencias de transformaciones de tal forma que puedan separarse e identificarse por segmentos la ubicación de distintas partes del robot y facilitar la escritura por partes en el software de Mathematica.

Así entonces puede escribirse en forma simplificada la transformación del sistema inercial al sistema local ubicado en la plataforma del robot como sigue:

$$T_{OB} = T_{OC} T_{CB} \quad (2.9)$$

Es necesario realizar un giro en z y una traslación en x para llegar al sistema ubicado en el acoplamiento de la plataforma fija y la junta esférica (i_{2i}, j_{2i}, k_{2i}), como se muestra en la Figura 2.2:

$$T_{B2i} = T_{z6(\delta_{1Bi})} T_{z1(x_{21i})} \quad (2.10)$$

Para construir el sistema $7i$ a partir del $2i$ es necesario realizar una serie de transformaciones de dos rotaciones, una en torno a z , seguido de otra rotación con

respecto a x , una traslación a lo largo del eje z genera el sistema $5i$, después el sistema $6i$ es generado a partir de una rotación en z . Este sistema es generado debido a que hay una equivalencia entre la junta esférica y la combinación de una junta universal con una de revoluta unida a la plataforma fija como el diseño mostrado en el Trabajo de Souza[3], la configuración es ideal para facilitar la ubicación de un sistema que coincida simétricamente con los ejes de giro de una junta universal, permitiendo observar la orientación inicial desde la cual se simplifica la medición de los ángulos variables de la junta universal al igual que el de la esférica, siendo el giro de revoluta equivalente al giro con respecto al eje z del sistema $6i$.

Las transformaciones para pasar del sistema $2i$ al $7i$ se muestran en las Figuras 2.2, 2.3 y 2.4:

$$T_{27i} = T_{z6(\delta32i)} T_{z4(\delta43i)} T_{z3(z54i)} T_{z6(\delta65i)} T_{z6(\theta76i)} \quad (2.11)$$

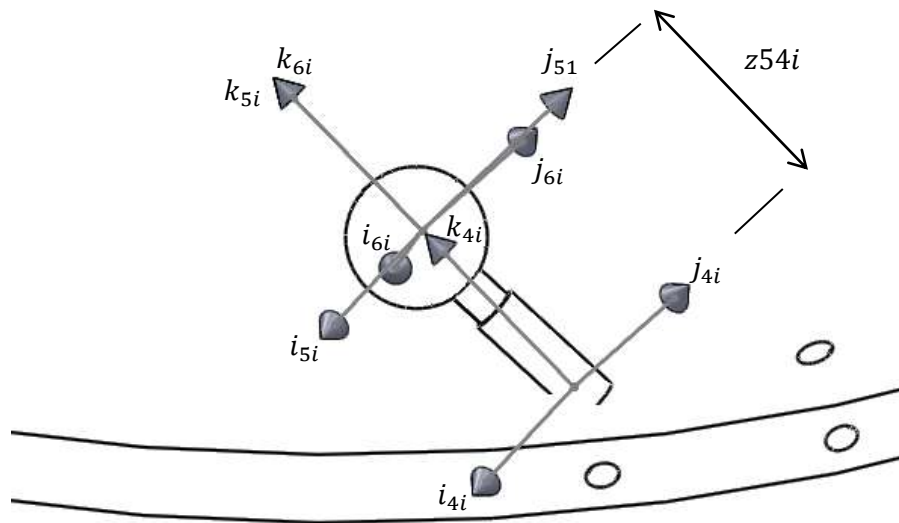


Figura 2.3 Sistemas de referencia del 4i al 6i.

La junta esférica proporciona tres grados de libertad que estrictamente son tres ángulos de orientación variable, dichos ángulos deben ser incluidos en las transformaciones así como los nuevos sistemas locales que éstos generan, el primero de ellos es representado por una rotación en el eje z para generar el sistema $7i$ como se muestra en la Figura 2.4.

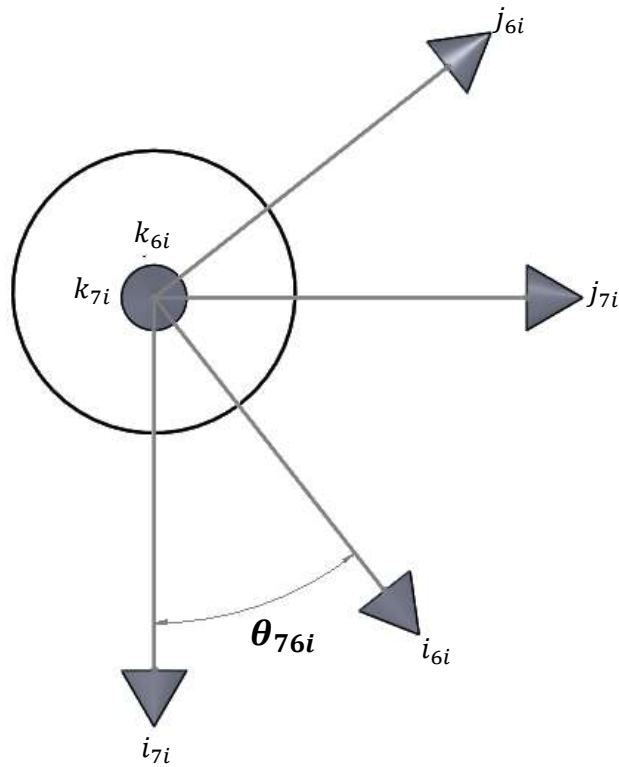


Figura 2.4 Generación del sistema 7i.

Las transformaciones correspondientes para pasar del sistema 7i hasta el 10i, correspondiente al sistema ubicado al final del actuador, son un giro en y seguido del último giro variable proporcionado por los tres grados de libertad de la junta esférica y finalizando con un desplazamiento, también variable, debido a la longitud no constante del actuador en el eje z.

$$T_{710i} = T_{z5(\theta_{87i})} T_{z4(\theta_{98i})} T_{z3(z_{109i})} \quad (2.12)$$

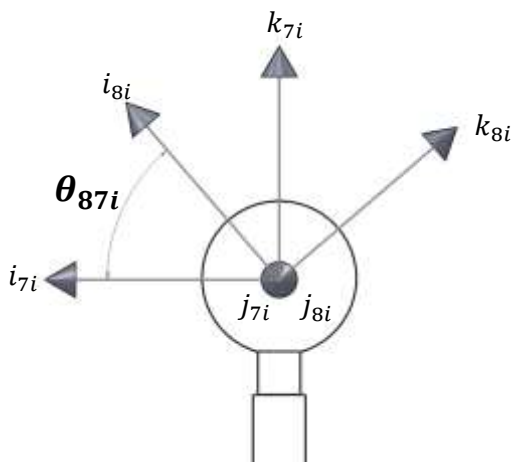


Figura 2.5 Generación del sistema 8i.

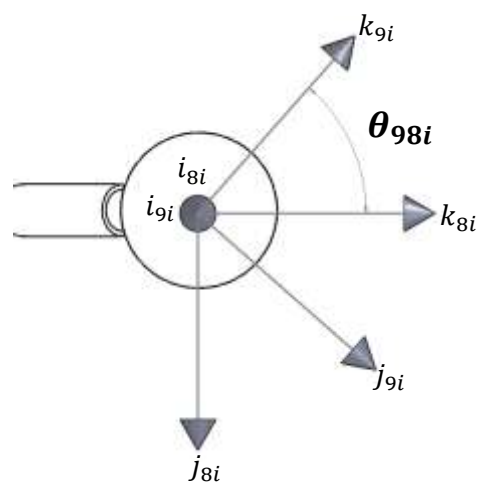


Figura 2.6 Generación del sistema 9i.

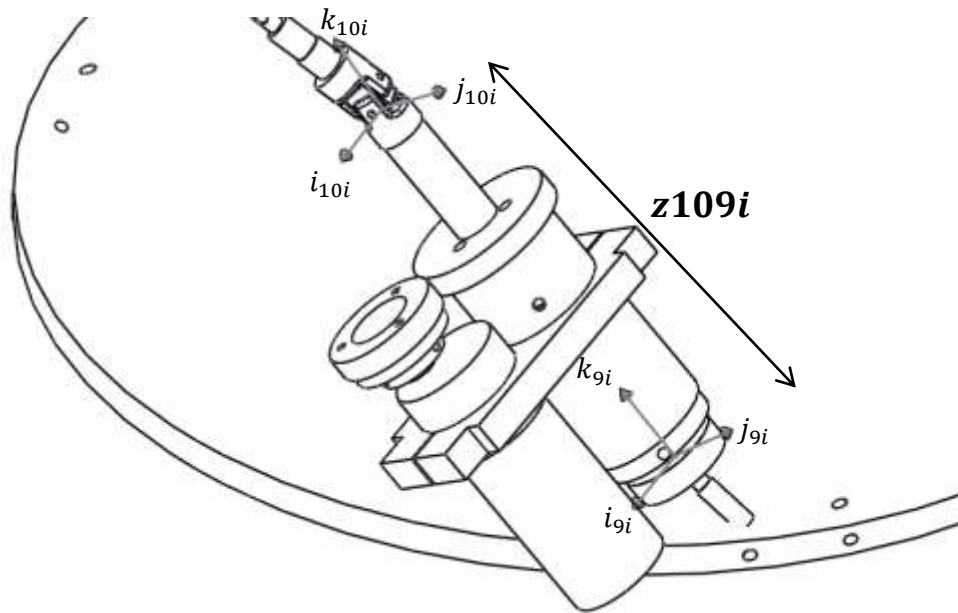


Figura 2.7 Generación del sistema 10i.

El sistema 10i nos ubica hasta el final del actuador o bien, a la altura del eje inferior de la junta universal, así que para pasar del sistema 10i hasta el sistema 13i al final de la junta universal en la parte superior del manipulador, son necesarias dos rotaciones, primero una alrededor de x seguida de otra respecto al eje y , en donde ambas rotaciones son representadas por ángulos θ_{1110i} y θ_{1211i} , estas rotaciones son seguidas de una traslación de magnitud constante a lo largo del eje z como se muestra en las Figuras 2.8 y 2.9.

$$T_{1013i} = T_{z4(\theta_{1110i})} T_{z5(\theta_{1211i})} T_{z3(z_{1312i})} \quad (2.13)$$

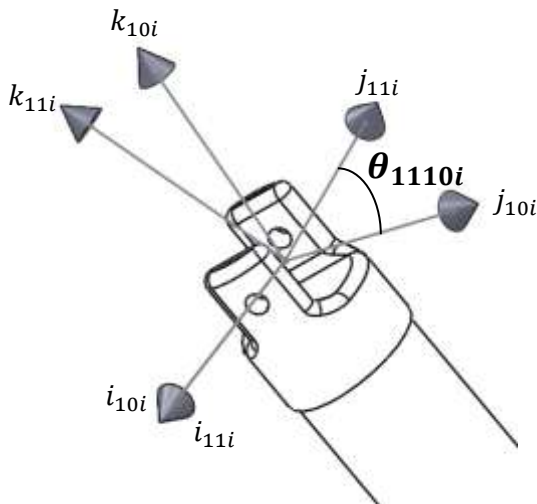


Figura 2.8 Generación del sistema 11i

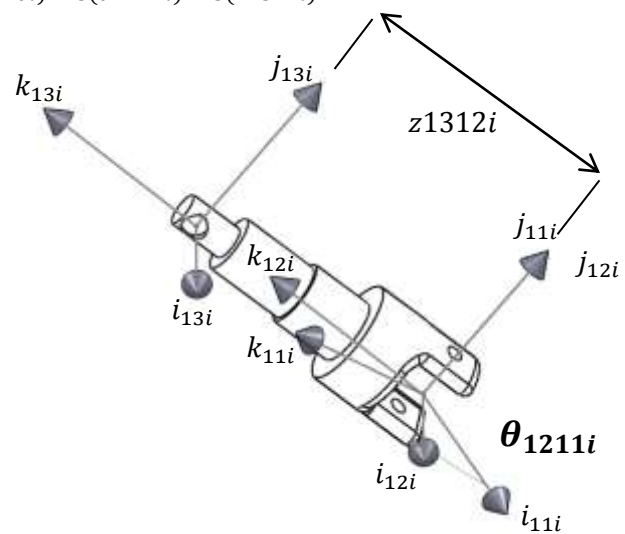


Figura 2.9 Generación del sistema 13i

Finalmente, para generar una ecuación de lazo, es necesario llegar al sistema 13i desde el mismo sistema inercial siguiendo otro camino distinto al que ya se ha generado. Para lograr esto, se parte directamente desde el sistema inercial hasta el sistema (i_p, j_p, k_p) ubicado en el centro de la plataforma superior del manipulador (T_{OP}) y posteriormente llegar a la posición del sistema 13i (T_{P18i}), estas transformaciones se muestran en la Figura 2.10. A las ecuaciones que describen a (T_{OP}) debe agregarse la matriz phi, de esta forma se considera la rotación de la plataforma superior con respecto a un eje arbitrario que no había sido expresado en alguno de los sistemas locales mostrados en la Figura 2.10

$$T_{OP} = T_{z1(xp)}T_{z2(yp)}T_{z3(zp)}T_{z6(\psi p)}M_{\phi,u} \quad (2.14)$$

$$T_{P18i} = T_{z6(\delta14pi)}T_{z1(x1514i)}T_{z6(\delta1615i)}T_{z4(\delta1716i)}T_{z6(\delta1817i)} \quad (2.15)$$

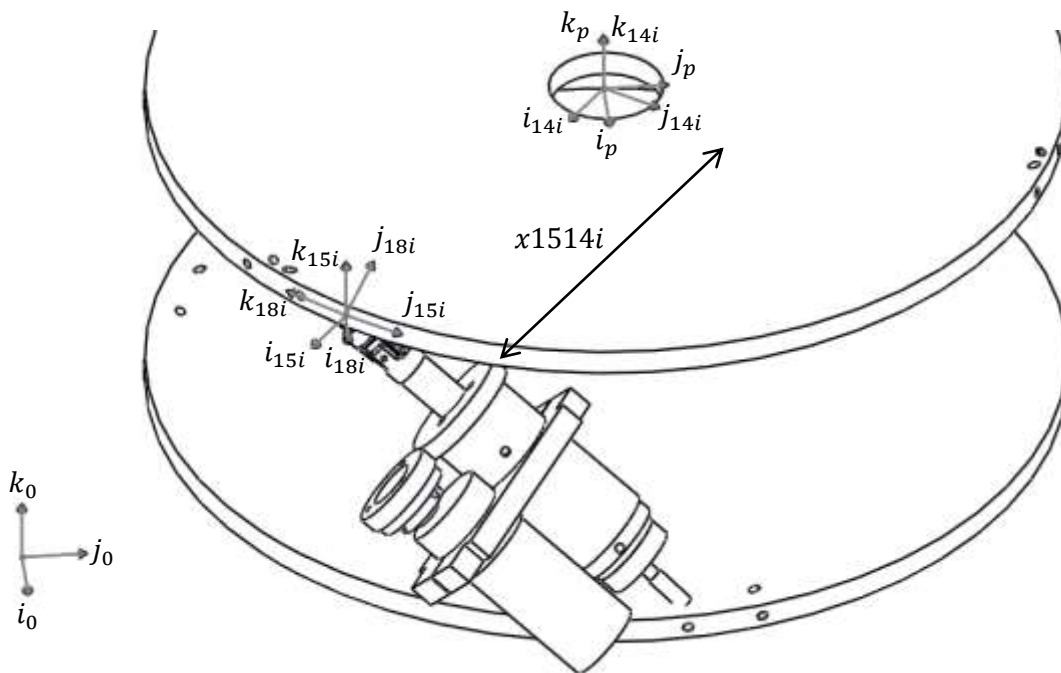


Figura 2.10 Sistemas de referencia del inercial al 18i

Al juntar todas las transformaciones, la ecuación de lazo queda de la siguiente forma:

$$T_{OB}T_{B2i}T_{27i}T_{710i}T_{1013i} = T_{OP}T_{P18i} \quad (2.16)$$

Las incógnitas a determinar en la ecuación (2.16) son los ángulos de las juntas tanto esférica como universal, así como la longitud variable del actuador lineal:

$$\theta_{76i}, \theta_{87i}, \theta_{98i}, \theta_{1110i}, \theta_{1211i}, z_{109i}$$

con $i = 1,2,3,4,5,6$

De lo anterior debe entenderse que al tener seis incógnitas por cada una de las cadenas cinemáticas se tiene un total de 36 variables.

2.5 Generación de trayectoria

El movimiento de un cuerpo en el espacio consiste de dos partes. Una trayectoria lineal o curva en el espacio que sigue un punto del cuerpo (el centro de masa de la plataforma superior del manipulador en éste caso) y la orientación angular del cuerpo. Ambas partes deben satisfacer condiciones de posición, velocidad y aceleración tanto lineal como angular y ser cumplidas en un tiempo definido previamente. A continuación se desarrolla la trayectoria lineal y la angular que se propone para la plataforma en función del tiempo.

Trayectoria Lineal

La trayectoria propuesta a seguir por un punto del cuerpo es una línea recta en el espacio.

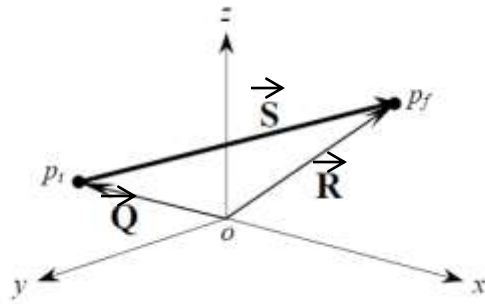


Figura 2.11 Recta en el espacio.

La ecuación vectorial que define la recta en el espacio mostrada en la Figura 2.11 es:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{Q} + \vec{S} \\ \vec{R} &= \vec{Q} + s\vec{u}\end{aligned}\quad (2.17)$$

Donde s es la magnitud del vector \vec{S} y \vec{u} es el vector unitario que define la orientación de \vec{S} . Para definir \vec{R} en función del tiempo, se requiere que la magnitud s cambie con respecto al tiempo, es decir:

$$\vec{R}(t) = \vec{Q} + s(t)\vec{u}\quad (2.18)$$

Las ecuaciones vectoriales de la velocidad y la aceleración se definen como la primera y segunda derivada respecto al tiempo de la ecuación (2.18):

$$\begin{aligned}\vec{V}(t) &= \dot{s}(t)\vec{u} \\ \vec{A}(t) &= \ddot{s}(t)\vec{u}\end{aligned}\quad (2.19)$$

Ya que \vec{Q} y \vec{u} no varían con respecto al tiempo, porque están definidos por puntos fijos en el espacio. La magnitud $s(t)$ debe satisfacer condiciones iniciales y finales de muy simple deducción como se muestra en las gráficas mostradas en la Figura 2.12.

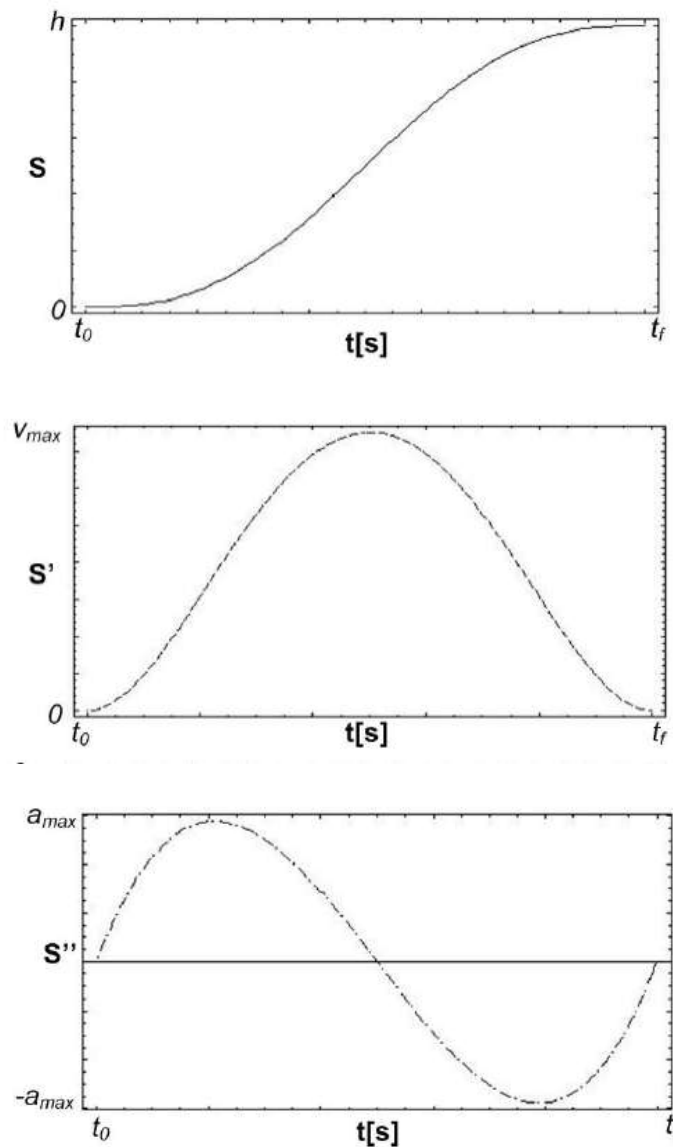


Figura 2.12 Condiciones iniciales y perfil del polinomio de quinto grado.

La primera gráfica indica el cambio de magnitud del vector \vec{S} , que irá variando desde 0 en un tiempo inicial t_0 , hasta una posición correspondiente al tiempo final t_f , donde t_0 y t_f son definidos de forma arbitraria y $h = \|\vec{S}\|$.

La segunda gráfica es la rapidez con que la magnitud del vector \vec{S} cambia con respecto al tiempo. Es decir, es la rapidez con que realiza la traslación del punto inicial p_i al punto final p_f con tiempos t_0 y t_f , respectivamente.

La tercera gráfica es el cambio de la rapidez (aceleración) con que la magnitud del vector \vec{S} cambio respecto al tiempo, para un tiempo inicial t_0 y t_f .

Para satisfacer las seis condiciones observadas en las gráficas, se hace uso de una técnica utilizada en el diseño de levas, exactamente la clase de funciones polinomiales, que permite cumplir con la ley fundamental de diseño de levas, ésta dicta que “La función de la leva debe ser continua en la primera y segunda derivadas del desplazamiento a través de todo el intervalo de 360 grados”.

Las funciones polinomiales permiten diseñar un polinomio capaz de cumplir con esta ley, librando al movimiento del seguidor de la leva de vibraciones producidas por las aceleraciones y brinda un movimiento más suave y fluido, estas características son ideales para el comportamiento del robot al seguir una trayectoria, ya que de no cumplir con estas características, lo privaría de precisión en sus operaciones e incluso podrían generarse fuerzas de gran magnitud que podría dañar al sistema.

La forma general de una función polinomial en función del tiempo es:

$$s(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 + a_6t^6 \dots + a_nt^n \quad (2.20)$$

En donde los coeficientes a_i , con $i = 0, \dots, n$, son las incógnitas a determinar en el desarrollo de la ecuación polinomial que satisfaga las especificaciones de diseño.

Las condiciones de frontera observadas en las gráficas de la Figura 2.12 son los únicos valores con los que se cuenta para determinar dichos coeficientes, y sabiendo que los coeficientes estarán presentes en la primera y segunda derivada del polinomio, es posible resolver un sistema de ecuaciones para determinarlos.

