UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Análisis de la Producción de Entropía y Pérdida de Simetría para Flujos en Convección Natural y Mixta

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

Juan Carlos Cajas García

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. César Treviño Treviño

COMITE TUTOR:
Dr. Rosalío Fernando Rodríguez Zepeda
Dr. Iván Santamaría Holek

posgrado en ciencias físicas
unam

MÉXICO, D.F. 2012

A mis padres y hermano.
A Ileana, zt kk.

Jurado asignado

Propietario Dr. César Treviño Treviño

Propietario Dr. Rosalío Fernando Rodríguez Zepeda

Propietario Dr. Eduardo Ramos Mora

Propietario Dra. Catalina E. Stern Forgach

Propietario Dr. José Roberto Zenit Camacho

Suplente Dr. Federico Méndez Lavielle

Suplente Dr. José Luis Mateos Trigos

Agradecimientos

Dr. César Treviño Treviño, por su guía, ejemplo y enseñanzas, tanto en el ambito académico como personal, y sobre todo por su amistad, gracias de todo corazón.

Doctores Rosalío Fernando Rodríguez Zepeda e Iván Santamaría Holek, agradezco la dedicación y atención brindada a mi formación. Sus observaciones y comentarios han sido fundamentales en el desarrollo de la presente investigación y del presente escrito.

Doctores Lorenzo Alberto Martínez Suástegui y José Joaquín Lizardi del Ángel, por el apoyo en todo momento, por toda la ayuda brindada y por todos los años de convivencia, muchas gracias.

A los Doctores integrantes de mi sínodo, Catalina Stern, Roberto Zenit, Eduardo Ramos, Federico Méndez y José Luis Mateos, gracias por ayudarme a dar la forma final a este escrito.

A mis padres, Gloria y José, quienes han recorrido a mi lado todo el camino, guiándome y amándome, no me alcanzan las palabras ni la vida para agradecerles.

Gracias a mis queridos amigos, quienes han sido siempre compañeros en el viaje y apoyo incomparable durante las horas más oscuras del posgrado. En especial, un fuerte abrazo para Alejandro Radillo Díaz, José Eduardo Barrios Vargas y el Fis. Daniel Pastrana Maldonado.

Infinitas gracias al Ing. Juan José Borrego Cadena, como siempre he dicho, tú tienes la culpa de todo esto hombre.

Ileana Grave, gracias por todo tu amor, tus cariñosos cuidados y el gran ejemplo que me has dado siempre. Eres un verdadero milagro mi amor.

Agradezco al Posgrado en Ciencias Físicas y a la Universidad Nacional Autónoma de México, me han dado la oportunidad de recibir una formación invaluable y de conocer personas maravillosas.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, agradezco profundamente el apoyo económico brindado a través de la beca doctoral con número 231588/221617.

Resumen

En la presente tesis, se abordan procesos transitorios de transferencia de calor y masa. Se estudian tres sistemas particulares, geométricamente relacionados, y se encuentran diferentes mecanismos de pérdida de simetría y transferencia de calor. Así como una gran riqueza dinámica en la respuesta de estos sistemas aparentemente sencillos.

En el primero de ellos, se estudia el proceso de calentamiento de un fluido confinado a una cavidad de relación de aspecto grande, con paredes aislantes, que cuenta con dos placas verticales en las paredes laterales de la misma como fuentes de calor. Se obtienen las variables definitorias del flujo y, dependiendo del número de Rayleigh, se encuentran diferentes mecanismos de rompimiento de simetría, como la activación de mecanismos de inestabilidades de Rayleigh-Bénard, Kelvin-Helmholtz y colisiones de capas límite térmicas. También se calcula la producción de entropía en el sistema, cuyo valor medio aumenta como la raíz cuadrada del número de Rayleigh, y para ciertos valores de este parámetro, se encuentra un proceso irreversible que, además de ser particular a flujos en configuraciones geométricas semejantes, es el principal mecanismo de transferencia de calor y de producción de entropía, al cual se le ha dado el nombre de *proceso de rodear y engullir*.

El segundo sistema es muy similar al primero, con la diferencia de que en este caso las paredes no son aislantes, y se consideran hechas de un material sólido que es buen conductor de calor. De nueva cuenta, se obtienen diferentes medios de rompimiento de simetría y transferencia de calor. Al comparar con el caso de paredes aislantes, se establece que las paredes conductoras desempeñan la función de estabilizar el flujo de masa y aumentar el flujo de calor. Se calcula la producción de entropía en el sistema y se encuentra que el proceso de rodear-engullir tiene importancia en la transferencia de calor y la producción de entropía para ciertos valores del número de Rayleigh, aunque con impacto menor que en el caso anterior.

Finalmente, se estudia el flujo dentro de un canal vertical rectangular con fuentes de calor colocadas simétricamente. Se encontró una riqueza dinámica sorprendente, dependiendo del valor del parámetro de flotación, la respuesta del sistema presentó transiciones que lo llevaron a diferentes configuraciones finales mediante distintos tipos de bifurcaciones, las cuales pueden ser: un flujo simétrico estacionario, un flujo asimétrico estacionario, un flujo con oscilaciones locales o globales y un flujo en el que las oscilaciones regulares son destruidas, conduciendo a soluciones caóticas. Además, se obtuvo información cuantitativa de todos los estados finales encontrados.

Abstract

In the present thesis, transient heat and mass transfer process are addressed by the study of three particular systems that share geometrical characteristics. Depending on the governing parameters, different mechanisms of heat transfer and symmetry break down are found, as well as a great dynamical richness in the response of these apparently simple systems.

In the first one, the transient heating of a fluid inside a vertical cavity of large aspect ratio was studied. The walls of the cavity are considered to be adiabatic insulators, except by two vertical plates localized in the side walls near the bottom. From a clear dependence on the Rayleigh number, different kinds of symmetry break down have been found, like collision of thermal boundary layers and Rayleigh-Bénard and Kelvin-Helmholtz instabilities. Different mechanisms of heat transfer in the cavity are present, and for some cases, an irreversible process that is typical to systems with similar geometrical configurations is found. This process has been named as *engulf and swallow process* and, when present, is the most important mean of heat transfer and entropy generation. Also, the total entropy production in the systems has been obtained, and it is shown to vary as the square root of the Rayleigh number.

The second system is very similar to the first one, the difference in this case is that the walls of the cavity are considered to be made of a heat conducting material. Again, different means of symmetry break down and heat transfer are obtained. Trough comparison with the case of adiabatic walls, it is found that the presence of the heat conducting walls helps to stabilize the flow and enhances the heat flux. The entropy production in the system is calculated and the engulf and swallow process is found to be important in the heat transfer and entropy generation of certain values of the Rayleigh number, but with a lower impact than in the previous case.

Finally, the flow inside a vertical rectangular channel with symmetrical heating is analysed, and a surprising dynamical richness was found. Depending on the buoyancy parameter, the response of the flow showed different transitions that took the system to different final configurations. The final states can be: a symmetrical steady flow, an asymmetrical steady flow, a local or global oscillating flow and a flow where the regular oscillations are destroyed, heading to chaotic solutions. Qualitative and quantitative information of the bifurcations found and all the final configurations is provided.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

NOMENCLATURA

c	Calor específico
ds	Cambio total de la entropía
$d_e s$	Cambio en la entropía, por intercambio con los alrededores
$d_i s$	Cambio en la entropía, por procesos irreversibles internos
E	Energía interna por unidad de masa
Ec	Número de Eckert
g	Aceleración gravitacional
h	Espesor de la pared conductora
H	Ancho de la cavidad/canal
$\vec{J}_q$	Flujo de calor
$\vec{J}_s$	Flujo de entropía
k	Conductividad térmica
L	Largo de la cavidad/canal
$\bar{N}u$	Número de Nusselt promedio
p	Presión
P	Presión en forma adimensional
Pe	Número de Péclet
Pr	Número de Prandtl
q_i	Componentes del vector flujo de calor
R	Constante universal de los gases
Ra	Número de Rayleigh
Re	Número de Reynolds
Ri	Número de Richardson

S	Entropía por unidad de masa
t	Tiempo adimensional difusivo
T	Temperatura
u_i	Componentes del vector de velocidad
x_i	Componentes del vector de posición
x_s	Puntos de estancamiento
$\tilde{y}$	Centroide térmico
$\hat{y}$, y_p	Centroide másico

Letras griegas

β	Coeficiente de expansión volumétrica
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ε	Diferencia relativa de temperatura global
λ	Segundo coeficiente de viscosidad
κ	Difusividad Térmica
μ	Coeficiente de viscosidad dinámica
ν	Coeficiente de viscosidad cinemática
Φ	Función de disipación
ρ	Densidad del fluido
σ_{ij}	Componentes del tensor de esfuerzos
σ	Producción de entropía por procesos internos
σ_q	Producción de entropía por flujos de calor
σ_v	Producción de entropía por procesos viscosos
θ	Temperatura en forma adimensional
$\tilde{\theta}$	Temperatura promedio adimensional transversa
$\bar{\theta}$	Temperatura global promedio
τ	Tiempo adimensional para convección mixta

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La convección natural, forzada y mixta, ha sido ampliamente estudiada debido a que está presente y tiene un rol determinante en muchos de los flujos que nos rodean. Se puede encontrar en corrientes atmosféricas y oceánicas, así como en un gran número de dispositivos intercambiadores de calor, colectores solares, e incluso en reactores nucleares. Una extensa revisión para casos bidimensionales y tridimensionales con diferentes condiciones de frontera puede encontrarse en el artículo de Ostrach [1988].

Estudios más recientes de casos estacionarios que representan las líneas actuales de investigación en convección natural en cavidades cerradas son presentados por AlAmiri et al. [2009], Aminossadati y Ghasemi [2009], Corvaro y Paroncini [2009], Dalal y Das [2007], Wang et al. [2009], Wu y Ching [2010], donde se estudian los efectos que cambios en la geometría de la cavidad, en las propiedades del fluido confinado y en las condiciones de frontera para la temperatura tienen sobre el flujo resultante. Además de que en algunos casos se analiza la estabilidad de las soluciones encontradas.

Por otra parte, se han desarrollado estudios de procesos transitorios en sistemas similares a los arriba mencionados, que proveen información valiosa sobre la forma en la que los flujos de calor llevan a dichos sistemas a alcanzar estados permanentes. Estos estudios nos permiten observar una gran variedad en la dinámica de los vórtices que se generan, misma que permanece oculta en los estudios de casos estacionarios. Gustafson y Halasi [1987] estudian el efecto que tiene un incremento de dos veces la relación de aspecto de una cavidad rectangular sobre el flujo que se produce dentro de la misma forzado por el desplazamiento de una pared superior móvil para un número de Reynolds $Re = 10^4$. Encontraron que el incremento en la relación de aspecto tiene características dinámicas importantes que no están presentes en casos estacionarios o de números de Reynolds más bajos o en cavidades cuadradas. Se encuentran bifurcaciones transitorias iniciales debidas a la interacción de hasta cuatro regiones de recirculación. También se demuestra que la relación de aspecto es un segundo parámetro de bifurcación de importancia considerable. Cuando el número de Reynolds se mantiene fijo en $Re = 10^4$, ocurre una bifurcación de Hopf para un valor crítico de la relación de aspecto entre 1 y 2. Pujol et al. [1993], estudiaron numéricamente, usando el código PHOENICS, la convección natural transitoria en un fluido con número de Prandtl del orden de $Pr = 200$ confinado en una cavidad bidimensional cuadrada. Una de las paredes laterales de la cavidad se mantenía a temperatura constante mientras que en la pared opuesta se imponía un flujo de calor constante. Para un número de Rayleigh de $Ra = 3.9 \times 10^9$, se desarrollaba inicialmente una capa límite térmica cerca de la pared en la que el flujo de calor estaba fijo, seguida de la formación de una región de recirculación grande junto a una capa de intrusión superior. Con el tiempo, la temperatura promedio de la cavidad se incrementaba y, durante la transición al estado estacionario, se formaba un patrón de estratificación térmica. Estos resultados fueron comparados con análisis de escala previos, encontrando un acuerdo satisfactorio. Nithyadevi et al. [2007] estudiaron numéricamente el efecto que tienen las variaciones en la relación de aspecto sobre la convección natural transitoria en una cavidad rectangular con calentamiento y enfriamiento parcial en las paredes laterales. Usaron la formulación de vorticidad y función de corriente con el método de volúmenes de control, el esquema de ley de potencias y un proceso iterativo. El estudio se realizó para valores del número de Grashof (cociente entre las fuerzas de flotación y viscosas) entre $10^3 \leq Gr \leq 10^6$ con diferentes combinaciones de las posiciones de las zonas térmicamente activas y diferentes relaciones de aspecto. Encontraron que el flujo de calor es grande cuando la zona de alta temperatura se localiza en la parte baja de la cavidad y la zona de baja temperatura se sitúa en la parte alta de la misma. También reportaron que la tasa de transferencia de calor se incrementa para valores altos de la relación de aspecto y que el flujo de calor aumenta si la región de baja temperatura se colocaba en la parte superior de la cavidad. En el trabajo presentado por Xu et al. [2009], se estudia la convección natural transitoria de aire confinado en una cavidad de relación de aspecto pequeña con una aleta delgada en una de las paredes laterales, dicha pared se mantiene a una temperatura alta respecto a la temperatura inicial del fluido. El estudio se desarrolló haciendo uso de un análisis de escala y una simulación numérica directa. Los resultados resaltan cuatro etapas principales del desarrollo del flujo, una etapa inicial en la que se crea una capa límite térmica seguida por la formación de dos capas de intrusión, una debajo de la aleta y otra debajo de la pared superior de la cavidad. Después, cuando la intrusión debajo de la aleta alcanza el borde de esta, una pluma comienza a desarrollarse y es desviada hacia la capa límite que alimenta la intrusión de la pared superior de la cavidad. Finalmente, se establece un flujo horizontal sobre la aleta y la pluma se incorpora a la capa límite térmica que alimenta a la intrusión superior. Además, se establecieron escalas de tiempo y parámetros definitorios para los regímenes de flujo dominados por los efectos flotación-viscosos y flotación-inercia, encontrando buen acuerdo en ambos métodos. Zhang et al. [2011] estudiaron el proceso transitorio conjugado de conducción-convección natural en una cavidad inclinada con paredes conductoras de espesor finito y valores de la temperatura periódicos en el tiempo en una de las paredes laterales. Usaron un método pseudo espectral espacial-temporal multidominio de alta precisión. Estudiaron la influencia de las propiedades térmicas de la pared, los patrones periódicos en el tiempo de la temperatura y el ángulo de inclinación sobre los patrones de flujo y la transferencia de calor. Dependiendo de todo lo anterior encontraron diferentes configuraciones que aumentaban o disminuían la tasa de transferencia de calor.

En vista de la importancia práctica que poseen flujos como los arriba mencionados, se ha dedicado un esfuerzo importante a la optimización de los procesos de transporte que tienen lugar en ellos, del Río et al. [1998], Lambert et al. [2009]. En los últimos años, los estudios de transferencia de calor y diseño de dispositivos térmicos se han inclinado por los llamados análisis de segunda ley de la termodinámica, donde se calcula la producción de entropía en el sistema, y por el concepto de minimización de la producción de entropía. Esto se debe en parte, a la importancia que tiene el conocer un conjunto de parámetros que optimicen un proceso irreversible en un sistema dado y a la relación existente entre dicho conjunto de parámetros y la mínima producción de entropía.

La producción de entropía en un sistema fuera de equilibrio se asocia a los procesos irreversibles que tienen lugar en él. Dichos procesos pueden ser representados por flujos de calor, flujos de masa, reacciones químicas y efectos viscosos en un fluido entre otros. Por tanto, la producción de entropía está ligada a los valores de las fuerzas termodinámicas que los provocan. Estas fuerzas, en general, están dadas por gradientes de cantidades intensivas asociadas a los flujos que provocan mediante el concepto del trabajo generalizado, y pueden ser por ejemplo, la temperatura, la concentración de una sustancia en una solución, la afinidad (definida para reacciones químicas) y la velocidad entre otras. De esta manera, es evidente que la producción de entropía depende de los valores locales que adquieran estas cantidades dentro del sistema, lo que hace necesario tener un conocimiento previo de dichos valores para calcularla. Múltiples análisis de la segunda ley de la termodinámica, en los que se calcula la producción de entropía, para sistemas particulares pueden encontrarse en la literatura. A continuación se citan algunos de ellos.

En el trabajo presentado por Baytas [2000] se analizó numéricamente el flujo y la producción de entropía de un fluido descrito por las aproximaciones de Darcy y Boussinesq confinado en una cavidad cuadrada inclinada. Ellos determinaron la influencia del ángulo de inclinación y del número de Darcy-Rayleigh en el proceso. La producción de entropía se estudió en dos niveles. A nivel local, se muestran las zonas activas de generación de entropía así como la sensibilidad de las mismas ante cambios en el ángulo de inclinación. A nivel global, la producción de entropía brinda información acerca del grado de irreversibilidad del proceso. Mahmud y Fraser [2003] calcularon la producción de entropía para un flujo laminar estacionario en convección forzada para un canal de sección circular, y para un canal de placas paralelas. Se consideraron diferentes casos para los que existen aproximaciones analíticas de los campos de temperatura y de velocidades. Para los casos considerados, obtuvieron expresiones analíticas generales para los números adimensionales de producción de entropía y de Bejan (cociente de irreversibilidad por flujos de calor a irreversibilidad total). Cada una de estas expresiones consta de tres partes fundamentales, la primera relacionada a la conducción axial, la segunda relacionada con la conducción normal al eje del canal y la tercera relacionada con la fricción del fluido. Erbay et al. [2003] estudiaron numéricamente el flujo y la transferencia de calor en una cavidad cuadrada, la pared izquierda de la cavidad se calentaba parcial o totalmente, mientras que la pared derecha se enfriaba y el resto se mantenían aisladas adiabáticamente. Utilizaron un método de volumen finito con un esquema de ley de potencias y encontraron la producción de entropía global, así como las zonas activas de producción de entropía para el caso transitorio. El estudio se llevó a cabo para números de Prandtl de 0.01 y 1.0, y para números de Rayleigh en el rango $10^2 \leq Ra \leq 10^8$. En el caso en el que la pared izquierda se calentaba totalmente, las zonas de producción de entropía más intensas se encuentran en la esquina inferior de la pared caliente y en la esquina superior de la pared fría. En el caso de calentamiento parcial, la zona más intensas de producción de entropía se encuentra en la parte superior de la sección de alta temperatura. Por otra parte, Magherbi et al. [2006] estudiaron numéricamente la producción de entropía debida a flujos de calor, a flujos de masa y a los efectos viscosos en una cavidad cuadrada inclinada para el caso estacionario de convección y doble difusión. Utilizaron un método de elemento finito por volúmenes de control y el algoritmo SIMPLER. Encontraron la producción de entropía total y los efectos de las variaciones del número de Grashof para diferentes ángulos de inclinación. La producción de entropía global se incrementa al aumentar tanto el número de Grashof térmico como la relación de fuerzas de flotación para números de Lewis moderados. Localmente, la producción de entropía debida a los flujos de calor y a los flujos de masa es muy similar y las zonas más activas para ambos casos se localizan en las partes superior e inferior de la pared caliente. Ilis et al. [2008], analizaron la convección natural y la generación de entropía para cavidades con la misma área pero diferente relación de aspecto, cuyas paredes laterales se mantenían a temperaturas diferentes, una a temperatura mayor y la otra a temperatura menor que la temperatura inicial del fluido. El estudio se realizó considerando números de Rayleigh entre $10^2 \leq Ra \leq 10^5$ y la solución se obtuvo mediante un método de diferencias finitas y el esquema ADI combinado con un esquema de solución punto a punto. Observaron que la producción de entropía varía de forma considerable con la relación de aspecto. Para números de Rayleigh bajos y una relación de distribución de entropía (efectos viscosos/flujos de calor) de orden 10^{-4}, las irreversibilidades debidas a los flujos de calor dominan y la producción total de entropía aumenta al aumentar la relación de aspecto. Para valores grandes del número de Rayleigh, y la misma relación de distribución de entropía, las irreversibilidades debidas a los efectos viscosos dominan y la producción de entropía total aumenta al aumentar la relación de aspecto, alcanza un máximo y luego decrece. La entropía total en las cavidades aumenta al aumentar el número de Rayleigh, pero la tasa de incremento depende de la relación de aspecto. Varol et al. [2008] investigaron la producción de entropía para el proceso de convección natural en una cavidad cuadrada limitada por dos paredes laterales sólidas de diferentes espesores finitos usando un método de diferencias finitas. Obtuvieron contornos de generación de entropía, isotermas, líneas de corriente, números de Nusselt y perfiles de velocidad para números de Rayleigh en el rango $10^3 \leq Ra \leq 10^6$, y para diferentes valores del espesor de las paredes. Entre los resultados más importantes, el espesor de las paredes sólidas afecta los campos de temperatura y de velocidades, el número de Bejan decrece cuando el número de Rayleigh y el cociente de conductividades térmicas aumentan y la zona más intensa de producción de entropía local se encuentra en las esquinas de la cavidad. También se muestra que la forma de la cavidad puede usarse como un parámetro de control para reducir la producción de entropía. Varol et al. [2009b] reportan resultados similares para una cavidad trapezoidal con una pared vertical sólida de espesor finito que encierra un medio poroso saturado. En el mismo año, Varol et al. [2009a] presentan una comparación entre los resultados de una técnica de predicción de producción de entropía y una simulación numérica directa para el caso de convección natural en una cavidad cuadrada parcialmente enfriada. Los autores encontraron buen acuerdo entre los métodos y una importante reducción en el tiempo de cálculo para el caso de la técnica de predicción.

En el caso de la convección mixta, donde la convección natural y la convección forzada conviven, se han realizado grandes avances en el entendimiento, descripción y aplicación de flujos en estas condiciones. En el presente trabajo, resultará particularmente interesante el comportamiento oscilante que puede llegar a presentar la convección mixta y a continuación se hace un breve recuento de estudios que abordan este tema en particular. Chang y Lin [1993] estudiaron el flujo laminar en convección mixta, para los casos estacionario y transitorio oscilante, en un canal vertical plano con fuentes de calor constantes colocadas de forma simétrica, suponiendo que existe un perfil de velocidad completamente desarrollado en la entrada del canal y que la flotación es opuesta al flujo. Los autores resaltan que un flujo oscilante, con una sola frecuencia fundamental se establece cuando el número de Richardson excede un valor crítico. Lin et al. [1993], estudiaron numéricamente el flujo y las características térmicas en la convección mixta laminar transitoria que se presenta en un canal vertical plano, sujeto a fuentes de calor simétricas. Sus resultados muestran que para altos valores del parámetro de flotación, se manifiestan una asimetría de forma espontánea y una respuesta oscilante del flujo al mismo tiempo. Evans y Greif [1997] mostraron el fuerte efecto que las fuerzas de flotación tienen, aún para pequeñas diferencias de temperatura en el flujo descendente de nitrógeno en un canal vertical con calentamiento parcial, reportaron oscilaciones dependientes del tiempo, incluyendo inversiones del flujo periódicas a lo largo de las paredes del canal. Martínez-Suástegui y Treviño [2007] y Martínez-Suástegui y Treviño [2008] presentan un estudio experimental y otro numérico del flujo transitorio en convección mixta, que se presenta en un canal vertical con calentamiento asimétrico y flotación opuesta al flujo. Sus resultados muestran que puede encontrarse una respuesta estacionaria final o un estado oscilante, dependiendo del número de Reynolds y del número de Richardson, y que el valor crítico del número de Richardson depende fuertemente del número de Reynolds. Por otra parte, múltiples análisis de la estabilidad de flujos en convección mixta se han desarrollado a lo largo de los años, sus resultados brindan información profunda respecto a los mecanismos de inestabilidad presentes en tales situaciones y dan información cuantitativa acerca de los parámetros críticos involucrados. Algunos ejemplos de estudios interesantes son los presentados por Guillet et al. [2007], Chen y Chung [1996], Chen y Chung [1998] y Suslov y Paolucci [1995]. Resultan particularmente interesantes para el presente trabajo los estudios de estabilidad que revelan la presencia de bifurcaciones de pegado (*gluing bifurcations*). Dichas bifurcaciones son un tipo de bifurcación global en la que dos estados periódicos en el tiempo, relacionados de forma simétrica, se vuelven homoclínicos a un punto silla y resultan en un solo estado simétrico periódico en el tiempo descritos por Abshagen et al. [2001]. Ejemplos de lo anterior pueden encontrarse en los siguientes artículos, el presentado por Rucklidge [1993], donde se describe la transición al caos a partir de procesos de pegado en un modelo magneto-convectivo tridimensional. Marques et al. [2001] estudiaron numéricamente una ruta unidimensional en el espacio de parámetros de un flujo simétrico periódicamente forzado, brindan un análisis exhaustivo de la transición al caos que involucra un nuevo e intrincado rompimiento de simetría que incluye bifurcaciones heteroclínicas, homoclínicas y de pegado. Lopez y Marques [2000] obtuvieron soluciones de tres toros para las ecuaciones de Navier-Stokes, así como su dinámica mediante el uso de un mapeo de Poincaré global. Sus resultados muestran que dichas soluciones sufren bifurcaciones globales, incluyendo bifurcaciones de pegado nuevas, asociadas con conexiones heteroclínicas y homoclínicas con soluciones inestables (dos toros) que actúan como centros organizadores para la dinámica de tres toros.

De lo anterior, es claro que existe un profundo conocimiento sobre los procesos de convección natural en cavidades cerradas, que la configuración y las propiedades de las estructuras de vórtices son determinantes en todos los procesos de transferencia de calor y de producción de entropía estudiados y que la información proporcionada por los análisis de la segunda ley de la termodinámica es de gran importancia para realizar estudios de optimización de dispositivos aplicados. También se cuenta con valiosa información acerca de la riqueza dinámica que puede encontrarse en sistemas de convección mixta en canales verticales. Se han desarrollado estudios muy completos e interesantes que describen las inestabilidades encontradas en dichos flujos, las relaciones entre ellas y en algunos casos, la cadena de eventos que conducen al caos. Sin embargo, la mayoría de los esfuerzos y los estudios más detallados en convección natural se han enfocado en cavidades cuadradas o tratan procesos de transferencia de calor y de producción de entropía en estado permanente. Ninguno de los trabajos arriba citados se enfoca en estudiar el proceso de calentamiento de un fluido confinado en una cavidad con fuentes de calor situadas cerca del fondo, configuración que se presenta en muchos dispositivos aplicados, como calentadores de agua o aire. Además, resulta evidente que hay relativamente pocos estudios en los que se consideren flujos transitorios inestables, que se enfoquen en determinar las características térmicas para convección mixta con flotación opuesta e inversión de flujo, y que incluso hay menos análisis que traten con la investigación de los flujos oscilatorios que pueden aparecen en tales situaciones.

Por las razones arriba expuestas, en la presente tesis, se estudia la convección natural de un fluido dentro de una cavidad rectangular con relación de aspecto grande (altura/ancho), calentada por dos fuentes de calor colocadas en las paredes laterales cerca del fondo, cada una con extensión igual al ancho de la cavidad. Se elige esta geometría en particular porque, al incrementar la relación de aspecto de una cavidad rectangular, se proporciona el escenario propicio para una gran riqueza dinámica en el movimiento e interacción de vórtices en el estado transitorio. Haciendo uso del algoritmo SIMPLE en conjunto con un método de volúmenes de control y el esquema de ley de potencias se obtienen isotermas, temperaturas promedio, temperaturas promedio transversas, centroides térmicos, números de Nusselt promedio y la producción de entropía local y global para el caso no estacionario con números de Rayleigh en el intervalo $10^3 \leq Ra \leq 10^6$. A partir de una clara dependencia en el número de Rayleigh, se encuentran diferentes tipos de inestabilidades y mecanismos de intercambio de calor en el sistema, como una inestabilidad de tipo Rayleigh-Bénard e intercambio de calor por desprendimiento sucesivo de regiones de recirculación para $Ra = 10^4$, inestabilidad de tipo Kelvin-Helmholtz para $Ra = 5 \times 10^4$, e inestabilidad por colisiones de capas límite térmicas para $Ra \geq 10^5$, para los casos con número de Rayleigh $Ra \geq 5 \times 10^4$, se encontró un proceso irreversible que es el principal mecanismo de transferencia de calor y de producción de entropía, al cual hemos llamado el proceso de rodear-engullir, y que consiste en el confinamiento de porciones de fluido de baja temperatura por fluido de temperatura mayor (rodear), y en el rápido traslado de dichas porciones de fluido frío hacia la parte baja de la cavidad que se encuentra a temperatura alta (engullir). Además, resulta de gran interés que este proceso irreversible no se haya reportado antes, por lo menos en la extensión de la revisión bibliográfica realizada, y que se presente como una característica de sistemas con propiedades geométricas similares al aquí propuesto. A nivel local, a partir del análisis derivado de la segunda ley de la termodinámica, se señalan las regiones de intensa generación de entropía, mientras que, a nivel global, se obtiene una curva que describe de manera universal el valor medio de la producción total de entropía en el sistema, salvo por un pequeño periodo de tiempo inicial. Dicha curva puede ser utilizada para obtener parámetros de funcionamiento óptimo, desde el punto de vista de la producción de entropía, de dispositivos intercambiadores de calor.

De manera similar, se estudia el proceso conjugado conducción-convección natural, para el mismo intervalo del número de Rayleigh, dentro de una cavidad con las mismas características geométricas que antes, pero formada por paredes conductoras de calor con espesor finito, determinando el efecto que la presencia de las paredes tiene sobre la respuesta del flujo. La razón entre la difusividad térmica del sólido y del fluido se eligió de manera que represente, de manera aproximada, una cavidad hecha con paredes de aluminio que contiene agua. Al comparar con el caso de paredes aislantes, se encontró que las paredes conductoras inducen un flujo más estable y un proceso de transferencia de calor más veloz. En este caso, la pérdida de la simetría se da por mecanismos de Kelvin-Helmholtz, o por la colisión de múltiples regiones de recirculación. De nueva cuenta se encuentra presente el proceso de rodear-engullir, el cual tiene un papel importante en el proceso de intercambio de calor y de producción de entropía para el número de Rayleigh $Ra = 10^6$, pero con un impacto menor que el que tiene en el caso de paredes aislantes.

Por último, se presentan los resultados más importantes de un detallado estudio numérico para flujo laminar transitorio en convección mixta, con flotación opuesta, en un canal vertical rectangular, sujeto a fuentes de calor discretas, localizadas simétricamente y con temperatura constante. Se estudia el desarrollo del flujo detalladamente y se describen las etapas finales del mismo a través de curvas en el espacio fase, las cuales pueden representar flujos simétricos estacionarios para $Ri \leq 5$, flujos asimétricos estacionarios, $Ri = 7$, o con oscilaciones locales para $Ri = 8$, flujos con oscilaciones globales para $Ri = 9$ o finalmente un estado caótico para $Ri = 11$. Se analizan las diferentes transiciones entre dichas respuestas, las cuales se dan a través de bifurcaciones de Hopf o de pegado (gluing bifurcations) y se proporciona información cuantitativa acerca de las cantidades representativas del flujo.

Con el propósito de dar un panorama general de la estructura del escrito, se menciona a continuación la forma en la que se organiza la presentación del trabajo. El capítulo 1 se dedica a la introducción, misma que se está leyendo ahora y que pretende servir como un primer acercamiento al campo de investigación, a los métodos usados y a los resultados más sobresalientes de la investigación, así como invitar a una lectura profunda de la tesis. En el capítulo 2, se plantean las ecuaciones de movimiento que describen al sistema físico en cuestión, detallando las aproximaciones y suposiciones hechas para obtenerlas. En el capítulo 3, se obtiene una expresión explícita para calcular la producción de entropía a partir de la formulación de la Termodinámica Irreversible Lineal, adecuada para los sistemas particulares a tratar. A continuación, en el capítulo 4, se replantean las ecuaciones de movimiento en variables adimensionales, las cuales permiten reducir el número de parámetros libres a estudiar, utilizando un conjunto diferente para cada caso particular. Se expresa a la producción de entropía en términos de dichas variables y se definen las cantidades que se utilizarán para determinar las características del flujo. El capítulo 5 está dedicado a definir los tres sistemas particulares a estudiar, escribiendo las condiciones iniciales y de frontera correspondientes a cada uno. En el capítulo 6 se describe el método numérico a utilizar, dando detalles sobre la implementación de los programas desarrollados y de las pruebas de consistencia y validación realizadas. Los resultados obtenidos se presentan en el capítulo 7, los cuales están organiza-dos en secciones que corresponden a los diferentes sistemas estudiados. Las conclusiones de la tesis se encuentran en el capítulo 8, y finalmente, se proveen detalles del método numérico utilizado y ejemplares de los artículos publicados en los apéndices A, B y C.

Para finalizar este capítulo, se resalta que como fruto de este trabajo, se logró la publicación de tres artículos de investigación en revistas de circulación internacional con arbitraje. En el primero de ellos, Cajas et al. [2010], se investigó el proceso de transferencia de calor en una placa rectangular perforada, cuya conductividad térmica depende linealmente de la temperatura. El estudio se llevo a cabo desde dos enfoques distintos. En el primero se realizó un análisis numérico, donde se utilizó un generador elíptico de coordenadas para obtener mallas ajustadas a la geometría de la placa, a partir de dichas mallas se obtuvieron los parámetros definitorios de una transformación de coordenadas, que permitió resolver la ecuación de calor sobre un dominio computacional cuadrado mucho más simple, obteniendo la solución en el dominio físico al aplicar la transformación inversa. En el segundo, se realizó una aproximación asintótica basada en el método de las imágenes (usual en electromagnetismo) y en la teoría de los flujos potenciales. Fue posible obtener una solución analítica aproximada de la ecuación de calor para la placa perforada, la cual, al ser comparada con los resultados numéricos, mostró un acuerdo excelente. Lo anterior dio como resultado una expresión analítica para el flujo de calor, que lo describe de manera excepcional, para un amplio rango de radios de perforación y cinco distintos valores del parámetro que mide las variaciones de la conductividad térmica con la temperatura. En el segundo artículo, Martínez-Suástegui et al. [2011], se publicaron los resultados del análisis del canal vertical con fuentes de calor simétricas que se mencionaron arriba y que se detallan en la sección 7.3. El tercer artículo, Cajas y Treviño [2012], trata sobre los resultados obtenidos del estudio de la cavidad rectangular con relación de aspecto grande con paredes aislantes, mismos que se mencionan arriba y se discutirán a profundidad en la sección 7.1. Finalmente, se hace mención de que se encuentra en elaboración un artículo que incluye los resultados presentados en la sección 7.2, correspondientes a la cavidad con paredes conductoras de calor.

CAPÍTULO 2

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Las ecuaciones de movimiento de un fluido viscoso y conductor de calor bajo la acción de la fuerza gravitacional se encuentran ampliamente descritas en la literatura. Son el resultado de fusionar la mecánica clásica con la termodinámica a través de la hipótesis del medio continuo, lo cual permite aplicar los principios fundamentales de conservación de masa, energía y momentum a elementos infinitesimales de fluido y obtener las relaciones diferenciales que lo gobiernan. En el presente trabajo no se repetirán las deducciones que llevan a dichas ecuaciones y se proporcionarán en notación tensorial cartesiana, con el vector de posición representado por x_j y el vector de velocidad por u_j (j=1,2,3). Las ecuaciones son las siguientes, Currie [1993]:

La ecuación de continuidad, que expresa el principio de conservación de masa en el flujo,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \tag{2.1}$$

aquí, ρ es la densidad del fluido y t denota el tiempo.

Las ecuaciones de Navier-Stokes, que expresan la conservación de momentum en el flujo,

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\rho g \delta_{i3} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \tag{2.2}$$

donde $D/Dt = \partial/\partial t + u_j \partial/\partial x_j$ es la derivada total, g denota la aceleración gravitacional, δ_{ij} es la delta de Kronecker y σ_{ij} representa el tensor de esfuerzos. Además el eje x_3 se elige como el correspondiente a la dirección vertical hacia arriba.

La ecuación de balance de energía,

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \tag{2.3}$$

donde E es la energía interna por unidad de masa del fluido, q_j denota las componentes del vector flujo de calor, que se relaciona con la temperatura T a través de la ley de Fourier

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j},$$

donde k es la conductividad térmica.

Para que la teoría sea cerrada, es decir que tenga el mismo número de ecuaciones independientes y el mismo número de incógnitas, es necesario proveerla de ecuaciones constitutivas, como la ley de Fourier, enunciada más arriba. En el caso de los fluidos newtonianos, la ecuación constitutiva para el tensor de esfuerzos σ_{ij} está dado por

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \tag{2.4}$$

aquí, p es la presión, μ es el coeficiente de viscosidad dinámica del fluido y λ es el segundo coeficiente de viscosidad y expresa la forma en la que los esfuerzos afectan a los elementos constituyentes del fluido. Con esto las ecuaciones de Navier-Stokes se convierten en

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (p + \rho g x_3) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \tag{2.5}$$

y la ecuación de balance de energía puede escribirse como

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \Phi, \tag{2.6}$$

donde la tasa temporal de disipación viscosa por unidad de volumen del fluido se expresa

como
$$\Phi = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 + \lambda\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2, \tag{2.7}$$
y será analizada con mayor detalle más adelante.

Se puede notar que en las cinco ecuaciones aparecen siete incógnitas, por lo que se requieren dos ecuaciones constitutivas más para cerrar el sistema de ecuaciones, éstas son las ecuaciones de estado térmica y calórica.

$$p = p(\rho, T), \text{ y } E = E(\rho, T).$$

La ecuación de estado térmica más frecuentemente usada es la del gas ideal $p = \rho RT$, en la que R es la constante universal de los gases. Mientras que la ecuación de estado calórica más usual es $E = cT$, donde c es el calor específico. Resulta interesante, e incluso sorprendente, que las ecuaciones de estado que son más utilizadas para describir fluidos reales sean las que corresponden a un gas ideal, lo que conduce a pensar que la teoría desarrollada en base a estas ecuaciones de estado, corre el riesgo de caer en una enorme contradicción al tratar un fluido como el agua, por ejemplo. Sin embargo, el uso de estas ecuaciones de estado se justifica dado que las variaciones en la presión entre capas adjuntas de un fluido real en general son muy pequeñas Drazin y Reid [2004], y por tanto, las contribuciones de dichas variaciones a los cambios de la energía interna son aún menores. De cualquier manera, sería en extremo interesante extender el análisis aquí presentado usando ecuaciones de estado más cercanas a las de los gases reales.

2.1. Aproximación de Boussinesq

La base de esta aproximación es que existen flujos en los que, para ciertas variaciones de la temperatura, se producen cambios en la densidad del fluido que son pequeños comparados con la densidad misma, y a pesar de ello, la flotación es la fuerza que gobierna el flujo. Entonces, la variación de la densidad se desprecia en todos los términos de las ecuaciones de movimiento, excepto en el término de flotación, donde se considera que dicha variación respecto de la temperatura es de la forma siguiente

$$\rho = \rho_0\{1 - \beta(T - T_0)\} \tag{2.8}$$

donde T_0 es una temperatura representativa del sistema, ρ_0 es la densidad del fluido a la temperatura T_0 y β es el coeficiente de expansión volumétrica. Para un gas ideal $\beta \approx 3 \times 10^{-3} K^{-1}$ y para un fluido típico usado en experimentos $\beta \approx 5 \times 10^{-4} K^{-1}$. Si por ejemplo, $T_0 - T \sim 10K$ entonces, $(\rho - \rho_0)/\rho_0 = \beta(T_0 - T) \ll 1$, pero la flotación $g(\rho - \rho_0)$ es del mismo orden de magnitud que los términos de inercia y que los esfuerzos cortantes y por tanto no puede ser despreciado. Para la mayoría de los fluidos reales $d\mu/\mu\, dT$, $dk/k\, dT$, $dc/c\, dT \lesssim \beta$, y entonces μ, k y c ó c_v pueden considerarse como constantes. Esta aproximación es válida para casos en los que la diferencia de temperaturas es de unos pocos grados y puede ser justificada formalmente, como se muestra en los estudios de Spiegel y Veronis [1960] y Gray y Giorgini [1976].

En vista de lo anterior, es posible simplificar las ecuaciones de movimiento de la manera siguiente. Las derivadas en la ecuación de continuidad (2.1) son de orden β y en consecuencia

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \tag{2.9}$$

como si se tratara de un fluido incompresible. Con lo anterior, el tensor de esfuerzos se reduce a

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Y las ecuaciones de Navier-Stokes se convierten en

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho_0} + g x_3 \right) - \beta g (T_0 - T)\delta_{i3} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \tag{2.10}$$

Antes de simplificar la ecuación de balance de energía, es preferible primero evaluar la razón entre la tasa temporal de disipación viscosa y la tasa temporal de transferencia de calor. Para ello se considera a V como una velocidad representativa del sistema, d como una escala de longitud y $T_0 - T_1$ como una escala de diferencias de temperatura. Con esto,

$$\frac{\Phi}{\rho \frac{D(cT)}{Dt}} \approx \frac{\mu V^2 d^{-2}}{\rho_0 c (T_0 - T_1) V d^{-1}} = \frac{\nu V}{c(T_0 - T_1) d}.$$

En un gas típico $\nu/c_v \approx 10^{-8} Ks$ y para un líquido típico $\nu/c \approx 10^{-9} Ks$ con lo que se demuestra que el cociente es muy pequeño tanto para líquidos como para gases, a menos que $V/(T_0 - T_1)d$ sea muy grande. Por tanto, en el presente trabajo es posible despreciar el término Φ en la ecuación de balance de energía. Ahora, notamos que el término de generación de calor por compresión es

$$-p\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \beta p\frac{DT}{Dt}.$$

Para un gas ideal, $p = (c_p - c_v)\rho T$ y $\beta = 1/T$, de donde se puede ver que

$$\rho\frac{DE}{Dt} + p\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \cong c_p\rho\frac{DT}{Dt},$$

y en consecuencia no es posible despreciar el término de calentamiento por compresión en comparación con la transferencia de calor, como la aproximación (2.9) podría haber hecho pensar. Sin embargo, en los líquidos, el término tratado es despreciable. La razón principal para que esta diferencia exista es que la transferencia de calor es proporcional a la densidad, la cual es por lo menos 10^3 veces mayor en los líquidos típicos que en los gases típicos. Con todas estas aproximaciones, la ecuación de balance de energía se reduce a

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{2.11}$$

donde κ la difusividad térmica, y es $\kappa = k/\rho_0 c_p$ para un gas ideal y $\kappa = k/\rho_0 c$ para un líquido. Las ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.11) son llamadas las ecuaciones de Boussinesq y describen el movimiento de un fluido de Boussinesq.

