

# **Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento**

Tesis presentada por

**Jeannete Guadalupe Aguilar Martínez**

en el campo de conocimiento de Ingeniería Mecánica, y campo  
disciplinario Ingeniería Mecatrónica

para obtener el grado de

**Doctora**

en

**Ingeniería**

en el

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

de la

**Universidad Nacional Autónoma de México**

Ciudad Universitaria, México D.F.

**Director de Tesis:**

Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria

2012



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Esta tesis fue aprobada por el siguiente jurado:

Dr. Yu Tang Xu  
Presidente

Dr. Jesús Manuel Dorador González  
Secretario

Dr. Luis Agustín Alvarez-Icaza Longoria  
Primer Vocal

Dr. Alejandro Cuauhtémoc Ramírez Reivich  
Primer Suplente

Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl  
Segundo Suplente

Dr. Luis Agustín Alvarez-Icaza Longoria

---

Tutor

Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México D.F.

2012

Con mucho cariño a mis padres Rafael y Yolanda



## Agradecimientos

Jeannete Aguilar  
Ciudad Universitaria, México, D.F., 2012

Me siento orgullosa y feliz de haber realizado mis estudios en la UNAM, mi madre académica, mi Alma Mater, benevolente y generosa, que ha marcado la vida moderna de nuestro país. Es un orgullo, un privilegio y un compromiso formar parte de esta institución tan prestigiada. Estoy consciente de lo que significa tener un grado de alta especialización en un país como México, con una economía que hace evidente un proceso de desarrollo desigual, y donde la mayoría de la población está en condiciones de pobreza y de marginación.

Debo reconocer el valioso apoyo que me brindó CONACyT y la CEP con una beca para la realización de todos los trabajos de investigación involucrados en este proyecto.

Agradecimientos,

A mi asesor por todo lo que me ha enseñado, tanto en lo académico como en mi desarrollo como persona. Aprecio sobre todo la paciencia y comprensión que me ha brindado todos estos años. Gracias por confiar en mí.

A los miembros de mi comité tutorial, gracias por todo el apoyo.

Considero que las investigaciones que yo pudiera realizar no se deben principalmente a mis capacidades individuales, sino al producto del esfuerzo de mucha gente que permite que se den las condiciones para que uno pueda aportar un granito más de arena. Gracias a todas aquellas personas que se involucraron con mi trabajo. Sin ustedes esto no hubiera sido posible.

Gracias muy especialmente a mi familia, que ha sido para mí fuente permanente de inspiración, estímulo y afecto incondicional. Ustedes han sido, son y serán mi luz, mi cielo azul.

A todas las personas que han estado en aquellos momentos cuando el camino se veía oscuro y que de alguna forma han llenado mi vida de dicha y alegría.

## Resumen

La fricción llanta-pavimento ha sido modelada tradicionalmente utilizando modelos estáticos. Desafortunadamente estos modelos tienen carencias ya que, por ejemplo, no explican los fenómenos de histéresis cuando se trabaja en un régimen no estacionario de velocidad, las variaciones en la fuerza de ruptura o los pequeños desplazamientos que ocurren en la superficie de contacto cuando se aplica cierta fuerza. Es por esta razón que surgió el interés por los modelos dinámicos, que ha sido motivado por dos observaciones: (i) la fricción dinámica en la llanta es importante desde el punto de vista del buen funcionamiento del sistema, y (ii) numerosas deficiencias de los modelos tradicionales estáticos pueden ser evitadas utilizando los modelos dinámicos.

Un modelo dinámico de fricción utilizado ampliamente es el modelo de LuGre, que es resultado de una extensa investigación de diferentes modelos de fricción entre los que se encuentran los modelos de Dahl de primer y segundo orden. El modelo de LuGre es capaz de capturar exactamente la transición observada de la fuerza de fricción durante el frenado y la aceleración. Este modelo está basado en la elasticidad en el contacto, introduce una variable interna que representa el estado de deformación del contacto, supone que las superficies hacen contacto a través de cerdas erizadas elásticas y que cuando se aplica una fuerza tangencial las cerdas se deforman como resortes, lo que hace que la fuerza de fricción aumente provocando los deslizamientos. Este modelo también reproduce el efecto “*Stribeck*,” efecto que se puede apreciar claramente cuando a un objeto en reposo se le aplica una fuerza. En un principio la fuerza no es suficiente para moverlo, pero si aumenta la fuerza se llega al punto de ruptura en que el objeto comienza a moverse. Ya en movimiento, la fuerza que se opone para seguir moviéndolo es menor que la fuerza necesaria para iniciar su movimiento.

Los modelos dinámicos de fricción pueden ser formulados con parámetros concentrados o distribuidos. Los modelos con parámetros concentrados asumen que la interfaz llanta-pavimento es puntual, y pueden ser resueltos con ecuaciones diferenciales ordinarias. Por otro lado, los modelos con parámetros distribuidos asumen la existencia de una huella de contacto entre la llanta y el pavimento con una distribución de presión normal asociada, dando lugar a ecuaciones diferenciales parciales que necesitan ser resueltas en tiempo y espacio. Con estas ecuaciones se puede conocer el comportamiento del neumático en régimen transitorio, lo que resulta una tarea difícil si se quiere incorporar estos modelos en la formulación para el control de un vehículo.

Por lo tanto, una de las contribuciones de este trabajo fue mostrar que los modelos con parámetros concentrados pueden ser una buena aproximación de los modelos con paráme-

tros distribuidos.

Para lograr esta aportación se estudió experimentalmente el área de contacto entre la llanta y el pavimento haciendo uso de medidores de deformación (galgas extensométricas), con el objetivo de mostrar cómo están distribuidas las fuerzas longitudinales y transversales en la zona de contacto llanta-pavimento, puesto que la maniobrabilidad de los vehículos depende única y exclusivamente de las fuerzas que se originan entre la llanta y el pavimento. Por consiguiente, analizar estas fuerzas puede ayudar a mejorar el comportamiento de los vehículos.

Asimismo, es bien sabido que contar con un modelo adecuado de fricción puede ser un elemento clave para el buen desempeño del sistema, pues desafortunadamente la ausencia de fricción es un factor que afecta drásticamente el desempeño de los vehículos pudiendo provocar accidentes en carreteras. Las estrategias de control que intentan compensar el efecto de la fricción requieren de un modelo conveniente. Un modelo correcto de fricción, junto con estrategias de control, es necesario para lograr trayectorias deseables en el sistema. Por ello, parte de este trabajo está dirigida a proponer una ley de control para el frenado y la tracción basada en modelos dinámicos de fricción y en la teoría de Lyapunov. Con esta ley se ensayan estrategias de control que ayudan a compensar errores de seguimiento en las trayectorias deseadas del sistema.

## Abstract

Tire-pavement friction has been typically described by static models. Unfortunately, these models do not explain many interesting phenomena, such as hysteretic behavior when studying friction for non-stationary velocities, variations in the breakaway force and the small displacements that occur at the contact interface during stiction. It is for these reasons that there is an increasing interest in dynamic friction models. This interest has been motivated by two observations: (i) the tire friction dynamics may be important from the standpoint of developing high-performance vehicle systems, and (ii) numerical difficulties of traditional static tire models at low vehicle speeds can be avoided by using a dynamic tire model.

A widely used dynamic model of friction is the LuGre model. This model is the result of an extensive review of different models of friction among which are the first and second order Dahl models, which are capable of capturing the transition of the force of friction during braking and acceleration. The LuGre model is based on the contact elasticity, it introduces an internal state which represents the state of deformation of the contact surfaces. This model assumes that the contact is made through elastic bristles. When a tangential force is applied, the bristles deflect like springs, which causes the friction force to decrease, causing slip. This model involves the “*Stribeck*” effect. This effect can be clearly seen when a force is applied to an object at rest. At first, the force is not enough to move it, but if the force is increased, a breaking point from which the object starts to move can be reached.

Dynamic friction models can be formulated with either lumped or distributed parameters. Models with lumped parameters assume that the tire-road interface is punctual, and can be posed with ordinary differential equations. On the other hand, distributed parameter models assume a normal contact pressure distributed on a contact patch between the tire and the pavement. These models require the solution of partial differential equations to determine the transient behavior of the tire. Therefore, the implementation of distributed parameters models into a vehicle control system is a difficult task.

The main contribution of this work will be to show that the lumped parameter models can be a good approximation of distributed parameter models. To achieve this goal, experimental study of the contact area between the tire and the pavement using strain gauges is performed, with the aim of showing how forces are longitudinally and transversely distributed. The maneuverability of the vehicle depends solely on the forces that arise between the tire and the pavement, therefore, the analysis of these forces can help improve the vehicle performance.

It is also well known that having an adequate model of friction can be a key element for good system performance. Unfortunately, the absence of friction is a factor that dramatically affects the proper functioning of vehicles and can cause road accidents. Control strategies that attempt to offset the effect of friction require a suitable model. Therefore, a correct model of friction with control strategies is necessary to achieve desired trajectories in the system. This work also proposes a control law for braking and traction based on dynamic models of friction and Lyapunov theory. Based on this law control, strategies that help to compensate for errors in tracking desired trajectories of the system are tested.

# Índice general

Índice de figuras	XIII
Índice de cuadros	XVI
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo . . . . .	5
1.2. Estructura de la tesis doctoral . . . . .	5
<b>2. Modelado de la fricción llanta-pavimento</b>	<b>7</b>
2.1. Modelo <i>Brush</i> . . . . .	8
2.2. Modelo de Fiala . . . . .	12
2.3. Modelo de neumático HSRI . . . . .	12
2.4. Modelo de Bayle . . . . .	13
2.5. Modelos basados en cinemática . . . . .	13
2.6. Efectos de la fricción . . . . .	15
2.7. Procedimientos de ensayo empleados para la experimentación con neumáticos	17
2.8. Ensayos experimentales para estudiar la fricción . . . . .	18
2.8.1. Equipos de tambor externo o interno . . . . .	19
2.8.2. Equipos de disco de rotación plana . . . . .	20
2.8.3. Equipos de rodillos gemelos . . . . .	20
2.8.4. Equipos de correa plana . . . . .	20
2.9. Sistemas para la obtención de distribución de presiones . . . . .	21
2.9.1. Equipo basado en piel inteligente . . . . .	21
2.9.2. Método FTRI . . . . .	22
2.9.3. <i>Smart tire</i> . . . . .	24
2.10. Trabajos recientes relacionados con la caracterización llanta-pavimento . . .	29
<b>3. Modelos matemáticos para fricción llanta-pavimento</b>	<b>34</b>
3.1. Modelo matemático de un cuarto de vehículo . . . . .	34
3.2. Modelos estáticos de fricción . . . . .	35
3.2.1. <i>Fórmula Mágica</i> . . . . .	36
3.2.2. Modelo de Burckhardt . . . . .	36
3.3. Modelos dinámicos de fricción . . . . .	37
3.3.1. Modelo de LuGre con parámetros concentrados . . . . .	38

3.3.2.	Modelo de LuGre con parámetros distribuidos . . . . .	39
3.3.3.	Derivación del modelo distribuido . . . . .	40
3.3.4.	Características en estado estacionario . . . . .	41
3.3.5.	Distribución normal constante . . . . .	42
3.3.6.	Distribución exponencialmente decreciente . . . . .	42
3.3.7.	Distribución con condiciones límite . . . . .	43
<b>4.</b>	<b>Diseño mecánico del banco de pruebas</b>	<b>44</b>
4.1.	Descripción del banco de pruebas . . . . .	44
4.1.1.	Análisis dimensional del banco de pruebas . . . . .	45
<b>5.</b>	<b>Galgas extensométricas</b>	<b>50</b>
5.1.	Acondicionamiento de la señal de las galgas extensométricas . . . . .	51
5.2.	Adhesivos de las galgas extensométricas . . . . .	54
5.3.	Respuesta en frecuencia de las galgas extensométricas . . . . .	55
5.4.	Colocación de las galgas . . . . .	56
5.5.	Comunicación inalámbrica . . . . .	56
5.6.	Sincronización del encoder con las galgas . . . . .	58
5.7.	Diseño electrónico para la adquisición de datos . . . . .	59
5.8.	Configuración del <i>router</i> y Windows cliente . . . . .	60
5.8.1.	Estándar de comunicación IEEE 802.11 . . . . .	62
5.9.	Protocolo de comunicación utilizado en el envío de datos . . . . .	63
5.10.	Adquisición de los datos de las galgas extensométricas . . . . .	64
5.10.1.	Programa de demostración TCPIP Wi-Fi . . . . .	65
5.10.2.	Programa de adquisición de datos . . . . .	65
<b>6.</b>	<b>Resultados experimentales de las galgas extensométricas</b>	<b>67</b>
6.1.	Distribución longitudinal y lateral . . . . .	67
6.2.	Resultados experimentales de las galgas extensométricas . . . . .	69
6.3.	Discusión de resultados de las galgas extensométricas . . . . .	75
6.3.1.	Galgas extensométricas localizadas longitudinalmente . . . . .	75
6.3.2.	Galgas extensométricas localizadas lateralmente . . . . .	75
<b>7.</b>	<b>Sistema de control del banco experimental</b>	<b>77</b>
7.1.	Conexión de dispositivos . . . . .	77
7.1.1.	Instalación y configuración de la tarjeta Humosoft . . . . .	77
7.2.	Ley de control para el banco de pruebas . . . . .	79
7.3.	Determinación de parámetros . . . . .	82
7.3.1.	Parámetros del sistema experimental . . . . .	82
7.3.2.	Parámetros del modelo de fricción . . . . .	85
<b>8.</b>	<b>Resultados experimentales de la ley de control con base en teoría de Lyapunov</b>	<b>89</b>



<b>9. Conclusiones</b>	<b>97</b>
9.1. Aportaciones . . . . .	98
9.2. Trabajo pendiente . . . . .	98
<b>10.Referencias</b>	<b>101</b>

# Índice de figuras

1.1. Variación del coeficiente de fricción ( $\mu$ ) con respecto al deslizamiento longitudinal ( $\lambda$ ). . . . .	2
1.2. Fuerza de fricción como una función del desplazamiento para el modelo de Dahl. . . . .	3
1.3. Variaciones típicas de la fricción llanta pavimento para (a) diferentes tipos con diferentes tipos de superficie, y (b) diferentes velocidades del vehículo, (Curvas dadas por . . . . .	4
2.1. Principales entradas y salidas de un modelo matemático de las fuerzas llanta-pavimento. . . . .	7
2.2. Comportamiento de la llanta en la zona de contacto. . . . .	8
2.3. Sistema experimental para medir la rigidez de la llanta. . . . .	9
2.4. Comportamiento de la llanta en la zona de contacto. . . . .	9
2.5. Sistema de coordenadas de la llanta. . . . .	10
2.6. Modelo <i>Brush</i> . . . . .	10
2.7. Presión normal distribuida en el modelo <i>Brush</i> . . . . .	11
2.8. Huella de contacto entre llanta-pavimento en el modelo de Fiala. . . . .	12
2.9. Parche de contacto entre llanta-pavimento. . . . .	14
2.10. Efectos de la fricción. Curva de la fricción estática (a), Fuerza de fricción en función del desplazamiento (b), Fuerza de fricción vs. velocidad (c) y Respuesta de la fuerza de fricción para la velocidad relativa que varía periódicamente (d). . . . .	16
2.11. Esquema de los equipos empleados en laboratorio: Tambor externo (a), Tambor interno (b), Disco de rotación plana (c), Plataforma plana (d), Rodillos gemelos (e) y Correa plana (e). . . . .	18
2.12. Esquema utilizado en laboratorio. . . . .	19
2.13. Equipo de rodillos gemelos. . . . .	21
2.14. Equipo de correa plana. . . . .	22
2.15. Imagen obtenida mediante piel inteligente. Muestra huellas de contacto, con la distribución de presiones representada mediante escala de colores. . . . .	23
2.16. Método de la Frustración Total de la Reflexión Interna (F.T.R.I). . . . .	23
2.17. Llanta utilizada en el banco de pruebas, “ <i>smart tire</i> ”. . . . .	24
2.18. Prototipo del banco de pruebas “ <i>smart tire</i> ”. . . . .	25
2.19. Estructura para medir la deformación de la llanta. . . . .	26

2.20. Prototipo del banco de pruebas “ <i>smart tire</i> ” . . . . .	26
2.21. Forma geométrica y estimación del tamaño de la huella de contacto llanta-pavimento. . . . .	27
2.22. Parámetros de adherencia al pavimento. . . . .	28
2.23. Distribución de la presión de el contacto $F_n(x, y)$ llanta-pavimento. . . . .	28
2.24. Modelo de la presión normal de el contacto llanta-pavimento. . . . .	29
2.25. Sistema llanta-pavimento. . . . .	30
2.26. Representación en <i>bond graph</i> de la interacción llanta-pavimento. . . . .	30
2.27. Esfuerzos longitudinales contra deslizamiento. . . . .	31
2.28. Variación de temperatura y presión dentro del neumático. . . . .	32
2.29. Parámetros de adherencia al pavimento. . . . .	33
3.1. Modelo con parámetros concentrados (izquierda) y modelo con parámetros distribuidos (derecha). . . . .	38
3.2. Interfaz entre dos superficies de cerdas erizadas elásticas.. . . .	38
3.3. Distribución de la fuerza. . . . .	40
3.4. Distribución de la fuerza normal. . . . .	42
4.1. Representación de sólo la cuarta parte del vehículo. . . . .	44
4.2. Dimensiones del servomotor Yaskawa. . . . .	47
4.3. Llanta acoplada al servomotor. . . . .	47
4.4. Representación de un cuarto de vehículo. . . . .	48
4.5. Diseño del banco de pruebas. Principales materiales: 1.- Polietileno de alta densidad, 2.- Neumático liso de caucho, 3.- Acero al silicio, 4.- Aluminio, 6.- Acero inoxidable, 7.- Acero al carbono, 8.- Bronce, 9.- Latón. . . . .	49
5.1. Partes principales de una galga. . . . .	51
5.2. Configuración empleada para una galga activa. . . . .	52
5.3. Amplificador diferencial. . . . .	52
5.4. Amplificador no inversor. . . . .	53
5.5. Amplificador para una señal. . . . .	53
5.6. Colocación de una galga extensométrica en un excitador electrodinámico. . . . .	55
5.7. Diagrama de bode. . . . .	56
5.8. Galga extensométrica adherida al rodillo. . . . .	57
5.9. Galgas extensométricas adheridas al rodillo. a) Longitudinal b) Lateral. . . . .	57
5.10. Diagrama de comunicación para las galgas extensométricas. . . . .	58
5.11. Diagrama de conexión para el módulo Wi-Fi. . . . .	59
5.12. Diagrama de conexión para el módulo Wi-Fi. . . . .	60
5.13. Diagrama de conexión para el módulo Wi-Fi. . . . .	61
5.14. Diagrama de comunicación inalámbrica. . . . .	62

5.15. Localización del SNMP en el protocolo TCP/IP. Donde DHCP (Protocolo de configuración dinámica del servidor), HTTP (protocolo de transferencia de hipertexto), SNMP (Protocolo Simple de Administración de Red), FTP (Protocolo de Transferencia de Archivos), UDP (Protocolo de datagramas de usuario), TCP (Protocolo de Control de Transmisión), IP(Protocolo de internet), ICMP(Protocolo de mensajes de control de Internet), PPP(Protocolo Punto a Punto), SLIP (Protocolo de línea serial de Internet), ARP (protocolo de resolución de direcciones). . . . .	63
5.16. Esquema utilizado en laboratorio. . . . .	65
5.17. Diagrama de comunicación para las galgas extensométricas. . . . .	66
6.1. Forma de distribución: a) longitudinal b) lateral. . . . .	67
6.2. Representación del parche de contacto lateral. . . . .	68
6.3. Representación del parche de contacto longitudinal. . . . .	68
6.4. Adquisición de señales de la galga 1. . . . .	70
6.5. Variación de la fuerza de distribución. . . . .	70
6.6. Adquisición de la señal de la gala 1, con velocidad de 11 [m/s]. . . . .	71
6.7. Adquisición de la señal de la gala 2, con velocidad de 11 [m/s]. . . . .	72
6.8. Adquisición de la señal de la galga 3, con velocidad de 11 [m/s]. . . . .	72
6.9. Adquisición de señal de la galga 4, con velocidad de 11[m/s]. . . . .	73
6.10. Adquisición de señales de la galga 4 a diferentes velocidades. . . . .	73
6.11. Adquisición de la señal de la galga 4, con velocidad de 11[m/s]. . . . .	74
6.12. Adquisición de la señal de la galga 5, con velocidad de 11[m/s]. . . . .	74
6.13. Adquisición de la señal de la galga 6, con velocidad de 11[m/s]. . . . .	75
6.14. Forma en que hace contacto la llanta con la galga. . . . .	76
7.1. Diagrama de conexión. . . . .	78
7.2. Diagrama de conexión. . . . .	79
7.3. Banco de pruebas para estudiar la fricción llanta-pavimento. . . . .	80
7.4. Obtención de radios e inercias del banco de pruebas, acotación [mm]. . . . .	83
7.5. Comportamiento ideal para $\omega$ , $\dot{\omega}$ , $\ddot{\omega}$ . . . . .	83
7.6. Velocidades angulares $\omega_2$ , $\dot{\omega}_2$ , $\ddot{\omega}_2$ en la llanta para un par constante. . . . .	84
7.7. Velocidades angulares $\omega_2$ , $\dot{\omega}_2$ , $\ddot{\omega}_2$ en el rodillo para un par constante. . . . .	85
7.8. Efecto “ <i>Stribeck</i> ”, con ajuste. . . . .	86
7.9. Fuerza de fricción real y fuerza de fricción estimada (izquierda) y Error del estimador (derecha). . . . .	88
8.1. Gráficas de la fuerza de fricción $F$ para una entrada constante. . . . .	90
8.2. Graficas de la velocidad angular $\omega$ para una entrada constante. . . . .	91
8.3. Gráficas de la velocidad relativa $s$ para una entrada constante. . . . .	92
8.4. Gráficas de la fuerza de fricción $F$ para una entrada senoidal. . . . .	94
8.5. Gráficas de la velocidad angular $\omega$ para una entrada senoidal. . . . .	95
8.6. Gráficas de la velocidad relativa $s$ para una entrada senoidal. . . . .	96
9.1. Etapas de desarrollo de la Tesis Doctoral. . . . .	99

# Índice de cuadros

4.1. Parámetros utilizados en simulación. . . . .	46
4.2. Parámetros utilizados en simulación. . . . .	47
7.1. Parámetros del sistema experimental. . . . .	88
7.2. Parámetros del modelo de fricción. . . . .	88

# Capítulo 1

## Introducción

La industria automotriz se ha interesado por el análisis de las fuerzas que se generan entre la llanta y el pavimento. Así, el estudio de la fricción llanta-pavimento empezó a cobrar importancia en los años 30's con investigaciones como las de Bradley y Allen que estudiaron las propiedades dinámicas de los neumáticos (Bradley, J. and Allen, R. F. 1931) e identificaron la dependencia entre la fuerza de frenado y el índice de deslizamiento. A partir de aquellos estudios surgieron los primeros modelos sobre neumáticos, que permiten representar matemáticamente su comportamiento o sus principales características dinámicas.

Sin embargo, obtener modelos analíticos de fricción llanta-pavimento no es una tarea fácil. La mayoría de los modelos planteados hasta este momento comparten una importante base experimental, en particular los modelos pseudo-estáticos. Las investigaciones más sobresalientes que hacen referencia a los modelos pseudo-estáticos, son las de Bakker, Nyborg y Pacejka (1987) y Burckhardt (1993), que describen modelos analíticos para el comportamiento de la interfaz llanta-pavimento que son usados intensivamente para la indagación en este ámbito.

En estos modelos, el coeficiente de fricción  $\mu$  es principalmente función del deslizamiento de la llanta  $\lambda$ . La figura 1.1 muestra una curva, obtenida de Harned, Johnston, y Scharpf (1969), que representa el comportamiento típico de  $\mu$  vs.  $\lambda$ .

Otro modelo analítico para el comportamiento de la interfaz llanta-pavimento es el que se describe en Burckhardt (1993). La gráfica que representa el modelo, describe el comportamiento del vehículo y expresa a  $\mu$  como una función de  $\lambda$ , la velocidad del vehículo  $v$  y la fuerza normal en la llanta  $F_n$ , (Harned, J. et al. 1969).

Estos modelos han tenido fuerte impacto en el estudio del deslizamiento llanta-pavimento.

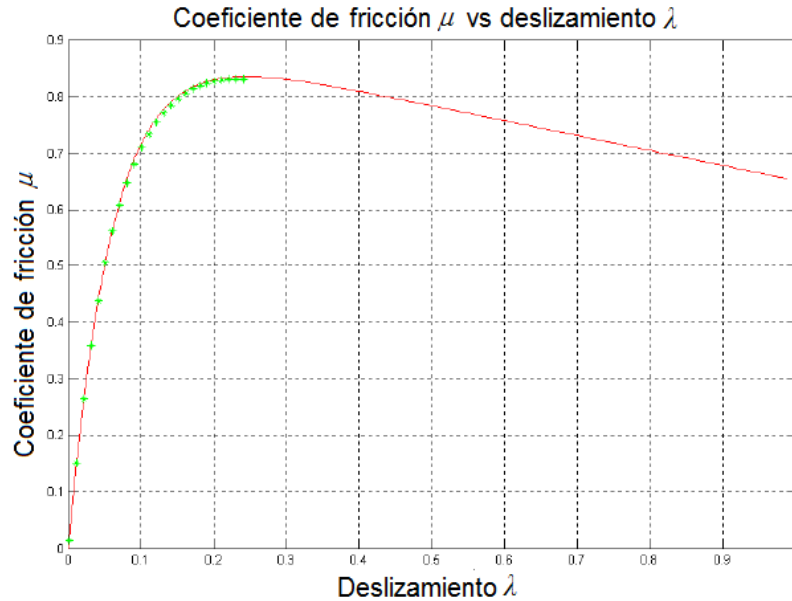


Figura 1.1: Variación del coeficiente de fricción ( $\mu$ ) con respecto al deslizamiento longitudinal ( $\lambda$ ).

Sin embargo, no poseen una buena base teórica para explicar los pequeños desplazamientos en la superficie de contacto que se presentan experimentalmente al momento de aplicar cierta fuerza.

Es por esta razón que se empezaron a desarrollar modelos analíticos dinámicos. Estos predicen las características elásticas mediante la simplificación de ecuaciones físicas (Shim, T. and Margolis, D. 2004), (Miyashita, N. et al. 2005). Dentro de estos modelos se encuentran el modelo de Dugoff (Dugoff, H. et al. 1969), el modelo de Fiala (Fiala, E. 1991) y el modelo de *Brush* (Pacejka, H. and Sharp, R. 1991), que pueden capturar aspectos importantes en la interacción llanta-pavimento.

El modelo de *Brush* o del Cepillo, fue inicialmente propuesto por Fromm y Julien en los años 40 (Hadekel, R. 1952). A lo largo de estos años ha sido mejorado y es hoy en día, uno de los métodos más usados para modelar las fuerzas longitudinales y transversales en la zona de contacto llanta-pavimento. Sin embargo éste modelo tiene una compleja forma de parámetros distribuidos con un extenso número de estados internos, lo que hace inconveniente este modelo para propósitos de control.

Después del modelo de Fromm y Julien, apareció el modelo de Dahl (Dahl, P. 1976) y el

modelo de LuGre (Canudas de Wit, C. et al. 1995), desarrollados para simular sistemas de control con fricción. En el modelo de Dahl, la fuerza de fricción es función del desplazamiento y de la velocidad relativa, una curva típica de este modelo se muestra en la figura 1.2.

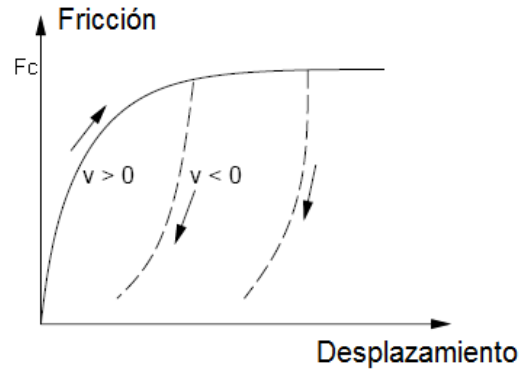


Figura 1.2: Fuerza de fricción como una función del desplazamiento para el modelo de Dahl.

El modelo de Dahl toma la siguiente forma

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx_r} \frac{dx_r}{dt} = \sigma_0 \left( 1 - \frac{F}{F_c} \operatorname{sgn}(v_r) \right)^\beta \quad (1.1)$$

donde  $x_r$  es el desplazamiento relativo,  $v_r = dx_r/dt$  es la velocidad relativa,  $F$  la fuerza de fricción,  $F_c$  la fuerza de fricción máxima,  $\sigma_0$  es el coeficiente de rigidez y  $\beta$  es un parámetro que determina la forma de la curva; este modelo no capta el efecto “*Stribeck*”.

El otro modelo más usado para propósitos de control es el modelo de fricción de LuGre. Este es una extensión del modelo de Dahl que incluye el efecto “*Stribeck*.” El uso del modelo de LuGre para desarrollar la tracción llanta-pavimento fue inicialmente introducido en Canudas de Wit, C. y Tsiotras, P. (1999), pero más tarde fue reforzado y mejorado por Canudas de Wit, C. et al. 2003 y Deur, J., Asgari, J. y Aström, D. (2004).

El modelo de fricción de LuGre de Canudas de Wit, C. et al. 2003 y Canudas de Wit, C. and Tsiotras, P. (1999), está basado en un modelo de fricción visco-elastoplástico para encontrar los desplazamientos y tensiones que ocurren entre dos superficies.

Una de las limitaciones del modelo de LuGre en relación con la fricción llanta-pavimento es que no existe evidencia experimental reportada, en particular sobre la geometría de la zona de contacto.



En cualquier caso se sabe que la fuerza de fricción en la interfaz llanta-pavimento es el principal mecanismo para convertir velocidad angular -aceleración o frenado- en fuerzas longitudinales.

Una suposición común de los modelos de fricción es que el coeficiente de fricción está dado por

$$\mu = \frac{F}{F_n} = \frac{\text{Fuerza de fricción}}{\text{Fuerza normal}} \quad (1.2)$$

donde el coeficiente de fricción  $\mu$ , es una función no lineal de la velocidad relativa normalizada entre la llanta y el pavimento (coeficiente de deslizamiento  $\lambda$ ), con valores diferentes máximos. Adicionalmente, el deslizamiento depende de la velocidad del vehículo y de la superficie de rodadura entre otras condiciones (Burckhardt, M. 1993). La figura 1.3 muestra como estos factores influyen en la forma de  $\mu$ .

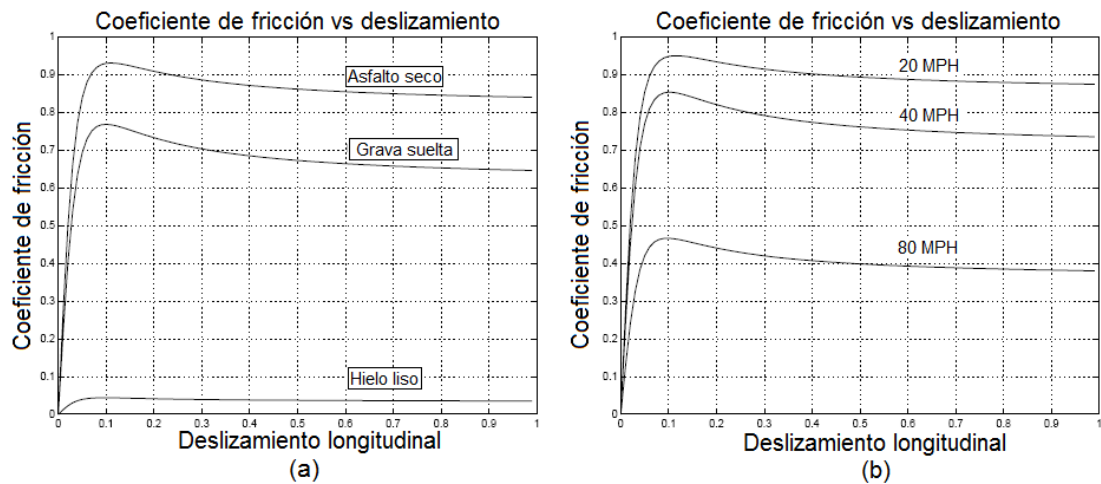


Figura 1.3: Variaciones típicas de la fricción llanta pavimento para (a) diferentes tipos con diferentes tipos de superficie, y (b) diferentes velocidades del vehículo, (Curvas dadas por Harned, J. et al. (1969)).

Las curvas mostradas en la figura 1.3 son derivadas empíricamente, estas pruebas fueron realizadas en estado permanente, con velocidad angular y lineal constantes.

Si bien es indispensable un buen modelo que describa la interacción llanta pavimento, de igual manera también es de suma importancia diseñar leyes de control que compensen los efectos dinámicos de fricción. A lo largo de varios años se han desarrollado algunos sistemas

que mejoran la maniobrabilidad y estabilidad de los vehículos durante el frenado, evitando que se pierda el control del vehículo, tal es el caso de los sistemas ESP (Programa Electrónico de Estabilidad), TCS (Sistema de Control de Tracción), ABS (Sistema de Frenado de Anti-bloqueo), control de dirección y suspensión activa. Estos sistemas se pueden mejorar con nuevos modelos de fricción llanta-pavimento.

Por tal motivo, resulta fundamental estudiar modelos de fricción puesto que son indispensables para reproducir las fuerzas de fricción generadas en el área de contacto entre la llanta y el pavimento.

## 1.1. Objetivo

El presente trabajo tiene dos objetivos principales: (i) Analizar la geometría de la zona de contacto entre la llanta y el pavimento. (ii) Diseñar una ley de control para algoritmos de tracción y frenado. Para ello se propone diseñar y construir un banco de pruebas basado en un cuarto de vehículo que muestre cómo es la distribución de la fuerza en la zona de contacto entre la llanta y el pavimento, utilizando galgas extensométricas. Dicho banco también servirá para estudiar y caracterizar los algoritmos de tracción y frenado. El sistema está constituido por un rodillo y una llanta. Se ha supuesto que el rodillo se comportará como el pavimento y que también representa la masa del vehículo. La llanta está acoplada al eje de un servomotor sin transmisión.

## 1.2. Estructura de la tesis doctoral

- La presente Tesis Doctoral consta de nueve capítulos, siendo el primero de ellos la presente introducción, en este capítulo se plantea el objetivo de la tesis.
- En el capítulo 2 se presenta el estado del arte acerca de los modelos dinámicos de fricción, asimismo, se describen diferentes procedimientos experimentales que permiten caracterizar el comportamiento llanta-pavimento, así como trabajos recientes relacionados con el tema.
- En el capítulo 3 se describen los modelos matemáticos de fricción llanta-pavimento que se ocupan en este proyecto para obtener la ley de control.
- El capítulo 4 muestra la descripción del banco de pruebas y el análisis dimensional de éste.

- En el capítulo 5 se propone un desarrollo para conocer la distribución de las fuerzas en la huella de contacto llanta-pavimento utilizando galgas extensométricas, así como la metodología para la adquisición de datos de las galgas extensométricas utilizando el protocolo de comunicación 802.11b, mientras que en el capítulo 6 se muestran los resultados experimentales de las galgas extensométricas.

- El capítulo 7 se desarrolla una ley de control con base en teoría Lyapunov para estudiar estrategias de tracción y frenado en el sistema experimental, cuyos resultados experimentales se ilustran en el capítulo 8.

- Las conclusiones y la aportación del presente trabajo son presentados en el capítulo 9.

## Capítulo 2

# Modelado de la fricción llanta-pavimento

Inicialmente, se desarrollaron modelos matemáticos para comprender los fenómenos básicos relacionados con las fuerzas longitudinales y transversales que se generan en la zona de contacto llanta-pavimento. El objetivo de estos modelos es encontrar expresiones matemáticas que ayuden a mejorar el comportamiento de los vehículos en particular en las aceleraciones y desaceleraciones. La figura 2.1 muestra las principales entradas y salidas de un modelo matemático clásico para analizar las fuerzas generadas en la zona de contacto.

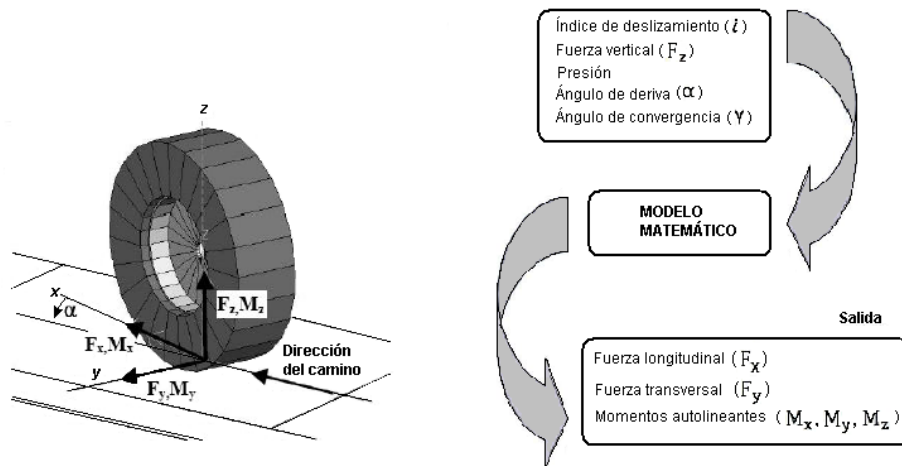


Figura 2.1: Principales entradas y salidas de un modelo matemático de las fuerzas llanta-pavimento.

## 2.1. Modelo *Brush*

En el modelo *Brush* se considera que el contacto entre la llanta y el pavimento se realiza a través de pequeños elementos elásticos, sin masa, denominados cerdas (Deur, J. et al. 2004). Cada cerda se deforma de manera elástica e independiente en dirección tanto longitudinal como lateral. En el modelo de cerdas, la huella de contacto está dividido en dos secciones: la región estática y la región donde ocurre el deslizamiento entre llanta-pavimento ó región deslizante (ver figura 2.2). En la región estática existe una distancia  $x$  donde las cerdas no presentan deformación y otra donde las cerdas sufren una deformación  $S_x$ , dada por,

$$S_x = \left(1 - \frac{v_x}{\omega r}\right) x \quad (2.1)$$

donde  $v_x$  es la velocidad traslacional de la llanta,  $\omega$  es la velocidad angular y  $r$  es el radio de la llanta. La fuerza de fricción longitudinal ( $f$ ) ejercida sobre la llanta en la región estática, es producto de  $S_x$  y la rigidez de la llanta  $C_1$ , integrada de  $x = 0$  a  $x_m$ , donde  $x_m$  marca el punto de transición de la región estática a la región deslizante, esta última región en donde ocurre el deslizamiento entre la llanta y el pavimento.

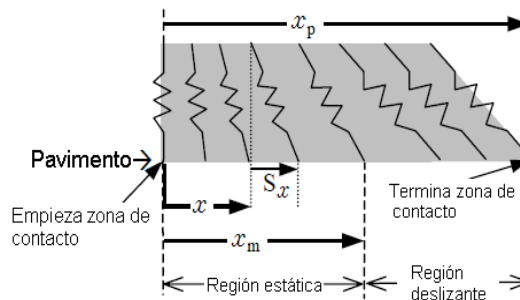


Figura 2.2: Comportamiento de la llanta en la zona de contacto.

La fuerza de fricción del modelo *Brush* está dada por

$$f = \frac{C_1}{2} \left(1 - \frac{v_x}{\omega r}\right) x_m^2 \quad (2.2)$$

donde para determinar  $C_1$  se utiliza una instalación experimental (ver figura 2.3), se coloca una celda de carga para medir las fuerzas horizontales y verticales, haciendo girar independientemente la llanta, entonces la carga y el desplazamiento de la llanta son registrados.