El grado del polinomio depende entonces de las condiciones de frontera siendo n el grado del polinomio y k las condiciones de frontera se tiene que:

$$n = k - 1 \quad (2.21)$$

Quedando entonces para este caso y las seis condiciones de frontera con las que se cuenta ($k = 6$):

$$\begin{aligned} n &= 6 - 1 \\ n &= 5 \end{aligned} \quad (2.22)$$

De lo anterior pueden escribirse los polinomios para la posición, velocidad y aceleración de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \\
 \dot{s}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 \\
 \ddot{s}(t) &= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

De las condiciones iniciales mostradas en las gráficas de la Figura 2.12 puede explicarse que si $t = t_0 = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 s(t_0) &= s(0) = 0 \\
 \dot{s}(t_0) &= \dot{s}(0) = 0 \\
 \ddot{s}(t_0) &= \ddot{s}(0) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Al sustituir los resultados de las ecuaciones (2.24) en las ecuaciones (2.23) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 s(0) &= a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + a_3(0)^3 + a_4(0)^4 + a_5(0)^5 \\
 \dot{s}(0) &= a_1 + 2a_2(0) + 3a_3(0)^2 + 4a_4(0)^3 + 5a_5(0)^4 \\
 \ddot{s}(0) &= 2a_2 + 6a_3(0) + 12a_4(0)^2 + 20a_5(0)^3
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

Simplificando, los tres primeros coeficientes son:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0 \\
 a_1 &= 0 \\
 a_2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

Repitiendo el proceso ahora para $t = t_f$ se tienen las siguientes tres condiciones finales:

$$\begin{aligned}
 s(t_f) &= h = \|p_f - p_i\| \\
 \dot{s}(t_f) &= 0 \\
 \ddot{s}(t_f) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Donde $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ y $p_f = (x_f, y_f, z_f)$ son las coordenadas de los puntos inicial y final de la trayectoria respectivamente, la magnitud de la diferencia entre ellos, representa la distancia h que se necesita recorrer en línea recta. Al sustituir las ecuaciones (2.26) y (2.27) en las ecuaciones (2.23) se obtiene:

$$\begin{aligned} \|p_f - p_i\| &= a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\ 0 &= 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \\ 0 &= 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Las ecuaciones (2.28) pueden ser reescritas como un sistema de ecuaciones en su forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|p_f - p_i\| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Al resolver el sistema de la ecuación (2.29) se obtienen los últimos tres coeficientes:

$$\begin{aligned} a_3 &= 10 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} \\ a_4 &= -15 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} \\ a_5 &= 6 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.26) y (2.30) en (2.23):

$$\begin{aligned} s(t) &= 10 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} t^3 - 15 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} t^4 + 6 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5} t^5 \\ \dot{s}(t) &= 30 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} t^2 - 60 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} t^3 + 30 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5} t^4 \\ \ddot{s}(t) &= 60 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} t - 180 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} t^2 + 120 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5} t^3 \end{aligned}$$

Finalmente, al factorizar se obtienen las ecuaciones que representan el cambio de la magnitud de la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \|p_f - p_i\| \left[10 \frac{t^3}{t_f^3} - 15 \frac{t^4}{t_f^4} + 6 \frac{t^5}{t_f^5} \right] \\
 \dot{s}(t) &= \|p_f - p_i\| \left[30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] \\
 \ddot{s}(t) &= \|p_f - p_i\| \left[60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right]
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Reescribiendo las ecuaciones vectoriales (2.18) y (2.19) en función de los puntos de la recta quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \vec{R}(t) &= \vec{Q} + s(t)\vec{u} = (p_i - 0) + s(t) \frac{(p_f - p_i)}{\|p_f - p_i\|} \\
 \vec{V}(t) &= \dot{s}(t)\vec{u} = \dot{s}(t) \frac{(p_f - p_i)}{\|p_f - p_i\|} \\
 \vec{A}(t) &= \ddot{s}(t)\vec{u} = \ddot{s}(t) \frac{(p_f - p_i)}{\|p_f - p_i\|}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.31) en las ecuaciones (2.32), se obtiene finalmente las ecuaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración que debe seguir la plataforma móvil del manipulador:

$$\begin{aligned}
 \vec{R}(t) &= p_i + \left[10 \frac{t^3}{t_f^3} - 15 \frac{t^4}{t_f^4} + 6 \frac{t^5}{t_f^5} \right] (p_f - p_i) \\
 \vec{V}(t) &= \left[30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (p_f - p_i) \\
 \vec{A}(t) &= \left[60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (p_f - p_i)
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Orientación angular

Para la orientación se sigue un procedimiento similar, aclarando que para este caso, solo se desea pasar de valores iniciales a finales, para la posición, velocidad y aceleración angular de la plataforma móvil, ya que no se requiere cumplir con una trayectoria particular en el espacio. Esto conducirá a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\vec{\beta}(t) &= \beta_i + \left[10 \frac{t^3}{t_f^3} - 15 \frac{t^4}{t_f^4} + 6 \frac{t^5}{t_f^5} \right] (\beta_f - \beta_i) \\ \dot{\vec{\beta}}(t) &= \left[30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (\beta_f - \beta_i) \\ \ddot{\vec{\beta}}(t) &= \left[60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (\beta_f - \beta_i)\end{aligned}\tag{2.34}$$

Donde el vector $\vec{\beta} = [\psi, \theta, \phi]$. De la misma manera $\vec{\beta}_i = [\psi_i, \theta_i, \phi_i]$ y $\vec{\beta}_f = [\psi_f, \theta_f, \phi_f]$ se refieren a los valores iniciales y finales.

2.6 Ecuaciones de posición

De acuerdo a la trayectoria propuesta, se desea calcular los valores de las incógnitas $\theta_{76i}, \theta_{87i}, \theta_{98i}, \theta_{1110i}, \theta_{1211i}, z_{109i}$, por lo que se debe tener igual número de ecuaciones que de incógnitas.

Se describen también las ecuaciones de los miembros izquierdo y derecho de la ecuación de lazo en las ecuaciones (2.36) y (2.37) respectivamente.

$$T_{OC} = T_{z1(xc)} T_{z2(yc)} T_{z3(zc)} T_{z6(\psi c)} T_{z4(\theta c)} T_{z6(\phi c)}\tag{2.7}$$

$$T_{CB} = T_{z3(zCB)}\tag{2.8}$$

$$T_{OB} = T_{OC} T_{CB}\tag{2.9}$$

$$T_{B2i} = T_{z6(\delta 1Bi)} T_{z1(x21i)}\tag{2.10}$$

$$T_{27i} = T_{z6(\delta 32i)} T_{z4(\delta 43i)} T_{z3(z54i)} T_{z6(\delta 65i)} T_{z6(\theta 76i)}\tag{2.11}$$

$$T_{710i} = T_{z5(\theta 87i)} T_{z4(\theta 98i)} T_{z3(z109i)}\tag{2.12}$$

$$T_{1013i} = T_{z4(\theta1110i)} T_{z5(\theta1211i)} T_{z3(z1312i)} \quad (2.13)$$

$$T_{OP} = T_{z1(xp)} T_{z2(yp)} T_{z3(zp)} T_{z6(\psi)} M_{\phi,u} \quad (2.14)$$

$$T_{P18i} = T_{z6(\delta14pi)} T_{z1(x1514i)} T_{z6(\delta1615i)} T_{z4(\delta1716i)} T_{z6(\delta1817i)} \quad (2.15)$$

$$LI = T_{OB} T_{B2i} T_{27i} T_{710i} T_{1013i} \quad (2.35)$$

$$LD = T_{OP} T_{P18i} \quad (2.36)$$

2.7 Ecuaciones de Velocidad

Las ecuaciones de velocidad se obtienen calculando la primera derivada con respecto al tiempo quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} dT_{OC} = & T_{z1[xC]} T_{z2[yC]} T_{z3[zC]} dT_{z6[\psi C]} T_{z4[\theta C]} T_{z6[\phi C]} \\ & + T_{z1[xC]} T_{z2[yC]} T_{z3[zC]} T_{z6[\psi C]} dT_{z4[\theta C]} T_{z6[\phi C]} \\ & + T_{z1[xC]} T_{z2[yC]} T_{z3[zC]} T_{z6[\psi C]} T_{z4[\theta C]} dT_{z6[\phi C]} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$dT_{OB} = dT_{OC} T_{z3[zBC]} + T_{OC} dT_{z3[zBC]} \quad (2.38)$$

Debe recordarse que las transformaciones son expresadas por matrices, y que al derivar la transformación T_{B2i} que contiene únicamente valores constantes, el resultado será una matriz de ceros de 4×4 , al igual que en el caso de la derivada de la transformación T_{P18i} .

$$dT_{B2i} = [0]_{4 \times 4} \quad (2.39)$$

$$dT_{27i} = T_{z6[\delta32i]} T_{z4[\delta43i]} T_{z3[z54i]} T_{z6[\delta65i]} dT_{z6[\theta76i]} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} dT_{710i} = & dT_{z5[\theta87i]} T_{z4[\theta98i]} T_{z3[z109i]} + T_{z5[\theta87i]} dT_{z4[\theta98i]} T_{z3[z109i]} \\ & + T_{z5[\theta87i]} T_{z4[\theta98i]} dT_{z3[z109i]} \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$dT_{1013i} = dT_{z4[\theta1110i]} T_{z5[\theta1211i]} T_{z3[z1312i]} + T_{z4[\theta1110i]} dT_{z5[\theta1211i]} T_{z3[z1312i]} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} dT_{OP} = & dT_{z1[xp]} T_{z2[yp]} T_{z3[zp]} T_{z6[\psi]} M_{\phi} + T_{z1[xp]} dT_{z2[yp]} T_{z3[zp]} T_{z6[\psi]} M_{\phi} \\ & + T_{z1[xp]} T_{z2[yp]} dT_{z3[zp]} T_{z6[\psi]} M_{\phi} + T_{z1[xp]} T_{z2[yp]} T_{z3[zp]} dT_{z6[\psi]} M_{\phi} \\ & + T_{z1[xp]} T_{z2[yp]} T_{z3[zp]} T_{z6[\psi]} W_{\phi} M_{\phi} \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$dT_{P18i} = [0]_{4 \times 4} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} dLI = & dT_{OB} T_{B2i} T_{27i} T_{710i} T_{1013i} + T_{OB} dT_{B2i} T_{27i} T_{710i} T_{1013i} + T_{OB} T_{B2i} dT_{27i} T_{710i} T_{1013i} \\ & + T_{OB} T_{B2i} T_{27i} dT_{710i} T_{1013i} + T_{OB} T_{B2i} T_{27i} T_{710i} dT_{1013i} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$dLD = dT_{OP} T_{P18i} + T_{OP} dT_{P18i} \quad (2.46)$$

2.8 Ecuaciones de aceleración

Las ecuaciones de aceleración se obtienen calculando la segunda derivada con respecto al tiempo de las ecuaciones de posición, quedando de la siguiente forma:

$$ddT_{OC} = T_{z1[xC]} T_{z2[yC]} T_{z3[zC]} ddT_{z6[\psi C]} T_{z4[\theta C]} T_{z6[\phi C]} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} & + T_{z1[xC]} T_{z2[yC]} T_{z3[zC]} T_{z6[\psi C]} ddT_{z4[\theta C]} T_{z6[\phi C]} + T_{z1[xC]} T_{z2[yC]} T_{z3[zC]} T_{z6[\psi C]} T_{z4[\theta C]} ddT_{z6[\phi C]} \\ & + 2T_{z1[xC]} T_{z2[yC]} T_{z3[zC]} dT_{z6[\psi C]} dT_{z4[\theta C]} T_{z6[\phi C]} + 2T_{z1[xC]} T_{z2[yC]} T_{z3[zC]} dT_{z6[\psi C]} T_{z4[\theta C]} dT_{z6[\phi C]} \\ & + 2T_{z1[xC]} T_{z2[yC]} T_{z3[zC]} T_{z6[\psi C]} dT_{z4[\theta C]} dT_{z6[\phi C]} \end{aligned}$$

$$ddT_{OB} = ddT_{BC} T_{z3[zBC]} + 2dT_{BC} dT_{z3[zC]} + T_{OB} ddT_{z3[zC]} \quad (2.48)$$

$$ddT_{B2i} = [0]_{4 \times 4} \quad (2.49)$$

$$ddT_{27i} = T_{z6[\delta 32i]} T_{z4[\delta 43i]} T_{z3[z54i]} T_{z6[\delta 65i]} ddT_{z6[\theta 76i]} \quad (2.50)$$

$$ddT_{710i} = ddT_{z5[\theta 87i]} T_{z4[\theta 98i]} T_{z3[z109i]} + T_{z5[\theta 87i]} ddT_{z4[\theta 98i]} T_{z3[z109i]} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} & + T_{z5[\theta 87i]} T_{z4[\theta 98i]} ddT_{z3[z109i]} + T_{z5[\theta 87i]} T_{z4[\theta 98i]} ddT_{z3[z109i]} \\ & + 2dT_{z5[\theta 87i]} dT_{z4[\theta 98i]} T_{z3[z109i]} + 2dT_{z5[\theta 87i]} T_{z4[\theta 98i]} dT_{z3[z109i]} \\ & + 2T_{z5[\theta 87i]} dT_{z4[\theta 98i]} dT_{z3[z109i]} \end{aligned}$$

$$ddT_{1013i} = ddT_{z4[\theta 110i]} T_{z5[\theta 1211i]} T_{z3[z1312i]} + 2dT_{z4[\theta 110i]} dT_{z5[\theta 1211i]} T_{z3[z1312i]} \quad (2.52)$$

$$+ T_{z4[\theta 110i]} ddT_{z5[\theta 1211i]} T_{z3[z1312i]}$$

$$\begin{aligned}
 ddT_{OP} = & ddT_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_{\phi} + T_{z1[xp]}ddT_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_{\phi} & (2.54) \\
 & + T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}ddT_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_{\phi} + T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}ddT_{z6[\psi]}M_{\phi} \\
 & + T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}A_{\phi}M_{\phi} + 2dT_{z1[xp]}dT_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_{\phi} \\
 & + 2dT_{z1[xp]}T_{z2[yp]}dT_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_{\phi} + 2dT_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}dT_{z6[\psi]}M_{\phi} \\
 & + 2dT_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}W_{\phi}M_{\phi} + 2T_{z1[xp]}dT_{z2[yp]}dT_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_{\phi} \\
 & + 2T_{z1[xp]}dT_{z2[yp]}T_{z3[zp]}dT_{z6[\psi]}M_{\phi} + 2T_{z1[xp]}dT_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}W_{\phi}M_{\phi} \\
 & + 2T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}dT_{z3[zp]}dT_{z6[\psi]}M_{\phi} + 2T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}dT_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}W_{\phi}M_{\phi} \\
 & + 2T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}dT_{z6[\psi]}W_{\phi}M_{\phi}
 \end{aligned}$$

$$ddT_{P18i} = [0]_{4 \times 4} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}
 ddLI = & ddT_{OB}T_{B2i}T_{27i}T_{710i}T_{1013i} + 2dT_{OB}dT_{B2i}T_{27i}T_{710i}T_{1013i} & (2.56) \\
 & + 2dT_{OB}T_{B2i}dT_{27i}T_{710i}T_{1013i} + 2dT_{OB}T_{B2i}T_{27i}dT_{710i}T_{1013i} + 2dT_{OB}T_{B2i}T_{27i}T_{710i}dT_{1013i} \\
 & + T_{OB} \cdot ddT_{B2i}T_{27i}T_{710i}T_{1013i} + 2T_{OB}dT_{B2i}dT_{27i}T_{710i}T_{1013i} + 2T_{OB}dT_{B2i}T_{27i}dT_{710i}T_{1013i} \\
 & + 2T_{OB}dT_{B2i}T_{27i}T_{710i}dT_{1013i} + T_{OB}T_{B2i}ddT_{27i}T_{710i}T_{1013i} + 2T_{OB}T_{B2i}dT_{27i}dT_{710i}T_{1013i} \\
 & + 2T_{OB}T_{B2i}dT_{27i}T_{710i}dT_{1013i} + T_{OB}T_{B2i}T_{27i}ddT_{710i}T_{1013i} + 2T_{OB}T_{B2i}T_{27i}dT_{710i}dT_{1013i} \\
 & + T_{OB}T_{B2i}T_{27i}T_{710i}ddT_{1013i}
 \end{aligned}$$

$$ddLD = ddT_{OP}T_{P18i} + 2dT_{OP} \cdot dT_{P18i} + T_{OP}ddT_{P18i} \quad (2.57)$$

2.9 Solución numérica

La plataforma Stewart, al tratarse de un manipulador paralelo con las características de sus actuadores lineales en una cadena cerrada, cuenta con una configuración completamente predecible al estar éstos totalmente contraídos, lo que permite determinar fácilmente las condiciones iniciales del movimiento del manipulador a diferencia de los manipuladores enteramente seriales.

La fácil determinación de las condiciones iniciales, ángulos, posiciones y distancias relativas entre eslabones y articulaciones, son ideales para implementar una solución numérica ofrecida por el software de desarrollo matemático o álgebra computacional Mathematica, para la solución de las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración evitando una laboriosa solución analítica o algebraica.

Los sistemas de ecuaciones obtenidos en la posición, velocidad y aceleración del manipulador fueron obtenidas mediante el software Mathematica versión 8. En el caso de la posición, el sistema es no lineal por lo que se utilizó el comando *FindRoot* en el que se especifica un valor inicial para cada una de las variables, dicha instrucción busca una solución utilizando métodos de Newton.

La velocidad y la aceleración presentan sistemas lineales (ecuaciones polinomiales de primer grado) por lo que el comando adecuado para obtener la solución es *Solve*. El algoritmo de esta instrucción no requiere dar valores iniciales.

El software permite realizar la simulación de la plataforma de Stewart de acuerdo a la trayectoria dada (recta con perfil de velocidad quíntico) con un intervalo de tiempo de cero a cinco segundos.

Los valores de ángulos y longitudes constantes de cada cadena cinemática que conforma a la Plataforma Stewart (PS) se muestran en la tabla 2.1.

Tabla 2.1. Parámetros de cada una de las cadenas cinemáticas de la PS

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
δ_{1Bi}	300°	180°	60°	300°	180°	60°
$X_{21i}(cm)$	15.11	15.11	15.11	15.11	15.11	15.11
δ_{32i}	-30°	90°	-150°	-30°	90°	210°
δ_{43i}	55°	55°	55°	55°	55°	55°
$Z_{54i}(cm)$	4	4	4	4	4	4
δ_{65i}	45°	45°	45°	45°	45°	45°
$Z_{1312i}(cm)$	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5
δ_{14pi}	240°	240°	0°	0°	120°	120°
$X_{1514i}(cm)$	15.11	15.11	15.11	15.11	15.11	15.11
δ_{1615i}	30°	30°	-90°	-90°	-150°	150°
δ_{1716i}	55°	55°	55°	55°	55°	55°
δ_{1817i}	45°	45°	45°	45°	45°	45°

2.10 Resultados

En las imágenes de la Figura 2.13 se muestran las gráficas de las posiciones, velocidades y aceleraciones del actuador. Estos valores corresponden a una trayectoria vertical donde los valores iniciales y finales para las posiciones y ángulos son: $p_i = \{0,0,0.1061\}m$ $p_f = \{0,0,0.1261\}m$ $\beta_i = \{0,0,0\}$ $\beta_f = \{0,0,0\}$.

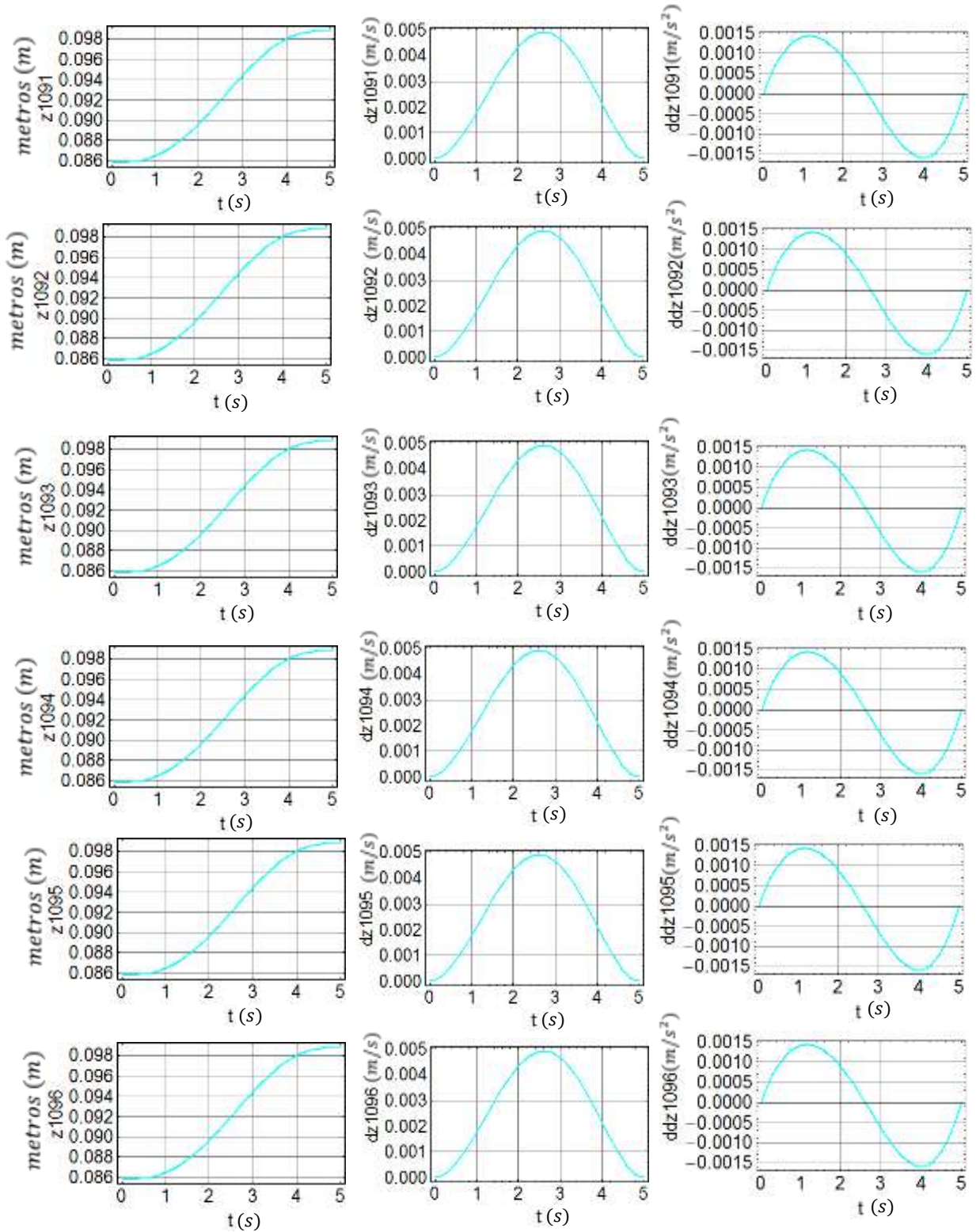
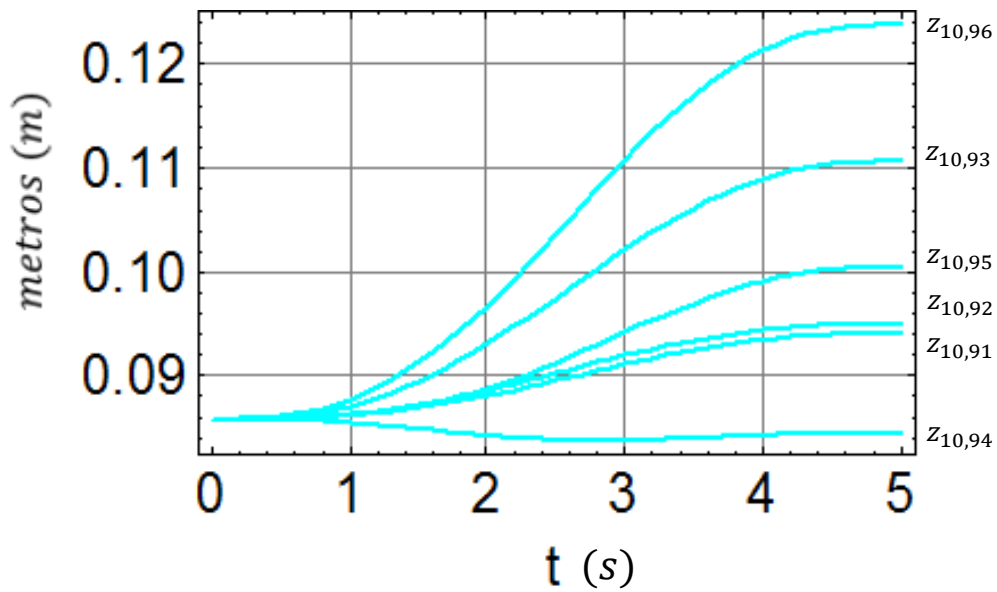
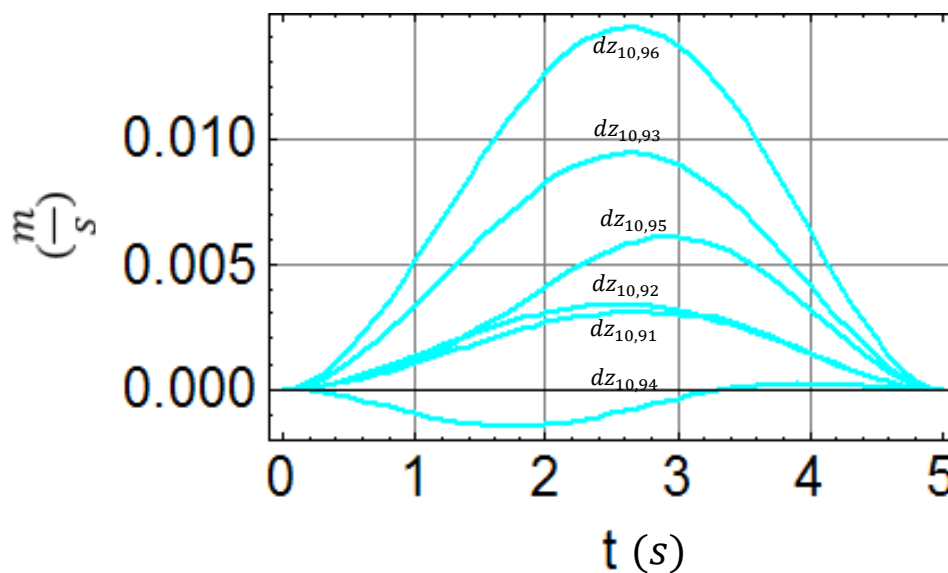


Figura 2.13 Gráficas de posición, velocidad y aceleración de todos los actuadores.