CAPÍTULO 3

PRODUCCIÓN DE ENTROPÍA EN UN FLUJO CONDUCTOR DE CALOR

En un sistema macroscópico, la variación de la entropía se debe al intercambio de calor con los alrededores y a la producción interna de entropía.

$$ds = d_e s + d_i s,$$

donde ds denota el cambio en la entropía total, mientras $d_e s$ es el cambio en la entropía debido al intercambio de calor con los alrededores y $d_i s$ es la producción interna de entropía. Dependiendo del sentido de los flujos de calor hacia adentro o afuera del sistema, $d_e s$ puede ser positivo o negativo. Por otra parte $d_i s$ debe cumplir la segunda ley de la termodinámica, que exige

$$d_i s \geq 0. \tag{3.1}$$

En la formulación de la Termodinámica Irreversible Lineal (TIL) Kondepudi y Prigogine [1999], se escribe de manera explícita una forma de calcular $d_i s$ para procesos irreversibles. Esto se hace reescribiendo adecuadamente las expresiones anteriores en términos de densidades de variables termodinámicas. Para definir de manera adecuada dichas variables y la relación que existe entre ellas, debe suponerse válida la hipótesis del equilibrio local, misma que establece que aunque no existe equilibrio en el sistema de manera global, es posible suponer que existe equilibrio en regiones pequeñas del mismo. Esta hipótesis es válida siempre que los gradientes o fuerzas que existen en el sistema no sean muy grandes, y permite hacer los siguientes enunciados:

- Se pueden definir, como en equilibrio, a las funciones termodinámicas en diferentes puntos del espacio de forma instantánea.

- Las variables termodinámicas se transforman en campos dependientes de la posición y del tiempo. Por ejemplo la temperatura se expresa como $T = T(x_j, t)$

- Las ecuaciones de estado conservan su forma.

Además se reconoce como válida la ecuación de Gibbs de forma local e instantánea, que de manera general se escribe como

$$T\frac{DS}{Dt} = \frac{DE}{Dt} + p\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} - \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{Dc_k}{Dt}, \tag{3.2}$$

donde S es la entropía por unidad de masa, $\tilde{\nu}$ es el volumen específico y μ_k y c_k son el potencial químico por unidad de masa y la concentración de la especie química k respectivamente.

En el caso que se estudia en el presente trabajo no existen diferentes especies químicas, y por tanto, la ec. (3.2) se reduce a

$$T\frac{DS}{Dt} = \frac{DE}{Dt} + p\frac{D\tilde{\nu}}{Dt}. \tag{3.3}$$

Ahora, se escribe la ecuación de continuidad (2.1) de la siguiente forma

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

se sustituye en la ec. (2.6) y se obtiene

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} + \frac{\Phi}{\rho},$$

que puede escribirse de manera sugerente como sigue

$$\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_j}{\partial x_j} - p\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} + \frac{\Phi}{\rho}, \tag{3.4}$$

Al sustituir la ecuación de balance (3.4) en la ecuación de Gibbs (3.2) se encuentra

$$T\frac{DS}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\Phi}{\rho}. \tag{3.5}$$

Vale la pena, en este momento, profundizar en el origen de la función de disipación Φ. Dicha función se obtiene al sustituir la ecuación constitutiva (2.4) en la ecuación de balance de energía (2.3), a través del término $\sigma_{ij}\partial u_j/\partial x_i$, que representa el trabajo hecho por las fuerzas de superficie.

$$\sigma_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \left[-p\delta_{ij} + \lambda\,\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]\frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

$$\sigma_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -p\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \lambda\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2.$$

El término $p\partial u_k/\partial x_k$, representa la transferencia de energía reversible debida a las compresiones, mientras los otros dos términos representan la rapidez con la que se convierte energía mecánica en energía térmica de manera irreversible

$$\Phi = \lambda\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2.$$

De esta manera, la ec. (3.5) es

$$\frac{DS}{Dt} = -\frac{1}{\rho T}\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\lambda}{\rho T}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{\mu}{2\,\rho T}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2.$$

Se hace notar la siguiente igualdad

$$\frac{1}{T}\frac{\partial q_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{q_j}{T}\right) + \frac{q_j}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x_j},$$

con la que

$$\frac{DS}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{q_j}{T}\right) - \frac{q_j}{\rho T^2}\frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\lambda}{\rho T}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{\mu}{2\rho T}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2,$$

que puede escribirse como

$$\rho\,\frac{DS}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{q_j}{T}\right) + \frac{k}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\lambda}{T}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{\mu}{2T}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2. \tag{3.6}$$

Esta es la ecuación de balance para la entropía Kondepudi y Prigogine [1999]. En ella puede identificarse, claramente, el origen de cada una de las contribuciones para la producción de entropía. Sin embargo, antes de proceder, es conveniente reconocer en la ec. (3.6) la siguiente estructura

$$\rho\frac{DS}{Dt} = -\nabla\cdot\vec{J}_s + \sigma,$$

donde se ha usado la notación vectorial usual. En la ecuación anterior, $\vec{J}_s$ es el flujo de entropía y σ es el término de producción de entropía por procesos internos y no provoca confusión con la definición del tensor de esfuerzos por la naturaleza tensorial distinta de ambas cantidades. Ahora, se hace la identificación

$$\vec{J}_s = \frac{\vec{q}}{T}, \tag{3.7}$$

que muestra que, en este caso, el intercambio de entropía con los alrededores se produce mediante flujos de calor. En general, para sistemas abiertos, dicho intercambio con los alrededores se produce mediante intercambios de calor y de masa.

Por otra parte,

$$\sigma = \frac{k}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\lambda}{T}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{\mu}{2T}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2, \tag{3.8}$$

y muestra que existen dos medios por los cuales se produce entropía en el sistema. Uno de ellos es el debido a los flujos de calor producidos dentro del mismo, mientras que el otro se debe a las fuerzas de fricción internas del fluido. Por tanto, se escriben

$$\sigma_q = \frac{k}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)^2, \tag{3.9}$$

$$\sigma_v = \frac{\lambda}{T}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{\mu}{2T}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2, \tag{3.10}$$

donde σ_q y σ_v son las contribuciones térmica y viscosa a la producción de entropía, respectivamente.

De las dos expresiones anteriores, es claro que, para encontrar la producción de entropía en un flujo conductor de calor, es necesario conocer los campos de velocidad y temperatura del mismo, los cuales están determinados por las ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.11).

CAPÍTULO 4

VARIABLES Y ECUACIONES ADIMENSIONALES

Es posible formular las ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.11) en forma adimensional. Esto permite reducir el número de parámetros independientes que gobiernan a las ecuaciones de movimiento, la fácil generalización de los resultados obtenidos y la identificación directa de la combinación adimensional de parámetros que determinan el flujo, así como la dependencia del mismo respecto a las variaciones de dichas combinaciones. La elección de las variables adimensionales a emplear debe hacerse tomando en cuenta las propiedades del sistema y deben reflejar las características físicas esperadas o conocidas del mismo.

En el presente trabajo se utilizarán dos conjuntos de variables adimensionales. Uno apropiado para la descripción de un flujo gobernado principalmente por las fuerzas de flotación (convección natural), y el otro adecuado para la descripción de flujos en los que la convección forzada y natural interactúan (convección mixta).

4.1. Convección natural

En general, las variables de posición suelen ser adimensionalizadas utilizando una escala de longitud representativa del sistema. Usualmente se elige la longitud, el ancho o la altura del recipiente que contiene al fluido. En algunos otros casos, principalmente aquellos en los que el fluido no está totalmente confinado, se elige la longitud de alguna sección con temperatura diferente que la del resto del fluido, que normalmente es la que produce las fuerzas de flotación.

En cualquiera de los casos antes mencionados, es posible denotar dicha escala de longitud como d, de forma tal que es posible definir las variables adimensionales de longitud de la siguiente forma

$$x_i^* = \frac{x_i}{d}, \tag{4.1}$$

donde el superíndice $(*)$ denota las nuevas variables adimensionales.

Para el tiempo, diferentes escalas pueden elegirse, una de ellas es el tiempo característico de difusión de temperatura, que expresa el tiempo necesario para que una señal térmica viaje a través de la escala de longitud d. Con lo que se obtiene

$$t^* = \frac{t}{(d^2/\kappa)}. \tag{4.2}$$

En algunos casos, en los que $\nu = \mu/\rho >> \kappa$ se puede usar de manera equivalente d^2/ν como escala de tiempo, la cual mide el tiempo característico de difusión de momentum. Otra posibilidad es definir la escala de tiempo a través de una escala de velocidades característica del sistema, misma que se construye más adelante.

Si se adopta la escala de tiempo (4.2), la escala de velocidades queda definida como el cociente $d/(d^2/\kappa) = \kappa/d$. De esta manera se define la nueva velocidad adimensional como

$$u_i^* = \frac{u_i}{(\kappa/d)}. \tag{4.3}$$

Con esta escala de velocidad se define la escala para la presión como $\rho_0\kappa^2/d^2$, y la presión adimensional como

$$p^* = \frac{p}{(\rho_0 \kappa^2/d^2)}. \quad (4.4)$$

Alternativamente, es posible obtener una escala de velocidades característica del flujo y a partir de ella construir la escala de tiempo correspondiente. Para ello notamos primero que un elemento de fluido, originalmente en reposo, en el que no existen fuerzas de flotación y que se encuentra bajo la acción de la fuerza gravitacional, tendrá una velocidad igual a $\sqrt{gd}$ después de recorrer la escala de longitud d. El efecto de la fuerza de flotación será el de modular esta velocidad por un factor proporcional a su intensidad. Dicho factor puede elegirse como $\sqrt{(\rho_0 - \rho_1)/\rho_0}$, donde ρ_l es la densidad a la temperatura representativa del sistema θ_l, $l = 0, 1$. De esta forma se expresa la velocidad adimensional como

$$u_i^* = \frac{u_i}{\sqrt{gd\Delta\rho/\rho_0}}, \quad (4.5)$$

donde $\Delta\rho = \rho_0 - \rho_1$. Con esta escala de velocidad se construye la escala de tiempo directamente como $d/\sqrt{gd\Delta\rho/\rho_0}$ y el tiempo adimensional como

$$t^* = \frac{t}{d/\sqrt{gd\Delta\rho/\rho_0}}. \quad (4.6)$$

Además, la escala para la presión en este caso es $gd\Delta\rho$ y la presión adimensional

$$p^* = \frac{p}{gd\Delta\rho}. \quad (4.7)$$

La escala de temperatura suele construirse a partir de una diferencia de temperatura representativa del flujo. Misma que puede tomarse como la diferencia entre la temperatura inicial del fluido y la temperatura que induce las fuerzas de flotación. O de otra forma, como la diferencia de temperatura entre paredes confinantes del fluido, en caso de que dicha diferencia se mantenga constante. En general, la temperatura adimensional se escribe como

$$\theta^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}. \quad (4.8)$$

Ahora, se obtienen las ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.11) en forma adimensional. Se elige para este efecto la combinación de variables adimensionales siguiente

$$x_i^* = \frac{x_i}{d},\;\; u_i^* = \frac{u_i d}{\kappa},\;\; t^* = \frac{\kappa t}{d^2},\;\; p^* = \frac{p d^2}{\rho_0 \kappa^2},\;\;\; \theta^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \tag{4.9}$$

con lo que se encuentra

$$\frac{\partial u_j^*}{\partial x_j^*} = 0, \tag{4.10}$$

$$\frac{Du_i^*}{Dt^*} = -\frac{\partial}{\partial x_i^*}\left(p^* + \frac{g d^3 x_3^*}{\kappa^2}\right) + Ra\, Pr\, \theta^*\, \delta_{i3} + Pr\, \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*}, \tag{4.11}$$

$$\frac{D\theta^*}{Dt^*} = \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*}, \tag{4.12}$$

donde se han definido dos parámetros adimensionales, el primero es el número de Prandtl, $Pr = \nu/\kappa$, que compara el coeficiente de difusividad de momentum con la difusividad térmica, y expresa una propiedad del fluido y no del flujo. El segundo es el número de Rayleigh, $Ra = \beta g d^3 (T_1 - T_0)/(\nu\kappa)$, que compara las fuerzas de flotación con las fuerzas viscosas y a diferencia del número de Prandtl, expresa una propiedad del flujo y no solamente del fluido.

Es posible escribir las ecuaciones (4.10)-(4.12) de forma más sencilla definiendo $P^* = p^* + g d^3 x_3^*/\kappa^2$ y dejando de lado los superíndices por claridad.

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \tag{4.13}$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + Ra\, Pr\, \theta\, \delta_{i3} + Pr\, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{4.14}$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{4.15}$$

4.2. Convección mixta

En el caso de la convección mixta, las variables adimensionales de posición y temperatura suelen elegirse de la misma forma que en el caso de la convección natural. Es decir $x_i^* = x/d$, donde d tiene el mismo sentido que en el caso anterior, y $\theta^* = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$, donde T_0

y T_1 conservan su significado.

Para la velocidad, a diferencia del caso anterior, existe una escala dada por alguna velocidad característica del flujo, o por un promedio característico de velocidades del flujo. Por ejemplo, si se tiene el flujo de un fluido en un canal, puede tomarse la velocidad máxima a la entrada del mismo como una escala de velocidades, también es válido elegir la velocidad promedio a la entrada del canal como una escala adecuada. En lo que sigue, se denotará como U a cualquiera de las posibles velocidades características mencionadas, con lo que la velocidad adimensional será

$$u_i^* = \frac{u_i}{U}.$$

A partir de las escalas de velocidad y longitud se puede construir la escala de tiempo como d/U, que es el tiempo en que se recorre la longitud d a la velocidad U. De esta forma el tiempo adimensional será

$$\tau^* = \frac{\tau}{(d/U)},$$

donde τ representa el tiempo en este caso.

Para la presión se tiene la escala $\rho_0 U^2$ y se escribe la presión adimensional como

$$p^* = \frac{p}{\rho_0 U^2},$$

donde de nuevo ρ_0 es la densidad del fluido a la temperatura T_0. A continuación se usan las siguientes variables adimensionales,

$$x_i^* = \frac{x_i}{d},\ \ u_i^* = \frac{u_i}{U}\ \ \tau^* = \frac{\tau}{(d/U)},\ \ p^* = \frac{p}{\rho_0 U^2},\ \ \theta^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \tag{4.16}$$

con las que las ecuaciones (2.9)-(2.11) toman la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_j^*}{\partial x_j^*} &= 0, && (4.17)\\
\frac{D u_i^*}{D\tau^*} &= -\frac{\partial}{\partial x_i^*}\left(p^* + \frac{gd}{U^2}\,x_3^*\right) + \frac{\beta g d(T_1 - T_0)}{U^2}\,\theta^*\,\delta_{i3} + \frac{\nu}{Ud}\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*}, && (4.18)\\
\frac{D\theta^*}{D\tau^*} &= \frac{\kappa}{Ud}\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*}. && (4.19)
\end{aligned}$$

Ahora, es posible definir tres parámetros adimensionales que permiten escribir de forma más clara las ecuaciones anteriores. El primero de ellos es el número de Reynolds, definido como $Re = Ud/\nu = \rho_0 Ud/\mu$, que compara las fuerzas de inercia con las fuerzas viscosas. El segundo es el número de Richardson, $Ri = \beta gd(T_1 - T_0)/U^2$, que compara la influencia de la convección natural con la de la convección forzada. Y el tercero es el número de Péclet, definido como $Pe = Ud/\kappa$ que es un cociente que compara el calor transferido por convección con aquel transferido por conducción.

Con los parámetros mencionados y la definición de P^* como $P^* = p^* + gdx_3^*/U^2$, se obtienen las siguiente ecuaciones, donde se han omitido los superíndices por claridad

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \tag{4.20}$$

$$\frac{Du_i}{D\tau} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + Ri\,\theta\,\delta_{i3} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{4.21}$$

$$\frac{D\theta}{D\tau} = \frac{1}{Pe}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}. \tag{4.22}$$

4.3. Producción de entropía adimensional

De la ec. (3.8) se obtiene la expresión para la producción de entropía en un fluido de Boussinesq, misma que está dada por

$$\sigma = \frac{k}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\mu}{2T}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2. \tag{4.23}$$

Si se usan las variables adimensionales (4.9) se puede definir la producción de entropía adimensional por flujos de calor

$$\sigma_q^* = \frac{\sigma_q d^2 T_0^2}{k(T_1 - T_0)^2} = \frac{1}{(1+\varepsilon\,\theta^*)^2}\left(\frac{\partial \theta^*}{\partial x_j^*}\right)^2 \tag{4.24}$$

donde $\varepsilon = (T_1 - T_0)/T_0$. Y la producción de entropía adimensional por efectos viscosos

$$\sigma_v = \frac{\sigma_v^* H^{*2} T_0^*}{k^*(T_1^* - T_0^*)} = \frac{Ec}{(1+\varepsilon\,\theta)}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2, \tag{4.25}$$

donde Ec es el número de Eckert, definido como $Ec = \nu\kappa / \left[2c_p(T_1 - T_0)d^2\right]$. Estos mismos resultados se pueden obtener usando las variables adimensionales (4.16).

Se hace notar que para los valores de los parámetros a estudiar en el presente trabajo, es posible despreciar la contribución de los efectos viscosos a la producción de entropía. Esto se debe a que el número de Eckert es de orden 10^{-10} para los fluidos más comunes en condiciones ambientales, lo que conduce a que la producción de entropía debida a los flujos de calor internos sea, por lo menos, seis órdenes de magnitud mayor que la producción de entropía debida a los efectos viscosos.

4.4. Número de Nusselt y cantidades promedio

El número de Nusselt es un número adimensional que permite medir la magnitud del flujo de calor en un proceso dado. Si se usan las variables adimensionales de temperatura y posición en la ley de Fourier se obtiene

$$q_j = -\frac{k}{L}(T_1 - T_0)\frac{\partial\theta}{\partial x_j^*}.$$

Ahora, se define el flujo de calor adimensional

$$q_j^* = \frac{Lq_j}{k(T_1 - T_0)} = -\frac{\partial\theta}{\partial x_j^*}.$$

Para conocer la magnitud de este flujo en un punto de una superficie S, se toma el producto punto del mismo con el vector normal a la superficie n_j. Se denota a este producto como número de Nusselt.

$$Nu = q_j^* n_j = -\frac{\partial\theta}{\partial x_j^*}\, n_j. \tag{4.26}$$

El número de Nusselt promedio sobre una superficie, será la integral del número de Nusselt sobre la misma

$$\bar{N}u = \int_A q_j^* n_j da = \int_A -\frac{\partial\theta}{\partial x_j^*}\, n_j da. \tag{4.27}$$

En el presente trabajo, diferentes cantidades promediadas espacialmente serán calculadas para obtener información acerca de las propiedades de los campos de velocidad y temperatura que resulten de la integración de las ecuaciones de movimiento. La primera de ellas es la temperatura promedio adimensional transversa $\tilde{\theta}(x,t)$, definida como

$$\tilde{\theta}(x,t) = \int_0^b \theta \, dy, \tag{4.28}$$

que es el promedio espacial de la temperatura adimensional en la dirección de la ordenada para una abscisa fija, en esta expresión b representa el valor hasta el que se realizará la integral. También resulta importante conocer el primer momento de la temperatura adimensional transversa (centroide térmico) $\tilde{y}(x,t)$, definido como

$$\tilde{y}(x,t) = \frac{\int_0^b y \, \theta \, dy}{\tilde{\theta}(x,t)}, \tag{4.29}$$

y que proporciona información sobre el valor de la ordenada alrededor del cual se registran los valores más altos de la temperatura adimensional.

Finalmente, se calculará el primer momento de la distribución de la velocidad vertical transversa (centroide másico) $\hat{y}(x,t)$, definido como sigue

$$\hat{y}(x,t) = \int_0^b y \, u \, dy, \tag{4.30}$$

que permitirá conocer la ordenada alrededor de la cual se encuentran los valores positivos más grandes de la velocidad en la dirección vertical y con ello conocer la ubicación y el sentido de giro de los vórtices encontrados. Para los casos que se estudiarán, se verá que la información proporcionada por el centroide térmico y el centroide másico en cuanto a la ubicación y sentido de giro de los vórtices es prácticamente la misma. Esto se debe al fuerte acoplamiento que existe entre el flujo de calor y el flujo de masa para los casos a estudiar.

La energía térmica en este sistema, puede representarse como el promedio de la temperatura adimensional en toda la cavidad, y se representa por $\bar{\theta}$,

$$\bar{\theta}(t) = \frac{\int_0^L \tilde{\theta} dx}{L}. \tag{4.31}$$

CAPÍTULO 5

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la presente tesis se estudiarán tres sistemas particulares, los cuales serán presentados a continuación junto a las correspondientes ecuaciones de movimiento y condiciones de frontera.

5.1. Planteamiento: cavidad rectangular cerrada con paredes aislantes

Se considera una cavidad rectangular con relación de aspecto grande comparada con la unidad, $L/H = 12$ donde L es la altura y H es el largo de la misma en presencia de la fuerza gravitacional. La cavidad está aislada adiabáticamente de los alrededores, excepto por dos porciones de longitud l situadas en las paredes laterales, a una distancia L_1 de la tapa, que se mantienen a una temperatura T_1 mayor que la temperatura inicial del fluido T_0, como se muestra en la Fig. 5.1. Para realizar el estudio se eligen los siguientes valores para los parámetros geométricos, $l = H$, $L_1 = 9H$ y suponemos que el flujo será bidimensional, en el entendido de que esta situación está limitada a los casos en los que la separación entre las paredes frontal y posterior es pequeña comparada con el largo H, pero no tan pequeña como para que los efectos viscosos provocados por dichas paredes sean muy notorios. Aún cuando se espera que la actividad de los vórtices dentro de la cavidad sea muy intensa, se considera que la suposición de bidimensionalidad se mantendrá, como puede verse que ocurre a partir de los ejemplos incluidos en Wayne [2011] y en las referencias allí dadas. Las suposiciones que se han hecho se pondrán a prueba en trabajo futuro.

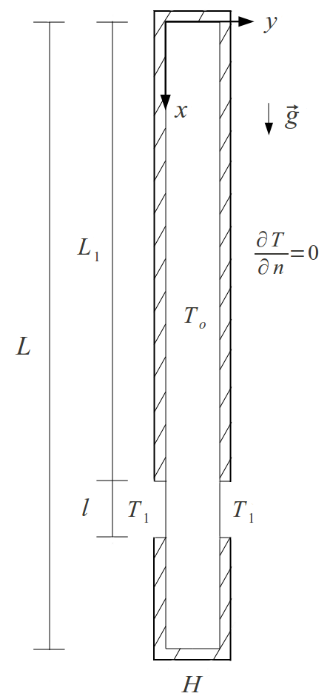

Figura 5.1: Representación esquemática de la cavidad.

Para definir las variables adimensionales, puede elegirse entre diferentes valores de la velocidad característica del sistema. Si se usa la velocidad inducida por la fuerza de flotación se obtiene un tiempo adimensional característico que depende de la fuerza de flotación misma, e induce una escala de tiempo diferente para cada número de Rayleigh. Por esta razón se prefiere el uso de la escala adimensional de velocidad inducida por la rapidez de difusión, que lleva a las variables adimensionales (4.9) y a las ecuaciones adimensionales (4.13)-(4.15), en este caso se toma el largo de la cavidad, H, como la escala de longitud y la diferencia $T_1 - T_0$ como la escala de temperatura.

Es necesario hacer notar en este momento que, debido a la elección del sistema coordenado ilustrado en la Fig. 5.1, el conjunto de ecuaciones (4.13)-(4.15) luce ligeramente diferente para el caso considerado y toma la forma

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \tag{5.1}$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - Ra\,\mathrm{Pr}\,\theta\,\delta_{i1} + \mathrm{Pr}\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{5.2}$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}. \tag{5.3}$$

La delta de Kronecker es δ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ por tratarse de una configuración bidimensional, la dirección vertical es la correspondiente a la de las abscisas y por la orientación de este eje se tiene que el signo de la fuerza de flotación se invierte respecto a la ecuación (4.14) y que la definición de P es $P = p - gH^3 x_1/\kappa^2$.

Las condiciones de frontera para las ecuaciones (5.1)-(5.3) son para este caso

$$\begin{aligned} u_i &= 0, \text{ en las paredes de la cavidad} \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} &= 0, \text{ en las paredes de la cavidad, excepto en:} \\ & x \in \left[\frac{L_1}{H}, \frac{L_1 + l}{H}\right],\ y = 0 \text{ y } x \in \left[\frac{L_1}{H}, \frac{L_1 + l}{H}\right],\ y = 1 \\ \theta &= 1, \text{ en } x \in \left[\frac{L_1}{H}, \frac{L_1 + l}{H}\right],\ y = 0 \text{ y } x \in \left[\frac{L_1}{H}, \frac{L_1 + l}{H}\right],\ y = 1. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Y las condiciones iniciales a $t = 0$ son $u_i = 0$, $\theta = 0$ y $P = 0$.

5.2. Planteamiento: cavidad rectangular cerrada con paredes conductoras

Se considera una cavidad con las mismas características geométricas que la correspondiente a la Fig. 5.1, compuesta por paredes conductoras de espesor finito h, como se muestra en la Fig. 5.2.

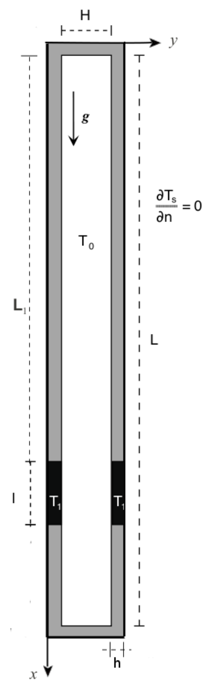

Figura 5.2: Representación esquemática de la cavidad con paredes conductoras de espesor finito.

Las ecuaciones de movimiento para el sistema mostrado son las ecs. (5.1)-(5.3), pero con la adición de una ecuación de balance de energía para la pared sólida. A continuación se presentan las ecuaciones adimensionales adecuadas con las condiciones de frontera correspondientes, en la obtención de las siguientes ecuaciones, se ha hecho uso de las variables adimensionales presentadas en la ec. (4.9).

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \tag{5.5}$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - Ra\,\mathrm{Pr}\,\theta\,\delta_{i1} + \mathrm{Pr}\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{5.6}$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial y^2}\right). \tag{5.8}$$

con las siguientes condiciones de frontera

$$u_i = 0, \;\text{ donde }\; i = 1,2, \;\; \theta_s = \theta, \quad \text{en la interfaz sólido-fluido,} \tag{5.9}$$

$$K\frac{\partial \theta_s}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial n} \quad \text{en la interfaz sólido-fluido,} \tag{5.10}$$

$$\theta_s = 1, \quad \text{en: } x \in \left[\frac{L_1+h}{H}, \frac{L_1+h+l}{H}\right], \quad y \in \left[0, \frac{h}{H}\right] \quad \text{y} \tag{5.11}$$

$$x \in \left[\frac{L_1+h}{H}, \frac{L_1+h+l}{H}\right], \quad y \in \left[\frac{h}{H}+1, \frac{2h}{H}+1\right]$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial n} = 0 \quad \text{en la parte externa de las paredes.} \tag{5.12}$$

En las ecuaciones anteriores, θ_s representa la temperatura en la pared conductora, $K = k_s/k$ es el cociente entre las conductividades térmicas del sólido y del fluido, mientras que $\alpha = \kappa_s/\kappa$ es el cociente entre las difusividades térmicas correspondientes.

5.3. Planteamiento: canal vertical rectangular

Por último, se analizará un sistema geométricamente similar a los presentados anteriormente. Se considera un canal rectangular vertical, cuyas paredes laterales son aislantes adiabáticos, excepto por dos porciones localizadas de forma simétrica, que se mantienen a una temperatura mayor que la temperatura inicial del fluido. En la entrada del canal se impone un flujo uniforme de temperatura constante, mientras que a la salida, se supone que el flujo no dependerá de la coordenada longitudinal. Un esquema del canal se muestra en la Fig. 5.3.

Los parámetros geométricos elegidos para este sistema son $L_1 + L_2 + L_3 = 12H$, $L_1 = L_3$ y $L_2 = H$. Las ecuaciones de gobierno para este caso se obtienen mediante el uso de las ecs. (4.16), con la magnitud de la velocidad a la entrada del canal como escala de velocidad, el ancho del canal como escala de longitud y la diferencia de temperatura global como escala

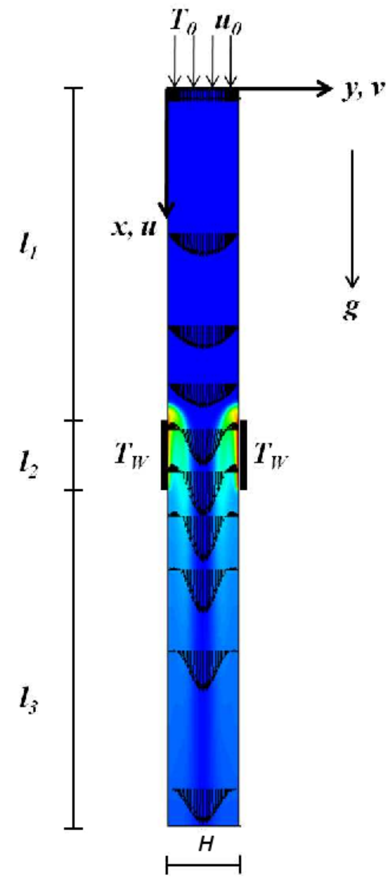

Figura 5.3: Representación esquemática del canal vertical.

para la temperatura normalizada, las ecuaciones resultantes son las siguientes

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \tag{5.13}$$

$$\frac{Du_i}{D\tau} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - Ri\,\theta\,\delta_{i1} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{5.14}$$

$$\frac{D\theta}{D\tau} = \frac{1}{Pe}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}. \tag{5.15}$$

donde τ representa el tiempo adimensional. Las ecuaciones (5.13)-(5.15) deben resolverse con las condiciones de frontera siguientes

$$
\begin{aligned}
&u_j = 0, \text{ sobre las paredes del canal,}\\
&\partial\theta/\partial y = 0, \text{ sobre las paredes del canal, excepto en}\\
&x \in \left[\frac{l_1}{H}, \frac{l_1 + l_2}{H}\right], \ y = 0 \ \text{ y } \ x \in \left[\frac{l_1}{H}, \frac{l_1 + l_2}{H}\right], \ y = 1\\
&\theta = 1, x \in \left[\frac{l_1}{H}, \frac{l_1 + l_2}{H}\right], \ \ y = 0 \ \text{ y } x \in \left[\frac{l_1}{H}, \frac{l_1 + l_2}{H}\right], \ y = 1\\
&p = u - 1 = v = \theta = 0, \text{ en la entrada del canal,}\\
&v = \partial u/\partial x = \partial\theta/\partial x = 0 \text{ en la salida del canal.}
\end{aligned}
$$

Las condiciones de frontera para la presión pueden calcularse a través de

$$
P(x, y_w) = \int_0^x \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=y_w} dx - Ri \int_0^x \theta(x, y_w) dx,
$$

donde y_w representa el valor de y en las paredes. La dinámica del sistema será representada por el número de Nusselt promedio $\bar{N}u$, los puntos de estancamiento del flujo, denotados por x_s y el centroide másico, denotado en este caso por y_p.

CAPÍTULO 6

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Existen diversos métodos para resolver las ecuaciones (4.13)- (4.15), o en su caso (4.20)-(4.22), muchos de ellos pueden encontrarse en el libro de Chung [2002]. En el presente trabajo se utiliza el algoritmo SIMPLE, desarrollado por Patankar *et al.* durante la década de 1970, que se expone de manera muy clara en el libro escrito por Patankar [1980], que a pesar de haber sido desarrollado hace casi 40 años, es uno de los métodos de solución más utilizados en nuestros días. Esto se debe a que, a lo largo de los años ha proporcionado resultados confiables utilizando recursos de computo accesibles en tiempos razonables. A continuación se hace una descripción del algoritmo SIMPLE, así como de los códigos desarrollados para su implementación.

El nombre SIMPLE significa en inglés, *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations* y es un algoritmo de naturaleza iterativa que consta de siete pasos fundamentales, que son los siguientes:

1. Proponer un campo arbitrario de presión $\tilde{p}$.

2. Resolver las ecuaciones discretizadas de Navier-Stokes para obtener campos de veloci-

dades $\tilde{u}_i$.

3. Resolver la ecuación de corrección para la presión p' (Misma que se obtiene por medio de la ecuación de continuidad) a partir de $\tilde{u}_i$.

4. Corregir el campo de presión $\tilde{p}$ con p' y obtener el nuevo campo de presión $p = \tilde{p} + p'$.

5. Corregir, mediante la ecuación de continuidad y el campo de presión corregido p, los campos de velocidades $\tilde{u}_i$ y encontrar nuevos campos de velocidades u_i.

6. Resolver las ecuaciones discretizadas para otras cantidades físicas, por ejemplo la temperatura o concentraciones de especies químicas, en caso de que afecten al flujo. En caso contrario, es preferible resolver estas ecuaciones una vez que se ha declarado convergencia para las componentes de la velocidad del flujo.

7. Tratar al nuevo campo de presión p como un nuevo campo propuesto $\tilde{p}$ y regresar al segundo paso. Es necesario repetir este procedimiento hasta que se obtenga convergencia en la solución.

En el apéndice se dará una descripción más detallada de los métodos de discretización utilizados, así como de las ecuaciones de corrección introducidas por el algoritmo.

6.1. Implementación del algoritmo

Se desarrollaron códigos en lenguaje Fortran 90 para resolver las ecuaciones discretizadas de movimiento de un fluido de Boussinesq. Las ecuaciones algebraicas son del tipo de la ecuación (A.16) y fueron derivadas como se detalla en el apéndice.

Los códigos resuelven las ecuaciones algebraicas por el algoritmo de matrices tridiagonales TDMA y un barrido línea por línea. Primero se realiza el barrido en la dirección de x y posteriormente en la dirección de y. Los campos de velocidad, presión y temperatura se construyen de manera iterativa. Se siguió el algoritmo SIMPLE y se declaró convergencia en cada paso de tiempo cuando se cumplió el criterio de convergencia $b < 10^{-10}$ para el término fuente de masa de la ecuación para la corrección de la presión, dado por la ec. (B.3).

Siguiendo el esquema de mallas escalonadas, que se encuentra descrito en Patankar [1980] y que evita cálculos incorrectos en el campo de presión, se utilizaron tres mallas distintas, cada una con 151 nodos en la dirección vertical y 76 nodos en la dirección horizontal, generadas de acuerdo a las siguientes funciones de distribución

$$x = x_c \left(1 - \frac{\sinh(m_x\{\bar{x} - B\})}{\sinh(m_x B)}\right) \tag{6.1}$$

$$y = \frac{1}{2} + m_y \left(\bar{y} - \frac{1}{2}\right) + \frac{(1 - m_y) erf(k_y\{\bar{y} - 1/2\})}{2\, erf(k_y/2)}, \tag{6.2}$$

con

$$B = \frac{1}{2\, m_x} \ln \frac{1 + (e^{m_x} - 1)(x_c/L)}{1 + (e^{-m_x} - 1)(x_c/L)}.$$

Donde x_c es el punto alrededor del cual se obtendrá un espaciamiento más fino entre las líneas de la malla y toma el valor $x_c = 9.5$. $\bar{x}$ y $\bar{y}$ representan variables uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 1]$, erf es la función de error, mientras que m_x, m_y y k_y son parámetros que controlan la densidad de la malla. En el presente estudio se utilizó $m_x = 4$, $m_y = 0.45$ y $k_y = 5$. Las funciones de distribución utilizadas proporcionan una malla finamente espaciada cerca de las paredes laterales en la dirección horizontal y cerca de la posición de las fuentes de calor en la dirección vertical. Que es donde se espera obtener los gradientes de temperatura y velocidad más intensos. Una descripción interesante y completa de acerca de la obtención de estas funciones se encuentra en Tannehill et al. [1997].

El número de nodos utilizado se eligió de manera tal que las soluciones obtenidas cumplieran con ser independientes de la malla utilizada. Los cálculos se extendieron hasta un tiempo adimensional de $t = 800(Ra\,Pr)^{-1/2}$ para los casos de número de Rayleigh 10^4, 10^5, 5×10^5. Para los casos de número de Rayleigh 5×10^4 y 10^6 se realizaron cálculos hasta un tiempo adimensional de $t = 4000(Ra\,Pr)^{-1/2}$. El incremento de tiempo adimensional utilizado para realizar los cálculos es $\Delta t = 5 \times 10^{-4}(Ra\,Pr)^{-1/2}$.

Para confirmar que la herramienta desarrollada es confiable, se compararon los resultados obtenidos con la misma con aquellos que se encuentran reportados en la literatura para el problema clásico de convección natural en una cavidad bidimensional cuadrada, cuya pared lateral izquierda se encuentra a una temperatura alta $\theta = 1$, y la derecha a una temperatura baja $\theta = 0$, mientras que el resto se encuentran bajo un aislamiento adiabático. Se consideraron tres diferentes valores para el número de Rayleigh, 10^4, 10^5 y 10^6. Para este problema, se utilizaron mallas no-uniformes de 40 nodos en cada una de las direcciones para el primer y segundo casos y de 50 nodos en cada dirección para el tercero. El resultado encontrado y la comparación correspondiente para el número de Nusselt promedio sobre la pared lateral de temperatura alta se muestran en la Tabla 6.1.

Referencia	$Ra = 10^4$	10^5	10^6
Presente	2.247	4.549	8.817
De Vahl Davis [1983]	2.243	4.519	8.799
Le Quéré [1991]	–	–	8.825
AlAmiri et al. [2009]	–	4.522	8.826

Tabla 6.1: Número de Nusselt promedio para el problema de comparación encontrado en el presente estudio y aquellos reportados en la literatura.

Para comprobar la independencia de malla de los resultados y la precisión de la formulación temporal, se realizaron comparaciones entre los cálculos para el caso de $Ra = 10^6$ con diferentes mallas y diferentes incrementos de tiempo adimensional para el caso de la cavidad cerrada. Se compararon los resultados de la malla de 151×76 nodos con incremento de tiempo adimensional de $\Delta t = 5 \times 10^{-4}(Ra\,Pr)^{-1/2}$, los resultados de la misma malla con un incremento de tiempo más pequeño $\Delta t = 1 \times 10^{-4}(Ra\,Pr)^{-1/2}$, los resultados de una malla más fina de 200×150 nodos y el incremento de tiempo adimensional $\Delta t = 5 \times 10^{-4}(Ra\,Pr)^{-1/2}$ y los resultados de la malla fina con el incremento de tiempo pequeño. Los resultados para el número de Nusselt y los ajustes exponenciales correspondientes se muestran en la Fig. 6.1.

El decaimiento del número de Nusselt es consistente en todos los casos, lo puede verse a partir de los ajustes incluidos, todos los cuales tienen un coeficiente $R^2 > 0.97$ y una diferencia porcentual máxima entre ellos de menos de 6 %. Al comparar los espectros de potencia calculados a partir de los datos de la Fig. 6.1, se encuentra un acuerdo exacto entre los tres primeros casos y un excelente acuerdo para el cuarto. Esto confirma que las curvas mostradas son diferentes realizaciones del mismo fenómeno, y en consecuencia, se considera que las mallas y la formulación temporal utilizadas son adecuadas y proporcionan resultados confiables.

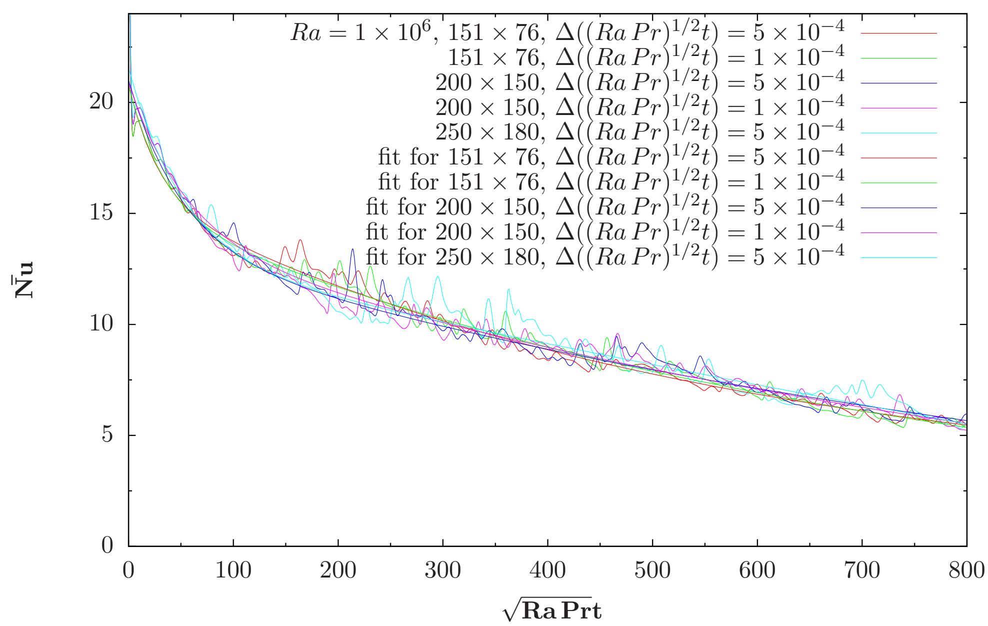

Figura 6.1: Comparación entre los resultados encontrados con diferentes tamaños de malla y diferentes incrementos de tiempo para $Ra = 10^6$.

CAPÍTULO 7

RESULTADOS

7.1. Cavidad rectangular cerrada con paredes aislantes

Se realizaron cálculos numéricos para seis diferentes valores del número de Rayleigh ($Ra = 10^3$, 10^4, 5×10^4, 10^5, 5×10^5 y 10^6), con un valor fijo para el número de Prandtl ($Pr = 7$) y con valores fijos del conjunto de parámetros geométricos ($L = 12H$, $L_1 = 10H$ y $l = H$). El valor del número de Prandtl se eligió de manera que representa cercanamente el caso correspondiente al agua.