En este modelo se pueden predecir fenómenos de histéresis, similares a los del comportamiento del resorte que se muestra en la figura 2.4. Este experimento consiste en un bloque con masa nula y un resorte que representa las cerdas con un coeficiente  $\sigma$ , y explica el efecto



Figura 2.3: Sistema experimental para medir la rigidez de la llanta.

en las cerdas dependiendo de la tasa de cambio de la fuerza aplicada.

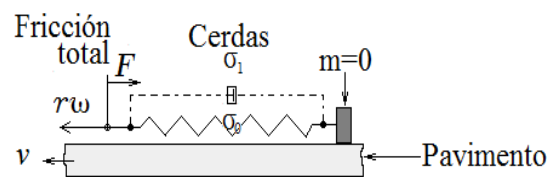


Figura 2.4: Comportamiento de la llanta en la zona de contacto.

Las fuerzas entre la llanta y el pavimento se pueden representar como un sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 2.5 (Pacejka, H. and Sharp, R. 1991), (Clark, S.K. 1981). El sistema tiene como entradas: la fuerza normal  $F_n$ , la velocidad traslacional de la llanta  $v$ , velocidad rotacional de la llanta  $\omega$ , el ángulo de deslizamiento  $\alpha$  y la inclinación del ángulo  $\gamma$ , y tiene como salidas la fuerza longitudinal  $F_x$ , fuerza lateral  $F_y$  y el par autoalineante  $M_z$ .

Este sistema es muy utilizado en la literatura, donde también se asume que el modelo de cerdas en la región de contacto llanta-pavimento, considera una presión uniforme distribuida en la zona de contacto dando lugar a una forma rectangular con una longitud  $L$  y un ancho  $W$  (ver figura 2.6), y con las superficies laterales de la huella de contacto rígidas.

Los valores longitudinales y laterales entre un punto base y la punta de las cerdas en la

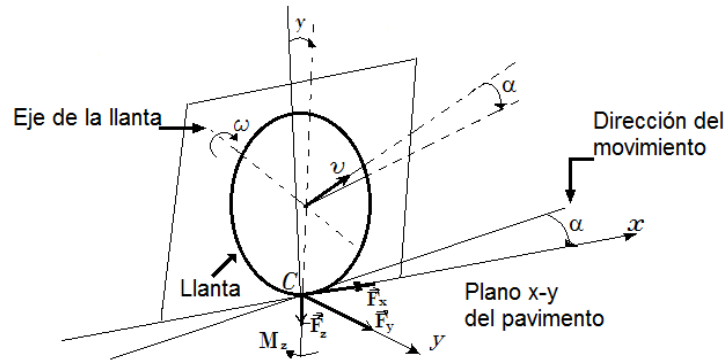


Figura 2.5: Sistema de coordenadas de la llanta.

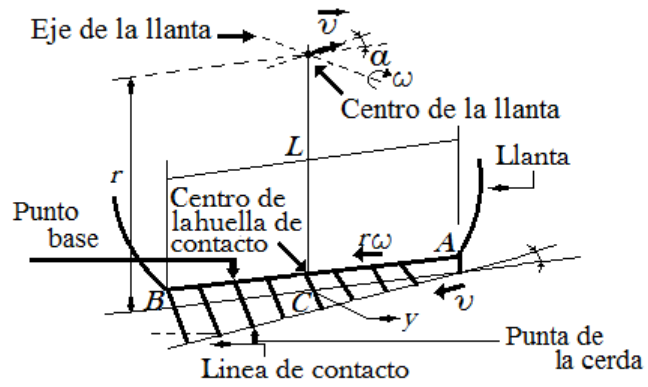


Figura 2.6: Modelo *Brush*.

región correspondiente (ver figura 2.6), están dados por

$$v_{rx} = r\omega - v\cos\alpha, \quad (2.3)$$

$$v_{ry} = v\sin\alpha, \quad (2.4)$$

$$v_r = \sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2}. \quad (2.5)$$

donde  $v_{rx}$  y  $v_{ry}$  son las velocidades relativas con respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $v_r$  es la velocidad relativa de la llanta.

El caso de  $v_{rx} \geq 0$  corresponde a tracción y el caso de frenado a  $v_{rx} < 0$ . Es importante mencionar que las velocidades relativas de  $v_{rx}$ ,  $v_{ry}$  y  $v_r$  varían a lo largo de la longitud de contacto debido al giro y curvatura de la llanta, (Pacejka, H.B. 2002), (Zanten, A. et al. 1990), (Clark, S.K. 1981).

En el modelo *Brush* se considera que la huella de contacto tiene forma rectangular y que la presión normal distribuida tiene forma trapezoidal asimétrica (Deur, J. 2001) (ver figura 2.7).

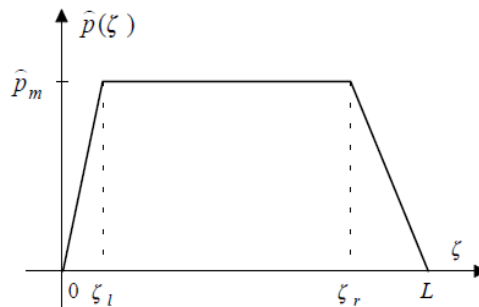


Figura 2.7: Presión normal distribuida en el modelo *Brush*.



## 2.2. Modelo de Fiala

El modelo propuesto por Fiala (Fiala, E. 1991), (Lacagnina, M. et al. 2002), se considera una extensión del modelo original *Brush* en el que la deformación de la llanta es aproximada por una parábola simétrica (ver figura 2.8). El modelo supone que el desplazamiento lateral de la parte del neumático en contacto con el pavimento (*tread*) solo tiene lugar dentro de la huella de contacto (James, L. 2000). La principal ventaja que presenta el modelo de Fiala es que únicamente necesita diez parámetros de entrada donde estos parámetros están relacionados con las propiedades físicas de la llanta. Sin embargo, también presenta importantes limitaciones ya que el modelo no puede representar el comportamiento del neumático cuando está sometido a esfuerzos combinados (longitudinal y lateral).

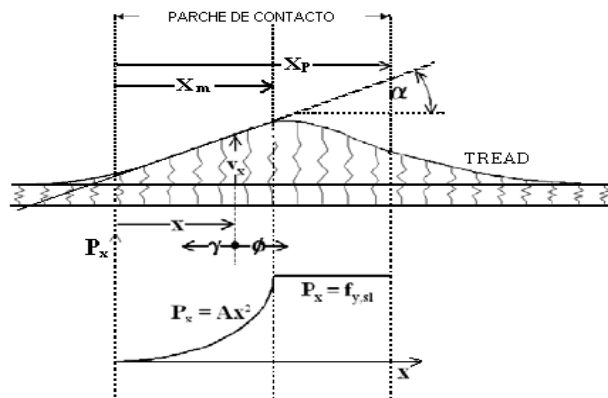


Figura 2.8: Huella de contacto entre llanta-pavimento en el modelo de Fiala.

## 2.3. Modelo de neumático HSRI

El modelo de neumático HSRI-I (*Highway Safety Research Institute*) o de Dugoff (Dugoff, H. et al. 1969), (Dugoff), (Tielking, J. and Mital, N. 1974), (Rajamani, R. 2006) es un modelo alternativo al modelo propuesto por Fiala. Este modelo analítico permite estudiar el comportamiento del neumático frente a esfuerzos longitudinales y laterales combinados y asume la hipótesis de que existe una distribución de presión uniforme en la huella de contacto llanta-pavimento. Su ventaja radica en la sencillez final de las expresiones analíticas de la fuerza longitudinal y lateral, aunque estas sólo son válidas para deslizamientos puros.

Este modelo dio lugar al HSRI-II (Segel, L. et al. 1972), (Tielking, J. and Mital, N. 1974), que considera que la deformación del neumático en la zona de deslizamiento depende de la

rigidez longitudinal y lateral.

## 2.4. Modelo de Bayle

El modelo de Bayle es un modelo meramente empírico. Su importancia radica en el modo de calcular las fuerzas generadas en el neumático en situaciones de deslizamiento combinado. Parte del enfoque del modelo desarrollado por Bakker y Pacejka para deslizamiento puro e incluye unas funciones de peso. Únicamente modela las fuerzas longitudinal y lateral (Bayle, P. et al. 1993).

## 2.5. Modelos basados en cinemática

Estos modelos son derivados de la idealización de la deformación del punto de contacto y de las consideraciones cinemáticas. Estas derivaciones siguen principios semi-empíricos y asumen que las fuerzas de contacto resultan del producto de la deformación y rigidez de la llanta.

Un modelo para la dinámica longitudinal dado en Clover, C.L. and Bernard, J.E. (1998) define el deslizamiento longitudinal normalizado  $z$ , como

$$z = \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{\zeta_0} \quad (2.6)$$

donde  $\zeta_1$  es un elemento hipotético el cual sigue el camino y éste define la distancia del punto de deformación de la llanta al punto  $q$ ,  $\zeta_0$  es un elemento localizado hipotéticamente bajo un estado no deformado, además define la distancia de este punto al punto  $q$  como se muestra en la figura 2.9.

La distancia  $\zeta_0$  es conocida como la relajación longitudinal. Derivando  $z$  en la ecuación (2.6) con respecto al tiempo y sabiendo que  $\dot{\zeta} = |v|$  y que  $\dot{\zeta} = \text{sgn}(v)r\omega$ , se consigue

$$\frac{1}{\sigma} \frac{dz}{dt} = v_r \text{sgn}(v) - |v|z \quad (2.7)$$

$$F = h(z) \quad (2.8)$$

donde  $v$  es la velocidad linear,  $v_r = r\omega - v$  es la velocidad relativa, y la fuerza de fricción  $F$  está definida por la función  $h(z)$  que describe las características del deslizamiento estacionario. En el caso más simple  $h(z)$  está dado por la relación lineal entre la velocidad longitudinal y la rigidez en la llanta  $k$ .

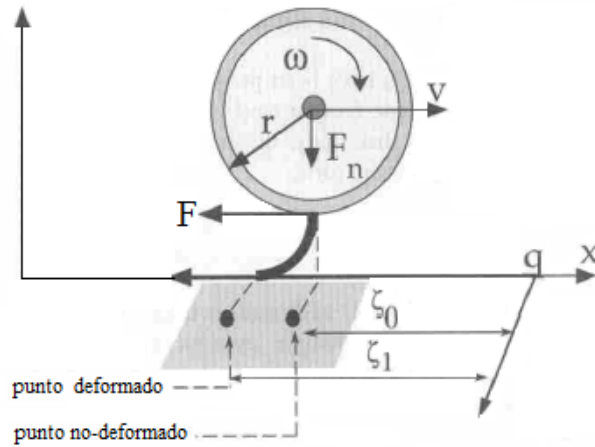


Figura 2.9: Parche de contacto entre llanta-pavimento.

$$h(z) = kz \quad (2.9)$$

La constante  $\frac{1}{\sigma} = \zeta_0$  es llamada longitud de la relajación, y puede estar definida como la distancia requerida para alcanzar el valor  $F_{ss}$  del estado estacionario, como

$$F_{ss} = h(z_{ss}) = kz_{ss} = k \frac{r\omega - v}{v} = ks \quad (2.10)$$

después de un cambio de paso del desplazamiento longitudinal,  $s = s_b = v_r/v = (r\omega - v)/v$ . El papel de la relajación longitudinal  $\frac{1}{\sigma}$  en la ecuación (2.7), puede ser mejor comprendido reescribiendo esta ecuación en términos de coordenadas espaciales  $\eta$ ,

$$\eta(t) = \int_0^t |v(\tau)| d\tau \quad (2.11)$$

o bien, se puede expresar esta ecuación, como

$$\frac{1}{\sigma} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sigma} \frac{dz}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = v_r \operatorname{sgn}(v) - |v|z \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{\sigma} \frac{dz}{d\eta} = -z + \frac{v_r}{v} = -z + s \quad (2.13)$$

La ecuación 2.13 puede ser vista como una ecuación espacial de primer orden con la velocidad de deslizamiento  $s$  como entrada. Por lo tanto, queda claro que  $\sigma$  representa la constante espacial de la ecuación.

Como se señala en Clover, C.L. and Bernard, J.E. (1998), este modelo trabaja bien para altas velocidades, pero tiene oscilaciones a bajas velocidades. La razón es que  $z$  está fijo para valores en estado estacionario ( $z \approx s$ ), y la fricción  $F$  está determinada por el comportamiento ( $F \approx kz$ ), resultando en un sistema mecánico ligeramente amortiguado.

En Clover, C.L. and Bernard, J.E. (1998) se ofrece un algoritmo de doce pasos para la aplicación de este modelo en simulaciones.

## 2.6. Efectos de la fricción

La fricción usualmente es descrita por la curva de fricción estática (ver figura 2.10a), esta curva incluye los efectos de fricción estática: fricción de Coulomb, fricción viscosa y la fricción “*Stribeck*” (Canudas de Wit, C. et al. 1995), (Armstrong-Hélouvy, B. 1991), (Armstrong-Hélouvy B. et al. 1994). La curva puede ser descrita como

$$F(v_r) = [g(s) + \sigma_2|v_r|]sgn(v_r), \quad (2.14)$$

donde  $\sigma_2|v_r|$  es el término de fricción viscosa, y  $g(v_r)$  es la fricción con deslizamiento positivo, y  $g(s)$  es una función que se describirá más adelante.

La curva de la figura 2.10b corresponde a la tensión-deformación con histéresis. Esta curva describe el proceso de elasticidad y deformación de la cerda, lo que implica que hay variaciones en los desplazamientos  $x_r$  entre las superficies de contacto, (en este caso entre el punto base y el extremo de la cerda como se mostró en la figura 2.6), antes de que ocurra el deslizamiento real.

Otros efectos dinámicos de fricción son conocidos a través de experimentos de la tribología (figura 2.10c). En estos efectos se puede observar como decrece la máxima fricción  $F_s$  a la fricción de Coulomb  $F_c$ , con una tasa de cambio de la fuerza aplicada, a esta transición se le llama efecto “*Stribeck*”. La figura 2.10d muestra la respuesta de la fricción para bajas velocidades con respecto a los cambios periódicos de la velocidad relativa.

Las ilustraciones de la figura 2.10 muestran los diferentes efectos de la fricción estática (a) y dinámica (b).

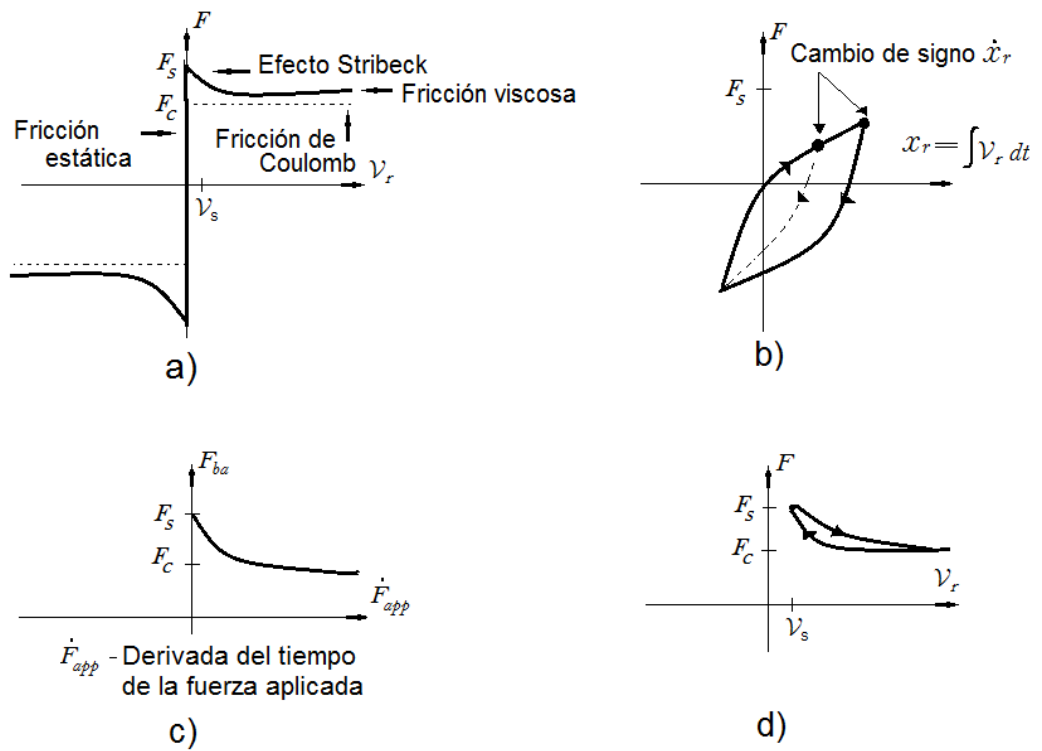


Figura 2.10: Efectos de la fricción. Curva de la fricción estática (a), Fuerza de fricción en función del desplazamiento (b), Fuerza de fricción vs. velocidad (c) y Respuesta de la fuerza de fricción para la velocidad relativa que varía periódicamente (d).

## 2.7. Procedimientos de ensayo empleados para la experimentación con neumáticos

En la actualidad son muchos los procedimientos de ensayo empleados para la experimentación con neumáticos, en particular para estudiar la fuerza de contacto, algunos sistemas experimentales permiten conocer con mayor precisión el esfuerzo longitudinal que sufre el neumático en el proceso de rodadura.

Más adelante se describirán algunos sistemas de ensayo representativos a lo largo de varias décadas, estos sistemas son divididos en dos grupos: sistemas de ensayo de exterior y sistemas de ensayo de interior o de laboratorio.

Los sistemas de exterior plantean una gran ventaja sobre los métodos de laboratorio, y es que son llevados a cabo en condiciones reales de funcionamiento. Sin embargo, la gran desventaja que presentan frente a los métodos de interior, es el escaso control que se tiene sobre los parámetros que influyen sobre el sistema, es decir, durante el ensayo resulta complicado fijar valores precisos del deslizamiento. En los sistemas de ensayo de interior es posible controlar de forma precisa, e incluso seleccionar, la superficie de contacto sobre la que se hace rodar el neumático.

Existen algunos sistemas de exterior donde el vehículo está instrumentado, esto permite obtener información concreta y precisa de un determinado neumático, pero implica tener ciertos problemas al momento de caracterizar y controlar con precisión todos los parámetros. Por este motivo, los estudios realizados en esta forma no siempre son generalizables, y la información, aunque precisa, queda restringida al estudio de sistemas muy concretos (Tuononen, A. 2008).

Dentro de las opciones de instrumentación de un vehículo hay infinidad de posibilidades, pero los parámetros que habitualmente interesa obtener son: desplazamientos que permitan conocer el posicionamiento de la llanta sobre el pavimento, deslizamientos longitudinales, laterales, fuerzas y momentos.

Medir los deslizamientos es un problema complejo, que habitualmente se hace a través de la medida de la velocidad angular del neumático y de la velocidad de traslación de su eje que es particularmente difícil de medir.

Las fuerzas y momentos se pueden medir a través de celdas de carga, transductores de par o elementos semejantes, pero en la actualidad se suele hacer utilizando llantas dina-

mométricas. En 1981, Kistler <sup>1</sup> introdujo los primeros dinamómetros de rueda en el mercado, equipados con sensores de cuarzo, con los que se podían realizar medidas sobre vehículos a velocidades de hasta 200 km/h. Sin embargo, eran más pesados que una rueda estándar por lo que afectaban a las características de conducción del vehículo.

Los dinamómetros de rueda de Kistler ayudan a desarrollar los sistemas de control de tracción y los ABS (Sistema Anti-bloqueo de Frenos), detectando mediante los sensores de cuarzo y silicio la presión en los sistemas de frenado. Estos equipos simplifican la medida de esfuerzos, pues son de instalación y manejo relativamente sencillos. Las llantas dinamométricas están basadas en dos tipos de sensores diferentes: Galgas extensométricas resistivas y materiales piezoeléctricos.

## 2.8. Ensayos experimentales para estudiar la fricción

En la literatura existe una gran variedad de trabajos relacionados en este ámbito. Para comprender la fricción se han diseñado algunos sistemas que ayudan a su entendimiento. Este tipo de sistemas tienen un neumático el cual hacen girar de forma cíclica sobre una superficie en movimiento, en algunos casos esto se invierte. Estos sistemas se pueden apreciar en la figura 2.11.

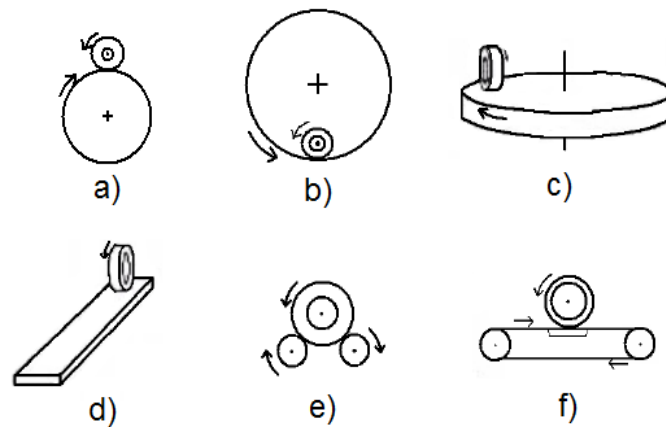


Figura 2.11: Esquema de los equipos empleados en laboratorio: Tambor externo (a), Tambor interno (b), Disco de rotación plana (c), Plataforma plana (d), Rodillos gemelos (e) y Correa plana (e).

Además de estos equipos, que sirven para el estudio de neumáticos, hay algunos sistemas

<sup>1</sup>Kistler es una de empresa dedicada a la fabricación de equipos para la medición de magnitudes dinámicas.

muy útiles para analizar la distribución de presión en la zona de contacto llanta-pavimento, así como las fuerzas longitudinales y transversales que se desarrollan a través del coeficiente de fricción.

### 2.8.1. Equipos de tambor externo o interno

El procedimiento de ensayo mediante tambor externo (ver figura 2.12) es uno de los más empleados en el desarrollo de modelos de contacto llanta-pavimento, mientras que el interno es mucho menos usado por la complejidad de su diseño y construcción. Este equipo, en función de sus propias dimensiones geométricas, resulta adecuado para el ensayo de neumáticos tanto de vehículos de pequeñas dimensiones como de vehículos industriales de todo tipo (Ginn, J. and Marlowe, R. 1967), (Ginn, J. et al. 1962). Una de las desventajas de este equipo es su elevado costo de construcción.

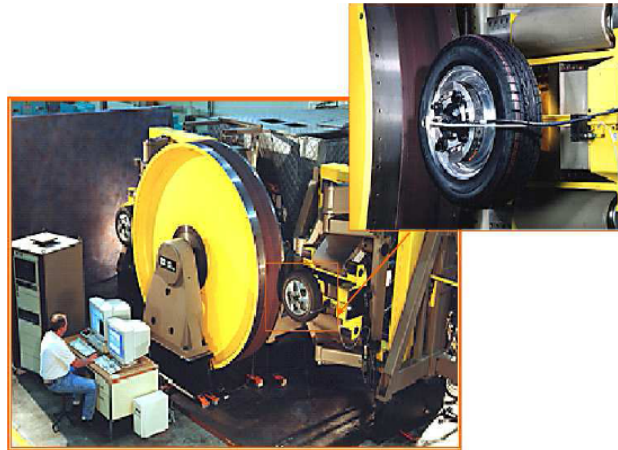


Figura 2.12: Esquema utilizado en laboratorio.

Una de sus mayores virtudes está en la capacidad de realizar ensayos dinámicos hasta una velocidad elevada (máquinas convencionales alcanzan los 200 km/h de velocidad circunferencial). Mediante las medidas de las velocidades del neumático y el tambor es posible obtener el índice de deslizamiento. Los sensores que incorporan estos sistemas permiten conocer fuerzas y momentos actuantes, y caracterizar estos de forma precisa y controlada.

Al tambor se le pueden instalar distintas superficies de rodadura, mediante láminas rugosas que permiten simular distintas características superficiales. También permite ajustar la carga que soporta el neumático hasta valores muy elevados, dependiendo de las carac-



terísticas constructivas de la propia máquina. Una de las mayores ventajas de este tipo de equipos es la posibilidad de variar el posicionamiento de la rueda respecto de la superficie de rodadura.

### **2.8.2. Equipos de disco de rotación plana**

Los sistemas de ensayo de rotación plana son muy poco utilizados, y el motivo fundamental es que la trayectoria que presenta la llanta es curva, en este caso a diferencia del sistema de tambor externo, la superficie de contacto es plana. En este sistema el neumático está rodando permanentemente sobre una trayectoria curva, generando deformaciones en el neumático que limita la representatividad de los valores de momentos registrados.

En el equipo de rotación plana se tiene la necesidad de utilizar discos de muy elevado diámetro para obtener información precisa de los esfuerzos generados en el contacto llanta-pavimento, del desgaste de la llanta o de la geometría de la huella.

### **2.8.3. Equipos de rodillos gemelos**

El equipo de rodillos gemelos es similar al sistema de tambor, es decir, se hace rodar el neumático de forma cíclica sobre una superficie circular (ver figura 2.13). Este sistema permite el estudio de neumáticos montados en vehículos. Sin embargo, tiene la desventaja que se generan dos huellas de contacto que poco tienen que ver con la huella desarrollada en funcionamiento real (I.T.V. 2006).

Este tipo de sistemas tiene su utilidad restringida al estudio de esfuerzos tangenciales y longitudinales, siendo útil, por ejemplo para el estudio de resistencia a la rodadura. Tiene la desventaja de tener un pequeño radio de los rodillos, se dan en el neumático mayores deformaciones que en condiciones reales de funcionamiento. En muchos casos esto implica que las medidas no son representativas y tienen que ser corregidas mediando otros sistemas complementarios, limitando en gran medida su aplicabilidad.

### **2.8.4. Equipos de correa plana**

El sistema de correa plana es uno de los más utilizados para el estudio de neumáticos (Bird, K. and Martin, J. 1973), (Carrillo, J. A. C. 2004). Presenta grandes semejanzas con los sistemas de tambor, permitiendo estudiar los mismos parámetros con similar precisión, pero aporta una mejora notable al hacer rodar el neumático sobre una superficie plana (ver Figura 2.14). Por otra parte, la complejidad que requiere el sistema para conseguir el

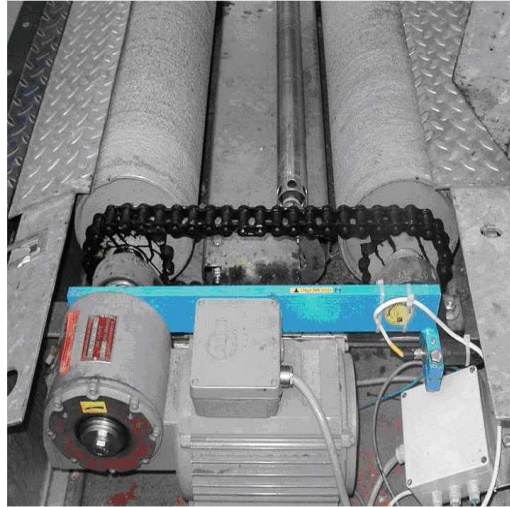


Figura 2.13: Equipo de rodillos gemelos.

funcionamiento adecuado de la correa es superior al del equipo con tambor, y generalmente tiene una menor capacidad para aplicar cargas al neumático.

Dicho sistema permite controlar con precisión el deslizamiento, y permite conocer las fuerzas y momentos, permitiendo hacer estudios dinámicos muy completos de los neumáticos. Sin embargo, el funcionamiento de la correa presenta importantes inconvenientes para la realización de ensayos a muy baja velocidad.

## 2.9. Sistemas para la obtención de distribución de presiones

Los equipos para la obtención de distribución de presiones no sólo se emplean para el estudio de neumáticos, por este motivo únicamente se hará mención de los sistemas que mejor se adaptan a las características de los ensayos con neumáticos.

### 2.9.1. Equipo basado en piel inteligente

Actualmente existe equipo basado en piel inteligente (*smart skin*) (ver figura 2.15). Dicha piel tiene una capacidad muy limitada para soportar esfuerzos, con lo cual su rango de funcionamiento exige velocidades relativamente bajas, y fundamentalmente, sollicitaciones dinámicas pequeñas. Permite tener información de la presión ejercida en pequeñas celdas, mediante la variación de conductividad, dando lugar a un mapa de distribución de presiones (Rose, J.G. and Guenther, T.E. 2009).

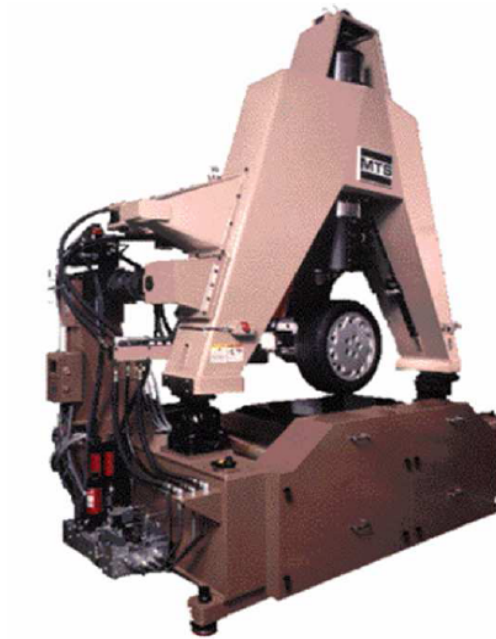


Figura 2.14: Equipo de correa plana.

La información que proporciona este sistema es: secuencias con variaciones de la distribución de presiones de una huella a lo largo de un determinado tiempo, fuerza, área y presión frente al tiempo, módulo y posición de la resultante de la distribución de presiones en tiempo real.

### 2.9.2. Método FTRI

El método de la Frustración Total de la Reflexión Interna de la luz es un método desarrollado por el Grupo de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Málaga, consiste en hacer pasar el neumático sobre una lámina plástica, que está sobre una placa de cristal que es atravesada por haz luminoso (Castillo, J. et al. 2006). Este haz viaja con ángulo de reflexión constante que se ve interrumpido, produciéndose la refracción de la luz hacia fuera del cristal. Esta refracción ilumina el plástico, interfaz que es de color claro y refleja la luz (ver figura 2.16). Como consecuencia, al observar la huella por debajo del cristal, se puede ver un punto brillante en cada punto de contacto con un nivel que es proporcional a la presión ejercida en dicho punto. Así, permite, mediante el análisis informático de la imagen, obtener información cuantitativa de la distribución de presiones. El resto de la información se puede hallar a partir de dichas presiones, y la medida del área de la huella de contacto.

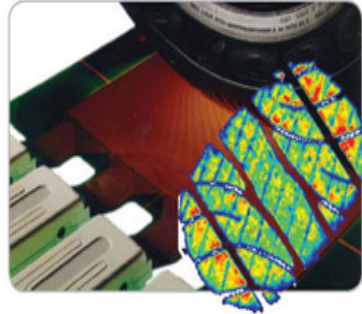


Figura 2.15: Imagen obtenida mediante piel inteligente. Muestra huellas de contacto, con la distribución de presiones representada mediante escala de colores.

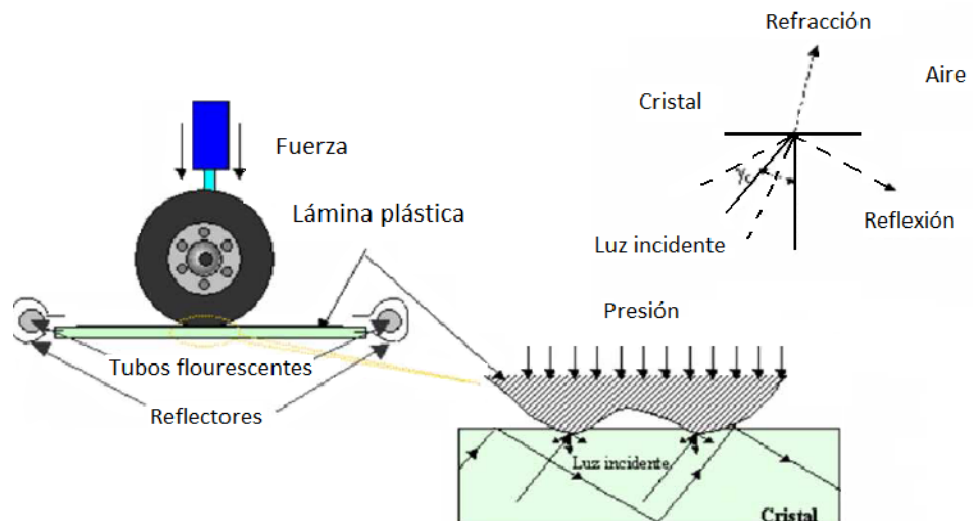


Figura 2.16: Método de la Frustración Total de la Reflexión Interna (F.T.R.I).

En este tipo de equipos existe la limitación de tener que restringir los ensayos a muy bajas velocidades y bajas sollicitaciones dinámicas, inferiores a las reales de un neumático montado en un vehículo.

### 2.9.3. *Smart tire*

En la Universidad de Rutgers, Nueva Jersey, se está trabajando con un banco de pruebas para estudiar las fuerzas de distribución en el área de contacto llanta-pavimento en estado estacionario, ellos analizan las fuerzas generadas utilizando sensores eléctricos introducidos en una llanta como se muestra en la figura 2.17. También diseñaron un sistema de visión para detectar información sobre la deformación de la llanta en la zona de contacto.



Figura 2.17: Llanta utilizada en el banco de pruebas, “*smart tire*”.

Afirman, como en todas las demás investigaciones en este campo, que analizar la zona de contacto tiene retos importantes como por ejemplo, las altas no linealidades debidas a las propiedades y condiciones del pavimento, que pueden producir grandes deformaciones en las llantas, producto del caucho y las diferentes condiciones del clima.

El método que utilizan esta inspirado en sensores táctiles ( *fingertip*), método usado en V.A. Ho, D.V. Dao y S. Hirai (2011). Para el desarrollo del sistema “*smart tire*” toman una aproximación similar a V.A. Ho, D.V. Dao y S. Hirai (2011), incrustando sensores de fuerza dentro del caucho de la llanta para medir la presión y distribución de fuerzas. El sistema de visión sirve para detectar el “*stick – slip*”.

Desde el punto de vista macroscópico, el “*stick – slip*” consiste en el sucesivo y repentino cambio de estado del movimiento relativo entre dos superficies en contacto, de reposo “*stick*”, a deslizamiento “*slip*”.

Afirman también que la deformación del caucho de la llanta es pieza clave de información para entender la interacción llanta-pavimento, (Yilmazoglu, O. et al. ), (Muller, S. et al. 2003). Estudian la interacción entre llanta-pavimento mediante la incorporación de una serie de sensores sensibles a la presión, estos sensores son de bajo costo y pueden detectar con precisión las fuerzas generadas dentro de la llanta.

Para conocer la distribución de la fuerza en la zona de contacto llanta-pavimento usan una cámara de alta resolución colocada por debajo de una estructura de acrílico transparente (ver figura 2.18).

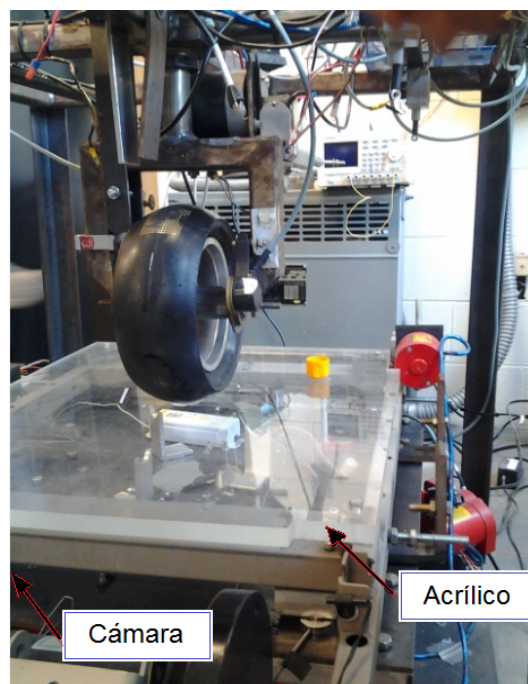


Figura 2.18: Prototipo del banco de pruebas “*smart tire*”.

Un espejo reflector es usado para alcanzar la distancia focal requerida entre la huella de contacto y la cámara (ver figura 2.19). La adquisición de la imagen, la calibración de la cámara y el procesamiento de la imagen es implementada en el software de LabVIEW de *National Instruments*.

En la estructura que diseñaron utilizan la llanta de una mini-moto con un exterior liso, además, para representar al pavimento utilizan una banda de plástico colocada por debajo de la llanta como se muestra en la figura 2.19. La banda se apoya a un equipo individual

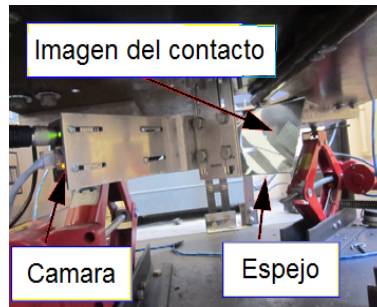


Figura 2.19: Estructura para medir la deformación de la llanta.

controlado por computadora. También utilizan potenciómetros para regular la posición y el ángulo de la banda. Tres celdas de carga son posicionadas bajo la banda para medir la carga normal entre la llanta y la banda.

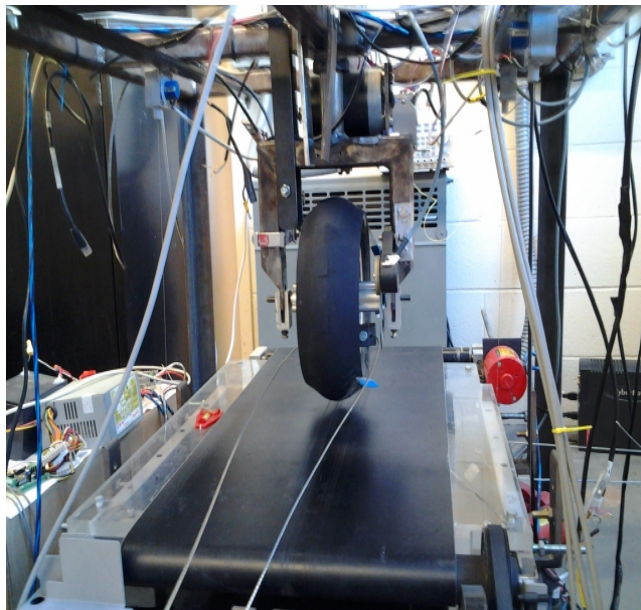


Figura 2.20: Prototipo del banco de pruebas “*smart tire*”.

La presión normal en la zona de contacto es  $F_n(x, y)$ , la presión en la llanta  $P$  y la fuerza total normal  $F_z$  para la región  $(x, y)$ . Denotan la distribución de la fuerza de fricción en el punto  $(x, y)$  como  $F_f(x, y)$  y la fuerza total de fricción en  $x$  como  $F_x$ , esto es

$$F_z = \int_s F_n(x, y) dS \quad (2.15)$$



$$F_x = \int_s F_f(x, y) \cos \theta dS \quad (2.16)$$

donde  $dS$  es una área infinitesimal de  $s$  y  $\theta$  es el ángulo de  $F_f(x, y)$ .

Para determinar la geometría en la zona de contacto y otras variables tales como la fuerza normal  $F_z$  y la presión en la llanta  $P$ , utilizan datos experimentales junto con un modelo empírico.

La figura 2.21 es una imagen tomada por la cámara para medir el tamaño de la huella de contacto, a partir de una película de agua entre la llanta y el acrílico.

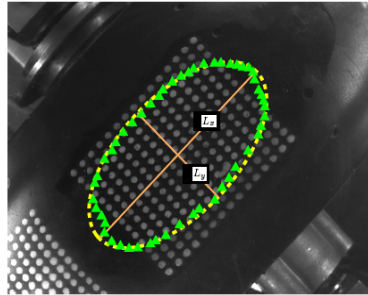


Figura 2.21: Forma geométrica y estimación del tamaño de la huella de contacto llanta-pavimento.