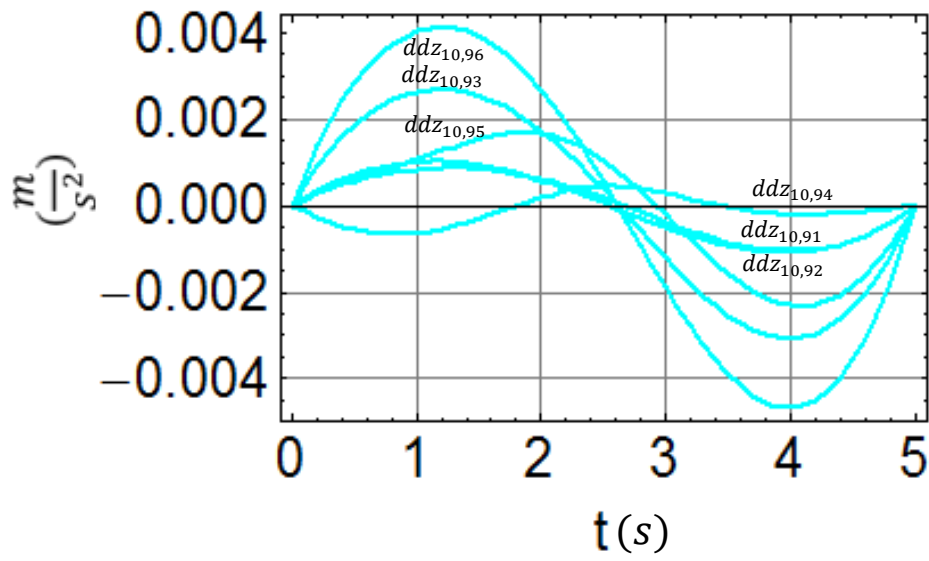
Los resultados de la Figura 2.13 confirman que las ecuaciones obtenidas coinciden con la simetría mencionada entre las cadenas cinemáticas del manipulador. Esto permite confiar en los resultados para trayectorias más complejas, como los correspondientes a las posiciones, velocidades y aceleraciones del actuador mostrados en las Figuras 2.14-2.16 Correspondientes a la trayectoria definida por los valores iniciales y finales $\mathbf{p}_i = \{0,0,0.1061\}m$ $\mathbf{p}_f = \{-0.01, -0.02, 0.1261\}m$ $\boldsymbol{\beta}_i = \{0,0,0\}$ $\boldsymbol{\beta}_f = \{0,10,0\}$. El resto de los resultados para esta misma trayectoria se encuentran en el apéndice A.



Figuras 2.14 Resultados de $z_{10,9i}$



Figuras 2.15 Resultados de $dz_{10,9i}$



Figuras 2.16 Resultados de $\ddot{z}_{10,9i}$

Capítulo 3

Determinación de Momentos de Inercia

3.1. Introducción

El momento de inercia mide la resistencia de un cuerpo a la aceleración angular [9].

Como se ha expuesto en el capítulo anterior, se ha realizado la cinemática inversa del manipulador a partir de la cual, se realizará el análisis dinámico del mismo. Parte de este análisis comprende la determinación de los momentos de inercia de aquellos cuerpos que conforman al manipulador, con masa suficiente para influir en el comportamiento del mecanismo.

Lo relevante del presente capítulo reside en la forma de obtención de los momentos de inercia: teórica, experimental y a través de un software de CAD (Solid Works). La razón de utilizar estos tres métodos se debe a que se está estudiando un prototipo físico (Figura 3.1), que está formado por diversas piezas en donde algunas de ellas tienen una geometría compleja, por tanto, determinar el momento de inercia de éstas resulta una tarea difícil y que puede presentar errores, los cuales se van sumando entre mayor sea el número de ellas. Cabe mencionar que no en todos los cuerpos se realizaron los tres métodos, lo cual dependió de sus características físicas.

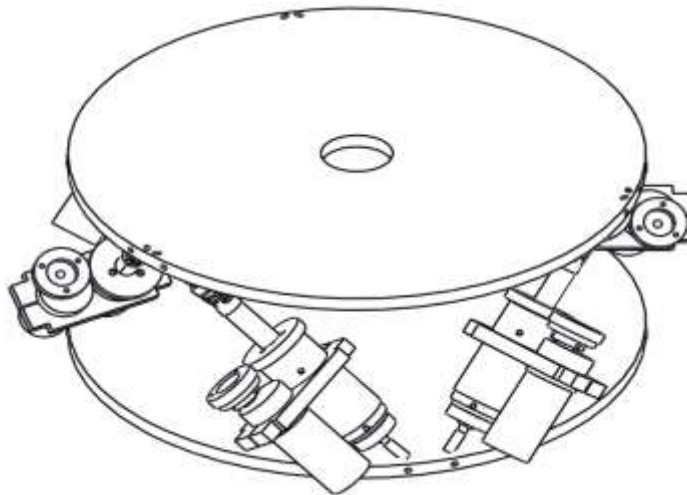


Figura 3.1 Dibujo del prototipo

3.2. Método experimental y justificación del mismo

El método empleado para la determinación de los momentos de inercia es un método experimental expuesto detalladamente en el trabajo "Determination of an irregular object's moment of inertia"[10].

Dicho experimento ha sido escogido ya que permite determinar los momentos de inercia con respecto al centro de masa de un objeto compuesto y no homogéneo, como es el caso de los motores del robot.

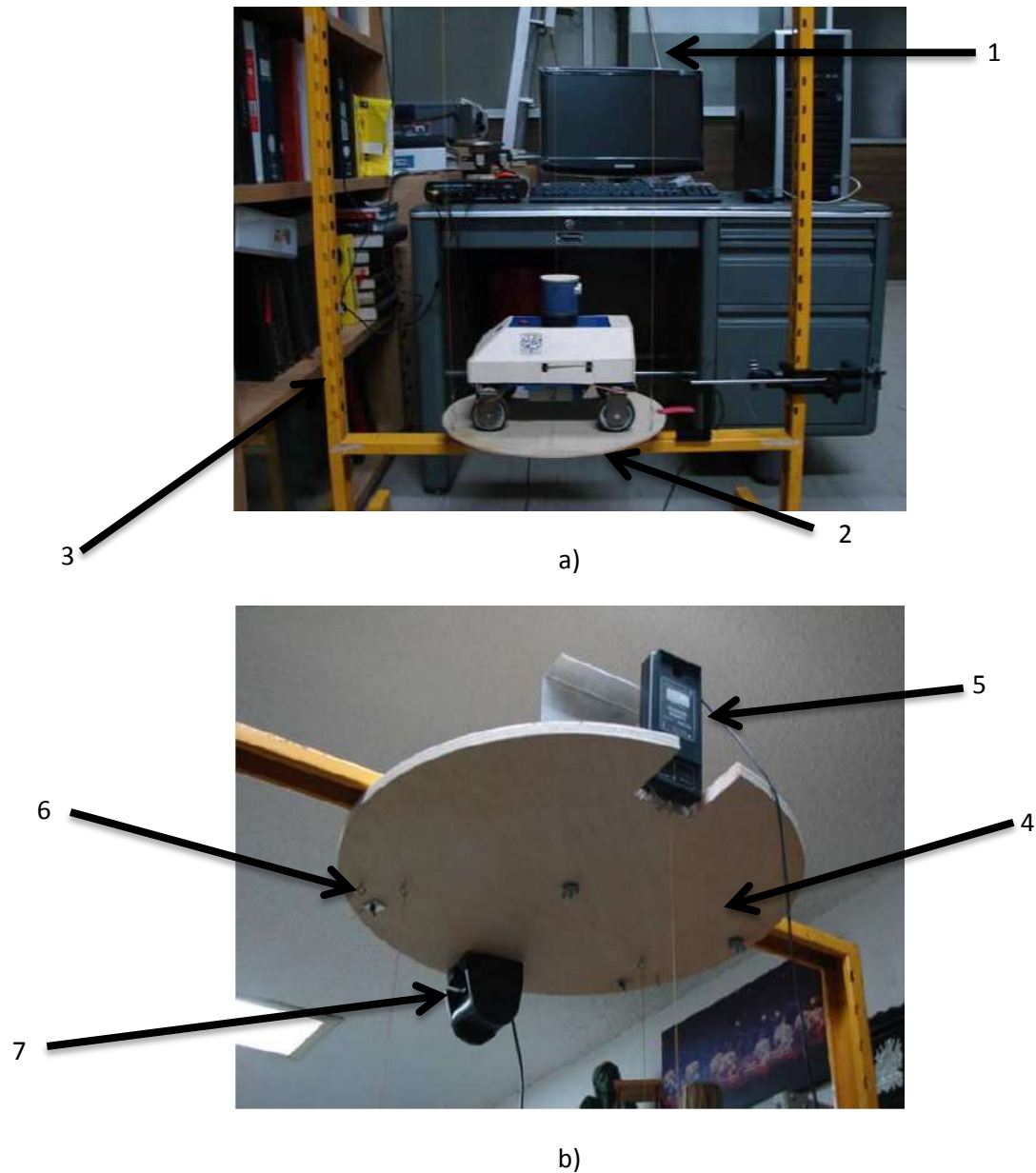


Figura 3.2 (a) Elementos de la plataforma superior, (b) Elementos de la plataforma inferior

El dispositivo en su configuración original, Figura 3.2 consiste de una plataforma superior (4) paralela a una inferior (2). La plataforma superior fijada al armazón de acero (3) cuenta con un fotómetro (7) y un medidor de fuerza (5) que para estas pruebas no fueron requeridos, en ésta misma se encuentran unas armellas (6) ubicadas en una circunferencia de radio igual a la que contiene a los agujeros de la plataforma inferior, o péndulo si se prefiere. La plataforma inferior que contiene al objeto cuyo momento de inercia se va a determinar está hecha de triplay de 40 centímetros de diámetro, y una masa de poco más de 100 gramos y está unida a la plataforma superior por medio de tres hilos delgados (1) de masa despreciable de 2 metros de longitud.

De acuerdo a la consideración descrita por el autor del artículo, debe mantenerse una relación de 10: 1 entre el peso de la plataforma y el peso del objeto, se supuso que dicha base no funcionaría por ser demasiado pesada en relación a los cuerpos a ensayar, esto se pudo corroborar realizando una primera prueba con un cilindro de acero de 214 gramos, considerando que de este orden son las masas de los cuerpos que se analizarían. El resultado obtenido mostró que existía un error de más del 50%, por esta razón se reemplazó la plataforma inferior por dos discos compactos o CD's ya que su distribución de masa puede considerarse homogénea, además de presentar rigidez suficiente ante el peso de los objetos que se montarían en ésta.

Debido a las modificaciones realizadas al aparato, éste fue probado para comprobar que efectivamente sería capaz de determinar correctamente los momentos de inercia.

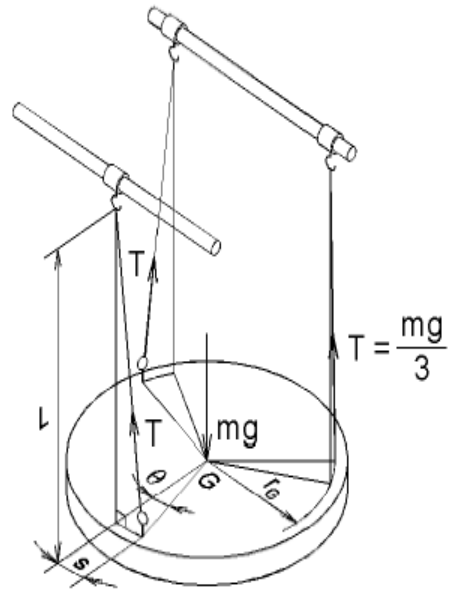
Cabe mencionar que el experimento nunca se había considerado para objetos de masa inferior a 1 Kg, así que de acuerdo a las condiciones señaladas en el trabajo de la referencia [10] se realizaron las modificaciones mencionadas.

Ya con las modificaciones, se realizó una prueba para comprobar que efectivamente el dispositivo sería capaz de determinar correctamente los momentos de inercia.

El dispositivo modificado, así como su diagrama de cuerpo libre se muestran en la Figura 3.3.



a)



b)

Figura 3.3 (a) Fotografía real del dispositivo después de las modificaciones. (b) Diagrama de cuerpo libre del dispositivo.

El experimento se realiza de la siguiente forma: se coloca el cuerpo sobre la plataforma inferior haciendo coincidir su centro de masa con el centro de la base, se hace girar manualmente la plataforma inferior respecto a la vertical un ángulo θ , Figura 3.3 b), para posteriormente soltarla y hacer que esta oscile de tal forma que se pueda calcular su periodo, con este dato, la longitud de la cuerda del péndulo, la distancia del centro de la plataforma a la unión del hilo y la plataforma, así como el momento de inercia de la plataforma inferior, se determina el momento de inercia.

A continuación se describen los análisis teóricos, experimentales y a través del software de CAD para los cuerpos que conforman la Plataforma de Stewart. Cabe señalar que debido a la simetría de ésta, se consideraron los elementos que conforman una cadena cinemática del manipulador construida por las placas

superior, inferior y los elementos que integran una pierna (leg) como se muestra en la Figura 3.4.

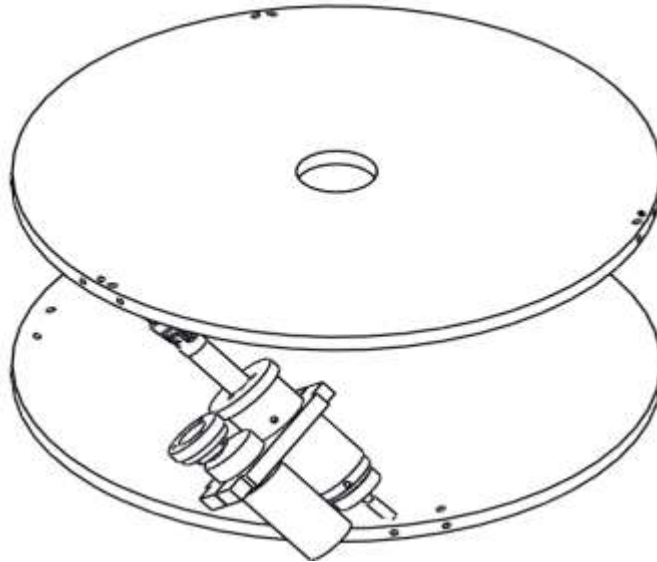


Figura 3.4 Cadena Cinemática

3.3. Calibración del dispositivo experimental

Para garantizar que el dispositivo arrojará resultados congruentes con la realidad, se dispuso a realizar pruebas en un objeto regular y homogéneo como lo es el caso de un cilindro de acero de 3.8cm de diámetro y 2.35cm de altura con una masa de 214g .

Al calcular el momento de inercia analíticamente y también por medio del software de CAD, se espera que los resultados del método analítico y del CAD sean iguales mientras que lo deseable en el método experimental es que no tenga una diferencia mayor al cinco por ciento con respecto a los dos anteriores y que consideraremos como aceptable para nuestro estudio. Los tres cálculos se mencionan a continuación y hacen referencia a la orientación de ejes mostrados en la Figura 3.5 entendiendo que su ubicación se encuentra en el centro de masa del patrón de acero.

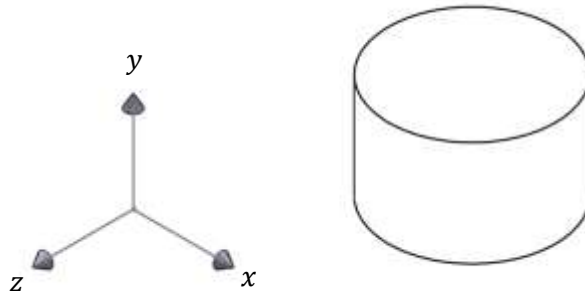


Figura 3.5 Patrón de acero

Cálculo analítico

De acuerdo a la fórmula:

$$I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 \quad (3.1)$$

Se tiene que con los valores $m = 0.214Kg$ y $r = 0.019m$ el momento de inercia correspondiente sería:

$$I_{yy} = \frac{1}{2}(0.214Kg)(0.019m)^2 \quad (3.2)$$

$$I_{yy} = 0.000038627 Kg \cdot m^2$$

Cálculo mediante software de CAD

El software de CAD permite calcular los momentos de inercia de los sólidos dibujados en él, los resultados se muestran en el recuadro señalado por una flecha en la Figura 3.6.

3. Determinación de Momentos de Inercia

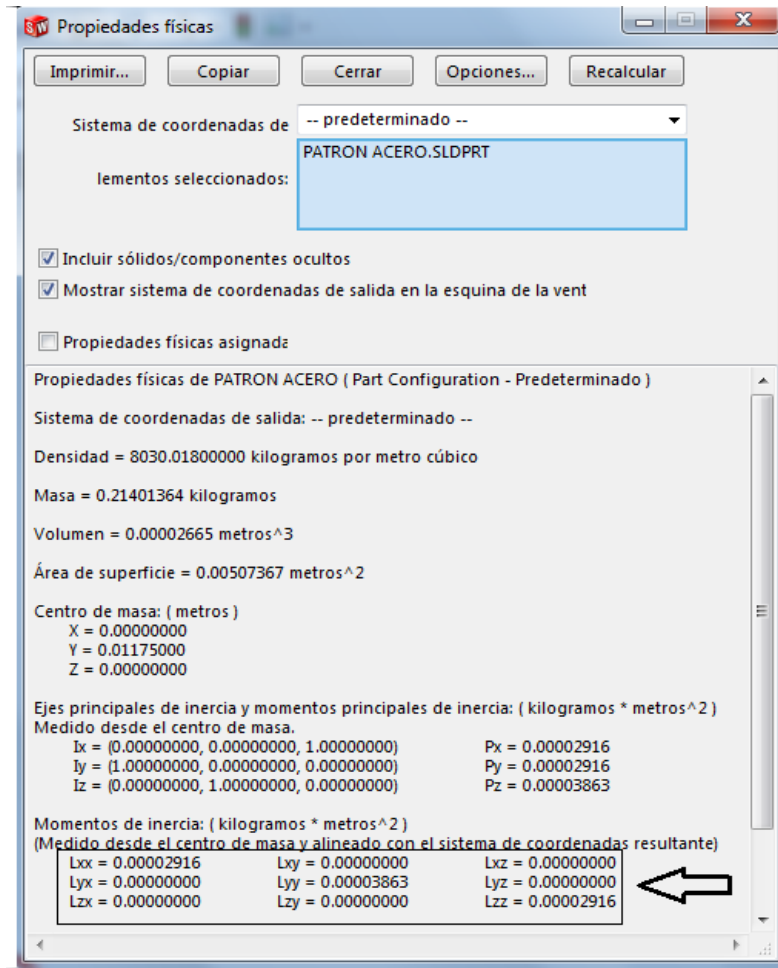


Figura 3.6 Los momentos de inercia calculados por el CAD se encuentran señalados en el recuadro.

Cálculo experimental

Este cálculo fue hecho de acuerdo a las indicaciones del autor, se alinean el centro de masa aproximado del objeto a analizar con el de la plataforma inferior.

Se procedió al experimento estableciendo un número de veinte ciclos ($n = 20$) de los cuales se cronometró el tiempo total del experimento (T), para después poder obtener el periodo ($t = T/n$) de una oscilación, los datos de esta prueba cronometrada se muestran en la Tabla 3.1

Tabla 3.1 Tiempos correspondientes a la determinación del momento de inercia I_{yy} .

	Tiempo 1	Tiempo 2	Tiempo 3	Tiempo promedio
I_{yy}	17.8 s	17.9 s	17.7 s	17.8 s

Al tiempo promedio de la Tabla 3.1 sólo hace falta agregar el valor de las variables mostradas en el diagrama de cuerpo libre del experimento mostrado en la Figura 3.1 (b), así como el momento de inercia del eje perpendicular a la superficie de la plataforma que para el caso de esta prueba los resultados obtenidos fueron los siguientes:

$$\begin{aligned} r_G &= 0.057m \\ m &= 0.214 Kg \\ T &= 17.8 s \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$t = \frac{T}{n}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{t}$$

$$L = 1.48 m$$

$$I_{GG,plat} = \frac{1}{2}m(R_{ext}^2 + R_{int}^2) = \frac{1}{2}(0.0294Kg)[(0.06m)^2 + (0.0075m)^2]$$

$$I_{GG,plat} = 0.000053746875 Kg \cdot m^2$$

Donde r_G es la distancia radial del centro de la plataforma al punto donde se une la plataforma con el hilo, m es la masa de la plataforma, T el tiempo del experimento, t el periodo de un ciclo de oscilación, ω la velocidad angular de la plataforma y L la longitud de la plataforma.

$$I_{GG,obj} = \frac{r_G^2 mg}{\omega^2 L} - I_{GG,plat} \tag{3.4}$$

Sustituyendo los valores de (3.3) en (3.4) obtenemos:

$$I_{GG,obj} = \frac{(0.057m)^2(0.214Kg)(9.72 m/s^2)}{\left[\frac{2\pi(20)}{17.8s}\right]^2 (1.48m)} - 0.000053746 Kg \cdot m^2$$

$$I_{GG,obj} = 0.000038905 Kg \cdot m^2 \tag{3.5}$$

Error entre el cálculo experimental y analítico al determinar el momento de inercia I_{yy} de acuerdo al sistema mostrado en la Figura 3.5.

$$e = \left(\frac{0.000038905 - 0.000038627}{0.000038627} \right) 100\% = 1.8794356\% \tag{3.6}$$

El error está dentro del límite de 5% que se considerará aceptable para nuestro análisis y comprueba que el método es fiable para nuestros fines.

3.4. Cálculo del momento de inercia del cuerpo C_{2i} (Conjunto motor)

Habiendo corroborado la fiabilidad del método experimental procederemos a calcular el cuerpo C_{2i} .

Ya que el cuerpo C_{1i} está anclado a la plataforma fija al móvil, y no presentará movimiento relativo con respecto a ésta, no tendrá repercusión en las velocidades y aceleraciones angulares del móvil, si consideramos también el hecho de que su masa de 15g, al compararla con la del conjunto del motor de 475g o el de la plataforma superior de cerca de 1000g, es despreciable.

Aclarado lo anterior se calcula el momento de inercia del conjunto motor de acuerdo a los pasos explicados en la sección 3.3 y se obtienen los datos mostrados en la Tabla 3.2 que corresponden a los ejes mostrados en la Figura 3.7, así como imágenes del experimento correspondiente en la Figura 3.8.

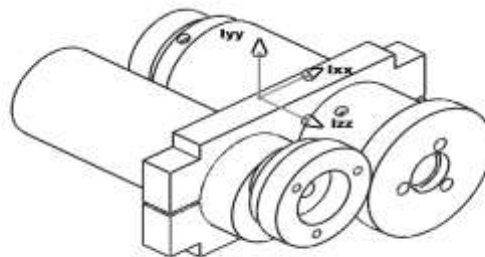


Figura 3.7 Conjunto motor formado por el mismo motor, abrazadera, contenedor del actuador y engranes.

Tabla 3.2 Tiempos correspondientes a la determinación de cada momento de inercia.

	Tiempo 1	Tiempo 2	Tiempo 3	Tiempo promedio
I_{xx}	20.1 s	20.3 s	20.1 s	20.16 s
I_{yy}	23.4 s	23.4 s	23.4 s	23.40 s
I_{zz}	16.1 s	16.4 s	16.2 s	16.23s



a)



b)

Figura 3.8 (a) Cálculo de I_{yy} , (b) Cálculo de I_{xx}

Sustituyendo el tiempo promedio de la Tabla 3.2 correspondiente a cada momento de inercia se procede a calcular los momentos de inercia experimentalmente como se explicó en la sección 3.3.

Cálculo de I_{xx}

Los datos necesarios para la ecuación (3.4) son:

$$m = 047567Kg$$

$$T = 20.16s$$

$$t = \frac{T}{n} \tag{3.7}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{t}$$

La sustitución en la fórmula (3.4) queda entonces:

$$I_{GG,obj} = \frac{(0.057m)^2(0.47567Kg)(9.72 m/s^2)}{\left[\frac{2\pi(20)}{20.16s}\right]^2 (1.48m)} - 0.000053746 Kg \cdot m^2$$

$$I_{GG,obj} = 0.000207482 Kg \cdot m^2 \tag{3.8}$$

Cálculo de I_{yy}

Los datos necesarios para la ecuación (3.4) son:

$$m = 047567Kg$$

$$T = 23.4s$$

$$t = \frac{T}{n} \tag{3.9}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{t}$$

La sustitución en la fórmula (3.4) queda entonces:

$$I_{GG,obj} = \frac{(0.057m)^2(0.47567Kg)(9.72 m/s^2)}{\left[\frac{2\pi(20)}{23.4s}\right]^2 (1.48m)} - 0.000053746 Kg \cdot m^2$$
$$I_{GG,obj} = 0.000298195Kg \cdot m^2 \tag{3.10}$$

Calculo de I_{zz}

Los datos necesarios para la ecuación (3.4) son:

$$m = 047567Kg$$

$$T = 16.23s$$

$$t = \frac{T}{n} \tag{3.11}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{t}$$

La sustitución en la fórmula (3.4) queda entonces:

$$I_{GG,obj} = \frac{(0.057m)^2(0.47567Kg)(9.72 m/s^2)}{\left[\frac{2\pi(20)}{16.23s}\right]^2 (1.48m)} - 0.000053746 Kg \cdot m^2$$
$$I_{GG,obj} = 0.000115561Kg \cdot m^2 \tag{3.12}$$

3.5 Cálculo del momento de inercia del cuerpo C_{3i} (Conjunto actuador)

Para la determinación del momento de inercia del actuador se utilizó el software de CAD ya que el método demostró no ser efectivo con piezas de masas pequeñas, dicho problema se explicará en la siguiente sección.

A pesar de que el tornillo es en realidad una forma compleja por la cuerda de éste y las piezas pequeñas que están unidas a él, puede ser idealizado para fines prácticos como un cilindro regular y homogéneo.

Cálculo mediante software de CAD

De acuerdo a los ejes mostrados en la Figura 3.9 correspondiente al dibujo realizado en el software de CAD, los momentos de inercia calculados se muestran en el recuadro señalado por una flecha en la Figura 3.10.