$Ra = 10^3$

La Fig. 7.1 muestra la evolución temporal del campo de temperatura para $Ra = 10^3$ en nueve instantes de tiempo adimensional diferentes. Para este número de Rayleigh relativamente bajo, el proceso de difusión es suficientemente intenso para producir, después de una etapa inicial, isotermas casi horizontales que se desplazan hacia arriba y hacia abajo con el tiempo. La capa térmica inferior es estable y evoluciona siguiendo un proceso puramente difusivo. La capa térmica superior evoluciona siguiendo un proceso ligeramente más rápido debido a las fuerzas de flotación que se inducen. No se encuentra ninguna inestabilidad de forma espontánea y se puede suponer que el proceso de transferencia de calor es puramente

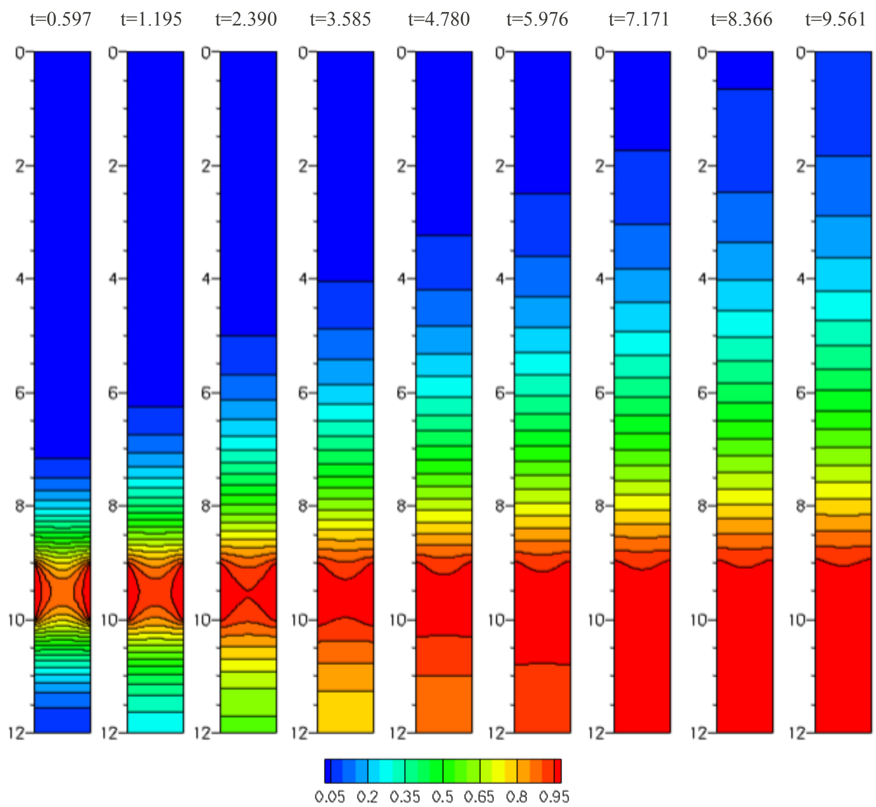

Figura 7.1: Evolución del campo de temperatura para $Ra = 10^3$ en diferentes valores del tiempo adimensional.

difusivo, como puede verse a partir de la Fig. 7.2, donde se muestra la temperatura promedio adimensional transversa $\tilde{\theta}(x,t)$, dada por la ecuación (4.28), para cinco distintas posiciones en el eje vertical $x = 0$, 1.87, 4.90, 8.18 y 9.11 como una función del tiempo adimensional t. Con propósitos de comparación, se ha incluido en la gráfica un proceso difusivo semi-infinito dado por la función complementaria de error, representado con símbolos cerrados. El origen para el proceso difusivo ($\theta = 1$), se fijó a una distancia $x = a$ de tal forma que la temperatura adimensional calculada de manera analítica coincida con la temperatura promedio adimensional transversa obtenida numéricamente para $x = 9.11$ en el tiempo inicial. Se puede apreciar un proceso suave en toda la extensión de la cavidad, y cabe resaltar que el acuerdo encontrado para la solución numérica y la correspondiente aproximación analítica es excelente.

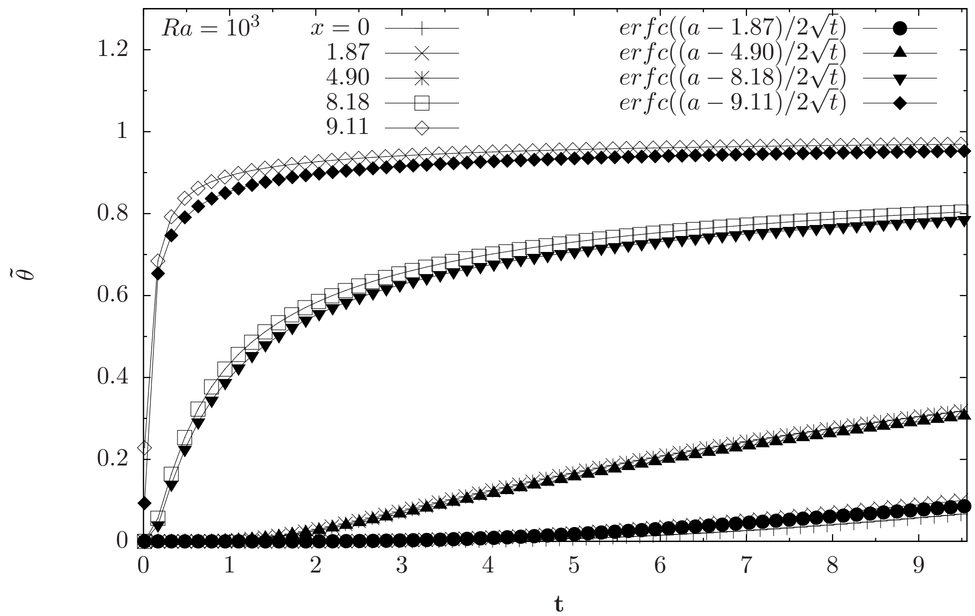

Figura 7.2: Temperatura promedio adimensional transversa para $Ra = 10^3$ como función del tiempo (símbolos abiertos). Los símbolos cerrados representan un proceso puramente difusivo semi-infinito. El origen del proceso difusivo ($\theta = 1$) se localiza en $x = a$ de tal forma que la temperatura coincida con la temperatura promedio adimensional transversa obtenida para $x = 9.11$ en el tiempo inicial.

$Ra = 10^4$

Para un valor más alto del número de Rayleigh, $Ra = 10^4$, el proceso es muy semejante al anterior en la etapa inicial. Dos regiones de recirculación se desarrollan frente a la sección superior de las placas calientes, desplazando el fluido de temperatura mayor a regiones más altas de la cavidad en la zona cercana a las paredes y permitiendo el descenso del fluido de temperatura menor alrededor del eje de simetría vertical como puede verse en la Fig. 7.3. La altura de la capa térmica superior crece más rápidamente que en el caso anterior, y si se denota a esta altura adimensional, medida desde el borde superior de las placas calientes, como $h_B(t)$ es posible definir un número de Rayleigh basado en esta longitud que cumple con la siguiente relación

$$Ra_B = Rah_B^3.$$

Este nuevo número de Rayleigh se ha definido de la misma forma que aquel que se utiliza en el problema de Rayleigh-Bénard, y por esta razón se le considera como el número de

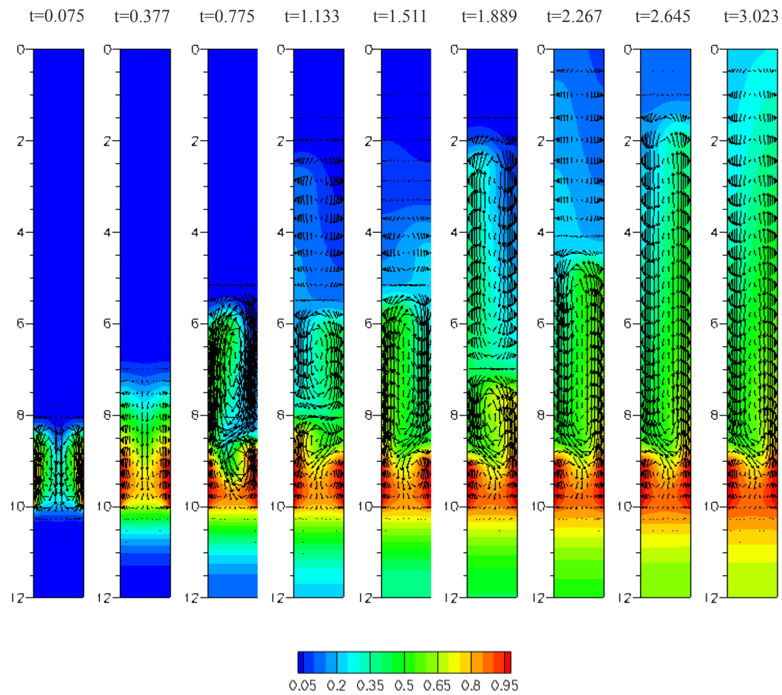

Figura 7.3: Evolución del campo de temperatura para $Ra = 10^4$ en diferentes instantes de tiempo adimensional. Las dos primeras imágenes muestran el incremento de la altura adimensional de la capa térmica superior $h_B(t)$, el número de Rayleigh apropiado en este caso es el que se define en base a dicha altura y es $Ra_B = Rah_B^3$. Cuando el valor de Ra_B alcanza el valor crítico del número de Rayleigh para el número de onda adimensional $2\pi h_B$, se presenta una inestabilidad muy similar a la que ocurre en el problema de Rayleigh-Bénard.

Rayleigh apropiado para realizar el análisis de este caso. El número de onda adimensional en la dirección horizontal basado en esta longitud es $k_B = 2\pi h_B$, y sustituyendo h_B se encuentra la siguiente relación

$$Ra = Ra_B \left(\frac{2\pi}{k_B}\right)^3,$$

donde Ra_B puede obtenerse a partir de la curva de estabilidad neutra. Para este caso particular, el rompimiento de la simetría ocurre cuando $h_B(t) \approx 2$, $Ra_B \approx 8 \times 10^4$ y el número de onda adimensional en la dirección horizontal es $k_B = 12$. A pesar de que las condiciones no son las mismas que en el problema clásico de Rayleigh-Bénard (isotermas planas, distribución lineal de la temperatura y velocidad nula), la configuración inestable puede ser aproximadamente reproducida. Cuando Ra_B alcanza el valor crítico, la inestabilidad de tipo

Rayleigh-Bénard se dispara y rompe la simetría del flujo, creando una celda de convección que gira en el sentido de las manecillas del reloj. La animación que se incluye en la Fig. 7.3 muestra la evolución del campo de temperatura y de velocidad en este caso.

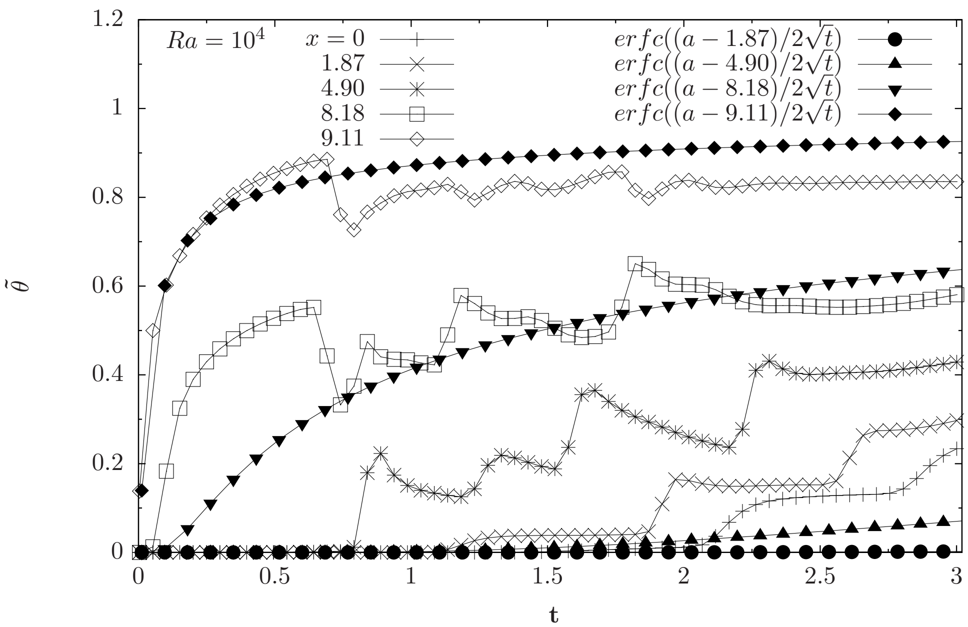

Figura 7.4: Temperatura promedio adimensional transversa para $Ra = 10^4$ como función del tiempo (símbolos abiertos). Los símbolos cerrados representan un proceso puramente difusivo semi-infinito. El origen del proceso difusivo ($\theta = 1$) se localiza en $x = a$ de tal forma que la temperatura coincida con la temperatura promedio adimensional transversa obtenida para $x = 9.11$ en el tiempo inicial. La rapidez de propagación térmica se puede inferir a partir de los picos correspondientes en las posiciones $x = 8.18$ y $x = 4.90$, siendo $6.69\,\kappa/H$.

La simetría del flujo se pierde en un tiempo adimensional de aproximadamente $t \approx 0.6$, como puede verse a partir de la curva que corresponde a $x = 8.18$ en la Fig. 7.5. Posteriormente se desarrolla una celda de convección muy intensa por encima de las dos regiones de recirculación originales, misma que lleva fluido de alta temperatura hacia arriba cerca de una de las paredes (la izquierda) a una altura alrededor de $x \approx 6$. El fluido con temperatura menor desciende cerca de la pared opuesta (la derecha) con un momento axial grande y desplaza al vórtice original cercano a dicha pared hacia abajo, mientras el vórtice original cercano a la pared izquierda contribuye al desarrollo de la región de recirculación superior proporcionando fluido de alta temperatura. La combinación de los efectos de los dos roles descritos propician un incremento en la temperatura del vórtice deprimido (derecho), y por ende un aumento en las fuerzas de flotación en esta zona. Como resultado de este incremento, la región de recirculación deprimida se desprende de la placa cercana, desplazando hacia arriba a la celda superior. Este proceso se repite después de relativamente poco tiempo, con una nueva región de recirculación desprendiéndose desde la placa izquierda y desplazando a las celdas superiores hacia arriba. Finalmente, se registra un último desprendimiento desde la placa derecha y se producen dos vórtices principales de gran extensión que cubren casi toda la cavidad. Este proceso de desprendimiento de vórtices, es el medio por el cual se transfiere energía térmica hacia la parte alta de la cavidad, para este número de Rayleigh.

Se realizaron cálculos hasta un tiempo adimensional de $t = 3.023$ para este caso. La Fig. 7.4 ilustra la temperatura promedio adimensional transversa, como una función del tiempo adimensional t, para diferentes valores de la coordenada longitudinal. De nueva cuenta se ha incluido un proceso puramente difusivo con símbolos cerrados para efectos de comparación. La curva superior se obtuvo en una posición $x = 9.11$, la cual se encuentra ligeramente debajo del borde superior de las placas calientes. En la etapa inicial, la temperatura promedio en esta posición es mayor que la que se obtiene con el proceso difusivo. Sin embargo, después de la inestabilidad y el rompimiento de simetría, la temperatura promedio decrece abruptamente, lo que indica que la energía térmica es trasladada rápidamente hacia arriba por la convección. Los episodios de desprendimiento de vórtices pueden ser visualizados como los picos en la temperatura promedio en la posición $x = 8.18$. En total se presentan cuatro picos diferentes, uno que se produce por el rompimiento de simetría y los tres restantes que se producen por los desprendimientos de vórtices descritos arriba. Estos mismos picos se manifiestan en la temperatura promedio para posiciones más cercanas a la tapa de la cavidad, y se puede inferir la velocidad de propagación térmica a partir de ellos, siendo $6.69\kappa/H$, exactamente la misma para los tres episodios. La Fig. 7.5(a) muestra el centroide térmico, $\tilde{y}(x,t)$, como una función del tiempo adimensional para el mismo número de Rayleigh, $Ra = 10^4$, y para las mismas posiciones longitudinales utilizadas anteriormente. Cuando $\tilde{y}(x,t) = 0.5$, significa que la distribución de temperatura es simétrica, y en este caso, que el flujo es simétrico ya que el flujo de masa y el flujo de calor están fuertemente acoplados. De la gráfica puede observarse que el rompimiento de simetría ocurre a un tiempo adimensional cercano a $t = 0.6$, y que se manifiesta en primera instancia a una altura $x = 8.18$, mayor que la posición del borde

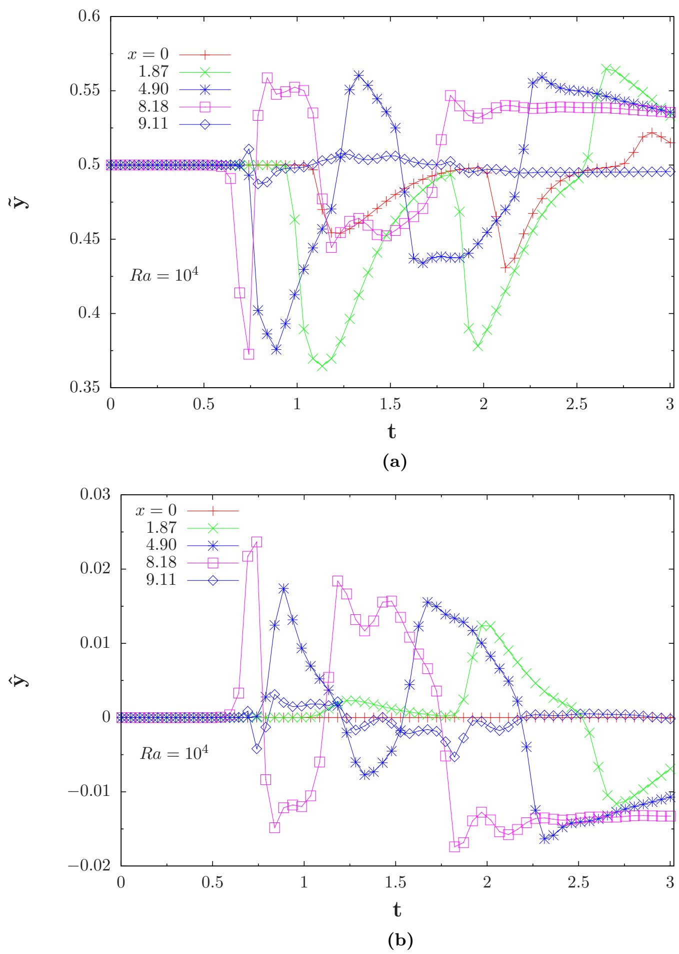

Figura 7.5: **(a)** Centroide térmico para $Ra = 10^4$ como función del tiempo adimensional. La inestabilidad aparece a $t \approx 0.6$. Los valores positivos de $\tilde{y}(x,t) - 0.5$ indican vórtices que giran en dirección contraria a las manecillas del reloj. Los episodios de desprendimientos de vórtices se muestran claramente al cruzar la línea $\tilde{y}(x,t) = 0.5$. **(b)** Centroide másico como función del tiempo adimensional. Los valores negativos de $\hat{y}(x,t)$ representan vórtices que giran en dirección de las manecillas del reloj. Los episodios de desprendimientos de vórtices se muestran claramente al cruzar la línea $\hat{y}(x,t) = 0$.

superior de las placas calientes. En una posición x fija, los valores positivos de $\tilde{y}(x,t) - 0.5$ indican que la temperatura más alta se registra a la derecha del eje de simetría vertical de la

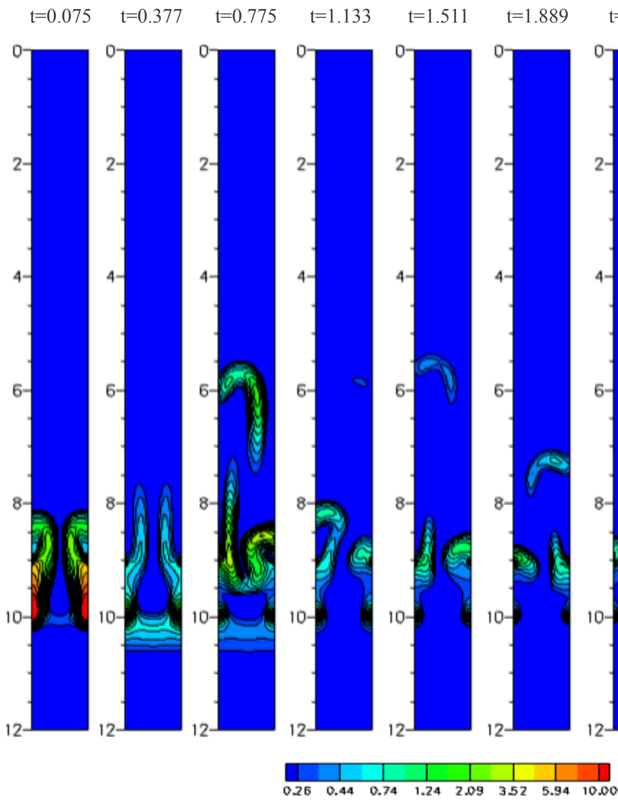

Figura 7.6: Evolución del campo de producción de entropía para $Ra = 10^4$ en diferentes tiempos adimensionales.

cavidad y por tanto las velocidades ascendentes en la dirección vertical (con signo negativo por la elección de los ejes) también se encontraran en esta zona, lo que indica la presencia de un vórtice que gira en dirección contraria a las manecillas del reloj, de la misma forma, los valores negativos de $\tilde{y}(x,t) - 0.5$ indican la presencia de un vórtice que gira en sentido horario, y los episodios de desprendimientos de vórtices se muestran claramente al cruzar la línea $\tilde{y}(x,t) = 0.5$. Para las etapas finales de la simulación, una celda de gran tamaño que rota en sentido horario y cubre la mayor parte de la cavidad aparece, dando valores de $\tilde{y}(x,t) - 0.5$ mayores que cero. La misma información en cuanto al rompimiento de la simetría, los desprendimientos de vórtices y la ubicación y dirección de giro de las regiones de recirculación es proporcionada por el centroide másico, $\hat{y}(x,t)$, como puede verse en la Fig. 7.5(b), donde se gráfica dicha cantidad como función del tiempo adimensional para diferentes posiciones en la dirección vertical. Como ya se ha mencionado, el acuerdo entre ambas cantidades se debe al fuerte acoplamiento de los flujos de calor y de masa que existe en el sistema considerado para $Ra \geq 10^4$.

La evolución del campo de producción de entropía se muestra en la animación incluida en la Fig. 7.6. Inicialmente se crean dos regiones de importante generación de entropía que son anchas y simétricas, localizadas en la zona cercana a las placas calientes, las cuales extienden su tamaño mientras las regiones de recirculación se mueven en la dirección vertical. Al romperse la simetría, se crean regiones de producción de entropía de forma alternada, que siguen a los episodios de desprendimiento de vórtices, indicando las regiones en las que el flujo de calor es más fuerte. Como consecuencia de la difusión de calor hacia abajo, se crea una débil zona de producción de entropía debajo de las fuentes de calor, misma que desaparece con el tiempo. Al aumentar la temperatura en toda la cavidad, la zonas de producción de entropía comienzan a desaparecer o a volverse menos intensas. Se hace notar que la contribución a la producción de entropía total debida a los efectos viscosos es por lo menos de seis órdenes de magnitud menor que la que se debe a los flujos de calor internos.

$Ra = 5 \times 10^4$

Para un número de Rayleigh mayor, $Ra = 5 \times 10^4$, el mecanismo convectivo de transferencia de calor cambia cualitativamente. La animación que se incluye en la Fig. 7.7 muestra la evolución del campo de temperatura para este número de Rayleigh. Dos celdas alargadas y simétricas se desarrollan rápidamente frente a las placas calientes. El borde superior de estas regiones de recirculación alcanza una posición cercana a $x = 6$. El fluido de alta temperatura se desplaza hacia arriba en las regiones cercanas a las paredes, mientras que el fluido de baja temperatura desciende por la sección central de la cavidad. Lo anterior crea una estructura acanalada, en la que se registran esfuerzos cortantes importantes debido a los flujos encontrados. El fluido frío que se encuentra en la parte central de la cavidad produce una perturbación en las celdas, lo que hace que una de ellas suba ligeramente más alto que la otra, disparando una inestabilidad de tipo Kelvin-Helmholtz que da una forma senoidal a la estructura acanalada. Al continuar la amplificación de las perturbaciones, se forman múltiples vórtices de tamaño similar al ancho de la cavidad que giran en sentidos encontrados de forma alternada. Esta serie de vórtices oscila y se dispersa con el tiempo. Después de un proceso de acoplamiento y recombinación de las regiones de recirculación,

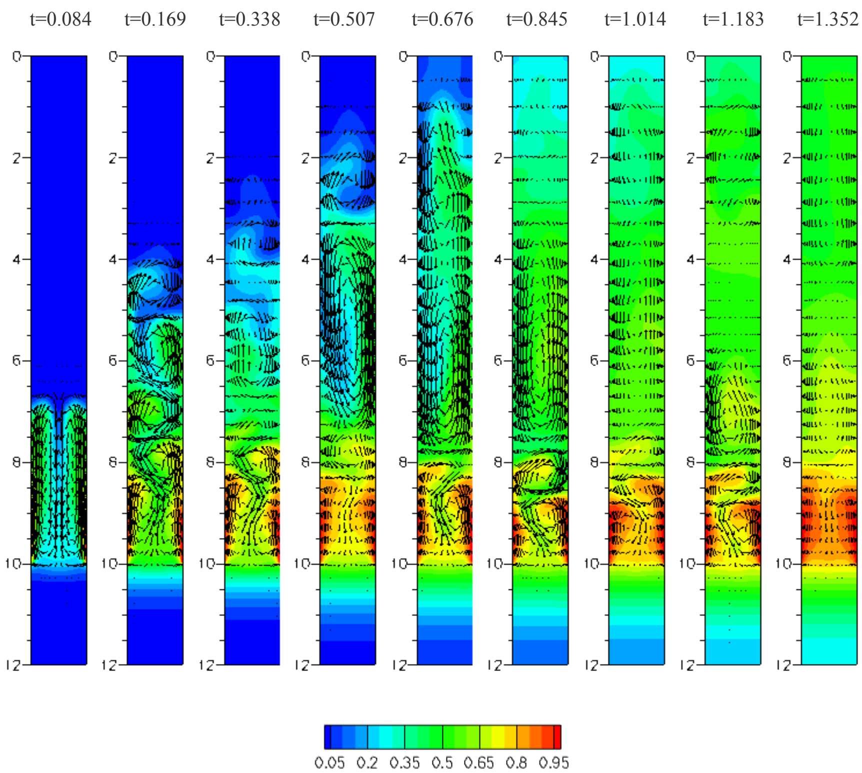

Figura 7.7: Evolución del campo de temperatura para $Ra = 5 \times 10^4$ en diferentes instantes de tiempo adimensional. Dos celdas simétricas y alargadas se desarrollan rápidamente. El fluido caliente se desplaza hacia arriba en las regiones cercanas a las paredes, el fluido frío desciende por la sección central de la cavidad creando una estructura acanalada. En esta región se observan esfuerzos cortantes importantes debido a los flujos encontrados que dan lugar a un mecanismo de inestabilidad de tipo Kelvin-Helmholtz. El proceso de rodear-engullir se observa en $t = 0.507$.

el vórtice superior, que está formado por fluido de relativamente alta temperatura, envuelve fluido de baja temperatura y lo lleva rápidamente hacia la sección baja de la cavidad, siguiendo las ramas que descienden de la serie de vórtices intermedios. Este tipo de episodios son nombrados como procesos de rodear-engullir, y ocurre tres veces en el presente caso.

Las Figs. 7.8 y 7.9 muestran, respectivamente, la temperatura promedio adimensional transversa $\tilde{\theta}(x,t)$ y el centroide térmico $\tilde{y}(x,t)$ como funciones del tiempo adimensional para diferentes posiciones en el eje vertical. Se observa, a partir de la Fig. 7.8, que el retraso de tiempo necesario para producir un incremento notable en la temperatura de la parte superior

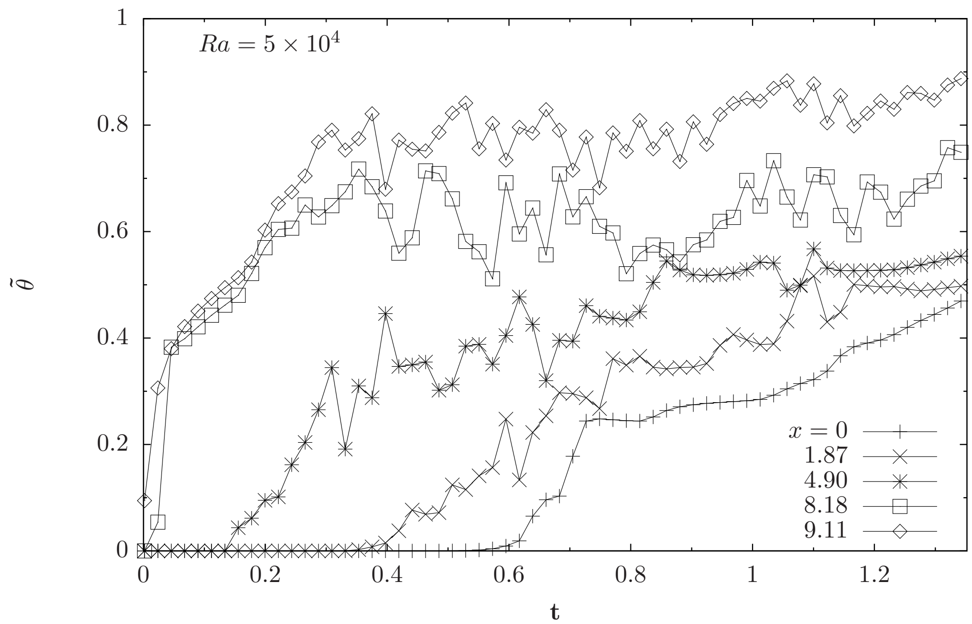

Figura 7.8: Temperatura promedio adimensional transversa para $Ra = 5 \times 10^4$ como función del tiempo adimensional. El retraso relativo de tiempo para producir un incremento notable en la temperatura de la parte alta de la cavidad, disminuye drásticamente en comparación con el del caso anterior ($Ra = 10^4$).

de la cavidad, disminuye drásticamente para este valor del número de Rayleigh (5×10^4) en comparación con el estudiado en el caso anterior (10^4). Esto se debe al aumento en las fuerzas de flotación en el fluido, que inducen un mecanismo de transferencia de calor más eficiente que el encontrado anteriormente. También, debido al proceso de rodear-engullir, la temperatura promedio adimensional transversa para valores grandes de x (cerca de las placas calientes) muestra oscilaciones más pronunciadas que las encontradas en el caso anterior. Esto indica que el fluido que se mueve hacia abajo desde la zona alta de la cavidad, alcanza la región alrededor de $x = 9$ a una temperatura suficientemente baja como para tener un impacto importante en la temperatura promedio a esta altura. Lo anterior promueve flujos de calor muy intensos en esta zona y por ende se obtiene una producción de entropía considerable debida a estos flujos de calor. La amplitud de estas oscilaciones disminuye para valores menores de x y desaparecen en la tapa de la cavidad, a $x = 0$. La Fig. 7.9 muestra que la inestabilidad, o rompimiento de la simetría ocurre a una posición cercana a $x = 5$ a un tiempo adimensional de $t \approx 0.13$. También puede apreciarse, a partir de esta figura, que existe una gran actividad de las regiones de recirculación creadas a lo largo de la cavidad (cambios de sentido de giro y oscilaciones).

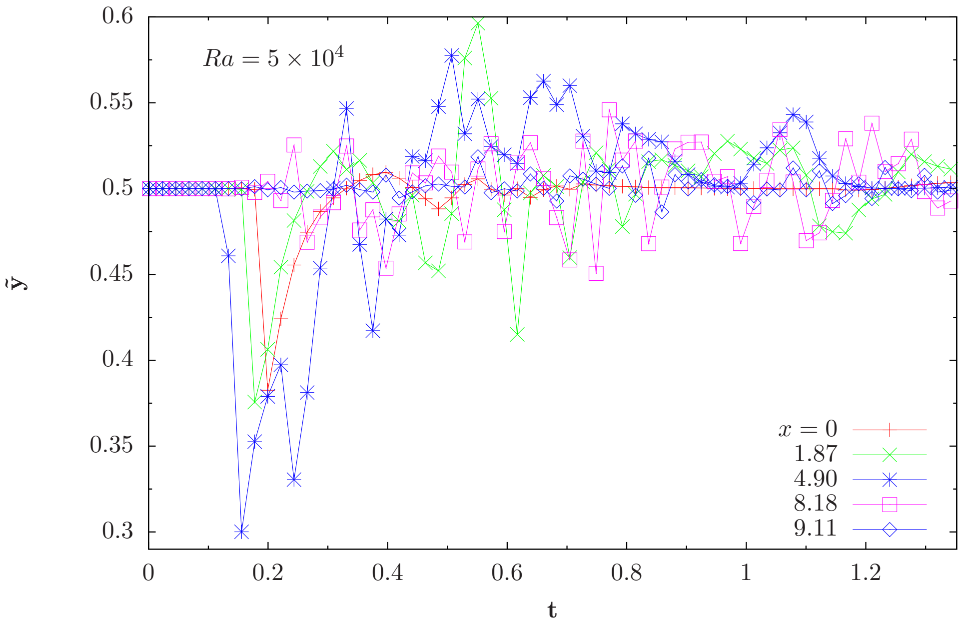

Figura 7.9: Centroide térmico para $Ra = 5 \times 10^4$ como función del tiempo adimensional para diferentes valores de x. La inestabilidad, o rompimiento de simetría se produce a $t \approx 0.13$. En una posición dada, los valores positivos de $\tilde{y}(x,t) - 0.5$ representan vórtices que giran en dirección contraria a las manecillas del reloj. Los episodios de desprendimiento de vórtices se muestran claramente al cruzar la línea $\tilde{y}(x,t) = 0.5$.

El espectro de potencia normalizado, definido como la transformada de Fourier normalizada de la función de auto correlación de $\tilde{y}(x = 8.18, t)$ (curva de cuadros abiertos en la Fig.7.9), se muestra en la Fig. 7.10 como función del número de Strouhal, que es la frecuencia adimensional dada por $St = f^* H^{*2}/\alpha^*$, donde f^* es la frecuencia en forma dimensional. Se registran tres picos principales con magnitudes similares. El pico A se debe a los episodios de baja frecuencia relacionados con el proceso de rodear-engullir, el pico B refleja la traslación de las regiones de recirculación hacia arriba, mientras que el pico C evidencia el carácter oscilante de estos vórtices danzantes. Para valores del tiempo adimensional $t > 1.352 = 800(Ra\,Pr)^{-1/2}$, el proceso continua con algunos desprendimientos de vórtices de menor intensidad, hasta que finalmente alcanza un estado principalmente difusivo, como lo indica el decaimiento suave del número de Nusselt promedio mostrado en la Fig. 7.17.

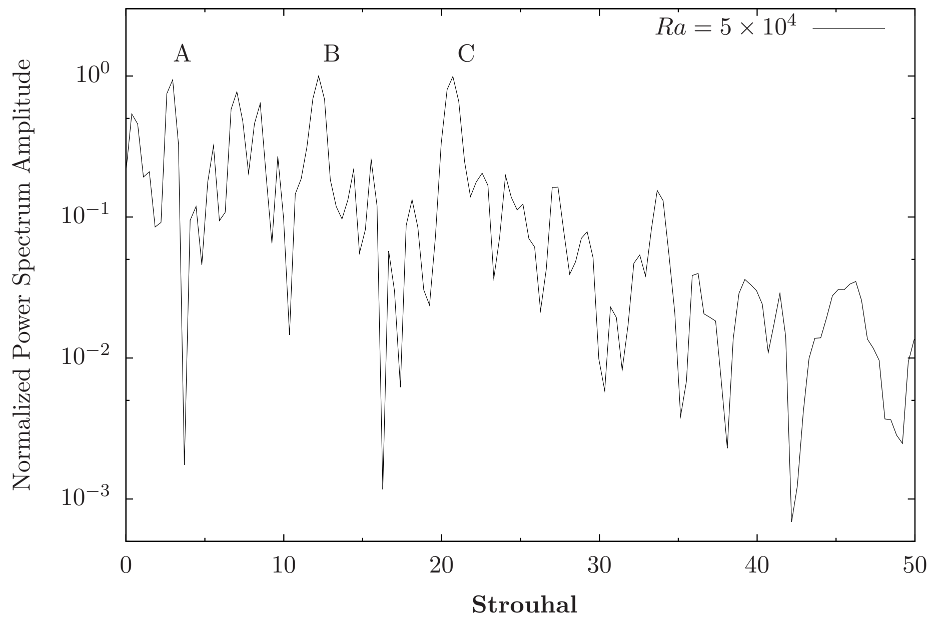

Figura 7.10: Espectro de potencia normalizado de $\tilde{y}$ en $x = 8.18$ para $Ra = 5 \times 10^4$. El pico A se debe a los episodios de baja frecuencia relacionados con el proceso de rodear-engullir, el pico B refleja la traslación de las regiones de recirculación hacia arriba, mientras que el pico C evidencia el carácter oscilante de estos vórtices danzantes.

La evolución del campo de producción de entropía se muestra en la animación que se incluye en la Fig. 7.11. Inicialmente se crean dos regiones alargadas, angostas y simétricas de intensa producción de entropía debidas a la presencia de fluido de baja temperatura que se mueve hacia abajo, muy cerca de la capa delgada de fluido de temperatura mayor que asciende cerca de las placas calientes, estas regiones aumentan su longitud con el tiempo hasta llegar a $x \approx 6$. Cuando la inestabilidad se dispara, estas regiones grandes de producción de entropía se rompen en regiones más pequeñas de acuerdo a los vórtices creados por la amplificación de la perturbación en la estructura acanalada descrita más arriba. Conforme el tiempo transcurre, las regiones de producción de entropía importantes se mueven hacia la parte alta de la cavidad, siguiendo los desprendimientos de vórtices y señalando claramente las zonas de flujo de calor más importante, como en el caso anterior. Sin embargo, las regiones de producción de entropía en este caso son considerablemente más delgadas e intensas que aquellas correspondientes a $Ra = 10^4$. Como se mencionó anteriormente, el proceso de rodear-engullir lleva fluido de baja temperatura a una zona de temperatura mayor en un intervalo

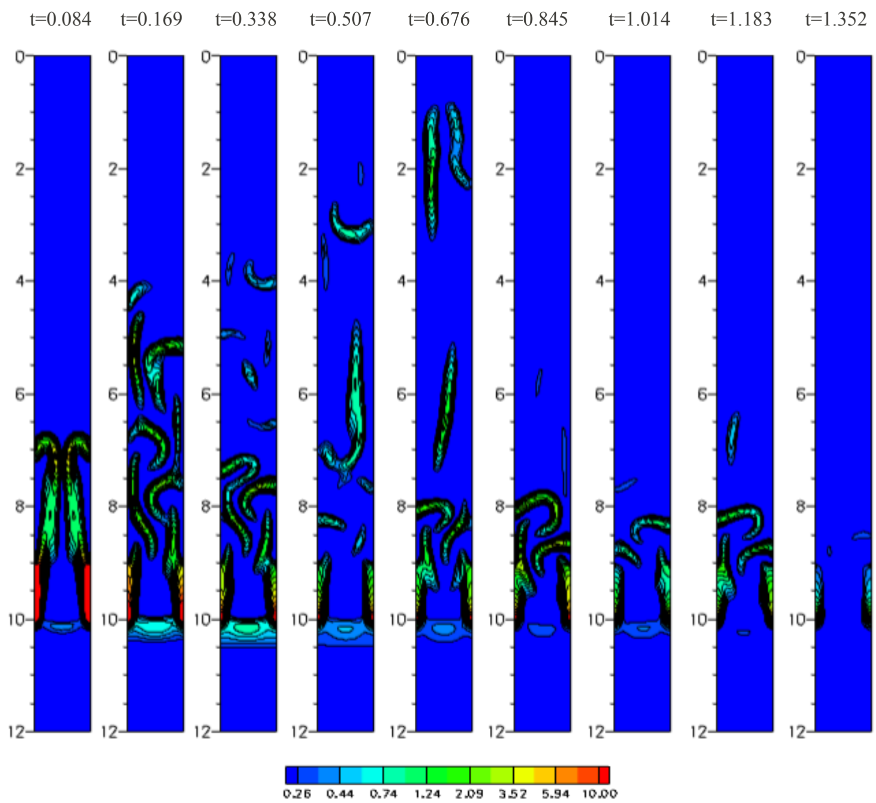

Figura 7.11: Evolución del campo de producción de entropía para $Ra = 5 \times 10^4$ en diferentes valores del tiempo adimensional.

de tiempo adimensional muy corto, esto provoca la aparición de regiones de importante producción de entropía cerca de las placas calientes cuando se presentan estos episodios. Conforme aumenta la temperatura promedio en la cavidad, los flujos de calor se vuelven menos intensos y por tanto las regiones de producción de entropía importantes comienzan a desvanecerse.

$Ra = 10^5$

Para este número de Rayleigh, dos capas límite térmicas intensas y simétricas se desarrollan cerca de las placas calientes, las cuales son deflectadas hacia el centro de la cavidad debido a la corriente de fluido de baja temperatura que se mueve hacia abajo, y cuyo movimiento se induce para cumplir con la ecuación de continuidad. Se crean entonces dos

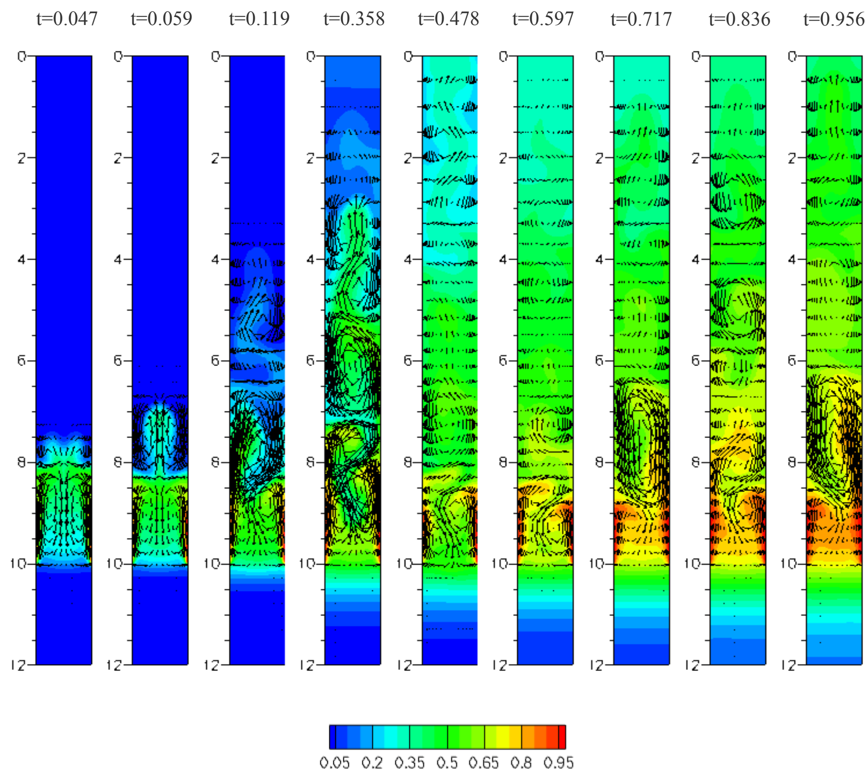

Figura 7.12: Evolución del campo de temperatura para $Ra = 10^5$ en diferentes valores del tiempo adimensional. Dos regiones de recirculación fuertes se desarrollan, una frente a cada placa caliente, colisionan y crean una burbuja térmica. Después de relativamente poco tiempo, la burbuja se mueve hacia arriba y es aislada por el fluido de baja temperatura que fluye hacia abajo cerca de las paredes. La burbuja sube rápidamente, generando una estela ondulada que finalmente rompe la simetría del flujo. El proceso de rodear-engullir puede observarse a $t = 0.358$.

regiones de recirculación, una en frente de cada placa caliente, como en los casos anteriores. Sin embargo, debido a la intensidad de las fuerzas de flotación, las regiones de recirculación colisionan y crean un plano de estancamiento por encima de ellas, aislando el fluido en la parte superior de la cavidad. Rápidamente se desarrollan dos nuevas regiones de recirculación, una a cada lado del eje de simetría vertical de la cavidad, con fluido de alta temperatura ascendiendo por la parte central de la cavidad y fluido de baja temperatura descendiendo cerca de las paredes, es decir, se crea una burbuja térmica en la que las fuerzas de flotación aumentan rápidamente. Después de relativamente poco tiempo adimensional, la burbuja se desplaza hacia arriba, y el fluido que desciende cerca de las paredes la aísla del fluido de alta temperatura que se concentra en el plano de estancamiento. De esta manera, la burbuja se desprende y sube rápidamente, dando lugar a una estela ondulada que rompe la simetría en una posición de $x \approx 8$ y a un tiempo adimensional $t \approx 0.60$, como puede verse en la Fig. 7.14. Se producen series de vórtices danzantes, los cuales se mueven hacia arriba siguiendo la estela sinuosa creada por la burbuja, el fluido de alta temperatura que es transportado hacia arriba mediante estos vórtices (pluma térmica) alcanza rápidamente la tapa de la cavidad. El proceso de rodear-engullir se presenta más frecuentemente que en el caso anterior ($Ra = 5 \times 10^4$) y es el mecanismo de intercambio de calor más importante. Todos estos fenómenos pueden observarse en la animación incluida en la Fig. 7.12.