Por otro lado se sabe que la huella de contacto tiene forma elíptica si la sección transversal es circular (Wang, Y., Gnadler, R., and Schieschke, R. 1994), es por ello que para estimar el radio  $L_x$  y  $L_y$ , se conducen a una serie de experimentos variando la fuerza normal  $F_n$  (de 44.5 N a 445 N). La figura 2.22 muestra resultados experimentales de  $L_x$  y  $L_y$  de la huella contacto elíptica. De los datos experimentales la función exponencial de la carga normal  $F_z$  y la presión de la llanta (en psi) son utilizadas para predecir  $L_i$ ,  $i = x, y$ , como

$$L_i(p, F_z) = a_i(p)F_z^{b_i(p)}, \quad i = x, y \quad (2.17)$$

donde  $a_i(p) = a_{i2}p^2 + a_{i1}p + a_{i0}$ ,  $b_i(p) = b_{i2}p^2 + b_{i1}p + b_{i0}$ ,  $i = x, y$  son funciones cuadráticas de  $p$ , respectivamente.

Debido a la deformación y elasticidad de la llanta, es difícil obtener resultados analíticos de la distribución normal de la carga, es por eso que toman una aproximación empírica para obtener la distribución espacial de la carga normal. La figura 2.23 presenta la presión de la huella de contacto cuando  $p = 20$  psi y  $F_z = 356$  N. En esta imagen se observa que  $F_n(x, y)$



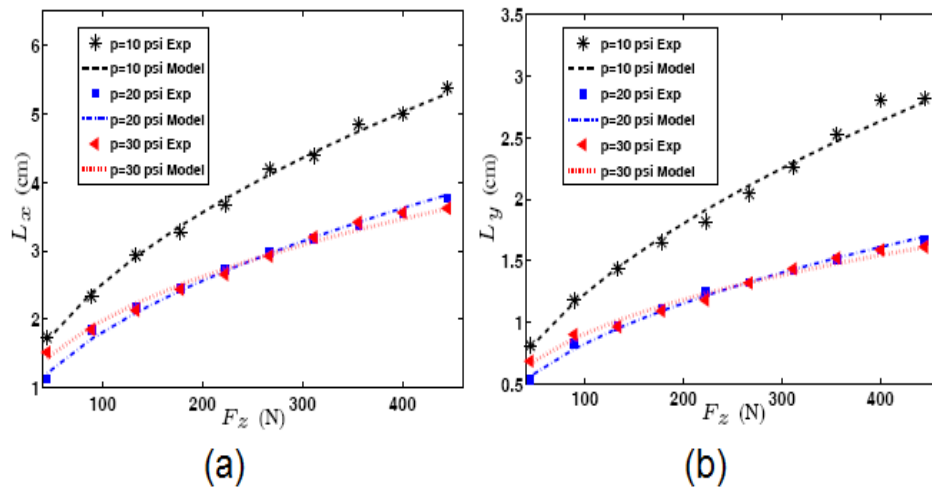


Figura 2.22: Parámetros de adherencia al pavimento.

es simétrica con respecto al centro de la huella de contacto  $P$ .

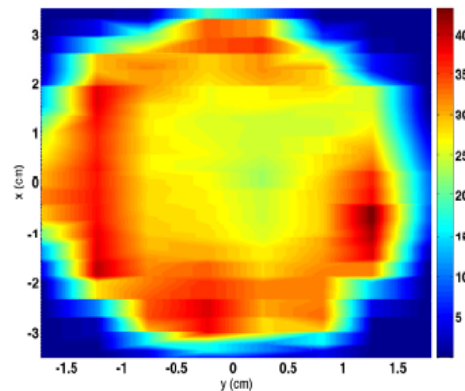


Figura 2.23: Distribución de la presión de el contacto  $F_n(x, y)$  llanta-pavimento.

Para comprender la imagen obtenida  $F_n(x, y)$ , muestran la figura 2.24,  $f_n(x, y)$  a lo largo del eje  $x$  y el resultado la figura claramente resulta un hundimiento en el centro.

La distribución de  $F_n(x, y)$  se debe principalmente a la estructura de la llanta y a la elasticidad del caucho, teniendo como conclusión que la presión se asemeja a una forma trapezoidal. La forma de la presión normal cambia debido a la fuerza normal.

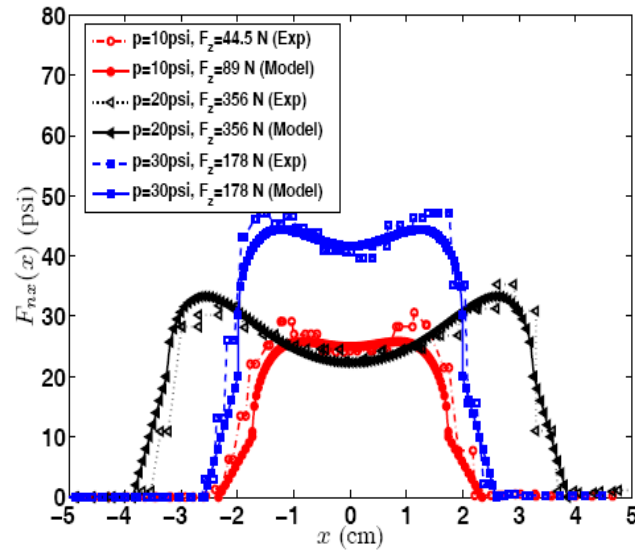


Figura 2.24: Modelo de la presión normal de el contacto llanta-pavimento.

## 2.10. Trabajos recientes relacionados con la caracterización llanta-pavimento

En Merzouki, R. et al. (2007), se desarrolla un modelo que permite estimar el impacto de las fuerzas longitudinales llanta-pavimento en interacción con el medio ambiente. El sistema que trabajan está representado en la figura 2.25, donde el caucho de la llanta es considerado un material visco-elástico, el cual se deforma dependiendo del camino; las variables de entrada corresponden a la fuerza normal deducida de la presión del neumático, fuerza longitudinal  $F_x$  y fuerza de fricción  $F_h$ .

Utilizan la técnica de *bond graph* y representan un modelo global en subsistemas (ver figura 2.26). Comparando este sistema con un diagrama clásico de bloques, la entrada y la salida de cada subsistema define la variable por medio de una flecha. Las variables utilizadas como un sistema son: fuerza ( $F$ ), velocidad lineal ( $\dot{x}$ ), temperatura ( $T$ ), entrada térmica de flujo ( $\dot{S}$ ), presión ( $P$ ), volumen ( $\dot{V}$ ), torque ( $\tau$ ) y velocidad angular ( $\omega$ ).

Para cada uno de estos subsistemas se define un modelo matemático. El modelo global necesita dos medidas principales: velocidad lineal del vehículo  $\dot{x}$ , y velocidad angular de la llanta  $\omega$ ; la temperatura de la llanta puede ser un parámetro tomado en línea o fuera

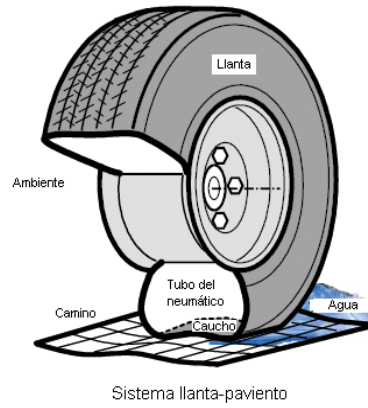


Figura 2.25: Sistema llanta-pavimento.

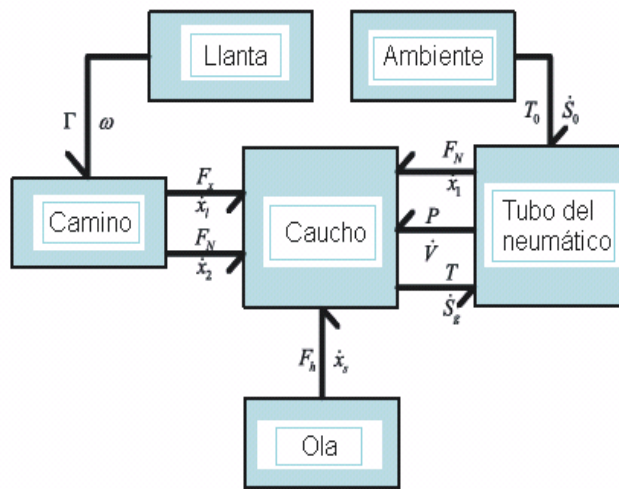


Figura 2.26: Representación en *bond graph* de la interacción llanta-pavimento.

de línea y el perfil del camino lo consideran como una entrada externa; la variación de la presión es causada por la variación de la temperatura.

Una vez que describen todos los modelos matemáticos presentan las simulaciones realizadas en *MATLAB-Simulink* (ver Figuras 2.27 y 2.28). Estas simulaciones muestran esfuerzos longitudinales en relación a la presión y a la temperatura del neumático.

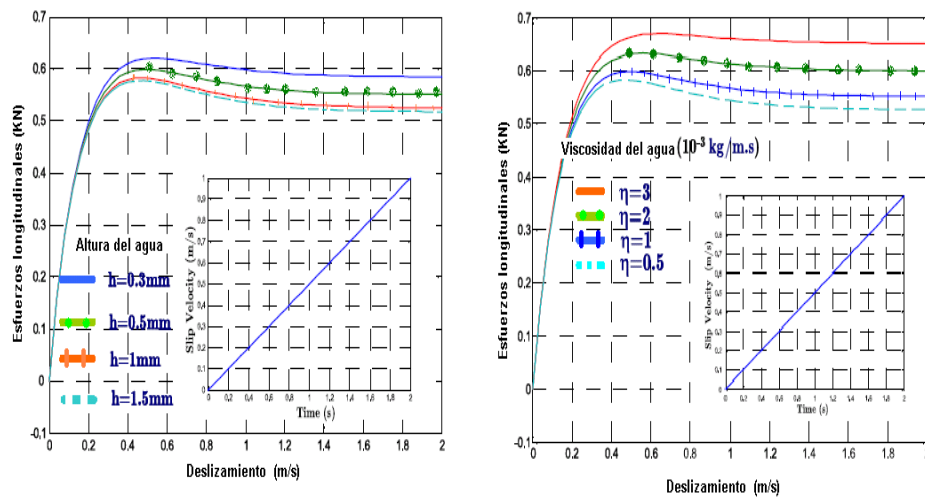


Figura 2.27: Esfuerzos longitudinales contra deslizamiento.

Por otro lado en Han, J. et al. (2008), trabajan con un observador no lineal para estimar la fuerza de fricción llanta-pavimento haciendo un monitoreo de la presión de la llanta; para ello utilizan identificación de parámetros y el modelo de LuGre, basándose en el algoritmo de colonias de hormiga (ACA).

En éste, como en otros muchos trabajos, postulan que la llanta es parte fundamental del vehículo, puesto que es su soporte, además de transmitir la fuerza para acelerar o frenar. Un punto importante para asegurar una buena estabilidad del vehículo durante un viaje es detectar los parámetros importantes de la llanta como, por ejemplo, la presión en el neumático.

ACA está inspirado en la observación real de la colonia de hormigas, y su fuente inspiradora está en el comportamiento real de las hormigas que les permite que encuentren los caminos más cortos entre sus nidos y las fuentes de comida. Mientras caminan del nido a la fuente de comida, las hormigas pueden depositar en la tierra una hormona llamada feromona, formando un camino. Las hormigas pueden oler la feromona y tienden a elegir

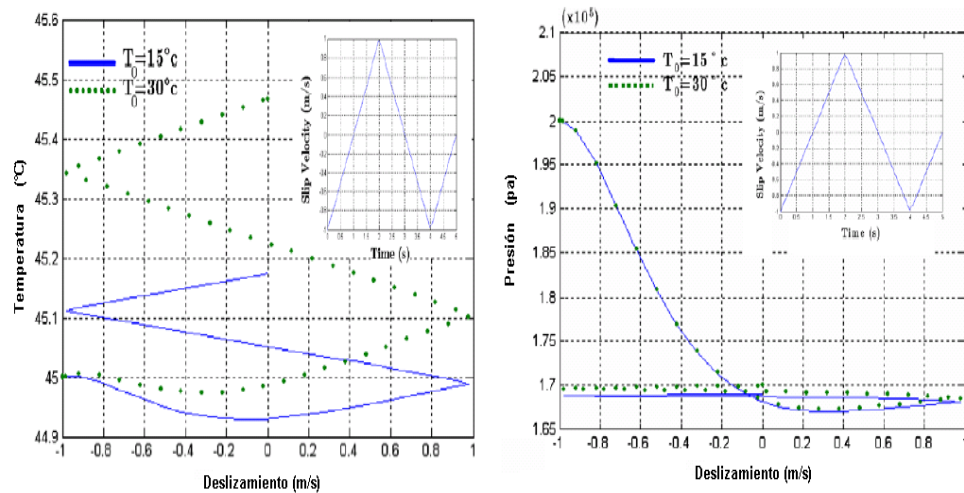


Figura 2.28: Variación de temperatura y presión dentro del neumático.

trayectorias marcadas por concentraciones fuertes de feromona; la probabilidad de que las hormigas elijan estos caminos se incrementa con el número de hormigas que previamente hayan pasado por ahí, y cuando llega al final, la hormiga tiende a converger por el mismo camino.

El principal propósito de su investigación es proponer un nuevo método para estudiar la fricción llanta-pavimento basado tanto en un modelo estático como en uno dinámico, así como detectar la presión ideal en el neumático utilizando teoría moderna para controlar su presión. Para conseguir esto último, primero simplifican el movimiento dinámico de un cuarto de vehículo para después hacer uso de los parámetros de identificación del modelo de LuGre y el ACA. Diseñan un observador no lineal para estimar la fuerza de fricción del vehículo utilizando la velocidad angular de la llanta. Los parámetros usados en su trabajo son los resultados de ACA.

El observador diseñado es simulado en *Simulink* de *MATLAB*. La figura 2.29 muestra los resultados de tres diferentes condiciones de presión. La parte alta corresponde a la presión normal de la llanta, la parte media corresponde a la presión de la llanta cuando se decrementa en 15% y la parte baja muestra la presión de la llanta cuando decrementa 30%. El parámetro  $\theta$  en el observador refleja los cambios del coeficiente de adherencia sobre el pavimento, ellos pueden utilizar  $\theta$  para detectar la presión de la llanta.

Otro trabajo es el que están desarrollando en la Universidad de California, Berkeley (Co-

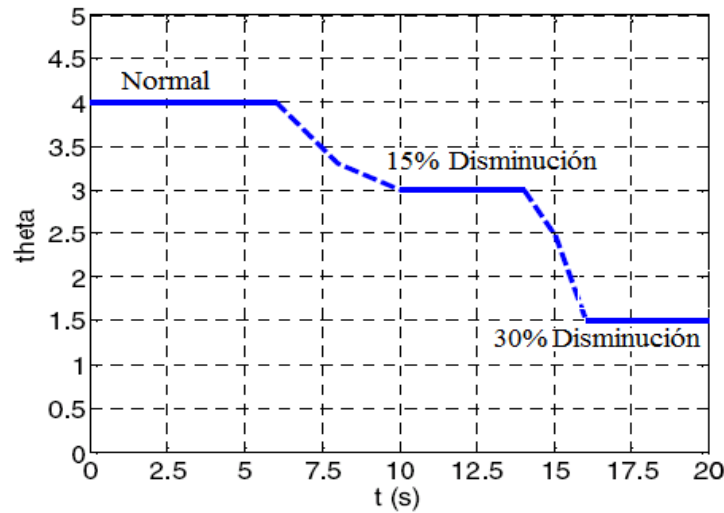


Figura 2.29: Parámetros de adherencia al pavimento.

leri, S. et al. 2009), donde los autores intentan activar la seguridad de sistemas de vehículos basándose en una rápida estimación de los valores dinámicos importantes tales como la fuerza de fricción actual llanta-pavimento y máxima fricción llanta-pavimento. Midiendo estos parámetros directamente de las llantas se puede activar la seguridad en los sistemas. Esto lo pueden realizar por medio de sensores inteligentes colocados dentro de los neumáticos, lo que es una tarea desafiante puesto que la energía disponible está limitada. Para lograr esta meta, el grupo de trabajo tiene expertos en distintas disciplinas de la ingeniería, incluyendo diseños de sistemas de control, procesamiento de señales, diseño de circuitos integrados, comunicaciones, diseño de software en tiempo real, diseño de antenas y ensamble del sistema. Para poder estimar las fuerzas y la fricción cinética  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  y  $\mu_k$  junto con otros importantes parámetros, fricción potencial  $\mu_p$ , interacción llanta-pavimento y deslizamiento  $\sigma$  se hace uso de acelerómetros; el punto clave es analizar la huella de contacto entre la llanta y el pavimento.

Por otro lado cabe comentar que en la bibliografía propuesta es posible encontrar extensa información de diversos artículos escritos en torno a estos temas. En estos artículos también se hace mención de algunos modelos de gran relevancia que no se han descrito en detalle en este apartado. Este es el caso del modelo LuGre Canudas de Wit, C. et al. (1995), Canudas de Wit, C. and Tsiotras, P. (1999), que se incluyen por su interés como modelos de fricción.

## Capítulo 3

# Modelos matemáticos para fricción llanta-pavimento

En este trabajo se emplea un modelo vehicular simplificado que sólo considera la dinámica longitudinal del vehículo y una sola llanta. Este modelo es de uso común en el estudio del control de tracción o frenado, por ejemplo en Kiencke, U. and Daiss, A. (1994), Kiencke, U. and Daiss, A. (1993) y Liu, Y. and Sun, J. (1995).

### 3.1. Modelo matemático de un cuarto de vehículo

Para describir el movimiento longitudinal de un cuarto de vehículo, se utiliza el siguiente modelo

$$m\dot{v} = 4F_x - F_{ax} \quad (3.1)$$

donde  $m$  es la masa del vehículo,  $v$  la velocidad longitudinal del vehículo,  $F_x$  la fuerza entre la llanta y el pavimento y  $F_{ax}$  la fuerza aerodinámica de arrastre que se expresa como

$$F_{ax} = C_{ax}v^2 \quad (3.2)$$

$C_{ax}$  es el coeficiente aerodinámico que depende del área longitudinal efectiva, la densidad del aire y la forma del vehículo. La fuerza de fricción llanta-pavimento está dada por

$$F_x = -\mu F_n \quad (3.3)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción llanta-pavimento y  $F_n = \frac{mg}{4}$  es la fuerza normal en cada llanta. La dinámica rotacional de la llanta está descrita por

$$I_1\dot{\omega}_1 = \tau_m - \tau_b - F_x R_1 \quad (3.4)$$

donde  $\dot{\omega}_1$  es la aceleración angular,  $I_1$  es la inercia rotacional de la llanta,  $\tau_m$  es el par de impulso,  $\tau_b$  es el par de frenado y  $R_1$  es el radio efectivo de la llanta.

De las Ecs. (3.1) y (3.4) se puede establecer que la velocidad longitudinal  $v$  y la velocidad angular  $\omega$ , están relacionadas a través de la velocidad relativa  $s$ , definida por

$$s = v - R_1\omega. \quad (3.5)$$

Durante el frenado la velocidad relativa  $s$  está relacionada con el deslizamiento  $\lambda$  por  $\lambda = s/v$ . Se puede introducir a  $s$  como variable de estado, en vez de  $\omega$ , se toma la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (3.5)

$$\dot{s} = \dot{v} - R_1\dot{\omega}. \quad (3.6)$$

Sustituyendo las Ecs.(3.1) y (3.4) en la ecuación (3.6), se obtiene

$$\dot{s} = -\frac{R_1}{I_1}\tau_m + \frac{R_1}{I_1}\tau_b + \frac{R_1^2}{I_1}F_x + \frac{4F_x}{m} - \frac{F_{ax}}{m} \quad (3.7)$$

Si se toman las ecuaciones (3.2) y (3.3) y se sustituyen en Ecs. (3.1) y (3.7), la dinámica del vehículo queda como

$$\dot{v} = -c\mu - dv^2 \quad (3.8)$$

$$\dot{s} = -(a+c)\mu - b - v^2 - dv^2 + e\tau_b \quad (3.9)$$

donde  $a = \frac{R_1^2 mg}{4I_1}$ ,  $b = \frac{R_1 \tau_d}{I_1}$ ,  $c = g$ ,  $d = \frac{C_{ax}}{m}$ ,  $e = \frac{R_1}{I_1}$ .

La intención de este modelo es desarrollar expresiones dinámicas para usarse después con propósitos de control así como también obtener el coeficiente de fricción llanta-pavimento como una función de la dinámica del vehículo.

## 3.2. Modelos estáticos de fricción

Los modelos estáticos de fricción generalmente llamados modelos fuerza-deslizamiento, describen mapas estáticos  $F(S) : s \rightarrow F$ . Estos modelos dependen de la velocidad del vehículo  $v$ , que es,  $F(s, v)$ , y también dependen de los cambios y características del pavimento, a continuación se detallan algunos.



### 3.2.1. *Fórmula Mágica*

Uno de los modelos más conocidos es el propuesto por Bakker, Nyborg y Pacejka (1987) o también conocido como *Fórmula Mágica*, es un modelo empírico exclusivamente basado en experimentos sobre neumáticos, fue desarrollado por el mismo equipo investigador que desarrolló el modelo *Brush* (Bakker, E. et al. 1987), (Pacejka, H. et al. 1989), (Pac ), tiene diversas versiones (1989, 1991, etc.) que normalmente son denominadas también *Fórmula Mágica*.

El modelo de Pacejka tiene la forma<sup>1</sup>:

$$F(s) = c_1 \sin(c_2 \arctan(c_3 s - c_4(c_3 s - \arctan(c_3 s)))) \quad (3.10)$$

donde  $c_i, i = 1, \dots, 4$  son parámetros característicos, que pueden ser identificados por datos experimentales como se muestra en Bakker, E., Nyborg, L., and Pacejka, H. (1987).

Es un ejemplo de modelo semi-empírico donde a partir de las formas de las curvas obtenidas mediante ensayos de neumáticos en condiciones estacionarias, se ha buscado una expresión matemática que sea capaz de ajustarse a estos.

Este modelo ha tenido gran uso en el estudio del régimen de deslizamiento puro. Es un modelo totalmente empírico, que requiere de ciertos parámetros que son determinados de manera experimental, dichos parámetros requieren de sistemas de ensayos.

La expresión matemática de la *Fórmula Mágica* es derivada heurísticamente de datos experimentales para producir un buen ajuste <sup>2</sup>.

### 3.2.2. Modelo de Burckhardt

El modelo propuesto por Burckhardt (1993) para el coeficiente de fricción llanta-pavimento es de la forma

$$\mu = (C_1(1 - e^{-C_2\lambda_u}) - C_3\lambda_u)e^{-C_4v} \quad (3.11)$$

donde  $v$  es la velocidad longitudinal,  $\lambda_u$  el deslizamiento longitudinal y  $C_1, \dots, C_4$  son constantes. Este modelo depende de la velocidad del vehículo.

---

<sup>1</sup>En las fórmulas siguientes se asume que  $s \in [0, 1]$ , estas fórmulas dan la magnitud de la fuerza de fricción. El signo de  $F$  es determinado por  $v_r = r\omega - v$

<sup>2</sup>En estos experimentos se controla independientemente la velocidad de rotación de la llanta y la de una superficie para rodamiento de la misma, de tal forma que se pueden producir valores arbitrarios de deslizamiento

En Kiencke, U. and Daiss, A. (1994) no consideran el término de la velocidad de la ecuación (3.11) y obtienen la siguiente expresión para la curva fricción-deslizamiento.

$$F(s) = k_s \frac{s}{c_1 s^2 + c_2 s + 1} \quad (3.12)$$

donde  $k_s$  es la pendiente de  $F(s)$  en  $s = 0$ , y  $c_1$  y  $c_2$  son constantes. Alternativamente, Burckhardt (1993) propone un modelo simple sólo con tres parámetros, como

$$F(s) = c_1(1 - \exp^{-c_2 s}) - c_3 s \quad (3.13)$$

Todos los modelos de fricción dados hasta ahora son altamente no-lineales en los parámetros desconocidos, y esto conduce a dificultades en el momento de hacer identificación en línea, es por esta razón que los modelos se simplifican como

$$F(s) = c_1 \sqrt{s} - c_2. \quad (3.14)$$

En este modelo también  $c_1$  y  $c_2$  son constantes, estas constantes dependen de las condiciones del pavimento (tipo de superficie, textura, temperatura, etc.).

### 3.3. Modelos dinámicos de fricción

Como una alternativa a los mapas estáticos  $F(s)$ , están los llamados modelos dinámicos de fricción. Estos intentan capturar el comportamiento transitorio de las fuerzas originadas en la zona de contacto llanta-pavimento a diferentes velocidades. Tienen parámetros que pueden relacionarse con propiedades de los materiales, como rigidez mecánica o amortiguamiento viscoso, y por consiguiente estos efectos son más fáciles de analizar.

En la literatura se han propuesto diversos modelos dinámicos, por ejemplo el propuesto en Bliman, P.A. et al. (1995). En estas investigaciones la fricción se calcula mediante la resolución de una ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$\dot{z} = |v_r|Az + Bv_r \quad (3.15)$$

$$F(z, v_r) = Cz + \text{sgn}(v_r)D \quad (3.16)$$

La matriz  $A$  requiere ser Hurwitz de dimensión uno o dos.

Los modelos dinámicos de fricción pueden ser formulados como de parámetros concentrados o distribuidos como se muestra en la figura 3.1.

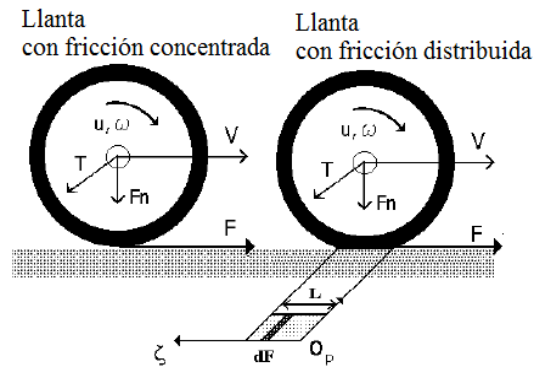


Figura 3.1: Modelo con parámetros concentrados (izquierda) y modelo con parámetros distribuidos (derecha).

### 3.3.1. Modelo de LuGre con parámetros concentrados

El modelo de LuGre (Canudas de Wit, C. et al. 1995) es un modelo dinámico de fricción, que supone que las superficies hacen contacto a través de cerdas erizadas elásticas y que cuando se aplica una fuerza tangencial las cerdas se deforman como resortes, lo que hace que la fuerza de fricción aumente (ver figura 3.2).

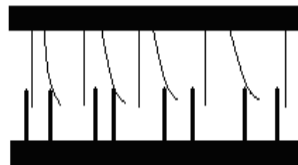


Figura 3.2: Interfaz entre dos superficies de cerdas erizadas elásticas..

Si la fuerza es grande, las cerdas se deformarán hasta que ocurra un deslizamiento, que dependerá de la superficie de contacto, en este caso el pavimento. Este fenómeno es bastante impredecible debido a la irregularidad de la superficie.

Este modelo dinámico de fricción con parámetros concentrados asume que el punto de contacto entre la llanta y el pavimento es puntual. Es una extensión de el modelo de Dahl que incluye el efecto “*Stribeck*” (Canudas de Wit, C. et al. 1995). Este modelo propuesto está basado en la deformación promedio de las cerdas  $z$ , y está dado por

$$\frac{dz}{dt} = s - \frac{\sigma_0 |s|}{g(s)} z \quad (3.17)$$

$$\mu = \frac{F_r}{F_n} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 s \quad (3.18)$$

donde  $s$  es la velocidad relativa entre las superficies (llanta-pavimento) y  $z$  es un estado interno que representa la deformación promedio de las cerdas.

Los parámetros  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  representan respectivamente la rigidez, el amortiguamiento y la fricción viscosa entre las superficies;  $F_n = \frac{mg}{4}$  es la fuerza normal; la fuerza de fricción  $F_r$  depende de varios factores, tales como ciertas características de la llanta, pavimento y la velocidad del vehículo. Esta fuerza es una función del coeficiente de deslizamiento  $\lambda$  (o deslizamiento longitudinal) y  $g(s)$  es una función que describe el efecto “*Stribeck*” dada por

$$g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-|s/v_s|^{1/2}} \quad (3.19)$$

donde  $\mu_c$  es el coeficiente de fricción de Coulomb,  $\mu_s$  es el coeficiente de fricción estática y  $v_s$  es la velocidad *Stribeck*. Este efecto ha sido incluido principalmente en modelos de fricción no lineales y fundamentalmente consiste en una disminución súbita de la fricción al aumentar la velocidad después de que ésta ha disminuido o llegado incluso a cero (por ejemplo cuando la velocidad cambia de signo). Este modelo es de parámetros concentrados y tiene como hipótesis que la interfaz llanta-pavimento se toma como puntual.

### 3.3.2. Modelo de LuGre con parámetros distribuidos

Generalmente los modelos dinámicos como modelos distribuidos asumen la existencia en un área de contacto (o parche) entre la llanta y el pavimento, como se muestra en la figura 3.1 (derecha).

Este parche representa la proyección de la parte de la llanta que está en contacto con el pavimento. El parche de contacto está asociado a un marco de referencia  $O_p$ , con un eje  $\zeta$  a lo largo del parche en dirección de la rotación de la llanta. La longitud del parche es “ $L$ ”.

Los modelos con parámetros distribuidos han sido estudiados previamente por ejemplo en Bliman, P.A. et al. (1995). En estos modelos, el parche de contacto es discretizado en series de elementos y los efectos de deformación microscópicos son estudiados. En particular en Bliman, P.A. et al. (1995), caracterizan la elasticidad y las fuerzas de fricción de Coulomb de cada punto del parche de contacto. Ellos proponen un modelo de segundo orden similar

al modelo de Dahl, aplicando el modelo de fricción de las ecuaciones (3.17) y (3.18) para un elemento de caucho situado en  $\zeta$  en el tiempo  $t$  y obtienen la ecuación diferencial parcial

$$\frac{dz_i}{dt} = v - \omega r - \frac{z_i - z_{i-1}}{L/N} \omega r \quad (3.20)$$

$$F = \sum_{i=1}^N c_i z_i \quad (3.21)$$

donde  $N$  es el número de elementos discretizados (cerdas) y  $c_i$  es la rigidez de las cerdas. Las condiciones de frontera  $\frac{dz_1}{dt} = 0$  implican que las cerdas al comienzo de la zona de contacto no tienen desplazamiento.

### 3.3.3. Derivación del modelo distribuido

Sea  $z(\zeta, t)$  el estado de la fricción de las cerdas (variación), donde  $\zeta$  es el punto localizado a lo largo del parche en un cierto tiempo  $t$ , y considerando la variación total del elemento  $\zeta$  en dos instantes de tiempo  $t$  y  $t + d\zeta$ . En el intervalo  $dt$  el elemento  $\zeta$  es movido a la localidad  $\zeta + d\zeta$  (ver figura 3.3), y usando las ecuaciones (3.20) y (3.21), se tiene que

$$z(\zeta + d\zeta, t + dt) - z(\zeta, t) = \left( v_r - \frac{\sigma_0 |s|}{g(s)} z(\zeta, t) \right) dt. \quad (3.22)$$

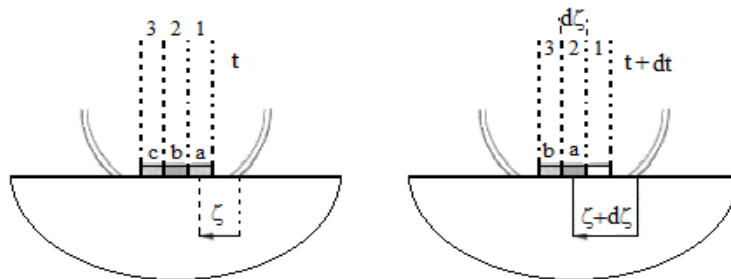


Figura 3.3: Distribución de la fuerza.

La variación total está dada por  $dz = z(\zeta + d\zeta, t + dt) - z(\zeta, t)$ , entonces

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial z}{\partial t} dt \quad (3.23)$$

substituyendo en la ecuación previa, se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial t}(\zeta, t) |r\omega| + \frac{\partial z}{\partial \zeta}(\zeta, t) \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_r - \frac{\sigma_0 |s|}{g(s)} z(\zeta, t). \quad (3.24)$$

Utilizando  $\frac{d\zeta}{dt} = |\omega r|$ , se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial para el estado de fricción interno a lo largo de la parche de contacto

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} |\omega r| = v_r - \frac{\sigma_0 |s|}{g(s)} z(\zeta). \quad (3.25)$$

La fuerza de fricción generada en el parche puede ser calculada mediante

$$F(t) = \int_0^L dF(\zeta, t) \quad (3.26)$$

donde  $dF(\zeta, t)$  es la fuerza de fricción desarrollada en el elemento de la longitud  $d\zeta$ , localizada en la posición  $\zeta$  de el parche, en el tiempo  $t$  y dado por el modelo de LuGre como

$$dF(\zeta, t) = \left( \sigma_0 z(\zeta, t) + \sigma_1 \frac{\partial z}{\partial t}(\zeta, t) + \sigma_2 v_r \right) f_n(\zeta) \quad (3.27)$$

donde  $f_n(\zeta)$  es la fuerza normal por unidad de longitud a lo largo del parche. La fuerza de fricción total en el parche, puede ser calculada como

$$F(t) = \int_0^L \left( \sigma_0 z(\zeta, t) + \sigma_1 \frac{\partial z}{\partial t}(\zeta, t) + \sigma_2 v_r \right) f_n(\zeta) d\zeta \quad (3.28)$$

### 3.3.4. Características en estado estacionario

Las características de tiempo de estado estacionario de las ecuaciones (3.20) y (3.21) en estado estacionario se obtienen mediante  $\frac{\partial z}{\partial t}(\zeta, t) \equiv 0$  y con las velocidades  $v$  y  $\omega$  constantes. Aplicando estas condiciones en la ecuación (3.24), resulta

$$\frac{\partial z(\zeta, t)}{\partial \zeta} = \frac{1}{|\omega r|} \left( s - \frac{\sigma_0 |s|}{g(s)} z(\zeta, t) \right) \quad (3.29)$$

en estado estacionario  $v$  y  $\omega$  son constantes, por consecuencia  $s$  también es constante. La ecuación (3.29) puede ser integrada a lo largo del parche con condiciones de frontera  $z(0, t) = 0$ . Un simple cálculo muestra que

$$z_{ss}(\zeta) = \text{sgn}(s) \frac{g(s)}{\sigma_0} (1 - e^{-\frac{\sigma_0}{g(s)} \left| \frac{s}{\omega r} \right| \zeta}) = c_2 (1 - e^{c_1 \zeta}) \quad (3.30)$$

donde

$$c_i = -\frac{\sigma_0}{g(s)} \left| \frac{s}{\omega r} \right|, \quad c_2 = \text{sgn}(s) \frac{g(s)}{\sigma_0} \quad (3.31)$$

La fuerza total de fricción en estado estacionario puede ser calculada mediante la ecuación (3.29),

$$F_{ss} = \int_0^L (\sigma_0 z_{ss}(\zeta) + \sigma_2 s) f_n(\zeta) d\zeta \quad (3.32)$$

Para calcular  $F_{ss}$ , se necesita postular una distribución para la fuerza normal  $f_n\zeta$  (ver figura 3.4). La forma más típica se reporta en Burckhardt, M. (1993), Moore, D.F. (1975), Faria, L.O. et al. (1992).

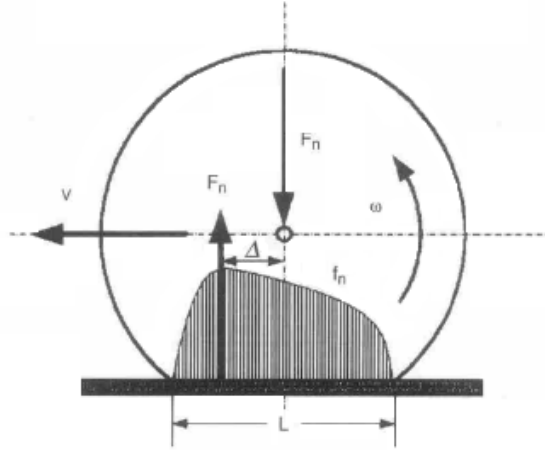


Figura 3.4: Distribución de la fuerza normal.

### 3.3.5. Distribución normal constante

Un simple resultado puede ser derivado si se asume una distribución normal constante. Para una carga normal uniforme, se reporta

$$f_n(\zeta) = \frac{F_n}{L}, \quad 0 \leq \zeta \leq L \quad (3.33)$$

y se obtiene

$$F_{ss} = (\text{sgn}(s)g(s) \left[ 1 - \frac{Z}{L}(1 - e^{-L/Z}) \right] + \sigma_2 s) F_n \quad (3.34)$$

donde

$$Z = \left| \frac{\omega r}{s} \right| \frac{g(s)}{\sigma_0} \quad (3.35)$$

### 3.3.6. Distribución exponencialmente decreciente

En este caso, la decreciente de la carga normal a lo largo del parche como se muestra en la figura 3.4, se aproxima con una función exponencial decreciente,

$$f_n(\zeta) = e^{-\lambda(\frac{\zeta}{L})} f_{n0}, \quad 0 \leq \lambda \quad 0 \leq \zeta \leq L \quad (3.36)$$

donde  $f_n=f_{n0}$  es la carga normal distribuida en  $\zeta = 0$ . Esta elección particular es clara cuando se reduce el modelo distribuido al modelo con parámetros concentrados con una sola variable de estado, además, para  $\lambda > 0$  se tiene una función  $f_n$  decreciente (Canudas de Wit, C. et al. 2003). Con la elección de la ecuación (3.36), se obtiene

$$k_1 = \frac{n0L}{\lambda} \quad y \quad k_2 = \frac{\lambda}{c_1L - \lambda} \quad (3.37)$$

El valor de  $f_{n0}$  puede ser calculado de  $\lambda$ ,  $L$  y la carga normal  $F_n$  que actúa sobre el eje de la rueda, esto es

$$F_n = \int_0^L f_n \zeta d\zeta = f_{n0} \int_0^L e^{-\frac{\lambda}{L}\zeta} d\zeta = -\frac{L}{\lambda} f_{n0} [e^{-\frac{\lambda}{L}\zeta}]_0^L = -\frac{L}{\lambda} f_{n0} (e^{-\lambda} - 1) = \frac{L}{\lambda} f_{n0} (1 - e^{-\lambda}), \quad (3.38)$$

lo cual conduce a

$$f_{n0} = F_n \frac{\lambda}{(1 - e^{-\lambda})L} \quad (3.39)$$

### 3.3.7. Distribución con condiciones límite

Como se muestra en la figura 3.4, una fuerza de distribución real tiene valores cero en los límites del parche de contacto para la carga normal. Varias formas satisfacen esta restricción. Algunos posibles ejemplos son dados en (Canudas de Wit, C. et al. 2003),

$$f_n(\zeta) = \frac{3F_n}{2L} \left[ 1 - \left( \frac{\zeta - L/2}{L/2} \right)^2 \right] \quad \text{parábola} \quad (3.40)$$

$$f_n(\zeta) = \frac{\Pi F_n}{2L} \sin(\Pi\zeta/L) \quad \text{sinusoidal} \quad (3.41)$$

$$f_n(\zeta) = -\frac{\gamma^2 L^2 + \Pi^2}{\Pi L (e^{-\gamma L} + 1)} \exp^{-\lambda\zeta} \sin(\Pi\zeta/L) \quad \text{sinusoidal/exponencial} \quad (3.42)$$

donde  $F_n$  es la carga normal total.