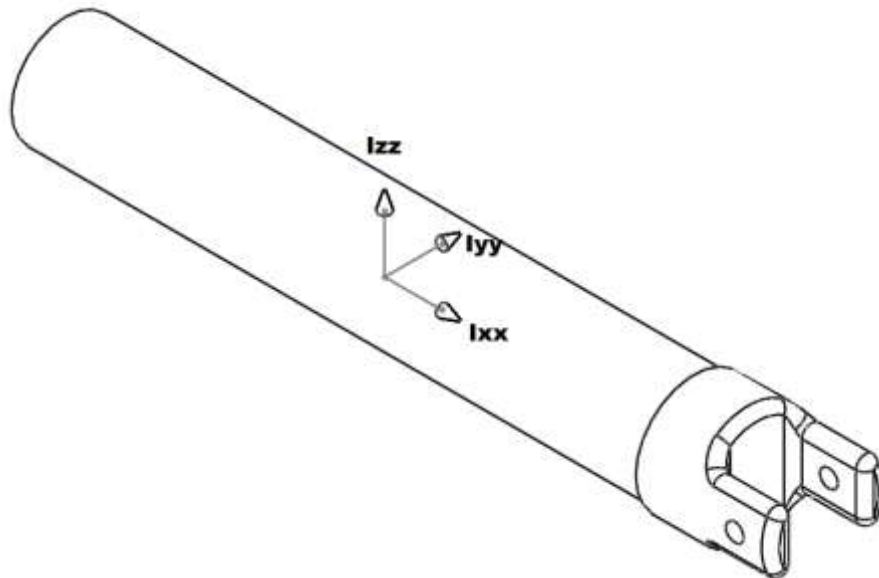


Figura 3.9 Conjunto actuador

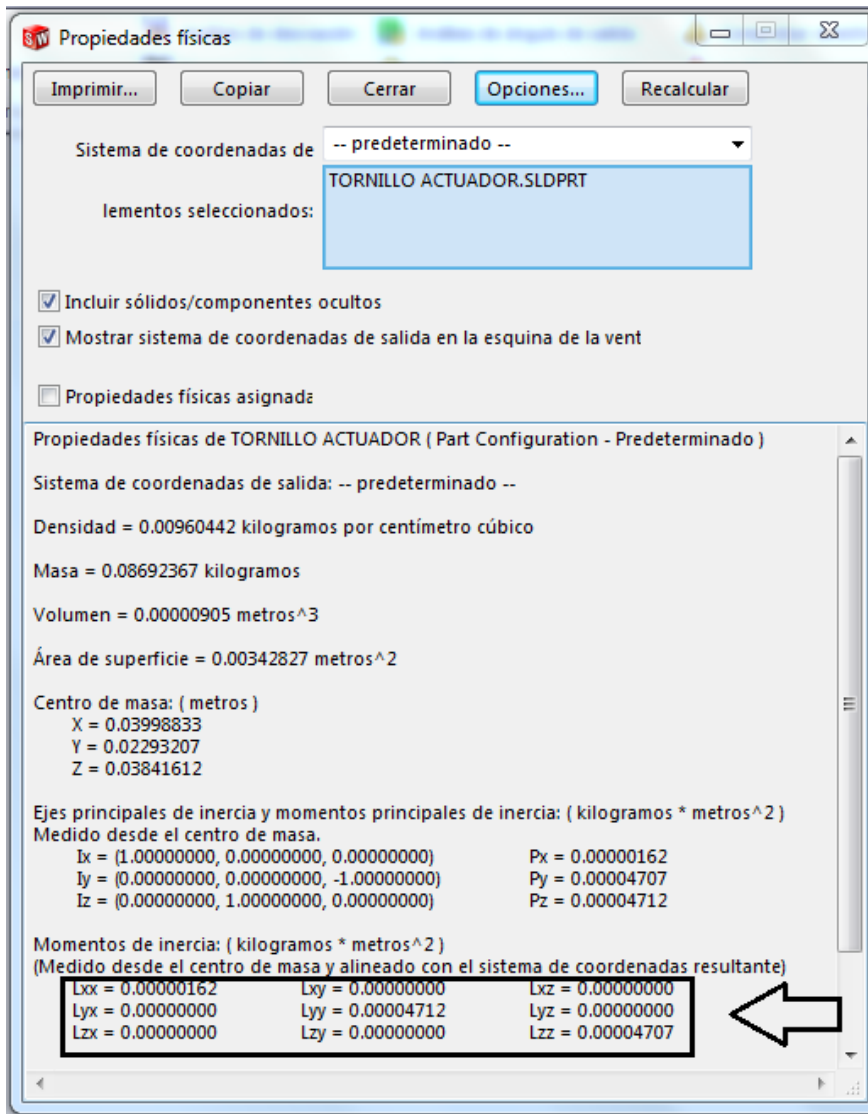


Figura 3.10 Momentos de inercia calculados por el CAD.

3.6 Cálculo del momento de inercia del cuerpo C_0 y C_5 (Plataforma superior e inferior)

Debido a la geometría de las plataformas, el cálculo de los momentos de inercia se realizó analíticamente despreciando pequeñas perforaciones hechas en ellas para el uso de prisioneros que detienen a los cuerpos C_{1i} y C_{4i} en la plataforma inferior y superior respectivamente.

Los momentos de inercia calculados son referidos al sistema mostrado en la Figura 3.11 colocado en el centro de masa de la plataforma con masa de 1986g, un diámetro exterior de 32cm y un agujero en el centro de la plataforma de 4cm.

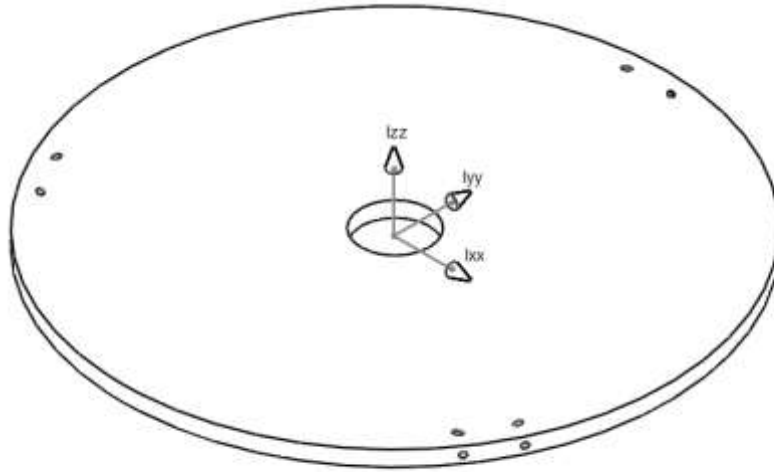


Figura 3.11 Dibujo de la plataforma superior e inferior

Cálculo de I_{xx} e I_{yy}

Ya que la plataforma es una placa circular se puede concluir debido a su simetría que $I_{xx} = I_{yy}$ y se calcula de la siguiente manera de acuerdo a la fórmula:

$$I_{xx} = \frac{1}{4}m(R_{ext}^2 + R_{int}^2) \quad (3.13)$$

Donde:

$$m = 1.986 \text{ Kg}$$

$$R_{ext} = 0.16m \quad (3.14)$$

$$R_{int} = 0.02m$$

Sustituyendo (3.14) en (3.13) se tiene:

$$I_{xx} = \frac{1}{4}(1.986\text{Kg})[(0.16m)^2 + (0.02m)^2]$$

$$I_{xx} = I_{yy} = 0.012909\text{Kg} \cdot m^2 \quad (3.15)$$

Cálculo de I_{zz} .

De acuerdo a la fórmula:

$$I_{zz} = \frac{1}{2} m (R_{ext}^2 + R_{int}^2) \quad (3.16)$$

Dónde:

$$m = 1.986 \text{ Kg}$$

$$R_{ext} = 0.16m \quad (3.17)$$

$$R_{int} = 0.02m$$

Sustituyendo (3.17) en (3.16) se tiene:

$$I_{zz} = \frac{1}{2} (1.986 \text{ Kg}) [(0.16m)^2 + (0.02m)^2]$$
$$I_{zz} = 0.025818 \text{ Kg} \cdot m^2 \quad (3.18)$$

3.7. Aplicación del método experimental en piezas de masas pequeñas

Como se ha explicado en la sección 3.4, la masa del cuerpo C_{1i} es despreciada al compararla con la de la plataforma móvil (cuerpo C_5), este caso se repite con el cuerpo C_{4i} .

A pesar de despreciar la influencia de las masas correspondiente a los cuerpos C_{1i} y C_{4i} se buscó comprobar si el método experimental era capaz de determinar fiablemente los momentos de inercia para objetos con masas pequeñas o bien, menores a 150g. lo que de acuerdo al autor, nos obligaría a diseñar otra nueva plataforma para dichos objetos y poder seguir manteniendo la relación de 10:1 entre la masa del objeto y la plataforma.

Dicha condición limitó el diseño de la plataforma a poseer una masa no mayor a 15g. Ésta condición por si misma redujo bastante el radio de la plataforma aunque a pesar de eso se tuvo que reducir aún más para evitar pandearse ante el peso del objeto que sostenía.

Al montar la plataforma con un radio final de 2.65cm , de inmediato se hicieron notar los problemas de la nueva adaptación del método, ya que al contar con un radio tan pequeño resultó muy difícil mantener la horizontalidad de la plataforma necesaria para garantizar que el momento de inercia que se calcula sea efectivamente el de un eje con respecto al centro de masa del objeto.

Se hizo la misma prueba de calibración a este nuevo montaje justo como se explicó en la sección 3.3, sólo que ahora se utilizó un cilindro hueco de bronce con una masa $m = 55.65\text{g}$ ya que tiene el mismo orden que los cuerpos C_{1i} y C_{4i} .

El resultado arrojado por el método analítico y la implementación del software de CAD al calcular el momento de inercia I_{yy} correspondiente al sistema mostrado en la Figura 3.12, resultó ser de $0.00000500\text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ mientras que el del método experimental resultó ser de $0.00003984\text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ lo que da como resultado un error inaceptable de 696.8%.

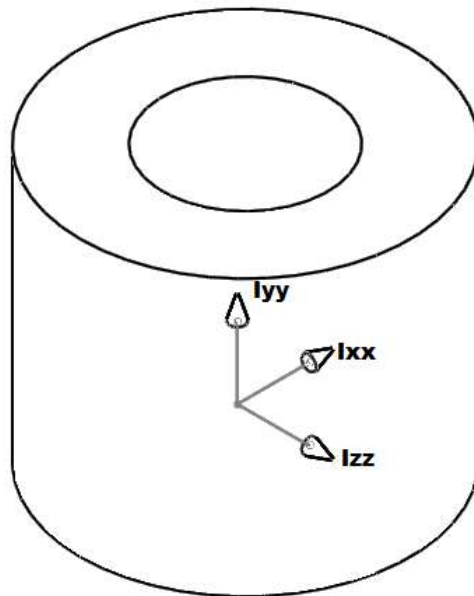


Figura 3.12 Cilindro hueco de bronce

Capítulo 4

Análisis Dinámico

4.1 Introducción

En éste capítulo se realiza el análisis dinámico del manipulador utilizando el algoritmo recursivo de Newton-Euler, éste hace referencia al estudio del manipulador incorporando todos los momentos y fuerzas que actúan sobre los eslabones. Las ecuaciones obtenidas con dicho método incluirán todos los momentos y fuerzas restrictivas debidas a las articulaciones entre dos eslabones adyacentes, así como las fuerzas activas, producidas por los torques de los actuadores y los propios pesos de los eslabones y las fuerzas inerciales.

El método se denomina recursivo debido a que calcula de manera progresiva o adelantada las velocidades, fuerzas y demás características dinámicas de los eslabones anteriores o posteriores al que se desea calcular su estado dinámico ante alguna sollicitación.

Debido a la simetría de las cadenas cinemáticas del manipulador se estudiará una sola como se muestra en la Figura 4.1 donde se puede observar cada uno de los nombres de los cuerpos del manipulador.

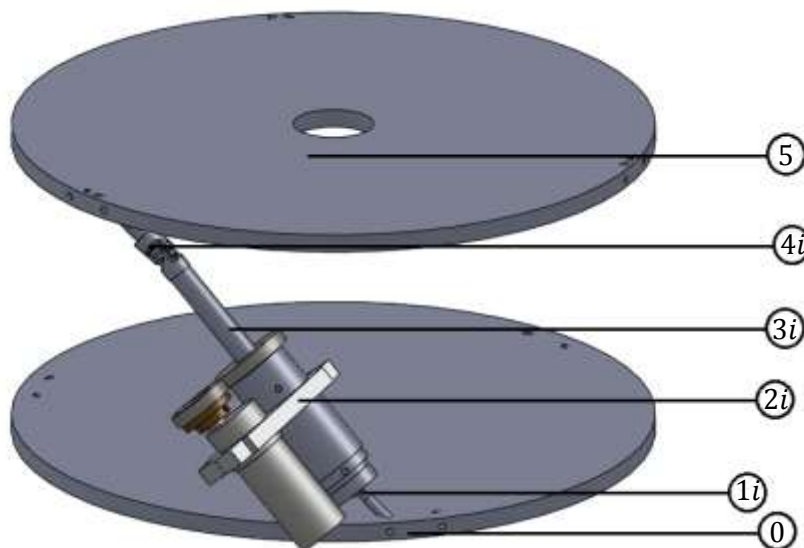


Figura 4.1 Cuerpos del manipulador

Se necesita definir a la matriz Q_m^n como la matriz de transformación de torses que proyecta la base m a la n , así como también la matriz R_m^n como la matriz de rotación que proyecta la base m a la n , estas transformaciones son indispensables, ya que en el análisis dinámico, los torses deben estar definidos en un mismo sistema para poder sumarse, obteniendo entonces:

$$Q_m^n = \begin{bmatrix} R_m^n & 0 \\ S_m^n R_m^n & R_m^n \end{bmatrix}$$

Las matrices de rotación se definen de la siguiente manera:

$$R_{z4}(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x \end{bmatrix}, R_{z5}(\theta_y) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y \end{bmatrix}, R_{z6}(\theta_z) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz S_m^n es una matriz que representa la operación de producto cruz y equivalen a $S = r \times$:

$$S_{z1}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix}, S_{z2}(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix}, S_{z3}(z) = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 \\ z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{G1i} = -m_{1i}a_{G1i}^{4i}$$

$$M_{O4i} = -\left(J_{G1i}\alpha_{o1i}^{4i} + \omega_{o1i}^{4i} \times (J_{G1i}\omega_{o1i}^{4i}) + r_{G1i}^{4i} \times (m_{1i}a_{G1i}^{4i})\right) \quad (4.3)$$

Ya que el cuerpo 1*i* se encuentra en condiciones estáticas respecto a la placa inferior del manipulador, los términos de velocidades y aceleraciones son iguales a cero, haciendo que el torsor de fuerza inercial tenga un valor de cero.

$$F_{1i}^I = 0 \quad (4.4)$$

Además, se definen los términos de los torsesores de fuerzas de acción y torsor de fuerzas reactivas como sigue:

$$W_{1i} = [0, 0, -m_{1i}g, 0, 0, 0]^T$$

$$F_{0,1i} = [F_{0,1xi}, F_{0,1yi}, F_{0,1zi}, M_{0,1xi}, M_{0,1yi}, M_{0,1zi}]^T \quad (4.5)$$

$$F_{1,2i} = [F_{1,2xi}, F_{1,2yi}, F_{1,2zi}, 0, 0, 0]^T$$

Pueden ahora escribirse las expresiones correspondientes para Q_o^{4i} y Q_{7i}^{4i} como sigue:

$$Q_o^{4i} = \begin{bmatrix} R_o^{4i} & 0 \\ S_o^{4i}R_o^{4i} & R_o^{4i} \end{bmatrix}$$

$$Q_{7i}^{4i} = \begin{bmatrix} R_{7i}^{4i} & 0 \\ S_{7i}^{4i}R_{7i}^{4i} & R_{7i}^{4i} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Donde:

$$R_{4i}^o = R_{OC}R_{z6(\delta1Bi)}R_{z6(\delta32i)}R_{z4(\delta43i)}$$

$$R_{OC} = R_{z6(\psi c)}R_{z4(\theta c)}R_{z6(\phi c)}$$

$$R_{4i}^o = R_{OC}R_{z6(\delta1Bi+\delta32i)}R_{z4(\delta43i)} \quad (4.7)$$

$$R_o^{4i} = (R_{4i}^o)^T = R_{z4(\delta43i)}^T R_{z6(\delta1Bi+\delta32i)}^T R_{OC}^T$$

$$R_{OC}^T = R_{CO} = R_{z6(-\phi c)}R_{z4(-\theta c)}R_{z6(-\psi c)}$$

$$R_o^{4i} = R_{z4(-\delta43i)}R_{z6(-(\delta1Bi+\delta32i))}R_{CO}$$

$$R_{7i}^{4i} = R_{z6(\delta65i)}R_{z6(\theta76i)}$$

También:

$$S_o^{4i} = S_{G1i} = S(x_{G1i}, y_{G1i}, z_{G1i}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G1i} & y_{G1i} \\ z_{G1i} & 0 & -x_{G1i} \\ y_{G1i} & x_{G1i} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{7i}^{4i} = S(0,0, z_{54i}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{54i} & 0 \\ z_{54i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

4.3 Análisis del cuerpo 2i

A continuación se presenta el análisis del cuerpo 2i. La Figura 4.3 muestra su diagrama de cuerpo libre.

4.3.1 Ecuaciones Dinámicas

La suma total de las fuerzas actuando sobre el cuerpo 2i, tenemos:

$$F_{7i}^A + F_{7i}^R + F_{7i}^L = 0 \quad (4.9)$$

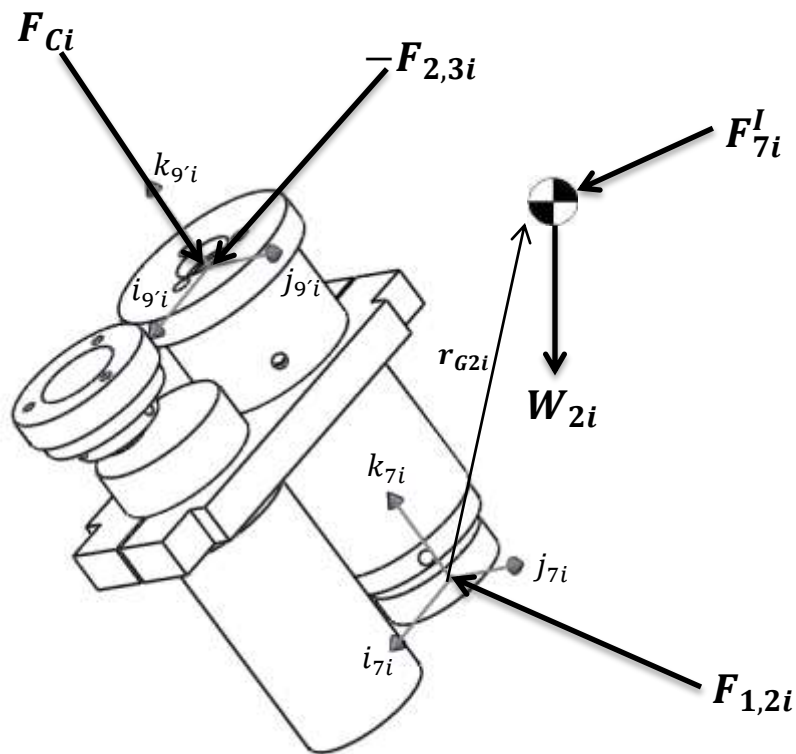


Figura 4.3 Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 2i.

Se definen a cada una de las fuerzas como tursor de fuerzas de acción, tursor de fuerzas reactivas y tursor de fuerzas de inercia sobre el cuerpo $2i$, respectivamente, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_{7i}^A &= Q_o^{7i} W_{2i} + Q_{9i}^{7i} F_{Ci} \\ F_{7i}^R &= F_{1,2i} - Q_{9i}^{7i} F_{2,3i} \\ F_{7i}^I &= [F_{G2i}, M_{O7i}]^T \end{aligned} \quad (4.10)$$

El término F_{Ci} se define como el tursor de empuje sobre el vastago del actuador.

A continuación se definen los componentes del tursor de fuerza inercial:

$$\begin{aligned} F_{G2i} &= -m_{2i} a_{G2i}^{7i} \\ M_{O7i} &= -\left(J_{G2i} \alpha_{o2i}^{7i} + \omega_{o2i}^{7i} \times (J_{G2i} \omega_{o2i}^{7i}) + r_{G2i}^{7i} \times (m_{2i} a_{G2i}^{7i}) \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Donde J_{G2i} se define como la matriz de inercias del cuerpo $2i$ de la siguiente manera:

$$J_{G2i} = \begin{bmatrix} J_{2ixx} & -J_{2ixy} & -J_{2ixz} \\ -J_{2iyx} & J_{2iyy} & -J_{2iyz} \\ -J_{2izx} & -J_{2izy} & J_{2izz} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Además se definen los términos de los tursos de fuerzas de acción y tursor de fuerzas reactivas como sigue:

$$\begin{aligned} W_{2i} &= [0, 0, -m_{2i}g, 0, 0, 0]^T \\ F_{2,3i} &= [F_{2,3xi}, F_{2,3yi}, 0, M_{2,3xi}, M_{2,3yi}, M_{2,3zi}]^T \\ F_{Ci} &= [0, 0, F_{Czi}, 0, 0, 0]^T \end{aligned} \quad (4.13)$$

Las expresiones correspondientes para Q_o^{7i} y Q_{9i}^{7i} se escriben como sigue:

$$\begin{aligned} Q_o^{7i} &= \begin{bmatrix} R_o^{7i} & 0 \\ S_o^{7i} R_o^{7i} & R_o^{7i} \end{bmatrix} \\ Q_{9i}^{7i} &= \begin{bmatrix} R_{9i}^{7i} & 0 \\ S_{9i}^{7i} R_{9i}^{7i} & R_{9i}^{7i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 R_{7i}^o &= R_{OC} R_{z6(\delta 1Bi)} R_{z6(\delta 32i)} R_{z4(\delta 43i)} R_{z6(\delta 65i)} R_{z6(\theta 76i)} \\
 R_{7i}^o &= R_{OC} R_{z6(\delta 1Bi+\delta 32i)} R_{z4(\delta 43i)} R_{z6(\delta 65i+\theta 76i)} \\
 R_o^{7i} &= (R_{7i}^o)^T
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
 (R_{7i}^o)^T &= R_{z6(\delta 65i+\theta 76i)}^T R_{z4(\delta 43i)}^T R_{z6(\delta 1Bi+\delta 32i)}^T R_{OC}^T \\
 (R_{7i}^o)^T &= R_{z6(-(\delta 65i+\theta 76i))} R_{z4(-\delta 43i)} R_{z6(-(\delta 1Bi+\delta 32i))} R_{CO} \\
 R_o^{7i} &= R_{z5(\theta 87i)} R_{z4(\theta 98i)}
 \end{aligned}$$

También:

$$\begin{aligned}
 S_o^{7i} = S_{G2i} = S(x_{G2i}, y_{G2i}, z_{G2i}) &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{G2i} & y_{G2i} \\ z_{G2i} & 0 & -x_{G2i} \\ y_{G2i} & x_{G2i} & 0 \end{bmatrix} \\
 S_o^{7i} = S(0, 0, z_{9'i}) &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{9'i} & 0 \\ z_{9'i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

4.3.2 Ecuaciones Cinemáticas

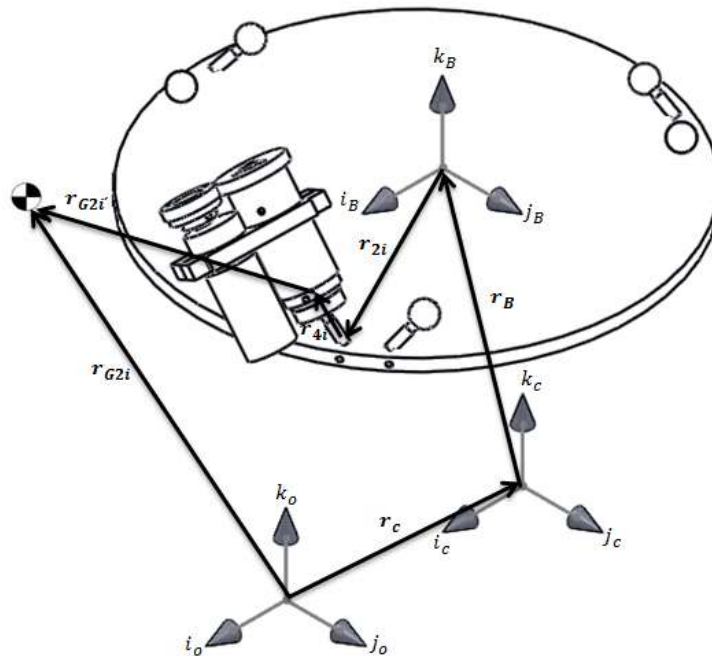


Figura 4.4 Centro de gravedad del cuerpo 2i

De acuerdo a la Figura 4.4, se puede ubicar al centro de gravedad del cuerpo $2i$ con la siguiente ecuación vectorial de posición definida en la base inercial:

$$r_{G2i}^o = r_c^o + r_B^o + r_{2i}^o + r_{4i}^o + r_{G2i}^o \quad (4.17)$$

Donde:

$$r_{G2i}^o = R_{7i}^o r_{G2i}^{7i}$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (4.17) y considerando a r_c^o , r_B^o , r_{2i}^o y r_{4i}^o como constantes, se obtiene la ecuación de la velocidad del centro de masa del cuerpo $2i$ definida en la base inercial:

$$\begin{aligned} v_{G2i}^o &= v_{G2i}^o \\ v_{G2i}^o &= \omega_{o2i}^o \times r_{G2i}^o \end{aligned} \quad (4.18)$$

El vector de velocidad angular ω_{o2i}^o se explica de manera análoga al vector de posición r_{G2i}^o ya que en el cálculo de la cinemática, los valores de las posiciones, velocidades y aceleraciones corresponden a los sistemas locales

$$\omega_{o2i}^o = R_{7i}^o \omega_{G2i}^{7i} \quad (4.19)$$

El vector ω_{G2i}^{7i} hace referencia al vector de velocidad angular definido en el sistema local $7i$ del cuerpo $2i$ que ya ha sido calculado en el análisis cinemático, y por lo tanto puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\omega_{G2i}^{7i} = \dot{\theta}_{76i} k_{6i}^{6i} = \dot{\theta}_{76i} k_{7i}^{7i} = \dot{\theta}_{76i} [0,0,1]^T \quad (4.20)$$

La aceleración del centro de gravedad se obtiene al derivar con respecto al tiempo la ecuación (4.18):

$$\begin{aligned} a_{G2i}^o &= a_{G2i}^o \\ a_{G2i}^o &= \alpha_{o2i}^o \times r_{G2i}^o + \omega_{o2i}^o \times (\omega_{o2i}^o \times r_{G2i}^o) \end{aligned} \quad (4.21)$$

El vector de aceleración angular inercial para el cuerpo $2i$ se define como:

$$\alpha_{o2i}^o = R_{7i}^o \alpha_{G2i}^{7i} \quad (4.22)$$

Donde α_{G2i}^{7i} se define en la base local $7i$:

$$\alpha_{G2i}^{7i} = \ddot{\alpha}_{76i} k_{6i}^{6i} = \ddot{\alpha}_{76i} k_{7i}^{7i} = \ddot{\alpha}_{76i} [0,0,1]^T \quad (4.23)$$

Se ha logrado encontrar las velocidades y aceleraciones para el centro de gravedad referidas a la base inercial, a continuación se proyectaran sobre la base local del cuerpo $2i$ con la ayuda de las matrices de rotación.