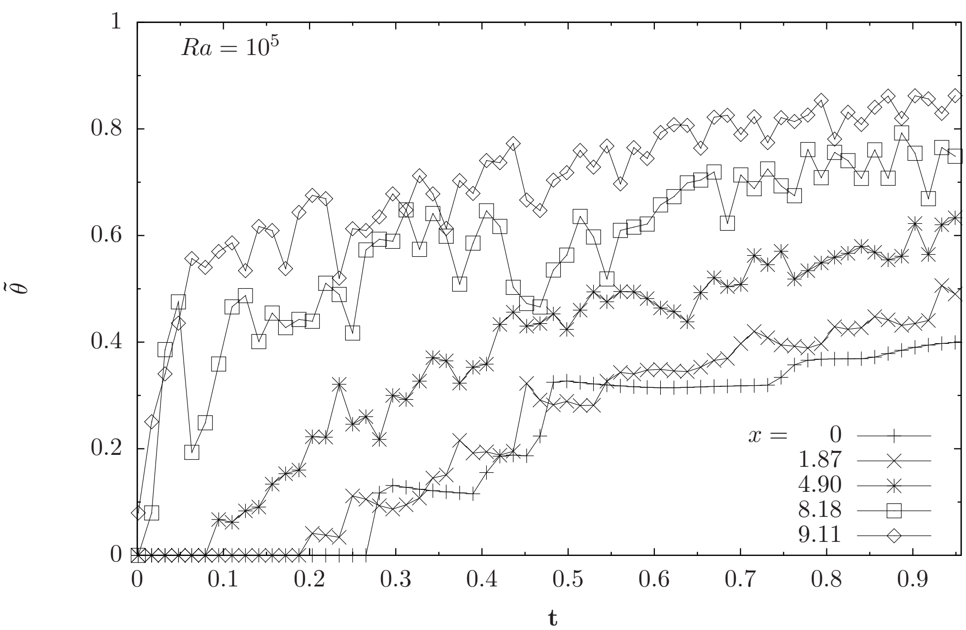

Figura 7.13: Temperatura promedio adimensional transversa para $Ra = 10^5$ como función del tiempo adimensional. El tiempo requerido para producir un aumento considerable de la temperatura en la parte superior de la cavidad disminuye considerablemente respecto de los dos casos anteriores. Puede observarse, claramente, que hay momentos en los que la temperatura es mayor en la tapa de la cavidad que en una posición ligeramente más baja.

Las Figs. 7.13 y 7.14 muestran la temperatura promedio adimensional transversa $\tilde{\theta}(x,t)$ y el centroide térmico $\tilde{y}(x,t)$, como funciones del tiempo adimensional, para diferentes valores de la coordenada vertical x. De nuevo, el tiempo requerido para producir un aumento im-

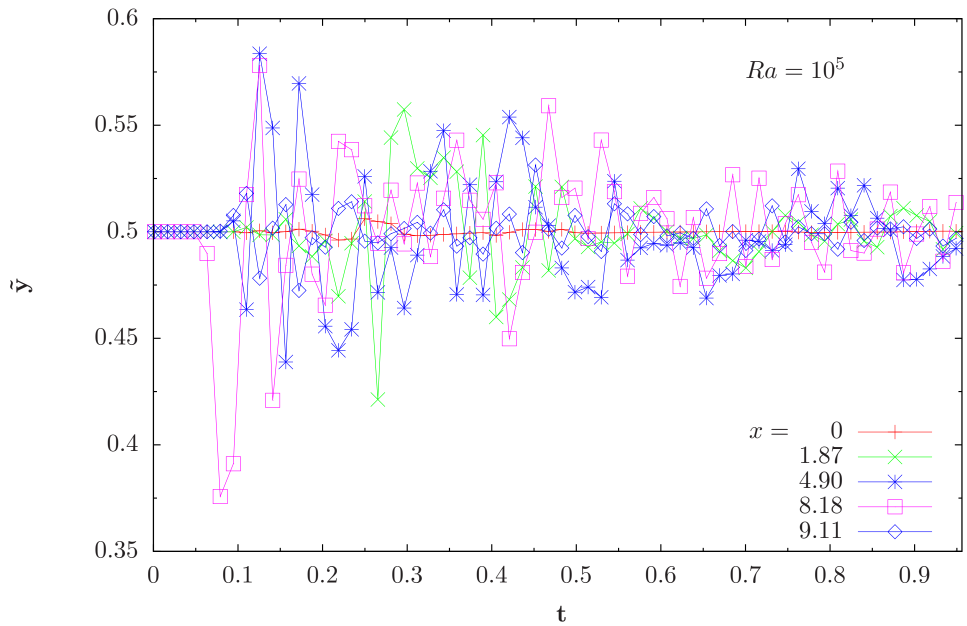

Figura 7.14: Centroide térmico para $Ra = 10^5$ como función del tiempo adimensional para diferentes posiciones verticales. La inestabilidad o rompimiento de simetría ocurre a $t \approx 0.06$. En una posición dada, los valores positivos de $\tilde{y}(x,t) - 0.5$ representan vórtices que rotan en sentido contrario a las manecillas del reloj. Los desprendimientos de vórtices se muestran como los cruces de la curva con la línea $\tilde{y}(x,t) = 0.5$.

portante de la temperatura en la parte superior de la cavidad disminuye considerablemente respecto de los dos casos anteriores. Es de llamar la atención que, en algunos instantes de tiempo, la temperatura del fluido en la tapa de la cavidad, $x = 0$, es mayor que la que se encuentra en una región ligeramente más baja $x = 1.87$, lo que puede observarse claramente en la Fig. 7.13. También puede verse que el número de desprendimiento de vórtices aumenta de forma considerable respecto de los casos anteriores a partir de la Fig. 7.14. El espectro de potencia normalizado del centroide térmico, provee información acerca de la dinámica de las regiones de recirculación para este caso y se muestra en la Fig.7.15. En esta gráfica se observa dicho espectro para dos posiciones, en la tapa de la cavidad $x = 0$ y en una región cercana a las placas calientes $x = 8.18$. Los eventos de baja frecuencia registrados en $x = 0$ ($St \simeq 10$) están relacionados con la llegada de las plumas térmicas a la parte alta de la cavidad. El pico más importante para $x = 8.18$ ($St \simeq 22$) se relaciona con los desprendimientos de vórtices, que representan como se transporta energía térmica hacia arriba en la cavidad.

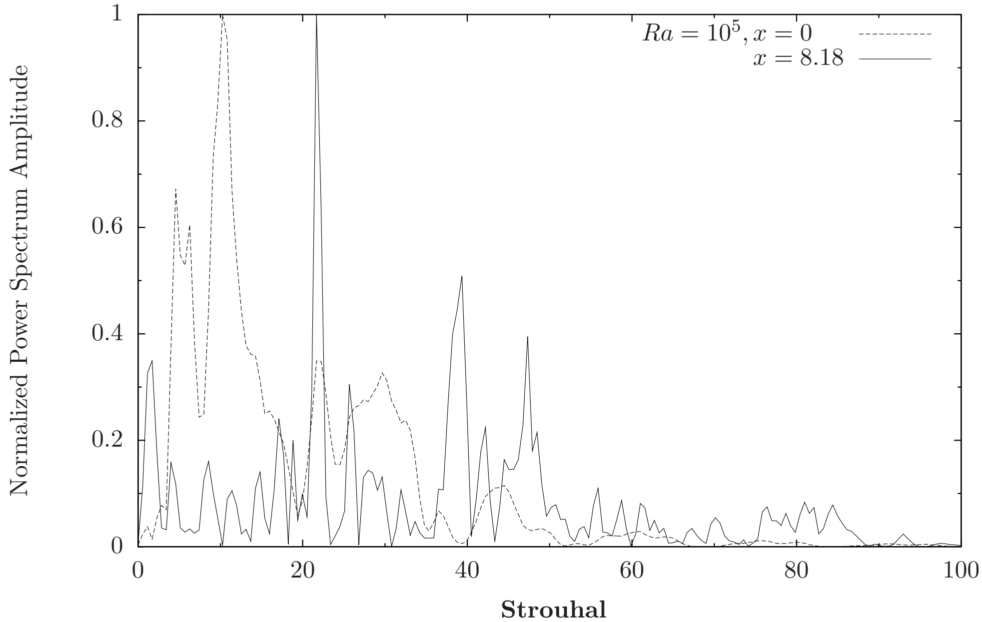

Figura 7.15: Espectro de potencia normalizado de $\tilde{y}$ para $Ra = 10^5$ en dos posiciones, $x = 0$ y $x = 8.18$. Los eventos de baja frecuencia registrados en $x = 0$ están relacionados con la llegada de las plumas térmicas a la parte alta de la cavidad. El pico más importante para $x = 8.18$ se relaciona con los desprendimientos de vórtices, que representan como se transporta energía térmica hacia arriba en la cavidad.

El campo de producción de entropía para este caso se muestra en la animación incluida en la Fig. 7.16. A pesar de que las regiones de producción de entropía más importantes son inicialmente simétricas como en los casos anteriores, su forma es muy diferente de aquellas obtenidas previamente, pues en este caso son aún más angostas y más intensas. Pueden observarse dos capas de alta producción de entropía que corresponden a las capas límite formadas inicialmente, también puede verse claramente la deflección de las mismas, la formación del plano de estancamiento y de la burbuja térmica a través de sus bordes resaltados, donde fluido de alta temperatura está en contacto con fluido de baja temperatura. Después del rompimiento de simetría, se forman regiones de generación de entropía con una estructura agusanada en la parte baja de la cavidad. Con el tiempo dichas estructuras se mueven hacia arriba, y cuando se presenta un episodio del proceso rodear-engullir, se conectan formando estructuras más largas que muestran el camino seguido por el fluido de baja temperatura en su viaje descendente. Al aumentar la temperatura promedio en toda la cavidad, las regiones de intensa producción de entropía se debilitan o desaparecen.

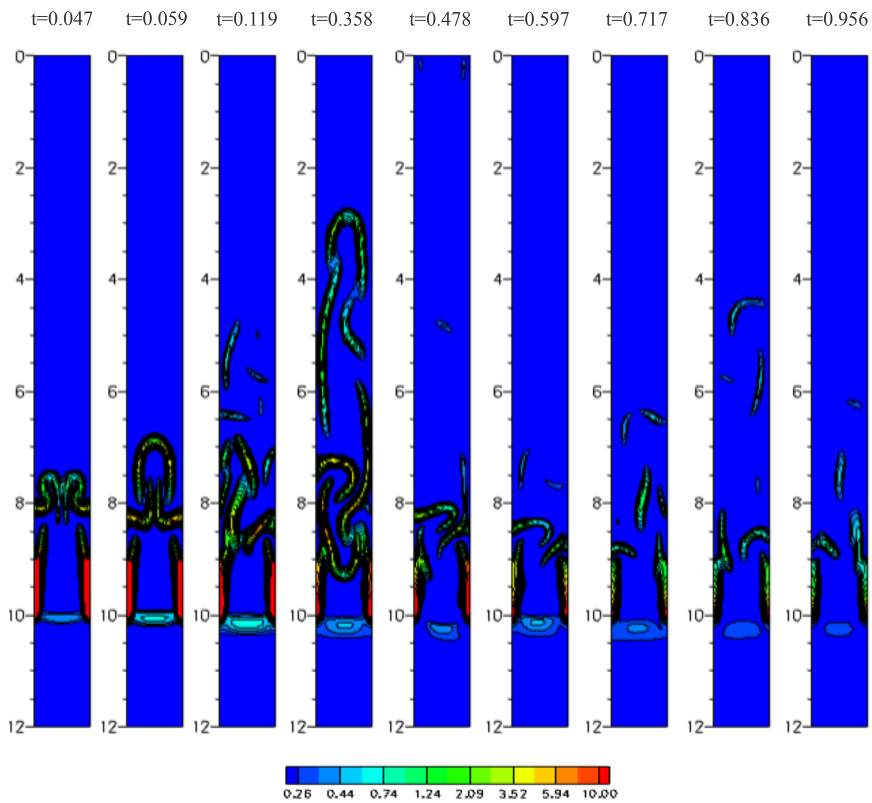

Figura 7.16: Evolución del campo de producción de entropía para $Ra = 10^5$ en diferentes instantes de tiempo adimensional.

$Ra = 5 \times 10^5$ y $Ra = 10^6$

Para valores más altos del número de Rayleigh, hasta 10^6, el comportamiento encontrado es similar al que se obtiene para 10^5, pero con capas límite más delgadas en la etapa inicial. El rompimiento de simetría se produce por la colisión de las regiones de recirculación creadas a partir de dichas capas límite, y el principal mecanismo de transferencia de calor sigue siendo el proceso de rodear-engullir. La dinámica de los vórtices para estos casos difiere de la encontrada con $Ra = 10^5$ únicamente en la frecuencia de desprendimiento de vórtices y en el número de eventos del proceso de rodear-engullir encontrados. Las zonas de producción de entropía se vuelven más fuertes y más localizadas que en los casos con número de Rayleigh menor. Como antes, siguen la dinámica de los vórtices y resaltan las regiones de mezcla intensa.

Respuestas globales

En la Fig. 7.17, se muestra el número de Nusselt promedio sobre ambas placas calientes, como función del tiempo adimensional convectivo $(Ra\,Pr)^{1/2}t$, para diferentes valores del número de Rayleigh. En todos los casos se observa que el decaimiento que se obtiene no es suave, sino que presenta fluctuaciones alrededor de un valor medio. Estas fluctuaciones pueden ser producidas por el disparo de inestabilidades, desprendimiento de vórtices y el proceso de rodear-engullir. Resulta notable observar que el número de Nusselt promedio sigue casi la misma tendencia en ambas placas para todo el intervalo de tiempo adimensional estudiado. También es importante resaltar que existe una respuesta diferente entre los casos de $Ra = 5 \times 10^4$ y $Ra = 10^5$, que se debe principalmente a la fuerte influencia de los términos difusivos para los números de Rayleigh más bajos. Del mismo modo, se observa que en los casos en los que las simulaciones se extendieron hasta tiempos adimensionales de $t = 4000(Ra\,Pr)^{-1/2}$, es decir los correspondientes a $Ra = 5 \times 10^4$ y 10^6, el decaimiento del número de Nusselt promedio después de $t = 800(Ra\,Pr)^{-1/2}$ se vuelve más suave y lento. Aún existen múltiples fluctuaciones debidas a desprendimientos de vórtices y, en el caso de $Ra = 10^6$, al proceso de rodear-engullir pero finalmente el proceso de transferencia de calor alcanza una etapa principalmente difusiva.

Resulta de gran interés la dependencia de la evolución temporal de la energía térmica en la cavidad, representada por $\bar{\theta}(t)$, respecto del número de Rayleigh. Esto se muestra en la Fig. 7.18, donde puede observarse que, en una fase inicial, la temperatura adimensional promedio en toda la cavidad aumenta de manera similar para todos los valores del números de Rayleigh, lo que corresponde al pequeño lapso de tiempo en el que la difusión tiene una influencia considerable. Al transcurrir el tiempo, la convección domina el flujo y la temperatura adimensional promedio aumenta más rápidamente para valores mayores de número de Rayleigh, como era esperado.

Es en extremo interesante que puede obtenerse una curva que refleja un comportamiento

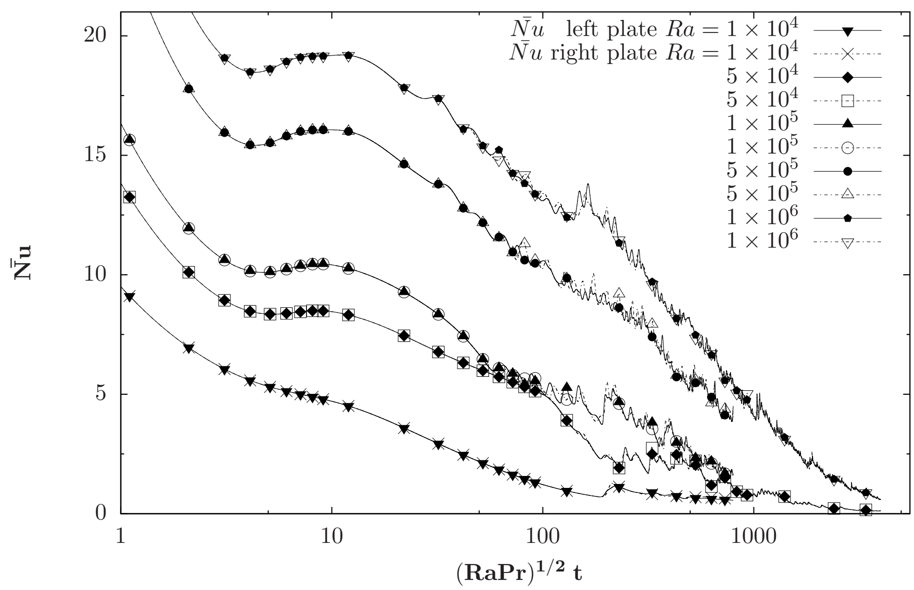

Figura 7.17: Número de Nusselt promedio como función del tiempo adimensional convectivo para diferentes valores del número de Rayleigh.

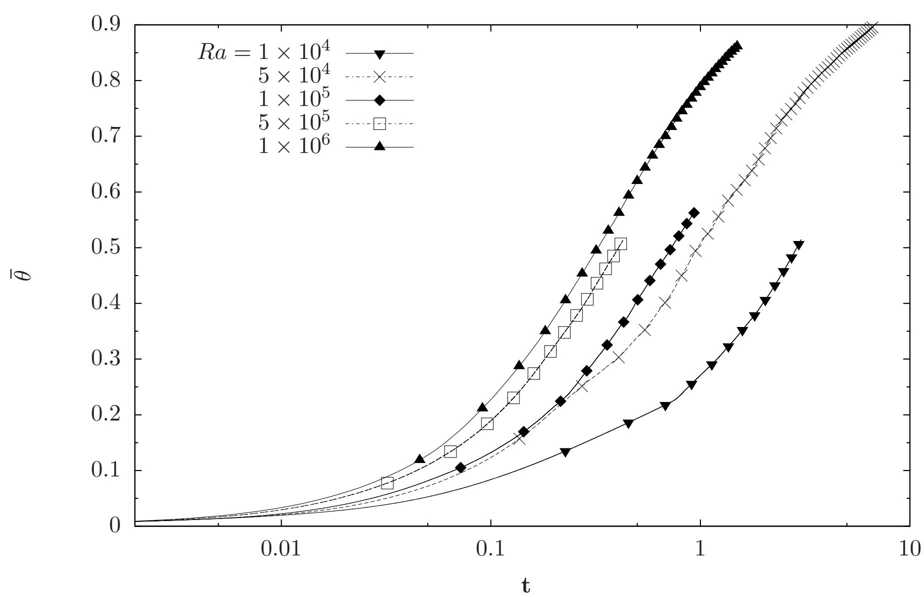

Figura 7.18: Temperatura adimensional promedio en toda la cavidad como función del tiempo adimensional para diferentes valores del número de Rayleigh.

universal para el valor medio de la producción de entropía total. Esto se logra al definir la entropía total reducida

$$\bar{\sigma}_{qr} = \frac{1}{(Ra\,\mathrm{Pr})^{1/2}} \int_0^L \int_0^1 \sigma_q dy dx, \tag{7.1}$$

esta cantidad se muestra en la Fig. 7.19 como una función del tiempo adimensional convectivo $(Ra\,Pr)^{1/2}t$. En esta imagen, el carácter universal de la producción de entropía total reducida se observa claramente, siendo prácticamente independiente del número de Rayleigh. Existen discrepancias sobre todo para números de Rayleigh relativamente bajos, pero el valor medio puede ajustarse muy bien por la expresión

$$\bar{\sigma}_{qr} = \bar{\chi}_r \simeq 4.04 \times 10^{-5} + 1.39 \times 10^{-3} \exp\left[-\frac{(Ra\,Pr)^{1/2}t}{510.12}\right], \tag{7.2}$$

excepto por una corta etapa inicial.

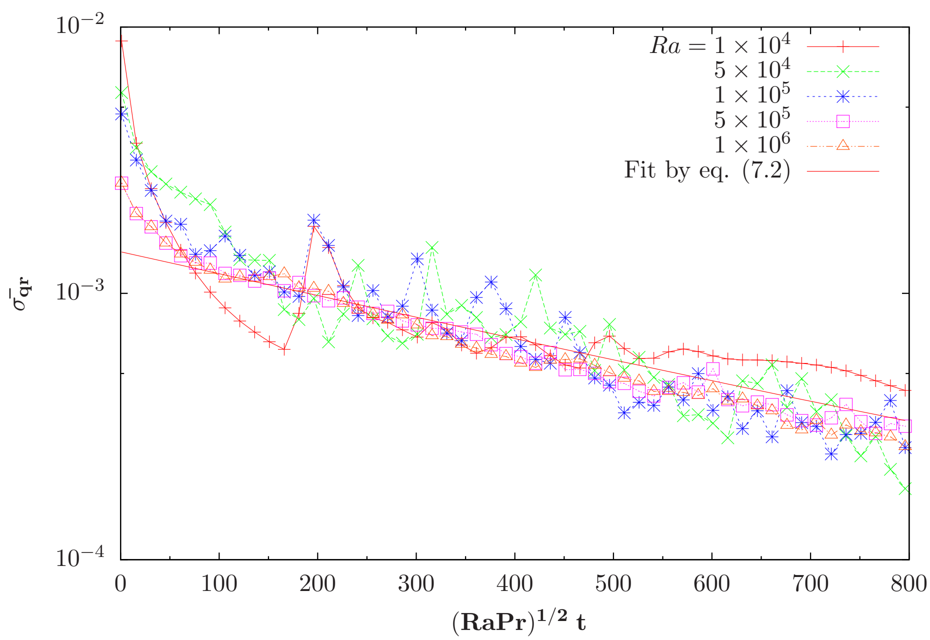

Figura 7.19: Entropía total reducida como función del tiempo adimensional convectivo para diferentes valores del número de Rayleigh.

7.2. Cavidad rectangular cerrada con paredes conductoras de espesor finito

Como una extensión del presente trabajo, y en colaboración con el Fís. Daniel Pastrana Maldonado, se realizaron las modificaciones necesarias al programa desarrollado para investigar los flujos de calor y masa, así como la producción de entropía, dentro de una cavidad como la ilustrada en la Fig. 5.2, que está compuesta de paredes de espesor finito $h = 0.1$, y cuyas propiedades térmicas cumplen $\alpha = \kappa_s/\kappa = 600$ y $K = k_s/k = 600$, donde α representa el cociente entre la difusividad térmica del sólido y la del fluido, y K es el cociente correspondiente entre las conductividades térmicas. Esta elección de parámetros representa, de manera aproximada, una cavidad hecha de paredes de aluminio que contiene agua. A continuación se presentan algunos de los resultados más sobresalientes.

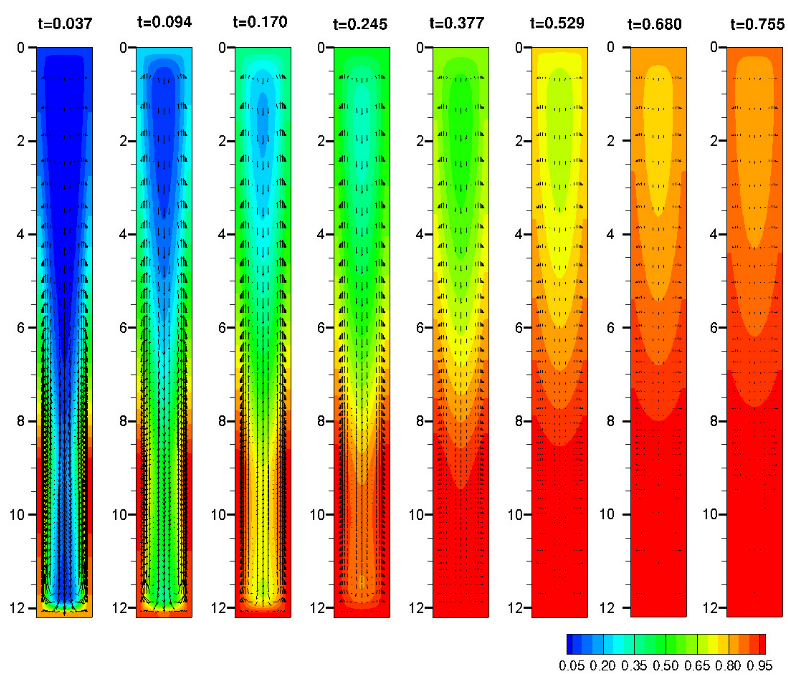

Figura 7.20: Evolución temporal del campo de temperatura para $Ra = 10^4$.

La Fig. 7.20 muestra la evolución del campo de temperatura para $Ra = 10^4$, se forman dos regiones de recirculación simétricas frente a las fuentes de calor cuya altura aumenta conforme aumenta la temperatura en las paredes. La forma de la isotermas indica que la difusión domina la transferencia de calor y el proceso es simétrico en todo el intervalo de tiempo. En la Fig. 7.21 se observa el campo de temperatura para $Ra = 10^6$, inicialmente aparecen dos zonas de recirculación enfrente de las fuentes de calor. Los efectos conjugados de la convección y la conducción en las paredes promueven zonas de concentración de energía que dan lugar a nuevas zonas de recirculación no presentes en los casos de número de Rayleigh menores. Esto conduce al sistema a una configuración de vórtices inestable y finalmente al rompimiento de la simetría.

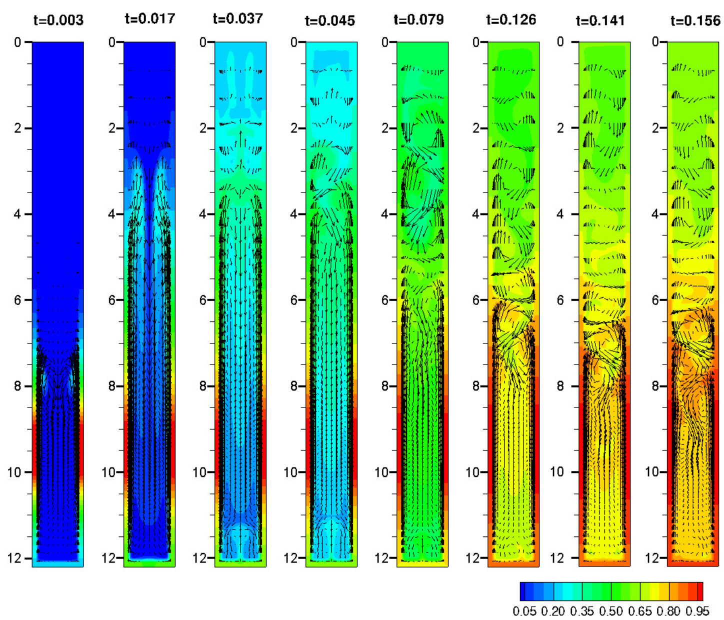

Figura 7.21: Evolución temporal del campo de temperatura para $Ra = 10^6$.

En las Figs. 7.22 y 7.23 se muestra el promedio transversal de la temperatura en el fluido, $\tilde{\theta}$, para cinco alturas distintas, y para los dos números de Rayleigh presentados. Es posible apreciar que al aumentar el número de Rayleigh la señal térmica se desplaza más rápido a la parte alta de la cavidad y se reducen las diferencias de temperatura en el fluido, como sucedía

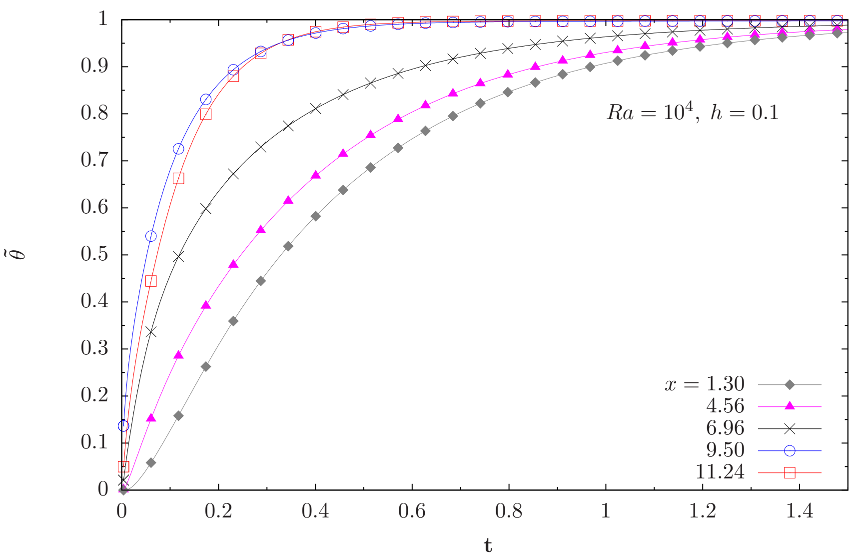

Figura 7.22: Temperatura promedio adimensional transversa en el fluido como una función del tiempo para cinco diferentes valores de la coordenada vertical para $Ra = 10^4$.

en el caso de paredes aislantes. Para analizar la dinámica de vórtices se utiliza el centroide térmico, $\tilde{y}$, y se muestra en la Fig. 7.24 para $Ra = 10^6$. El sistema pierde la simetría en $y \approx 11$ al tiempo $t \approx 0.03$ exhibiendo una alta actividad en el desprendimiento de vórtices a distintas frecuencias.

La evolución temporal de la producción de entropía, para los casos de $Ra = 10^4$ y $Ra = 10^6$, se puede observar en la Fig. 7.25 y en la Fig. 7.26 respectivamente. Para el caso de $Ra = 10^4$, las mayores contribuciones a la producción de entropía se localizan en la interfaz sólido-fluido y la generación de entropía es menos intensa dentro del flujo, siendo prácticamente nula a lo largo del eje de simetría de la cavidad. En el caso de $Ra = 10^6$, la producción de entropía es más intensa en general. Como una consecuencia del mayor flujo de calor convectivo, nuevas zonas de producción de entropía aparecen dentro del flujo y remarcablemente en la zona media de la base. Cuando la simetría se pierde, el campo de producción de entropía muestra claramente las zonas de mas intenso flujo de calor. Para ambos casos, la producción de entropía decrece cuando transcurre el tiempo y la temperatura se hace más uniforme en la cavidad.

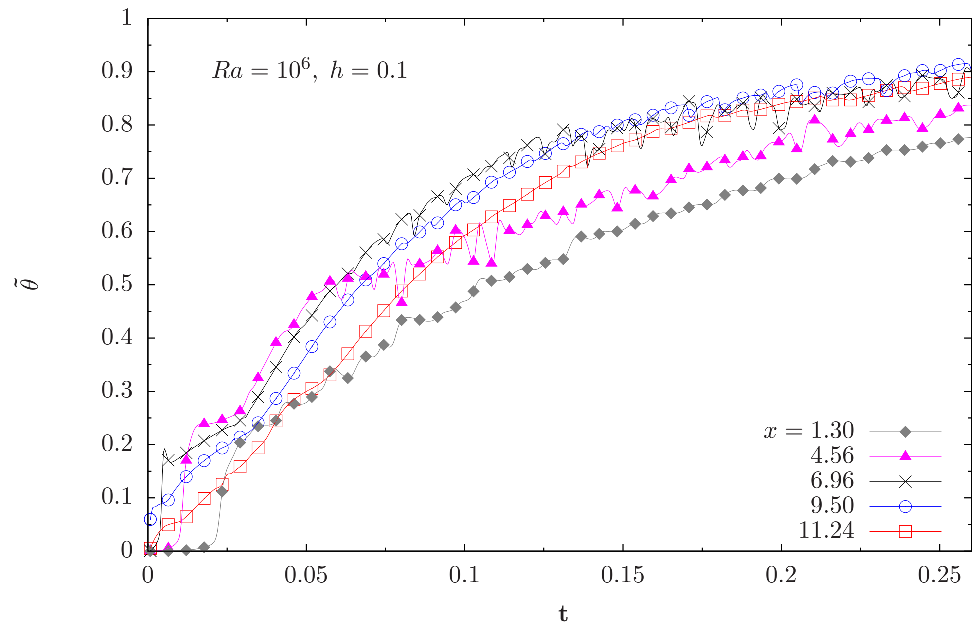

Figura 7.23: Temperatura promedio adimensional transversa en el fluido como una función del tiempo para cinco diferentes valores de la coordenada vertical para $Ra = 10^6$.

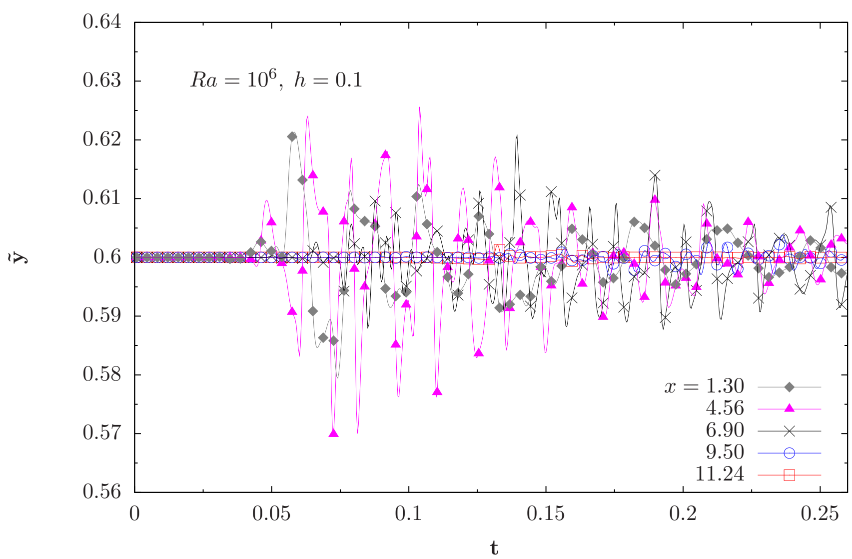

Figura 7.24: Centroide térmico para $Ra = 10^6$. Para una altura dada y los valores positivos de $\tilde{x}(y,t) - 0.6$ representan vórtices que giran en dirección contraria a las manecillas del reloj.

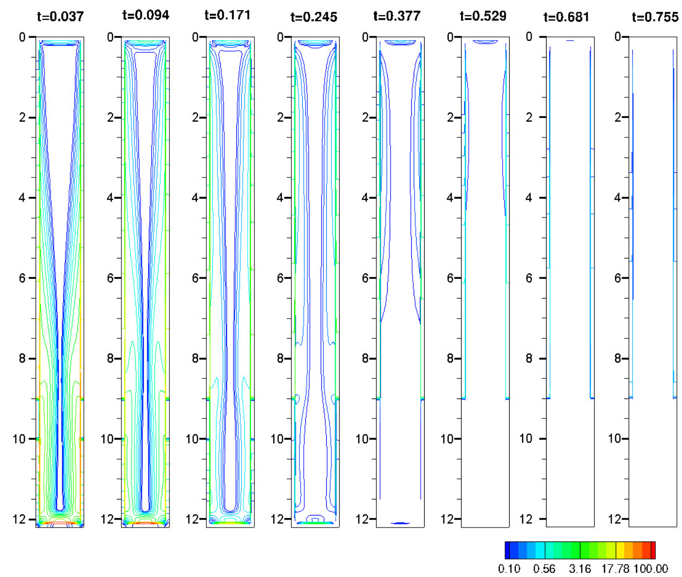

Figura 7.25: Evolución del campo de producción de entropía para $Ra = 10^4$.

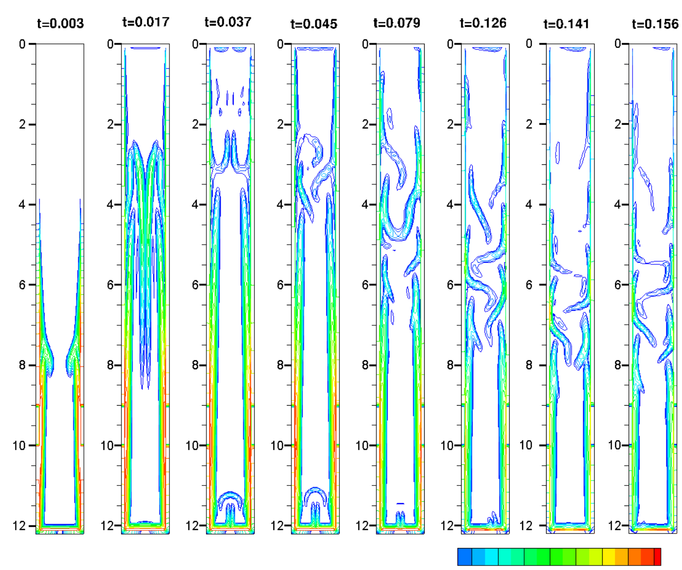

Figura 7.26: Evolución del campo de producción de entropía para $Ra = 10^6$.

Las Figs. 7.27 y 7.28 muestran el número de Nusselt promedio en el sólido y en el fluido alrededor de cada una de las fuentes de calor como función del tiempo adimensional convectivo para $Ra = 10^4$ y 10^6 calculado de acuerdo con

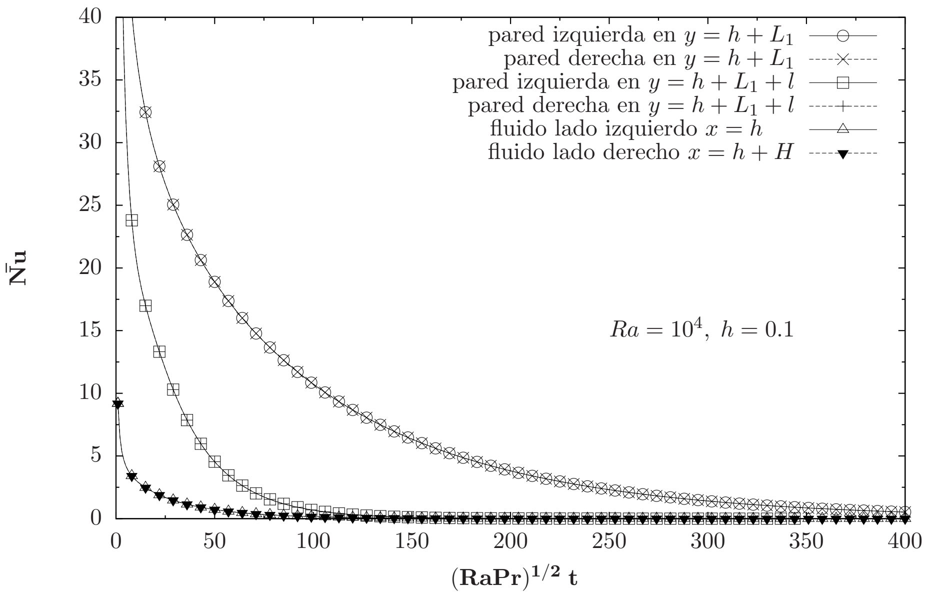

Figura 7.27: Número de Nusselt promedio como función del tiempo adimensional en el sólido y en fluido para $Ra = 10^4$.

$$\bar{N}u_f(t) = (-1)^n \int_{(h+L_1)/H}^{1+(h+L_1)/H} \frac{\partial \theta}{\partial y}\Big|_{y=y_n} dx \qquad \text{en el fluido,} \tag{7.3}$$

donde $n = 1, 2$ y hace referencia a las fuentes de calor localizadas en las paredes, izquierda y derecha de la cavidad respectivamente y

$$\bar{N}u_s(t) = K\frac{(-1)^m}{h} \int_0^{h/H} \frac{\partial \theta_s}{\partial x}\Big|_{x=x_m} dy,$$

$$\bar{N}u_s(t) = K\frac{(-1)^m}{h} \int_{1+h/H}^{1+2h/H} \frac{\partial \theta_s}{\partial x}\Big|_{x=x_m} dy \tag{7.4}$$

en el solido lado izquierdo y lado derecho respectivamente. En ambas expresiones m hace referencia a la parte alta y baja del suministro de calor, y puede tomar los valores de 1 y 2.

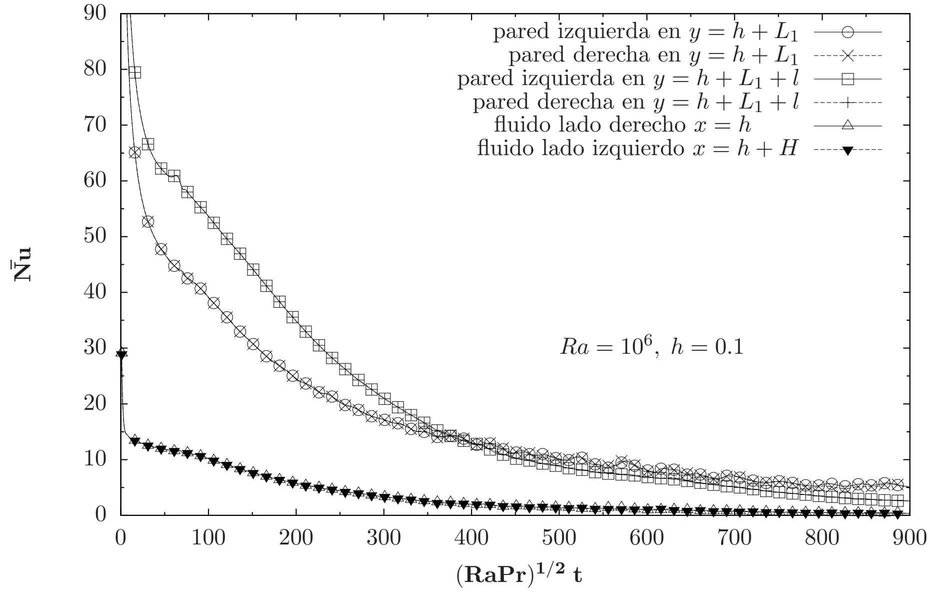

Figura 7.28: Número de Nusselt promedio como función del tiempo adimensional en el sólido y en fluido para $Ra = 10^6$.

En ambos casos, el flujo de calor hacia el sólido es mayor que el flujo de calor hacia el fluido debido al valor alto de la relación entre conductividades K. A medida que aumenta el parámetro de flotación, y en un cierto intervalo de tiempo, el flujo de calor que recorre la pared sólida hacia la parte alta de la cavidad disminuye en relación al flujo de calor en la pared hacia la parte baja de la misma. Este efecto se debe básicamente a que, para números de Rayleigh altos, la tasa de transferencia de calor por convección en el fluido, hacia la parte alta de la cavidad cerca de las paredes verticales, es comparable a la tasa de transferencia de calor por conducción en el sólido, lo que provoca que la temperatura en el sólido y en el fluido que se encuentra cerca de la pared y ligeramente por encima de las placas calientes sean semejantes, disminuyendo de esta forma el flujo de calor en esta región.