## Capítulo 4

# Diseño mecánico del banco de pruebas

Para el diseño del sistema, se empleó un modelo vehicular simplificado que considera una sola llanta. El principal motivo por el cual se utiliza este tipo de modelo es su simplicidad. Este modelo es de uso común en el estudio del control de tracción o frenado, por ejemplo en Kiencke y Daiss (1994), Kiencke (1993), Liu y Sun (1995).

### 4.1. Descripción del banco de pruebas

El diseño propuesto está conformado por un servomotor, una llanta y un rodillo. El rodillo representa dos cosas: el peso del vehículo y el pavimento como se muestra en la figura 4.1, donde  $I_2$  es la inercia del rodillo,  $I_1$  es la inercia de la llanta,  $R_2$  es el radio del rodillo,  $R_1$  es el radio de la llanta y  $F_n$  es la fuerza normal.

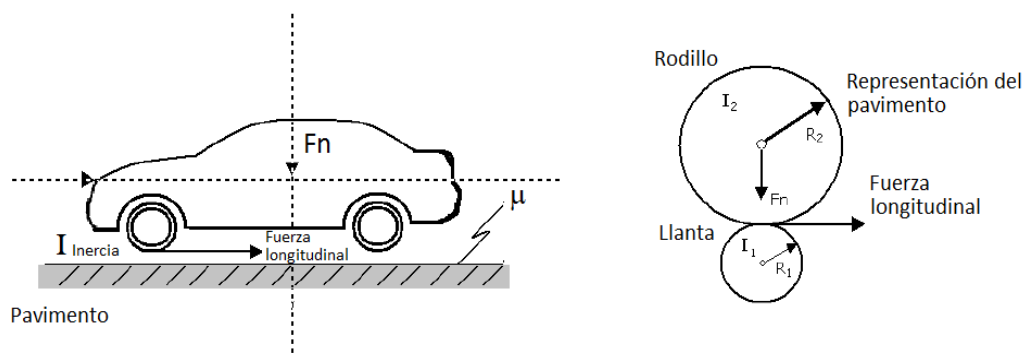


Figura 4.1: Representación de sólo la cuarta parte del vehículo.

El material del rodillo es polietileno de alta densidad, que es un polímero de la familia de los polímeros olefínicos. Se designa como HDPE (*High Density Polythylene*) ó PEAD (polietileno de alta densidad), este polímero se caracteriza por:

- Estructura lineal, sin ramificaciones.
- Excelente resistencia térmica y química.
- Es sólido y rígido.
- Su densidad es igual o menor a 0.952 [g/cm<sup>3</sup>].

El neumático elegido tiene un perfil de 4.5/10.0 – 5 DR10. Este neumático tiene la característica de ser liso lo cual hace que tenga un mayor nivel de adherencia que los neumáticos con dibujo si lo hace sobre superficies secas y duras.

Conociendo las dimensiones de los elementos (llanta-rodillo), es necesario hacer un análisis dimensional de los elementos que conforman el banco de pruebas, para elegir convenientemente el servomotor.

#### 4.1.1. Análisis dimensional del banco de pruebas

Para poder adquirir el servomotor que se utilizó en el sistema experimental, fue necesario conocer el torque requerido, por lo que se hizo una relación de radios  $R_1$  y  $R_2$ , de velocidades angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , así como de los torques  $\tau_1$  y  $\tau_2$  (Aguilar, J. 2008). Se sabe que

$$r = \frac{R_2}{R_1} > 1 \quad (4.1)$$

y tomando en cuenta que

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \quad (4.2)$$

donde  $v = \omega_1 R_1$ , por lo que se genera

$$\omega_1 = r\omega_2. \quad (4.3)$$

Con la segunda derivada de la ecuación (4.3), se tiene

$$\alpha_1 = r\alpha_2 \quad (4.4)$$

donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son las aceleraciones angulares. Con respecto a los torques se pueden relacionar a través de las siguientes ecuaciones

$$F = \tau_1 R_1 \quad (4.5)$$

$$F = \tau_2 R_2 \quad (4.6)$$

igualando las ecuaciones anteriores

$$\frac{\tau_1}{R_1} = \frac{\tau_2}{R_2} \quad (4.7)$$

despejando  $\tau_2$  y sustituyendo la relación de radios

$$\tau_2 = \frac{R_2}{R_1} \tau_1 = r \tau_1 \quad (4.8)$$

se pueden relacionar los torques  $\tau_1$  y  $\tau_2$  a través de las inercias  $I_1$  y  $I_2$ , y de las aceleraciones angulares  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  de la siguiente manera

$$\tau_1 = I_1 \alpha_1 \quad (4.9)$$

$$\tau_2 = I_2 \alpha_2. \quad (4.10)$$

Entonces la fórmula del torque que moverá al sistema llanta-pavimento está dada por

$$\tau_1 = \left[ I_1 + \frac{I_2}{r^2} \right] \alpha_1 \quad (4.11)$$

El radio de la llanta es de  $R_1=0.12$  [m] y el radio del rodillo es  $R_2=0.36$  [m]. La máxima velocidad en la llanta se fijó en  $v = 13$  [m/s], lo que implica que la llanta girará a 1031 RPM (Aguilar, J. 2008). Para la aceleración se especificó una aceleración lineal máxima de  $4.3$  [m/s<sup>2</sup>], entonces el valor máximo para  $\alpha_1$  es  $35.83$  [rad/seg<sup>2</sup>]. Sustituyendo valores en la ecuación (4.11), se tiene un par máximo de

$$\tau_1 = 4.12 \text{ [Nm]} \quad (4.12)$$

Con estos valores se adquirió el servomotor Yaskawa SGMPH. El cuadro 4.1 muestra los datos mecánicos del servomotor. Las dimensiones del servomotor se muestran en el Cuadro 4.2, de acuerdo con la figura 4.2.

Parámetro	Valor	Unidad
<i>Voltage</i>	200	[V]
<i>Amperaje</i>	15	[A]
<i>Torque</i>	4.77	[Nm]
<i>SalidaNominal</i>	1500(2.01)	[W (hp)]

Cuadro 4.1: Parámetros utilizados en simulación.

Conocidos los datos necesarios para el sistema, se diseñó el banco de pruebas en un paquete CAD.

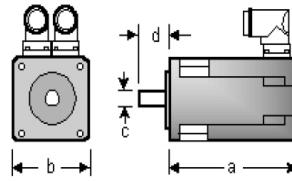


Figura 4.2: Dimensiones del servomotor Yaskawa.

Parámetro	Valor	Unidad
$a$	200	[mm]
$b$	80	[mm]
$c$	14	[mm]
$d$	45	[mm]

Cuadro 4.2: Parámetros utilizados en simulación.

La estructura experimental está dividida en dos secciones, la parte que se conforma por el servomotor y la llanta, y la parte conformada por el rodillo.

En la primera sección la llanta está acoplada directamente al eje del servomotor por medio de una extensión realizada al eje. En uno de los extremos del eje se incorporó un rodamiento de rodillos acilíndricos. El servomotor está sujeto a un soporte de acero; la llanta es colocada dentro de dos soportes de acero. Asimismo se diseñaron dos dispositivos mecánicos (prisioneros) que impiden el movimiento lateral de la llanta (ver figura 4.3).

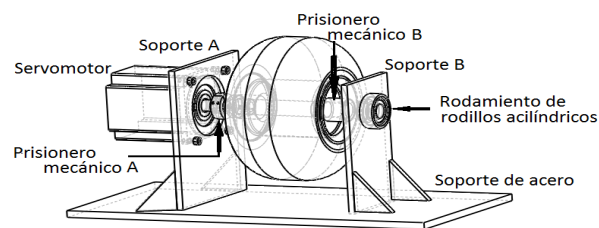


Figura 4.3: Llanta acoplada al servomotor.

Los rodamientos utilizados en el sistema también son conocidos como "Kombi", y han sido desarrollados por SKF<sup>1</sup>. Comprenden dos rodamientos de una hilera de rodillos cilíndri-

<sup>1</sup>SKF (Suenka Kullanguer Fabriken) es una organización internacional que opera en más de 130 países y tiene alrededor de 100 fábricas alrededor del mundo, abarcando con sus productos prácticamente los

cos y un rodamiento de dos hileras de rodillos cónicos, y son capaces de absorber las cargas radiales y las cargas axiales por separado además de tener una gran capacidad de carga.

La segunda sección está conformada por el rodillo. Para poder manipular al rodillo se diseñaron 2 tapas de aluminio y se colocaron 4 ejes de aluminio entre las tapas para garantizar paralelismo entre éstas. El eje del rodillo y los brazos tienen movimiento libre para asegurar el contacto entre la llanta y el rodillo (ver figura 4.4).

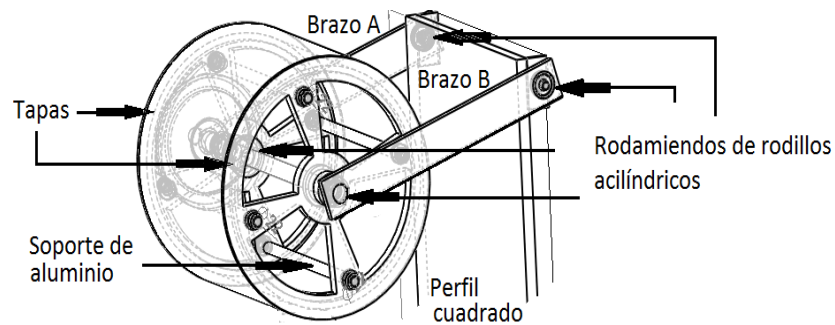


Figura 4.4: Representación de un cuarto de vehículo.

Finalmente el diseño propuesto finalizado se muestra en la figura 4.5.

Para la construcción del banco de pruebas se empleó cada uno de los planos del sistema experimental que se pueden ver en el Apéndice 1. Se utilizaron principalmente máquinas de Control Numérico Computarizado (CNC), torno mecánico y mecanizado en fresadora.

Los materiales elegidos para el sistema son acero, aluminio, latón y perfil cuadrado. Estos materiales se utilizaron por su maleabilidad y resistencia a los esfuerzos dinámicos.

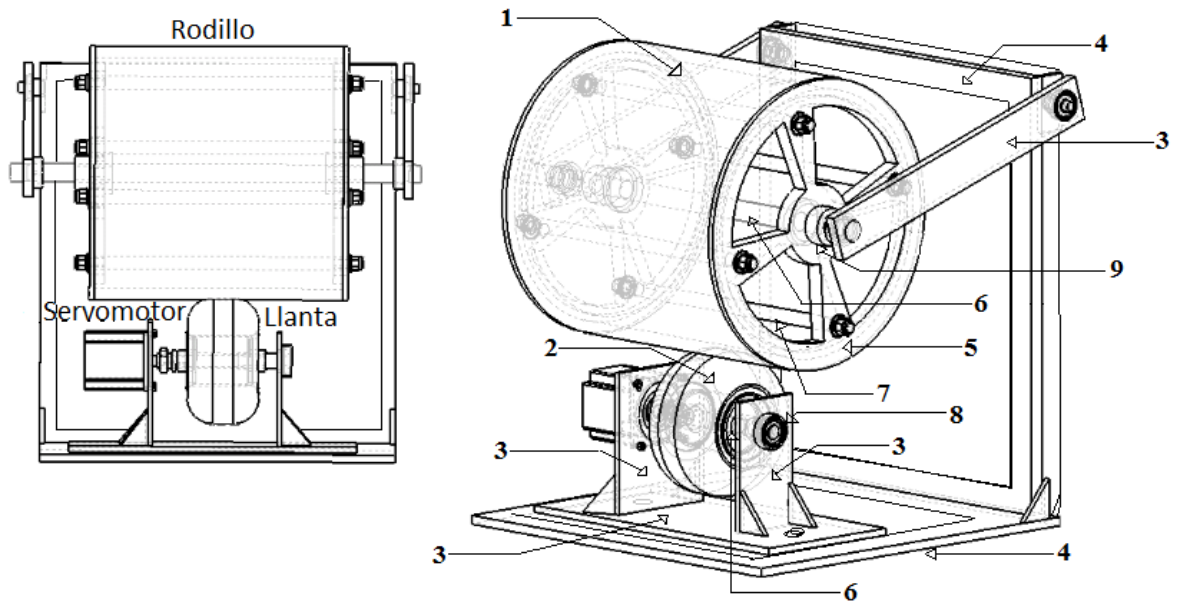


Figura 4.5: Diseño del banco de pruebas. Principales materiales: 1.- Polietileno de alta densidad, 2.- Neumático liso de caucho, 3.- Acero al silicio, 4.- Aluminio, 6.- Acero inoxidable, 7.- Acero al carbono, 8.- Bronce, 9.- Latón.

## Capítulo 5

# Galgas extensométricas

Uno de los objetivos de este proyecto es analizar las fuerzas que se generan entre la llanta y el pavimento haciendo uso de estos medidores de deformación. Estos medidores también son llamados por algunos autores como galgas extensométricas (*strain gauges*), por su nombre en inglés).

En el mercado existen compañías como *HBM*, *Omega* y *Vishay Measurements Group*, entre otras, que se dedican a la construcción de una gran variedad de galgas extensométricas. Cada una específica sus propios parámetros, tomando como referencia la construcción de la galga, los parámetros más importantes son:

- Resistencia.
- Límite de la galga.
- Rango de temperatura.
- Tipo de pegamento y protección.
- Dimensión de la rejilla.

La construcción de una galga extensométricas involucra la unión de sus tres partes principales, las cuales son la rejilla, la base y las etiquetas (ver figura 5.1). La rejilla de la galga es la parte metálica que cambia su resistencia en función de la compresión o tensión, la base es el soporte portador de la rejilla y es fabricada de diferentes materiales aislantes, las etiquetas de la galga sirven para conectar la galga extensométrica con el circuito acondicionador de señal.

La galga que se utiliza en este trabajo es el modelo 40CBY de Vishay, tiene una longitud de 10 [cm]. Esta galga se usa básicamente para medir la tensión en superficies de concreto, ya que tiene la capacidad de medir cualquier fluctuación que ocurre en las partículas del cemento o sobre otras superficies, en nuestro caso polietileno de alta densidad.

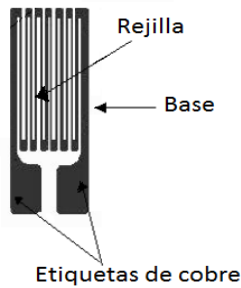


Figura 5.1: Partes principales de una galga.

## 5.1. Acondicionamiento de la señal de las galgas extensométricas

La circuitería eléctrica que acompaña a las galgas extensométricas suele estar formada básicamente por un puente de Wheatstone cuya sensibilidad dependerá del número de galgas utilizadas y de su colocación, además de una o varias etapas amplificadoras.

El circuito propuesto está formado por dos etapas:

- Puente de Wheatstone.
- Tres etapas amplificadoras.

Un puente de Wheatstone es una malla de cuatro brazos resistivos, en los que uno o más de estos brazos son elementos de medición activos. La configuración utilizada es la de un cuarto de puente (ver figura 5.2), que emplea una sola galga activa y presenta un comportamiento lineal.

Debido a que este arreglo tiene como respuesta valores por debajo de 1 Volt se implementó un amplificador diferencial de alta ganancia (ver figura 5.3). El voltaje de salida  $V_0$  del amplificador operacional es proporcional a la diferencia de potencial aplicada a la entrada.

$$V_0 = \frac{mR}{R}(V_2 - V_1). \quad (5.1)$$

La ganancia diferencial se encuentra mediante



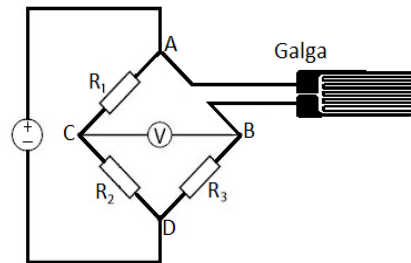


Figura 5.2: Configuración empleada para una galga activa.

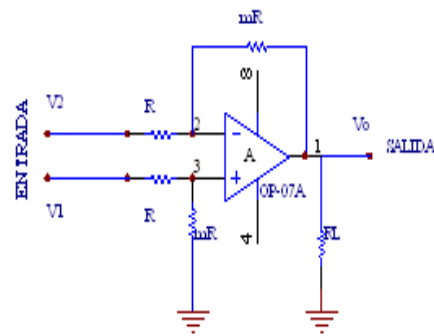


Figura 5.3: Amplificador diferencial.

$$m = \frac{mR}{R}. \quad (5.2)$$

También se utilizó un amplificador no inversor para amplificar el voltaje de salida (ver figura 5.4).

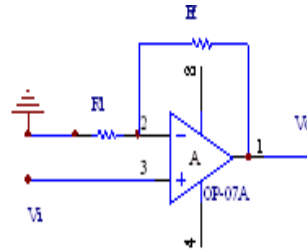


Figura 5.4: Amplificador no inversor.

El voltaje de salida  $V_0$ , se encuentra por la suma de la caída de voltaje a través de  $R_i$ , mediante

$$V_0 = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right)(V_i) \quad (5.3)$$

Por lo tanto, el circuito para acondicionar la señal de la galga extensométrica se observa en la figura 5.5.

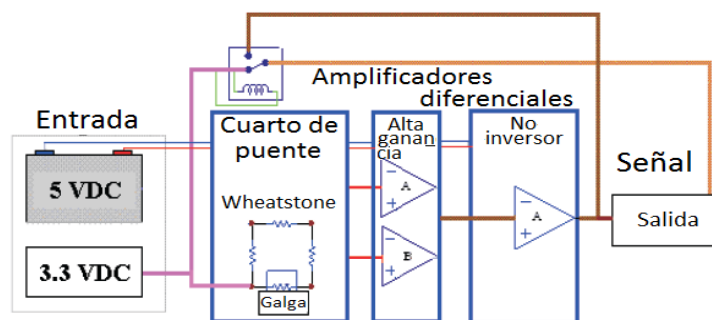


Figura 5.5: Amplificador para una señal.

Los valores de las resistencias se eligieron convenientemente para que el puente de Wheatstone estuviera en equilibrio. Las ganancias generadas por medio de los amplificadores conducen a tener una salida de voltaje en un rango de 0 a 5 Volts. El módulo de

acondicionamiento (puente de Wheatstone y amplificadores) toma las variaciones de resistencia de la galga y las convierte a variaciones de voltaje, asimismo cada galga requiere de una calibración adecuada para la toma de lecturas.

Para los modelos matemáticos es conveniente utilizar unidades en N ewtones es por esta raz on que se realiz o una calibraci on de una galga. Se colocaron diferentes pesos en el área de una sola galga y se tomo la lectura, con esto se hizo un ajuste lineal, y así se consiguió convertir de voltaje a fuerza.

## 5.2. Adhesivos de las galgas extensométricas

La teoría de operaci on de las galgas asume que la tensión en la rejilla de la galga es idéntica a la tensión que sufre la superficie donde es adherida. Para lograrlo es necesaria la selección de un adhesivo apropiado para la aplicación a desarrollar, además de una cuidadosa instalación de la galga.

Los adhesivos utilizados tienen las siguientes características: forman una capa delgada, muestran linealidad, corto tiempo de secado, soportan altas elongaciones y son compatibles con todas las bases de galgas, materiales y superficies sobre las cuales se van aplicar. Los adhesivos utilizados son:

- Cyanoacrylate.
- Epoxies.
- Epoxy-Phenolic.
- Polyimide.

La galga al momento de ser adherida debe alinearse con las líneas de fuerza que presenta el objeto de estudio al aplicarse una carga sobre él. Una ubicación incorrecta de la galga implicaría tener errores en la medición del parámetro de estudio. Las galgas poseen cuatro pequeños triángulos para orientarlas sobre el objeto de estudio.

La teoría de adhesivos de galgas también sugiere colocar etiquetas de cobre para conectar la galga extensométrica con el circuito acondicionador de señal. Los cables que conectan el circuito acondicionador con la galga extensométrica deben ser soldados sobre las etiquetas de cobre para garantizar una buena conducción de las variaciones de resistencia de la galga.

### 5.3. Respuesta en frecuencia de las galgas extensométricas

Para realizar pruebas experimentales con las galgas, se colocó una galga en una estructura metálica junto con su etapa de acondicionamiento de la señal. La galga se probó en un excitador electrodinámico con la finalidad de medir la respuesta (ver figura 5.6). La salida de la señal acondicionada para la galga extensométrica fue conectada a un osciloscopio para ver la respuesta ante señales de entradas senoidales, triangulares y cuadradas previamente programadas en el excitador electrodinámico con frecuencias de 20 Hz a 1,300 Hz. Esto puede ser visto en la figura 5.7 donde la función de transferencia es aproximada por

$$G(s) = \frac{1256.54}{s^2 + 157944.08} \quad (5.4)$$



Figura 5.6: Colocación de una galga extensométrica en un excitador electrodinámico.

De las gráficas (ver figura 5.7) se puede decir que es posible utilizar las galgas extensométricas con entradas de frecuencia menor a  $1.3e+3$  [rad/s]. El pico en la gráfica de Bode significa que hay una frecuencia de resonancia en 200 Hz y para entradas con  $f > 200$ Hz la señal de salida de la galga tiene un desfase de  $180^\circ$ .

En este caso 200 Hz es muy superior a la máxima velocidad que el rodillo tendrá, que es equivalente a 8.5 Hz.

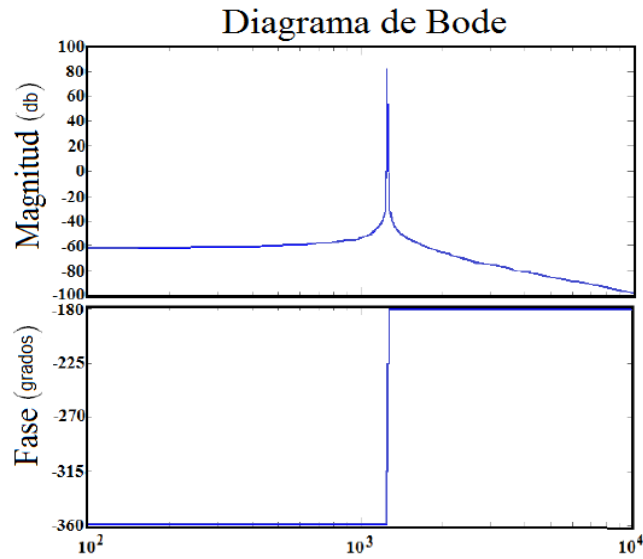


Figura 5.7: Diagrama de bode.

#### 5.4. Colocación de las galgas

Con las señales de las galgas acondicionadas, el siguiente paso fue adherir al rodillo seis galgas, tres de ellas longitudinalmente y otras tres de forma lateral (ver figura 5.8).

El objetivo de la colocación longitudinal y lateral de las galgas es investigar las fuerzas resultantes en el área de contacto llanta pavimento. Las galgas colocadas longitudinalmente tienen como objetivo conocer la transición longitudinal cuando el neumático pasa a través de las galgas (ver figura 5.9 a)). La intención de colocar las galgas lateralmente es conocer las fuerzas transversales en el momento que la llanta pasa sobre las galgas (ver figura 5.9 b)). Es importante mencionar que estas galgas no fueron colocadas con un ángulo de cero grados respecto al eje del neumático para evitar la rápida transición de la llanta con la galga.

#### 5.5. Comunicación inalámbrica

La mayoría de las aplicaciones para mediciones con galgas extensométricas involucran un sensor, el módulo de acondicionamiento, la tarjeta de adquisición de datos y una computadora o sistema para el procesamiento. Además de estos requerimientos, en este proyecto también es necesaria una comunicación inalámbrica puesto que las galgas extensométricas y el módulo de acondicionamiento están ubicados en el rodillo que, como se explicó ante-

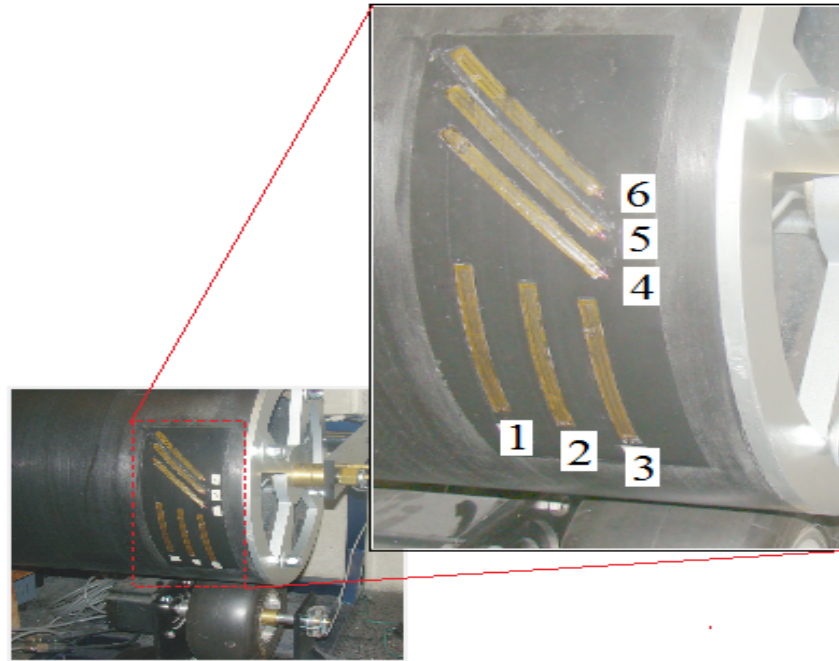


Figura 5.8: Galga extensométrica adherida al rodillo.

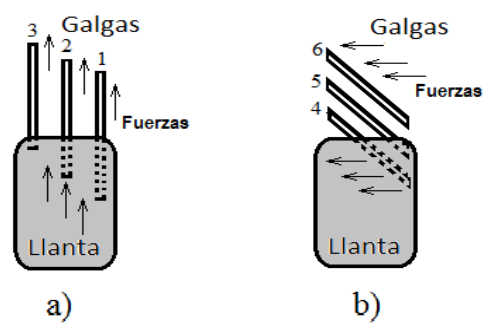


Figura 5.9: Galgas extensométricas adheridas al rodillo. a) Longitudinal b) Lateral.

riormente, estará en continuo movimiento.

Para tener parámetros confiables en la adquisición de datos, la comunicación inalámbrica debe estar por encima de los 2GHz, esa comunicación se puede lograr con Ethernet, por lo que fue necesario adquirir un módulo Wi-fi y un *router*.

Para tomar las señales del módulo de acondicionamiento de las galgas extensométricas, fue necesario un microcontrolador. Este se encarga de digitalizar los valores para ser enviados al módulo Wi-fi, para posteriormente ser enviados a la Ethernet a través del *router* (ver figura 5.10).

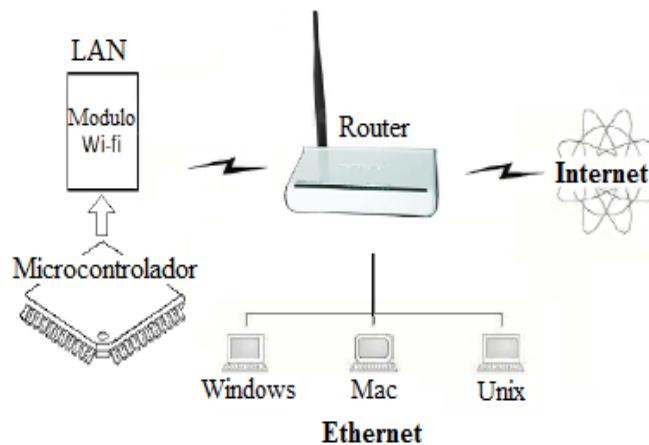


Figura 5.10: Diagrama de comunicación para las galgas extensométricas.

## 5.6. Sincronización del encoder con las galgas

El microcontrolador utilizado es de la familia de Microchip (PIC24FJ128GA), como característica principal este microcontrolador tiene una velocidad de muestreo de 500,000 muestras por segundo.

Este microcontrolador tiene como objetivo adquirir los valores de las galgas y enviarlos al módulo Wi-fi, así como también sincronizar el momento justo en que la llanta pasa a través de las galgas, esto con ayuda de encoder incremental localizado en uno de los extremos del rodillo como se muestra en la figura 5.11. El encoder utilizado es de la serie AMT10X de la

compañía CUI INC, tiene una resolución de 2048 ppr.

El encoder permite conocer el momento exacto en que la llanta pasa a través de la primera y la última galga. Para la sincronización una posición inicial fue fijada, la cual es leída por el encoder y procesada por el contador del microcontrolador.

Con el valor del encoder y conociendo el radio del rodillo, se puede determinar cuando la llanta pasa a través de cada galga específica.

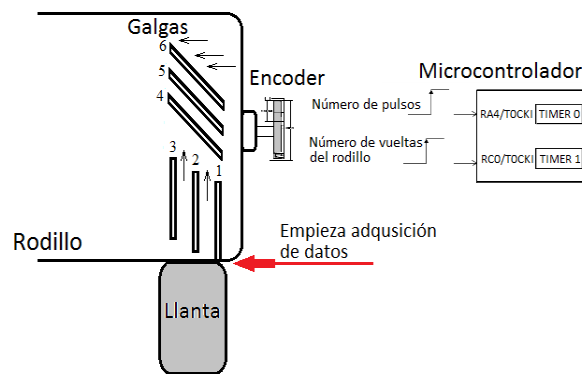


Figura 5.11: Diagrama de conexión para el módulo Wi-Fi.

## 5.7. Diseño electrónico para la adquisición de datos

El módulo Wi-fi incorporado en el diseño electrónico es el ZG2100M de Microchip, que puede transmitir y recibir datos a 2.4 GHz en 0.01 ms. Este módulo tiene varios componentes asociados como se muestra en la figura 5.12, que crean una conectividad Wi-fi. La interfaz de este módulo es a través de SPI (Interfaz serial de periféricos) que funciona como esclavo. Además, como parte importante, este módulo tiene una antena integrada para facilitar el intercambio de información.

El *router* seleccionado es LevelOne WBR-3408 de Microchip. Una de las características de este *router* es que puede tener acceso a Internet a través de una LAN (red de área local) o WLAN (red de área local inalámbrica) utilizando sólo una dirección IP (Protocolo de Internet). Tiene un ancho de banda de 54Mbps.

El esquema general de la conexión entre dispositivos se observa en la figura 5.13. El módulo Wi-fi se conecta con el microcontrolador por medio de la interfaz SPI (bus serial de



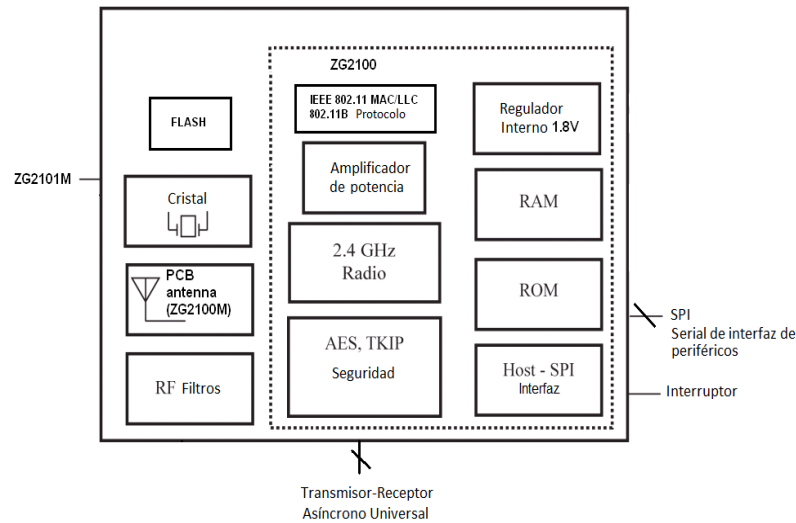


Figura 5.12: Diagrama de conexión para el módulo Wi-Fi.

interfaz de periféricos).

La memoria EEPROM (25AA25A, 256K (32K x 8)) guarda la dirección IP del módulo Wi-fi además de ser usada para indicar el buen funcionamiento del SPI. El programa para la adquisición de datos se descarga mediante RS-232.

## 5.8. Configuración del *router* y Windows cliente

Para una mejor recepción inalámbrica y el rendimiento, el *router* inalámbrico de banda ancha se debe colocar en un lugar céntrico y con obstrucciones mínimas entre el Wi-fi de banda ancha *router* y la PC.

Para poder adquirir los datos de manera inalámbrica, se tiene que sincronizar el par Cliente-Servidor (computadora-microcontrolador). Para lograr esto se requiere una cuidadosa configuración en el *router*. El *router* inalámbrico de banda ancha contiene un servidor HTTP. Esto permite conectarlo y configurarlo mediante el explorador Web, para lograr esto fue necesario que el navegador fuese compatible con JavaScript. El programa de configuración acepta los siguientes navegadores:

- Netscape v4.08 o posterior.
- Internet Explorer V4 o posterior.

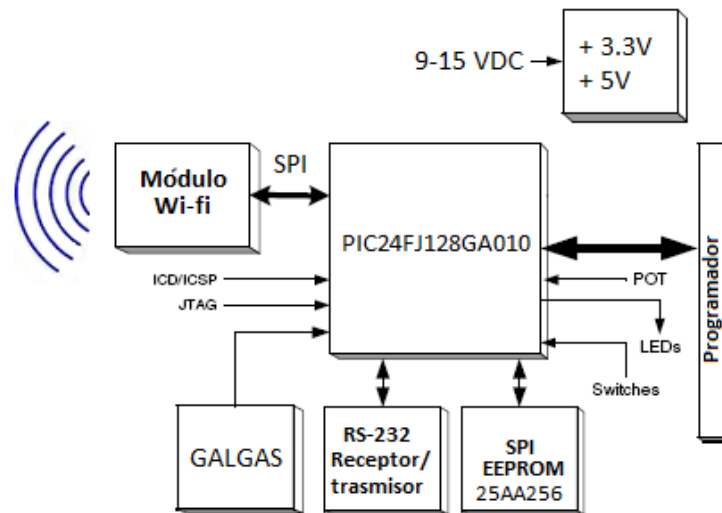


Figura 5.13: Diagrama de conexión para el módulo Wi-Fi.

El *router* tiene por omisión configurada la dirección IP 192.168.0.1, al iniciar el navegador con esta dirección IP, el asistente de configuración se ejecuta automáticamente.

Para configurarlo por defecto se utiliza el estándar 255.255.255.0 para las redes pequeñas, la cual es nuestro caso. Los equipo cliente (DHCP, protocolo de configuración dinámica de servidor) adquieren una dirección dinámica, con esta dirección dinámica se puede acceder al servidor (microcontrolador), previamente programado. El servidor DHCP proporciona la puerta de enlace y las direcciones DNS (Sistema de Dominio de Nombres) para el cliente, así como la asignación de una dirección IP.

La dirección DNS consiste simplemente en traducir un nombre en una dirección IP y viceversa, traducir una dirección IP en un nombre. Se necesita seleccionar el modo el cual operará el ruoter, el cual es Infraestructura. El modo Infraestructura es un modo de funcionamiento que permite conectar dispositivos equipados de una tarjeta de red Wi-fi por medio de uno o varios puntos de acceso (AP).

Además de una cuidadosa instalación del *router*, también se requiere de una configuración de Windows que es el cliente, siguiendo los siguientes pasos:

- Seleccionar Panel de control, -conexiones de red-.
- Seleccionar conexión de área local y después propiedades.
- Seleccionar TCP/IP y propiedades.

Para utilizar DHCP se seleccionó la opción Obtener una dirección IP automáticamente. Por defecto el *router* inalámbrico de banda ancha actúa como un servidor DHCP. El diagrama de adquisición de datos, se muestra en la figura 5.14.

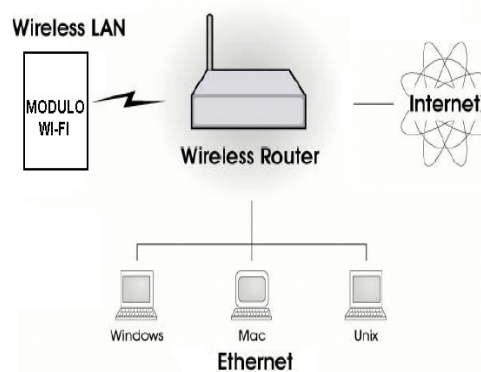


Figura 5.14: Diagrama de comunicación inalámbrica.

### 5.8.1. Estándar de comunicación IEEE 802.11

Las redes inalámbricas se reparten entre dos clases principales subdivididas por la banda de frecuencia. Las primeras tecnologías usaban la banda de 2.4 GHz mientras que las más modernas usan la de 5 GHz (más ancha). La primera incluye los estándares del Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos (IEEE) 802.11b (11 Mbps) y es compatible con su sucesor (802.11g a 54 Mbps). Esta primera opción es la más común actualmente y es la utilizada en este trabajo.

El estándar 802.11 establece los niveles inferiores del modelo OSI (interconexión de sistemas abiertos) para las conexiones inalámbricas que utilizan ondas electromagnéticas, por ejemplo:

- La capa física (a veces abreviada capa "PHY") ofrece tres tipos de codificación de información.
- La capa de enlace de datos compuesta por dos subcapas: control de enlace lógico (LLC) y control de acceso al medio (MAC).

El modelo OSI ve las etapas en que se desarrolla un proceso de comunicaciones en redes de datos. Este modelo utiliza varios protocolos simultáneamente. En ese caso cada protocolo cumple funciones especiales dentro del propósito completo de la tecnología o las necesidades

particulares de comunicación.

## 5.9. Protocolo de comunicación utilizado en el envío de datos

Para el envío de datos a Ethernet se utiliza el protocolo SNMP (protocolo simple de administración de red), que facilita el intercambio de información entre dispositivos. Originalmente SNMP fue diseñado para administrar diferentes dispositivos de comunicación. Estos sistemas pueden comunicarse entre sí a través de SNMP para transferir el control y el estado de información. El microcontrolador utilizado (Microchip PIC24 TCP/IP) soporta dos versiones:

- SNMP Versión 1 (SNMP V1).
- SNMP Versión 2 Basado en comunicación (SNMP V2c).

SNMP describe la relación entre cliente-servidor (computadora-microcontrolador) a través del protocolo TCP/IP (Protocolo de Control de Transmisión/Protocolo de Internet).

El diagrama de la figura 5.15 muestra el método estándar para acceder a las variables de un dispositivo remoto específica y también el formato en el cual los datos deben ser transferidos e interpretados. Este diagrama cuenta con cuatro capas de las cuales están siendo utilizadas FTP (Transferencia de archivos) y HTTP (Visualización de datos en la red).

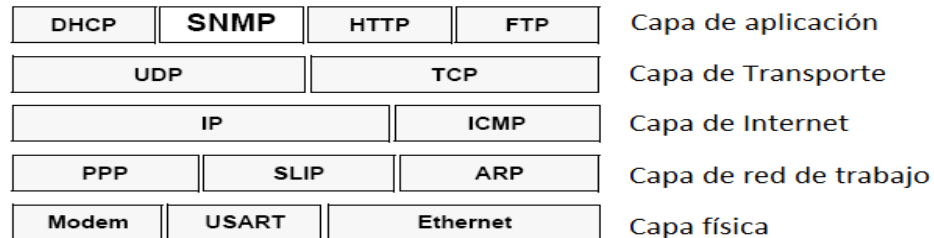


Figura 5.15: Localización del SNMP en el protocolo TCP/IP. Donde DHCP (Protocolo de configuración dinámica del servidor), HTTP (protocolo de transferencia de hipertexto), SNMP (Protocolo Simple de Administración de Red), FTP (Protocolo de Transferencia de Archivos), UDP (Protocolo de datagramas de usuario), TCP (Protocolo de Control de Transmisión), IP (Protocolo de internet), ICMP (Protocolo de mensajes de control de Internet), PPP (Protocolo Punto a Punto), SLIP (Protocolo de línea serial de Internet), ARP (protocolo de resolución de direcciones).