Al proyectar ω_{o2i}^o en la base local $7i$ se tiene:

$$\begin{aligned}\omega_{o2i}^{7i} &= R_o^{7i} \omega_{o2i}^o \\ \omega_{o2i}^{7i} &= R_o^{7i} R_{7i}^o \omega_{G2i}^{7i} \\ \omega_{o2i}^{7i} &= R_{7i}^{7i} \omega_{2i}^{7i} \\ \omega_{o2i}^{7i} &= \omega_{2i}^{7i}\end{aligned}\tag{4.24}$$

Al proyectar α_{o2i}^o en la base local $7i$ se tiene:

$$\begin{aligned}\alpha_{o2i}^{7i} &= R_o^{7i} \alpha_{o2i}^o \\ \alpha_{o2i}^{7i} &= R_o^{7i} R_{7i}^o \alpha_{G2i}^{7i} \\ \alpha_{o2i}^{7i} &= R_{7i}^{7i} \alpha_{2i}^{7i} \\ \alpha_{o2i}^{7i} &= \alpha_{2i}^{7i}\end{aligned}\tag{4.25}$$

Al proyectar a_{G2i}^o en la base local $7i$ se tiene:

$$\begin{aligned}a_{G2i}^{7i} &= R_o^{7i} a_{G2i}^o \\ a_{G2i}^{7i} &= R_o^{7i} \alpha_{o2i}^o \times R_o^{7i} r_{G2i}^o + R_o^{7i} \omega_{o2i}^o \times (R_o^{7i} \omega_{o2i}^o \times R_o^{7i} r_{G2i}^o) \\ a_{G2i}^{7i} &= \alpha_{2i}^{7i} \times r_{G2i}^{7i} + \omega_{2i}^{7i} \times (\omega_{2i}^{7i} \times r_{G2i}^{7i})\end{aligned}\tag{4.26}$$

4.4 Análisis del cuerpo $3i$

A continuación se presenta el análisis del cuerpo $3i$. La Figura 4.5 muestra su diagrama de cuerpo libre.

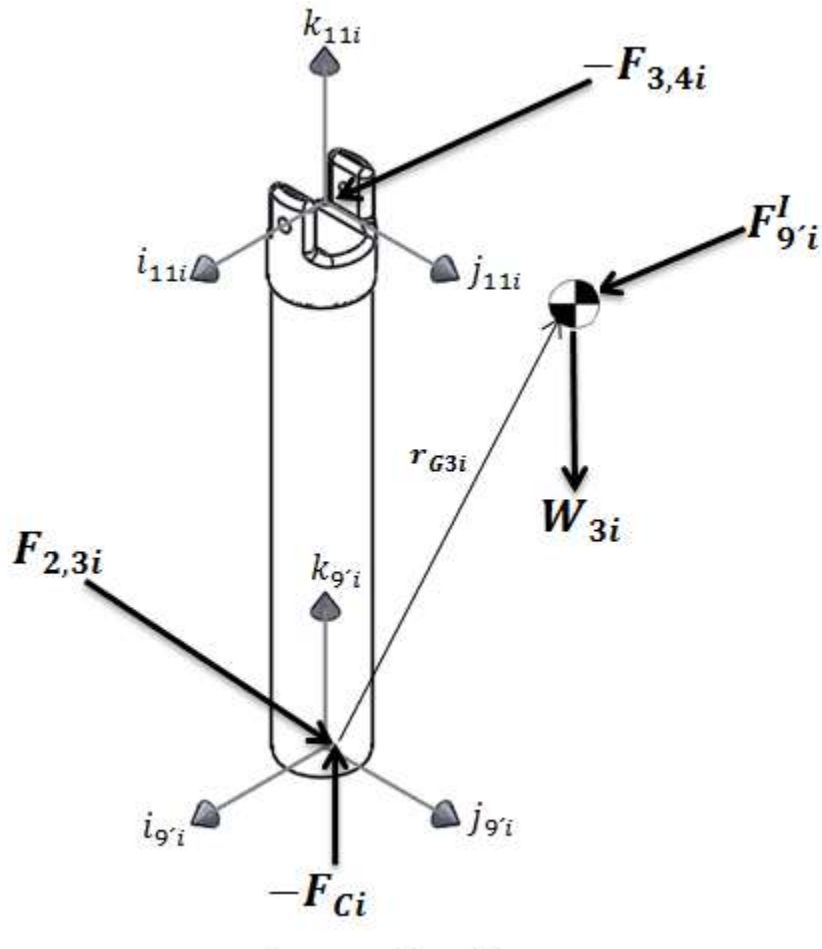


Figura 4.5 Diagrama de cuerpo libre del cuerpo $3i$

4.4.1 Ecuaciones Dinámicas

La suma total de las fuerzas actuando sobre el cuerpo $3i$, tenemos:

$$F_{9'i}^A + F_{9'i}^R + F_{9'i}^I = 0 \quad (4.27)$$

Se definen a cada una de las fuerzas como tursor de fuerzas de acción, tursor de fuerzas reactivas y tursor de fuerzas de inercia sobre el cuerpo $3i$, respectivamente, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 F_{9'i}^A &= -F_{Ci} + Q_o^{9'i} W_{3i} \\
 F_{9'i}^R &= F_{2,3i} - Q_{11i}^{9'i} F_{3,4i} \\
 F_{9'i}^I &= [F_{G3i}, M_{O9'i}]^T
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

A continuación se definen los componentes del torsor de fuerza inercial:

$$\begin{aligned}
 F_{G3i} &= -m_{3i} a_{G3i}^{9'i} \\
 M_{O9'i} &= -\left(J_{G3i} \alpha_{o3i}^{9'i} + \omega_{o3i}^{9'i} \times (J_{G3i} \omega_{o3i}^{9'i}) + r_{G3i}^{9'i} \times (m_{3i} a_{G3i}^{9'i}) \right)
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Donde J_{G3i} se define como la matriz de inercias del cuerpo $3i$ de la siguiente manera:

$$J_{G3i} = \begin{bmatrix} J_{3ixx} & -J_{3ixy} & -J_{3ixz} \\ -J_{3iyx} & J_{3iyy} & -J_{3iyz} \\ -J_{3izx} & -J_{3izy} & J_{3izz} \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Además, se definen los términos de los torses de fuerzas de acción y de fuerzas reactivas como sigue:

$$\begin{aligned}
 W_{3i} &= [0, 0, -m_{3i}g, 0, 0, 0]^T \\
 F_{3,4i} &= [F_{3,4xi}, F_{3,4yi}, F_{3,4zi}, 0, 0, M_{3,4zi}]^T
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Las expresiones correspondientes para $Q_o^{9'i}$ y $Q_{11i}^{9'i}$ se escriben como sigue:

$$\begin{aligned}
 Q_o^{9'i} &= \begin{bmatrix} R_o^{9'i} & 0 \\ S_o^{9'i} R_o^{9'i} & R_o^{9'i} \end{bmatrix} \\
 Q_{11i}^{9'i} &= \begin{bmatrix} R_{11i}^{9'i} & 0 \\ S_{11i}^{9'i} R_{11i}^{9'i} & R_{11i}^{9'i} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Donde La matriz $R_o^{9'i}$ se define de la siguiente manera:

$$R_o^{9'i} = R_{z4(-\theta_{98i})} R_{z5(-\theta_{87i})} R_{z6(-(\delta_{65i} + \theta_{76i}))} R_{z4(-\delta_{43i})} R_{z6(-(\delta_{1Bi} + \delta_{32i}))} R_{Co} \tag{4.33}$$

Por otro lado, la matriz $R_{11i}^{9'i}$ se define como:

$$R_{11i}^{9'i} = R_{z4}(\theta_{1110i}) \tag{4.34}$$

También:

$$S_o^{9'i} = S_{G3i} = S(x_{G3i}, y_{G3i}, z_{G3i}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G3i} & y_{G3i} \\ z_{G3i} & 0 & -x_{G3i} \\ y_{G3i} & x_{G3i} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$S_{11i}^{9'i} = S(0, 0, z_{9'i}) = \begin{bmatrix} 0 & -(z_{109i} - z_{9'i}) & 0 \\ (z_{109i} - z_{9'i}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.4.2 Ecuaciones Cinemáticas

De acuerdo a la Figura 4.6, se puede ubicar al centro de gravedad del cuerpo 3i de acuerdo a la siguiente ecuación vectorial de posición definida en la base inercial:

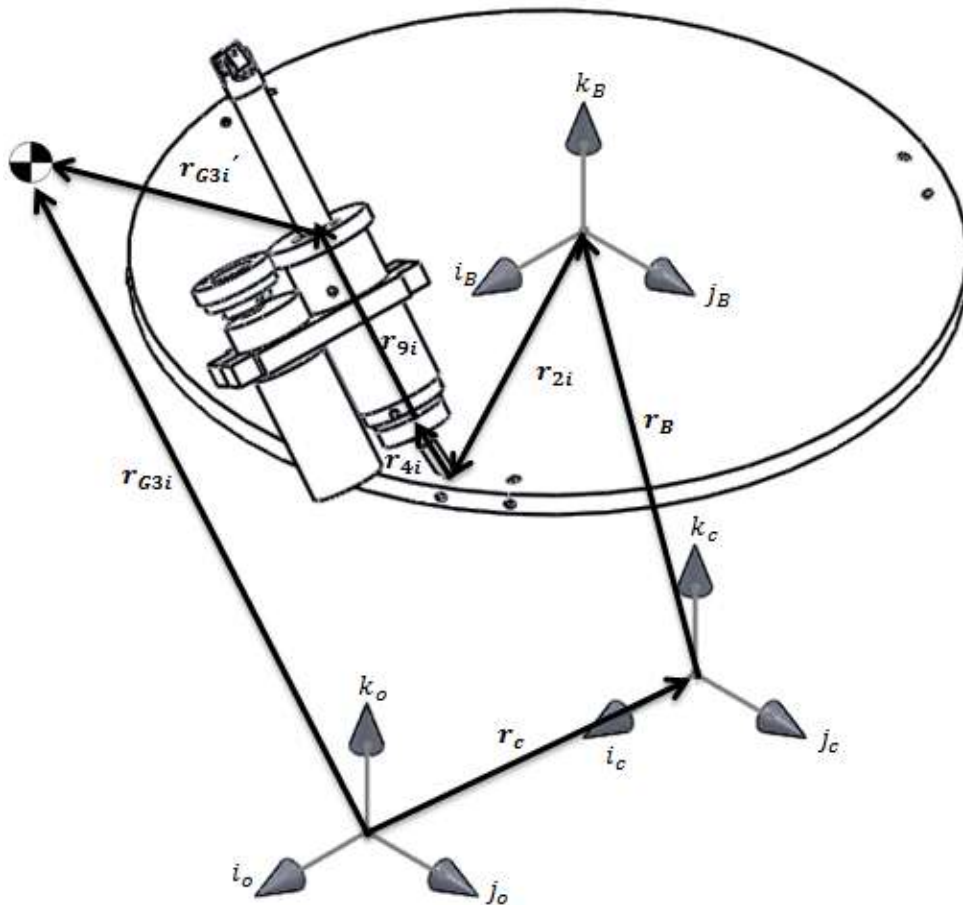


Figura 4.6 Centro de gravedad del cuerpo 3i

$$r_{G3i}^o = r_c^o + r_B^o + r_{2i}^o + r_{4i}^o + r_{9i}^o + r_{G3i'}^o \quad (4.36)$$

Donde:

$$r_{9i}^o = R_{9i}^o r_{9i}^{9i}$$

$$r_{G3i'}^o = R_{9i}^o r_{G3i'}^{9i}$$

Para obtener las ecuaciones de velocidad del centro de masa, debe entenderse que la velocidad del cuerpo anterior al cuerpo en estudio, afecta directamente la velocidad de su centro de masa. Los valores de r_c^o , r_B^o , y r_{2i}^o siguen considerándose como constantes, así que al derivar con respecto al tiempo a la ecuación (4.36), sus derivadas valen cero, obteniendo:

$$v_{G3i}^o = v_{4i}^o + v_{9i}^o + v_{G3i'}^o$$

De acuerdo a lo que se ha explicado, el vector de velocidad v_{4i}^o no afecta la velocidad del centro de masa del cuerpo 3i, pero el vector de velocidad v_{9i}^o proporciona una componente de velocidad que debe ser considerada al calcular la velocidad del centro de masa, quedando entonces:

$$v_{G3i}^o = v_{9i}^o + v_{G3i'}^o \quad (4.37)$$

Al explicar cada de una de las partes de la ecuación (4.37) se tiene que:

$$v_{9i}^o = \omega_{o2i}^o \times r_{G2i'}^o$$

$$v_{G3i'}^o = v_{o3i}^o + \omega_{o3i}^o \times r_{G3i'}^o$$

$$v_{o3i}^o = R_{9i}^o v_{3i}^{9i} \quad (4.38)$$

$$v_{3i}^{9i} = \dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} = \dot{z}_{10,9i} [0,0,1]^T$$

$$\omega_{o3i}^o = \omega_{o2i}^o$$

La aceleración del centro de gravedad se obtiene al derivar con respecto al tiempo la ecuación (4.37):

$$a_{G3i}^o = a_{9i}^o + a_{G3i'}^o$$

$$a_{9i}^o = \alpha_{o2i}^o \times r_{9i}^o + \omega_{o2i}^o \times (\omega_{o2i}^o \times r_{9i}^o) \quad (4.39)$$

$$a_{G3i'}^o = a_{o3i}^o + 2\omega_{o3i}^o \times v_{o3i}^o + \alpha_{o3i}^o \times r_{G3i'}^o + \omega_{o3i}^o \times (\omega_{o3i}^o \times r_{G3i'}^o)$$

El vector de aceleración angular inercial y aceleración lineal inercial para el cuerpo $3i$ se definen, en ese orden, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\alpha_{o3i}^o &= \alpha_{o2i}^o \\ a_{o3i}^o &= R_{9i}^o a_{3i}^{9i}\end{aligned}\quad (4.40)$$

Donde a_{3i}^{9i} se define en la base local $9i$:

$$a_{3i}^{9i} = \ddot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} = \ddot{z}_{10,9i} [0,0,1]^T \quad (4.41)$$

Se ha logrado encontrar las velocidades y aceleraciones para el centro de gravedad definidas en la base inercial, a continuación se proyectaran sobre la base local del cuerpo $3i$ con la ayuda de las matrices de rotación.

Al proyectar ω_{o3i}^o en la base local $9i$ se tiene:

$$\begin{aligned}\omega_{o3i}^{9i} &= R_o^{9i} \omega_{o3i}^o \\ \omega_{o3i}^{9i} &= R_o^{9i} R_{7i}^o \omega_{G2i}^{7i} \\ \omega_{o3i}^{9i} &= R_{7i}^{9i} \omega_{3i}^{7i} \\ \omega_{o3i}^{9i} &= \omega_{3i}^{9i}\end{aligned}\quad (4.42)$$

Al proyectar α_{o3i}^o en la base local $9i$ se tiene:

$$\begin{aligned}\alpha_{o3i}^{9i} &= R_o^{9i} \alpha_{o3i}^o \\ \alpha_{o3i}^{9i} &= R_o^{9i} R_{7i}^o \alpha_{2i}^{7i} \\ \alpha_{o3i}^{9i} &= R_{7i}^{9i} \alpha_{3i}^{7i} \\ \alpha_{o3i}^{9i} &= \alpha_{3i}^{9i}\end{aligned}\quad (4.43)$$

Al proyectar v_{G3i}^o en la base local $9i$ se tiene:

$$\begin{aligned}v_{G3i}^{9i} &= R_o^{9i} v_{G3i}^o \\ v_{G3i}^{9i} &= R_o^{9i} v_{o3i}^o + R_o^{9i} \omega_{o3i}^o \times R_o^{9i} r_{G3i}^o \\ v_{G3i}^{9i} &= v_{o3i}^{9i} + \omega_{o3i}^{9i} \times r_{G3i}^{9i}\end{aligned}\quad (4.44)$$

Al proyectar a_{G3i}^o en la base local $9i$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 a_{G3i}^{9i} &= a_{9i}^{9i} + a_{G3i'}^{9i} \\
 a_{9i}^{9i} &= R_o^{9i} a_{9i}^o = R_o^{9i} \alpha_{o2i}^o \times R_o^{9i} r_{9i}^o + R_o^{9i} \omega_{o2i}^o \times (R_o^{9i} \omega_{o2i}^o \times R_o^{9i} r_{9i}^o) \\
 a_{9i}^{9i} &= \alpha_{2i}^{9i} \times r_{9i}^{9i} + \omega_{2i}^{9i} \times (\omega_{2i}^{9i} \times r_{9i}^{9i}) \\
 a_{G3i'}^{9i} &= R_o^{9i} a_{G3i'}^o \tag{4.45} \\
 a_{G3i'}^{9i} &= R_o^{9i} a_{o3i}^o + 2R_o^{9i} \omega_{o3i}^o \times R_o^{9i} v_{o3i}^o + R_o^{9i} \alpha_{o3i}^o \times R_o^{9i} r_{G3i'}^o \\
 &\quad + R_o^{9i} \omega_{o3i}^o (R_o^{9i} \omega_{o3i}^o \times R_o^{9i} r_{G3i'}^o) \\
 a_{G3i'}^{9i} &= a_{3i}^{9i} + 2\omega_{3i}^{9i} \times v_{3i}^{9i} + \alpha_{3i}^{9i} \times r_{G3i'}^{9i} + \omega_{3i}^{9i} (\omega_{3i}^{9i} \times r_{G3i'}^{9i})
 \end{aligned}$$

4.5 Análisis del cuerpo 4i

Acontinuación se presenta el análisis del cuerpo 4i. La Figura 4.7 muestra su diagrama de cuerpo libre.

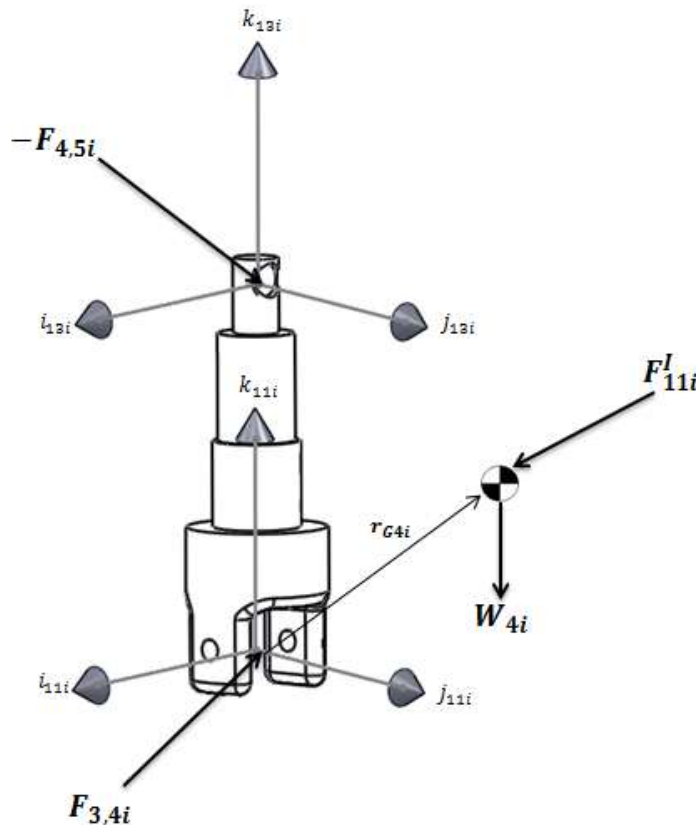


Figura 4.7 Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 4i

4.5.1 Ecuaciones Dinámicas

La suma total de las fuerzas actuando sobre el cuerpo $4i$, tenemos:

$$F_{11i}^A + F_{11i}^R + F_{11i}^I = 0 \quad (4.46)$$

Se definen a cada una de las fuerzas: tórsor de fuerzas de acción, tórsor de fuerzas reactivas y tórsor de fuerzas de inercia sobre el cuerpo $4i$, respectivamente, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_{11i}^A &= Q_o^{11i} W_{4i} \\ F_{11i}^R &= F_{3,4i} - Q_{13i}^{11i} F_{4,5i} \\ F_{11i}^I &= [F_{G4i}, M_{O11i}]^T \end{aligned} \quad (4.47)$$

A continuación se definen los componentes del tórsor de fuerza inercial:

$$\begin{aligned} F_{G4i} &= -m_{4i} a_{G4i}^{11i} \\ M_{O11i} &= -\left(J_{G4i} \alpha_{o4i}^{11i} + \omega_{o4i}^{11i} \times (J_{G4i} \omega_{o4i}^{11i}) + r_{G4i}^{11i} \times (m_{4i} a_{G4i}^{11i}) \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Donde J_{G4i} se define como la matriz de inercia del cuerpo $4i$ de la siguiente manera:

$$J_{G4i} = \begin{bmatrix} J_{4ixx} & -J_{4ixy} & -J_{4ixz} \\ -J_{4iyx} & J_{4iyy} & -J_{4iyz} \\ -J_{4izx} & -J_{4izy} & J_{4izz} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Además, se definen los términos de los tórsos de fuerzas de acción y tórsor de fuerzas reactivas como sigue:

$$\begin{aligned} W_{4i} &= [0, 0, -m_{4i}g, 0, 0, 0]^T \\ F_{45i} &= [F_{45xi}, F_{45yi}, F_{45zi}, M_{45xi}, M_{45yi}, M_{45zi}]^T \end{aligned} \quad (4.50)$$

Las expresiones correspondientes para Q_o^{11i} y Q_{13i}^{11i} se escriben como sigue:

$$\begin{aligned} Q_o^{11i} &= \begin{bmatrix} R_o^{11i} & 0 \\ S_o^{11i} R_o^{11i} & R_o^{11i} \end{bmatrix} \\ Q_{13i}^{11i} &= \begin{bmatrix} R_{13i}^{11i} & 0 \\ S_{13i}^{11i} R_{13i}^{11i} & R_{13i}^{11i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 R_{11i}^o &= R_{OC}R_{z6(\delta 1Bi)}R_{z6(\delta 32i)}R_{z4(\delta 43i)}R_{z6(\delta 65i)}R_{z6(\theta 76i)}R_{z5(\theta 87i)}R_{z4(\theta 98i)}R_{z4(\theta 1110i)} \\
 R_{11i}^o &= R_{OC}R_{z6(\delta 1Bi+\delta 32i)}R_{z4(\delta 43i)}R_{z6(\delta 65i+\theta 76i)}R_{z5(\theta 87i)}R_{z4(\theta 98i+\theta 1110i)} \\
 R_o^{11i} &= (R_{11i}^o)^T \tag{4.52} \\
 R_o^{11i} &= R_{z4(\theta 98i+\theta 1110i)}^T R_{z5(\theta 87i)}^T R_{z6(\delta 65i+\theta 76i)}^T R_{z4(\delta 43i)}^T R_{z6(\delta 1Bi+\delta 32i)}^T R_{OC}^T \\
 R_o^{11i} &= R_{z4(-(\theta 98i+\theta 1110i))}R_{z5(-\theta 87i)}R_{z6(-(\delta 65i+\theta 76i))}R_{z4(-\delta 43i)}R_{z6(-(\delta 1Bi+\delta 32i))}R_{CO} \\
 R_{13i}^{11i} &= R_{z5(\theta 1211i)}
 \end{aligned}$$