En la Fig.7.29 se ha graficado la suma de las tres contribuciones al flujo de calor como función del tiempo adimensional convectivo. En esta gráfica se pone de manifiesto que a medida que el número de Rayleigh aumenta, el flujo de calor total hacia el sistema crece.

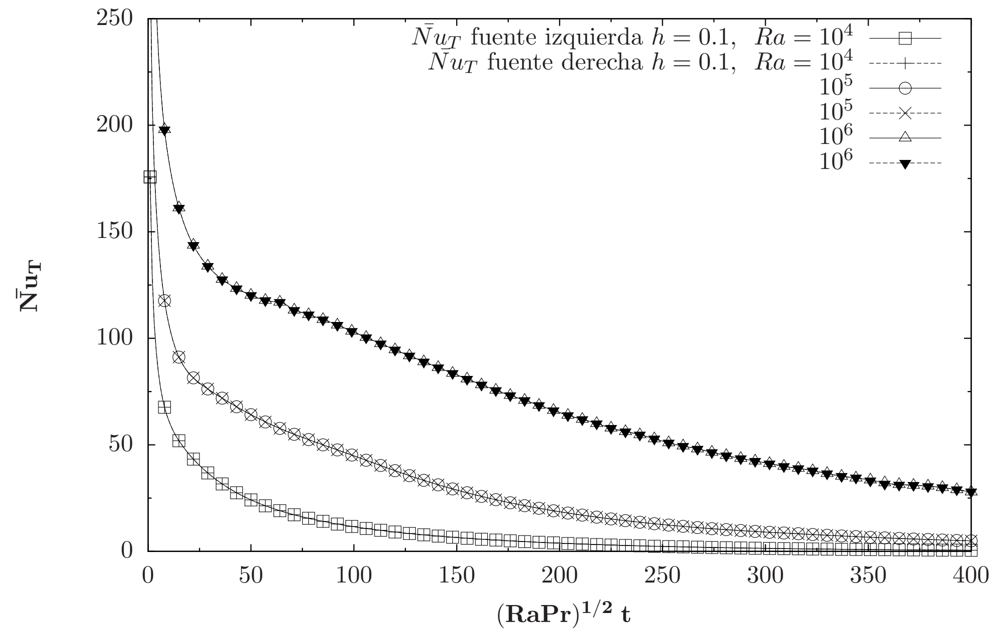

Figura 7.29: Número de Nusselt promedio total como función del tiempo adimensional para $Ra = 10^4$, 10^5 y 10^6.

Por otra parte, la Fig.7.30 presenta la producción de entropía total como función del tiempo adimensional convectivo, e ilustra la influencia directa del incremento en las fuerzas de flotación sobre el aumento en la producción de entropía del sistema. Las curvas describen un comportamiento similar al que siguen las curvas de flujo de calor debido a la relación directa que existe entre estas dos cantidades. También se puede observar que cuando las fuerzas de flotación son grandes, la producción total de entropía aumenta respecto a los casos con fuerzas de flotación menores, sin embargo, la temperatura promedio de la cavidad aumenta más lentamente en los últimos. Esto sugiere que, puede encontrarse una combinación de parámetros que den como resultado un buen equilibrio entre el tiempo de calentamiento y la producción de entropía total, que sería información valiosa para propósitos prácticos de diseño de dispositivos calentadores de agua, por ejemplo.

Comparando estos resultados con los mostrados en la sección 7.1, para una cavidad con paredes aislantes, puede observarse que las paredes conductoras tienen un papel estabilizante en el proceso de transferencia de calor, esto se observa claramente a partir las Figs. 7.3

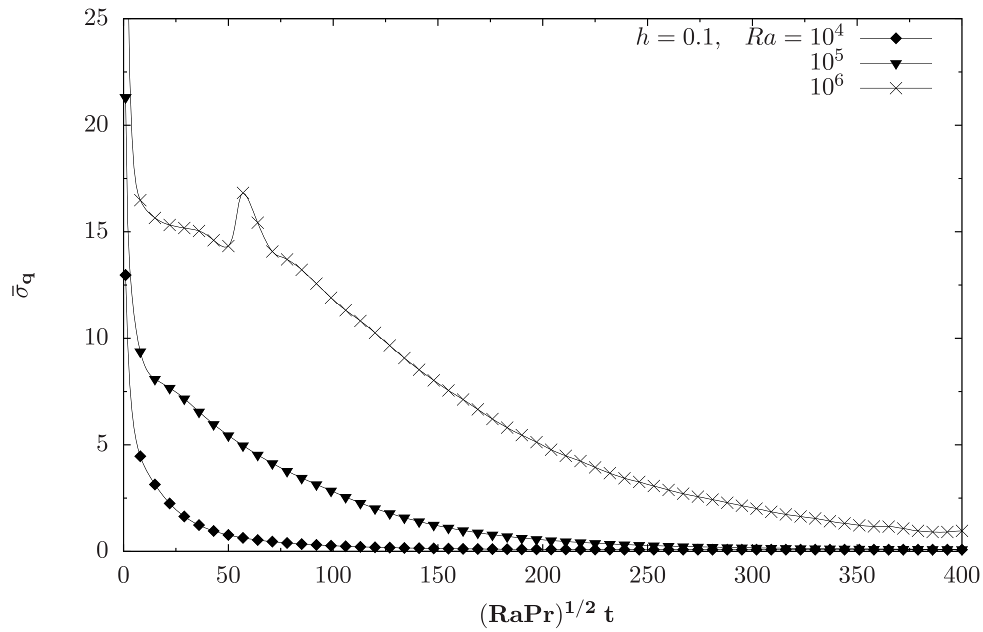

Figura 7.30: Producción de entropía total como función del tiempo adimensional convectivo para $Ra = 10^4$, 10^5 y 10^6.

y 7.20, donde no se manifiesta ninguna inestabilidad de forma espontánea para la cavidad con paredes conductoras. También podemos ver que el proceso se desarrolla a una velocidad mayor cuando la cavidad está formada por paredes conductoras y que se produce una cantidad mayor de entropía total. Continuando con la comparación de ambos casos, la Fig. 7.31 muestra el número de Nusselt total promedio para $Ra = 10^4$ correspondiente a las dos cavidades. La clara diferencia que existe en la magnitud del flujo de calor se debe a que la conductividad térmica de la pared se ha supuesto mucho mayor que la del fluido, $K = 600$, y por tanto es razonable que el número de Nusselt refleje esta diferencia. Por otra parte, puede observarse que para valores del tiempo adimensional $(Ra\, Pr)^{1/2}\, t < 190$, ambas curvas presentan un decaimiento de tipo exponencial muy similar, mismo que corresponde a la etapa en la que el flujo de la cavidad de paredes aislantes es simétrico y los efectos difusivos tienen una influencia importante. Cuando $(Ra\, Pr)^{1/2}\, t \geq 190$, el comportamiento del flujo de calor en el caso de paredes adiabáticas cambia notablemente, y presenta oscilaciones alrededor de un valor cercano a la unidad, lo que se debe a que la simetría del flujo se ha perdido y los mecanismos de convección natural descritos en la sección 7.1 se han activado. En contraste,

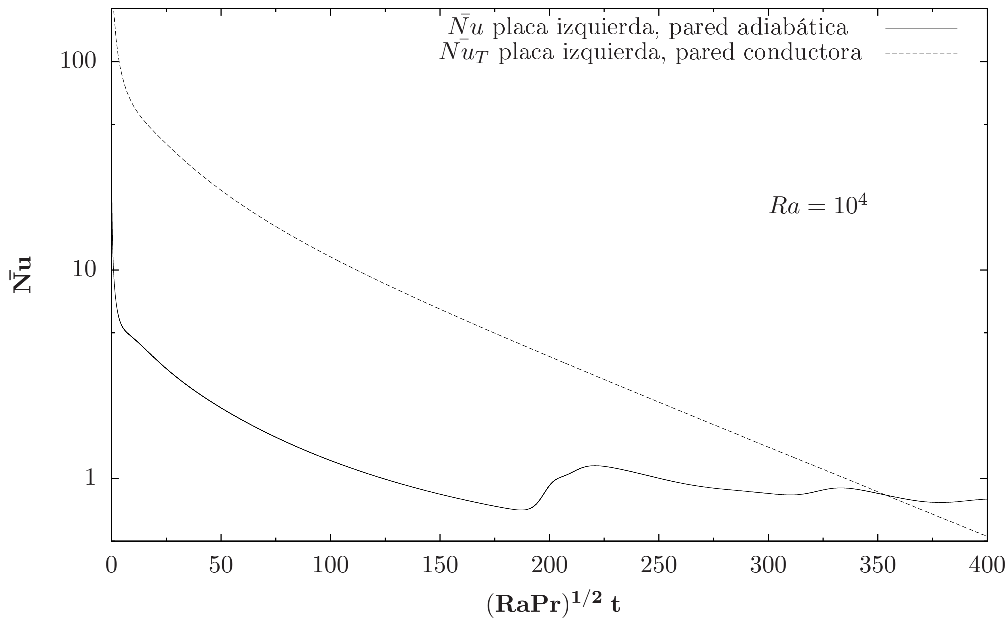

Figura 7.31: Comparación del número de Nusselt promedio para $Ra = 10^4$ entre la cavidad de paredes aislantes y la cavidad de paredes conductoras. La diferencia que existe en la magnitud del flujo de calor se debe a que la conductividad térmica de la pared se ha supuesto mucho mayor que la del fluido, $K = 600$. Ambas curvas presentan un decaimiento inicial muy similar pero cuando $(Ra\,Pr)^{1/2}\,t \geq 190$, el comportamiento del flujo de calor en el caso de paredes adiabáticas cambia notablemente, lo que se debe a que la simetría del flujo se ha perdido y los mecanismos de convección natural descritos en la sección 7.1 se han activado.

el flujo de calor en la cavidad de paredes conductoras no se altera en todo el proceso, lo que quiere decir que las aportaciones del término convectivo son despreciables. De nuevo es posible ver que la presencia de la pared conductora acelera el proceso de transferencia de calor, ya que el número de Nusselt se vuelve prácticamente nulo mucho antes que para el caso de paredes aislantes, esto último puede verse claramente a partir de las Figs. 7.17 y 7.31.

7.3. Canal vertical rectangular

Durante la etapa de desarrollo del programa utilizado, se contribuyó con el Dr. Lorenzo Alberto Martínez Suástegui en la investigación de un sistema geométricamente similar a los presentados anteriormente, se trata de un canal rectangular vertical, como el que se muestra en la Fig. 5.3. Los detalles de la solución numérica, y los resultados completos pueden encontrarse en Martínez-Suástegui et al. [2011], a continuación se presentan algunos de los resultados más importantes. La Fig. 7.32 muestra los estados estacionarios finales que se encuentran para números de Richardson relativamente pequeños, y valores fijos del número de Reynolds $Re = 100$ y del número de Prandtl $Pr = 7$.

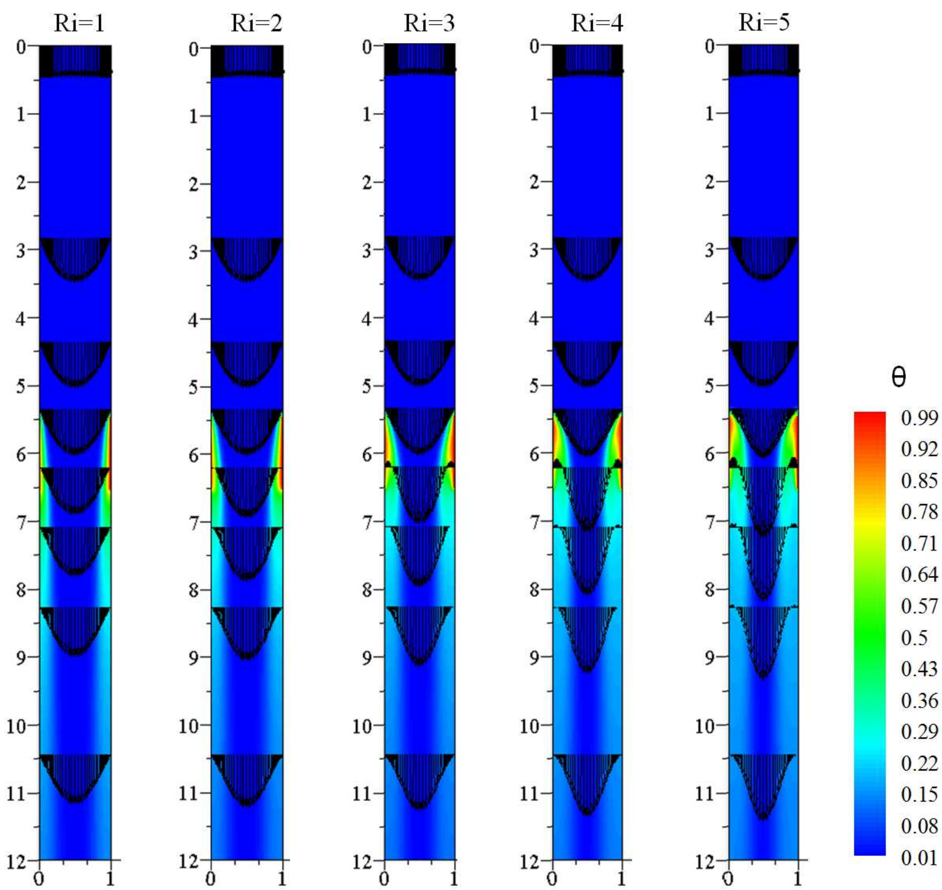

Figura 7.32: Estados estacionarios finales y simétricos para diferentes números de Richardson bajos.

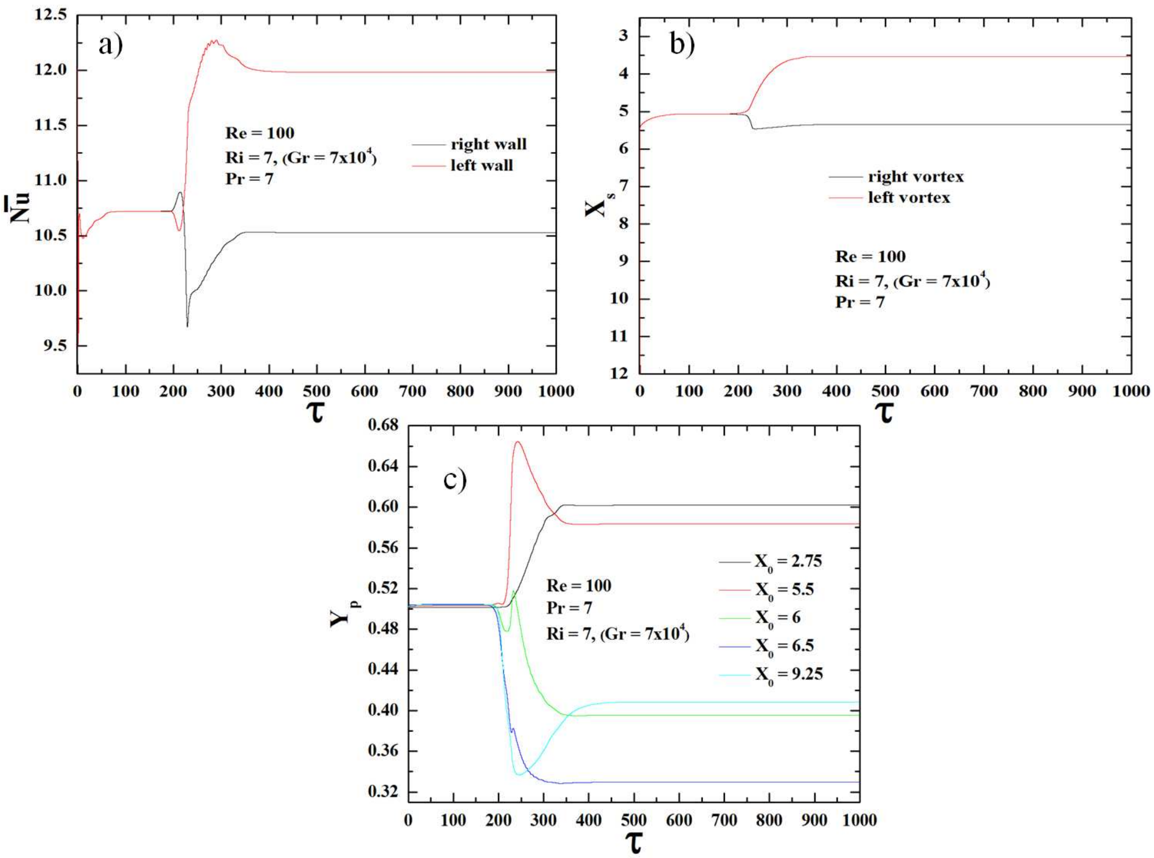

Figura 7.33: Evolución temporal del número de Nusselt (a), puntos de estancamiento (b) y centroide másico (c), para $Ri = 7$.

Dos regiones de recirculación se forman frente a las placas calientes, ambas estructuras se desarrollan y alcanzan una altura máxima, caracterizada por los puntos de estancamiento del flujo, ambos vórtices suben de forma simétrica y alcanzan posiciones más elevadas conforme aumenta el número de Richardson. También puede verse que, cerca de las placas, existen regiones en las que se establece una corriente ascendente de fluido de alta temperatura. Cuando $Ri \geq 5.2$, la velocidad del flujo descendente a lo largo del eje de simetría del canal aumenta, así como la velocidad de la corriente que asciende en la zona cercana a las placas calientes, esto crea dos zonas de intensos esfuerzos entre las corrientes con direcciones encontradas, dando lugar a un mecanismo de inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, que se dispara por la aparición de pequeñas oscilaciones en el flujo. Lo anterior rompe la simetría y una de las regiones de recirculación (la izquierda) alcanza una posición más alta, mientras la otra es deprimida por la corriente descendente que es desviada por la presencia del vórtice de mayor altura. A su vez, la región de recirculación que se mantiene en la posición más baja, desvía la corriente descendente al pasar cerca de su posición, desplazándola hacia la placa caliente opuesta. La Fig. 7.33 muestra el número de Nusselt (a), los puntos de estancamiento (b) y el centroide másico para diferentes alturas en el canal (c) para el caso de $Ri = 7$ con $Re = 100$ y $Pr = 7$, puede observarse que inicialmente hay una etapa de desarrollo simétrica, seguida por el rompimiento de simetría a $\tau \approx 200$, que lleva uno de los vórtices a una posición más alta, mientras que el otro permanece un poco por debajo de su posición original, Fig. 7.33(b). La estructura del flujo de la corriente descendente puede deducirse a partir de la Fig. 7.33(c), donde se observa que para la parte superior del canal, la corriente se desvía hacia la derecha ($y_p > 0.5$), mientras que en la parte media y en la inferior, el flujo se desvía hacia la izquierda ($y_p < 0.5$). Un comportamiento similar al descrito previamente se observa en el rango $5.2 \leq Ri < 7.9$.

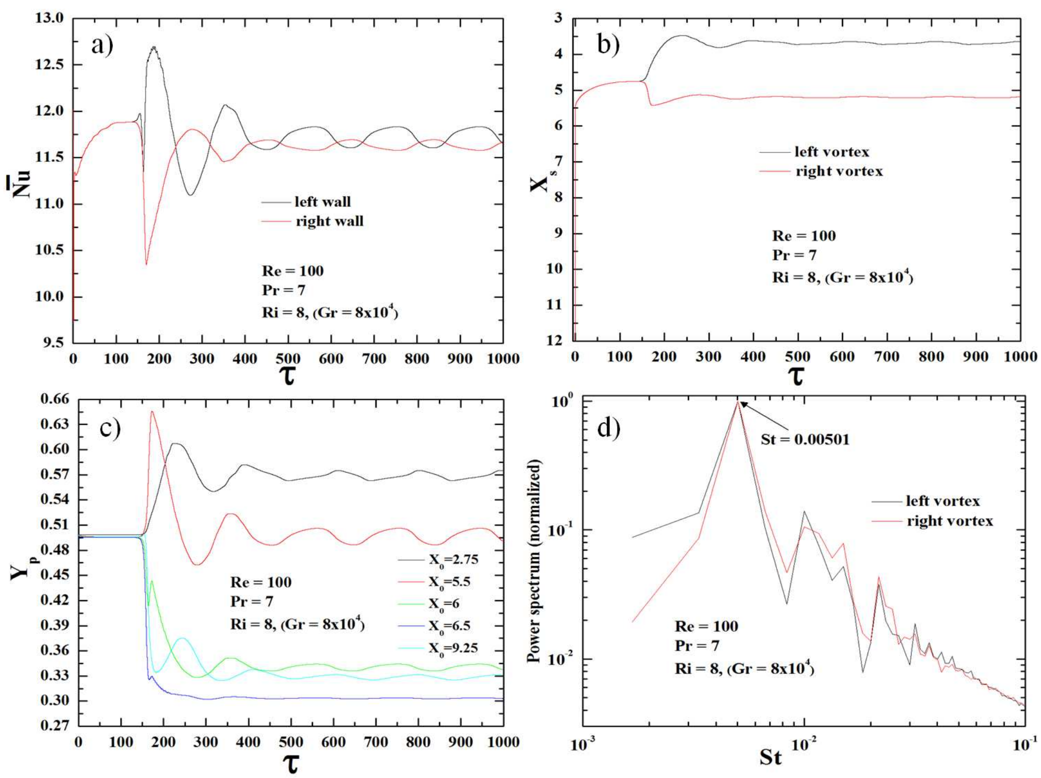

Figura 7.34: Evolución temporal del número de Nusselt (a), puntos de estancamiento (b), centroide másico (c) y espectro de potencia normalizado (d) para $Ri = 8$.

Para valores más altos del número de Richardson $7.9 \leq Ri < 8.5$, se encuentra una respuesta oscilante en el flujo. La etapa inicial de desarrollo y pérdida de simetría sigue la misma tendencia que en los casos de menor número de Richardson, de nueva cuenta uno de los vórtices se ubica en la parte alta del canal, el otro permanece cerca de la placa caliente que le corresponde y la corriente descendente se desvía de la manera similar a los casos asimétricos anteriores. Sin embargo, las fuerzas de flotación ahora son más intensas, esto provoca que el tamaño del vórtice deprimido aumente, lo que hace que la corriente descendente, al ser desviada por está última región de recirculación, fluya más cerca de la placa caliente opuesta que en los casos anteriores. Se establece entonces una fuerte interacción entre la corriente descendente y la placa caliente que alimenta al vórtice superior, la corriente descendente toma parte de la energía térmica cercana a la placa y la lleva hacia la parte inferior del canal por convección. Lo anterior disminuye el suministro de energía de la burbuja térmica superior y esta comienza a descender al tiempo que la región deprimida asciende. Sin embargo, al ascender la burbuja térmica deprimida, la corriente descendente se aleja de la placa caliente, restableciendo el suministro de energía al vórtice superior, mismo que recupera su posición original y provoca que el vórtice inferior sea empujado hacia abajo de nuevo, creando de esta manera el comportamiento oscilante que se observa en la Fig. 7.34, para $Ri = 8$, $Re = 100$ y $Pr = 7$. En la figura se muestran las mismas cantidades que antes, además del espectro de potencia normalizado (d).

La Fig. 7.35 muestra las trayectorias en el espacio fase construido con los centroides másicos a dos diferentes alturas del canal, $x = 5.5$ y $x = 6$, como funciones del centroide másico en $x = 2.75$ (mitad superior del canal). Ambas trayectorias parten de $(0.5, 0.5)$, lo que corresponde a una configuración simétrica, evolucionan y concluyen en dos ciclos límite, que al ser recorridos dan lugar al comportamiento oscilante encontrado alrededor de la configuración asimétrica. También se incluye una animación en dicha imagen que muestra la evolución temporal de las líneas de corriente y del campo de temperatura para los parámetros mencionados.

Si el número de Richardson aumenta aún más, $8.5 \leq Ri < 10.75$, el vórtice superior alcanza posiciones más elevadas y se presentan oscilaciones de mayor amplitud, la reconexión de la región de recirculación superior con el suministro de energía dado por la placa caliente se hace cada vez menor, hasta que, para un número de Richardson crítico, se hace

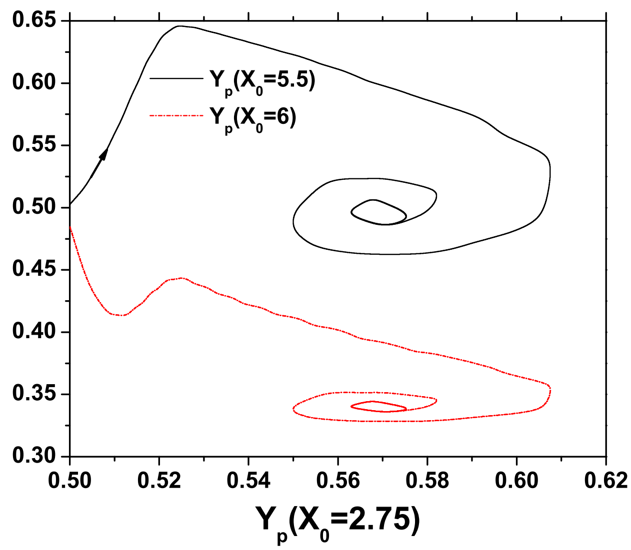

Figura 7.35: Espacio fase construido con los centroides másicos a $x = 5.5$ y $x = 6$, como funciones del centroide másico en $x = 2.75$ para $Ri = 8$. Las trayectorias concluyen en ciclos límite.

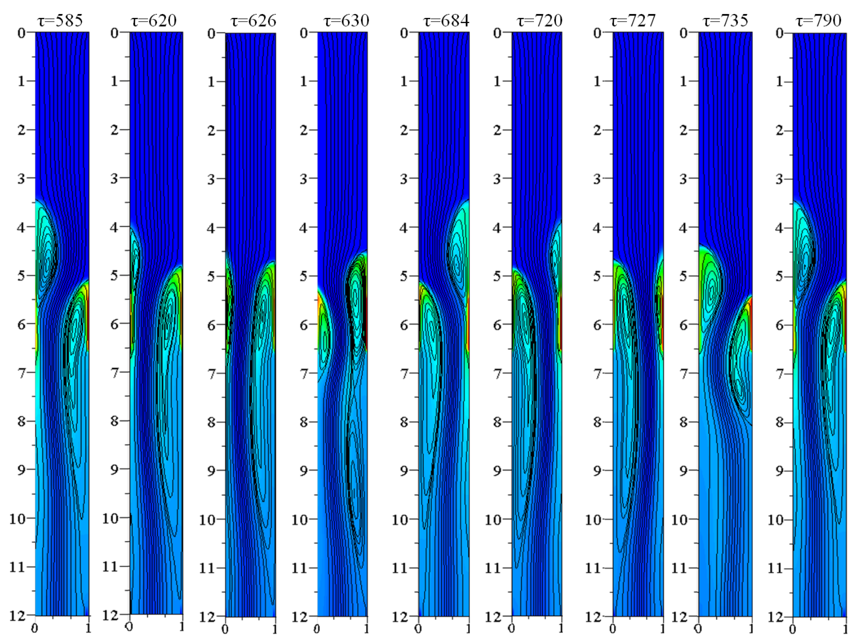

Figura 7.36: Evolución temporal del flujo y del campo de temperatura para $Ri = 9$, $Re = 100$ y $Pr = 7$, el comportamiento oscilante de la solución se muestra claramente.

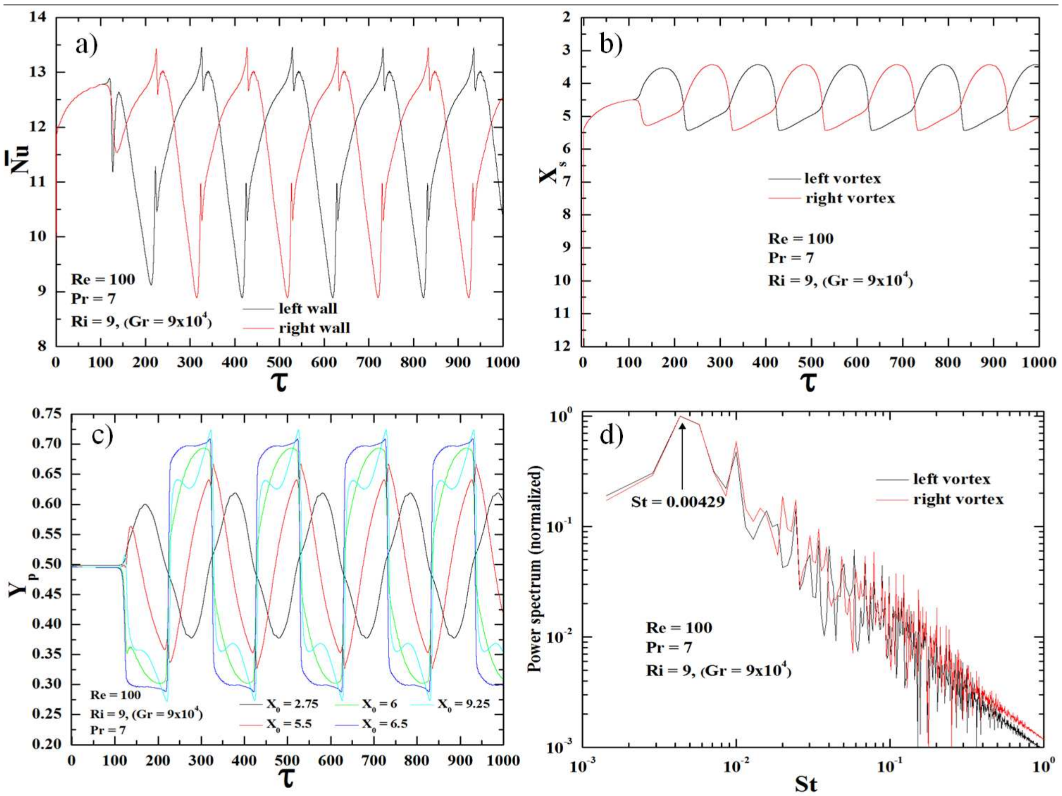

Figura 7.37: Evolución temporal del número de Nusselt (a), puntos de estancamiento (b), centroide másico (c) y espectro de potencia normalizado (d) para $Ri = 9$, $Re = 100$ y $Pr = 7$.

insuficiente y el vórtice superior decrece dramáticamente en tamaño e intensidad y colapsa. Como resultado, el vórtice inferior asciende y el superior desciende, los roles se invierten y el proceso se repite con una sola frecuencia fundamental. Este proceso se muestra gráficamente en la animación que se incluye en la Fig. 7.36, para $Ri = 9$ y los mismos valores usados antes para el número de Reynolds y el número de Prandtl.

En la Fig. 7.37, se muestra el número de Nusselt (a), los puntos de estancamiento (b), el centroide másico para diferentes alturas en el canal (c) y el espectro de potencia normalizado (d). Vale la pena mencionar que, a partir de la Fig. 7.37 (c), puede observarse que el comportamiento oscilatorio no es uniforme a lo largo del canal. En la sección superior ($x = 2.75$) se encuentra una respuesta de tipo senoidal, que hace recordar al oscilador armónico, mientras que alrededor de la sección media ($x = 6.5$) se obtiene una curva que es muy similar a las

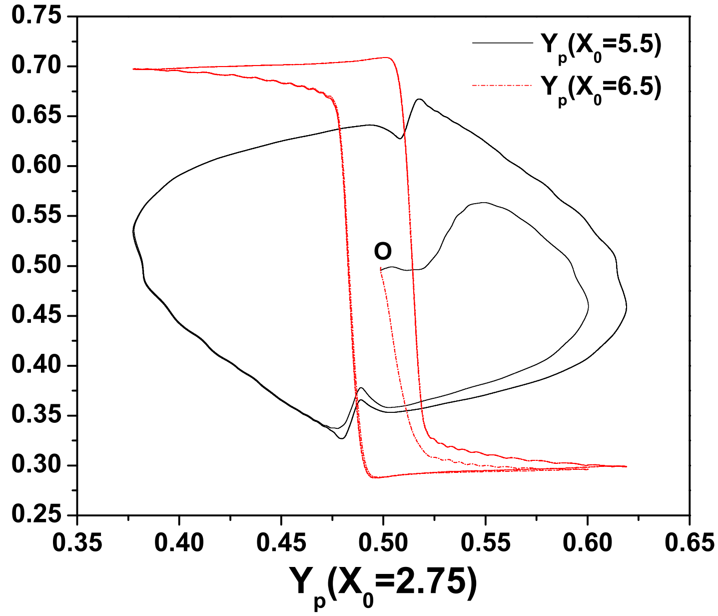

Figura 7.38: Espacio fase construido con los centroides másicos a $x = 5.5$ y $x = 6.5$, como funciones del centroide másico en $x = 2.75$ para $Ri = 9$. La trayectoria correspondiente a $x = 5.5$ es semejante a la que se encuentra en un oscilador lineal mientras que la correspondiente a $x = 6.5$ es típica de un proceso de carga-disparo.

encontradas en los osciladores de relajación, como el oscilador de Van der Pol por ejemplo, y es típica de un proceso de carga-disparo. La respuesta que se obtiene para otros valores de x muestra características mezcladas de los casos mencionados. Esto puede verse muy claramente a partir de la forma de las curvas del espacio fase del centroide másico mostradas en la Fig. 7.38.

Las diferentes transiciones en la dinámica del sistema se encuentran capturadas en la Fig. 7.39, donde se observan los estados finales de las trayectorias en el espacio fase para el centroide másico en $x = 6$, como función del centroide másico en $x = 2.75$ para diferentes valores del parámetro de flotación.

Se observan tres puntos críticos, el punto central, que corresponde a la solución simétrica y que es estable para $Ri < 5.2$, y dos puntos críticos estables, cuya localización depende del número de Richardson y se muestran en la figura para cuatro valores entre $6 \leq Ri < 8$. La

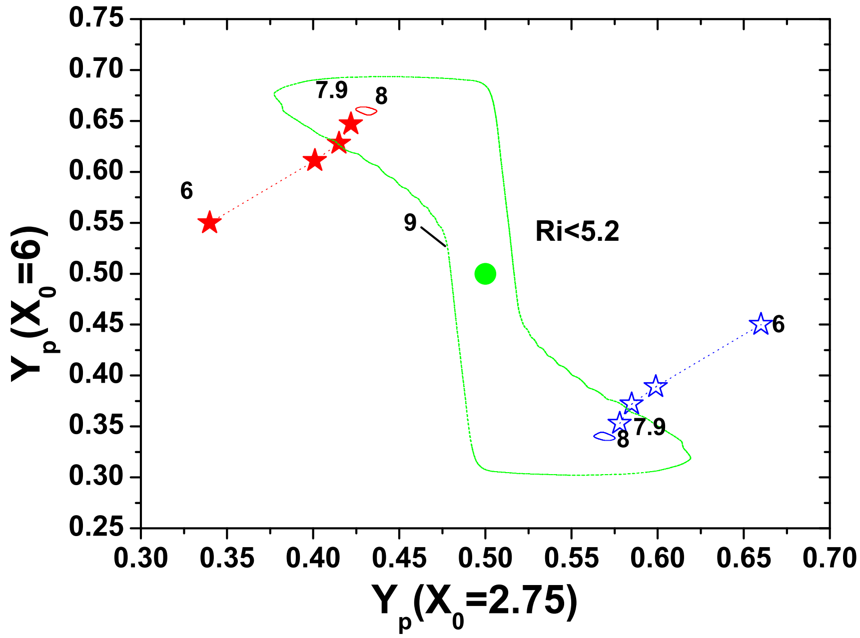

Figura 7.39: Curvas en el espacio fase para el centroide másico en $x = 6$ como función del centroide másico en $x = 2.75$ para diferentes valores del parámetro de flotación. Se observan tres puntos críticos, el punto central y dos puntos móviles, se pueden seguir las transiciones entre las soluciones simétrica estable, asimétrica estable, asimétrica periódica y oscilatoria global dependiendo del número de Richardson. Los símbolos abiertos representan el caso en el que el vórtice de la izquierda asciende, mientras que los símbolos cerrados representan el caso opuesto.

curva correspondiente a $Ri = 8$ muestra ciclos límite, que son resultado de una bifurcación de Hopf y corresponden a las soluciones asimétricas periódicas. Posteriormente ocurre una bifurcación de pegado (*gluing bifurcation*), que da lugar a curvas como la encontrada para $Ri = 9$, donde el punto central es inestable y las trayectorias rodean los tres puntos críticos existentes. Los símbolos abiertos representan el caso en el que el vórtice de la izquierda asciende, mientras que los símbolos cerrados representan el caso opuesto.

Para números de Richardson $Ri \geq 10.75$, el suministro de energía térmica se reconecta con el vórtice superior en forma intermitente, permitiendo que la región de recirculación superior permanezca oscilando por más tiempo en la parte alta del canal, intercambiando los roles con el vórtice inferior después de un tiempo adimensional impredecible. Esto crea un

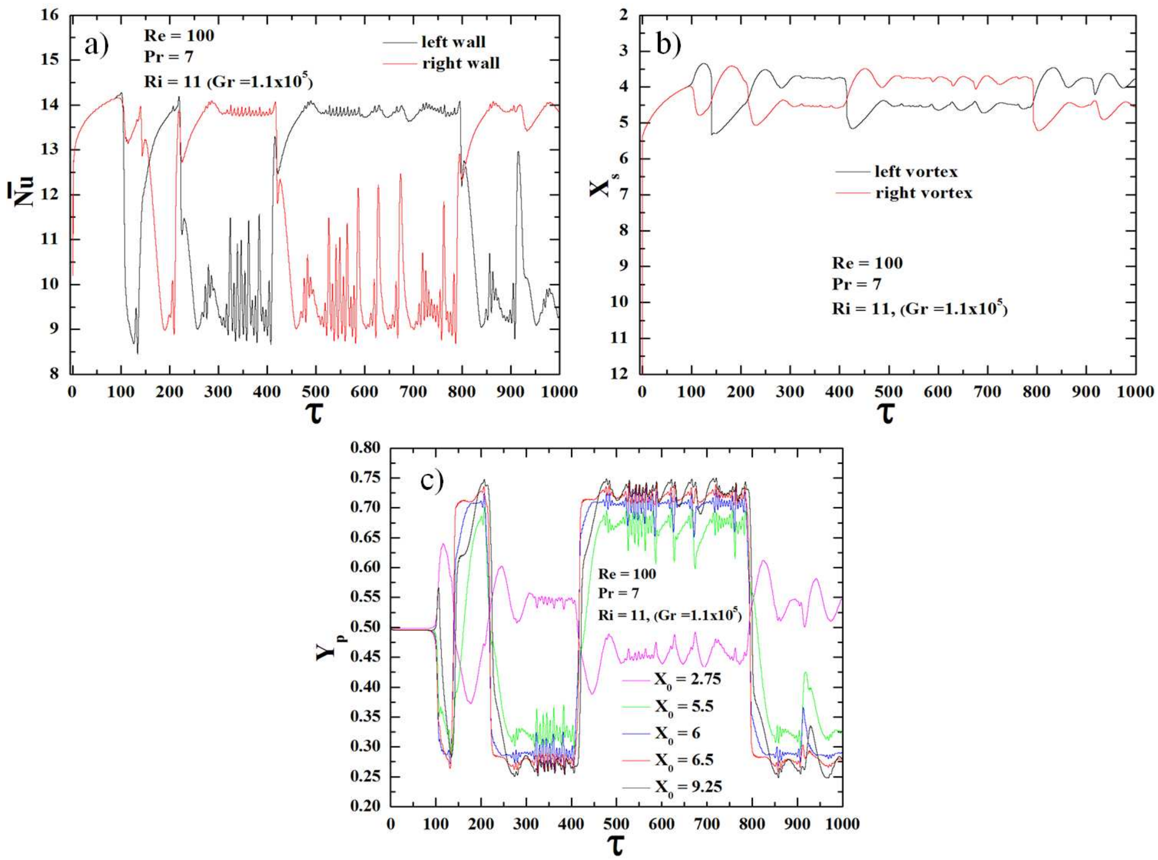

Figura 7.40: Evolución temporal del número de Nusselt (a), puntos de estancamiento (b) y centroide másico (c) para $Ri = 11$, $Re = 100$ y $Pr = 7$.

oscilador rectangular modulado de forma también impredecible, como puede verse a partir de la Fig. 7.40, que muestra la evolución temporal del número de Nusselt (a), los puntos de estancamiento (b) y el centroide másico para diferentes alturas en el canal (c) para $Ri = 11$, $Re = 100$ y $Pr = 7$, y a partir de la Fig. 7.41, que muestra la trayectoria seguida en el espacio fase por el centroide másico en $x = 6$. Se incluye además una animación en la última figura para las líneas de corriente y el campo de temperatura.

Todo lo anterior puede reconocerse como la firma inconfundible del caos y se resalta que este comportamiento no se presenta como una manifestación de la transición a un flujo turbulento, sino como una respuesta muy presumiblemente caótica del oscilador no lineal existente, todo esto dentro de un flujo laminar.

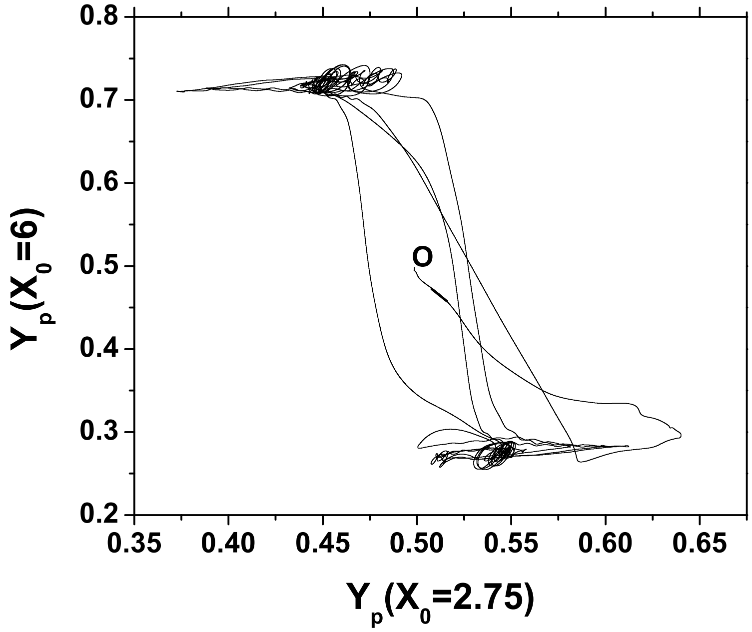

Figura 7.41: Espacio fase construido con el centroide másico a $x = 6$, como funciones del centroide másico en $x = 2.75$ para $Ri = 11$, $Re = 100$ y $Pr = 7$. La trayectoria revela el carácter caótico del oscilador.

7.4. Extensión tridimensional

La estructura del código desarrollado, permitió su generalización para estudiar sistemas tridimensionales. El programa resultante se empleó para estudiar el caso tridimensional correspondiente al canal vertical rectangular. Un esquema del sistema estudiado se muestra en la Fig. 7.42.

Las dimensiones del canal en el plano $x - z$ son exactamente las mismas que las correspondientes al caso bidimensional, y el espesor del canal se elige de $b = 0.5H$. Se presentan los resultados obtenidos a la fecha, con $Re = 100$ y $Ri = 10$, dejando como trabajo a futuro un análisis más completo del espacio de parámetros y de las características de este sistema.