El programa propuesto en el microcontrolador envía una solicitud a la capa de aplica-

ción, esta capa necesita de otro protocolo de la capa de transporte, usualmente TCP. Esta capa es la encargada de recibir los datos enviados por la capa superior, que se dividen en paquetes, y enviarlos a la capa de abajo, Internet. También durante la recepción de datos esta capa se encarga de poner los paquetes recibidos en orden (ya que pueden ser recibidas fuera de orden) y también comprobar si los contenidos de los paquetes están intactos.

En la capa de Internet se tiene la IP, que obtiene los paquetes recibidos de la capa de transporte y agrega información de dirección virtual, es decir, añade la dirección de la computadora que está enviando los datos y la dirección del equipo que recibirá esta información. La dirección virtual es llamada dirección IP. Entonces, el paquete se envía a la capa inferior, capa de red de trabajo, en esta capa los paquetes son llamados paquetes de información. La capa de red de trabajo conseguirá los paquetes enviados por la capa de Internet y los enviará a través de la red. En esta capa se encuentra la comunicación inalámbrica (*wireless*) también conocida como Ethernet, con el estándar IEEE 802.11.

## 5.10. Adquisición de los datos de las galgas extensométricas

Terminada la configuración de los dispositivos, es necesario obtener una dirección IP dinámica, para ello se descargó un programa de demostración de la página de Microchip (Microchip TCP/IP Stack v5.00 Installer.exe). Este programa contiene la licencia optimizada del protocolo TCP/IP para el microcontrolador PIC24. Microchip TCP/IP Stack v5.00 Installer.exe incluye las siguientes características:

- Soporta protocolos de comunicación (ARP, IP, ICMP, UDP, TCP, DHCP, SNMP, HTTP, FTP, TFTP.).
- Protocolo de Capa de Conexión Segura.
- Capa de software desarrollada para enlazar un sistema operativo de red con un hardware específico.
- DNS, Traduce direcciones IP a nombres de dominio.
- Soporta compiladores para MATLAB.

El programa de demostración está escrito en lenguaje C, sin embargo la configuración, compilación y descarga del código al microcontrolador requiere de una modificación cuidadosa del código para nuestro propósito.

Este programa en tiempo de ejecución crea una estructura de datos en la memoria RAM. Este código asigna una dirección IP dinámica y la asigna a la memoria EEPROM.

### 5.10.1. Programa de demostración TCPIP Wi-Fi

Una vez cargado el programa de demostración en el microcontrolador, se puede visualizar la dirección IP dinámica en una hiperterminal predeterminada en Windows, que crea el punto de acceso ad-hoc (red inalámbrica) (ver figura 5.16). Con la dirección IP asignada, se puede cargar una página de visualización en la computadora (cliente), en esta página se pueden observar los valores digitales de las galgas en tiempo real.

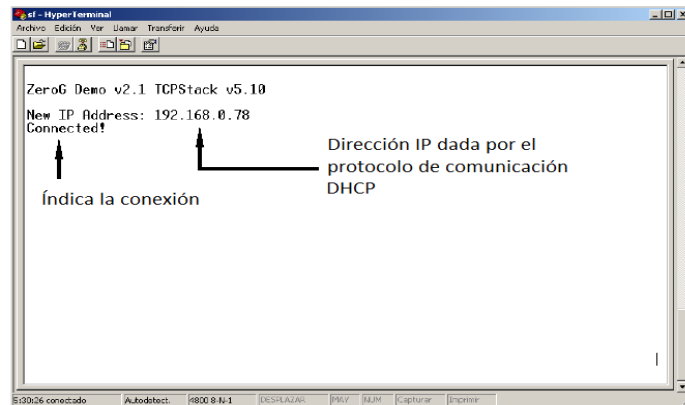


Figura 5.16: Esquema utilizado en laboratorio.

### 5.10.2. Programa de adquisición de datos

Con el software y el hardware configurado, se puede establecer conexión entre cliente-servidor. El servidor (microcontrolador) estará enviando los datos al cliente (computador), desde la página principal el cliente puede interactuar con el hardware, pudiendo activar o desactivar las galgas. Los datos son visualizados en una página web, pero son almacenados en una base de datos. La base de datos es una aplicación CLIENTE previamente programada en lenguaje JAVA con una IDE “*eclipse*”, crea una base de datos con los valores obtenidos de las galgas. Cuando “*eclipse*” crea la base de datos, estos archivos son recuperados en MATLAB para ser interpretados (ver figura 5.17).

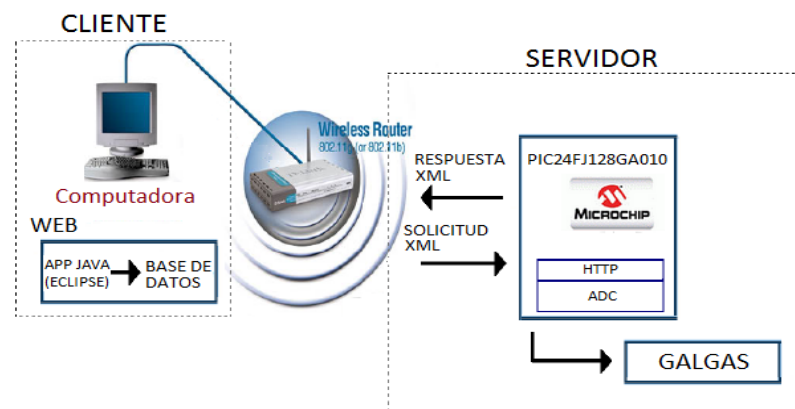


Figura 5.17: Diagrama de comunicación para las galgas extensométricas.

## Capítulo 6

# Resultados experimentales de las galgas extensométricas

Es esta sección se presenta una metodología para expresar la forma del área de contacto llanta-pavimento. El objetivo de la colocación de las galgas en el rodillo es investigar las fuerzas resultantes en la zona de contacto. La idea es mostrar que los modelos con parámetros concentrados pueden capturar características de los modelos con parámetros distribuidos.

### 6.1. Distribución longitudinal y lateral

En los experimentos se muestra que la distribución longitudinal y lateral a lo largo del parche de contacto corresponde a una área no uniforme pero constante, la forma corresponde a un polígono, el cual se asemeja a un trapecio (ver figura 6.1).

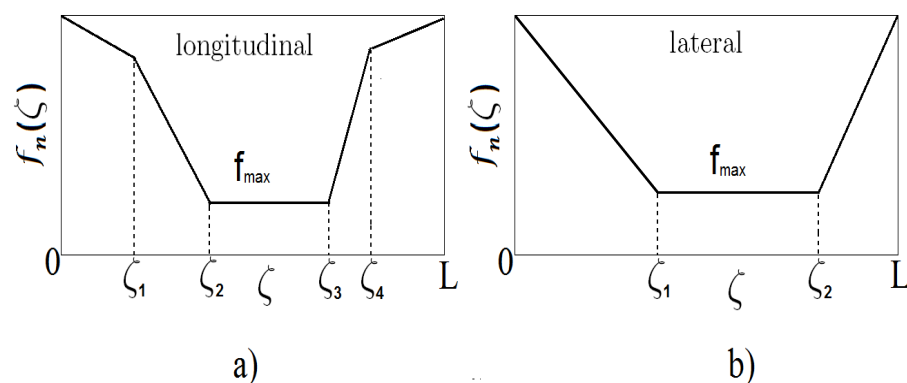


Figura 6.1: Forma de distribución: a) longitudinal b) lateral.



Analíticamente el parche de contacto puede ser dividido en partes infinitesimales  $d\zeta$ , por lo tanto, la carga normal de distribución longitudinal/lateral a lo largo de la superficie de contacto está representada por  $f_n(\zeta)$  (ver figura 6.2 y figura 6.3).

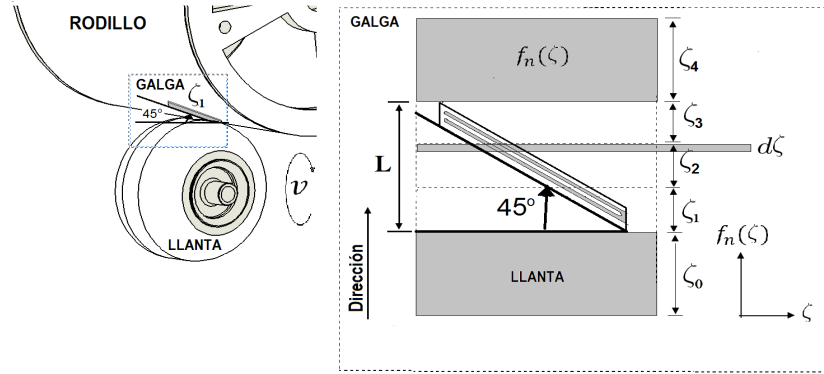


Figura 6.2: Representación del parche de contacto lateral.

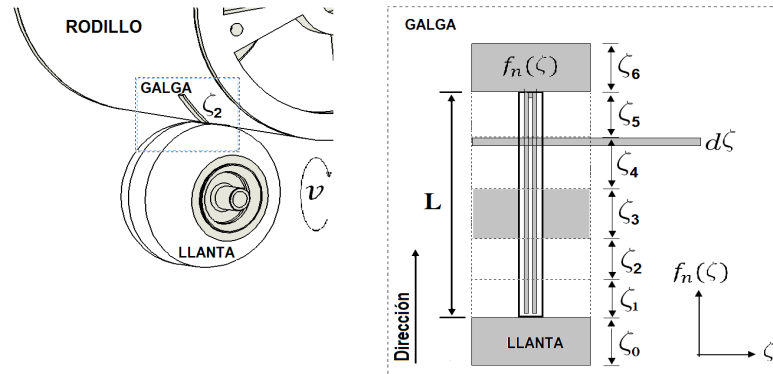


Figura 6.3: Representación del parche de contacto longitudinal.

La función de la distribución de la carga longitudinal  $F_n(\zeta)$ , se puede aproximar por

$$f_n(\zeta) = \begin{cases} \alpha_1\zeta + \beta_1 & \text{para } 0 \leq \zeta \leq \zeta_1 \\ \alpha_2\zeta + \beta_2 & \text{para } \zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2 \\ f_{\text{máx}} & \text{para } \zeta_2 \leq \zeta \leq \zeta_3 \\ \alpha_3\zeta + \beta_3 & \text{para } \zeta_3 \leq \zeta \leq \zeta_4 \\ \alpha_4\zeta + \beta_4 & \text{para } \zeta_4 \leq \zeta \leq L \end{cases} \quad (6.1)$$

siendo  $f_{max}$  el valor máximo de la carga normal de la distribución longitudinal y lateral. Aquí  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $\zeta_3$  y  $\zeta_4$  son valores conocidos que determinan la posición lineal y la distribu-

ción de la carga normal, donde  $\alpha_1 = \frac{f_n(\zeta_1) - f_n(0)}{\zeta_1}$ ,  $\alpha_2 = \frac{f_{max} - f_n(\zeta_1)}{\zeta_2 - \zeta_1}$ ,  $\alpha_3 = \frac{f_n(\zeta_4) - f_{max}}{\zeta_4 - \zeta_3}$ ,  $\alpha_4 = \frac{f(L) - f_n(\zeta_4)}{L - \zeta_4}$ ,  $\beta_1 = f_n(0)$ ,  $\beta_2 = \frac{f_n(\zeta_1)\zeta_2 - f_{max}\zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}$ ,  $\beta_3 = \frac{f_{max}\zeta_4 - f_n(\zeta_4)\zeta_3}{\zeta_4 - \zeta_3}$ , y  $\beta_4 = \frac{f_n(\zeta_4)L - f_n(L)\zeta_4}{L - \zeta_4}$ .

Para la distribución de la carga lateral  $f_n$  está dada por

$$f_n(\zeta) = \begin{cases} \alpha_5\zeta + \beta_5 & 0 \leq \zeta \leq \zeta_1 \\ f_{\text{máx}} & \zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2 \\ \alpha_6\zeta + \beta_6 & \zeta_2 \leq \zeta \leq L \end{cases} \quad (6.2)$$

donde  $\alpha_5 = \frac{f_{max} - f_n(0)}{\zeta_1}$ ,  $\alpha_6 = \frac{f_n(L) - f_{max}}{L - \zeta_2}$ ,  $\beta_5 = f_n(0)$  y  $\beta_6 = \frac{f_{max}L - f_n(L)\zeta_2}{L - \zeta_2}$ .

La distribución de la fuerza en las funciones (6.1) y (6.2) cuyos parámetros son  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  y  $\alpha_4$ , y  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  y  $\beta_4$  para la función en (6.1) y para la función en (6.2),  $\alpha_5$ ,  $\alpha_6$ ,  $\beta_5$  y  $\beta_6$  representa la discretización espacial en el área de contacto llanta pavimento.

## 6.2. Resultados experimentales de las galgas extensométricas

Algunos artículos presentados en la literatura, por ejemplo en Canudas de Wit, C. et al. (2003), Tsiotras, P. et al. (2004), Velenis, E. et al. (2002) y Anghelache, G. et al. (2011), muestran modelos matemáticos, así como también algunas metodologías para determinar la fuerza de distribución a lo largo del parche de contacto en estado estacionario. Los resultados presentados en este trabajo confirman las suposiciones que se dieron en la literatura.

Los resultados experimentales muestran la dinámica del vehículo a diferentes velocidades, estos resultados presentan la fuerza de distribución en la zona de contacto llanta-pavimento.

La figura 6.4 muestra el comportamiento tres pruebas para la galga 1, cuando la llanta pasa sobre ésta. Estas señales se presentan bajo las mismas condiciones, mostrando el mismo comportamiento en cada prueba, con algunas variaciones debido al ruido presente en la señal. La variación de fuerza a lo largo de la zona de contacto permite conocer la distribución de la fuerza en el área de contacto llanta-pavimento. Las gráficas indican el instante justo cuando la llanta hace contacto con la galga y el instante cuando pierde el contacto con estas. Se puede observar que el parche de contacto es asimétrico.

La figura 6.5 muestra variaciones de la fuerza de distribución entre la llanta y el pavimento a diferentes velocidades. En estas señales se puede observar que a mayor velocidad la fuerza decrece ligeramente manteniendo la señal la forma trapezoidal.

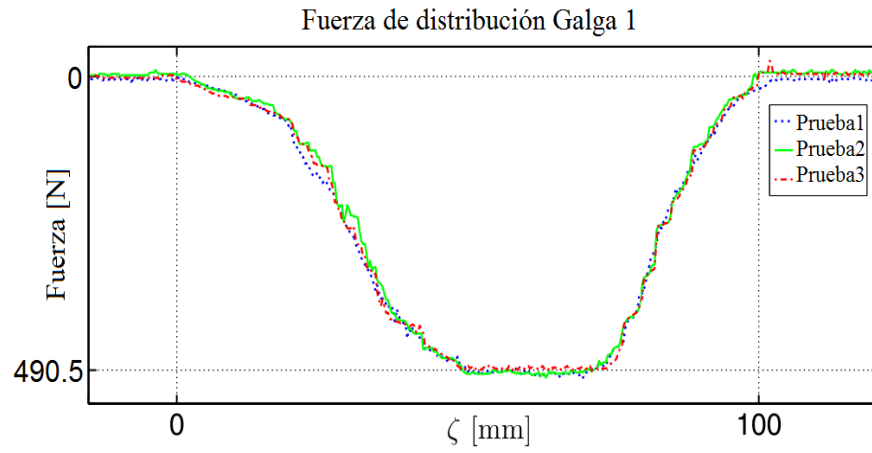


Figura 6.4: Adquisición de señales de la galga 1.

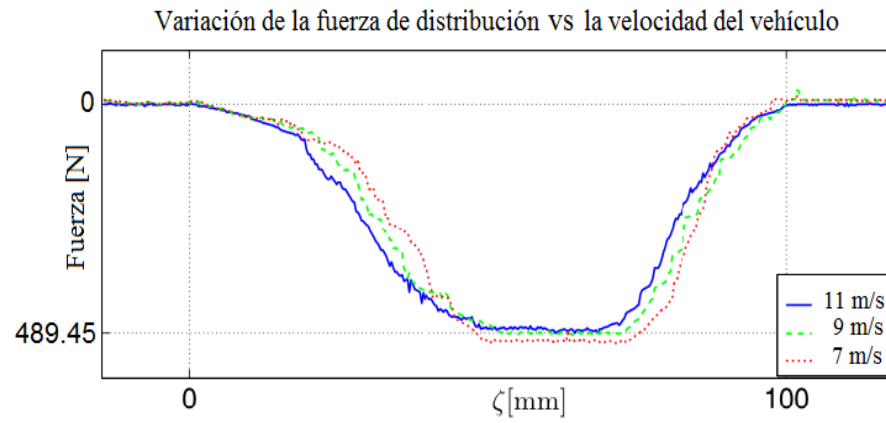


Figura 6.5: Variación de la fuerza de distribución.

La figura 6.6 muestra la fuerza de distribución en el área de contacto de la galga 1. Esta galga fue dividida en segmentos  $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_6$ , donde en  $\zeta_0$  y  $\zeta_6$  no se tiene contacto de la llanta con la galga.  $\zeta_1$  es el instante en el cual la llanta hace contacto parcial con la galga,  $\zeta_2$  es cuando la llanta tiene un primer contacto completo con la galga,  $\zeta_3$  es el contacto completo de la llanta con la galga, es el parche de contacto,  $\zeta_4$  es el contacto final parcial del área de contacto y  $\zeta_5$  es el instante en que la llanta deja de tener contacto parcial con la llanta.

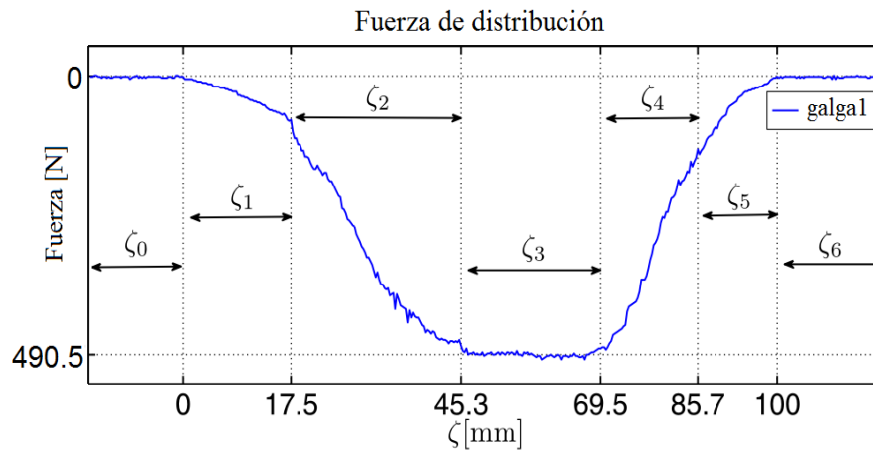


Figura 6.6: Adquisición de la señal de la gala 1, con velocidad de 11 [m/s].

La figura 6.7 muestra el comportamiento de la galga 2. Como en la gráfica anterior, la distribución del área de contacto fue dividida en secciones  $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_6$ . En esta gráfica se observa que la variación de la fuerza es ligeramente diferente a la galga 1, esto debido a la calibración diferente para cada galga.

En la figura 6.8 se observa el comportamiento para la galga 3, presenta las mismas características de la galga 2 y la galga 3, con pequeñas variaciones de fuerza y también algunas variaciones en la distancia de la longitud  $\zeta$ .

La figura 6.9 muestra tres pruebas bajo las mismas condiciones para la galga 4, colocada diagonalmente sobre el rodillo. Esta gráfica muestra un comportamiento más lineal al comienzo de la zona de contacto de la llanta con la galga a diferencia de las galgas colocadas longitudinalmente. La salida tiene también un comportamiento lineal.

La figura 6.10 muestra variaciones de la fuerza de distribución para la galga 4 localizada diagonalmente, a diferentes velocidades del vehículo. En estas señales existe también una variación mínima de fuerza. Se puede observar que a una mayor velocidad la fuerza dismi-

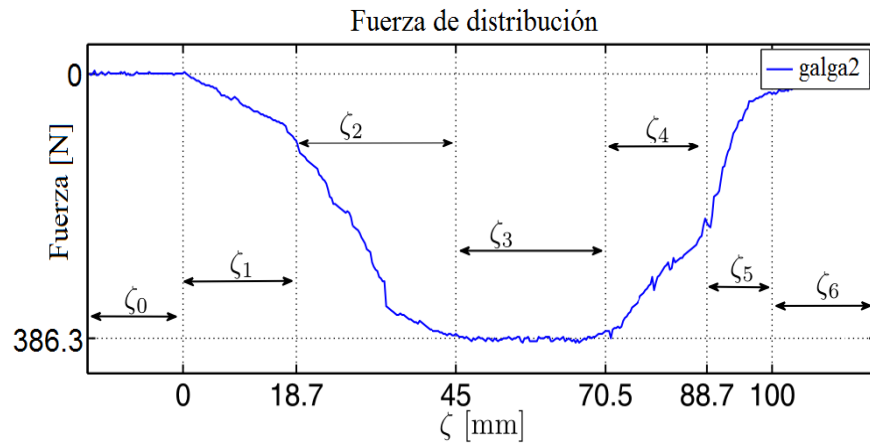


Figura 6.7: Adquisición de la señal de la gala 2, con velocidad de 11 [m/s].

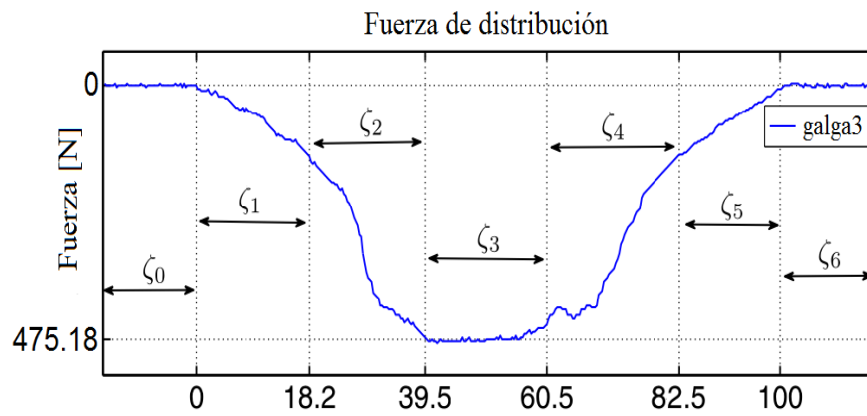


Figura 6.8: Adquisición de la señal de la gala 3, con velocidad de 11 [m/s].

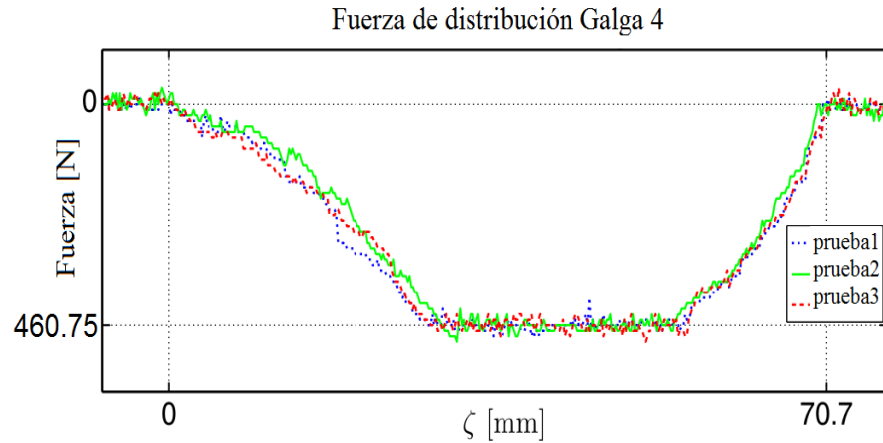


Figura 6.9: Adquisición de señal de la galga 4, con velocidad de 11[m/s].

nuye ligeramente.

Los resultados de las figuras 6.5 y 6.10 son similares a los presentados en el modelo de Burchkhardt, M. (1993) donde se indica que la fuerza de fricción decrece con la velocidad. Este decrecimiento en los experimentos del banco de pruebas fue de 2.2% y 5.4%

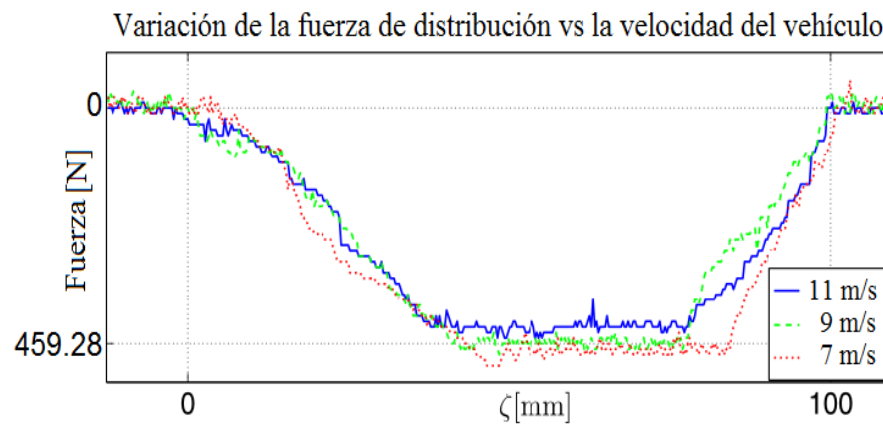


Figura 6.10: Adquisición de señales de la galga 4 a diferentes velocidades.

La figura 6.11 muestra la fuerza de distribución en el parche de contacto de la galga 4, esta señal fue dividida en 5 secciones  $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_4$ . A diferencia de las galgas adheridas al rodillo en sentido longitudinal, en este medidor no hay zona de contacto inicial (zona 1 ( $\zeta_1$ ))

en la figura 6.6, por ejemplo).

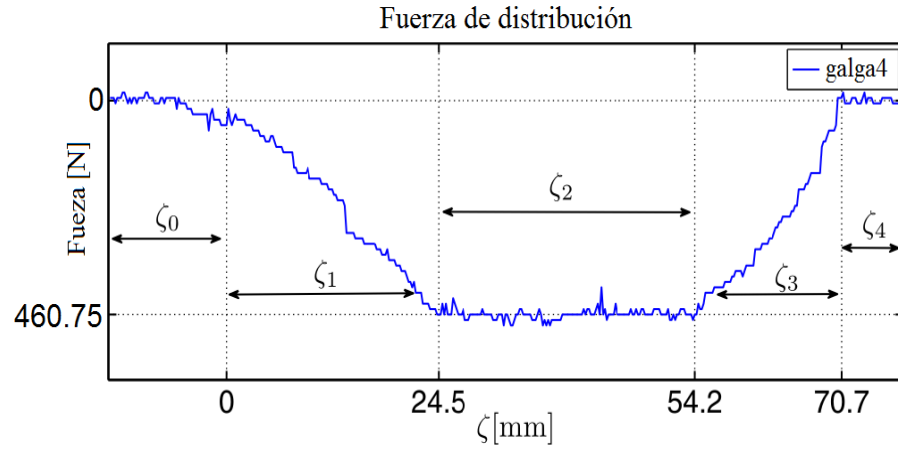


Figura 6.11: Adquisición de la señal de la galga 4, con velocidad de 11[m/s].

En la figura 6.12 se muestra el comportamiento de la galga 5, en esta gráfica se tiene un comportamiento similar al de la galga 4, con una variación en el rango de fuerza y en la longitud de la distancia  $\zeta$ , esta variación es debida a la calibración.

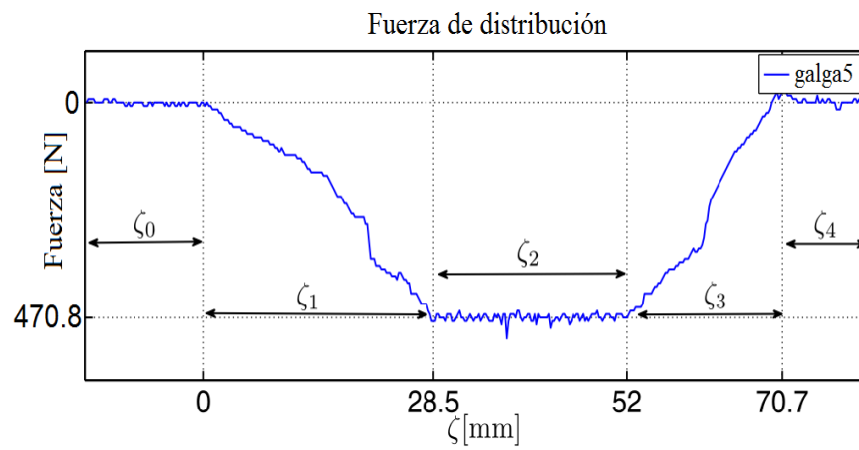


Figura 6.12: Adquisición de la señal de la galga 5, con velocidad de 11[m/s].

Finalmente la figura 6.13 muestra el comportamiento de la galga 6 con las mismas características de la galga 4 y 5.

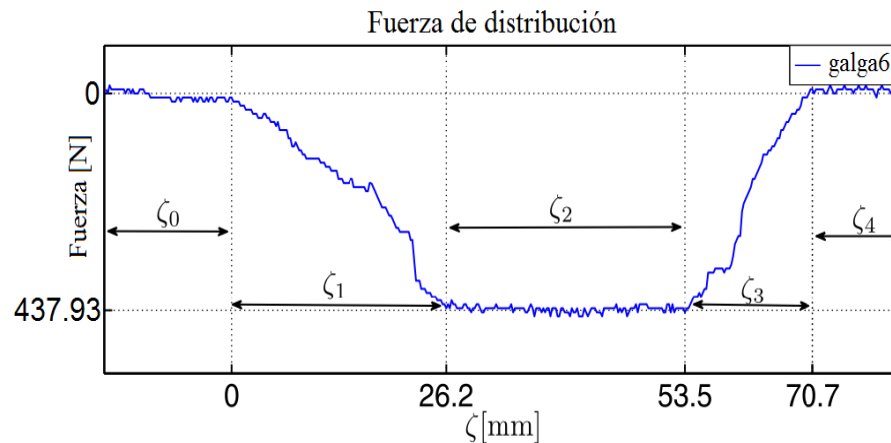


Figura 6.13: Adquisición de la señal de la galga 6, con velocidad de 11[m/s].

Las galgas colocadas longitudinalmente y lateralmente fueron calibradas individualmente y por esta razón se tiene una variación en el rango de la fuerza. Sin embargo cada galga es útil para confirmar el comportamiento del parche de contacto.

### 6.3. Discusión de resultados de las galgas extensométricas

#### 6.3.1. Galgas extensométricas localizadas longitudinalmente

Para las galgas localizadas longitudinalmente, la respuesta tiene una forma trapezoidal. Esto es porque el primer contacto de la llanta con la galga  $\zeta_1$  es diferente de la zona cuando la llanta deja de tener contacto  $\zeta_5$ . Las regiones  $\zeta_4$  y  $\zeta_5$ , revierten el caso de  $\zeta_2$  y  $\zeta_1$ , respectivamente, aunque no es notable el cambio de las pendientes. En la sección  $\zeta_3$  hay un contacto pleno en todo tiempo, la llanta está totalmente sobre la galga y es evidente que en esta zona la fuerza está distribuida uniformemente.

La forma de la respuesta longitudinal de las galgas extensométricas confirman que la fuerza de distribución tiene forma trapezoidal como encontró en Deur, J. (2001), Velenis, E. et al. (2002), Canudas de Wit, C. et al. (2003) aunque la simetría mostrada en la figura 2.7 está revertida.

#### 6.3.2. Galgas extensométricas localizadas lateralmente

Las galgas localizadas lateralmente intentan mostrar las fuerzas laterales generadas entre la llanta y el pavimento. Los resultados experimentales indican que no existe una variación



significante de la fuerza en la dirección lateral sección  $\zeta_1$  y  $\zeta_3$ , por lo tanto la zona de contacto es casi constante en esta dirección. Del mismo modo la fuerza constante en la sección  $\zeta_2$  para las galgas localizadas diagonalmente, confirman que los modelos con parámetros concentrados pueden describir las fuerzas de contacto en la dirección lateral, puesto que no hay una variación significativa en esta dirección.

Analíticamente se ha demostrado que se pueden aproximar los modelos con parámetros concentrados a los modelos con parámetros distribuidos a través de ecuaciones ordinarias y a través de una discretización espacial, (Canudas de Wit, C. and Tsiotras, P. 1999).

En las gráficas obtenidas se observa como que la zona inicial  $\zeta_1$ , es diferente de la zona  $\zeta_3$ . La principal diferencia radica en que a la llanta le toma más tiempo tener contacto pleno con el rodillo en el inicio, como se muestra en la figura 6.14.

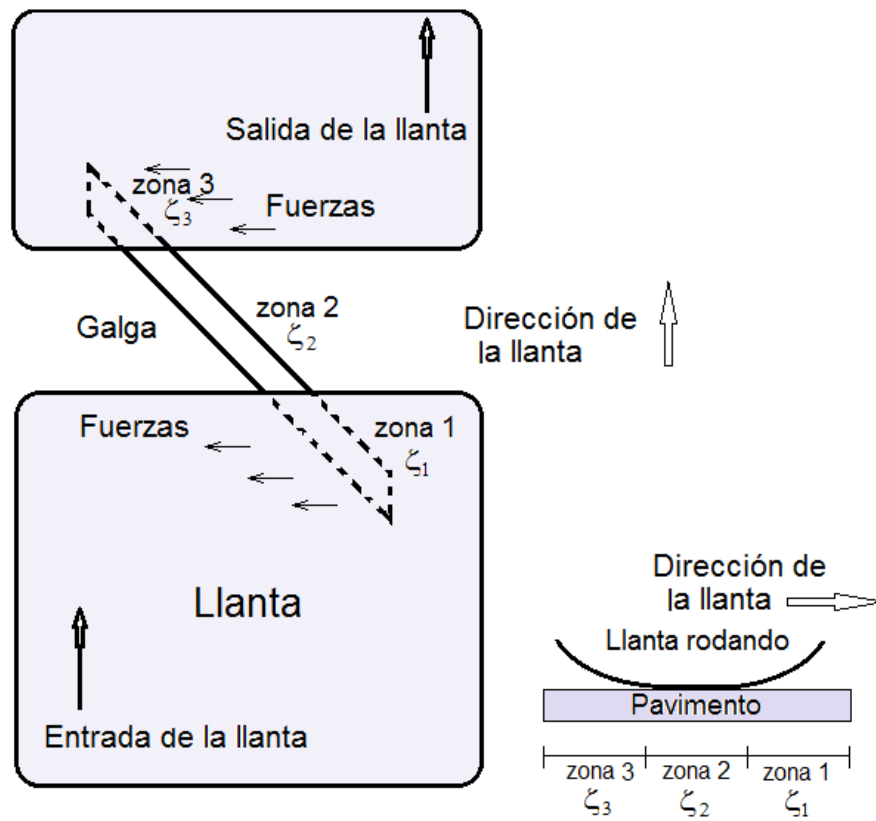


Figura 6.14: Forma en que hace contacto la llanta con la galga.

## Capítulo 7

# Sistema de control del banco experimental

En este capítulo se presenta la conexión de dispositivos así como el diseño del controlador basado en técnicas de Lyapunov. Los algoritmos de control que se presentan ayudan a compensar los efectos dinámicos de fricción. Para el diseño del controlador se empleó el modelo con parámetros concentrados, puesto que se probó que este modelo es una buena aproximación de los modelos con parámetros distribuidos.

### 7.1. Conexión de dispositivos

El servomotor Yaskawa SGMPH cuenta con un manejador, éste es el modelo SGDH. El diagrama de conexiones entre el manejador y el servomotor se muestra en la figura 7.1. El manejador cuenta con entradas analógicas para velocidad, par y control de posición. Estas entradas serán proporcionadas por el controlador programado previamente en Matlab con lenguaje de programación C, utilizando una tarjeta de adquisición de datos, Humosoft MF624. El manejador recibe señales que van de  $\pm 2$  a  $\pm 10$  volts y en par de  $\pm 1$  a  $\pm 10$  volts, estos valores son proporcionales a la velocidad y par máximo del servomotor.

#### 7.1.1. Instalación y configuración de la tarjeta Humosoft

En los experimentos se utilizó la aplicación del paquete de MATLAB xPC Target, que permite ejecutar tareas en tiempo real. xPC Target es un *toolbox* de la compañía *The MathWorks* para el desarrollo de sistemas en tiempo real. En particular es adecuado para el control en tiempo real de procesos, ya que permite al PC comunicarse con el exterior usando tarjetas de adquisición de datos, en este caso la tarjeta multifuncional Humosoft MF624.

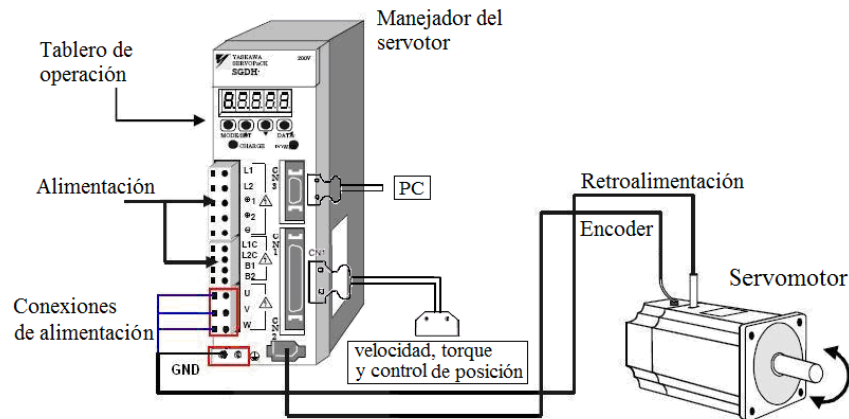


Figura 7.1: Diagrama de conexión.

xPC Target requiere de productos *The MathWorks* como:

- MATLAB - Control e interacción con el software xPC Target.
- Simulink - Modelo de sistemas dinámicos físicos y controladores usando diagramas de bloque.
- Real-Time Workshop - Convierte bloques de Simulink y gráficos en código C.
- Compilador C - Utiliza un compilador C y el Real-Time Workshop para construir una aplicación.
- xPC Target - Implementa aplicaciones independientes de destino y aplicaciones personalizadas de interfaz gráfica de usuario que se comunican con la aplicación destino.

Inicialmente, la aplicación se desarrolla en una computadora de escritorio (*host*), con MATLAB, Simulink, Real-Time Workshop y un compilador de C previamente instalados. El compilador C crea un código ejecutable generado del Real-Time Workshop. xPC *Target* usa este código ejecutable para crear una imagen ejecutable (aplicación *target*). Adicionalmente Real-Time Workshop soporta los compiladores de Microsoft Visual C/C++ Versión 5.0, 6.0 ó 7.0, o bien Watcom C/C++ Versión 10.6 ó 11.0. En este proyecto se utiliza el compilador Microsoft Visual C/C++ Versión 6.0.

En la computadora *host* se crea el modelo utilizando bloques de Simulink y el código correspondiente. Posteriormente, este código se ejecuta en tiempo real en una segunda computadora (*target*).

La computadora *target* funciona utilizando un disc compacto (creado por el *toolbox xPC target*) que contiene el núcleo en tiempo real. Una vez cargado el sistema operativo, desde el PC *host* se descarga el código generado a partir del diagrama *Simulink*.

La comunicación entre *host* y *target* se realiza vía red, ésta es una LAN (red de área local) adaptando el protocolo TCP/IP para comunicación, los datos son transferidos a 100 megabits/segundo.