También:

$$S_o^{11i} = S_{G4i} = S(x_{G4i}, y_{G4i}, z_{G4i}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G4i} & y_{G4i} \\ z_{G4i} & 0 & -x_{G4i} \\ y_{G4i} & x_{G4i} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

$$S_{13i}^{11i} = S(0,0, z_{1312i}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{1312i} & 0 \\ z_{1312i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.5.2 Ecuaciones Cinemáticas

De acuerdo a la Figura 4.8, se puede ubicar al centro de gravedad del cuerpo $4i$ de acuerdo a la siguiente ecuación vectorial de posición definida en la base inercial:

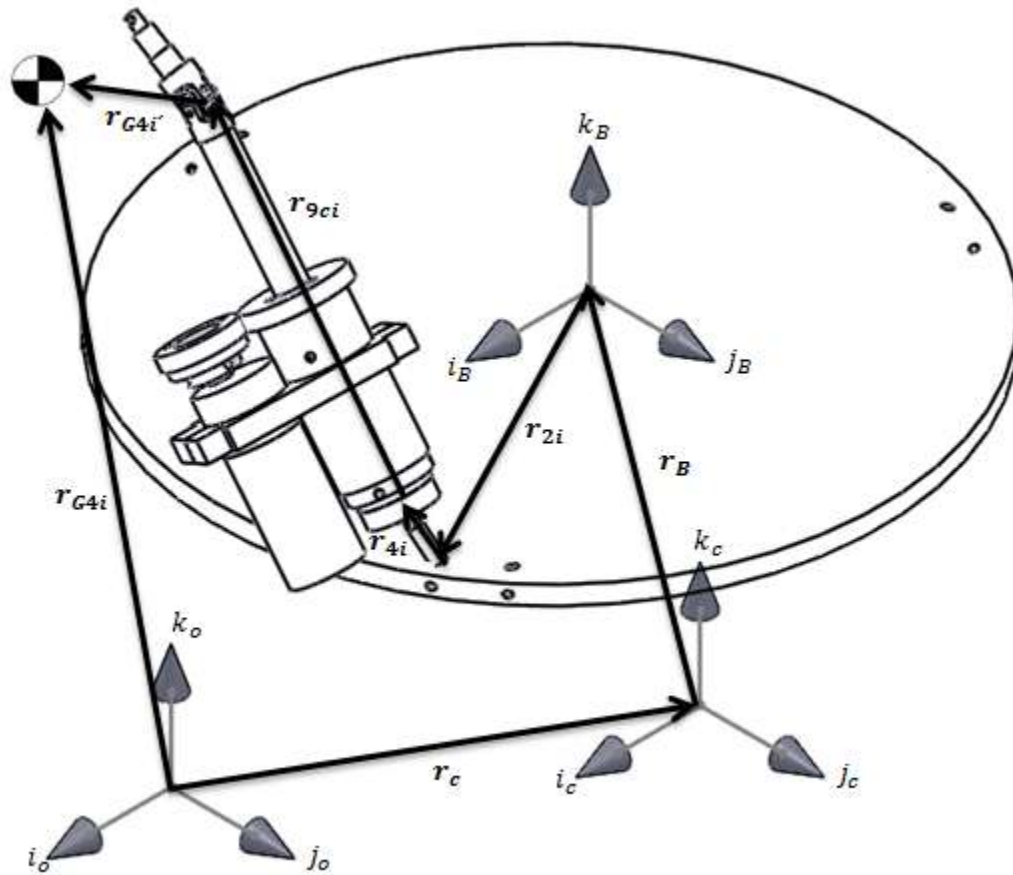


Figura 4.8 Centro de gravedad del cuerpo 4i

$$r_{G4i}^o = r_c^o + r_B^o + r_{2i}^o + r_{4i}^o + r_{9ci}^o + r_{G4i'}^o \quad (4.54)$$

Donde:

$$r_{9ci}^o = R_{9i}^o r_{9ci}^{9i}$$

$$r_{G4i'}^o = R_{11i}^o r_{G4i'}^{11i}$$

La velocidad del cuerpo anterior al cuerpo en estudio, afecta directamente la velocidad del centro de masa de éste. Los valores de r_c^o , r_B^o , y r_{2i}^o siguen considerándose como constantes, así que al derivar con respecto al tiempo a la ecuación (4.54), sus derivadas valen cero, obteniendo:

$$v_{G4i}^o = v_{4i}^o + v_{9ci}^o + v_{G4i'}^o \quad (4.55)$$

De acuerdo a lo que se ha explicado, el vector de velocidad v_{4i}^o no afecta la velocidad del centro de masa del cuerpo $4i$, pero el vector de velocidad v_{9ci}^o proporciona una componente de velocidad que debe ser considerada al calcular la velocidad del centro de masa, quedando entonces:

$$v_{G4i}^o = v_{9ci}^o + v_{G4i'}^o \quad (4.56)$$

Al explicar cada de una de las partes de la ecuación (4.56) se tiene que:

$$v_{9ci}^o = v_{3i}^o + \omega_{o3i}^o \times r_{9ci}^o \quad (4.57)$$

$$v_{G4i'}^o = \omega_{o4i}^o \times r_{G4i'}^o$$

Al definir el vector de velocidad angular ω_{o4i}^o debe considerarse que la velocidad angular del centro de masa del cuerpo $4i$ está siendo afectada por la velocidad angular del cuerpo anterior, quedando de la siguiente forma:

$$\omega_{o4i}^o = \omega_{3i}^o + \omega_{4i}^o \quad (4.58)$$

$$\omega_{o4i}^o = R_{9i}^o \omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^o \omega_{4i}^{11i}$$

Donde ω_{4i}^{11i} se define en la base local $11i$:

$$\omega_{4i}^{11i} = \dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i} = \dot{\theta}_{11,10i} i_{10i}^{10i} = \dot{\theta}_{11,10i} [1,0,0]^T \quad (4.59)$$

La aceleración del centro de gravedad se obtiene al derivar con respecto al tiempo la ecuación (4.56):

$$a_{G4i}^o = a_{9ic}^o + a_{G4i'}^o$$

$$a_{9ci}^o = a_{o3i}^o + 2\omega_{o3i}^o \times v_{o3i}^o + \alpha_{o3i}^o \times r_{9ci}^o + \omega_{o3i}^o \times (\omega_{o3i}^o \times r_{9ci}^o) \quad (4.60)$$

$$a_{G4i'}^o = \alpha_{o4i}^o \times r_{G4i'}^o + \omega_{o4i}^o \times (\omega_{o4i}^o \times r_{G4i'}^o)$$

El vector de aceleración angular inercial para el cuerpo $4i$ se define de la siguiente manera:

$$\alpha_{o4i}^o = \alpha_{2i}^o + \alpha_{4i}^o + \omega_{2i}^o \times \omega_{4i}^o$$

$$\alpha_{o4i}^o = R_{9i}^o \alpha_{2i}^{9i} + R_{11i}^o \alpha_{4i}^{11i} + R_{9i}^o \omega_{2i}^{9i} \times R_{11i}^o \omega_{4i}^{11i} \quad (4.61)$$

Donde α_{4i}^{11i} se define en la base local $11i$:

$$\alpha_{4i}^{11i} = \ddot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i} = \ddot{\theta}_{11,10i} i_{10i}^{10i} = \ddot{\theta}_{11,10i} [1,0,0]^T \quad (4.62)$$

Se ha logrado encontrar las velocidades y aceleraciones para el centro de gravedad definidas en la base inercial, a continuación se proyectaran sobre la base local del cuerpo $4i$ con la ayuda de las matrices de rotación.

Al proyectar ω_{o4i}^o en la base local $11i$ se tiene:

$$\begin{aligned} \omega_{o3i}^{11i} &= R_o^{11i} \omega_{o4i}^o \\ \omega_{o4i}^{11i} &= R_o^{11i} (R_{9i}^o \omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^o \omega_{4i}^{11i}) \\ \omega_{o4i}^{11i} &= R_o^{11i} R_{9i}^o \omega_{3i}^{9i} + R_o^{11i} R_{11i}^o \omega_{4i}^{11i} \\ \omega_{o4i}^{11i} &= R_{9i}^{11i} \omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^{11i} \omega_{4i}^{11i} \\ \omega_{o4i}^{11i} &= R_{9i}^{11i} \omega_{3i}^{9i} + \omega_{4i}^{11i} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Al proyectar α_{o4i}^o en la base local $11i$ se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha_{o4i}^{11i} &= R_o^{11i} \alpha_{o4i}^o \\ \alpha_{o4i}^{11i} &= R_o^{11i} (\alpha_{2i}^o + \alpha_{4i}^o + \omega_{2i}^o \times \omega_{4i}^o) \\ \alpha_{o4i}^{11i} &= R_o^{11i} (R_{9i}^o \alpha_{2i}^{9i} + R_{11i}^o \alpha_{4i}^{11i} + R_{9i}^o \omega_{2i}^{9i} \times R_{11i}^o \omega_{4i}^{11i}) \\ \alpha_{o4i}^{11i} &= R_o^{11i} R_{9i}^o \alpha_{2i}^{9i} + R_o^{11i} R_{11i}^o \alpha_{4i}^{11i} + R_o^{11i} R_{9i}^o \omega_{2i}^{9i} \times R_o^{11i} R_{11i}^o \omega_{4i}^{11i} \\ \alpha_{o4i}^{11i} &= R_{9i}^{11i} \alpha_{2i}^{9i} + R_{11i}^{11i} \alpha_{4i}^{11i} + R_{9i}^{11i} \omega_{2i}^{9i} \times R_{11i}^{11i} \omega_{4i}^{11i} \\ \alpha_{o4i}^{11i} &= R_{9i}^{11i} \alpha_{2i}^{9i} + \alpha_{4i}^{11i} + R_{9i}^{11i} \omega_{2i}^{9i} \times \omega_{4i}^{11i} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Al proyectar v_{G4i}^o en la base local $11i$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 v_{G4i}^{11i} &= R_o^{11i} v_{G4i}^o \\
 v_{G4i}^{11i} &= R_o^{11i} (v_{9ci}^o + v_{G4i}^o) \\
 v_{G4i}^{11i} &= R_o^{11i} (v_{3i}^o + \omega_{o3i}^o \times r_{9ci}^o + \omega_{o4i}^o \times r_{G4i}^o) \\
 v_{G4i}^{11i} &= R_o^{11i} v_{3i}^o + R_o^{11i} \omega_{o3i}^o \times R_o^{11i} r_{9ci}^o + R_o^{11i} \omega_{o4i}^o \times R_o^{11i} r_{G4i}^o \\
 v_{G4i}^{11i} &= v_{3i}^{11i} + \omega_{o3i}^{11i} \times r_{9ci}^{11i} + \omega_{o4i}^{11i} \times r_{G4i}^{11i}
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Al proyectar a_{G4i}^o en la base local $11i$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 a_{G4i}^{11i} &= R_o^{11i} a_{G4i}^o \\
 a_{G4i}^{11i} &= R_o^{11i} (a_{9ic}^o + a_{G4i}^o) \\
 a_{G4i}^{11i} &= R_o^{11i} a_{9ic}^o + R_o^{11i} a_{G4i}^o \\
 a_{G4i}^{11i} &= a_{9ic}^{11i} + a_{G4i}^{11i}
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 R_o^{11i} a_{9ic}^o &= R_o^{11i} a_{o3i}^o + 2R_o^{11i} \omega_{o3i}^o \times R_o^{11i} v_{o3i}^o + R_o^{11i} \alpha_{o3i}^o \times R_o^{11i} r_{G9ci}^o \\
 &\quad + R_o^{11i} \omega_{o3i}^o \times (R_o^{11i} \omega_{o3i}^o \times R_o^{11i} r_{G9ci}^o) \\
 a_{9ic}^{11i} &= R_o^{11i} a_{9ic}^o = a_{o3i}^{11i} + 2\omega_{o3i}^{11i} \times v_{o3i}^{11i} + \alpha_{o3i}^{11i} \times r_{G9ci}^{11i} + \omega_{o3i}^{11i} \times (\omega_{o3i}^{11i} \times r_{G9ci}^{11i}) \\
 R_o^{11i} a_{G4i}^o &= R_o^{11i} \alpha_{o4i}^o \times R_o^{11i} r_{G4i}^o + R_o^{11i} \omega_{o4i}^o \times (R_o^{11i} \omega_{o4i}^o \times R_o^{11i} r_{G4i}^o) \\
 a_{G4i}^{11i} &= R_o^{11i} a_{G4i}^o = \alpha_{o4i}^{11i} \times r_{G4i}^{11i} + \omega_{o4i}^{11i} \times (\omega_{o4i}^{11i} \times r_{G4i}^{11i})
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

4.6 Análisis del cuerpo 5

Acontinuación se presenta el análisis del cuerpo 5. La Figura 4.9 muestra su diagrama de cuerpo libre.

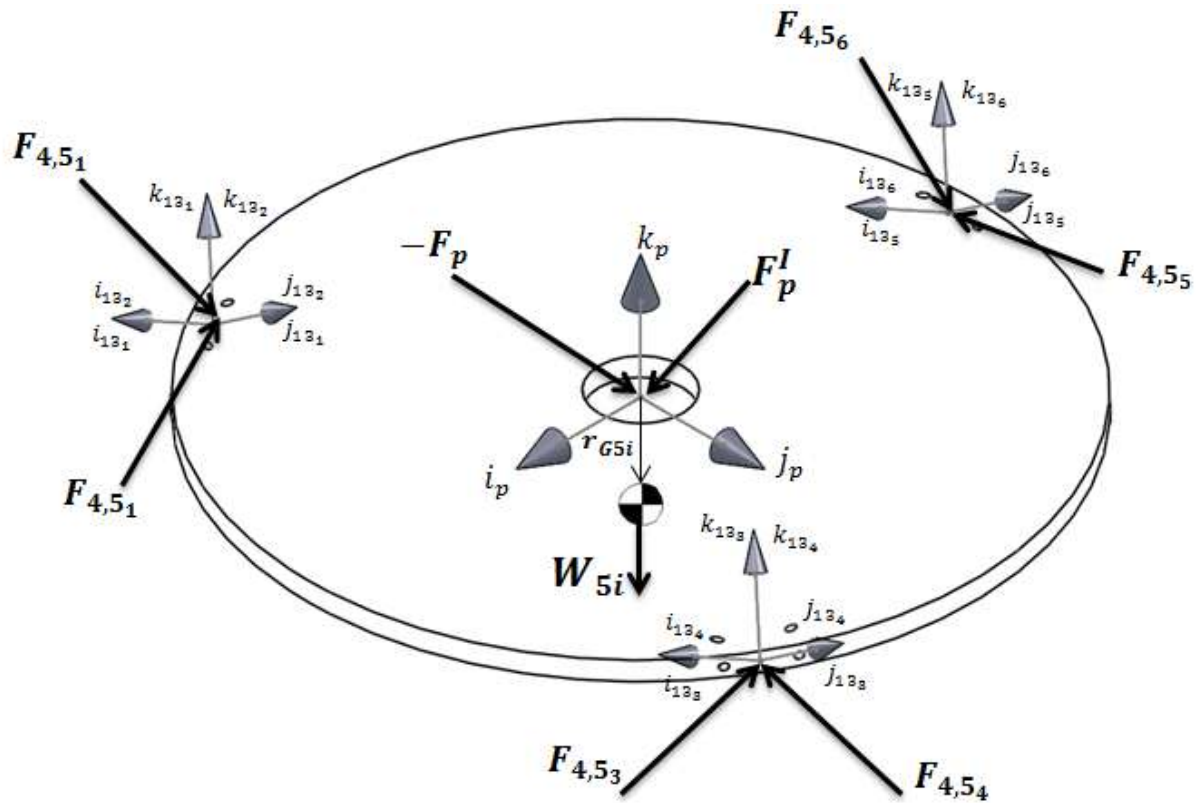


Figura 4.9 Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 5

4.6.1 Ecuaciones Dinámicas

La suma total de las fuerzas actuando sobre el cuerpo 5 es:

$$F_p^A + F_p^R + F_p^I = 0 \quad (4.68)$$

Se definen a cada una de las fuerzas: torsor de fuerzas de acción, torsor de fuerzas reactivas y torsor de fuerzas de inercia sobre el cuerpo $5i$, respectivamente, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_p^A &= Q_o^p F_p + Q_o^p W_{4i} \\ F_{Pi}^R &= \sum_{i=1}^6 Q_{13i}^p F_{45i} \\ F_p^I &= [F_{G5i}, M_{Op}]^T \end{aligned} \quad (4.69)$$

A continuación se definen los componentes del tursor de fuerza inercial:

$$F_{G5} = -m_5 a_{G5}^p$$

$$M_{Op} = -\left(J_{G5} \alpha_{o5}^p + \omega_{o5}^p \times (J_{G5} \omega_{o5}^p) + r_{G5}^p \times (m_5 a_{G5}^p) \right) \quad (4.70)$$

Donde J_{G5} se define como la matriz de inercias del cuerpo 5 de la siguiente manera:

$$J_{G5} = \begin{bmatrix} J_{5xx} & -J_{5xy} & -J_{5xz} \\ -J_{5yx} & J_{5yy} & -J_{5yz} \\ -J_{5zx} & -J_{5zy} & J_{5zz} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Además se definen los términos de los tursosres de fuerzas de accion y tursor de fuerzas reactivas como sigue:

$$W_{5i} = [0, 0, -m_5 g, 0, 0, 0]^T$$

$$F_P = [F_{Px}, F_{Py}, F_{Pz}, M_{Px}, M_{Py}, 0]^T \quad (4.72)$$

Las expresiones correspondientes para Q_o^P y Q_{13i}^P se escriben como sigue:

$$Q_o^P = \begin{bmatrix} R_o^P & 0 \\ S_o^P R_o^P & R_o^P \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$Q_{13i}^P = \begin{bmatrix} R_{13i}^P & 0 \\ S_{13i}^P R_{13i}^P & R_{13i}^P \end{bmatrix}$$

Donde:

$$R_p^o = R_{z6}(\psi) R_{\phi,u}$$

$$R_{\phi,u} = \begin{bmatrix} u_x^2 V \phi + c \phi & u_x u_y V \phi - u_z s \phi & u_x u_z V \phi + u_y s \phi \\ u_x u_y V \phi - u_z s \phi & u_y^2 V \phi + c \phi & u_y u_z V \phi + u_x s \phi \\ u_x u_z V \phi + u_y s \phi & u_y u_z V \phi + u_x s \phi & u_z^2 V \phi + c \phi \end{bmatrix}$$

$$R_o^P = (R_p^o)^T = R_{\phi,u}^T R_{z6}(\psi)^T \quad (4.74)$$

$$R_o^P = R_{\phi,u}^T R_{z6}(-\psi)$$

$$R_{13i}^P = R_{z6}(\delta_{14pi}) R_{z6}(\delta_{1615i}) R_{z4}(\delta_{1716i}) R_{z6}(\delta_{1817i})$$

También:

$$S_o^p = S_{G5} = S(x_{G5}, y_{G5}, z_{G5}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G5} & 0 \\ z_{G5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

$$S_{13i}^p = S(0, 0, z_{1312i}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{1514i} \\ 0 & x_{1514i} & 0 \end{bmatrix}$$

4.6.2 Ecuaciones Cinemáticas

De acuerdo a la Figura 4.10, se puede ubicar al centro de gravedad del cuerpo 5 de acuerdo a la siguiente ecuación vectorial de posición definida en la base inercial:

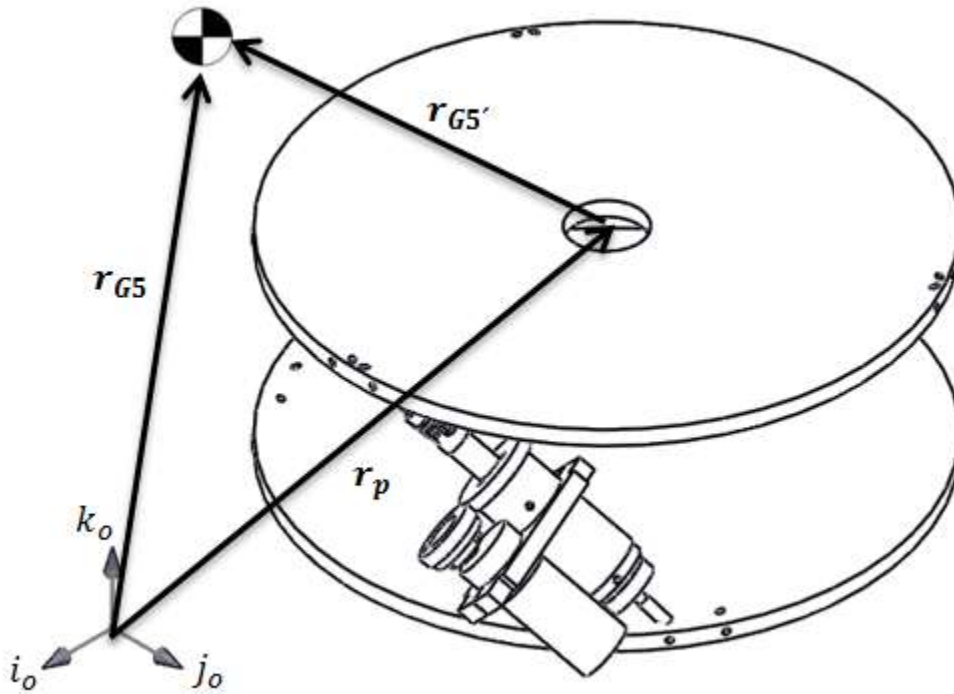


Figura 4.10 Centro de gravedad del cuerpo 5

$$r_{G5}^o = r_p^o + r_{G5'}^o \quad (4.76)$$

Donde:

$$\begin{aligned} r_p^o &= [x_p, y_p, z_p]^T \\ r_{G5}^o &= R_p^o r_{G5}^p \end{aligned} \quad (4.77)$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (4.76) se obtiene la ecuación de la velocidad del centro de masa del cuerpo 5 definida en la base inercial:

$$v_{G5}^o = v_p^o + v_{G5}^{o'} \quad (4.78)$$

Al explicar cada de una de las partes de la ecuación (4.78) se tiene que:

$$\begin{aligned} v_p^o &= [\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p]^T \\ v_{G5}^{o'} &= \omega_{o5}^o \times r_{G5}^o \\ \omega_{o5}^o &= \omega_\psi^o + R_\psi^o r_\omega \\ \omega_\psi^o &= \dot{\psi}[0,0,1]^T \end{aligned} \quad (4.79)$$

La aceleración del centro de gravedad se obtiene al derivar con respecto al tiempo la ecuación (4.78):

$$a_{G5}^o = a_p^o + a_{G5}^{o'} \quad (4.80)$$

Al explicar cada de una de las partes de la ecuación (4.80) se tiene que:

$$\begin{aligned} a_p^o &= [\ddot{x}_p, \ddot{y}_p, \ddot{z}_p]^T \\ a_{G5}^{o'} &= \alpha_{o5}^o \times r_{G5}^o + \omega_{o5}^o \times (\omega_{o5}^o \times r_{G5}^o) \\ \alpha_{o5}^o &= \alpha_\psi^o + R_\psi^o r_\alpha + \omega_\psi^o \times R_\psi^o r_\omega \\ \alpha_\psi^o &= \ddot{\psi}[0,0,1]^T \end{aligned} \quad (4.81)$$

Los vectores r_ω y r_α llamados vector de velocidad angular phi y aceleración angular phi, respectivamente, se explican en el apéndice B.

Se ha logrado encontrar las velocidades y aceleraciones para el centro de gravedad definidas en la base inercial, a continuación se proyectarán sobre la base local del cuerpo 5 con la ayuda de las matrices de rotación.

Al proyectar ω_{o5}^o en la base local p , se tiene:

$$\begin{aligned}\omega_{o5}^p &= R_o^p \omega_{o5}^o \\ \omega_{o5}^p &= R_o^p (\omega_{\psi}^o + R_{\psi}^o r_{\omega}) \\ \omega_{o5}^p &= R_o^p \omega_{\psi}^o + R_o^p R_{\psi}^o r_{\omega}\end{aligned}\tag{4.82}$$

Al proyectar α_{o5}^o en la base local p se tiene:

$$\begin{aligned}\alpha_{o5}^p &= R_o^p \alpha_{o5}^o \\ \alpha_{o5}^p &= R_o^p (\alpha_{\psi}^o + R_{\psi}^o r_{\alpha} + \omega_{\psi}^o \times R_{\psi}^o r_{\omega}) \\ \alpha_{o5}^p &= R_o^p \alpha_{\psi}^o + R_o^p R_{\psi}^o r_{\alpha} + R_o^p \omega_{\psi}^o \times R_o^p R_{\psi}^o r_{\omega}\end{aligned}\tag{4.83}$$

Al proyectar v_{G5}^o en la base local p se tiene:

$$\begin{aligned}v_{G5}^p &= R_o^p v_{G5}^o \\ v_{G5}^p &= R_o^p (v_p^o + v_{G5'}^o) \\ v_{G5}^p &= R_o^p (v_p^o + \omega_{o5}^o \times r_{G5'}^o) \\ v_{G5}^p &= R_o^p v_p^o + \omega_{o5}^p \times r_{G5}^p\end{aligned}\tag{4.84}$$

Al proyectar a_{G5}^o en la base local p se tiene:

$$\begin{aligned}a_{G5}^p &= R_o^p a_{G5}^o \\ a_{G5}^p &= R_o^p (a_p^o + a_{G5'}^o) \\ a_{G5}^p &= R_o^p (a_p^o + \alpha_{o5}^o \times r_{G5}^o + \omega_{o5}^o \times (\omega_{o5}^o \times r_{G5}^o)) \\ a_{G5}^p &= R_o^p a_p^o + \alpha_{o5}^p \times r_{G5}^p + \omega_{o5}^p \times (\omega_{o5}^p \times r_{G5}^p)\end{aligned}\tag{4.85}$$

Donde:

$$\begin{aligned}R_p^o &= R_{z6(\psi)} R_{\phi,u} \\ R_o^p &= (R_p^o)^T = R_{\phi,u}^T R_{z6(\psi)}^T \\ R_o^p &= R_{\phi,u}^T R_{z6(-\psi)} \\ R_{\psi}^p &= (R_p^{\psi})^T = R_{\phi,u}^T\end{aligned}$$

4.7 Solución del método Newton-Euler

Las ecuaciones dinámicas desarrolladas en el presente capítulo consideran todas las fuerzas reactivas, activas e inerciales que son aplicadas sobre el sistema, pero para lograr conocer el valor de éstas es necesario crear un sistema de ecuaciones utilizando las componentes escalares de las fuerzas y los momentos que comprenden a los torsesores definidos las ecuaciones obtenidas.