En la Fig. 7.43, se muestran tres superficies isotérmicas, correspondientes a los valores $\theta = 0.1$, $\theta = 0.3$ y $\theta = 0.5$. La animación que se incluye en esta figura muestra la evolución temporal de estas tres superficies. A partir de la animación, puede observarse el carácter

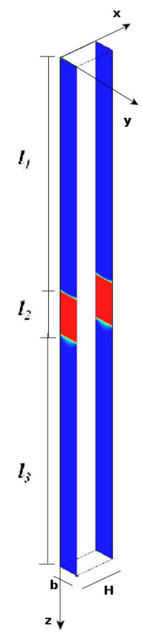

Figura 7.42: Esquema del canal vertical rectangular tridimensional.

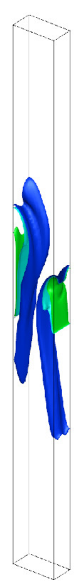

Figura 7.43: Superficies isotermas para $\theta = 0.1$, $\theta = 0.3$ y $\theta = 0.5$.

oscilante del flujo, mismo que se ve reflejado en los valores del número de Nusselt promedio, calculados sobre las placas calientes en superficies de corte con y constante. En la Fig. 7.44, se muestran los resultados para tres valores de y, $y = 0.013$, $y = 0.223$ y $y = 0.371$.

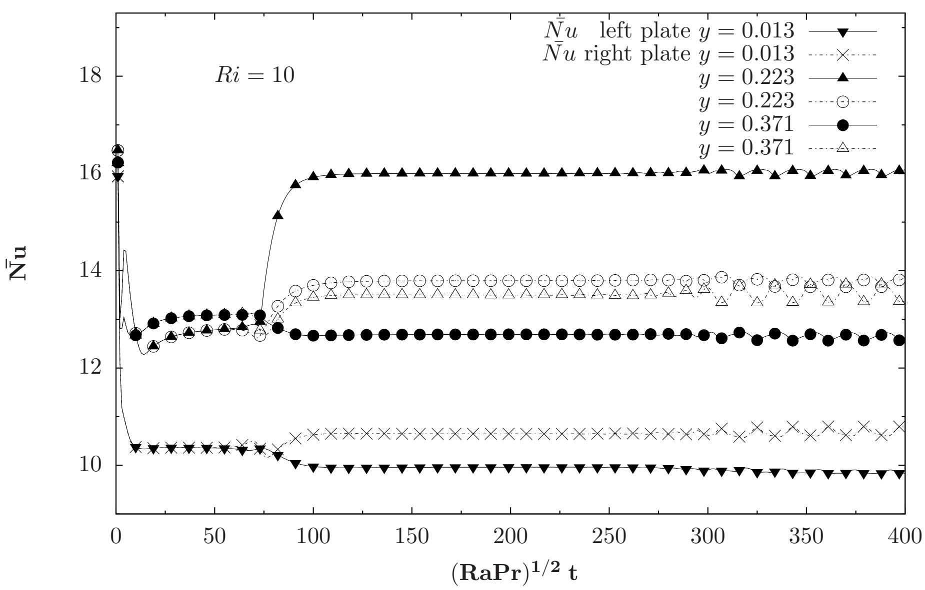

Figura 7.44: Número de Nusselt promedio para tres diferentes valores de y, $y = 0.013$, $y = 0.223$ y $y = 0.371$.

Se desarrollan dos regiones de recirculación frente a las placas calientes, las cuales interactúan y provocan la pérdida de la simetría con las mismas características que se observaron en el canal plano. Sin embargo, el intercambio en las posiciones de los vórtices que se encontraba en el caso bidimensional se pierde, y se encuentra una oscilación alrededor del plano $y = 0.25$ en su lugar. Estas oscilaciones se originan por los grandes esfuerzos que se registran entre las zonas de flujo descendente y ascendente, se desarrollan y son amplificadas dentro del canal con una frecuencia bien definida. Puede obtenerse una idea más clara de la estructura del flujo a partir de los centroides térmicos, que en este caso se denotan por $\tilde{x}$. Las Figs. 7.45-7.47 muestran los centroides térmicos para los tres planos mencionados a seis diferentes alturas del canal $z = 2.18$, 5.08, 6.12, 6.8, 7.82, 9.45.

De las Figs. 7.45 y 7.47, puede observarse que las oscilaciones que se presentan son fuer-

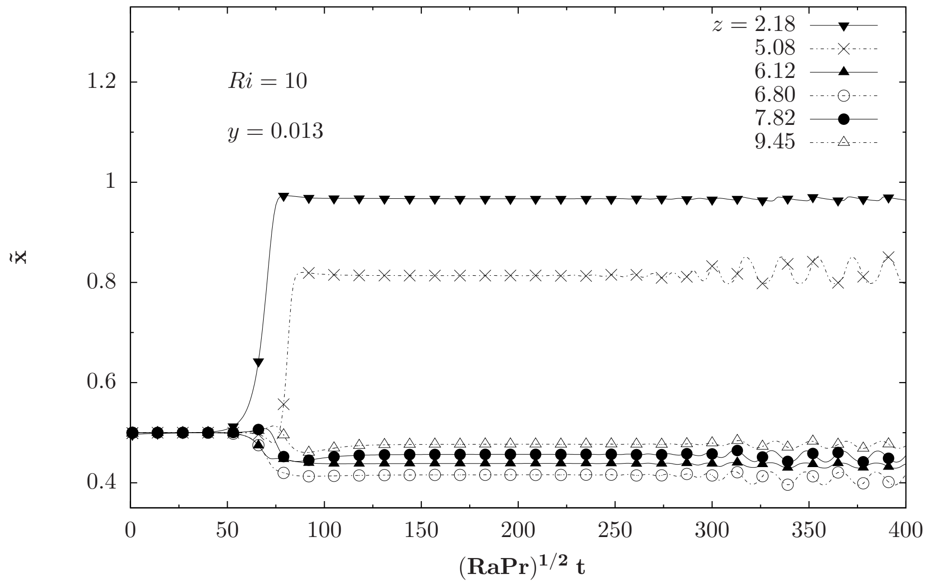

Figura 7.45: Centroide térmico para $y = 0.013$.

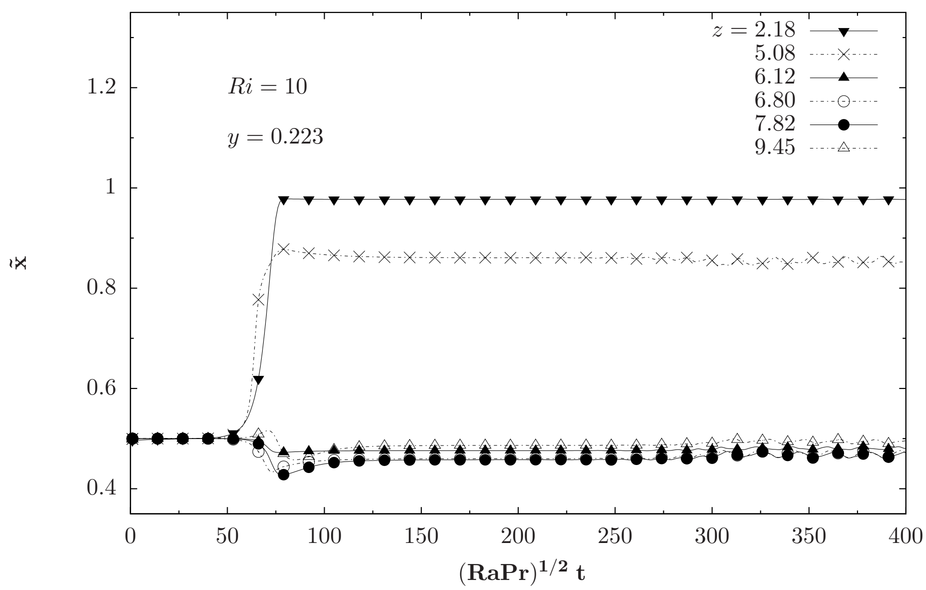

Figura 7.46: Centroide térmico para $y = 0.223$.

temente amplificadas en las posiciones cercanas a las paredes, mientras que cerca del centro del canal, las oscilaciones son mucho menores como puede verse en la Fig. 7.46. Esto se debe a que la presencia de las regiones de recirculación, desvía fluido descendente hacia la parte central del canal, donde se encuentran altas velocidades en la dirección descendente (conservación de masa), esta zona de alta velocidad se mantiene hacia la salida del canal y es la responsable de inhibir las oscilaciones en esta zona. También puede observarse a partir de las tres figuras que las oscilaciones disminuyen notablemente hacia la parte alta del canal.

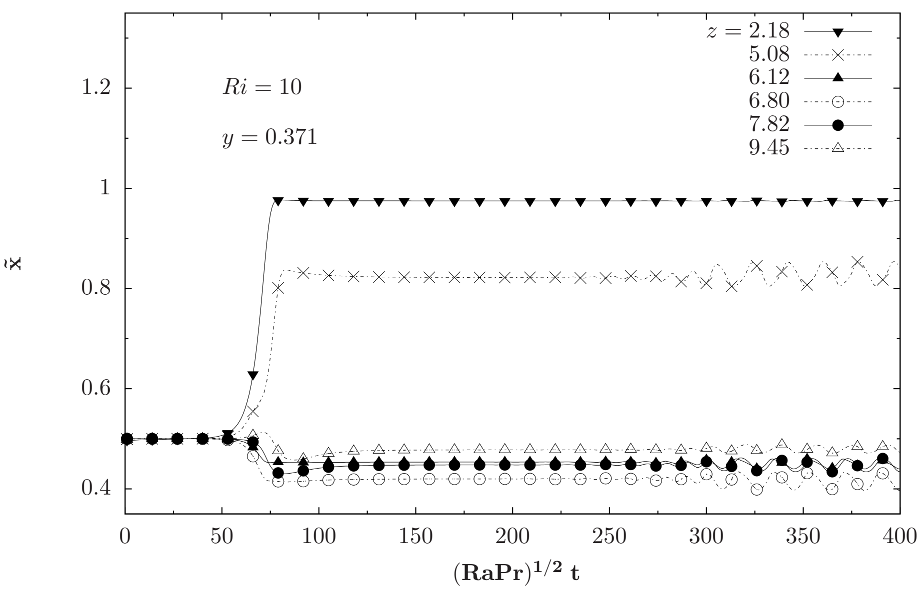

Figura 7.47: Centroide térmico para $y = 0.371$.

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES

En el presente trabajo, se estudió numéricamente, usando el algoritmo SIMPLE, el proceso de calentamiento transitorio de un fluido confinado a una cavidad de relación de aspecto grande, $AR = 12$, mediante dos placas verticales localizadas en las paredes laterales de la misma, cerca del fondo. Los cálculos se realizaron para un valor fijo del número de Prandtl y seis diferentes valores para el número de Rayleigh entre 10^3 y 10^6. Se obtuvieron los campos de temperatura, de velocidad, de producción de entropía, el flujo de calor adimensional dado por el número de Nusselt promedio y la dinámica de los vórtices creados en el proceso. Dependiendo del número de Rayleigh, se encontraron diferentes mecanismos de rompimiento de simetría y transferencia de calor.

La relación de aspecto grande, $AR = 12$, se eligió de manera que proporcionara el escenario adecuado para obtener gran riqueza dinámica en el movimiento y la interacción de vórtices, misma que no se presenta en cavidades cuadradas o de relación de aspecto cercana a la unidad. El valor del número de Prandtl, $Pr = 7$, se eligió de manera que representara cercanamente el caso correspondiente al agua, y se mantuvo fijo en dicho valor para centrar la atención del estudio en la influencia del número de Rayleigh sobre la respuesta del flujo.

Con un valor relativamente bajo del número de Rayleigh, $Ra = 10^3$, no se encuentra ninguna inestabilidad y el proceso es casi puramente difusivo. Para los valores mayores del número de Rayleigh, se encontraron tres diferentes tipos de inestabilidades y dos mecanismos de transferencia de calor principales. En el caso de $Ra = 10^4$ se manifiesta una inestabilidad similar a la que se obtiene en el problema de Rayleigh-Bénard, y resulta interesante comparar el valor crítico que se obtiene en el problema clásico con el valor en el que se dispara la inestabilidad en este estudio, para ello se definió un número de Rayleigh apropiado Ra_B y se encontró que el valor en el que se activó la inestabilidad, $Ra_B \approx 8 \times 10^4$, es aproximadamente un orden de magnitud mayor que el valor critico del problema clásico, $Ra_c = 1708$ Drazin y Reid [2004], lo cual es razonable dado que las configuraciones de los problemas presentan diferencias importantes. El principal medio de transferencia de calor es el desprendimiento repetido de regiones de recirculación creadas en la zona cercana a las placas calientes, las cuales empujan hacia arriba a los vórtices desprendidos previamente. En el caso de $Ra = 5 \times 10^4$, una inestabilidad de tipo Kelvin-Helmholtz se impone y el principal mecanismo de transferencia de calor es el llamado proceso de rodear-engullir, en el que el fluido de temperatura mayor rodea porciones importantes de fluido de baja temperatura en su viaje ascendente y las transporta rápidamente al fondo de la cavidad. Para los tres números de Rayleigh más altos considerados en la presente investigación, $Ra = 10^5$, $Ra = 5 \times 10^5$ y $Ra = 10^6$, la inestabilidad que lleva al rompimiento de simetría es la colisión de las fuertes regiones de recirculación creadas cerca de las placas calientes y el principal mecanismo de transferencia de calor es de nueva cuenta el proceso de rodear-engullir.

En relación a la producción de entropía, se mostró que la producción de entropía global en la cavidad aumenta como la raíz cuadrada del número de Rayleigh y que además, su valor medio puede caracterizarse mediante el uso de la ec. (7.2). Esta información puede resultar de gran importancia práctica en el diseño y construcción de dispositivos de calentamiento más eficientes.

Para la cavidad con paredes conductoras de espesor finito, se eligieron los parámetros de forma tal que se representa de manera aproximada una cavidad con paredes de aluminio, cuyo espesor es igual a una décima parte del ancho del espacio de confinamiento y que contiene agua. En este caso el cociente de difusividades térmicas es $\alpha = 600$ y el número de Prandtl es $Pr = 7$, de nueva cuenta estos parámetros se mantuvieron fijos para analizar el efecto que las variaciones del número de Rayleigh tienen sobre el flujo resultante. Se obtuvieron las isotermas, el campo de producción de entropía, el flujo de calor hacia el sistema, dado por el número de Nusselt, y se estudió cuantitativamente la dinámica de los vórtices, encontrando distintos mecanismos de flujo de calor y pérdida de simetría ligados a la variación del número de Rayleigh. En relación al flujo de calor y producción de entropía, se mostró que el aumento de las fuerzas de flotación incrementa el flujo de calor tanto en la pared como en el fluido, haciendo que el proceso sea más rápido pero también que produzca una mayor cantidad de entropía. Al comparar los resultados obtenidos con los correspondientes a paredes adiabáticas, se observa que la presencia de paredes de espesor finito con una difusividad térmica mucho mayor que la del fluido aumenta la rapidez y la estabilidad del proceso. Lo anterior se explica considerando que, debido al intenso flujo de calor sobre las paredes, la temperatura de la zona superior de la cavidad aumenta mucho antes que en el caso en el que la pared es un aislante térmico, lo que hace que los gradientes de temperatura, y con ellos las fuerzas de flotación, sean más pequeños en el primer caso, dando como resultado final un flujo más estable.

En el caso del canal vertical rectangular se encontró una riqueza dinámica sorprendente. Se mantuvo fijo el número de Reynolds en $Re = 100$, de nueva cuenta se mantuvo fijo el número de Prandtl en $Pr = 7$ y se analizó la influencia del número de Richardson sobre la respuesta del flujo. Al incrementar el valor del parámetro de flotación, la respuesta del sistema presentó transiciones que lo llevaron de una respuesta simétrica estacionaria para $Ri < 5.2$, a una solución asimétrica estacionaria mediante un rompimiento de simetría disparado por una inestabilidad de tipo Kelvin-Helmholtz para $5.2 \leq Ri < 7.9$. Posteriormente, mediante una bifurcación de Hopf, se llega a una solución asimétrica con oscilaciones locales de las regiones de recirculación alrededor de sus respectivas posiciones de equilibrio para $7.9 \leq Ri < 8.5$. Luego, mediante una bifurcación de pegado (*gluing bifurcation*), se obtuvo un oscilador de relajación global donde aparecen intercambios de las posiciones de las regiones de recirculación para $Ri < 10.75$. Finalmente se presenta una respuesta caótica para $Ri = 10.75$. Se obtuvo información cuantitativa de todos los estados presentados y la evolución de la dinámica no lineal se presentó en forma de curvas en el espacio fase construido a partir de los centroides térmicos.

Finalmente se resalta que la presente tesis, además de los interesantes resultados que ya se han discutido, brinda un amplio panorama para realizar investigaciones futuras. Por una parte es posible continuar con la extensión tridimensional natural que se plantea en la sección 7.4, tanto para el canal vertical como para las dos cavidades consideradas, por otra parte, es posible extender el análisis bidimensional en varias direcciones. En ambas cavidades puede investigarse el efecto que tienen las variaciones del número de Prandtl sobre el flujo resultante, es de esperar que los resultados sean distintos a los encontrados hasta ahora, ya que al modificar el número de Prandtl, se modifica el transporte de energía en el fluido. También es posible estudiar el papel que la relación de aspecto desempeña como un parámetro crítico para la pérdida de la simetría del flujo, ya que si se mantiene fijo el número de Rayleigh y se disminuye la relación de aspecto, se pierde el escenario propicio para que se presenten las inestabilidades encontradas, así como el proceso de rodear-engullir. En el caso de la cavidad de paredes aislantes, puede analizarse la inestabilidad encontrada para $Ra = 10^4$ a profundidad, planteando un problema semejante al de Rayleigh-Bénard con las modificaciones necesarias para obtener una situación más parecida a la que se encontró en este trabajo. En la cavidad de paredes conductoras, puede realizarse una extensa exploración del espacio de parámetros al variar los cocientes de difusividades térmicas y conductividades térmicas del sólido y del fluido, así como el espesor de las paredes conductoras. Para el canal vertical pueden realizarse estudios de estabilidad de las soluciones estacionarias, y una extensión del barrido del espacio de parámetros, así como seguir estudiando las propiedades del oscilador de relajación en busca de aproximaciones analíticas para describirlo. Todo lo anterior sin mencionar la especialización del estudio a dispositivos con fines de aplicaciones prácticas y por supuesto, el paso a la fase turbulenta de los flujos originados en las configuraciones aquí propuestas.

BIBLIOGRAFÍA

Abshagen, J., Pfister, G. y Mullin, T. Gluing bifurcations in a dynamically complicated extended flow. *Physical Review Letters*, 87(22):224051 (2001).

AlAmiri, A., Khanafer, K. y Pop, I. Buoyancy-induced flow and heat transfer in a partially divided square enclosure. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52:3818–3828 (2009).

Aminossadati, S. y Ghasemi, B. Natural convection cooling of a localised heat source at the bottom of a nanofluid-filled enclosure. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 28:630–640 (2009).

Baytas, A. Entropy generation for natural convection in an inclined porous cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43:2089–2099 (2000).

Cajas, J. C. y Treviño, C. Transient heating and entropy generation of a fluid inside a large aspect ratio cavity. *International Journal of Thermal Sciences*, xx(xx):xxx–xxx (2012).

Cajas, J. C., Treviño, C. y Lizardi, J. Variable thermal conductivity and perforation effects on a heat-conducting plate. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 24(3):665–668 (2010).

Chang, T.-S. y Lin, T.-F. Steady and oscillatory opposing mixed convection in a symmetrically heated vertical channel with a low-Prandtl number fluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36:3783–3795 (1993).

Chen, Y.-C. y Chung, J. The linear stability of mixed convection in a vertical channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 325:29–51 (1996).

Chen, Y.-C. y Chung, J. Stability of mixed convection in a differentially heated vertical channel. *Journal of Heat Transfer (ASME)*, 120:127–132 (1998).

Chung, T. *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press (2002).

Corvaro, F. y Paroncini, M. An experimental study of natural convection in a differentially heated cavity through a 2D-PIV system. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52:335–365 (2009).

Currie, I. G. *Fundamental mechanics of fluids*. Mc. Graw-Hill, 2ª edición (1993). ISBN 0-07-015000-1.

Dalal, A. y Das, M. K. Numerical study of laminar natural convection in a complicated cavity heated from top with sinusoidal temperature and cooled from other sides. *Computers & Fluids*, 36:680–700 (2007).

De Vahl Davis, G. Natural convection of air in a square cavity a benchmark numerical solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3:249–264 (1983).

del Río, J. A., Lopez de Haro, M. y Whitaker, S. Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. *Physical Review E*, 58(5) (1998).

Drazin, P. y Reid, W. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 2ª edición (2004). ISBN 0-521-52541-1.

Erbay, L. B., Altaç, Z. y Sülüş, B. An analysis of the entropy generation in a square enclosure. *Entropy*, 5:496–505 (2003).

Evans, G. y Greif, R. Buoyant instabilities in downward flow in a symmetrically heated vertical channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40:2419–2425 (1997).

Gray, D. y Giorgini, A. The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 19(5):545–551 (1976).

Guillet, C., Mare, T. y Nguyen, C. Application of a non-linear local analysis method for the problem of mixed convection instablility. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 42:981–988 (2007).

Gustafson, K. y Halasi, K. Cavity flow dynamics at higher Reynolds number and higher aspect ratio. *Journal of Computational Physics*, 70:271–283 (1987).

Ilis, G. G., Mobedi, M. y Sunden, B. Effect of aspect ratio on entropy generation in a rectangular cavity with differentially heated vertical walls. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 35:696–703 (2008).

Kondepudi, D. y Prigogine, I. *Modern Thermodynamics*. John Wiley & Sons (1999).

Lambert, A., Cuevas, S., del Río, J. y López de Haro, M. Heat transfer enhancement in oscillatory flows of Newtonian and viscoelastic fluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52:5472–5478 (2009).

Le Quéré, P. Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number. *Computers & Fluids*, 20(1):29–41 (1991).

Lin, T.-F., Chang, T.-S. y Chen, Y.-F. Development of oscillatory asymmetric recirculating flow in transient laminar opposing mixed convection in a symmetrically heated vertical channel. *Journal of Heat Transfer (ASME)*, 115:342–352 (1993).

Lopez, J. y Marques, F. Dynamics of three-tori in a periodically forced Navier- Stokes flow. *Physical Review Letters*, 85:972–975 (2000).

Magherbi, M., Abbassi, H., Hidouri, N. y Ben Brahim, A. Second Law Analysis in convective heat and mass transfer. *Entropy*, 8(1):1–17 (2006).

Mahmud, S. y Fraser, R. A. The second law analysis in fundamental convective heat transfer problems. *International Journal of Thermal Sciences*, 42:177–186 (2003).

Marques, F., Lopez, J. y Shen, J. A periodically forced flow displaying symmetry breaking via a three-tori gluing bifurcation and two-tori resonances. *Physica D*, 156:81–97 (2001).

Martínez-Suástegui, L. y Treviño, C. Particle image velocimetry measurements for opposing flow in a vertical channel with a differential and asymmetric heating condition. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 32(1):262–275 (2007).

Martínez-Suástegui, L. y Treviño, C. Transient laminar opposing mixed convection in a differentially and asymmetrically heated vertical channel of finite length. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51:5991–6005 (2008).

Martínez-Suástegui, L., Treviño, C. y Cajas, J. C. Thermal nonlinear oscillator in mixed convection. *Physical Review E*, 84(046310) (2011).

Nithyadevi, N., Kandaswamy, P. y Lee, J. Natural convection in a rectangular cavity with partially active side walls. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50:4688–4697 (2007).

Ostrach, S. Natural convection in enclosures. *Journal of Heat Transfer (ASME)*, 110:1175–1190 (1988).

Patankar, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation (1980). ISBN 0-89116-522-3.

Pujol, F., Rojas, J. y Ramos, E. Transient natural convection in a cavity with heat input and a constant temperature in opposite sides. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 14(4) (1993).

Rucklidge, A. Chaos in a low-order model of magnetoconvection. *Physica D*, 62:323–337 (1993).

Spiegel, E. A. y Veronis, G. On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. *Astrophysical Journal*, 131:442–447 (1960).

Suslov, S. y Paolucci, S. Stability of mixed-convection flow in a tall vertical channel under non-Boussinesq conditions. *Journal of Fluid Mechanics*, 302:91–115 (1995).

Tannehill, J. C., Anderson, D. A. y Pletcher, R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor & Francis, 2ª edición (1997).

Varol, Y., Oztop, H. F. y Koca, A. Entropy generation due to conjugate natural convection in enclosures bounded by vertical solid walls with different thicknesses. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 35:648–656 (2008).

Varol, Y., Oztop, H. F., Koca, A. y Avci, E. Forecasting of entropy production due to buoyant convection using support vector machines (SVM) in a partially cooled square cross-sectional room. *Expert Systems with Applications*, 36:5813–5821 (2009a).

Varol, Y., Oztop, H. F. y Pop, I. Entropy analysis due to conjugate-buoyant flow in a right-angle trapezoidal enclosure filled with a porous medium bounded by a solid vertical wall. *International Journal of Thermal Sciences*, 48:1161–1175 (2009b).

Wang, X., Wei, Y. y Shen, X. Numerical investigation of the first bifurcation for natural convection of fluids enclosed in a 2D square cavity with Pr lower than 1.0. *Energy Conversion and Management*, 50:2504–2512 (2009).

Wayne, C. E. Vortices and two-dimensional fluid motion. *Notices from the AMS*, 58(1) (2011).

Wu, W. y Ching, C. Laminar natural convection in an air-filled square cavity with partitions on the top wall. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53:1759–1772 (2010).

Xu, F., Patterson, J. C. y Lei, C. Transient natural convection flows around a thin fin on the sidewall of a differentially heated cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 639:261–290 (2009).

Zhang, W., Zhang, C. y Xi, G. Conjugate conduction-natural convection in an enclosure with time-periodic sidewall temperature and inclination. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 32:52–64 (2011).

APÉNDICE A

DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES

Al observar con detenimiento las ecuaciones (4.14) y (4.15), o en su caso (4.21) y (4.22), se nota que, las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de balance de energía tienen una estructura muy similar. Esta estructura será aprovechada en lo que sigue para obtener una ecuación discretizada general, misma que podrá ser empleada para cada caso mediante la elección de variables y parámetros adecuados. Los siguientes desarrollos se hacen por simplicidad en un espacio de dos dimensiones. Sin embargo, la extensión a tres dimensiones es directa.

Primero, la ecuación de continuidad adquiere la forma siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

aquí, u y v son las componentes de la velocidad. En seguida se considera la siguiente ecuación general

$$\frac{D\phi}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + Ri\,\theta + \Gamma\,\nabla^2\phi, \tag{A.1}$$

donde ϕ es una variable del flujo, que puede ser una componente de la velocidad o la temperatura y ∇^2 es el operador laplaciano usual. Es claro que, a partir de esta ecuación, se puede obtener cualquiera de las ecuaciones de gobierno del flujo, basta con elegir las variables y los parámetros adecuados. Ahora, es posible escribir esta ecuación de la forma siguiente

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + Ri\,\theta + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial y}\right),$$

que mediante la ecuación de continuidad se convierte en

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\phi - \Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\phi - \Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + Ri\,\theta. \tag{A.2}$$

A continuación se definen los flujos de convección-difusión,

$$J_x = u\phi - \Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial x}, \;\; \text{y} \;\; J_y = v\phi - \Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial y},$$

y se reescribe la ecuación (A.2) como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + Ri\,\theta. \tag{A.3}$$

Ahora, se integra esta ecuación sobre el volumen de control mostrado en la Figura 5.1, con lo que se obtiene

$$\frac{\phi_C - \phi_C^0}{\Delta t}\Delta x\Delta y + J_d - J_i + J_n - J_s + (P_d - P_i)\Delta y - Ri\,\theta_C\Delta x\Delta y = 0, \tag{A.4}$$

donde,

$$J_d = \int_s^n J_x(x=d)dy, \;\; J_i = \int_s^n J_x(x=i)dy,$$
$$J_s = \int_i^d J_y(y=s)dx, \;\; J_n = \int_i^d J_y(y=n)dx,$$

al hacer las integrales se han hecho las siguientes suposiciones: primero, los valores de ϕ y de la temperatura θ que prevalecen sobre el volumen de control son los del punto C, es decir ϕ_C y θ_C. También se supone que el valor de la presión sobre las caras del volumen de control i y d es el que toma en el centro de ellas, P_i y P_d respectivamente.

De manera similar, se integra la ecuación de continuidad sobre el mismo volumen de control y se obtiene

$$(u_d - u_i)\Delta y + (v_n - v_s)\Delta x = 0,$$

donde se ha supuesto que los valores u_i, u_d, v_s y v_n son los que se mantienen sobre las caras correspondientes. Al multiplicar la última expresión por ϕ_C y restar el resultado a la ecuación (A.4) se encuentra

$$\begin{aligned} &\frac{\phi_C - \phi_C^0}{\Delta t}\Delta x \Delta y + (J_d - F_d\,\phi_C) - (J_i - F_i\,\phi_C) + \\ (J_n - F_n\,\phi_C) - (J_s - F_s\,\phi_C) + (P_d - P_i)\Delta y - Ri\,\theta_C \Delta x \Delta y \;\; &= \;\; 0, \end{aligned} \tag{A.5}$$

en la ecuación anterior, se ha definido

$$F_d = u_d \Delta y, \quad F_i = u_i \Delta y, \quad F_n = v_n \Delta x \;\text{ y }\; F_s = v_s \Delta x. \tag{A.6}$$

Ahora, es necesario dar una expresión discretizada para los términos $J - F\,\phi_C$. Para ello, se consideran las ecuaciones de los flujos de convección-difusión, mismas que se presentan a continuación en forma adimensional.

$$J_x^* = \frac{J_x\,\delta}{\Gamma} = Pe_u \phi - \frac{\partial \phi}{\partial (x/\delta)},$$

$$J_y^* = \frac{J_y\,\delta}{\Gamma} = Pe_v \phi - \frac{\partial \phi}{\partial (y/\delta)},$$

donde $Pe_u = u\delta/\Gamma$ y $Pe_v = v\delta/\Gamma$ son números de Péclet locales. Dada la similitud de ambas ecuaciones se hacen los desarrollos solamente para la primera de ellas.

La Figura A.1, muestra dos nodos adyacentes y señala el lugar en el que se ubica la cara de un volumen de control como el mostrado en la Fig.5.1. En este caso, el valor de ϕ en

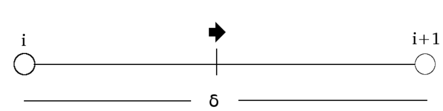

Figura A.1: Nodos adyacentes y ubicación esquemática de la cara del volumen de control en la discretización.

la cara del volumen de control será un promedio pesado entre los valores que se tienen en los nodos i e $i+1$, que se denotan por ϕ_i y ϕ_{i+1}. Además $\partial\phi/\partial(x/\delta)$ será proporcional a la diferencia $\phi_{i+1}-\phi_i$. Por tanto se escribe

$$J_x^* = (c\,\phi_i + (1-c)\phi_{i+1})Pe_u - d\,(\phi_{i+1}-\phi_i) = B\phi_i - A\phi_{i+1}, \tag{A.7}$$

donde c y d son constantes, además

$$A = d - (1-c)Pe_u,$$

$$B = c\,Pe_u + d,$$

y existe la relación $B = A + Pe_u$, que combinada con la ec.(A.7) da

$$\begin{aligned} J_x^* &= (A(Pe_u)+Pe_u)\phi_i - A(Pe_u)\phi_{i+1} \Rightarrow J_x^* - Pe_u\phi_i = A(Pe_u)(\phi_i-\phi_{i+1}), \\ J_x^* &= B(Pe_u)\phi_i - (B(Pe_u)-Pe_u)\phi_{i+1} \Rightarrow J_x^* - Pe_u\phi_{i+1} = B(Pe_u)(\phi_i-\phi_{i+1}). \end{aligned} \tag{A.8}$$

Al aplicar las ecs. (A.8) a las caras derecha e izquierdo del volumen de control respectivamente, se encuentra

$$J_{d1}^* - Pe_d\phi_C = A(Pe_d)(\phi_C-\phi_D) \quad \Rightarrow \quad J_{d1} - \frac{Pe_d\Gamma}{\delta_d}\phi_C = \frac{\Gamma A(Pe_d)}{\delta_d}(\phi_C-\phi_D), \tag{A.9}$$

$$J_{i1}^* - Pe_i\phi_C = B(Pe_i)(\phi_I-\phi_C) \quad \Rightarrow \quad J_{i1} - \frac{Pe_i\Gamma}{\delta_i}\phi_C = \frac{\Gamma B(Pe_i)}{\delta_i}(\phi_I-\phi_C), \tag{A.10}$$

donde el subíndice 1 indica que estos cálculos fueron hechos en una dimensión. Para obtener la expresión bidimensional, se asume que estos valores prevalecen sobre la cara del volumen de control correspondiente a cada uno y se integra respecto a y. De esta forma

$$J_d - u_d\Delta y\phi_C = \frac{\Gamma\Delta y}{\delta_d}A(Pe_d)(\phi_C-\phi_D), \tag{A.11}$$

$$J_i - u_i\Delta y\phi_C = \frac{\Gamma\Delta y}{\delta_i}B(Pe_i)(\phi_I-\phi_C), \tag{A.12}$$

con

$$J_d = \int_s^n J_{d1}dy, \quad J_i = \int_s^n J_{i1}dy.$$

Las expresiones (A.11) y (A.12) son válidas para las caras s y n del volumen de control si se hacen las modificaciones siguientes,

en (A.11) $\quad J_d \to J_n,\ u_d \to v_n,\ \Delta y \to \Delta x,\ Pe_d \to Pe_n$ y $\phi_D \to \phi_N,$

en (A.12) $\quad J_i \to J_s,\ u_i \to v_s,\ \Delta y \to \Delta x,\ Pe_i \to Pe_s$ y $\phi_I \to \phi_S,$

con esto se obtiene

$$J_n - v_n \Delta x \phi_C = \frac{\Gamma \Delta x}{\delta_n} A(Pe_n)(\phi_C - \phi_N) \tag{A.13}$$

$$J_s - v_s \Delta x \phi_C = \frac{\Gamma \Delta x}{\delta_s} B(Pe_s)(\phi_S - \phi_C), \tag{A.14}$$

Al sustituir las ecs. (A.11), (A.12), (A.13) y (A.14) en la ec. (A.5), usar la definición (A.6) y reordenar términos se encuentra

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \frac{\Gamma \Delta y}{\delta_d} A(Pe_d) + \frac{\Gamma \Delta y}{\delta_i} B(Pe_i) + \frac{\Gamma \Delta x}{\delta_n} A(Pe_n) + \frac{\Gamma \Delta x}{\delta_s} B(Pe_s)\right) \phi_C \\ - \frac{\Gamma \Delta y}{\delta_d} A(Pe_d)\phi_D - \frac{\Gamma \Delta y}{\delta_i} B(Pe_i)\phi_I - \frac{\Gamma \Delta x}{\delta_n} A(Pe_n)\phi_N - \frac{\Gamma \Delta x}{\delta_s} B(Pe_s)\phi_S \\ + (P_d - P_i)\Delta y - \Delta x \Delta y Ri\, \theta_C - \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}\phi_C^0 = 0.\end{aligned} \tag{A.15}$$

Esta expresión es la ecuación general discretizada, mediante la cual puede obtenerse una solución numérica de la ec. (A.3). Ahora, se definen los siguientes coeficientes

$$
\begin{aligned}
a_D &= \frac{\Gamma \Delta y}{\delta_d} A(Pe_d), \\
a_I &= \frac{\Gamma \Delta y}{\delta_i} B(Pe_i), \\
a_N &= \frac{\Gamma \Delta x}{\delta_n} A(Pe_n), \\
a_S &= \frac{\Gamma \Delta x}{\delta_s} B(Pe_s), \\
a_C &= a_D + a_I + a_N + a_S + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}, \\
b &= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \phi_C^0 + \Delta x \Delta y Ri\, \theta_C,
\end{aligned}
$$

con los que es posible escribir la ec. (A.15) como sigue

$$
a_C \phi_C = a_D \phi_D + a_I \phi_I + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b + (P_i - P_d)\Delta y. \tag{A.16}
$$

Se hace notar que, incluso en la ecuación discretizada, el significado físico de cada coeficiente es claro. Los coeficientes a_j dan cuenta del flujo producido por la convección y la difusión de la cantidad ϕ a través de las paredes respectivas, el coeficiente b da cuenta de los términos fuente de la cantidad ϕ y $(P_i - P_d)\Delta y$ es el término de forzamiento debido al gradiente de presión.

También se observa que los coeficientes a_j dependen de las velocidades a través de los números de Péclet generalizados. De esta forma, cuando la cantidad ϕ se elige como una componente de la velocidad, el producto $a_j \phi$ será un término no lineal. La forma de tratar estos términos en el presente trabajo es iterativa. En cada iteración, se calculan los coeficientes a_j a partir de los valores de la velocidad encontrados en la iteración inmediata anterior. De esta forma, la ec. (A.16) puede ser tratada como una ecuación lineal algebraica y resuelta con alguno de los métodos conocidos para resolver estas ecuaciones.

Antes de concluir esta sección, se resaltan las propiedades simétricas que poseen los coeficientes A y B. Para ello, se invierte el sentido del sistema coordenado, con lo cual $Pe_u \rightarrow -Pe_u$, y A cambia roles con B. Como esto no debe alterar los valores del flujo se concluye

$$A(Pe_u) = B(-Pe_u), \;\; \text{y} \;\; B(Pe_u) = A(-Pe_u).$$

Estas relaciones, hacen que sea suficiente evaluar la función A para valores positivos de Pe_u, para conocer A y B para todos los valores posibles de Pe_u. Esto se muestra considerando $Pe_u < 0$, con lo que se obtiene

$$A(Pe_u) = B(Pe_u) - P_u = A(-Pe_u) - Pe_u = A(|Pe_u|) - Pe_u,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} A(Pe_u) &= A(|Pe_u|) + [[-Pe_u, 0]] && \text{(A.17)} \\ B(Pe_u) &= A(|Pe_u|) + [[Pe_u, 0]], && \text{(A.18)} \end{aligned}$$

donde el operador $[[C, D]]$ devuelve el máximo entre C y D.

Diferentes elecciones de la función A llevan a diferentes esquemas de discretización, para este trabajo se elige el esquema de la ley de potencias, dado por

$$A(|Pe|) = [[0, (1 - 0.1|Pe|)^5]]. \tag{A.19}$$

Esta función es una excelente aproximación para la solución analítica de la ecuación estacionaria unidimensional

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right), \tag{A.20}$$

que modela de manera adecuada la convección y difusión de la cantidad ϕ.

APÉNDICE B

ECUACIONES DE CORRECCIÓN PARA LA VELOCIDAD Y LA PRESIÓN

A continuación, se derivan ecuaciones para ver como afecta a la velocidad un cambio en la presión. Se propone que la presión se obtiene de una expresión como la siguiente

$$P = P^* + P',$$

donde P^* es la presión en la iteración anterior y P' es la corrección para la presión. De la misma forma, se propone que la velocidad se obtiene de

$$u_i = u_i^* + u_i',$$

en esta expresión u_i^* es la velocidad conseguida en la iteración anterior y cumple la ec.(A.16) con $\phi = u_i^*$ y la presión igual a P^*, de la misma forma, se supone que u_i cumple la ec. (A.16) con la presión P. Se escriben ambas ecuaciones para la componente x,

$$a_C u_C^* = a_D u_D^* + a_I u_I^* + a_N u_N^* + a_S u_S^* + b + (P_i^* - P_d^*)\Delta y,$$

$$a_C u_C = a_D u_D + a_I u_I + a_N u_N + a_S u_S + b + (P_i - P_d)\Delta y,$$

al restar ambas ecuaciones se encuentra

$$a_C u'_C = a_D u'_D + a_I u'_I + a_N u'_N + a_S u'_S + (P'_i - P'_d)\Delta y.$$

En esta última expresión se pueden despreciar las contribuciones de las velocidades vecinas, lo que se hace principalmente para que las ecuaciones algebraicas resultantes sean manejables. Además, esto no afecta de manera alguna la solución final, solamente afecta la rapidez con la que se alcanza la convergencia. De esta forma se tiene

$$u'_C = \frac{\Delta y}{a_C}(P'_i - P'_d),$$

y se encuentra la forma en la que se modifica la velocidad ante un cambio en la presión

$$u_C = u^*_C + \frac{\Delta y}{a_C}(P'_i - P'_d). \tag{B.1}$$

La expresión para otras componentes es completamente análoga.

Ahora, se busca una expresión para obtener la corrección de la presión P', para esto se integra la ecuación de continuidad sobre el volumen de control mostrado en la Fig.5.1

$$(u_d - u_i)\Delta y + (v_n - v_s)\Delta x = 0,$$

al sustituir las expresiones correspondientes para la velocidad dadas por la ec. (B.1) se encuentra

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{1}{a_d} + \frac{1}{a_i}\right)\Delta y^2 + \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_s}\right)\Delta x^2\right] P'_C \;&=\; \frac{\Delta y^2}{a_d}P'_D + \frac{\Delta y^2}{a_i}P'_I + \frac{\Delta x^2}{a_n}P'_N + \frac{\Delta x^2}{a_s}P'_S \\ &\quad - \left[(u^*_d - u^*_i)\Delta y + (v^*_n - v^*_s)\Delta x\right].\end{aligned} \tag{B.2}$$

Esta ecuación es de la forma de la ec. (A.16) y proporciona las correcciones que deben hacerse al campo de presión para construir, paulatinamente, el campo correcto. También pueden definirse los coeficientes siguientes

$$\begin{aligned}
a_D &= \frac{\Delta y^2}{a_d}, \\
a_I &= \frac{\Delta y^2}{a_i}, \\
a_N &= \frac{\Delta x^2}{a_n}, \\
a_S &= \frac{\Delta x^2}{a_n}, \\
a_C &= a_D + a_I + a_N + a_S, \\
b &= -\left[(u_d^* - u_i^*)\Delta y + (v_n^* - v_s^*)\Delta x\right], \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}$$

que dependen únicamente de cantidades conocidas de la iteración inmediata anterior.

Se hace notar que, el término fuente de la corrección de la presión, dado por el coeficiente b, es el negativo de la integral de la ecuación de continuidad sobre el volumen de control. Si b es cero, entonces la velocidad encontrada en la iteración anterior junto con el campo de presión satisfacen la ecuación de continuidad y no se necesitan más correcciones. Por tanto, b representa un término fuente de masa que la ecuación de corrección de la presión debe aniquilar. De igual forma, se observa que por la característica anterior, este término fuente de masa es un buen parámetro para juzgar la convergencia en el proceso iterativo del algoritmo.