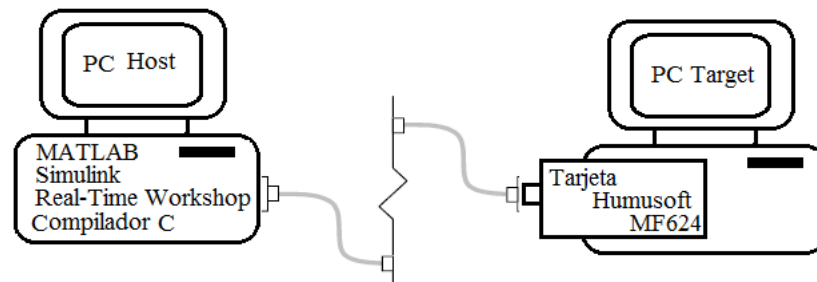


Figura 7.2: Diagrama de conexión.

## 7.2. Ley de control para el banco de pruebas

El objetivo principal del controlador es comprobar estabilidad de seguimiento de trayectorias. El controlador que se propone está basado en la velocidad angular del rodillo  $\omega_2$  y la velocidad relativa  $s$  del sistema.

Para diseñar el controlador es necesario conocer el modelo dinámico de la instalación experimental, éste está constituido por un rodillo, una llanta y un servomotor. Se ha supuesto que el rodillo se comporta como el pavimento y que también representa la masa del vehículo. La llanta está acoplada al eje de un servomotor sin transmisión (ver figura 7.3).

Con el diseño del sistema experimental propuesto se obtiene la dinámica del rodillo, descrita por

$$I_2\dot{\omega}_2 = R_2F - \tau_{c2} - B_2\omega_2 \quad (7.1)$$

donde  $I_2$  es la inercia del rodillo,  $\omega_2$  es la velocidad angular del rodillo,  $R_2$  es el radio del rodillo,  $F$  es la fuerza de fricción,  $\tau_{c2}$  es el par perdido por fricción seca en los rodamientos del rodillo y  $B_2$  coeficiente de viscosidad en los rodamientos del rodillo.

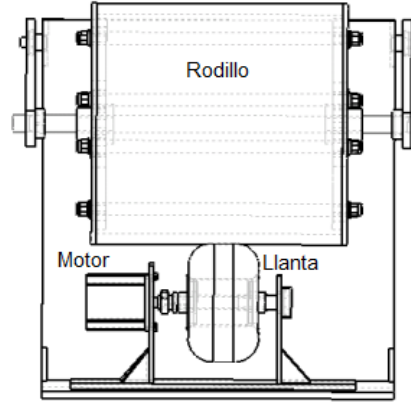


Figura 7.3: Banco de pruebas para estudiar la fricción llanta-pavimento.

La ecuación que representa la dinámica de la llanta está representada como

$$I_1 \dot{\omega}_1 = \tau_m - \tau_{c1} - R_1 F - B_1 \omega_1 \quad (7.2)$$

donde  $I_1$  es la inercia del rodillo,  $\omega_1$  es la velocidad angular de la llanta,  $R_1$  es el radio de la llanta,  $F$  es la fuerza de fricción,  $\tau_{c1}$  es el par perdido por fricción seca en los rodamientos de la llanta y  $B_1$  coeficiente de viscosa en los rodamientos del llanta.

Las ecuaciones (7.1) y (7.2), representan la dinámica del sistema y se pueden relacionar estas a través de la velocidad relativa  $s = R_2 \omega_2 - R_1 \omega_1$ , entonces al sustituir estas ecuaciones en la ecuación (3.6), se tiene

$$\dot{s} = F \left[ \frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_2} \right] + \omega_1 \left[ \frac{R_1 B_1}{I_1} \right] - \omega_2 \left[ \frac{R_2 B_2}{I_2} \right] - \tau_m \left[ \frac{R_1}{I_1} \right] + \tau_{c1} \left[ \frac{R_1}{I_1} \right] - \tau_{c2} \left[ \frac{R_2}{I_2} \right] \quad (7.3)$$

despejando  $\omega_1$  de la ecuación (3.6) y reacomodando términos, se obtiene

$$\dot{s} = F \left[ \frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_2} \right] + \omega_2 \left[ \frac{B_1 R_2}{I_1} - \frac{B_2 R_2}{I_2} \right] - s \left[ \frac{B_1}{I_1} \right] - \tau_m \left[ \frac{R_1}{I_2} \right] + \tau_{c1} \left[ \frac{R_1}{I_1} \right] - \tau_{c2} \left[ \frac{R_2}{I_2} \right]. \quad (7.4)$$

Por lo tanto el modelo sobre el que se diseña la ley de control está descrito por

$$\dot{\omega}_2 = C_1 \mu - C_2 \omega_2 - C_3 \quad (7.5)$$

$$\dot{s} = C_4 \mu + C_5 \omega_2 - C_6 s - C_7 \tau_m - C_8 \quad (7.6)$$

donde  $C_1 = \frac{R_2}{I_2}$ ,  $C_2 = \frac{B_2}{I_2}$ ,  $C_3 = \frac{\tau_{e2}}{I_2}$ ,  $C_4 = \frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_2}$ ,  $C_5 = \frac{B_1 R_2}{I_1} - \frac{B_2 R_2}{I_2}$ ,  $C_6 = \frac{B_1}{I_1}$ ,  $C_7 = \frac{R_1}{I_1}$ ,  $C_8 = \frac{R_1 \tau_{e1}}{I_1} - \frac{R_2 \tau_{e2}}{I_2}$ .

Los errores de seguimiento para la velocidad angular  $\omega_2$  y velocidad relativa  $s$ , están definidos respectivamente como:

$$\tilde{\omega}_2 = \omega_2 - \omega_{2d} \quad (7.7)$$

$$\tilde{s} = s - s_d \quad (7.8)$$

donde  $\omega_{2d}$  y  $s_d$  son los valores deseados para  $\omega_2$ , y  $s$ .

Por lo tanto la dinámica del error de seguimiento queda como

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 = C_1 \mu - C_2 \omega_2 - C_3 - \dot{\omega}_{2d} \quad (7.9)$$

$$\dot{\tilde{s}} = C_4 \mu + C_5 \omega_2 - C_6 s - C_7 \tau_m - C_8 - \dot{s}_d \quad (7.10)$$

Para la obtención de la ley de control se propone una función candidata de Lyapunov utilizando la dinámica del error de seguimiento.

Se define

$$W_1 = \frac{1}{2} \gamma \tilde{s}^2 \quad (7.11)$$

Si se toma la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (7.11), se tiene

$$\dot{W}_1 = \gamma \tilde{s} \dot{\tilde{s}} \quad (7.12)$$

Sustituyendo  $\dot{\tilde{s}}$  en la ecuación (7.12)

$$\dot{W}_1 = \gamma \tilde{s} [C_4 \mu + C_5 \omega_2 - C_6 s - C_7 \tau_m - C_8 - \dot{s}_d] \quad (7.13)$$

Por lo tanto la ley de control se obtiene seleccionando  $\tau_m$  de la ecuación (7.13), se tiene

$$\tau_m = \frac{1}{C_7} [-C_4 \mu - C_5 \omega_2 + C_6 s + C_8 + \dot{s}_d - f \tilde{s}] \quad (7.14)$$

que incluye un término de corrección de error  $f \tilde{s}$ .

Al sustituir  $\tau_m$  en la ecuación (7.13), se tiene

$$\dot{W}_1 = -f\tilde{s}^2 \quad (7.15)$$

Lo que garantiza que  $\tilde{s} \rightarrow 0$ . Esto a su vez implica que  $\mu(s) \rightarrow \mu_d(s_d)$ . Por otro lado  $\dot{\tilde{\omega}}_2$  se puede expresar como

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 = -C_1(\mu - \mu_d) - C_2\tilde{\omega}_2 - C_3 \quad (7.16)$$

donde  $(\omega_2 + \omega_{2d}) > 0$ , por diseño. El término  $(\mu - \mu_d)$  es acotado y tiende a cero de la ecuación (7.15), por lo que no hay tiempo de escape finito. Así después de un tiempo lo suficientemente grande, se tiene  $\dot{\tilde{\omega}}_2 = -C_2\tilde{\omega}_2$  lo que implica que  $\tilde{\omega}_2 \rightarrow 0$  y con ello se prueba la estabilidad asintótica de  $\tilde{s} = 0$  y  $\tilde{\omega}_2 = 0$  con la ley de control propuesta para  $\tau_m$ .

### 7.3. Determinación de parámetros

#### 7.3.1. Parámetros del sistema experimental

Los parámetros físicos del sistema son requeridos por la ley de control, por lo tanto los radios, inercias y coeficientes de viscosidad serán primeramente calculados ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$ ), debido a la necesidad de estos en experimentos posteriores.

Para obtener el radio del rodillo  $R_1$  se midió experimentalmente con un calibrador de alta precisión, en el caso de la llanta se tiene un radio variable dependiendo del peso del rodillo y de la presión de la llanta, para conocer este radio se tomaron mediciones de un punto base (piso) hacia la tangente del baleros del rodillo y hacia la tangente del balero de la llanta como se muestra en la figura 7.4.

Por lo tanto  $R_2 = 0.2535[\text{m}]$  y  $R_1 = 0.1081[\text{m}]$ .

Para la obtención de la inercia  $I_1$ , el coeficiente de viscosidad  $B_1$  y el par perdido por fricción seca en los rodamientos de la llanta  $\tau_{c1}$ , se realizaron pruebas en la llanta sin el rodillo, para lo cual se utilizó la ecuación 7.2, despreciando el término  $R_1F$  y analizando la respuesta escalón de esta ecuación para una entrada  $\tau_m$  constante, se tiene

$$\omega_1(t) = \frac{\tau_m - \tau_{c1}}{B_1} (1 - e^{-\frac{B_1}{I_1}t}) \quad (7.17)$$

derivando la ecuación anterior se obtiene

$$\dot{\omega}_1(t) = \frac{\tau_m - \tau_{c1}}{I_1} - e^{-\frac{B_1}{I_1}t} \quad (7.18)$$

y con la segunda derivada de la ecuación 7.17, se tiene

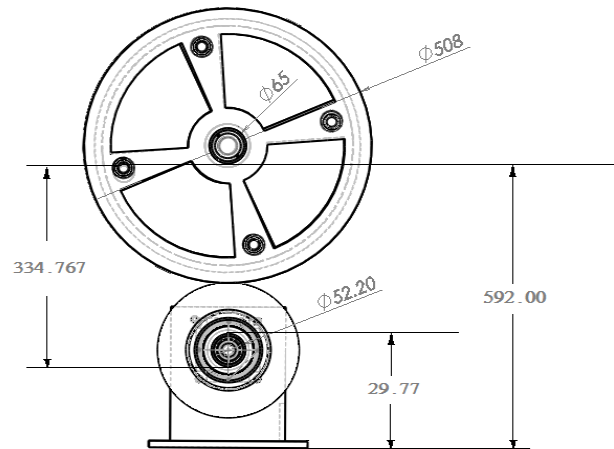


Figura 7.4: Obtención de radios e inercias del banco de pruebas, acotación [mm].

$$\ddot{\omega}_1(t) = -\frac{B_1}{I_1}\dot{\omega}(t) \quad (7.19)$$

Idealmente las ecuaciones (7.17), (7.18) y (7.19) tiene la forma que se muestra en la figura 7.5.

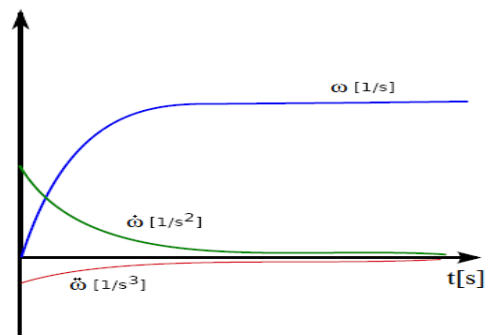


Figura 7.5: Comportamiento ideal para  $\omega$ ,  $\dot{\omega}$ ,  $\ddot{\omega}$ .

La ecuación (7.18) tiene un máximo en  $t=0$ , queda como

$$\tau_m = I_1\dot{\omega}_{1max} + \tau_{c1} \quad (7.20)$$

en esta ecuación se puede aplicar un par diferente en los experimentos para determinar  $I_1$  y  $\tau_{c1}$ , de esta forma y resolviendo sistemas de ecuaciones (Ec.7.14, Ec. 7.18 y Ec.7.19)se



determinó  $B_1$ . El comportamiento real del sistema se muestra en la figura 7.6.

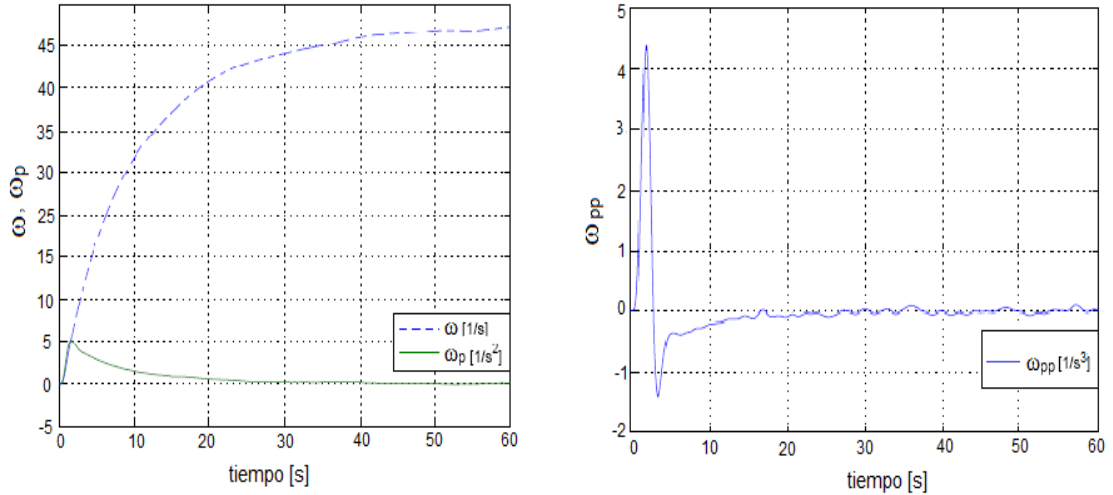


Figura 7.6: Velocidades angulares  $\omega_2$ ,  $\dot{\omega}_2$ ,  $\ddot{\omega}_2$  en la llanta para un par constante.

Entonces los valores obtenidos de los experimentos aplicados a la llanta son  $I_1=0.0051$   $[N/m]$ ,  $\tau_{c1}=0.0347$   $[N/m]$  y  $B_1=1.4347 \times 10^{-3}$   $[N/m]$ .

Para la adquisición de parámetros del rodillo se parte de la ecuación (7.1), y si se considera una velocidad constante  $\omega_2=\omega_{cte}$ , entonces  $\dot{\omega}_2=0$ , quedando la ecuación (7.1), como

$$R_2F = B_2\omega_{cte} + \tau_{c2} \quad (7.21)$$

Conociendo la velocidad del rodillo, y la velocidad de la llanta se puede conocer la fuerza  $F$ , con estos valores se obtiene otro sistema de ecuaciones, de esta manera se encontraron  $B_2$  y  $\tau_{c2}$ . Los valores correspondientes fueron  $B_2 = 0.0179$   $[N/m]$   $\tau_{c2}=1.2253$   $[N/m]$ .

Para la obtención de la inercia  $I_2$  se resuelve la ecuación (7.1) y se considera la fricción nula  $F = 0$ , así como la velocidad del rodillo constante  $\omega_2 = \omega_{cte}$ , la solución es

$$\omega_2(t) = \frac{\tau_{c2} + B_2\omega_{cte}}{B_2} e^{-\frac{B_2}{I_2}t} - \frac{\tau_{c2}}{B_2} \quad (7.22)$$

derivando

$$\dot{\omega}_2 = \frac{R_2F_{cte}}{I_2} e^{-\frac{B_2}{I_2}t} \quad (7.23)$$

Para la obtención de la inercia se llevó al rodillo a una velocidad constante y se observó su desaceleración levantando el rodillo. Se despreció la fricción  $F$  de la ecuación (7.1). Las graficas correspondientes a este experimento se muestran en la figura 7.6.

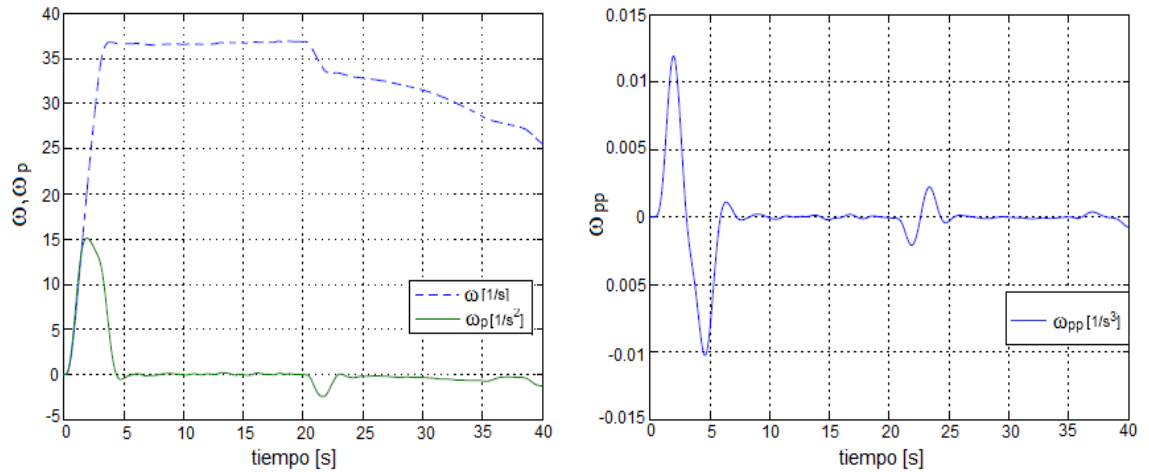


Figura 7.7: Velocidades angulares  $\omega_2$ ,  $\dot{\omega}_2$ ,  $\ddot{\omega}_2$  en el rodillo para un par constante.

Resolviendo el sistema de ecuaciones (ecuaciones (7.22) y (7.23)) se tienen los valores  $I_2=0.7465$  [N/m]  $B_2=0.0179$  [N/m]  $\tau_{c2}=1.2253$  [N/m].

La velocidad angular utilizada fue 30 [rad/s].

### 7.3.2. Parámetros del modelo de fricción

Como se ha mencionado en capítulos anteriores en el presente trabajo, se utiliza el modelo de LuGre, que permite capturar la transición observada de la fuerza de fricción durante el frenado y la aceleración. También se mencionó que este modelo introduce la variable  $z$  que representa el estado de deformación del contacto y reproduce el efecto “*Stribeck*”. Los parámetros asociados a este modelo son  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $v_s$ ,  $\mu_c$  y  $\mu_s$ .

El efecto “*Stribeck*” relaciona la magnitud de la fuerza de fricción  $F$  con la velocidad relativa  $s$  en estado estacionario, por lo tanto la fuerza de fricción en estado estacionario es

$$F = g(s) + \sigma_2 s. \quad (7.24)$$

Sustituyendo  $g(s)$  (ecuación 3.19) en la ecuación anterior, se tiene

$$F = \mu_c + (\mu_s - \mu_c)e^{-|\frac{s}{v_s}|^{\frac{1}{2}}} + \sigma_2 s \quad (7.25)$$

así cada valor de la velocidad relativa  $s$  le corresponde una determinada fuerza de fricción  $F$ . Se realizaron pruebas en estado estacionario midiendo la fuerza de fricción  $F$  y la velocidad relativa  $s$ .

Para el cálculo de  $\mu_c$  se tomó el menor valor de la velocidad relativa, éste corresponde a 0.000628 [N], por tanto la fuerza para iniciar el movimiento del sistema es la fuerza de fricción estática máxima  $\mu_s$  que corresponde a 4.8540 [N] (ver figura 7.8).

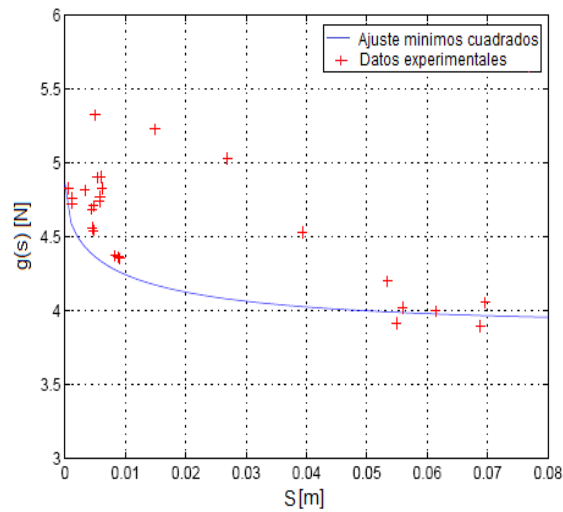


Figura 7.8: Efecto “*Stribeck*”, con ajuste.

Para encontrar la fricción viscosa  $\sigma_2$  se sabe que esta fricción representa una fuerza que es una relación lineal entre la fuerza aplicada y la velocidad. La fuerza de fricción en estado estacionario corresponde a

$$F = \mu_c + \sigma_2 s. \quad (7.26)$$

Dado que se conoce la velocidad relativa  $s$  y la fuerza de fricción  $F$ , se pueden sustituir estos valores en la ecuación anterior, entonces  $\sigma_2 = 47.1772$  [kg/s]. Conociendo los valores de  $\mu_c$ ,  $\mu_s$ ,  $s$ ,  $\sigma_2$  se puede determinar  $v_s$ , que corresponde al valor de 0.0094 [m/s].

Para determinar los parámetros  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$  del modelo de LuGre se utiliza identificación de parámetros por el método de gradiente. La identificación tiene la forma

$$Y = W\alpha \quad (7.27)$$

donde  $Y$  es la salida,  $W$  es el vector de señales y  $\alpha$  es el vector de parámetros desconocidos. Por otro lado sustituyendo la ecuación (3.16) en la ecuación (3.17) y reacomodando términos, se tiene

$$F = \sigma_0 z - \sigma_0 \sigma_1 \frac{|s|}{g(s)} + (\sigma_1 + \sigma_2)s \quad (7.28)$$

que se puede reescribir como

$$F = W_z \alpha_x \quad (7.29)$$

donde

$$W_z = \begin{bmatrix} z & -\frac{|s|}{g(s)}z & s \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

$$\alpha_x = \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_0 \sigma_1 \\ \sigma_1 + \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

De la dinámica de la llanta (ecuación 7.2) se puede despejar la fuerza de fricción  $F$  y para obtener el vector  $W_z$  se implementó un observador del estado  $z$ , puesto que este estado no puede ser medido directamente. El observador utilizado es el presentado en (Alvarez, L. et al. 2005), este es

$$\dot{\hat{z}} = s - \sigma_0 \frac{|s|}{g(s)} \hat{z} \quad (7.32)$$

y el estimador es

$$\dot{\hat{\sigma}}_x = P_0 W_z e_1 \quad (7.33)$$

donde  $e_1 = (\hat{F} - F)$ ,  $\hat{F}$  es la fuerza de fricción estimada,  $\hat{\sigma}_x$  son los parámetros estimados y  $P_0$  es un estimador de la ganancia. El identificador y el estimador gradiente sólo requieren de la velocidad relativa  $s$  y de la fuerza de fricción  $F$ . La figura 7.9 (izquierda) muestra dos curvas que representan la fuerza de fricción  $F$  y la fuerza de fricción estimada  $F_e$ , y su correspondiente error se muestra en la figura 7.9 (derecha). Así los valores de  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$  son 4.5 [1/m] y 10 [s/m] respectivamente. Los parámetros que se ocupan en la ley de control se muestran en el cuadro 7.1, y los parámetros de rodillo de fricción se observan en el cuadro 7.2.

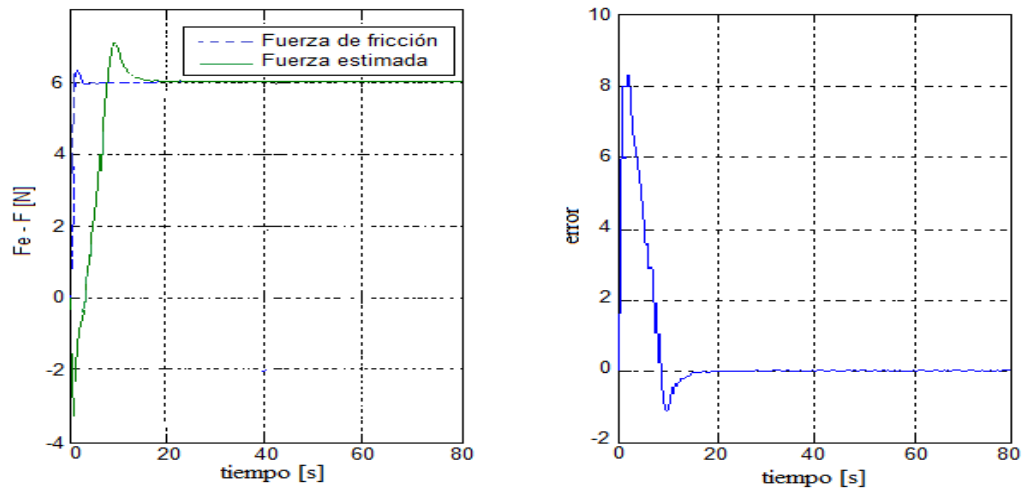


Figura 7.9: Fuerza de fricción real y fuerza de fricción estimada (izquierda) y Error del estimador (derecha).

Parámetro	Valor	Unidad
$R_1$	0.1081	[m]
$R_2$	0.2535	[m]
$I_1$	0.0051	[N/m]
$I_2$	0.7465	[N/m]
$B_1$	$1.4347 \times 10^{-3}$	[N/m]
$B_2$	0.0179	[N/m]
$\tau_{c1}$	0.0347	[N/m]
$\tau_{c2}$	1.2253	[N/m]

Cuadro 7.1: Parámetros del sistema experimental.

Parámetro	Valor	Unidad
$\sigma_0$	4.5	[1/m]
$\sigma_1$	10	[s/m]
$\sigma_2$	47.1772	[s/m]
$v_s$	0.0094	[s/m]
$\mu_c$	0.000628	[N]
$\mu_s$	4.8540	[N]

Cuadro 7.2: Parámetros del modelo de fricción.

## Capítulo 8

# Resultados experimentales de la ley de control con base en teoría de Lyapunov

Las siguientes graficas muestran los resultados de la implementación de la ley de control en el sistema experimental. El controlador utiliza el estimador de parámetros en línea. En la figura 8.1 se observan las gráficas de la fuerza de fricción  $F$  necesaria para seguir una velocidad constante. Estas gráficas muestran también el error de la fuerza real  $F_r$  y fuerza deseada  $F_d$ . Es notorio que el controlador alcanza estabilidad en 70 [seg], esto se puede visualizar en la gráfica del error de la fuerza.

La figura 8.2 muestra la velocidad angular real  $\omega_2$ , velocidad angular deseada  $\omega_{2d}$  y el error de seguimiento para éstas gráficas,  $\tilde{\omega}_2$ . Aquí el controlador se estabiliza después de 70 [seg].

En la figura 8.3 se observan las gráficas de la velocidad relativa  $s$ , la velocidad relativa deseada  $s_d$  y el error de la velocidad relativa  $\tilde{s}$ . En la imagen de la velocidad relativa real se ve la evolución alcanzada y en la gráfica del error de seguimiento se observa una estabilidad del controlador después de los 70 [seg].

De estas gráficas se puede concluir estabilidad práctica, en el caso de las gráficas para la velocidad es claro que existe un problema de sintonización, esto es debido a los errores de cálculos de la adquisición de parámetros físicos, estos datos fueron obtenidos a través de sensores (encoders) colocados en los extremos de la llanta y el rodillo. El banco tiene algunos problemas mecánicos como por ejemplo el desbalance del rodillo, generando con esto un error la determinación de parámetros.

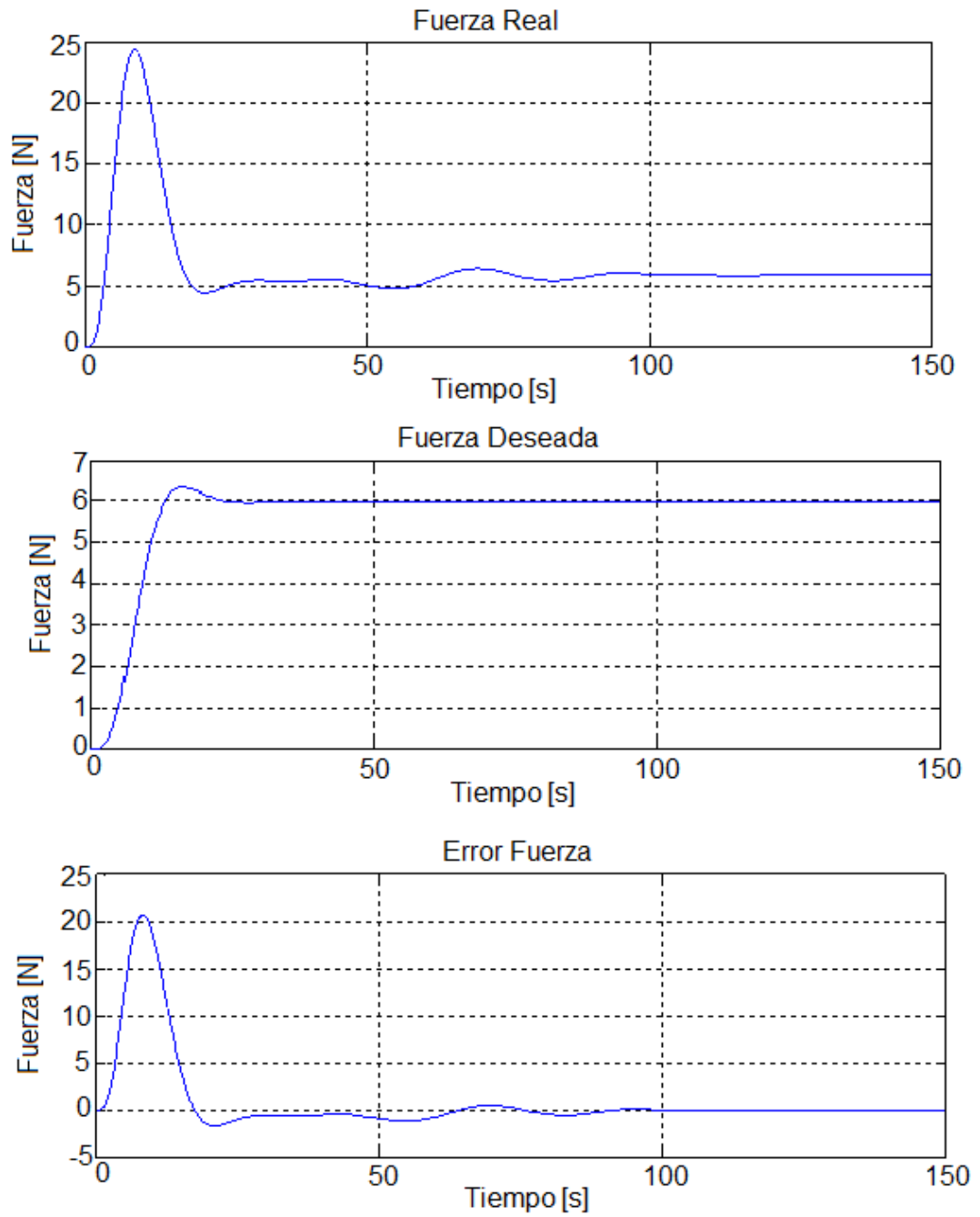


Figura 8.1: Gráficas de la fuerza de fricción  $F$  para una entrada constante.

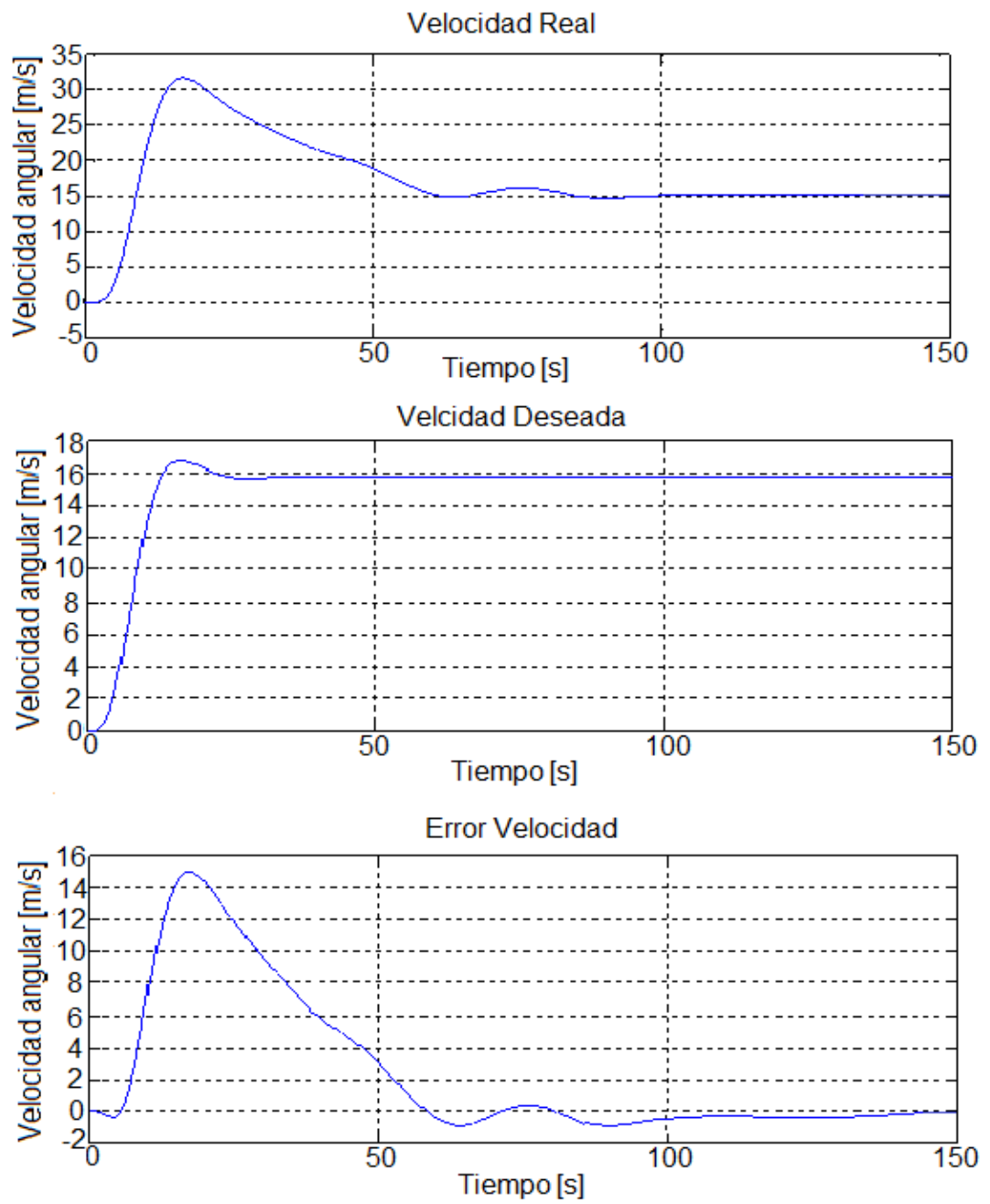


Figura 8.2: Graficas de la velocidad angular  $\omega$  para una entrada constante.



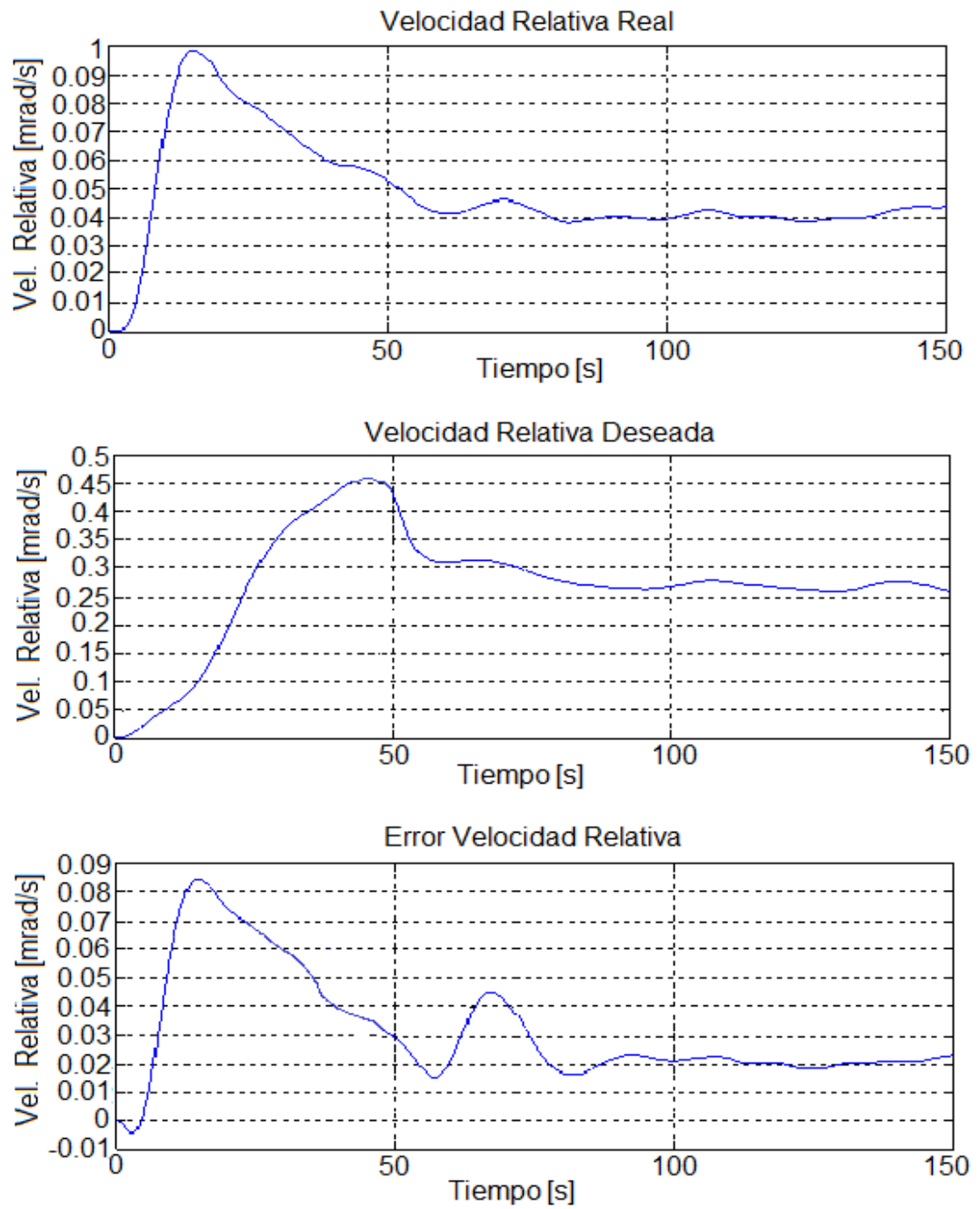


Figura 8.3: Gráficas de la velocidad relativa  $s$  para una entrada constante.

Para los experimentos posteriores se eligió como señal de referencia, una función seno que no toma valores negativos, esto con la finalidad de representar aceleraciones y desaceleraciones que pudieran presentarse en el vehículo, la función seno puede representar un cambio instantáneo en el valor de la fuerza.

La figura 8.4 muestra la fuerza de fricción real  $F$ , la fuerza de fricción deseada  $F_d$  y el error de seguimiento  $\tilde{F}$ . En esta última imagen se observa estabilidad a los 20 [seg]. En la gráfica de la fuerza real se observa un sobreimpulso en el segundo 10, de 24 [N], esto es debido a que al inicio el sistema necesita un alto par para empezar a moverse.

La figura 8.5 muestra las gráficas para la velocidad angular  $\omega_2$ , velocidad angular deseada  $\omega_{2d}$  y el error de seguimiento para velocidad angular  $\tilde{\omega}_2$ . En el caso de la gráfica del error de la velocidad, el error es variante a lo largo de toda la trayectoria, esto también producto de las vibraciones del banco de pruebas.