La Tabla 4.1 muestra el número de incógnitas por cuerpo, por cadena cinemática y de todo el manipulador.

Tabla 4.1 Incógnitas que aporta cada tipo junta a cada cadena cinemática.

Tipo de junta	No. de juntas por cadena cinemática	No. de cadenas cinemáticas	Fuerza y/o momento	Incógnitas
<i>Empotrada</i>	2	6	6	72
<i>Esférica</i>	1	6	3	18
<i>Prismática</i>	1	6	5	30
<i>Universal</i>	1	6	4	24
Suma				144

A las 144 incógnitas debidas a las juntas que componen al manipulador debe sumarse una componente de fuerza activa F_{ci} en cada uno de los seis actuadores, brindando seis incógnitas más para un total de 150 incógnitas a determinar.

Los valores de las masas, posiciones de centro de masa y matrices de inercia para los cuerpos se muestran a continuación.

Para el cuerpo 2_i se tiene:

$$m_{2i} = 0.55Kg$$

$$r_{G2i}^{7i} = [0,0,0.0425]^T m$$

$$J_{G2i} = \begin{bmatrix} 0.000207482 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000298195 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000115561 \end{bmatrix} Kg.m^2$$

Para el cuerpo 3_i se tiene:

$$m_{3i} = 0.05 \text{ Kg}$$

$$r_{G3i}^{9i} = [0,0,0.0425]^T \text{ m}$$

$$J_{G3i} = \begin{bmatrix} 0.00000162 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00004712 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00004712 \end{bmatrix} \text{ Kg.m}^2$$

Para el cuerpo 5 , la plataforma superior, se tiene:

$$m_5 = 0.05 \text{ Kg}$$

$$r_{G5}^p = [0,0,0.0045]^T \text{ m}$$

$$J_{G2i} = \begin{bmatrix} 0.012909 & 0 & 0 \\ 0 & 0.012909 & 0 \\ 0 & 0 & 0.025818 \end{bmatrix} \text{ Kg.m}^2$$

Debido a que los cuerpos 0 y 1_i no son afectados por aceleraciones angulares, no es necesario la presentación de sus características físicas ya que las fuerzas inerciales no existiran. Por otro lado, las masas, momentos y productos de inercia del cuerpo 4_i son despreciables al compararlos con las características físicas de los otros cuerpos, sin embargo, se presentan las ecuaciones dinámicas de éste ya que al surgir la necesidad de crear un prototipo de proporciones mayores, debe considerarse el efecto inercial de la masa del cuerpo 4_i sobre el comportamiento del manipulador.

En la Figura 4.11 se muestran los valores de las fuerzas activas presentes en los actuadores sometidos la acción de una carga de 54 N

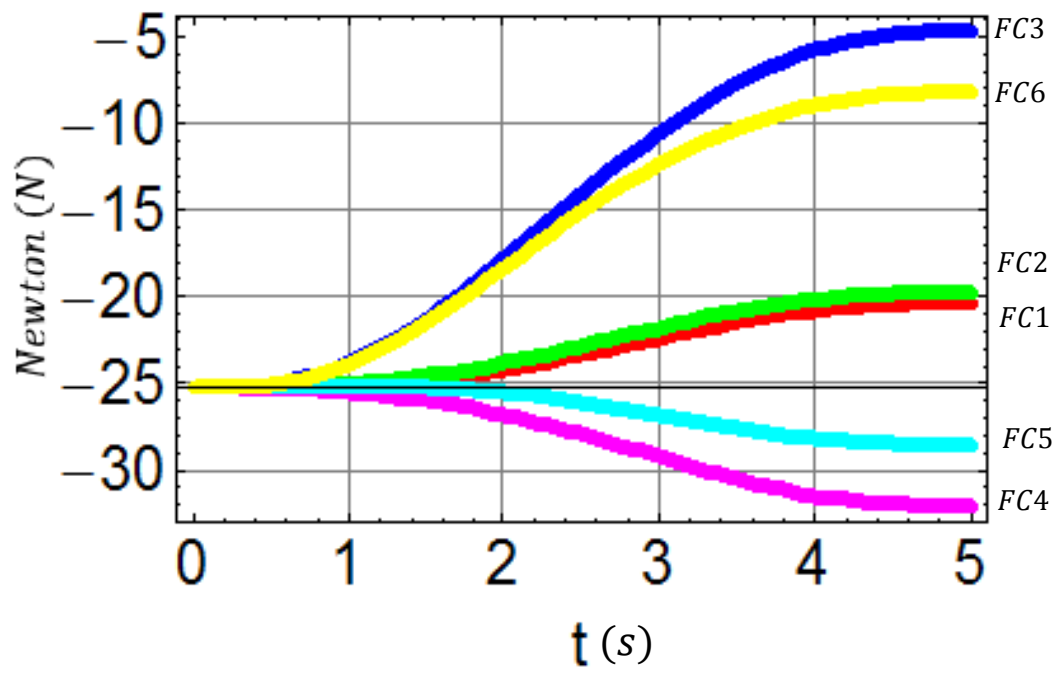


Figura 4.11 Fuerzas activas presentes en los actuadores.

Conclusiones

El uso de las matrices de transformación homogéneas como herramienta para el análisis cinemático brinda, en mi opinión, una mejor comprensión del comportamiento de una cadena cinemática al utilizar traslaciones y rotaciones puras a partir de sistemas de referencia locales anteriores, facilitando de esta manera el desarrollo de la cinemática sin importar la configuración, o tipo de juntas que compongan al manipulador.

La implementación de la matriz phi en el análisis cinemático como sustitución de los ángulos de Euler, ha demostrado ser efectiva al cumplir el mismo propósito que éstos. El efecto final que describen tanto los ángulos de Euler como la matriz phi son el mismo, pero los ángulos de Euler lo explican de una manera que no sería físicamente posible de desarrollar para el manipulador.

Respecto al desarrollo del tercer capítulo podemos concluir que la determinación de los momentos de inercia en piezas pequeñas, es irrelevante si consideramos que el orden de los momentos de inercia de estas piezas es tres órdenes debajo de los momentos de inercia de los cuerpos más pesados, como el motor y el actuador, sin embargo, las ecuaciones del análisis dinámico, incluyen las matrices de inercia de todos los cuerpos, ya que de surgir la necesidad de dimensionar a una escala mayor el prototipo del manipulador, las masas de los cuerpos que en este trabajo se han despreciado sobre el efecto inercial, deberán tomarse en cuenta al realizar un rediseño.

En cuanto al método experimental, se demostró que es posible hacer ciertas adaptaciones que permitan calcular experimentalmente los momentos de inercia de cuerpos con masas inferiores a un kilogramo, aunque no siendo así el caso para piezas por debajo de 150g, ya que se vuelve extremadamente complicado controlar las variables del experimento, como la horizontalidad de la plataforma y la oscilación simple del péndulo por la fricción con el aire.

La formulación Newton-Euler considera en su análisis las fuerzas restrictivas e inerciales, y por tanto brinda la información necesaria para realizar el análisis de esfuerzos que permite diseñar cada uno de los componentes del manipulador, dimensionando y definiendo las geometrías de pernos, rodamientos, placas, actuadores, etc; y también permite seleccionar los materiales adecuados.

El análisis dinámico resuelto por la formulación Newton-Euler es un método que permite el uso de tantas bases locales como se crea necesario, brindando un mejor entendimiento de las fuerzas, velocidades y aceleraciones que afectan al sistema.

El manipulador paralelo, presenta sin duda una gran complejidad en su análisis, ya que debido a su movimiento espacial y también a sus grados de libertad, se vuelve mucho más difícil de estudiar que los mecanismos planos y también aquellos espaciales con menos grados de libertad o de cadenas cinemáticas abiertas, y se espera que la información presentada en este trabajo sea lo suficientemente clara como para facilitar el estudio de un mecanismo de menor complejidad.

Cabe destacar que los manipuladores paralelos no han sido tan estudiados como los seriales y aún faltan muchas posibles aplicaciones por descubrir, siendo la que llama más la atención particularmente de éste autor la implementación de una plataforma de Stewart como cadera o miembro estabilizador en un robot bípedo.

Apéndice A

Resultados del Capítulo 2.

A.1 Resultados de posición.

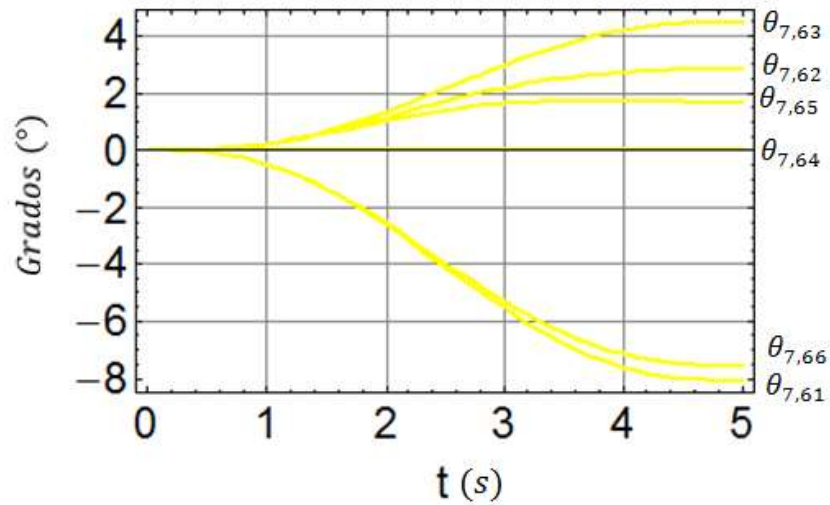


Figura A.1 Resultados de $\theta_{7,6i}$

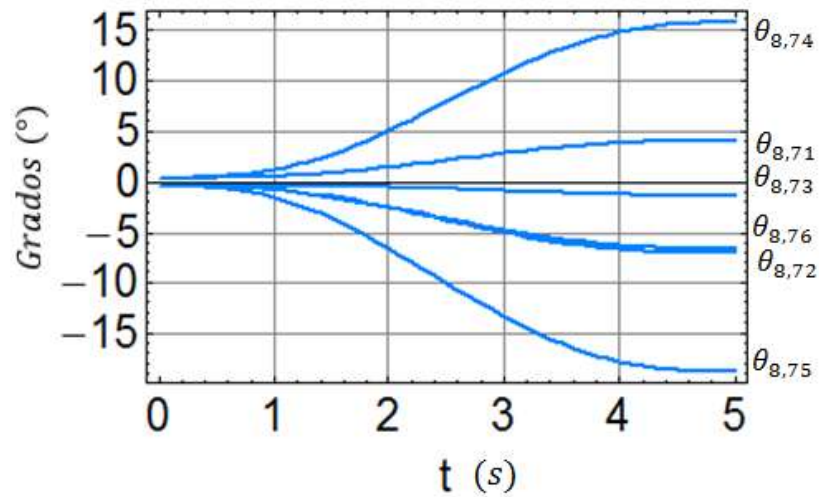


Figura A.2 Resultados de $\theta_{8,7i}$

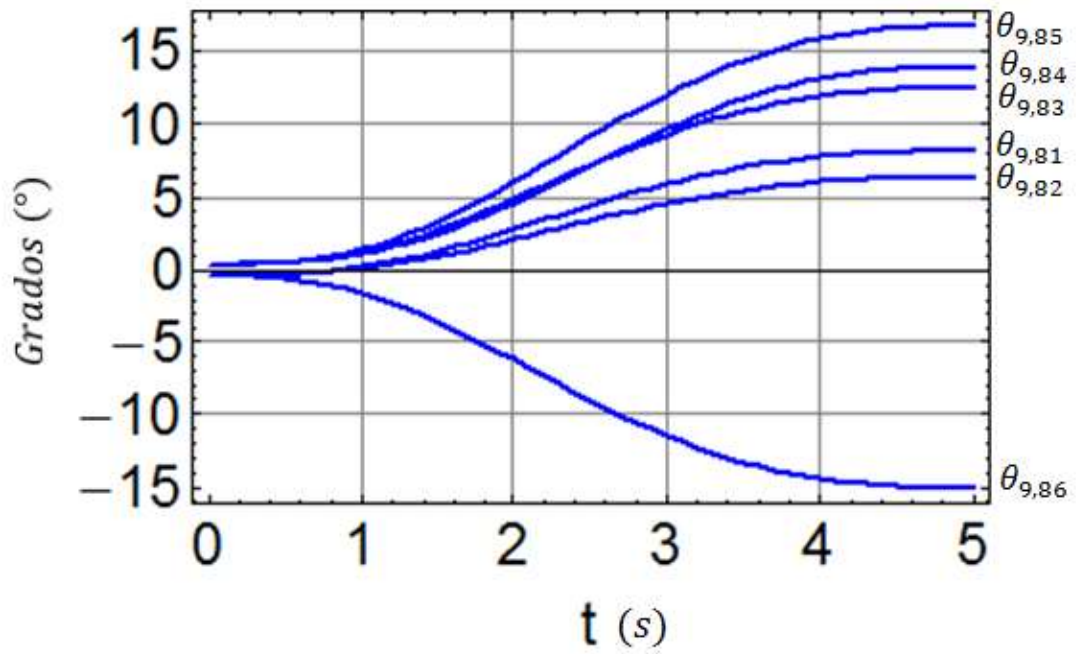


Figura A.3 Resultados de $\theta_{9,8i}$

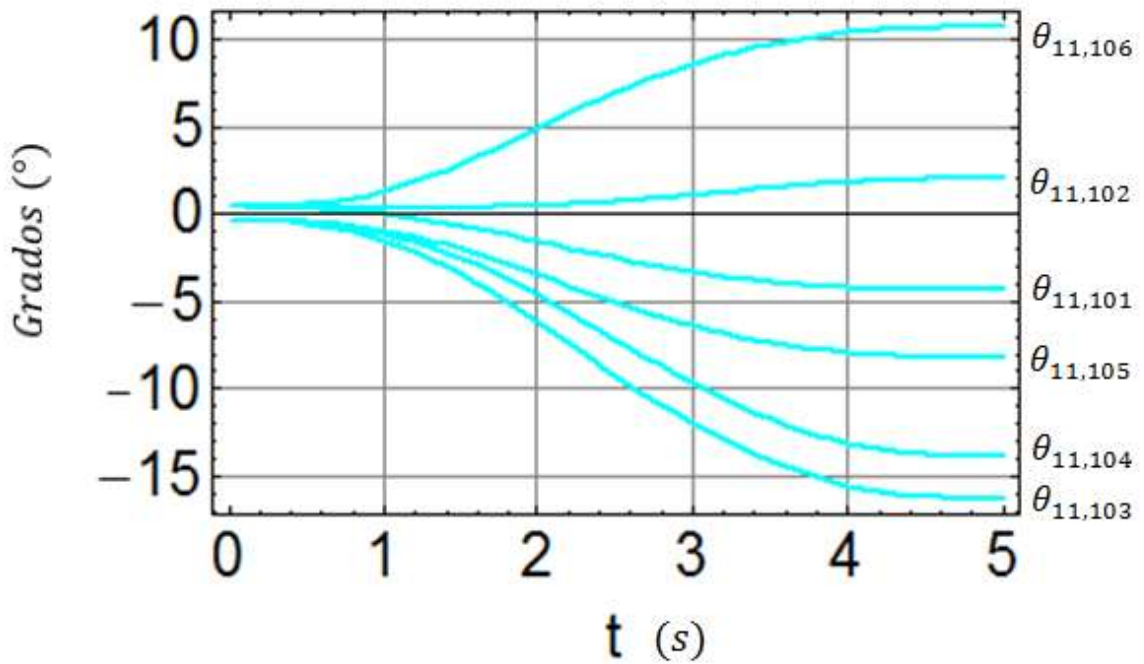


Figura A.4 Resultados de $\theta_{11,10i}$

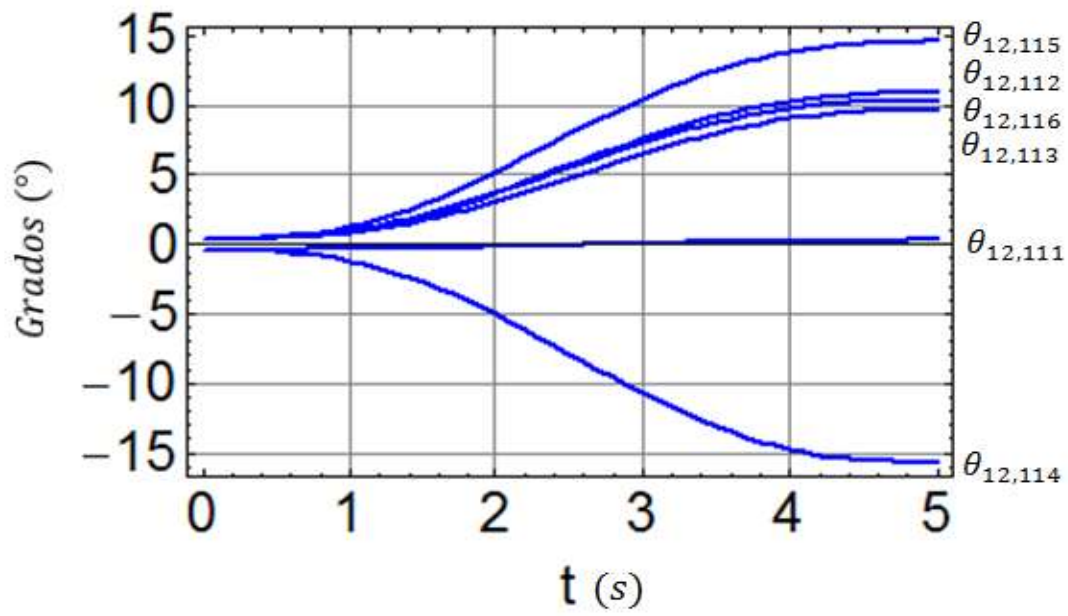


Figura A.4 Resultados de $\theta_{12,11i}$

A.2 Resultados de velocidade.

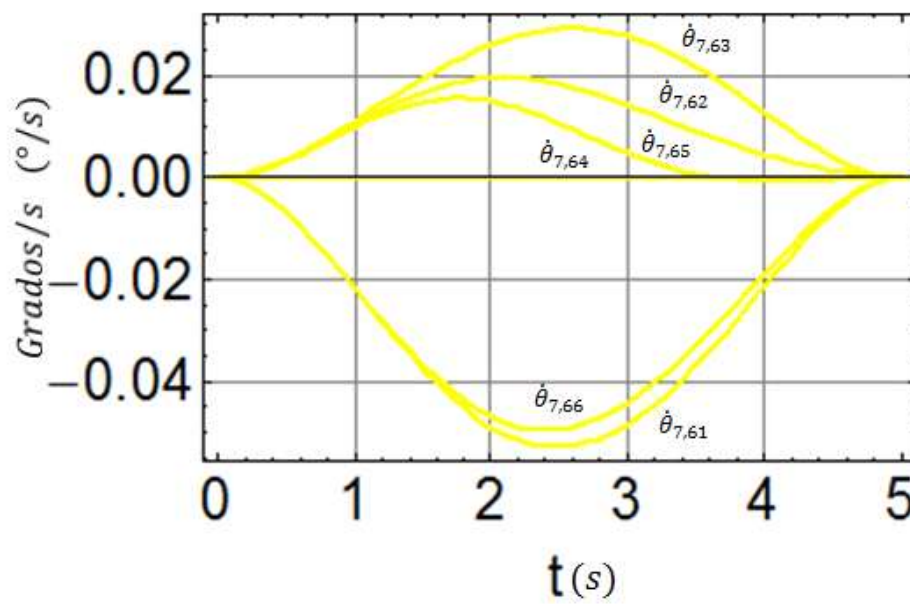


Figura A.5 Resultados de $\dot{\theta}_{7,6i}$

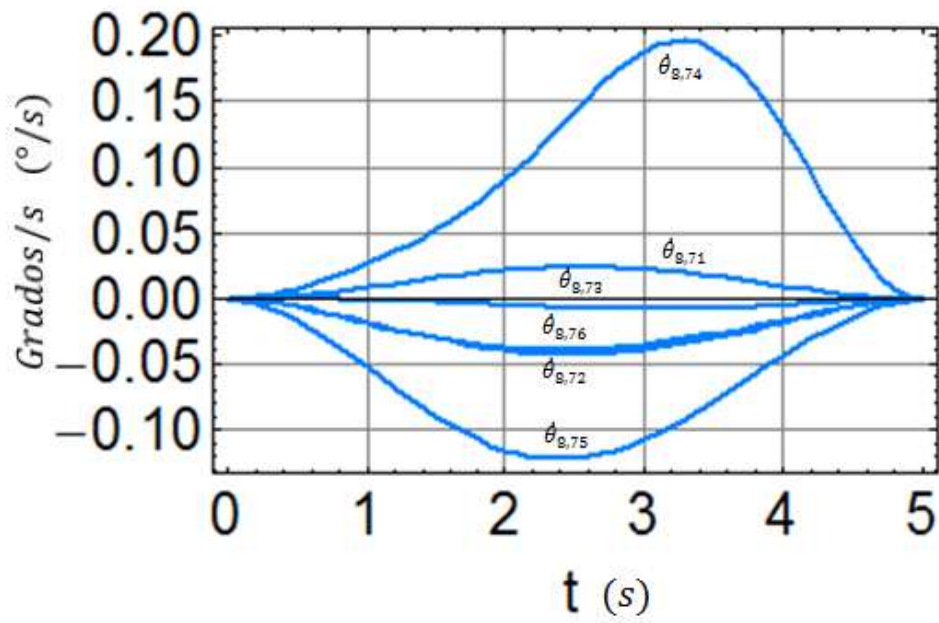


Figura A.6 Resultados de $\dot{\theta}_{8,7i}$

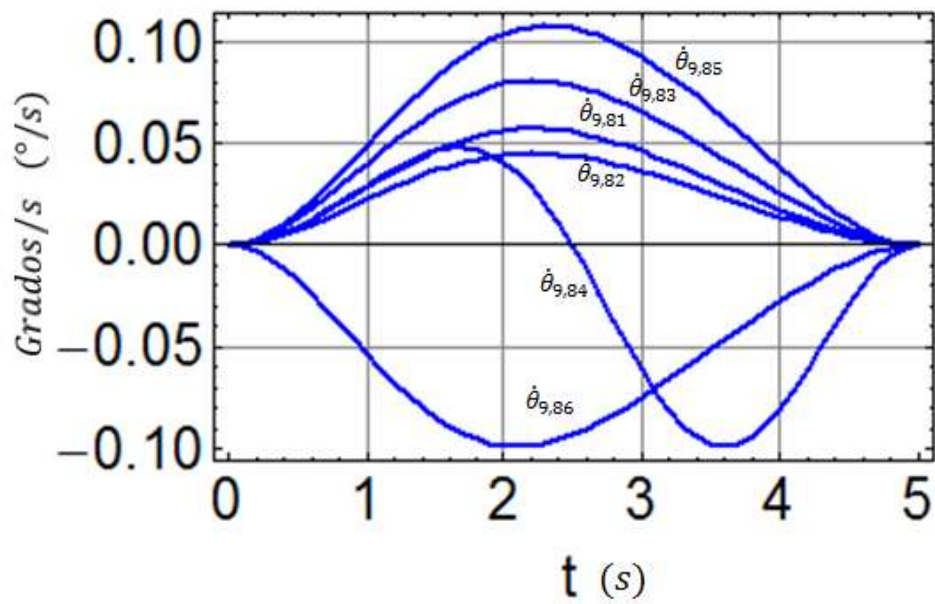


Figura A.7 Resultados de $\dot{\theta}_{9,8i}$

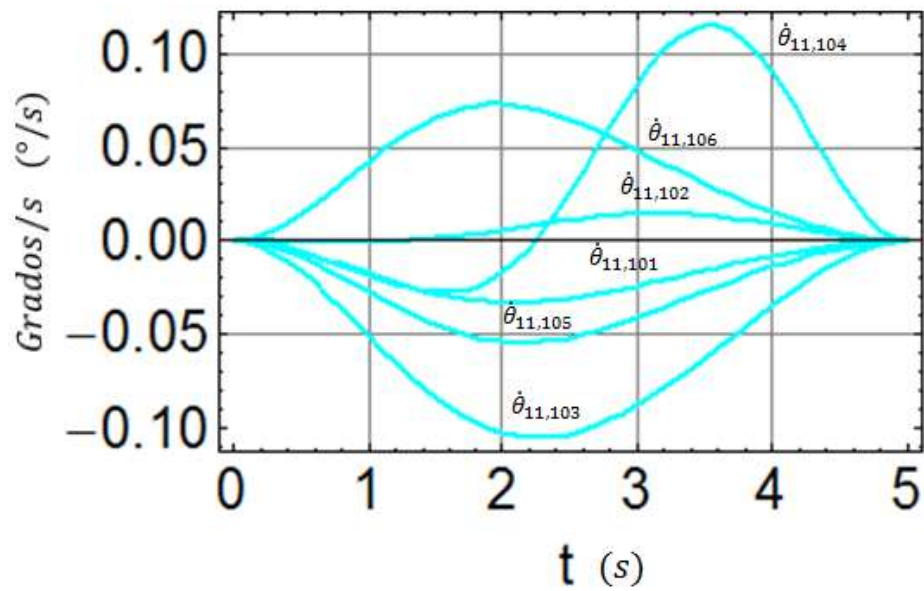


Figura A.8 Resultados de $\dot{\theta}_{11,10i}$

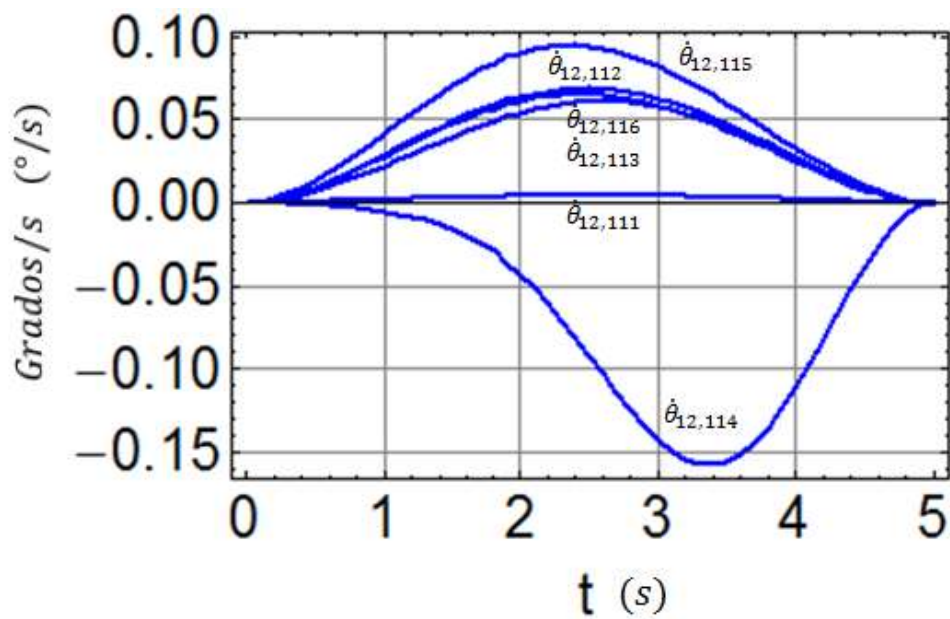


Figura A.9 Resultados de $\dot{\theta}_{12,11i}$

A.3 Resultados de aceleración.