APÉNDICE C

ARTÍCULOS PUBLICADOS

Para finalizar, se resalta que como fruto de este trabajo, se logró la publicación de tres artículos de investigación en revistas de circulación internacional con arbitraje y se incluyen copias completas de los mismos a continuación de acuerdo al siguiente orden: en el primero de ellos Cajas et al. [2010], se investigó el proceso de transferencia de calor en una placa rectangular perforada, cuya conductividad térmica depende linealmente de la temperatura. En el segundo Martínez-Suástegui et al. [2011], se publicaron los resultados del análisis del canal vertical con fuentes de calor simétricas que se detallan en la sección 7.3. El tercer artículo Cajas y Treviño [2012], trata sobre los resultados obtenidos del estudio de la cavidad rectangular con relación de aspecto grande con paredes aislantes, mismos que se discuten en la sección 7.1. Finalmente, se hace mención de que se encuentra en elaboración un artículo que incluye los resultados presentados en la sección 7.2, correspondientes a la cavidad con paredes conductoras de calor.

JOURNAL OF THERMOPHYSICS AND HEAT TRANSFER
Vol. 24, No. 3, July–September 2010

Technical Notes

Variable Thermal Conductivity and Perforation Effects on a Heat-Conducting Plate

J. C. Cajas*
Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 México, D.F., México
C. Treviño†
Universidad Nacional Autónoma de México, 97356, Sisal, Yucatán, México
and
J. Lizardi‡
Universidad Autónoma de la Ciudad de México, 09790 México, D.F., México

DOI: 10.2514/1.46888

I. Introduction

THE heat transfer across irregular surfaces, such as perforated plates, has been extensively studied in the past to control the rate of thermal energy in heat exchanger devices. In some cases the use of perforated plates within ranges of temperature at which the material that constitutes the plate exhibits a temperature-dependent thermal conductivity is unavoidable. This makes necessary the study of the influence of variable thermal conductivity of perforated plates on heat conduction processes in order to improve the design and construction of the involved equipments.

Over the past years, important research efforts have been devoted to the study of surfaces with circular and elliptical perforations for the design of plate fin and tube heat exchangers, like those of Romero-Méndez et al. [1], Mon and Gross [2], Erek et al. [3], and Wu and Tao [4]. Experimental research has been developed in the works of Kim and Song [5] and Saboya and Saboya [6]. Also, remarkable numerical studies have been done for the problem of heat conduction over surfaces with complex geometries like the one of Blyth and Pozrikidis [7], in which the heat conduction over irregular and fractal-like surfaces is analyzed.

In the analysis of combustible flow around catalytic wires of circular section, the geometry of the system is similar to the one studied in the present work, making possible the use of the methods applied to such problems, like those found in the work of Vera and Liñán [8], and that of Lizardi et al. [9], who studied combustion problems around catalytic wires.

In the study of the effects of variable thermal conductivity in heat transfer processes, a great advance in research is achieved. Representative works are those of Hung and Appl [10], Aziz and Hug [11], Krane [12], Muzzio [13], Aziz and Benzies [14], and Aziz and Na [15], who have extensively applied regular perturbation techniques to clarify the role of variable thermal conductivity on the performance of longitudinal fins. Chiu and Chen [16] used a decomposition method to evaluate the efficiency and the optimal length of a convective fin with variable thermal conductivity. Later, Lizardi et al. [17] studied the conjugate film condensation heat transfer process in a vertical fin with temperature-dependent thermal conductivity using perturbation techniques and numerical calculations.

In this Note, the effect of a circular perforation combined with that of a variable thermal conductivity in a heat-conducting rectangular plate is studied.

II. Problem Formulation

The physical model under study is shown in Fig. 1. A rectangular plate of length $2L^*$, width $2a^*$ with a circular perforation of radius ε^* at the center is considered. Here, the superscript $*$ stands for dimensional quantities. The Cartesian coordinates x^* and y^* represent the longitudinal and transverse directions, respectively. The perforation, the upper and lower boundaries of the plate ($y^* = \pm a^*$) are assumed to be adiabatic, while the other two boundaries are assumed to be in contact with thermal reservoirs at different temperatures T_0^* at $x^* = -L^*$ and T_1^* at $x^* = +L^*$, with $T_0^* < T_1^*$ without loss of generality. The thermal conductivity of the plate, $k^*(T^*)$, is considered to exhibit a linear variation with temperature, which is common for different materials in a restricted temperature range. In this case, the nondimensional thermal conductivity $k(\theta)$ can be written as

$$k(\theta) = k^*(T^*)/k_0^* = 1 + \lambda\theta \tag{1}$$

where k_0^* is the thermal conductivity of the plate at temperature $T^* = T_0^*$. λ is defined as $\lambda = (T_1^* - T_0^*)/k_0^*(\mathrm{d}k^*/\mathrm{d}T^*)_0$, which measures the variation of thermal conductivity with temperature and can be positive or negative, depending on the material of the plate and θ is the nondimensional normalized temperature difference $\theta = (T^* - T_0^*)/(T_1^* - T_0^*)$. Thus, considering that no heat sources or sinks exists and the steady state is reached, the heat equation for this problem, in nondimensional form is given by

$$(1 + \lambda\theta)\nabla^2\theta + \lambda\nabla\theta\cdot\nabla\theta = 0 \tag{2}$$

where both coordinates are scaled with the width a^*. Taking advantage of the symmetry of the problem, the above equation can be solved only for the upper half of the plate, with the following boundary conditions:

$$\begin{aligned} &\theta(-L,y) = \theta(L,y) - 1 = \left.\frac{\partial\theta}{\partial y}\right|_{y=1} = 0 \qquad , \left.\frac{\partial\theta}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \\ &x \in (-L,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,L), \qquad \left.\frac{\partial\theta}{\partial r}\right|_{r=\varepsilon} = 0, \qquad x\in(-\varepsilon,\varepsilon) \end{aligned} \tag{3}$$

Here, L is the aspect ratio of the plate $L = L^*/a^*$, ε is the nondimensional radius of perforation $\varepsilon = \varepsilon^*/a^*$, and r is the usual polar nondimensional radial coordinate $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

To measure the influence of the perforation and the variable thermal conductivity, the longitudinal overall heat flux in the plate,

$$Q^* = 2\int_0^{a^*} k^*\partial T^*/\partial x^*|\,\mathrm{d}y^*$$

is calculated using the average Nusselt number, defined as

Received 28 August 2009; revision received 24 February 2010; accepted for publication 12 March 2010.

*Facultad de Ciencias; jc_cajas@ciencias.unam.mx.
†Facultad de Ciencias y Unidad Multidisciplinaria de Docencia e Investigación.
‡Colegio de Ciencia y Tecnología.

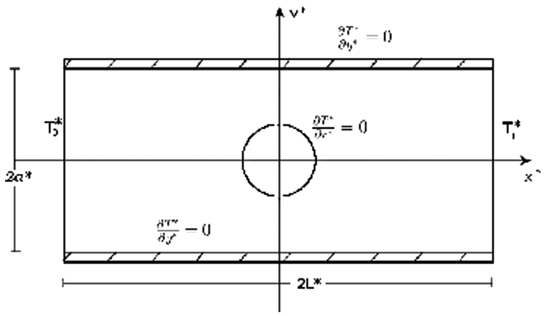

Fig. 1 Schematic diagram of the problem.

$$\bar{N}u = \frac{Q^*}{2k_0^*(T_1^* - T_0^*)} = \int_0^1 k(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (1+\lambda\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\,\mathrm{d}y \quad (4)$$

which is independent of the longitudinal coordinate x.

III. Numerical Method

A coordinate fitted grid generator was developed in order to obtain a computational domain that permitted to map the complex physical geometry of the problem in a simpler rectangular one. Figure 2 shows a schematic representation of the mapping.

In the grid generation technique used in this work, the coordinates (x, y) of the physical domain are obtained as the solution of a system of partial differential equations with Dirichlet boundary conditions and are functions of the rectangular transformed coordinates (ξ, η) [18]. In this Note, Poisson's equations were used in order to generate the grid, and the boundary conditions imposed were those that corresponded to the shape and size of the perforated plate.

The governing equation is transformed to the rectangular domain, obtaining a nonlinear partial differential equation for the dimensionless temperature θ as functions of the rectangular coordinates (ξ, η):

$$\alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \gamma\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} - 2\beta\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi\partial\eta} + \tau\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + \sigma\frac{\partial\theta}{\partial\eta} + \frac{\lambda}{1+\lambda\theta}\left(\alpha\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2 - 2\beta\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\eta} + \gamma\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)^2\right) = 0 \quad (5)$$

where α, β, γ, σ, and τ are transformation coefficients that are calculated from the generated grid. The explicit form of these coefficients and the details of the grid generation technique can be found elsewhere [9].

Uniform increments in both directions $\Delta\xi = 1/80$ and $\Delta\eta = 1/64$ were employed to discretize Eq. (5). Smaller space increments did not provide significant difference in heat transfer calculation (less than 1%). Using a fictitious time with increments of the order of $\Delta\xi\Delta\eta$, the transient form of Eq. (5) is solved in an semi-implicit form, by discretizing using centered finite differences. This procedure converts the transformed governing equation in a system of algebraic equations for both directions ξ and η. Each system of algebraic equations is arranged in the form of a tridiagonal matrix and solved by the use of an iterative procedure and a well known tridiagonal matrix solver. The nonlinear terms are calculated from a previous iteration. The iterative procedure stops when the convergence criteria (maximum difference between results of different iterations less than 10^{-8}) is achieved. The boundary conditions are imposed by fixing the values of the first and last rows of each tridiagonal matrix.

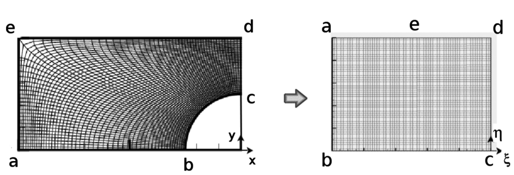

Fig. 2 Schematic representation of coordinate transformation.

IV. Asymptotic Solution

Assuming values of the nondimensional radius of perforation ε and the parameter λ to be very small compared with unity, it is possible to use the focus of the complex potential, which is usually employed in the description of flow around spheres or cylinders [8]. In the case of constant thermal conductivity $\lambda = 0$, Eq. (2) becomes Laplace's equation, and its solution can be obtained using the complex potential of a linear array of point-sources dipoles located at the points $(0, 2n)$, with $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, and a constant heat flux. In this manner, the solution of Laplace equation with the boundary conditions (3) up to order ε^4 is

$$\theta_0(x, y) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\pi\varepsilon^2}{2L} + \frac{\pi^2\varepsilon^4}{4L^2} - \frac{\pi^3\varepsilon^4}{24L}\right)\frac{x}{2L} + \left(\frac{\pi\varepsilon^2}{4L} + \frac{\pi^3\varepsilon^4}{48L} - \frac{\pi^2\varepsilon^4}{8L^2}\right)\frac{\sinh(\pi x)}{\cosh(\pi x) - \cos(\pi y)} + \mathcal{O}(\varepsilon^6) \quad (6)$$

In the case of linear variation of thermal conductivity with temperature, a solution of the form $\theta = \theta_0 + \lambda\theta_1 + \lambda^2\theta_2$ is proposed for Eq. (2), substituting and keeping only terms of first order in λ an equation for θ_1 is obtained,

$$\nabla^2\theta_1 = \frac{1}{4L^2} + \frac{\pi\varepsilon^2}{4L^2}\left(\frac{1}{L} - \pi\frac{1 - \cosh(\pi x)\cos(\pi y))}{(\cosh(\pi x) - \cos(\pi y))^2}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (7)$$

to be solved with the following homogeneous boundary conditions:

$$\theta_1(L, y) = \theta_1(-L, y) = 0, \qquad \left.\frac{\partial\theta_1}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial\theta_1}{\partial y}\right|_{y=1} = 0 \quad (8)$$

The solution of Eq. (7) is given by

$$\theta_1(x, y) = \left(\frac{1}{8} - \frac{x^2}{8L^2}\right) + \frac{\pi\varepsilon^2 x}{8L^2}\left(\frac{x}{L} - \frac{\sinh(\pi x)}{\cosh(\pi x) - \cos(\pi y)}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (9)$$

Finally, the solution for Eq. (2) is

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\pi\varepsilon^2}{2L} + \frac{\pi^2\varepsilon^4}{4L^2} - \frac{\pi^3\varepsilon^4}{24L}\right)\frac{x}{2L} + \left(\frac{\pi\varepsilon^2}{4L} + \frac{\pi^3\varepsilon^4}{48L} - \frac{\pi^2\varepsilon^4}{8L^2}\right)\frac{\sinh(\pi x)}{\cosh(\pi x) - \cos(\pi y)} + \frac{\lambda}{8}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{\lambda\pi\varepsilon^2 x}{8L^2}\left(\frac{x}{L} - \frac{\sinh(\pi x)}{\cosh(\pi x) - \cos(\pi y)}\right) + \frac{\lambda^2}{16}\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2\left(1 - \frac{x}{L}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^6, \lambda\varepsilon^4, \lambda^3) \quad (10)$$

where only the leading-order term is retained for θ_2. From Eqs. (4) and (10) the average Nusselt number is calculated up to terms of order $\mathcal{O}(\varepsilon^4, \lambda\varepsilon^2)$ and is given by

$$\bar{N}u = \frac{1}{2L}\left[1 - \frac{\pi\varepsilon^2}{2L}\right]\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{1}{2L}\left[\frac{\pi^2\varepsilon^4}{4L^2}\left(1 - \frac{\pi L}{6}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^6, \lambda\varepsilon^4) \quad (11)$$

V. Numerical Results

The numerical method was applied to plates of three different aspect ratios $L = 3/2$, 2, and 5/2, with 16 different radii of perforation between $\varepsilon = 0.01$ and 0.75. The values of the nondimensional thermal conductivity parameter λ studied were 0.55, 0.10, 0.00, −0.05, and −0.10. Figures 3 and 4 show the numerical result for the average Nusselt number $\bar{N}u$ for the three aspect ratios as a function of the radius of perforation for $\lambda = 0.55$, and −0.10, corresponding to a stainless steel and a platinum plate between thermal reservoirs at 100 and 200°C. The average Nusselt number

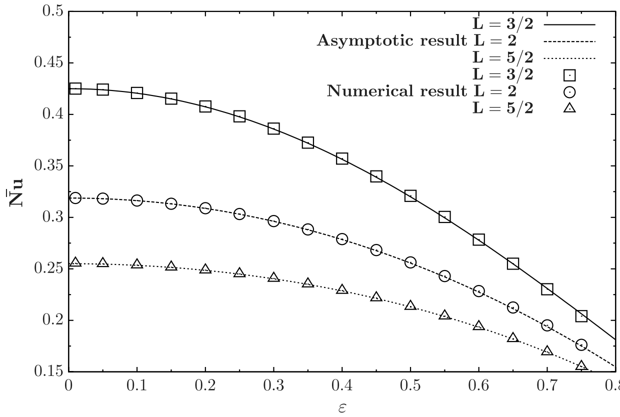

Fig. 3 Average Nusselt number for $\lambda = 0.55$.

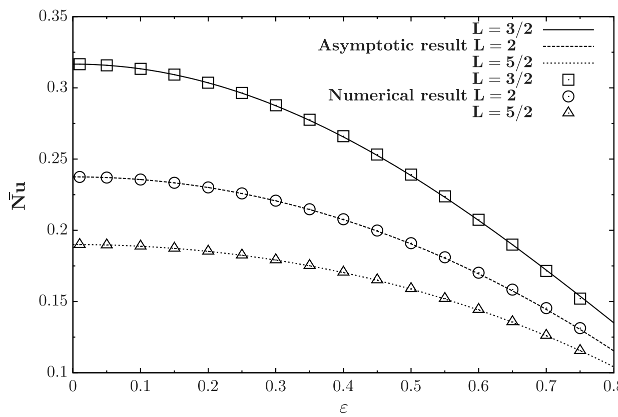

Fig. 4 Average Nusselt number for $\lambda = -0.10$.

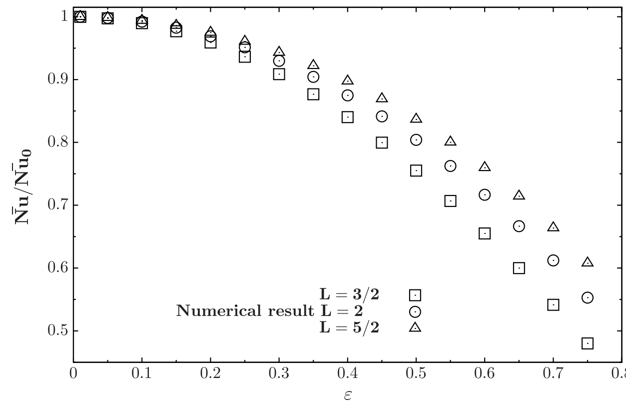

Fig. 5 Normalized average Nusselt number for $\lambda = 0$.

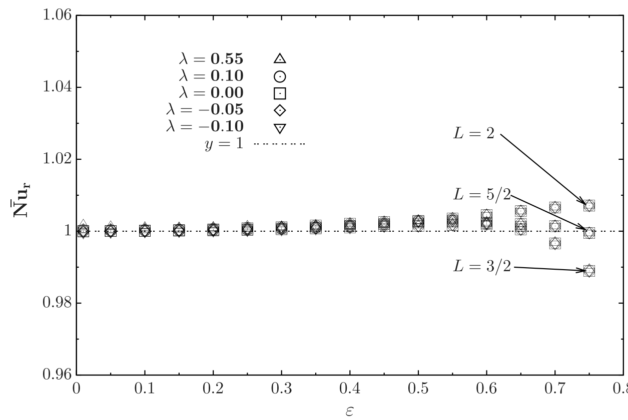

Fig. 6 Reduced average Nusselt number.

decreases with the size of the perforation as predicted by the asymptotic solution given by Eq. (11). In fact, the asymptotic solution obtained for small values of ε gives excellent results for values of ε up to 0.75. It is to be noted that for a value of the aspect ratio of $L = 6/\pi$ the correction of order ϵ^4 vanishes identically.

To compare the effect of the radius of perforation on the heat conduction in plates with the same thermal conductivity parameter λ but different aspect ratios L, the average Nusselt number can be normalized with the value of the corresponding average Nusselt number for a rectangular plate without perforation, $\bar{Nu}_0$. A typical result for this normalized average Nusselt number is shown in Fig. 5. The plot indicates that the negative effect on the heat transfer is independent of the aspect ratio of the plate for small values of the radius of perforation up to $\varepsilon = 0.1$, meanwhile for larger values of ε the negative effect is greater for plates with smaller aspect ratios and is smaller for plates with larger aspect ratios.

As dictated by the asymptotic solution given by Eq. (11), a reduced averaged Nusselt number can be defined as

$$\bar{Nu}_r = \frac{2L\bar{Nu}}{[1 - \frac{\pi\varepsilon^2}{2L} + \frac{\pi^2\varepsilon^4}{4L^2}(1 - \frac{\pi L}{6})](1 + \frac{\lambda}{2})} \tag{12}$$

where an appropriate factorization has been used. Figure 6 shows the plot for $\bar{Nu}_r$ as a function of ε for all values of parameter λ and for all aspect ratios of the plates considered in this work. The plot shows that the effect of a thermal conductivity that varies with temperature in the form of Eq. (1) affects the heat transfer on the plate by including an overall factor $(1 + \lambda/2)$, making $\bar{Nu}_r$ almost independent of the value of λ. This result was expected, given that thermal conductivity is a property of the material of the plate and is independent of its shape. The reduced Nusselt number is independent of ε for all the studied values (the maximum difference is of order 1% for $\varepsilon = 0.75$), which indicates that the asymptotic solution is valid in all these cases.

The effect of the perforation over the temperature distribution in the upper limit of the plate is shown in the Fig. 7 for the extreme case of $\lambda = 0.55$, other cases follow the same trends. The effect of three different values of the nondimensional radius ($\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.40$ and $\varepsilon = 0.75$) are compared. For small radius of perforation, the temperature distribution is close to the corresponding to a rectangular plate without perforation. When the radius of perforation becomes greater, the temperature distribution is deformed and a region of greater thermal stress is created.

Comparing the final results for average Nusselt number equation (11) for the cases $\lambda = 0$ and $\varepsilon = 0$,

$$\bar{Nu}(\varepsilon, L, \lambda = 0) = \frac{1}{2L}\left[1 - \frac{\pi\varepsilon^2}{2L} + \frac{\pi^2\varepsilon^4}{4L^2}\left(1 - \frac{\pi L}{6}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^6)$$

$$\bar{Nu}(\varepsilon = 0, L, \lambda) = \frac{1}{2L}\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)$$

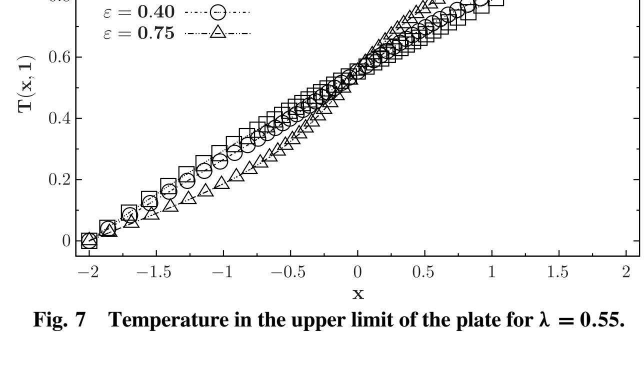

Fig. 7 Temperature in the upper limit of the plate for $\lambda = 0.55$.

it is possible to conclude that a perforated plate with radius of perforation ε can be considered as a nonperforated plate with a variable thermal conductivity with thermal conductivity parameter $\lambda = -\pi\varepsilon^2/L + \pi^2\varepsilon^4(1 - \pi L/6)/(2L^2)$, giving a nondimensional thermal conductivity of the form

$$k(\theta) = 1 + \left(\frac{-\pi\varepsilon^2}{L} + \frac{\pi^2\varepsilon^4}{2L^2}\left(1 - \frac{\pi L}{6}\right)\right)\theta \tag{13}$$

which reminds Einstein's law for viscosity. This suggests that a general law for the effect of circular perforations on the heat transfer process across a rectangular plate, similar to that of the viscosity of a fluid, can be obtained as a generalization of the present work.

VI. Conclusions

In this work both numerical and asymptotic analyses have been done in order to obtain the influence of circular perforations and variable thermal conductivity on the overall heat transfer rate of a rectangular plate. The asymptotic analysis gives excellent results for all the values of the ratio of the perforation radius to the half-width of the plate and for all values of λ considered. Thus an excellent analytic description of the overall nondimensional heat flux (Nusselt number) is provided by Eq. (11).

References

[1] Romero-Méndez, R., Sen, M., Yang, K. T., and McClain, R., "Effect of Fin Spacing on Convection in a Plate Fin and Tube Heat Exchanger," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, No. 1, 2000, pp. 39–51.
doi:10.1016/S0017-9310(99)00120-9

[2] Mon, M. S., and Gross, U., "Numerical Study of Fin-Spacing Effects in Annular-Finned Tube Heat Exchangers," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, Nos. 8–9, 2004, pp. 1953–1964.
doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.09.034

[3] Erek, A., Ozerdem, B., Bilir, L., and Ilken, Z., "Effect of Geometrical Parameters on Heat Transfer and Pressure Drop Characteristics of Plate Fin and Tube Heat Exchangers," *Applied Thermal Engineering*, Vol. 25, No. 14–15, 2005, pp. 2421–2431.
doi:10.1016/j.applthermaleng.2004.12.019

[4] Wu, J., and Tao, W., "Investigation on Laminar Convection Heat Transfer in Fin-and-Tube Heat Exchanger in Aligned Arrangement with Longitudinal Vortex Generator from the Viewpoint of Field Synergy Principle," *Applied Thermal Engineering*, Vol. 27, Nos. 14–15, 2007, pp. 2609–2617.
doi:10.1016/j.applthermaleng.2007.01.025

[5] Kim, J. Y., and Song, T. H., "Microscopic Phenomena and Macroscopic Evaluation of Heat Transfer from Plate Fins/Circular Tube Assembly Using Naphthalene Sublimation Technique," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, No. 16, 2002, pp. 3397–3404.
doi:10.1016/S0017-9310(02)00047-9

[6] Saboya, S. M., and Saboya, F. E. M., "Experiments on Elliptic Sections in One and Two Row Arrangements of Plate Fin and Tube Heat Exchangers," *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 24, Nos. 1–2, 2001, pp. 67–75.
doi:10.1016/S0894-1777(00)00059-5

[7] Blyth, M. G., and Pozrikidis, C., "Heat Conduction Across Irregular and Fractal-Like Surfaces," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 8, 2003, pp. 1329–1339.
doi:10.1016/S0017-9310(02)00419-2

[8] Vera, M., and Liñán, A., "Low Peclet Number Flow of a Reacting Mixture Past an Array of Catalytic Wires," *Combustion Theory and Modelling*, Vol. 8, No. 1, 2004, pp. 97–121.
doi:10.1088/1364-7830/8/1/006

[9] Lizardi, J., Treviño, C., and Liñán, A., "Ignition and Combustion of Diluted Hydrogen Mixtures in a Flow Past an Array of Catalytic Wires," *Combustion Theory and Modelling*, Vol. 11, No. 3, 2007, pp. 483–499.
doi:10.1080/13647830601045158

[10] Hung, H. M., and Appl, F. C., "Heat Transfer of Thin Fins with Temperature Dependent Thermal Properties and Internal Heat Generation," *Journal of Heat Transfer*, Vol. 89, 1967, pp. 155–161.

[11] Aziz, A., and Hug, S. M. E., "Perturbation Solution for Convecting Fin with Variable Thermal Conductivity," *Journal of Heat Transfer*, Vol. 97, No. 2, 1975, pp. 300–301.

[12] Krane, R. J., "Discussion on a Previously Published Paper by Aziz A and Enamul Hug SM," *Journal of Heat Transfer*, Vol. 98, 1976, pp. 685–686.

[13] Muzzio, A., "Approximate Solution for Convective Fins with Variable Thermal Conductivity," *Journal of Heat Transfer*, Vol. 98, 1976, pp. 680–682.

[14] Aziz, A., and Benzies, Y., "Application of Perturbation Techniques to Heat-Transfer Problems with Variable Thermal Properties," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 19, No. 3, 1976, pp. 271–276.
doi:10.1016/0017-9310(76)90030-2

[15] Aziz, A., and Na, T. A., "Periodic Heat Transfer in Fins with Variable Thermal Parameters," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 24,No. 8, 1981, pp. 1397–1404.
doi:10.1016/0017-9310(81)90189-7

[16] Chiu, C.-H., and Chen, C.-K., "A Decomposition Method for Solving the Convective Longitudinal Fins with Variable Thermal Conductivity," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, No. 10, 2002, pp. 2067–2075.
doi:10.1016/S0017-9310(01)00286-1

[17] Lizardi, J., Treviño, C., and Méndez, F., "The Influence of the Variable Thermal Conductivity of a Vertical Fin on a Laminar-Film Condensation Process," *Heat and Mass Transfer*, Vol. 40, No. 5, 2004, pp. 383–391.
doi:10.1007/s00231-003-0440-1

[18] Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A., and Mastin, C. W., "Boundary-Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations—A Review," *Journal of Computational Physics*, Vol. 47, No. 1, 1982, pp. 1–108.
doi:10.1016/0021-9991(82)90066-3

Thermal nonlinear oscillator in mixed convection

L. Martínez-Suástegui
ESIME Azcapotzalco, Instituto Politécnico Nacional, Avenida de las Granjas No. 682, Colonia Santa Catarina, Delegación Azcapotzalco, México, Distrito Federal 02250, Mexico

C. Treviño
UMDI, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Sisal, Yucatán, Mexico

J. C. Cajas
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, México, Distrito Federal 04510, Mexico
(Received 25 February 2011; revised manuscript received 25 August 2011; published 13 October 2011)

A detailed numerical simulation is carried out for transient laminar flow opposing mixed convection in a downward vertical channel flow with both walls suddenly subjected to isothermal heat sources over a finite portion of the channel walls, by solving the unsteady two-dimensional Navier-Stokes and energy equations. The dynamical behavior of the system is influenced by, in addition to the geometrical parameters, three nondimensional parameters: the Reynolds, Richardson, and Prandtl numbers. Numerical experiments were performed for fixed values of the geometrical parameters, the Reynolds number (Re = 100) and the Prandtl number (Pr = 7). With variation in the value of the buoyancy (Richardson number), the nonlinear dynamical response of the system can reach (i) a stationary solution, (ii) a local and then a global periodic solution where the system executes self-sustained relaxation oscillations, or (iii) a solution in which the relaxation oscillation is destroyed leading to a chaotic state. In this study, bifurcations between different states, phase-space plots of the self-oscillatory system, characteristic times of temperature oscillations, and an exact description of the oscillations are presented quantitatively for a range of values of the buoyancy parameter. The results include the effects of the Reynolds and Prandtl numbers on the evolution of the different transitions.

DOI: 10.1103/PhysRevE.84.046310 PACS number(s): 47.20.Ky, 44.25.+f, 44.27.+g, 47.15.Rq

I. INTRODUCTION

Mixed convection is defined as a heat transfer situation where both natural and forced convection mechanisms interact. In particular, the oscillatory behavior in mixed convection flows is of great interest because of its rich dynamical features and useful results for applied problems. Chang and Lin [1] studied steady laminar and transient oscillatory mixed convection in a symmetrically heated vertical plane channel subjected to an opposing buoyancy, assuming a fully developed velocity profile at the inlet and discrete heat sources that are maintained at uniform and equal heat fluxes. The authors pointed out that an oscillatory flow with a single fundamental frequency is found when the buoyancy parameter, or Richardson number, exceeds a critical value. Lin *et al*. [2] investigated numerically the detailed flow and thermal characteristics in transient laminar flow opposing mixed convection in a vertical plane channel subjected to a symmetrical heat input. Their results show that at high opposing buoyancy, sudden flow asymmetry and oscillation occur simultaneously in an early steady flow after the initial transient. Evans and Greif [3] showed the strong effects of buoyancy, even for small temperature differences, on the downward flow of nitrogen in a partially heated tall vertical channel and reported time-dependent oscillations, including periodic flow reversals along the channel walls. Martínez-Suástegui and Treviño [4,5] investigated the transient laminar mixed convection in an asymmetrically and differentially heated vertical channel of finite length subjected to an opposing buoyancy. Their results show that a final steady or oscillatory flow response is obtained depending on the values of the Reynolds and Richardson numbers, and that the critical value of the buoyancy strength between the two regimes strongly depends on the value of the Reynolds number. Stability analyses in mixed convection flows have been developed through recent years and their results provide further insight into the instability mechanisms present in such situations and give quantitative information about the defining and critical parameters involved. Guillet *et al*. [6] considered the problem of laminar-assisted mixed convection flow between parallel, vertical, and uniformly heated plates where the governing dimensionless parameters are the Prandtl, Rayleigh, and Reynolds numbers. By use of a method based on the center manifold theorem, the authors proved that there is a pitchfork bifurcation in the system for a critical value of the Rayleigh number. Chen and Chung [7,8] studied the stability of a differentially heated vertical channel for various Prandtl numbers and showed that both the Prandtl number and the Reynolds number have very important effects on the instability mechanism for high Prandtl number fluids. Suslov and Paolucci [9] studied the stability of mixed convection flow in a tall vertical channel under non-Boussinesq conditions and showed that the stability characteristics, such as the critical Grashof number and the disturbance wave speed, depend strongly on the temperature difference when fluid properties are allowed to vary. Bera and Khalili [10] numerically studied the impact of permeability on the stability of a buoyancy-opposed fully developed basic flow in a vertical channel. Daniels [11] studied the stationary instability of the convective flow between differentially heated vertical planes and determined the subsequent structure of the neutral curve for stationary disturbances.

Although the oscillatory behavior of Navier-Stokes-type systems in mixed convection has received relatively little attention, it is known that these flows can exhibit interesting dynamical phenomena. In many cases, the transition to turbulence is a chain of oscillatory states separated by bifurcations of different types. Examples where the bifurcation structure of such systems has been studied follow. Meron and Procaccia [12] showed that in dynamical systems described by critical flows, the onset of chaos is via gluing bifurcations, and that these systems can be analyzed using discontinuous maps of the interval. Gluing bifurcations are a class of global bifurcations where, as an external control parameter is varied, two symmetrically related time-periodic states simultaneously become homoclinic to an unstable saddle state and result in a single symmetric time-periodic state [13–15]. Arneodo *et al.* [16] performed a study for one route to chaos via a cascade of bifurcations involving homoclinic orbits. In [17], Rucklidge described the transition to chaos through gluing processes in a three-dimensional magnetoconvection model. Marques *et al.* [18] studied numerically a one-dimensional route in parameter space of a periodically forced flow with symmetry and provided a comprehensive analysis of the route to chaos, which involves a new and convoluted symmetry breaking that includes heteroclinic, homoclinic, and gluing bifurcations. Lopez and Marques [19] obtained three-tori solutions of the Navier-Stokes equations and their dynamics by use of a global Poincaré map. Their results show that these solutions undergo global bifurcations that include a new gluing bifurcation associated with homoclinic and heteroclinic connections to unstable solutions (two-tori) that act as organizing centers for the three-tori dynamics. The foregoing survey of the literature reveals that there are relatively few studies that address the effect of transient and unstable flow and thermal characteristics in internal mixed convection for opposing flow in situations where flow reversal occurs; fewer studies deal with the investigation of the self-oscillatory characteristics of these thermal oscillators. In the present study, a detailed numerical simulation for transient laminar flow opposing mixed convection in a vertical channel of finite length subjected to isothermal and discrete heat inputs is investigated by solving the unsteady two-dimensional Navier-Stokes and energy equations for the case of symmetrical heating. Given the parameters of the system, we aim to describe its dynamical properties by modeling its spatiotemporal patterns and the transition between different states depending on the range of values of the buoyancy parameter.

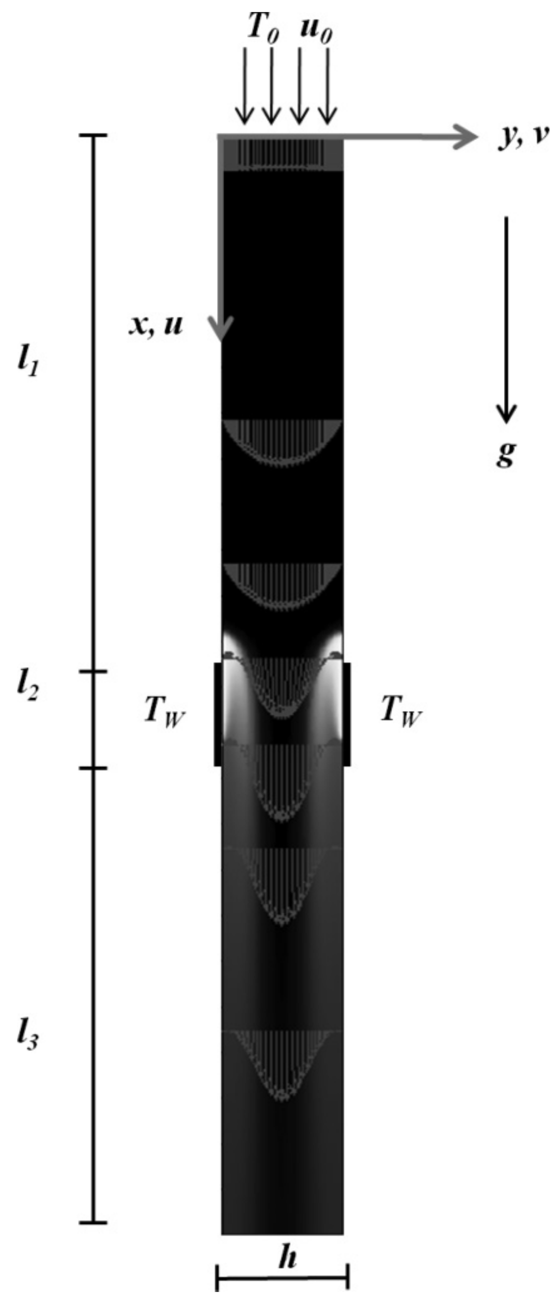

FIG. 1. Schematic diagram of the flow and heat transfer problem.

II. PROBLEM DESCRIPTION

In the present work, we undertake the problem of performing a detailed numerical study in transient laminar flow opposing mixed convection in a vertical channel of finite length with a flat velocity distribution at the channel entrance and where the channel walls are discretely and symmetrically heated. The schematic view of the geometry considered, which consists of a steady Newtonian, two-dimensional, laminar downflow at the entrance of a vertical duct with symmetric and finite heat sources, is shown in Fig. 1. The forced flow is driven by gravitational force acting vertically downward, entering the duct with a uniform velocity u_0 and ambient temperature T_0. Axial distances from the entrance section are measured by the x coordinate (positive downward), while transverse distances are measured by y ($y = 0$ at the left wall). Both walls, separated by a distance h, have discrete heat sources of length l_2 located at $x = l_1$, with uniform wall temperature T_w, where $T_w > T_0$. All other surfaces of the channel walls are assumed adiabatic. Flow rectifiers are placed at the channel entrance and exit, thus producing a parallel flow at $x = 0$ and $x = l_1 + l_2 + l_3$, with a flat velocity distribution at the channel entrance u_0. It is also assumed that once the fluid leaves the channel it has no influence on the flow inside the channel. This can be accomplished by including a short receptacle to collect the outgoing fluid followed by an open exit to the atmosphere. The viscous dissipation in the energy equation is neglected, and the thermophysical properties of the fluid are assumed to be constant except for the density in the buoyancy term, which is treated according to the Boussinesq approximation. The flow is described by the dimensionless two-dimensional continuity, Navier-Stokes, and energy equations,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = -\vec{\nabla} P + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \vec{V} - H(\tau)\mathrm{Ri}\theta\vec{i}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\theta = \frac{1}{\mathrm{PrRe}}\nabla^2 \theta, \quad (3)$$

where $\vec{V} = (U,V)$ is the dimensionless velocity vector and P and θ are the dimensionless pressure and temperature, respectively. In the above equations, all velocity components (U in the X direction and V in the Y direction) are scaled with the inflow velocity u_0, $U = u/u_0$ and $V = v/u_0$; the longitudinal coordinates are scaled with the channel width h, $X = x/h$ and $Y = y/h$; the time is scaled with the residence time h/u_0, $\tau = tu_0/h$; the temperature is normalized as $\theta = (T - T_0)/(T_w - T_0)$; and the relative pressure is scaled with the dynamic pressure $\rho_0 u_0^2$, $P = (p - p_0 - \rho_0 g x)/\rho_0 u_0^2$. $\vec{i}$ represents the nondimensional unit vector in the longitudinal coordinate X. Here $H(\tau)$ corresponds to the Heaviside step function. This latter arises because the assumed initial condition corresponds to the downward flow without buoyancy. The nondimensional parameters appearing in the above equations are the Reynolds number $\mathrm{Re} = u_0 h/\nu$ (ratio of inertial to viscous forces), the Prandtl number $\mathrm{Pr} = \nu/\alpha$ (ratio of viscous to thermal diffusivities), and the Richardson number $\mathrm{Ri} = g\beta(T_w - T_0)h/{u_0}^2$ (ratio of buoyancy-induced potential to forced kinetic energy). Here, g is the acceleration due to gravity and β is the thermal expansion coefficient. Another buoyancy parameter employed frequently is the Grashof number, $\mathrm{Gr} = \mathrm{RiRe}^2$, which relates buoyancy to viscous forces. Additional nondimensional geometrical parameters arise through the boundary conditions $L_i = l_i/h$, with $i = 1,3$. Equations (1) to (3) have to be solved with the following boundary conditions: no slip at the walls and $U = V = 0$ at $Y = Y_w$, with $Y_w = 0$ for the left wall or $Y_w = 1$ for the right wall; known flow conditions at the entrance of the channel, $P = U - 1 = V = 0$ at $X = 0$. Parallel flow at the exit is described by $V = \partial U/\partial X = 0$ at $X = L = L_1 + L_2 + L_3$. The boundary conditions for temperature are the following: fixed temperature at the heated sections, $\theta = 1$ at $Y = Y_w$ for $L_1 \leqslant X \leqslant L_1 + L_2$. Adiabatic channel walls are considered, $\partial\theta/\partial Y = 0$ at $L_1 > X > L_1 + L_2$ and $Y = Y_w$. The condition at the exit is the normally assumed relaxed condition $\partial\theta/\partial X = 0$ at $X = L_1 + L_2 + L_3$. The boundary condition for the nondimensional pressure at the channel walls can be obtained from

$$P(X,Y_w) = \int_0^X \left.\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right|_{Y=Y_w} dX - \mathrm{Ri}\int_0^X \theta(X,Y_w)dX. \quad (4)$$

The dynamical properties of the system are described using the average nondimensional heat fluxes or Nusselt numbers at both heated plates, $\mathrm{Nu}_{L,R} = |\overline{q}_{L,R}|h/[k(T_w - T_0)]$ and the nondimensional first moment of the longitudinal velocity, $Y_p = (1/h^2 u_0)\int_0^h yu\,dy$. Here k is the thermal conductivity of the fluid. $\mathrm{Nu}_{L,R}$ depend only on time and Y_p is a function of the longitudinal position and time. Due to baroclinity—the last term of Eq. (2)—vorticity is produced and vortices (large recirculation bubbles) are generated. The position of the recirculation zones is represented by a stagnation point at $X = X_s(\tau)$, defined by the maximum value of X, where the longitudinal velocity component is non-negative in the vortex region.

III. NUMERICAL SOLUTION

A strongly nonuniform staggered grid system with a denser clustering near the heated plate was used. The nonuniform grid has the highest grid density near the channel walls (due to the large velocity and temperature gradients) and close to the heat sources at the channel's midsection. Information about the functions that generate the mesh in the longitudinal and transverse directions is given in detail in [5] and is not repeated herein. To ensure a good compromise between the machine computational time and the accuracy requirements, a nonuniform computational mesh for the channel with 121×51 grid points was used for all calculations so that independent mesh results are achieved. The system of nonlinear equations (1)–(3) with the prescribed boundary conditions is solved by a numerical method based on finite differences and is marched in time using a predictor-corrector method for all grid points throughout the channel. For numerical stability, positive and negative values of the convective terms are discretized with upwind and rearward differencing, respectively, while the buoyancy and diffusion terms are discretized with a central difference formulation. Convergence of iteration is obtained at each time step, and during the numerical calculation the Prandtl number is kept constant, $\mathrm{Pr} = 7$. In all of the cases studied, numerical experiments have been carried out for a Reynolds number of 100 and employing a computational domain with $l = 12h$. The length of the heated slabs is $l_2 = h$,

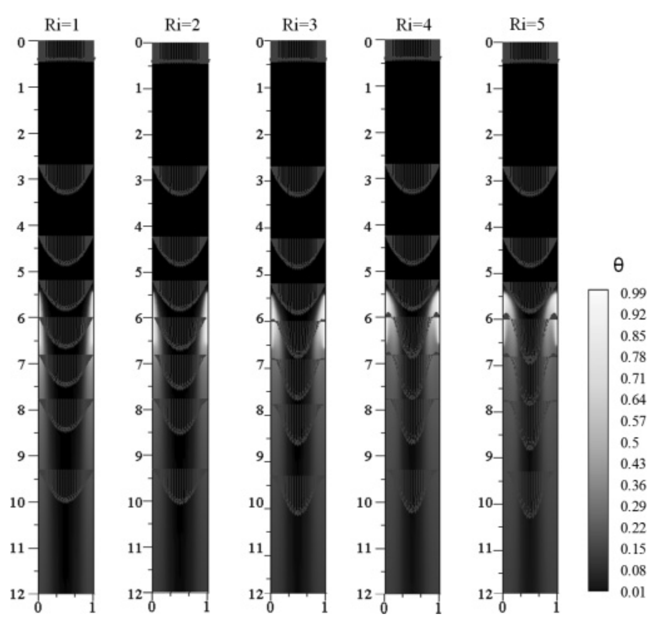

FIG. 2. Final states for a steady and symmetrical dynamical response of the system for low Richardson numbers. The nondimensional longitudinal velocity is represented by arrows and the nondimensional temperature in shades of gray.