En la figura 8.6 se observan las gráficas correspondientes a la velocidad relativa  $s$ , velocidad relativa deseada  $s_d$  y error de seguimiento para la velocidad relativa deseada  $\tilde{s}$ . En la gráfica del error de velocidad relativa, se observa que el controlador no alcanza el valor cero, pero toma valores entre 0 y 0.3 [mrad/s].

Con los resultados obtenidos se puede decir que se obtuvo estabilidad práctica en el seguimiento de trayectorias y que los resultados de seguimiento a velocidad constante presentan un sobrepaso considerable en el error de velocidad, que son indicación de una inadecuada sintonización de los parámetros del controlador y de los errores en estos por los valores de los parámetros estimados para el banco de pruebas.

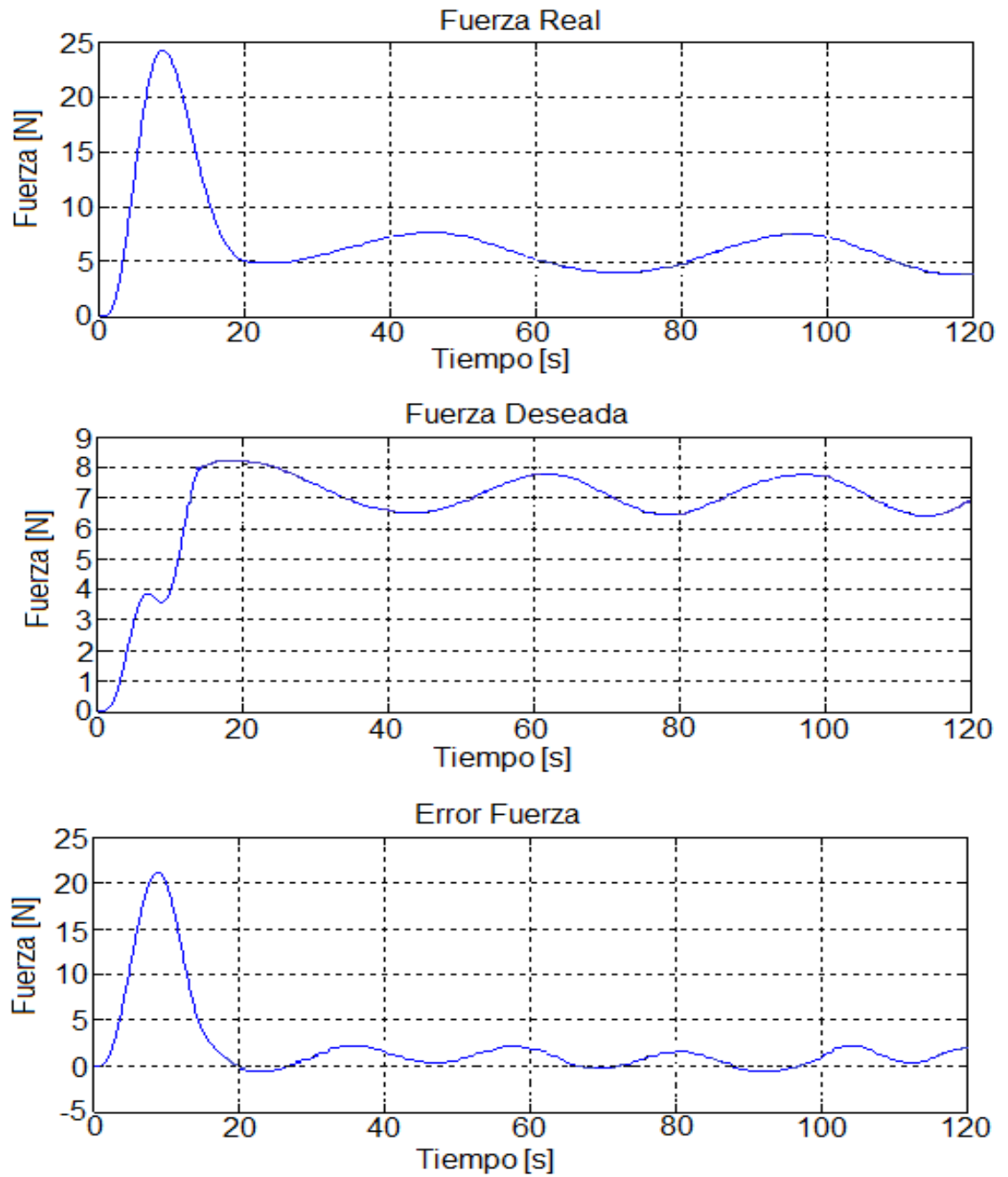


Figura 8.4: Gráficas de la fuerza de fricción  $F$  para una entrada senoidal.

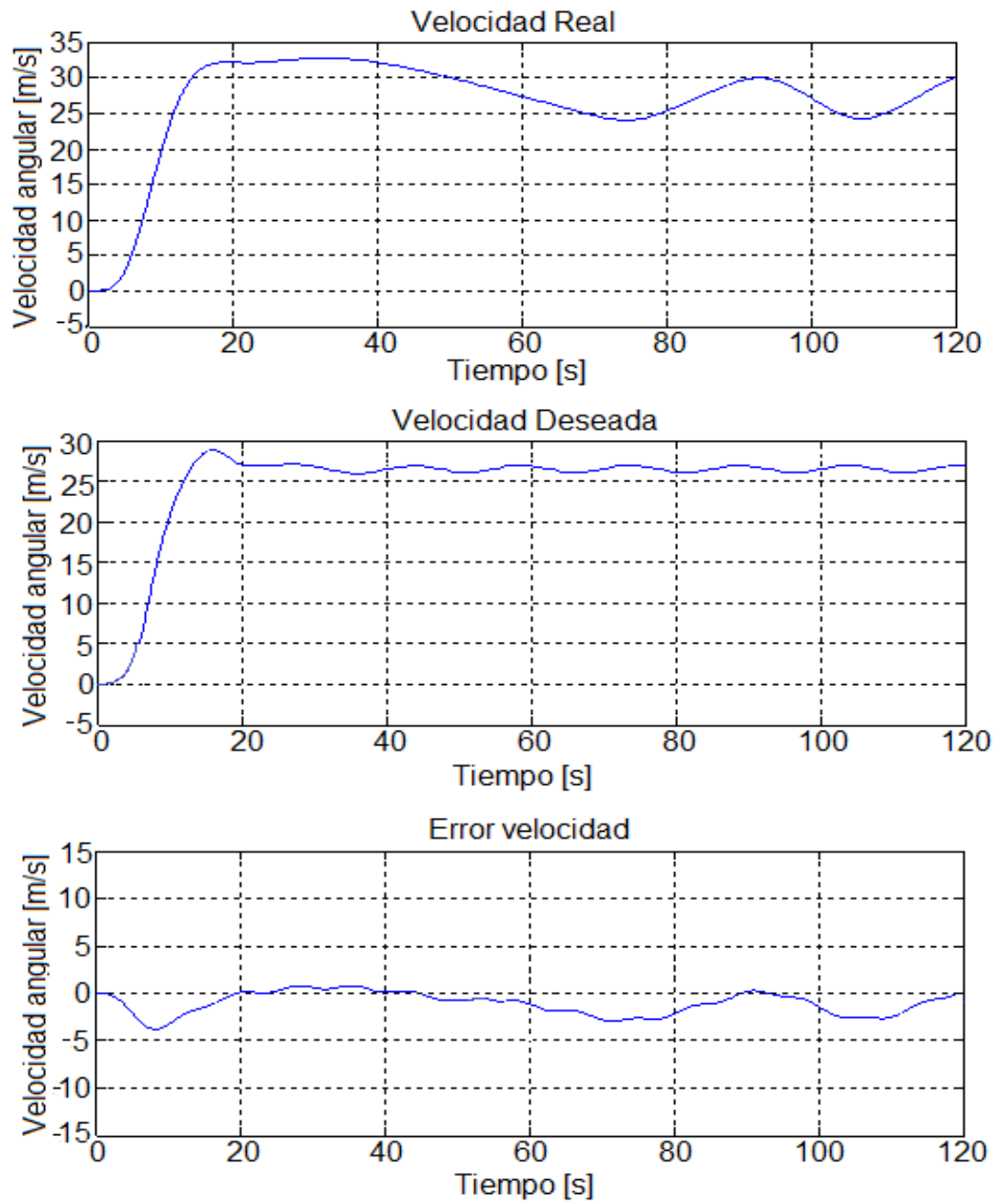


Figura 8.5: Gráficas de la velocidad angular  $\omega$  para una entrada senoidal.

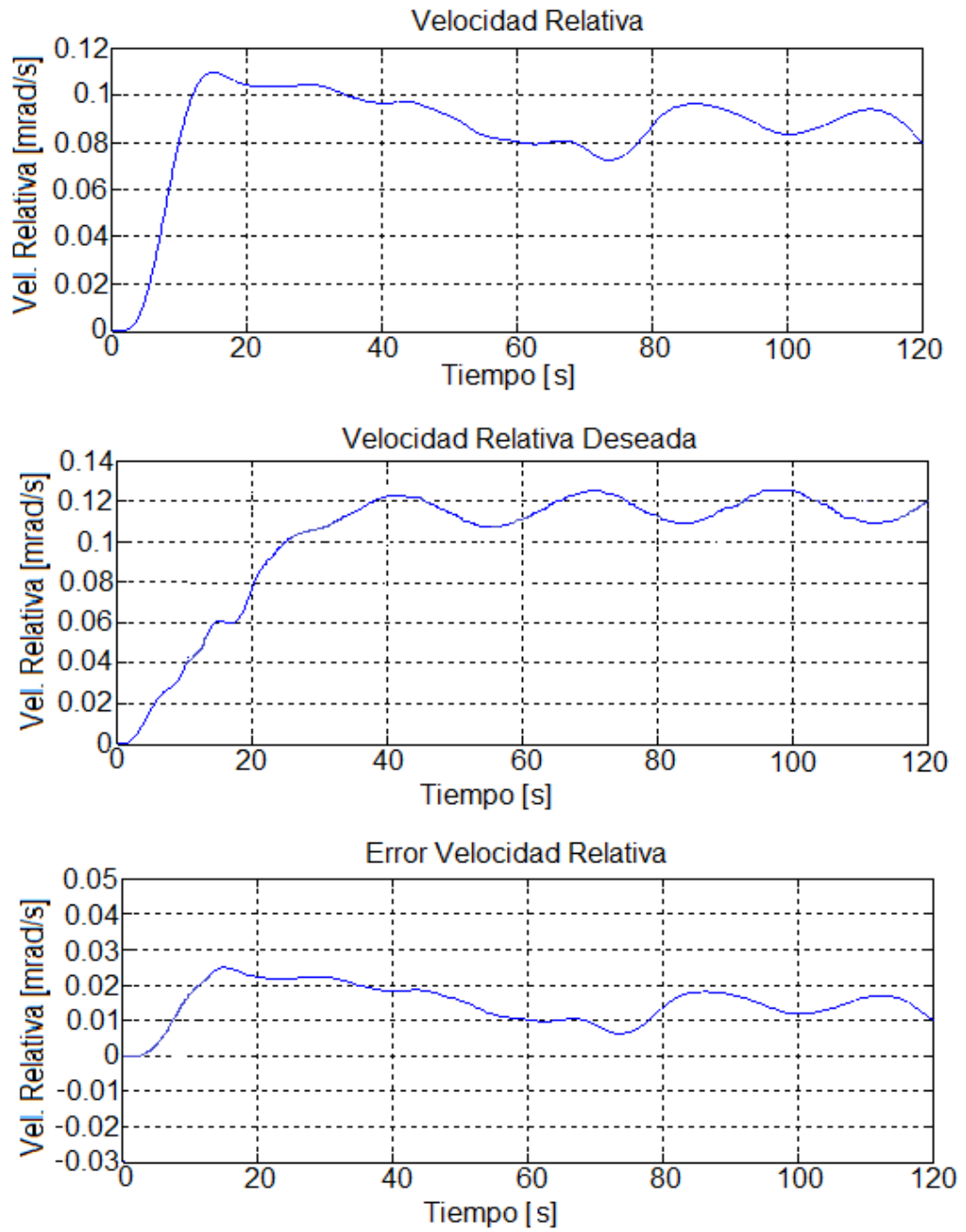


Figura 8.6: Gráficas de la velocidad relativa  $s$  para una entrada senoidal.

## Capítulo 9

# Conclusiones

Se realizó una revisión del estado del arte de los diferentes ensayos para estudiar y caracterizar la fricción llanta-pavimento. Se presentaron modelos matemáticos para la interacción llanta-pavimento. Se diseñó un sistema experimental conformado por un servomotor, una llanta y un rodillo, y se realizó un análisis para elegir el torque requerido por el sistema. Con todos los datos conocidos se construyó el banco de pruebas.

Se desarrolló una nueva metodología para analizar la zona de contacto. El diseño está basado en un microcontrolador y un sistema de comunicación inalámbrica. Esta metodología nos permite entender y analizar el parche de contacto entre la llanta y el pavimento. Se mostraron los resultados experimentales de las galgas extensométricas.

Se diseñó una ley de control basada en técnicas de Lyapunov, que requirió del modelo dinámico del sistema experimental. La propuesta de la ley se implementó en el paquete de MATLAB xPC Target, el cual permitió ejecutar tareas en tiempo real. Para la comunicación del control en tiempo real de procesos con el sistema experimental se utilizó la tarjeta multifuncional Humosoft MF624.

Experimentalmente se obtuvieron los parámetros físicos del sistema. Se determinaron también los parámetros del modelo de fricción de LuGre haciendo uso de un observador y de un identificador de parámetros con el método de gradiente.

Finalmente se probó la ley de control propuesta en sistema experimental se presentaron los resultados experimentales.

La realización de este proyecto trajo consigo la ampliación de los objetivos propuestos al inicio de este escrito. A lo largo de los experimentos, se encontraron diversos problemas mecánicos y electrónicos para el caso de la adquisición de datos de las galgas extensométricas.

cas, algunos de estos inconvenientes se pudieron resolver mediante software.

En el caso de los problemas mecánicos, una de las mejoras que se realizó fue la rectificación del rodillo, faltando el balance de éste, con la rectificación se redujo las vibraciones causantes de un aumento en el error de la estimación de parámetros.

A pesar de los inconvenientes mecánicos se puede concluir que los resultados muestran el buen comportamiento del banco de pruebas, utilizando el modelo de fricción de LuGre con parámetros concentrados.

## 9.1. Aportaciones

El desarrollo de la presente Tesis Doctoral, representado en la figura 9.1 a dado lugar fundamentalmente a las siguientes aportaciones.

- Se diseñó y construyó un nuevo diseño de un banco de pruebas de cuarto de vehículo para estudiar y analizar las fuerzas generadas en la zona de contacto.
- El análisis de los resultados con de las galgas extensométricas confirmó que los modelos distribuidos de fricción pueden ser correctamente aproximados a los modelos con parámetros concentrados promediando la fuerza de fricción en la zona de contacto llanta-pavimento.
- Se diseñó una ley de control para tracción y frenado. El controlador diseñado está basado en la velocidad angular y la velocidad relativa, los resultados muestran estabilidad práctica en el seguimiento de trayectorias.

## 9.2. Trabajo pendiente

- El banco de pruebas presenta vibraciones, esto se puede mejorar balanceando el rodillo.
- Algunos de los parámetros adquiridos se lograron levantando el rodillo de los extremos, pero, debido a que las fuerzas aplicadas en ambos lados fueron desiguales provoca incertidumbre en los parámetros, esto se pudiera corregir colocando actuadores hidráulicos en los extremos para levantar el rodillo en caso necesario. Al hacer esto se pueden resolver problemas de sintonización.
- Asimismo diseñar nuevos algoritmos de control en el banco de pruebas.

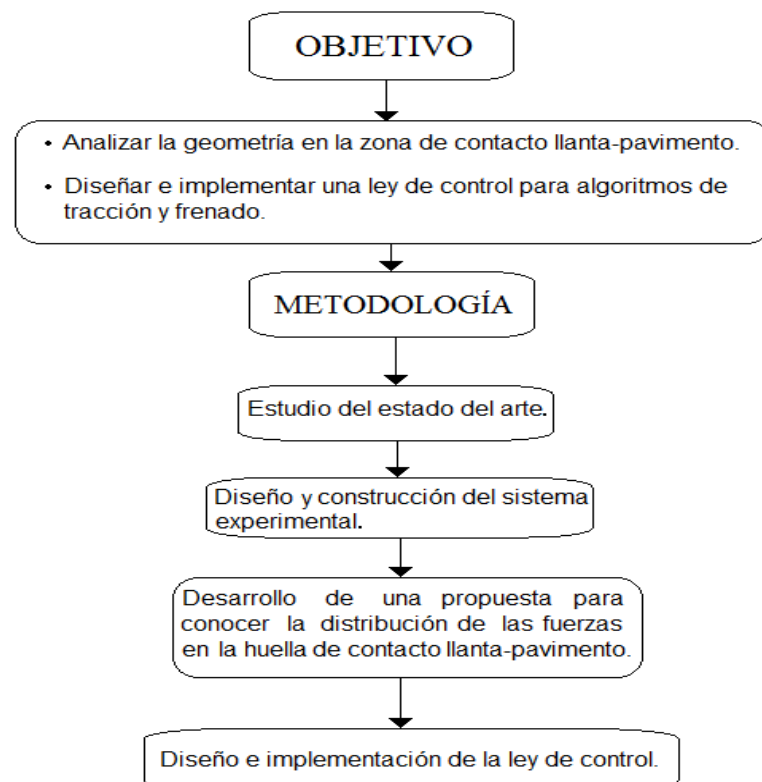


Figura 9.1: Etapas de desarrollo de la Tesis Doctoral.



- Como parte de un trabajo futuro también está la modificación de la superficie de rodadura del rodillo.

## Referencias

- Aguilar, J. (2008). Diseño de una instalación experimental para estudiar la caracterización llanta-pavimento. Tesis de Maestría. Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México. Ciudad Universitaria, México, D.F.
- Alvarez, L., Yi, J., Horowitz, R., and Olmos, L. (2005). Dynamic friction model-based tire-road friction estimation and emergency braking control. *Transactions of the ASME* Volume 127, 22–32.
- Anghelache, G., Moisescu, R., Sorohan, S., and Buretea, D. (2011). Measuring system for investigation of tri-axial stree distribution across the tyre-road contact patch. *Elsevier-Measurement* 3-44, 559–568.
- Armstrong-Hélouvry, B. (1991). Control of machines with friction. USA: Kluwer Academic Publishers.
- Armstrong-Hélouvry B., Dupont, P., and Canudas de Wit, C. (1994). A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica* 30, 1083–1138.
- Bakker, E., Nyborg, L., and Pacejka, H. (1987). Tyre modelling for use in vehicle dynamic studies. Society of Automotive Engineers Paper. Volume 870421.
- Bayle, P., Forissier, J., and Lafon, F. (1993). A new tyre model for vehicle dynamics simulations. *Automotive Technology International*. Volume 21, 193–198.
- Bird, K. and Martin, J. (1973). The CALSPAN tire research facility: design, development and initial test results. In SAE, Volume 1(730582).
- Bliman, P.A., Bonald, T., and Sorine, M. (1995). Hysteresis operators and tire friction models: Application to vehicle dynamic simulations. In *Prof of ICIAM'95, Hamburg, Germany 3-7 July*.
- Bradley, J. and Allen, R. F. (1931). The behaviour of rubber-tyred wheels. *Automotive Engineer*. Volume 21, 57–77.

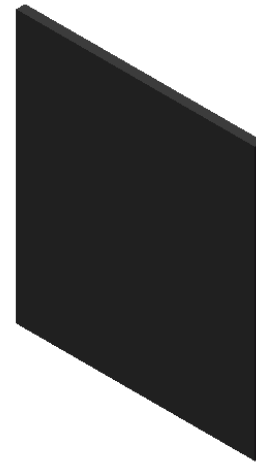
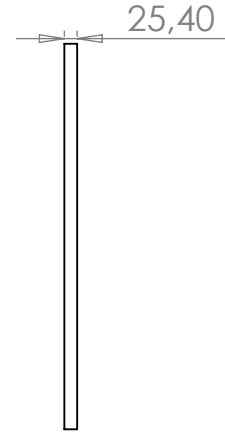
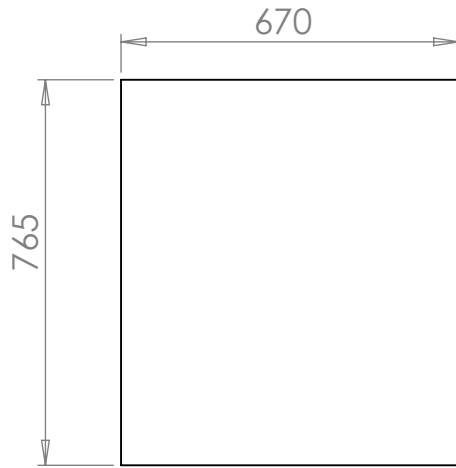
- Burckhardt, M. (1993). *Fahrwerktechnik: Radschlupfregelsysteme*. Berlin, Germany: Vogel-Verlag.
- Canudas de Wit, C., Olsson, H., Aström, K., and Lischinsky, P. (March 1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions of Automatic Control*.40(3), 419–425.
- Canudas de Wit, C. and Tsiotras, P. (1999). Dynamic tire friction models for vehicle traction control. In *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control Phoenix, Arizona USA*, Volume 23, pp. 3746–3751.
- Canudas de Wit, C., Tsiotras, P., Velenis, E., and B. y Gissinger, G. (2003). Dynamic friction models for road/tire longitudinal interaction. vehicle system dynamics. *IEEE Transactions of Automatic Control*.Volume 39, 189–226.
- Carrillo, J. A. C. (2004). Simulación en banco de ensayo de sistemas inteligentes de frenado. Tesis de Doctorado. Área de Ingeniería Mecánica. Universidad de Málaga.
- Castillo, J., de la Blanca, A. P., Cabrera, J., and Simón, A. (2006). An optical tire contact pressure test bench. *Vehicle System Dynamics*. Volume 44(3), 207–221.
- Clark, S.K. (1981). *Mechanics of pneumatic tires*. Washington, D.C.: U.S. Department of Transportation. National Highway Traffic Safety Administration.
- Clover, C.L. and Bernard, J.E. (1998). Longitudinal tire dynamics. *Vehicle System Dynamics*. Volume 29, 231–259.
- Coleri, S., Sangiovanni-Vincentelli, A., Sun, X., Tebano, R., Alalusi, S., Audisio, G., and Sabatini, M. (2009). The tire as an intelligent sensor. *IEEE Transactions on computer*.Volume 28(7), 941–955.
- Dahl, P. (1976). Solid friction damping of mechanical vibrations. *AiAA Journal*.Volume 14(2), 1675–1682.
- Deur, J. (2001). Modeling and analysis of longitudinal tire dynamics based on the lugre friction model. Technical report, Ford Motor Company. Scientific Research Laboratory MD 1170, Dearborn, MI 48121-2053, USA.
- Deur, J., Asgari, J., and Aström, D. (2004). A 3D brush-type dynamic tire friction model. *Vehicle System Dynamics*. Volume 42(3), 133–173.
- Dugoff, H., Fancher, P., and Segel, L. (1969). Tire performance characteristics affecting vehicle response to steering and braking control inputs. Technical Report CST-460, Highway Safety Research Institute, University of Michigan, Ann Arbor. Final Report National Bureau of Standards Contract.
- Faria, L.O., Oden, J.T., Yavari, B.T., Tworzydło, W.W., Bass, J.M., and Becker, E.B. (1992). Tire modeling by finite elements. *Tire Science and Technology*. Volume 20(1), 33–56.


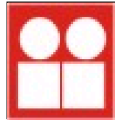

- Fiala, E. (1991). Seitenkräfte am rollenden luftreifen. *VDI Zeitschrift. Volume 96*, 121–176.
- Ginn, J. and Marlowe, R. (1967). Road contact forces of truck tires as measured in the laboratory. *SAE. Volume 670493*, 1787–1796.
- Ginn, J., Miller, R., Marlowe, R., and Heimovics, J. (1962). The b.f. goodrich tire dynamics machine. *SAE. Volume 1(490B)*.
- Hadekel, R. (1952). The mechanical characteristics of pneumatic tyres. Technical report, British Ministry of Supply. S and T Memo 10/52. Volume 3.
- Han, J., Sun, Y., and Meng, C. (2008). Estimating the tire-road friction for tire pressure monitoring using the result of a nonlinear observer. In *World Congress on Intelligent Control and Automation*, pp. 1982–1985.
- Harned, J., Johnston, L., and Scharpf, G. (1969). Measurement of tire brake force characteristics as related to wheel slip (antilock) control system design. *SAE. Transactions. Volume 78*, 909–925.
- I.T.V. (2006). Manual de procedimiento de inspección de las estaciones I.T.V.. Technical report, Ministerio de Industria, Turismo y Comercio.
- James, L. (2000). Tire model for simulations of vehicle motion on high and low friction road surfaces. In *Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference*, pp. 1025–1034.
- Kiencke, U. and Daiss, A. (1993). Realtime estimation of adhesion characteristic between tyres and road. In *Proceedings of the IFAC World Congress, Volume 1*, pp. 2337–2351.
- Kiencke, U. and Daiss, A. (1994). Estimation of tyre friction for enhanced ABS-systems. In *Proceedings of the AVEG Congress. Tokyo*.
- Lacagnina, M., Muscato, G., Guccione, S., and Sinatra, R. (2002). Modelling and simulation of multibody mobile robot for volcanic environment explorations. In *Proceedings of the 2002 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems.*, pp. 715–720.
- Liu, Y. and Sun, J. (1995). Target slip tracking using gain-scheduling for antilock braking systems. In *Proceedings of the American Control Conference, Seattle Washington*, pp. 1178–1182.
- Merzouki, R., Ould-Bouamama, B., Djeziri, M.A., and Bouteldja, M. (2007). Modelling and estimation of tire-road longitudinal impact efforts using bond graph approach. *IEEE Mechatronics. Volume 17*, 93–108.
- Miyashita, N., Rabhi, A., Zbiri, M., and Delanne, Y. (2005). Vehicle-road interaction modelling for estimation of contact forces. *Vehicle System Dynamics. Volume 43*, 403–441.

- Moore, D.F. (1975). *The Friction of Pneumatic Tyres*. New York: Elsevier Scientific Publishing Co.
- Muller, S., Uchanski, M., and Hedrick, K. (2003). Estimation of the maximum tire-road friction coefficient. *Dynamic Systems, Measurement, and Control*. Volume 125(4), 607–617.
- Pacejka, H., Bakker, E., and Linder, L. (1989). A new tire model with application in vehicle dynamics studies. *SAE transactions*, paper 890087, 83–93.
- Pacejka, H. and Sharp, R. (1991). Shear force development by pneumatic tyres in steady state condition. *Vehicle System Dynamics*. Volume 20, 121–176.
- Pacejka, H.B. (2002). *Tyre and Vehicle Dynamics*. Butterworth-Heinemann. Oxford, 3er Edition.
- Rajamani, R. (2006). *Vehicle Dynamics and Control*. Springer. Mechanical Engineering Series.
- Rose, J.G. and Guenther, T.E. (2009). Vehicle tire-pavement interfacial surface pressure measurements and assessments. Technical Report KTC-09-08 FR 136-04-5F.
- Segel, L., MacAdam, C., and Pacejka, H. (1972). Tire traction grading procedures as derived from the maneuvering characteristics of tire-vehicle system. Technical report, Highway Safety Research Institute, University of Michigan.
- Shim, T. and Margolis, D. (2004). An analytical tyre model for vehicle simulation in normal driving conditions. *International Journal of Vehicle Design*. Volume 5(3), 224–240.
- Tielking, J. and Mital, N. (1974). A comparative evaluation of five tire traction models. Technical Report Highway Safety Research Institute, University of Michigan, UM-HSRI-PF-74-2.
- Tsiotras, P., Velenis, E., and Sorine, M. (2004). A lugre tire friction model with exact aggregate dynamic. In *Proceeding of the 2004 American control Conference*, pp. 1457–1462.
- Tuononen, A. (2008). Optical position detection to measure tyre carcass deflections. *Vehicle System Dynamics*. Volume 46(6), 471–481.
- Velenis, E., Tsiotras, P., and Canudas de Wit, C. (July, 2002). Extension of the lugre dynamic tire friction model to 2d motion. In *Proceedings of the Mediterranean Conference on Control and Automation MED2002*, Volume 21.
- Wang, Y., Gnadler, R., and Schieschke, R. (1994). Two-dimensional contact area of pneumatic tire subjected to a lateral force. *Vehicle System Dynamics*. Volume 23, 149–163.
- Yilmazoglu, O., Brandt, J., Sigmung, E., Genc, E., and Hartnagel, H.

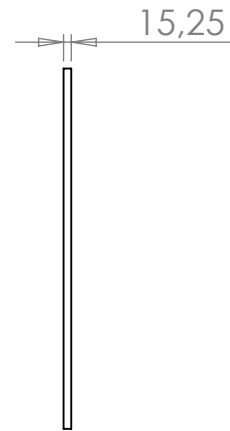
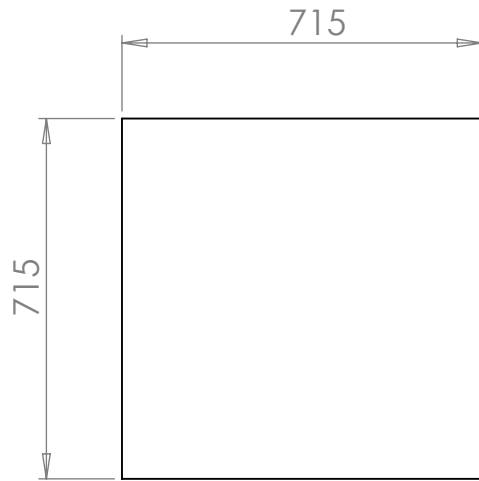
Zanten, A., Erhardt, R., and Lutz, A. (1990). Measurement and simulation of transient in longitudinal and lateral tire forces. SAE Technical, Paper 900210.


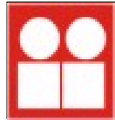

# APENDICE 1

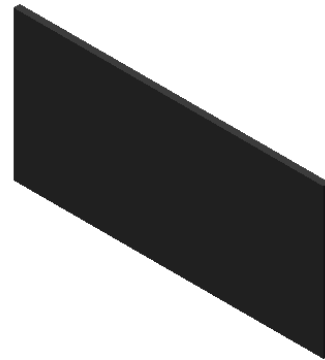
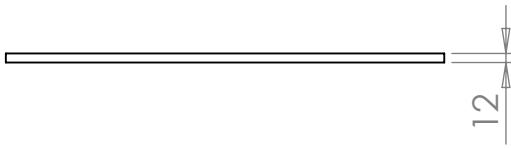
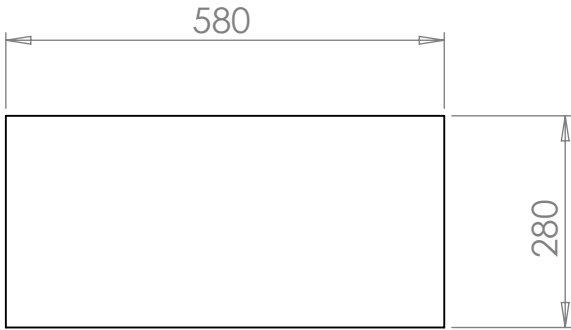



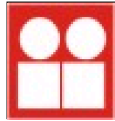

HOJA 1 DE 20	02 01						
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:	
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> S_V_0001				No. de piezas: 1		
ACERO 4140			<b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA				DISEÑO: J. AGUILAR
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS	Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				REVISO: L. ALVAREZ		APROBO: J. DORADOR
+1 [mm]		ESCALA:1:15	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA:	5/01/10		

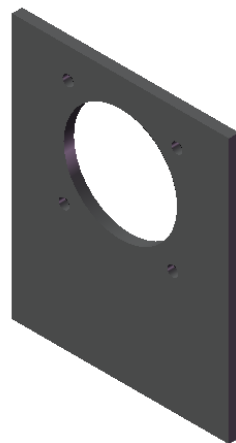
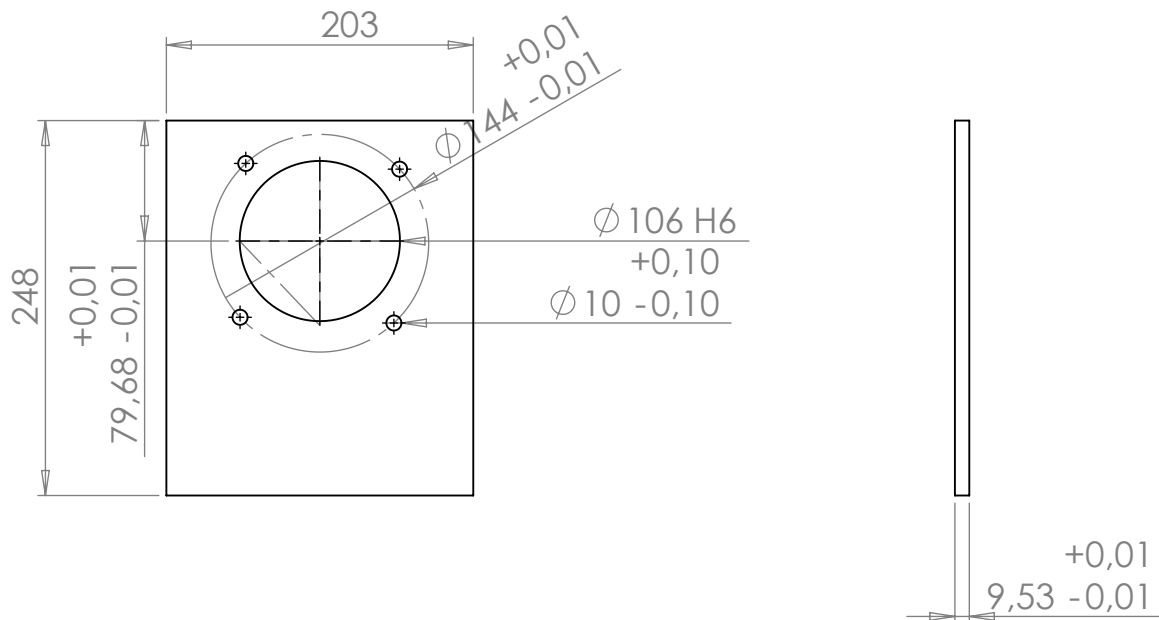



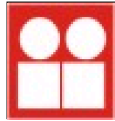



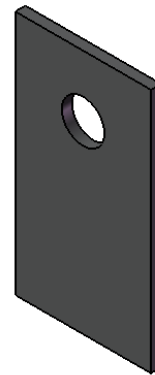
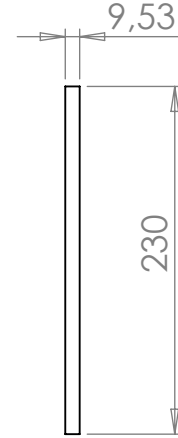
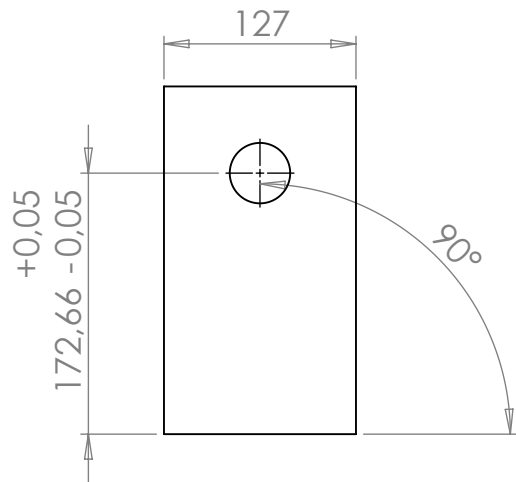
HOJA 2 DE 20	02 01							
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:		
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> B_M_0001				No. de piezas: 1			
ACERO 4140	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento						DISEÑO: J. AGUILAR	
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS							REVISO: L. ALVAREZ	
+1 [mm]					ESCALA:1:15	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10	APROBO: J. DORADOR


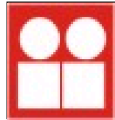



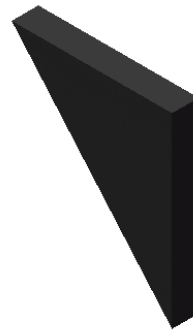
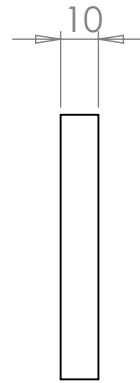
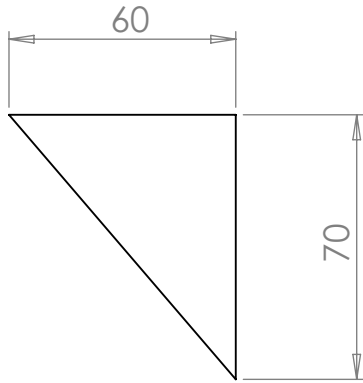
HOJA 3 DE 20	02 01						
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:	
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> S_M_S_0001				No. de piezas: 1		
ACERO 4140			<b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				DISEÑO: J. AGUILAR REVISO: L. ALVAREZ APROBO: J. DORADOR
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS +1 [mm]			ESCALA:1:10	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10		


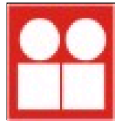



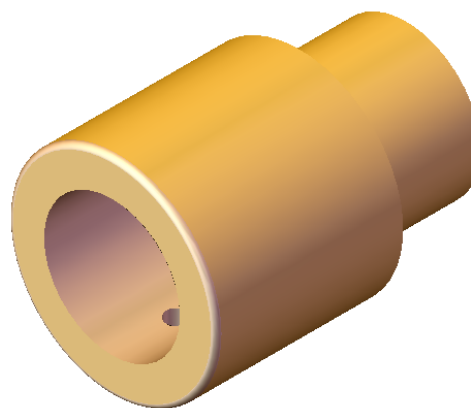
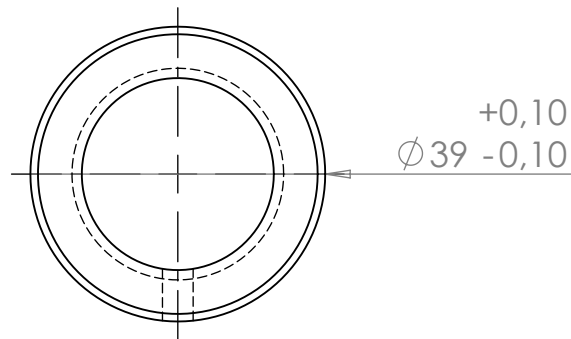
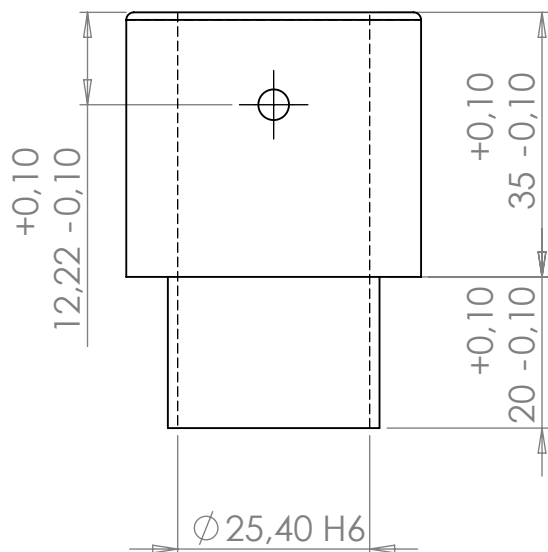
HOJA 4 DE 20	02 01						
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:	
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> S_E_M_G_0001				No. de piezas: 1		
ACERO 4140	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				 DISEÑO: J. AGUILAR REVISO: L. ALVAREZ APROBO: J. DORADOR		
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS +1 [mm]			ESCALA: 1:5	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10		