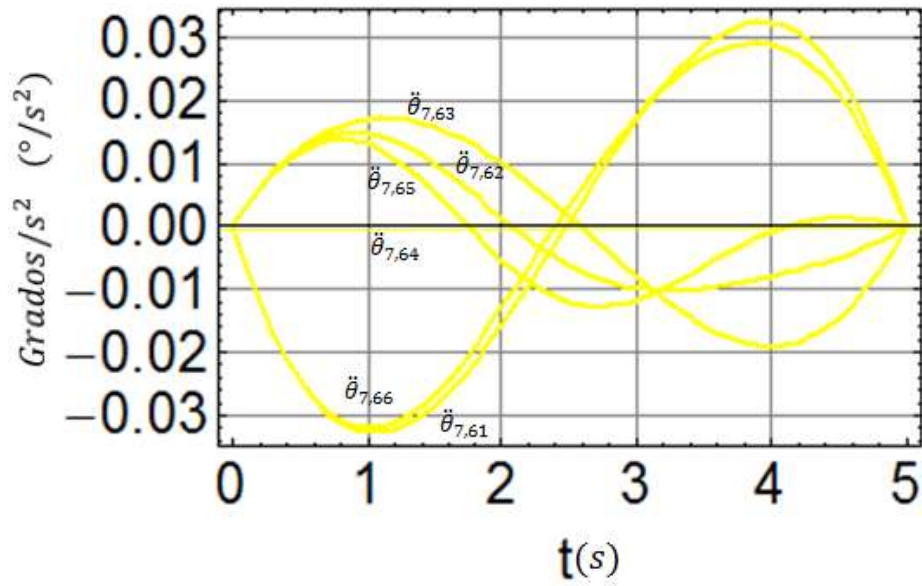


Figura A.10 Resultados de $\ddot{\theta}_{7,6i}$

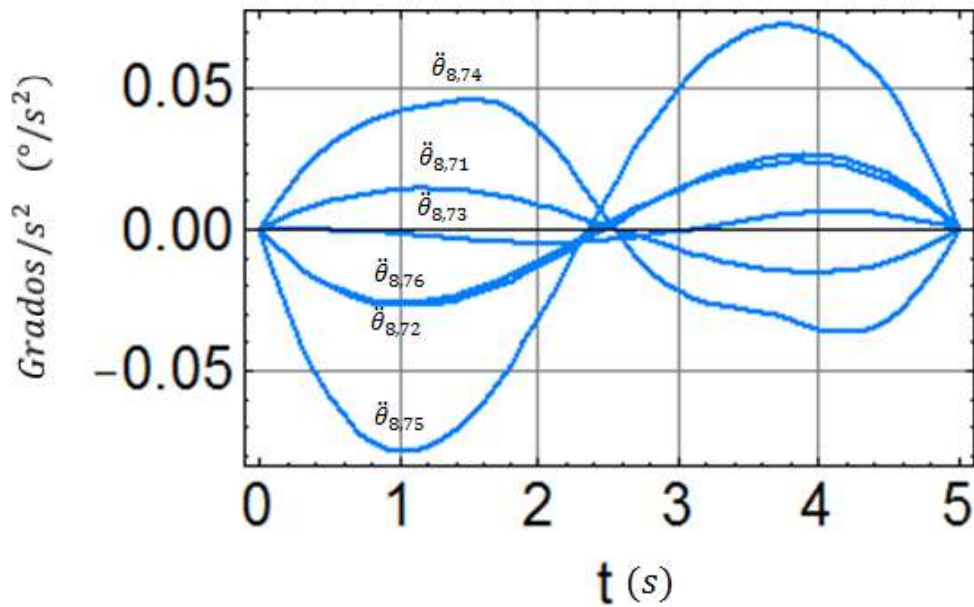


Figura A.11 Resultados de $\ddot{\theta}_{8,7i}$

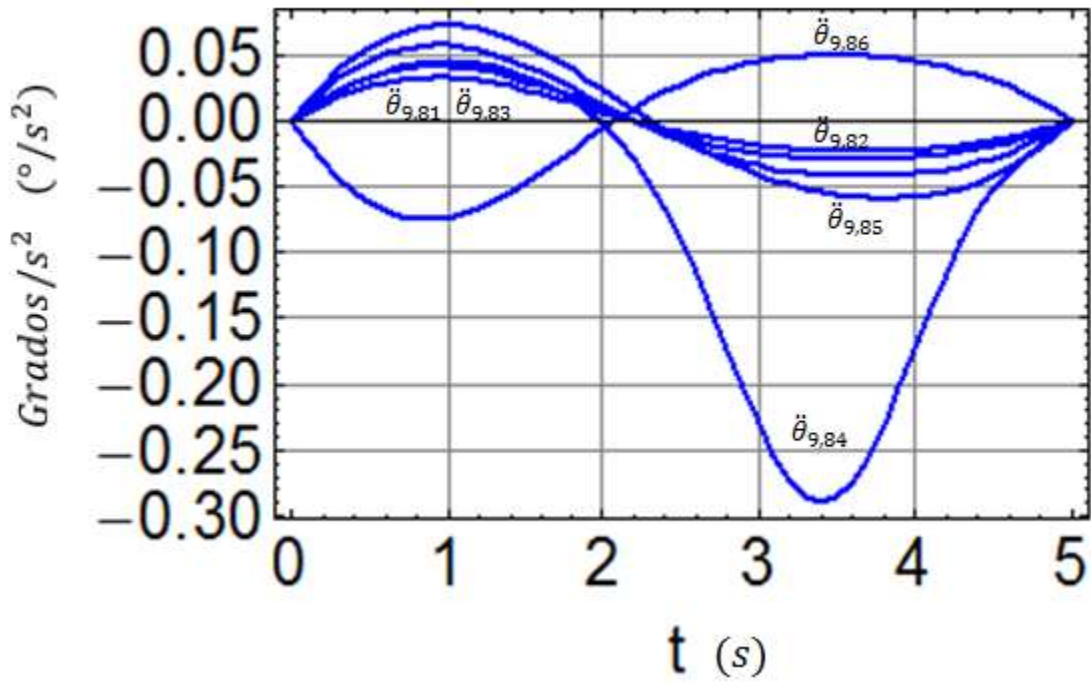


Figura A.12 Resultados de $\ddot{\theta}_{9,8i}$

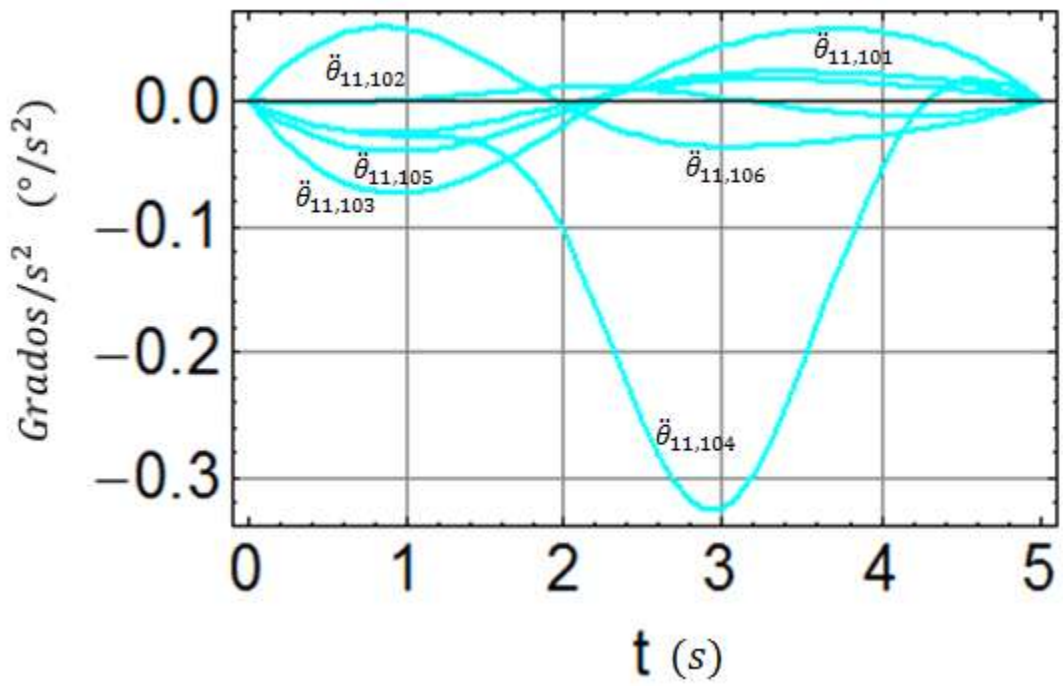


Figura A.13 Resultados de $\ddot{\theta}_{11,10i}$

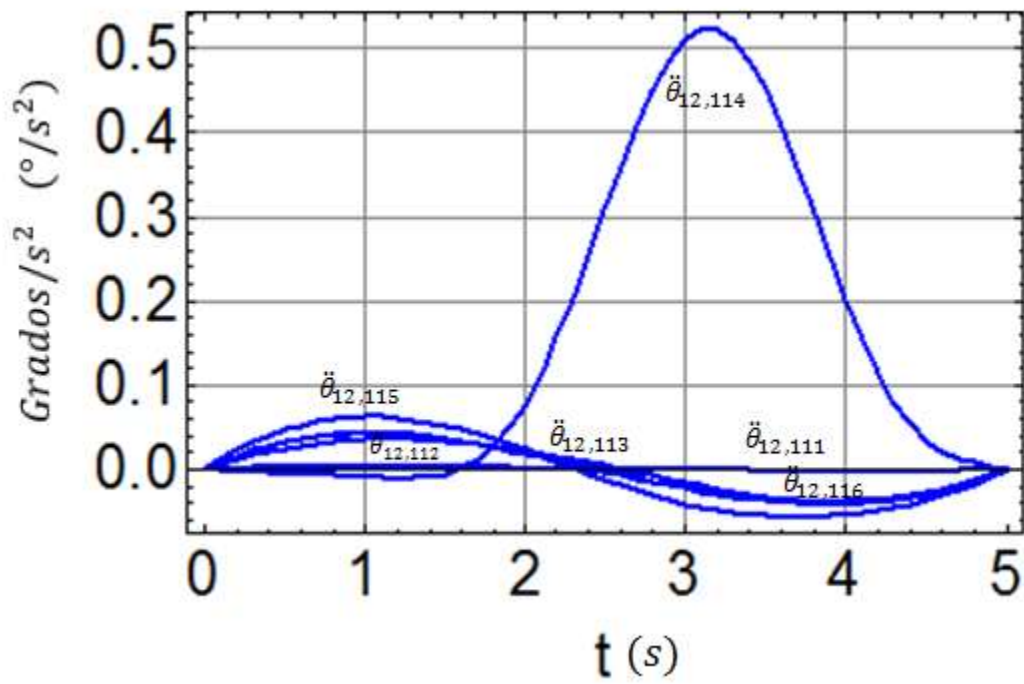


Figura A.14 Resultados de $\ddot{\theta}_{12,11i}$

Apéndice B

Matriz Phi, vector \vec{r}_ω y \vec{r}_α

B.1 Ecuación de Posición

La matriz Phi puede ser explicada mediante las proyecciones del vector unitario a lo largo del eje \mathbf{u} y poder explicar la rotación ϕ relativa a los ejes coordenados fijos, ejecutando los siguientes pasos que se ilustran también en la Figura B.1:

1. Rotar el cuerpo rígido para traer el eje \mathbf{u} paralelo al eje z .
2. Ejecutar la rotación ϕ alrededor del eje \mathbf{u} ubicado temporalmente en un eje coordenado.
3. Regresar \mathbf{u} a su posición original.

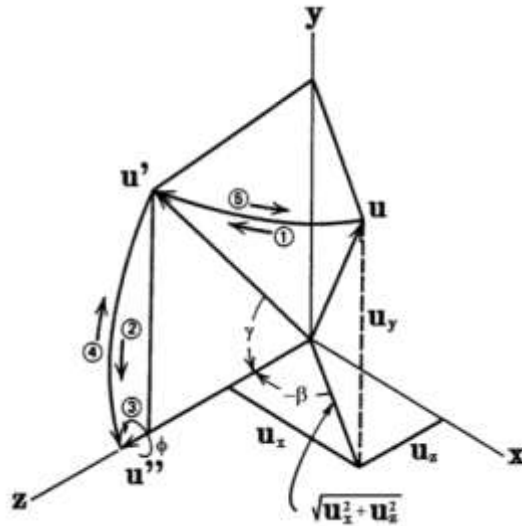


Figura B.1 Secuencia de pasos para obtener la matriz Phi.

Las rotaciones necesarias para cambiar de base un vector \mathbf{r} por medio de la matriz phi sería la siguiente:

$$\mathbf{R} = [R_{\beta,y}][R_{-\gamma,x}][R_{\phi,z}][R_{\gamma,x}][R_{-\beta,y}]\mathbf{r}$$

$$\mathbf{R} = [R_{\phi,u}]\mathbf{r} \tag{B.1}$$

B.2 Ecuación de Velocidad

La ecuación de velocidad se obtiene al derivar la ecuación (B.1) con respecto al tiempo quedando de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{R}} = [\dot{R}_{\phi,u}] \mathbf{r} + [R_{\phi,u}] \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{B.2})$$

El vector de posición \mathbf{r} puede ser expresado en términos de la posición actual como se indica:

$$\mathbf{r} = [R_{\phi,u}]^{-1} \mathbf{R} = [R_{\phi,u}]^T \mathbf{R} \quad (\text{B.3})$$

Donde $[R_{\phi,u}]^{-1} = [R_{\phi,u}]^T$ ya que se trata de una matriz de rotación y por lo tanto, ortogonales [11]. Al sustituir la ecuación (B.3) en (B.2), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= [\dot{R}_{\phi,u}] [R_{\phi,u}]^T \mathbf{R} + [R_{\phi,u}] \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{V} &= [\dot{R}_{\phi,u}] [R_{\phi,u}]^T \mathbf{R} + [R_{\phi,u}] \mathbf{v} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Realizando la multiplicación de las matrices $[\dot{R}_{\phi,u}] [R_{\phi,u}]^T$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} [\dot{R}_{\phi,u}] [R_{\phi,u}]^T &= [W] \\ [\dot{R}_{\phi,u}] &= [W] [R_{\phi,u}] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Donde:

$$\begin{aligned} [W] &= \begin{bmatrix} 0 & -u_z \dot{\phi} & u_y \dot{\phi} \\ u_z \dot{\phi} & 0 & -u_x \dot{\phi} \\ -u_y \dot{\phi} & u_x \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \\ [W] &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_z & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

La matriz $[W]$ es llamada matriz de velocidad angular y es sólo función de las componentes de velocidad angular.

Escribiendo la ecuación de velocidad en términos de la matriz $[W]$, se tiene:

$$\mathbf{V} = [W] \mathbf{R} + [R_{\phi,u}] \mathbf{v} \quad (\text{B.7})$$

B.3 Ecuación de Aceleración

La ecuación de aceleración se obtiene al derivar la ecuación (B.7) con respecto al tiempo quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}} &= [\dot{W}]\mathbf{R} + [W]\dot{\mathbf{R}} + [R_{\phi,u}]\dot{\mathbf{v}} + [R_{\phi,u}]\dot{\mathbf{v}} \\ \mathbf{A} &= [\dot{W}]\mathbf{R} + [W]([W]\mathbf{R} + [R_{\phi,u}]\mathbf{v}) + [W][R_{\phi,u}]\mathbf{v} + [R_{\phi,u}]\mathbf{a} \\ \mathbf{A} &= [\dot{W}]\mathbf{R} + [W][W]\mathbf{R} + [W][R_{\phi,u}]\mathbf{v} + [W][R_{\phi,u}]\mathbf{v} + [R_{\phi,u}]\mathbf{a} \quad (\text{B.7}) \\ \mathbf{A} &= ([\dot{W}] + [W][W])\mathbf{R} + 2[W][R_{\phi,u}]\mathbf{v} + [R_{\phi,u}]\mathbf{a}\end{aligned}$$

Al desarrollar el coeficiente de \mathbf{R} :

$$\begin{aligned}[\dot{W}] + [W][W] &= ([R_{\phi,u}]\dot{[R_{\phi,u}]})^T + [W][W] \\ [\dot{W}] + [W][W] &= [R_{\phi,u}]\ddot{[R_{\phi,u}]}^T + [R_{\phi,u}]\dot{[R_{\phi,u}]}^T + [W][W] \quad (\text{B.8}) \\ [\dot{W}] + [W][W] &= [R_{\phi,u}]\ddot{[R_{\phi,u}]}^T + ([W][R_{\phi,u}])([W][R_{\phi,u}])^T + [W][W] \\ [\dot{W}] + [W][W] &= [R_{\phi,u}]\ddot{[R_{\phi,u}]}^T + ([W][R_{\phi,u}])[R_{\phi,u}]^T [W]^T + [W][W]\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}[W]^T &= -[W] \\ [R_{\phi,u}][R_{\phi,u}]^T &= I \quad (\text{B.9})\end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones de (B.9) en la última ecuación de (B.8)

$$\begin{aligned}[\dot{W}] + [W][W] &= [R_{\phi,u}]\ddot{[R_{\phi,u}]}^T - [W][W] + [W][W] \\ [\dot{W}] + [W][W] &= [R_{\phi,u}]\ddot{[R_{\phi,u}]}^T \quad (\text{B.10})\end{aligned}$$

Al sustituir la ecuación (B.10) en (B.7) se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= [R_{\phi,u}]\ddot{[R_{\phi,u}]}^T \mathbf{R} + 2[W][R_{\phi,u}]\mathbf{v} + [R_{\phi,u}]\mathbf{a} \\ \mathbf{A} &= [\mathbf{A}]\mathbf{R} + 2[W][R_{\phi,u}]\mathbf{v} + [R_{\phi,u}]\mathbf{a} \quad (\text{B.11})\end{aligned}$$

B.4 Vectores \vec{r}_ω y \vec{r}_α

Las ecuaciones obtenidas en las secciones anteriores de este capítulo consideran que el vector \mathbf{r} es un vector que puede cambiar de magnitud, así que al considerar que en nuestro estudio el vector \mathbf{r} es en realidad un vector unitario de magnitud constante u , las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración quedarían de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= [R_{\phi,u}]\mathbf{u} \\ \mathbf{V} &= [W]\mathbf{R} \\ \mathbf{A} &= [A]\mathbf{R}\end{aligned}\tag{B.12}$$

Para definir los vectores r_ω y r_α de velocidad y aceleración angular phi, respectivamente, se toman las ecuaciones (B.6) y (B.10) para renombrarlas:

Para la matriz de velocidad angular:

$$\begin{aligned}[W] &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_z & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \\ [W] &= \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{B.13}$$

Puede ahora definirse el vector de velocidad angular phi de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}_\omega = [w_{32}, w_{13}, w_{21}]^T\tag{B.14}$$

Para la matriz de aceleración angular:

$$\begin{aligned}[\dot{W}] + [W][W] &= [R_{\phi,u}^{\ddot{}}][R_{\phi,u}]^T \\ [\dot{W}] &= [R_{\phi,u}^{\ddot{}}][R_{\phi,u}]^T - [W][W] \\ [\dot{W}] &= [R_{\phi,u}^{\ddot{}}][R_{\phi,u}]^T - [W][W] \\ [\dot{W}] &= [A] - [W][W]\end{aligned}\tag{B.15}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 [A] &= \begin{bmatrix} -(\omega_y^2 + \omega_z^2) & \omega_x\omega_y - \alpha_z & \omega_x\omega_z + \alpha_y \\ \omega_x\omega_y + \alpha_z & -(\omega_x^2 + \omega_z^2) & \omega_y\omega_z - \alpha_x \\ \omega_x\omega_z - \alpha_y & \omega_y\omega_z + \alpha_x & -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{bmatrix} \\
 [W][W] &= \begin{bmatrix} -(\omega_y^2 + \omega_z^2) & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z \\ \omega_x\omega_y & -(\omega_x^2 + \omega_z^2) & \omega_y\omega_z \\ \omega_x\omega_z & \omega_y\omega_z & -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 [\dot{W}] &= \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix} \\
 [\dot{W}] &= \begin{bmatrix} \dot{w}_{11} & \dot{w}_{12} & \dot{w}_{13} \\ \dot{w}_{21} & \dot{w}_{22} & \dot{w}_{23} \\ \dot{w}_{31} & \dot{w}_{32} & \dot{w}_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})
 \end{aligned}$$

Puede ahora definirse el vector de aceleración angular phi de la siguiente manera:

$$r_\alpha = [\dot{w}_{32}, \dot{w}_{13}, \dot{w}_{21}]^T \quad (\text{B.18})$$

Bibliografía

- [1]. Subir Kumar Saha. 2010. Introducción a la robótica. Mc. Graw-Hill
- [2]. S. Ali A. Moosavian, Khalil Alipour. 2006. Stability Evaluation of Mobile Robotic Systems using Moment-Height Measure.
- [3] José Antonio Souza Jimenez. 2011. Kinematics and tip-over stability analysis for a hybrid serial-parallel mobile manipulator .
- [4]. Bhaskar Dasgupta, T.S. Mruthyunjaya. 1998. The Stewart platform manipulator: a review.
- [5]. René Graf, Rüdiger Dillmann. Acceleration Compensation Using a Stewart Platform on a Mobile Robot
- [6]. J.L Meriam, L.G Kraige. 2007. Mecánica para ingenieros, Dinámica, 3ª edición. Ed. Reverté
- [7]. Stejskal Vladimír, Valá.ek Michael. 1996. Kinematics and Dynamics of Machinery. Marcel Dekker, Inc..
- [8]. Kinematics and Mechanism Design. C. H. Suh, C. W. Radclie, John Wiley & Sons
- [9]. R.C. Hibbeler. 2010. Ingeniería Mecánica, Dinámica 12ª Edición. Ed. Pearson.
- [10]. Y. Minami Koyama, H. G. Serrano Miranda. 2010. Experimental determination of an irregular object's moment of inertia.
- [11]. Howard Anton. 2004. Introducción al álgebra lineal, 3ª edición. Limusa wiley.