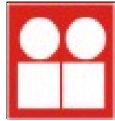



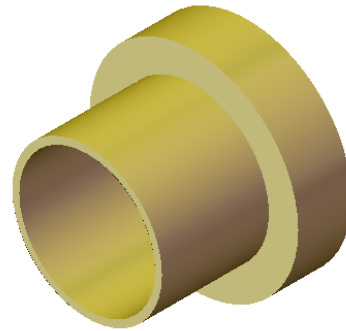
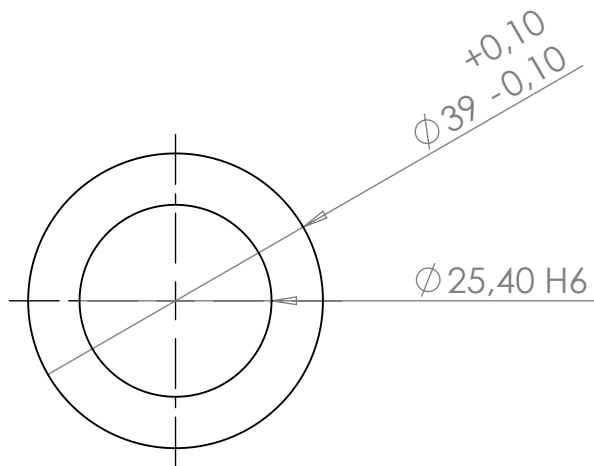
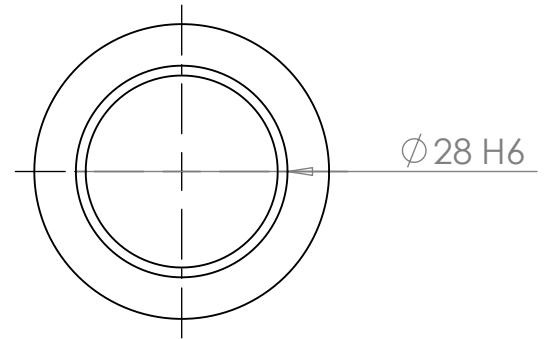
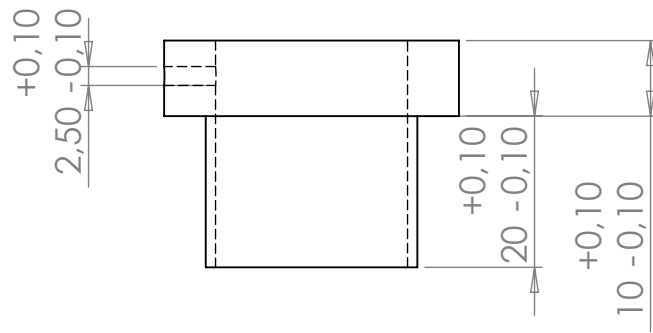
HOJA 5 DE 20	02 01							
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:		
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> S_E_M_0001				No. de piezas: 1			
ACERO 4140	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				 DISEÑO: J. AGUILAR		REVISO: L. ALVAREZ	
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS +1 [mm]			ESCALA: 1:5	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10	APROBO: J. DORADOR		


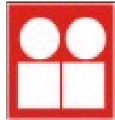



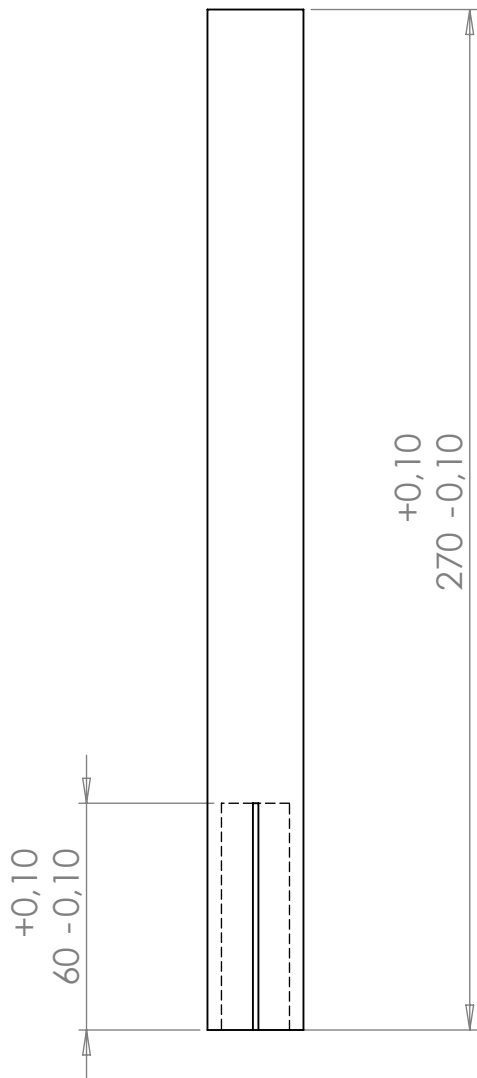
HOJA 6 DE 20	02 01						
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:	
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> S_S_T_0006				No. de piezas: 6		
ACERO 4140			<b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA				DISEÑO: J. AGUILAR
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS	Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				REVISO: L. ALVAREZ		APROBO: J. DORADOR
+1 [mm]		ESCALA: 1:5	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10			


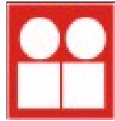



HOJA 7 DE 20	02 01						
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:	
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> S_E_R_0001				No. de piezas: 1		
LATÓN	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				 DISEÑO: J. AGUILAR REVISO: L. ALVAREZ APROBO: J. DORADOR		
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS +1 [mm]		ESCALA: 1:3	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10			

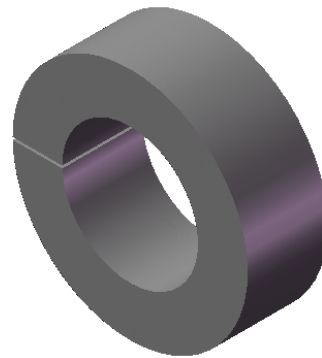
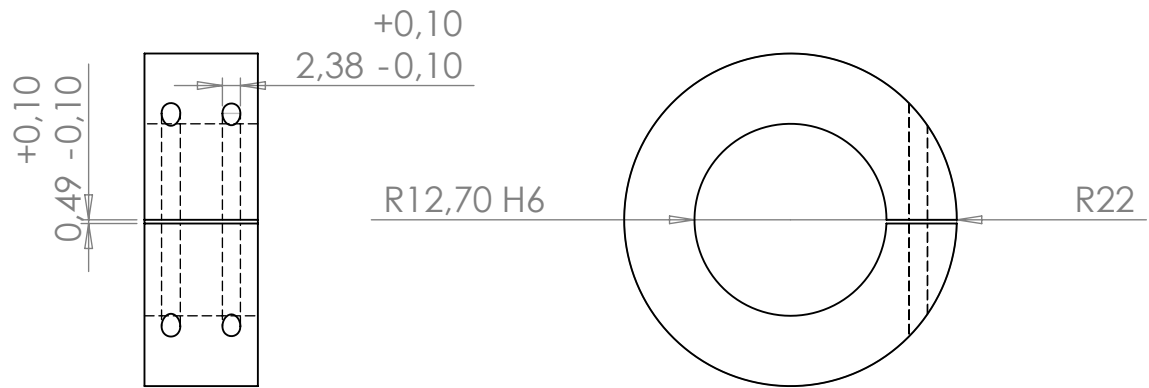



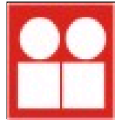

HOJA 8 DE 20	02 01						
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:	
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> C_R_E_0001				No. de piezas: 1		
LATÓN	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				 DISEÑO: J. AGUILAR REVISO: L. ALVAREZ APROBO: J. DORADOR		
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS +1 [mm]		ESCALA: 1:5	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10			

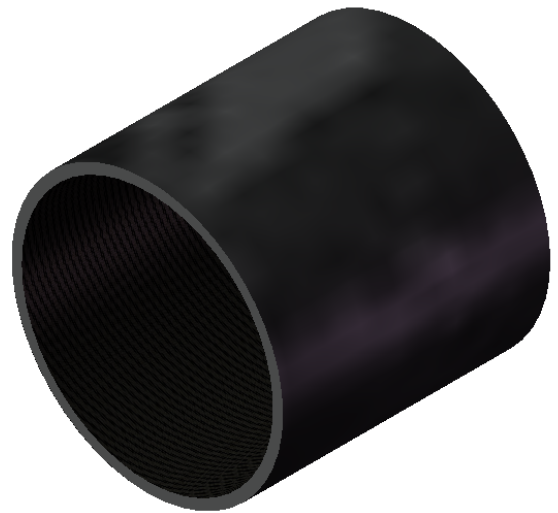
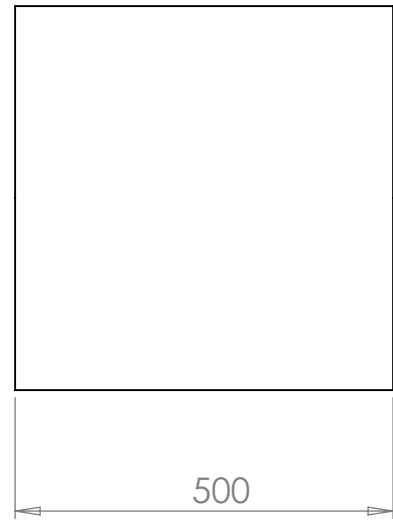
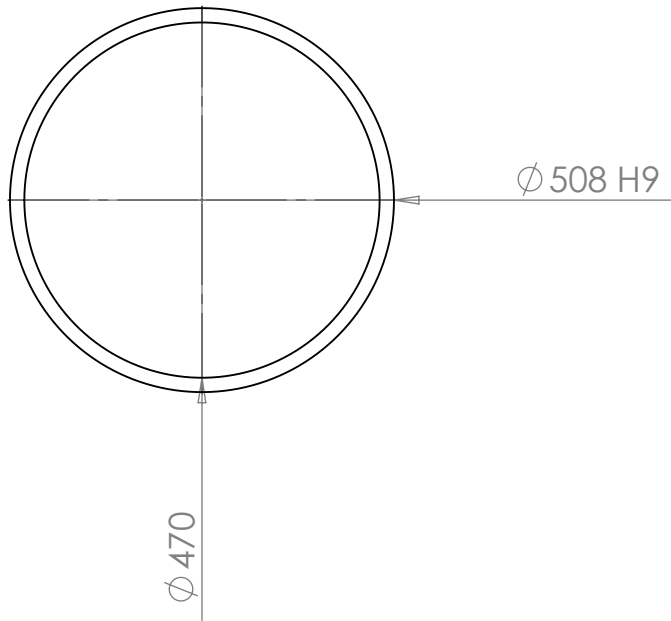



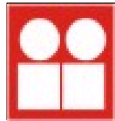

HOJA 9 DE 20	02 01						
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:	
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> E_M_0001				No. de piezas: 1		
COLD ROLL	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				 DISEÑO: J. AGUILAR REVISO: L. ALVAREZ APROBO: J. DORADOR		
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS +1 [mm]			ESCALA: 1:5	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10		

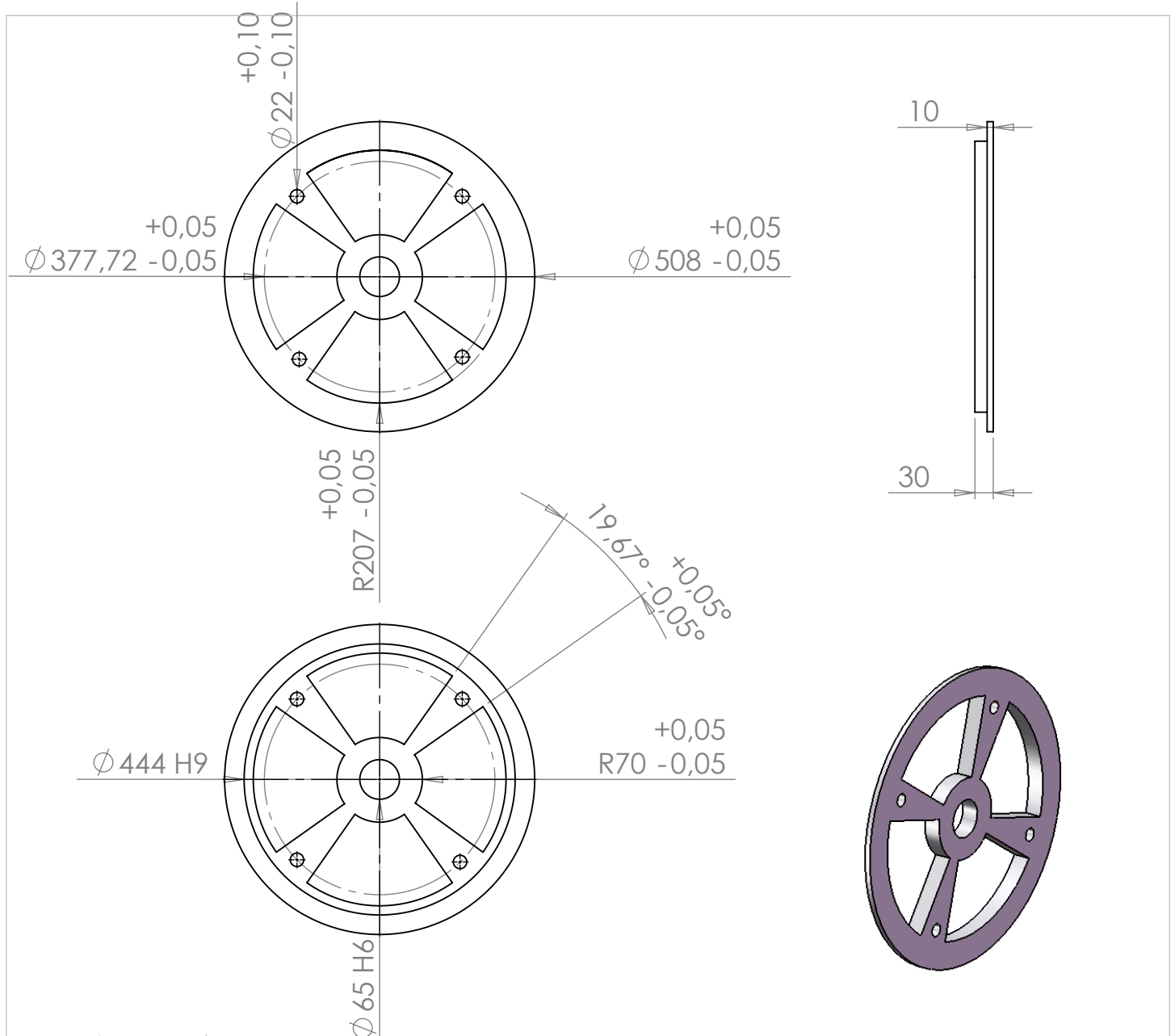



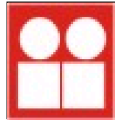



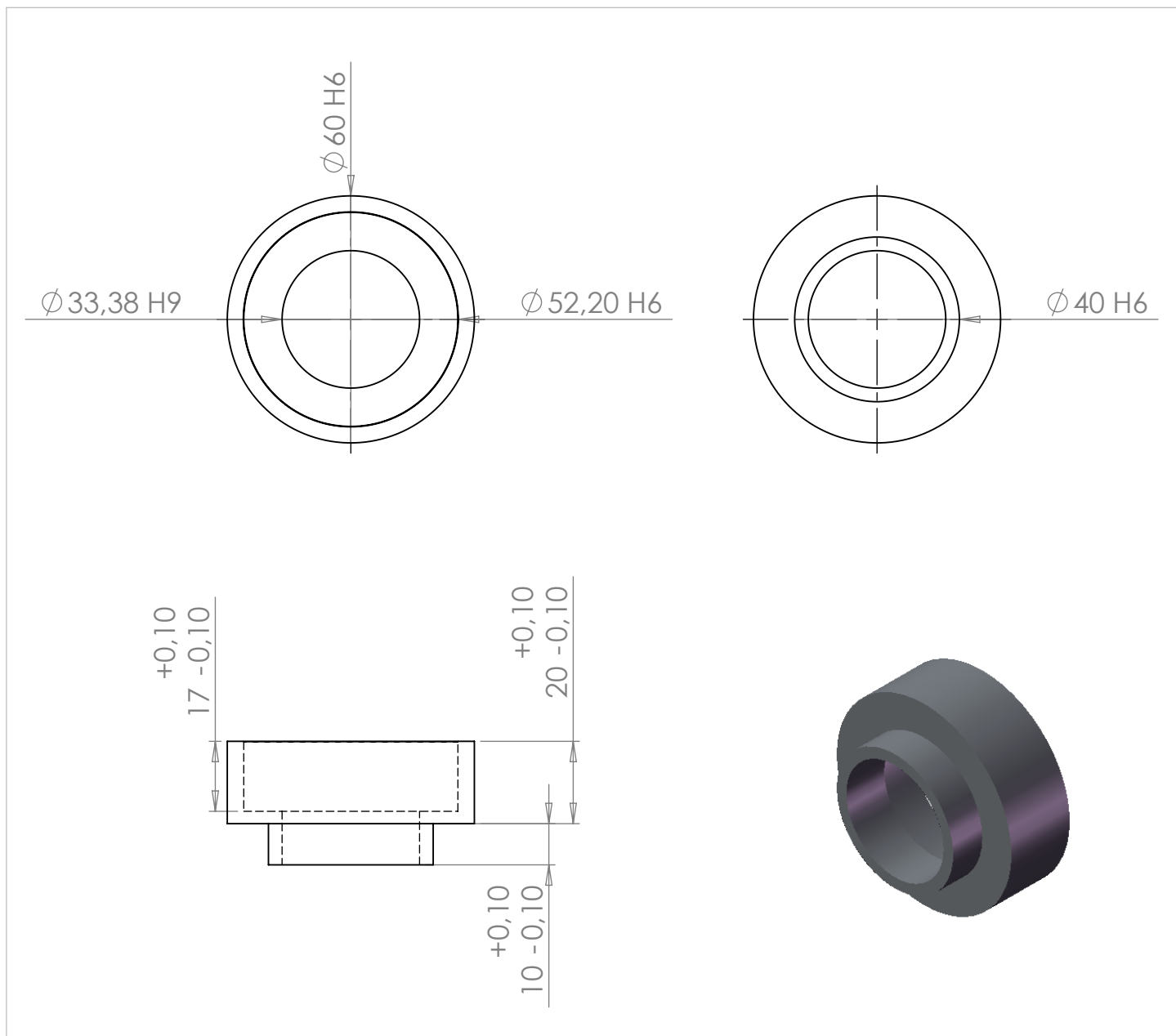
HOJA 10 DE 20	02 01						
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:	
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> P_E_LL_0001				No. de piezas: 1		
ACERO 4140	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				 DISEÑO: J. AGUILAR REVISO: L. ALVAREZ APROBO: J. DORADOR		
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS +1 [mm]			ESCALA: 1:2	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10		


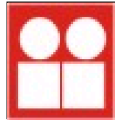


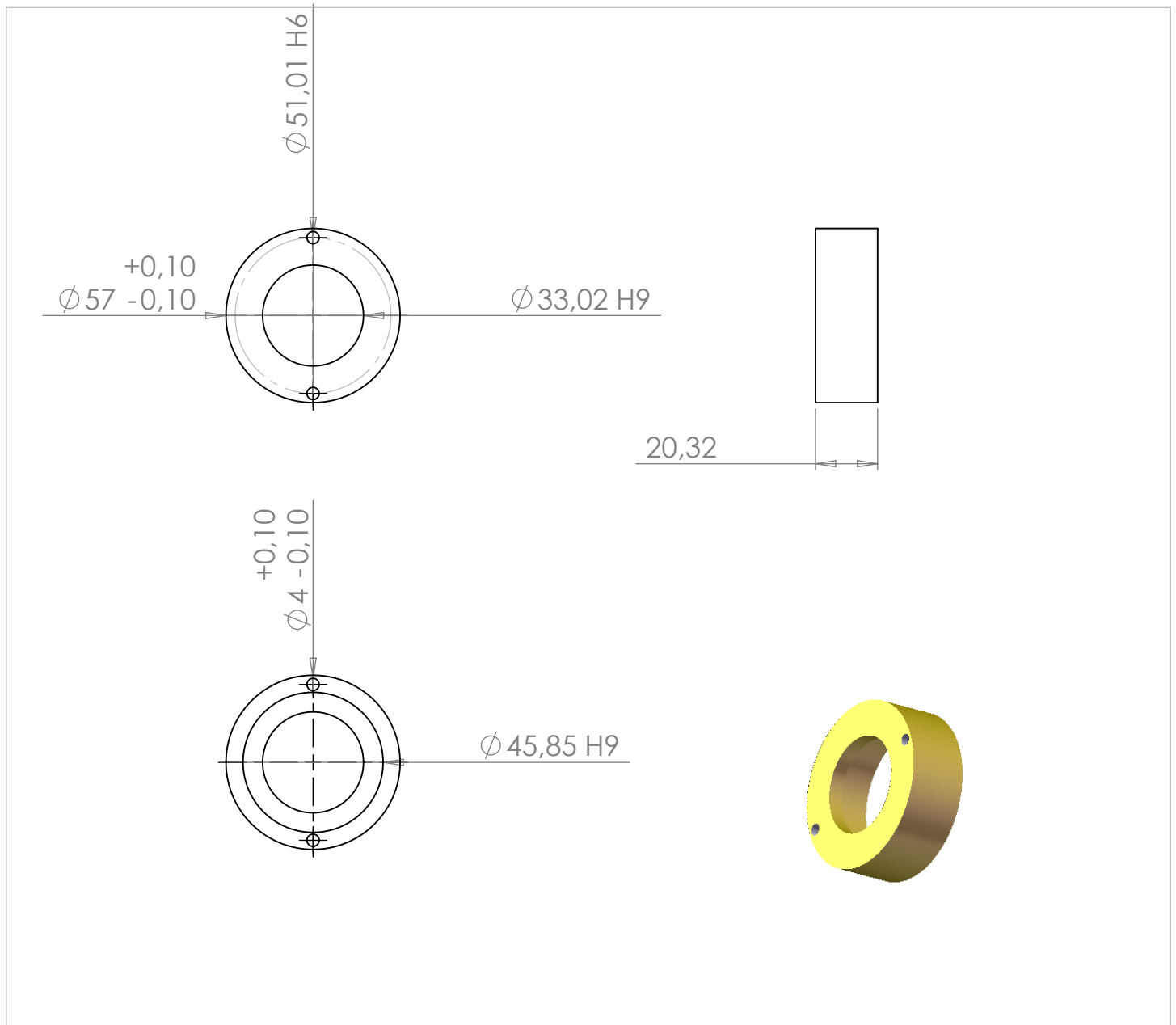
HOJA 11 DE 20	02 01							
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:		
MATERIAL: POLIETILENO DE ALTA DENSIDAD	<b>DESCRIPCIÓN:</b> R_0001				No. de piezas: 1			
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS +1 [mm]	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				 DISEÑO: J. AGUILAR REVISO: L. ALVAREZ APROBO: J. DORADOR			
		ESCALA: 1:10	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10				


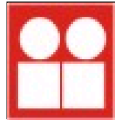



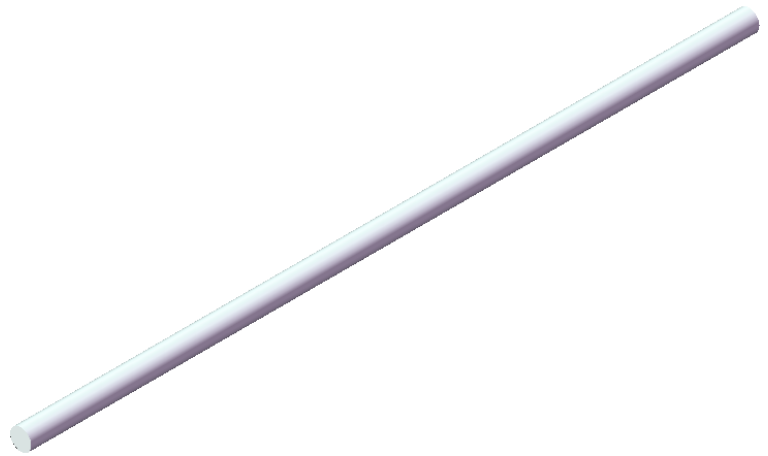
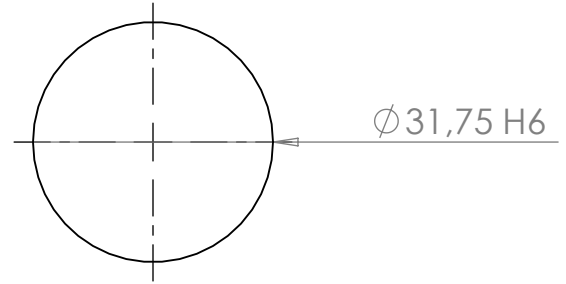
HOJA 12 DE 20	02 01						
Rev:	No.Cambio		Descripción:	Fecha:	Realizo:		
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b>			T_R_R_0002		No. de piezas: 2	
ALUMINIO	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento			 DISEÑO: J. AGUILAR REVISO: L. ALVAREZ APROBO: J. DORADOR			
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS +1 [mm]			ESCALA:1:10	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10		


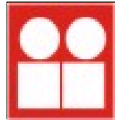



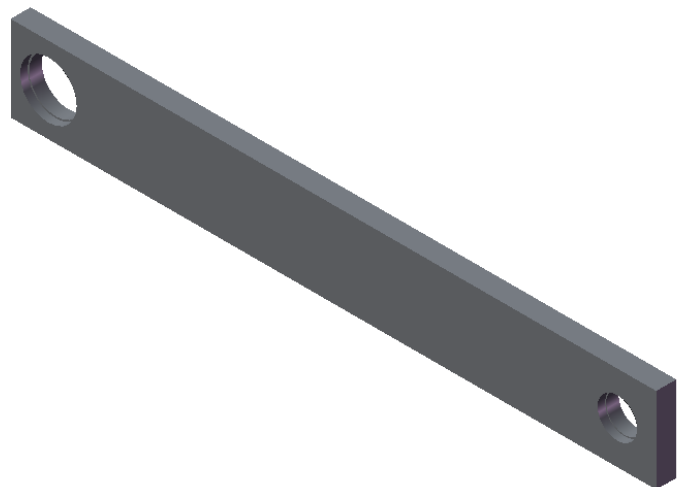
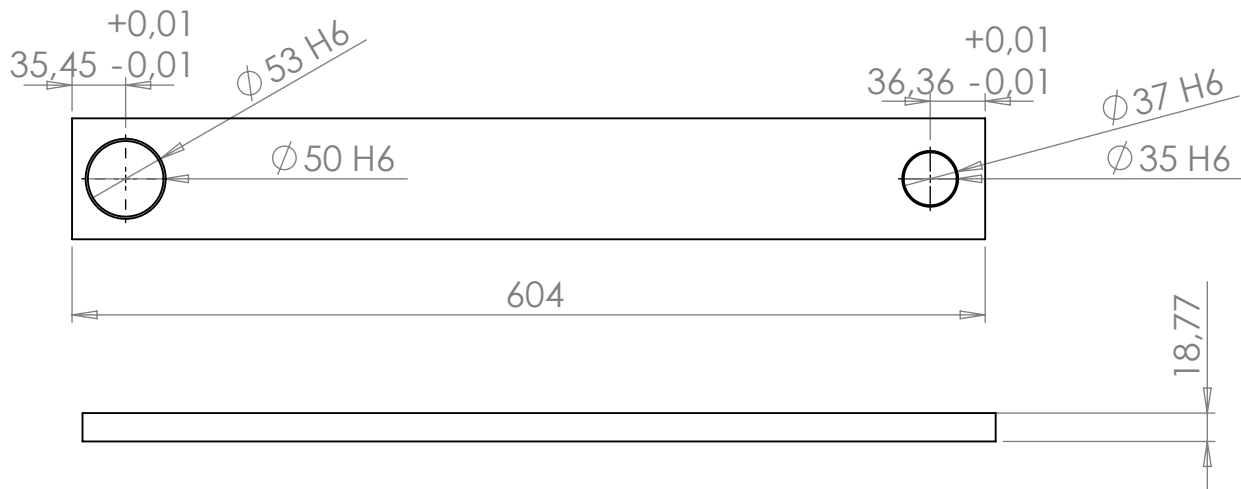
HOJA 13 DE 20	02 01							
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:		
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> C_R_S_M_0001				No. de piezas: 1			
ACERO 4140	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				 DISEÑO: J. AGUILAR		REVISO: L. ALVAREZ	
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS +1 [mm]			ESCALA: 1:5	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10	APROBO: J. DORADOR		


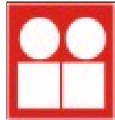



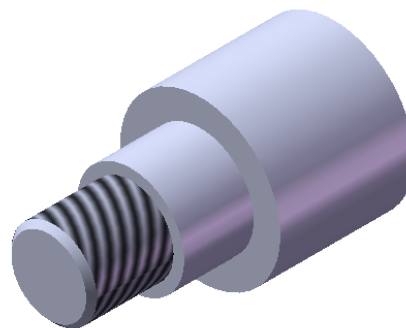
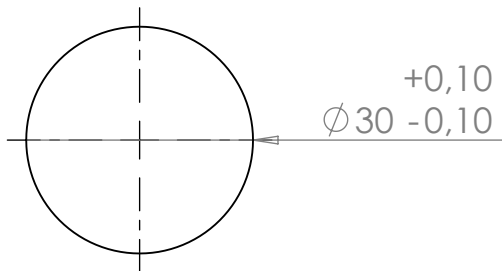
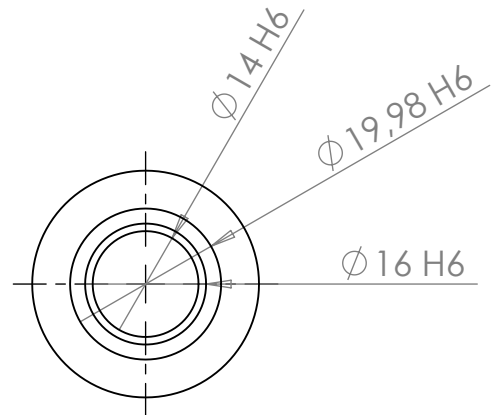
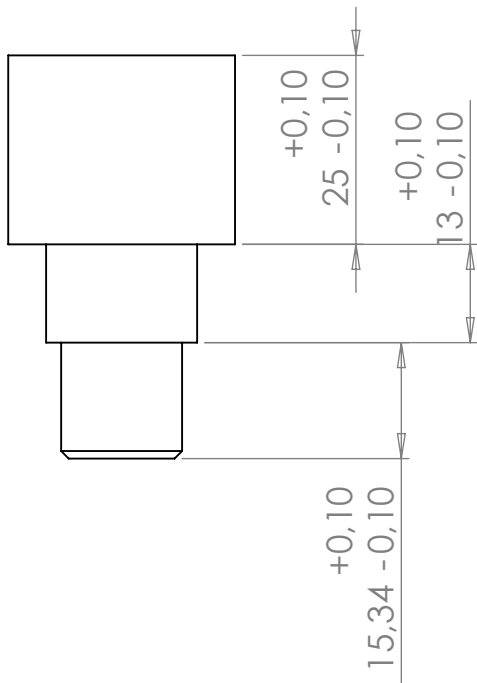
HOJA 14 DE 20	02 01							
	Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:	
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> C_R_0002					No. de piezas: 2		
LATÓN	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento					 DISEÑO: J. AGUILAR		
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS						REVISO: L. ALVAREZ		
+1 [mm]			ESCALA: 1:2	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10	APROBO: J. DORADOR		


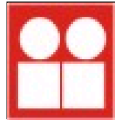



HOJA 15 DE 20	02 01							
	Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:	
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b>			E_R_0001		No. de piezas: 1		
COLD ROLL	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA					DISEÑO: J. AGUILAR		
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS	Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento					REVISO: L. ALVAREZ		
+1 [mm]			ESCALA:1:10	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA:	5/01/10 APROBO: J. DORADOR		

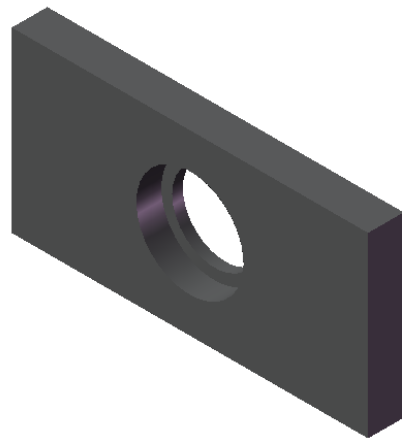
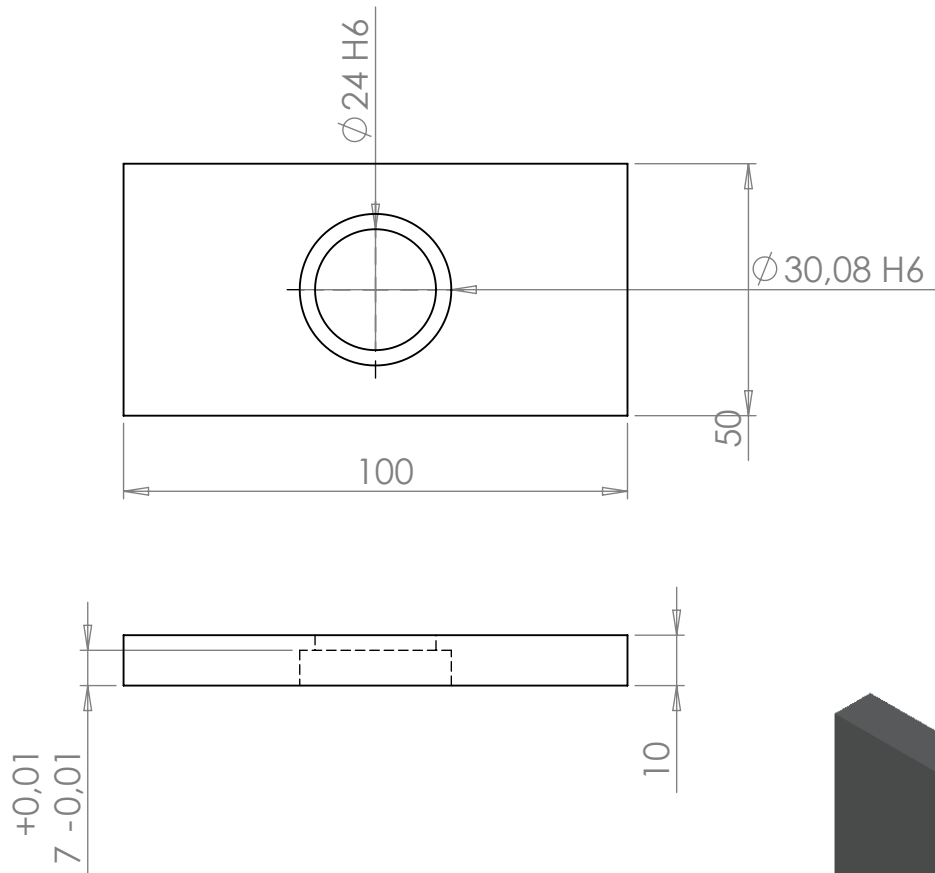



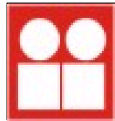

HOJA 16 DE 20	02 01						
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:	
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> B_R_0002				No. de piezas: 2		
ACERO 4140			<b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				DISEÑO: J. AGUILAR
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS +1 [mm]			ESCALA: 1:5	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10	REVISO: L. ALVAREZ APROBO: J. DORADOR	

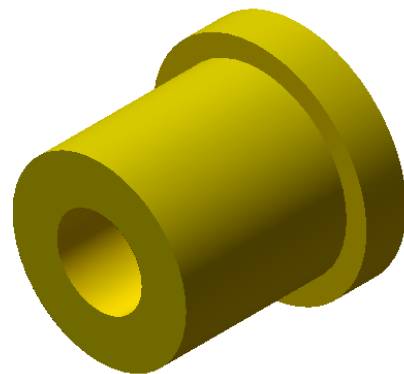
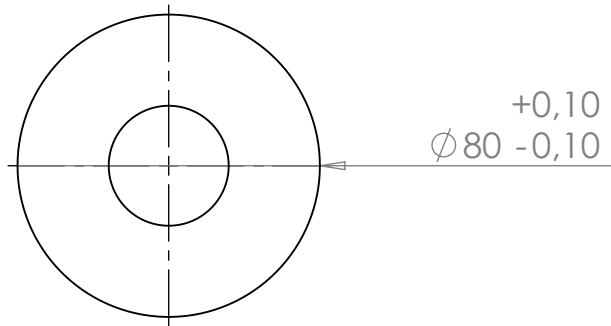
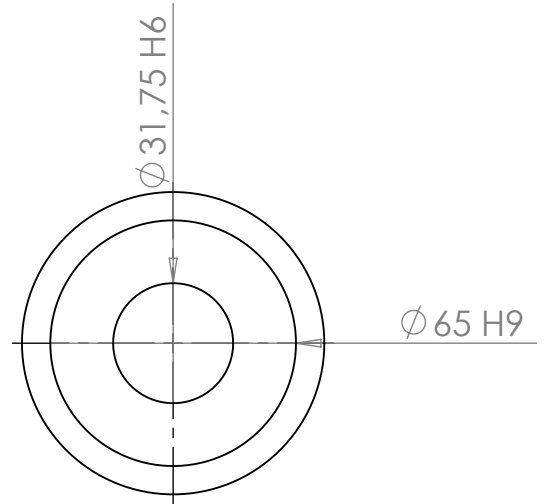
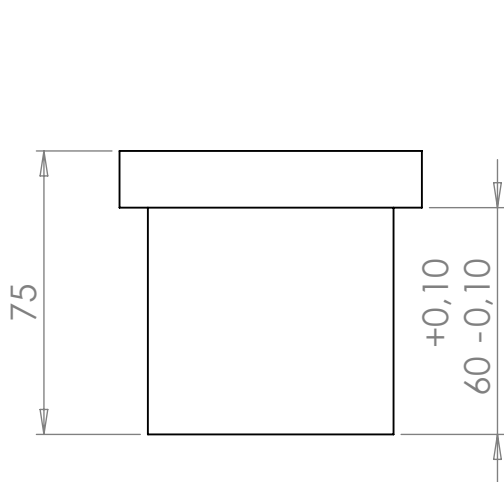



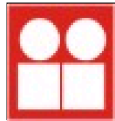

HOJA 17 DE 20	02 01						
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:	
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> P_R_B_0002				No. de piezas: 2		
COLD ROLL	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				 DISEÑO: J. AGUILAR REVISO: L. ALVAREZ APROBO: J. DORADOR		
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS +1 [mm]		ESCALA: 1:2	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10			





HOJA 18 DE 20	02 01						
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:	
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> P_P_0002				No. de piezas: 2		
ACERO 4140	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				 DISEÑO: J. AGUILAR REVISO: L. ALVAREZ APROBO: J. DORADOR		
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS +1 [mm]			ESCALA: 1:2	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10		



HOJA 20 DE 20	02 01						
Rev:	No.Cambio	Descripción:			Fecha:	Realizo:	
MATERIAL:	<b>DESCRIPCIÓN:</b> B_E_R_0002				No. de piezas: 2		
LATÓN	 <b>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</b> INSTITUTO DE INGENIERÍA Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento				 DISEÑO: J. AGUILAR REVISO: L. ALVAREZ APROBO: J. DORADOR		
TOLERANCIAS NO ESPECIFICADAS +1 [mm]			ESCALA: 1:2	ACOTACIÓN: [mm]	FECHA: 5/01/10		