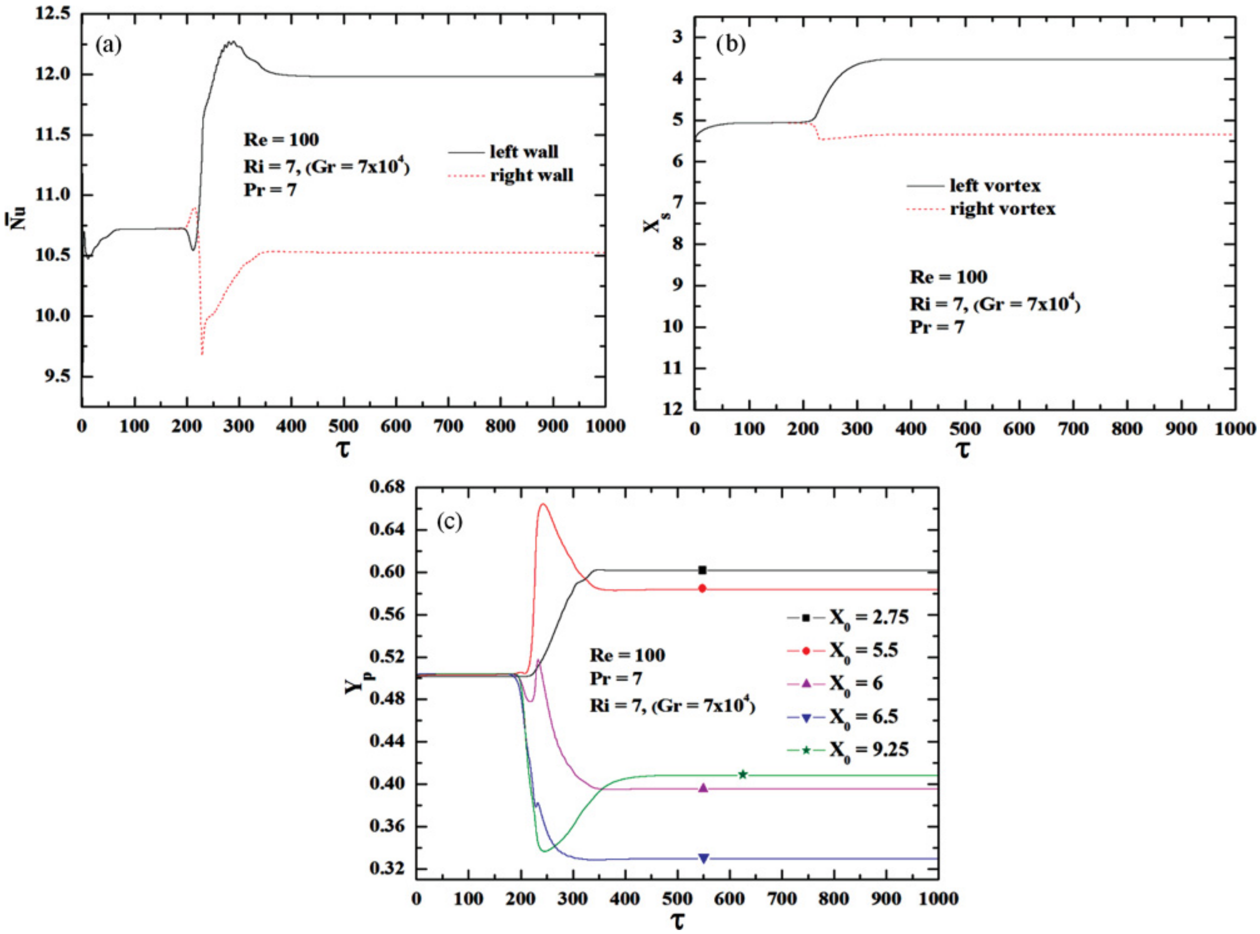

FIG. 3. (Color online) Time evolution for (a) overall Nusselt numbers, (b) vortices' upper positions, and (c) flow mass centroid at different longitudinal positions, for Ri = 7.

and they are located at $x = l_1 = 5.5h$, that is, $l_1 = l_3 = 5.5h$. The nondimensional time step $\Delta\tau = u_0 \Delta t / h$ has been set to 5×10^{-4}, and computation is terminated when the time evolution of the system state reaches steady state, a final self-sustained oscillatory state, or a chaotic state. In general, there is no need to introduce an artificial perturbation to reproduce the system dynamical response. However, for values of the buoyancy parameter close to a critical value, large induction times are obtained. For these cases, a temporal asymmetric artificial perturbation term is introduced in the buoyancy parameter, which modifies the Richardson number to the form $\mathrm{Ri}[1 + \varepsilon \exp(-\tau/\tau_c) \cos(2\pi Y)]$, where $\varepsilon = 0.05$ and $\tau_c = 2$ are the assumed values.

The critical values for the Richardson number that dictate the nonlinear dynamical response of the system were obtained by inspecting the value of the overall Nusselt numbers and the location of the stagnation points as $\tau \to \infty$. Starting with a fixed value of the buoyancy parameter, numerical simulations were performed using increments of $\Delta\mathrm{Ri} = 0.1$. This methodology was repeated until the value of these global variables reached either a constant value (steady state) or an asymmetric (symmetric) periodic value that corresponds to local (global) oscillatory states, respectively. These thresholds represent the critical values of the Richardson number for the different transitions, and the precision of these values is 1×10^{-1}.

IV. NUMERICAL RESULTS

The initial condition for the fluid flow corresponds to that without buoyancy, which results from a forced flow along the channel and is obtained from the governing equations with Ri = 0. Computation is started immediately after the sudden imposition of a uniform wall nondimensional temperature from 0 to 1 on the left and right walls over the finite nondimensional length l_2/h at time $\tau = 0$, where two boundary layer flows close to the walls of the channel are generated.

A. Steady state

After switching the buoyancy on and for relatively small values of the Richardson number, the flow reverses close to the heated slabs, and a pair of symmetric vortices develop due to baroclinity. Both vortices reach a maximum position represented by the stagnation point, which decreases (higher positions) as the buoyancy parameter increases. There is an equilibrium between buoyancy in the hot recirculation bubble and the dynamical pressure and drag from the cold

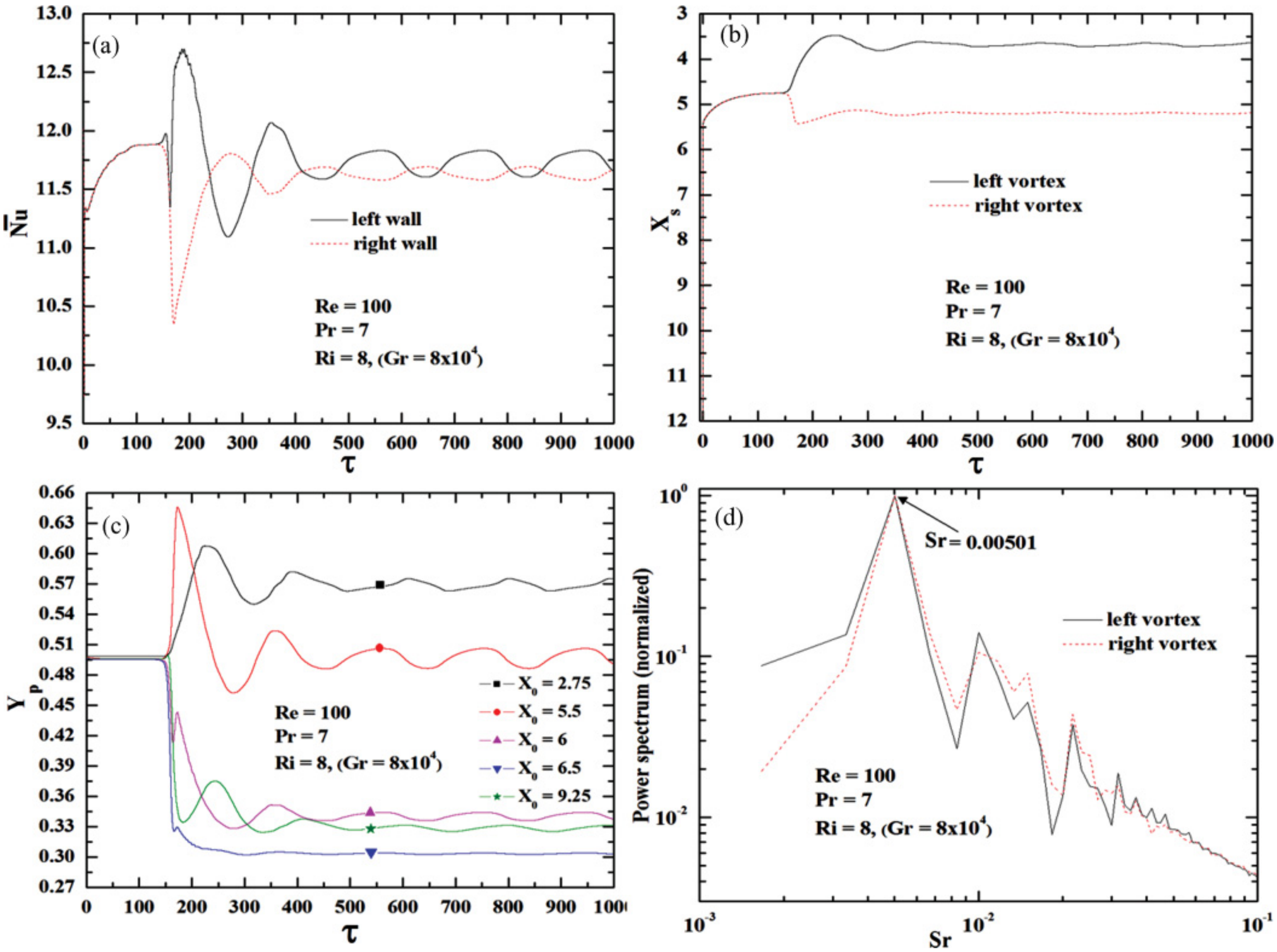

FIG. 4. (Color online) Time evolution for (a) overall Nusselt numbers, (b) vortices' upper positions, and (c) flow mass centroid at different longitudinal positions for $\mathrm{Ri} = 8$. The normalized power spectrum is shown in (d).

downward-flowing fluid. For a range of values of the Richardson number of $\mathrm{Ri} < 5.2$, the transient response leads to a steady-state solution. For these relatively low Richardson numbers there is only a weak interaction in the dynamics of both recirculation bubbles. Figure 2 shows the velocity and temperature profiles after the dynamical system has reached steady state. For this range of the buoyancy parameter, the final states of the system correspond to steady symmetric flow. As the Richardson number increases, small amplitude flow oscillations appear in the downstream region of the channel and their amplitude increases for increasing values of the buoyancy parameter. These flow oscillations are a manifestation of the Kelvin-Helmholtz instability due to the strong shear between the ascending hot fluid and the descending cold fluid located in the middle of the channel. This triggers a symmetry-breaking bifurcation and one of the two vortices (assumed to be close to the left heated surface, for simplicity) climbs while the other is pushed down by the downward flow with increased longitudinal momentum. If one vortex climbs, the cold fluid deflects to the other side of the channel, increasing the longitudinal velocity and thus the momentum, pushing down the other vortex. As the fluid reaches the top of the lower vortex, the cold downward fluid switches sides again, thus supporting the upper recirculation bubble. Numerical simulations show that the first symmetry-breaking bifurcation occurs for a Richardson number of $\mathrm{Ri} = 5.2$. As a result, a stable nonsymmetric pattern develops after a relatively short transient. For $\mathrm{Ri} = 7$, Fig. 3(a) shows the average Nusselt numbers at both heated plates, Fig. 3(b) the maximum positions of the recirculating bubbles, and Fig. 3(c) the mass flow centroid at different positions of the channel. After an initial transient, both Nusselt numbers reach a plateau which lasts as long as both recirculation bubbles climb slowly. This phase of the process is symmetric, as Fig. 3(c) illustrates by displaying the location of the mass flow centroid $Y_p = 0.5$ for different positions along the channel. As symmetry breaks, Fig. 3(b) illustrates how the left vortex climbs while the right one falls slightly. The flow pattern is shown in Fig. 3(c), where the fluid located in the upper half of the channel deflects to the right ($Y_p > 0.5$) and the cold fluid located in the lower half of the channel deflects to the left side ($Y_p < 0.5$).

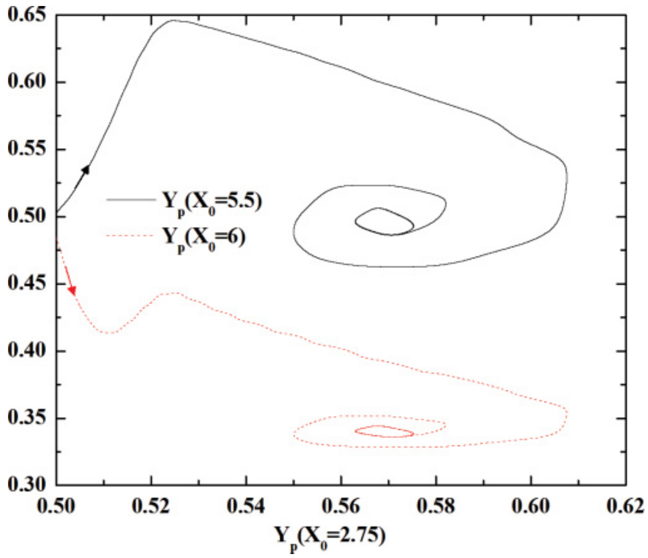

FIG. 5. (Color online) Phase-space plots of the mass flow centroids $Y_p(X_0 = 5.5)$ and $Y_p(X_0 = 6)$ as functions of the mass flow centroid at $X_0 = 2.75$, for $\mathrm{Ri} = 8$.

B. Bubble oscillatory state

For a larger value of the Richardson number ($7.9 < \mathrm{Ri} < 8.5$), a time-periodic solution with a fundamental frequency sets in and the average Nusselt number also oscillates accordingly. The transition of the dynamical system occurs through a Hopf bifurcation. As buoyancy increases, the upper vortex climbs higher while the other vortex remains near its corresponding heated plate. Hence, the downward cold flow is first deflected toward the sidewall opposite to the higher vortex. Then, a second deflection takes place due to the presence of the lower vortex, and the downward cold flow is directed toward the heated plate that feeds the upper vortex. This diminishes the thermal energy supply to the latter because of the intense heat transfer between the heated plate and the cold downward flow, which provokes an increment in the temperature of the fluid moving down near the wall below the position of the heated plate. As a result, the upper vortex decreases its size and strength and moves down while the lower vortex moves up, increasing in size and strength. However, as the upper vortex decreases in strength, the cold flow deflection diminishes too, allowing the upper vortex to receive enough thermal energy from the corresponding heated source and to recover its previous strength again. These bubble oscillations are clearly

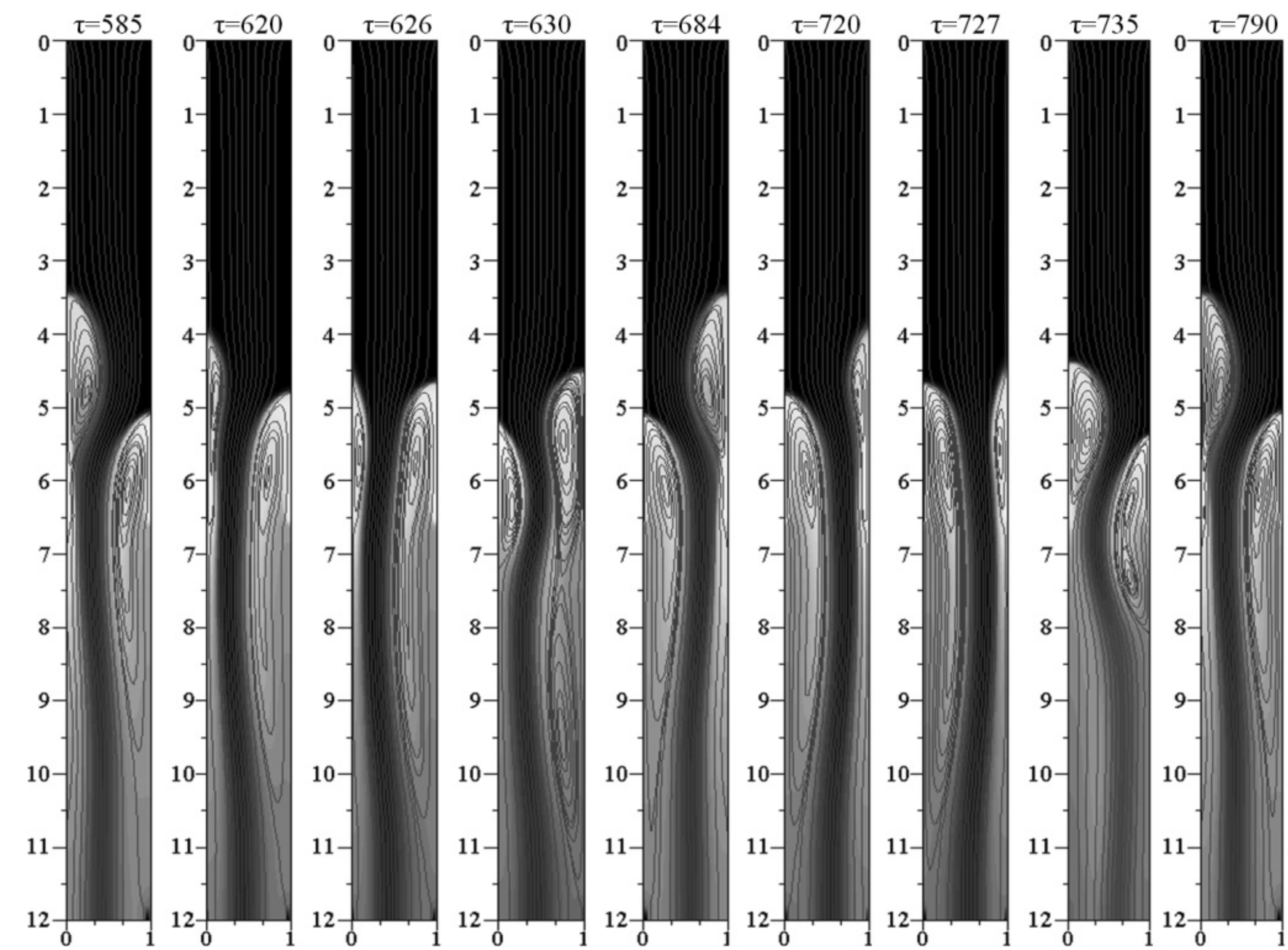

FIG. 6. Streamlines and temperature profiles represented in shades of gray, showing the different phases of the global periodic behavior for $\mathrm{Ri} = 9$.

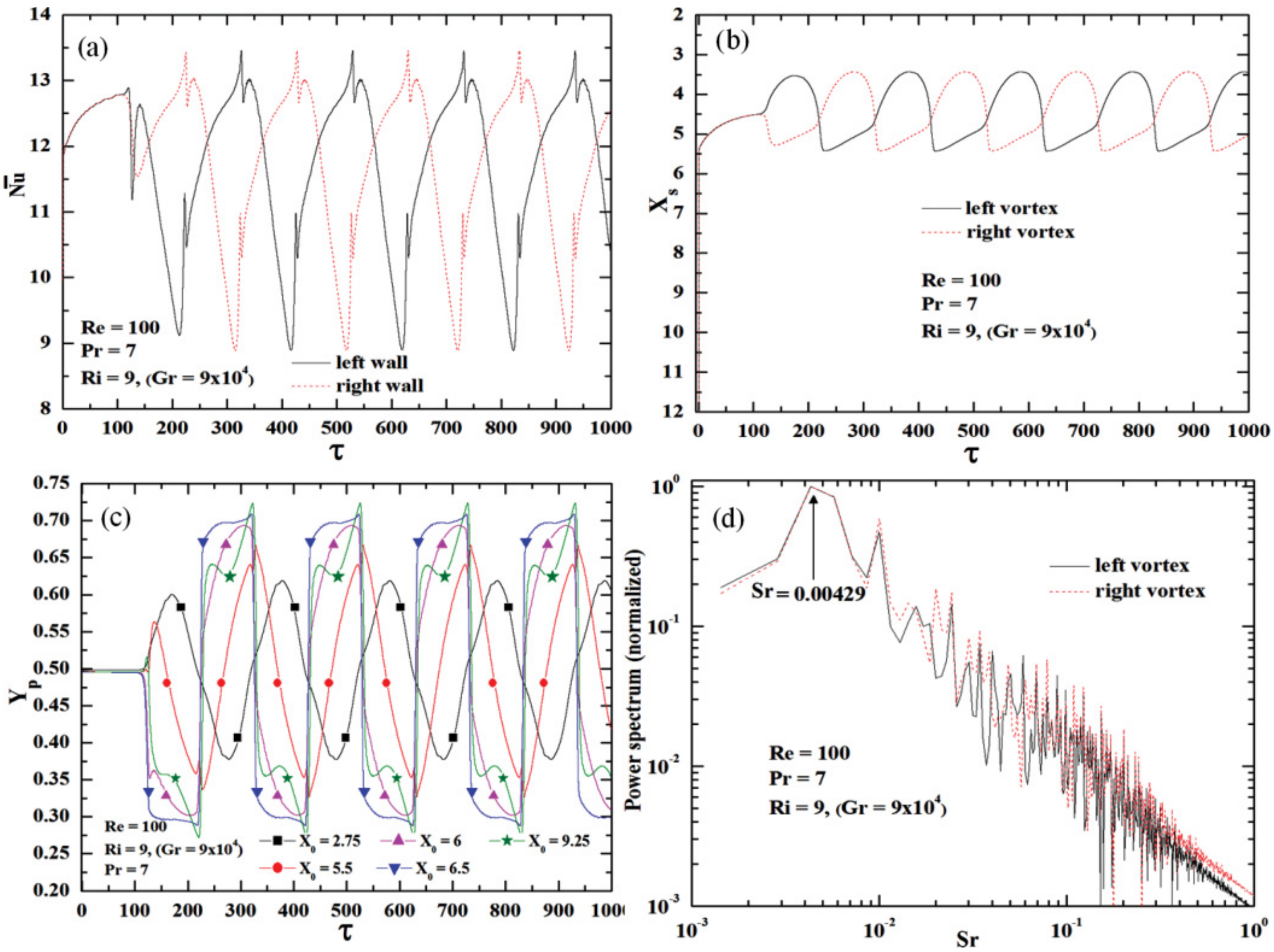

FIG. 7. (Color online) Time evolution for (a) overall Nusselt numbers, (b) vortices' upper positions, and (c) flow mass centroid at different longitudinal positions for Ri = 9. The normalized power spectrum is shown in (d).

shown in Fig. 4 for Ri = 8. The low frequency oscillations of the overall Nusselt numbers are shown in Fig. 4(a) and the mass flow centroid Y_p in the whole channel length in Fig. 4(c). The lack of a final steady-state solution is also evident. Figure 4(d) shows the normalized power spectra of the Nusselt numbers as functions of the nondimensional frequency (Strouhal number), $\mathrm{Sr} = fh/u_0$. Clearly, the peak close to 5×10^{-3} is the manifestation of the oscillations of the upper recirculation bubble (time period close to 200 nondimensional time units). Figure 4(b) illustrates how the left recirculation bubble remains oscillating in the same longitudinal position after symmetry breaks. Figure 5 shows the trajectories in the phase-space plot of the flow mass centroid at two different positions as functions of the corresponding mass flow centroid in the upper half of the channel ($X_0 = 2.75$). The longitudinal positions selected are (1) at the beginning of the heated plate, $X_0 = 5.5$, and (2) at the middle of the heated plate, $X_0 = 6$. The origin of the trajectories is at (0.5,0.5), which corresponds to symmetric flow at time $\tau = 0$. Both trajectories finish with closed loops (limit cycles) around the solution obtained with the mean recirculation bubble position.

C. Global symmetric oscillatory state

As the Richardson number is further increased ($8.5 < \mathrm{Ri} < 10.75$), the upper vortex climbs further with larger oscillation amplitudes. At the critical Richardson number, the reconnection of the upper vortex with the energy supply from the heat source is so weak that the recirculation bubble decreases its strength dramatically and collapses. As a result, the upper vortex moves down and the lower vortex moves up, increasing in size and strength. Again, once the upper vortex reaches its final upper position the switching process is repeated with a single fundamental frequency that increases with increasing values of the Richardson number. The gluing bifurcation that demarcates the transition from asymmetric bubble oscillations to symmetric global oscillations occurs for a Richardson number of Ri = 8.5. Figure 6 shows the streamlines and the temperature fields for Ri = 9 at different nondimensional times, showing the most important phases of the thermal oscillator. The first strip shows one vortical structure with hot recirculating fluid (left) which climbs while the other vortical structure is pushed down (right). As a result, the cold flow is deflected to the right and then to the left downstream. This cold flow convects down an important amount of thermal energy from the left heated plate, thus interrupting the energy feeding to the upper left vortex. The strength and the size of the left vortex decrease and it collapses, as can be seen in the second and third strips. The now strong right vortex structure grows and climbs (fourth and fifth strips), and the downward cold flow is deflected to the left upstream and to the right downstream, as can be seen in the fifth strip. This produces a very uniform thermal oscillator. For Ri = 9, Fig. 7(a) shows the average Nusselt numbers at both heated plates, Fig. 7(b) the maximum positions of the recirculation bubbles, Fig. 7(c) the mass flow centroid at different positions of the channel, and Fig. 7(d) the normalized power spectrum. These figures show regular patterns for all the variables with a well defined frequency corresponding to a Strouhal number of 4.3×10^{-3}. The downward cold flow response is shown in Fig. 7(c). For $X_0 = 2.75$ (upper half of the channel), Y_p shows an almost harmonic behavior and a slightly distorted behavior close to the upper edge of the heated plate ($X_0 = 5.5$). However, at the lower edge of the heated plate ($X_0 = 6.5$), except for a small peak, the response is close to that of a rectangular (relaxation) oscillator and the fluid flows down close to the walls of the channel most of the time. After a time close to the half period, the flow suddenly changes to the other side in a short time compared with the period. Note that this behavior is a characteristic of the charge-and-fire dynamics found in the description of relaxation oscillators [20–23]. Figure 8 shows the trajectories in the phase-space plot of the flow mass centroid at two different positions as functions of the corresponding mass flow centroid in the upper half of the channel. In this case, the two edges of the heated plate are selected, $X_0 = 5.5$ and $X_0 = 6.5$. Both trajectories show limit cycles that characterize the oscillator. For the upper edge of the heated plate, the response is not very far from being harmonic, while for the lower edge of the heated plate the response is close to a relaxation oscillator according to Fig. 7(c). In Fig. 9, the location of the final state in the phase space in terms of $Y_p(X_0 = 6)$ as a function of the mass flow centroid at $X_0 = 2.75$ is plotted for a range of values of the forcing parameter. The diagram illustrates the different transitions of the dynamical system and the occurrence of the symmetry-breaking, the Hopf, and the gluing bifurcations. There are three critical points. The central point corresponds to the symmetrical flow configuration, which is stable for values of the Richardson number lower than Ri = 5.2. Two movable stable critical points appear. The open stars correspond to cases in which the symmetry-breaking bifurcation leads to a climbing up of the left vortex, while the solid stars correspond to cases in which the right vortex is the one that climbs up in the asymmetrical configuration. Phase-space trajectories for Ri = 8 show limit cycles as a manifestation of a Hopf bifurcation. When the gluing bifurcation is triggered, the final trajectory in the phase space is the closed curve obtained for Ri = 9, where the central point acts now as a saddle point.

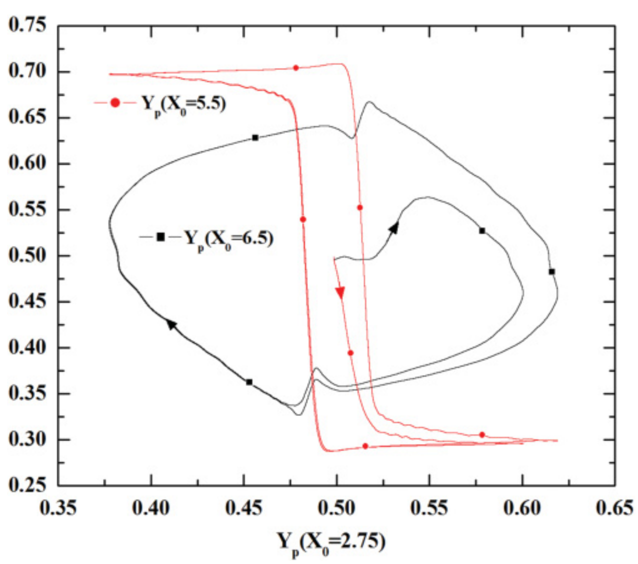

FIG. 8. (Color online) Phase-space plots of the mass flow centroids $Y_p(X_0 = 5.5)$ and $Y_p(X_0 = 6.5)$ as functions of the mass flow centroid at $X_0 = 2.75$, for Ri = 9.

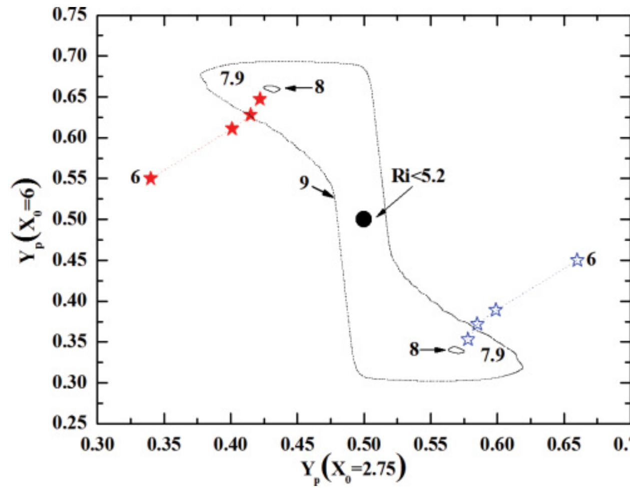

FIG. 9. (Color online) Phase-space plots of the mass flow centroid $Y_p(X_0 = 6)$ as functions of the mass flow centroid at $X_0 = 2.75$, showing three critical points that represent the thresholds for the critical values of the forcing parameter for the occurrence of the different transitions of the dynamical system. For Ri < 5.2, the system reaches a symmetric and stable flow configuration represented by the central point. For Ri = 6, the occurrence of the symmetry-breaking bifurcation is illustrated by the appearance of two movable stable critical points that correspond to an upward climb of the left (right) vortex represented by open (solid) stars, respectively. For Ri = 8, the Hopf bifurcation is triggered and exemplified by the phase-space trajectories displaying limit cycles. For Ri = 9, the occurrence of the gluing bifurcation is shown in the phase space by displaying the final trajectory that corresponds to a closed curve with the central point acting as a saddle point.

D. Chaotic state

For larger values of the Richardson number Ri ⩾ 10.75, buoyancy forces produce a thermal reconnection that feeds the upper vortex in an intermittent way. As a result, the upper recirculation bubble remains on top for a longer nondimensional time. After some unpredictable time, the oscillating upper vortex falls again, while the opposite vortex climbs. This chaotic behavior produces a random modulated rectangular oscillator. Figure 10(a) shows the evolution of the overall

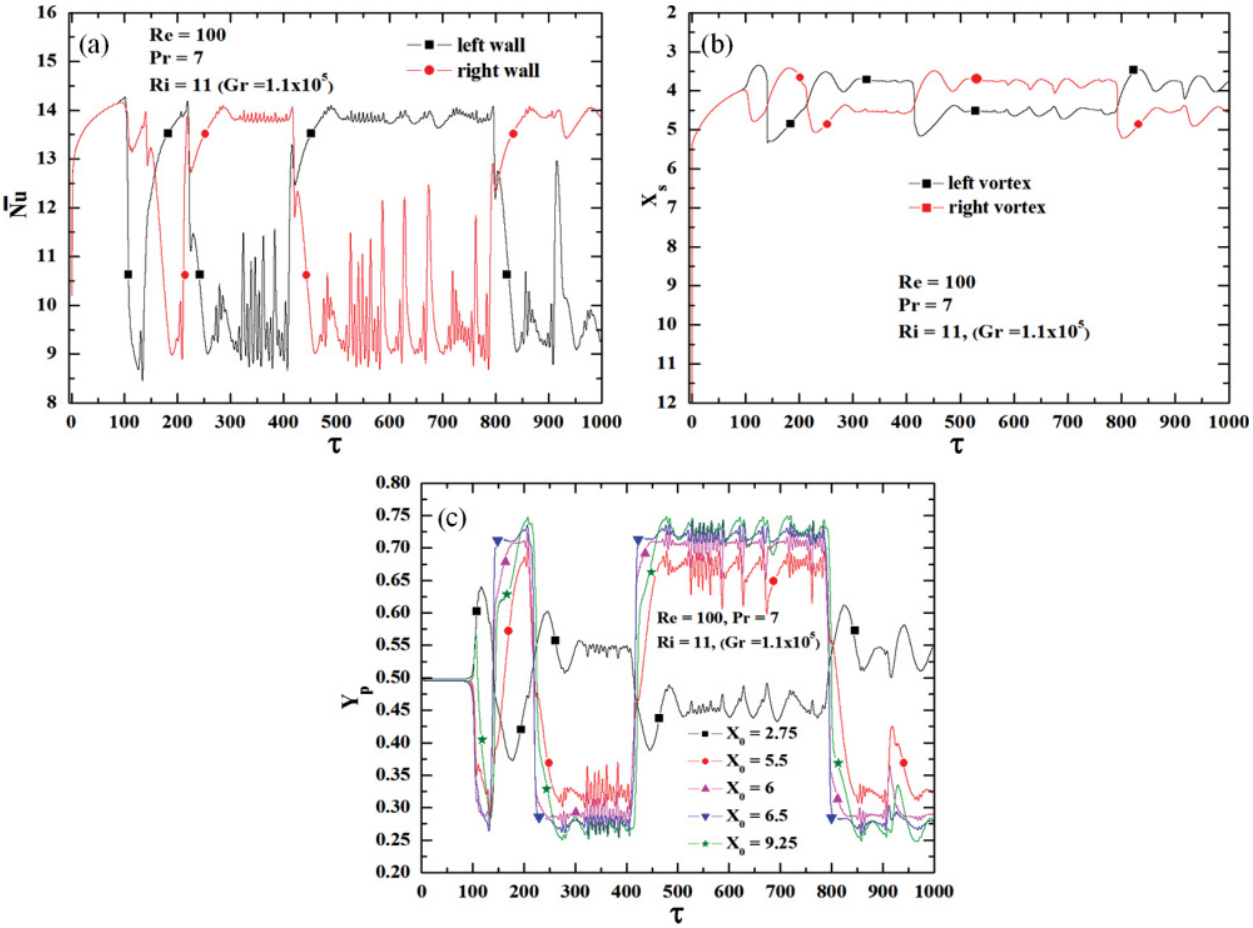

FIG. 10. (Color online) Time evolution for (a) overall Nusselt numbers, (b) vortices' upper positions, and (c) flow mass centroid at different longitudinal positions for Ri = 11.

Nusselt numbers. Both vortices oscillate with a high frequency which corresponds to a Strouhal number close to 0.14 (period close to 7 nondimensional time units). Figure 10(b) shows the maximum position of the recirculation bubbles, and Fig. 10(c)

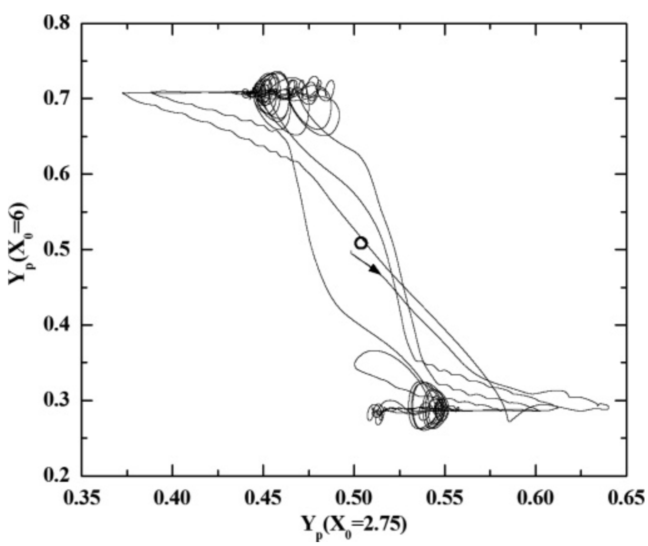

FIG. 11. Phase-space plots of the mass flow centroid $Y_p(X_0 = 6)$ as a function of the mass flow centroid at $X_0 = 2.75$, for Ri = 11.

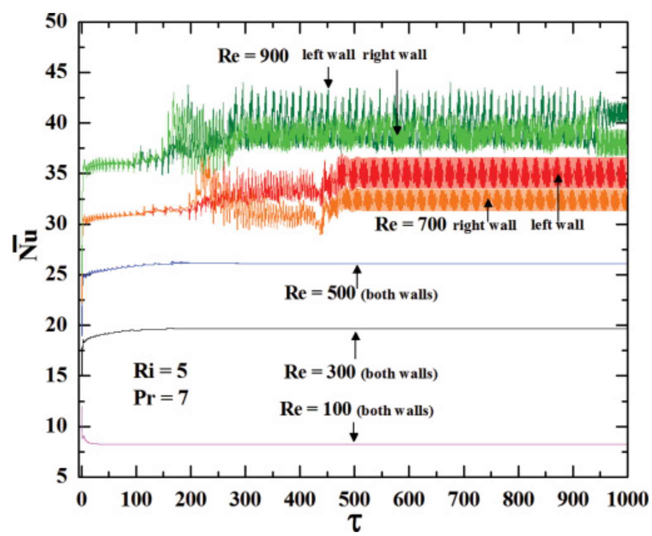

FIG. 12. (Color online) Effect of the Reynolds number on the overall Nusselt numbers and the different transitions for Pr = 7, Ri = 5, and several values of the Reynolds number.

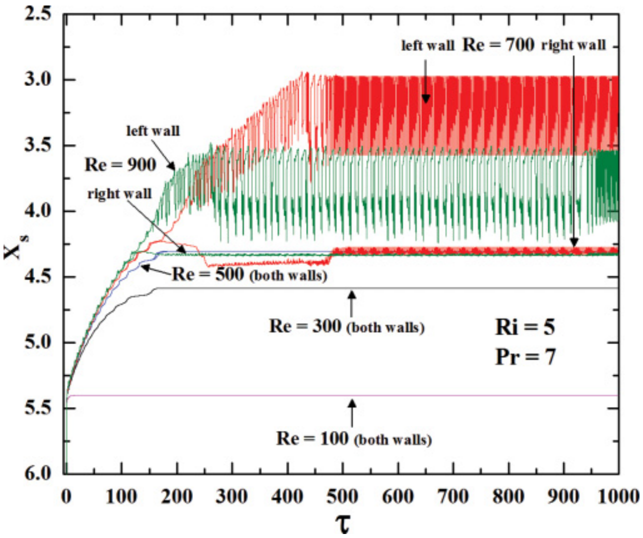

FIG. 13. (Color online) Effect of the Reynolds number on the flow response and the different transitions for Pr = 7, Ri = 5, and several values of the Reynolds number.

the mass flow centroid at different positions of the channel. The phase-space plot of $Y_p(X_0 = 6)$ as a function of the mass flow centroid at $X_0 = 2.75$ is plotted in Fig. 11.

V. EFFECTS OF THE REYNOLDS AND PRANDTL NUMBERS

In order to unravel the effect of the Reynolds number on the evolution of the different transitions, computations have been performed using fixed values of the Prandtl and Richardson numbers (Pr = 7 and Ri = 5) for Reynolds numbers of 100, 300, 500, 700, and 900. Figures 12 and 13 elucidate how the Reynolds number affects the overall heat transfer and flow characteristics, respectively. Clearly, the overall value of the Nusselt number increases with increasing Reynolds number. The definition of the Richardson number involves both

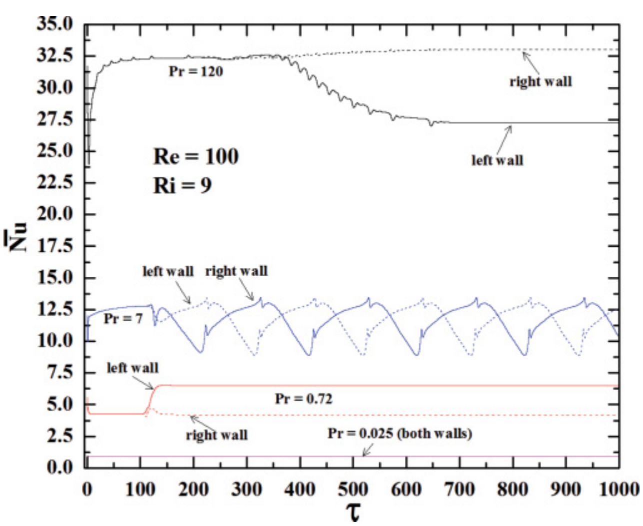

FIG. 14. (Color online) Effect of the Prandtl number on the time evolution of the overall Nusselt numbers for Re = 100 and Ri = 9.

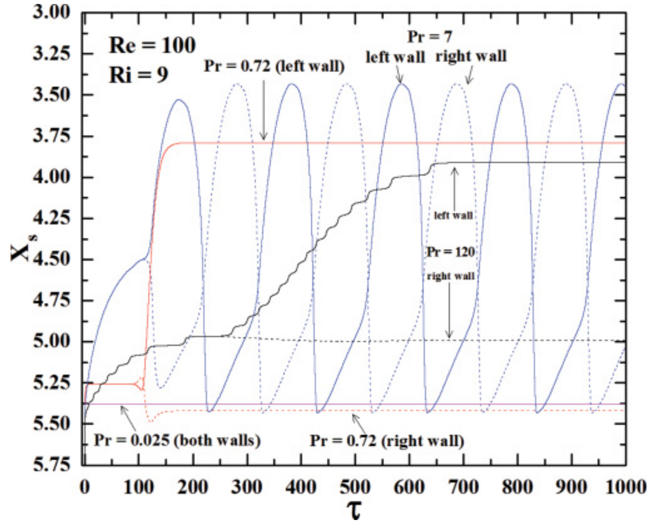

FIG. 15. (Color online) Effect of the Prandtl number on the time evolution of the stagnation points for Re = 100 and Ri = 9.

buoyancy and inertial forces, $\mathrm{Ri} = \mathrm{Gr}/\mathrm{Re}^2$. Therefore, the Reynolds number is included in the definition of the Richardson number. As the Reynolds number increases with fixed Richardson number, buoyancy increases accordingly. From the

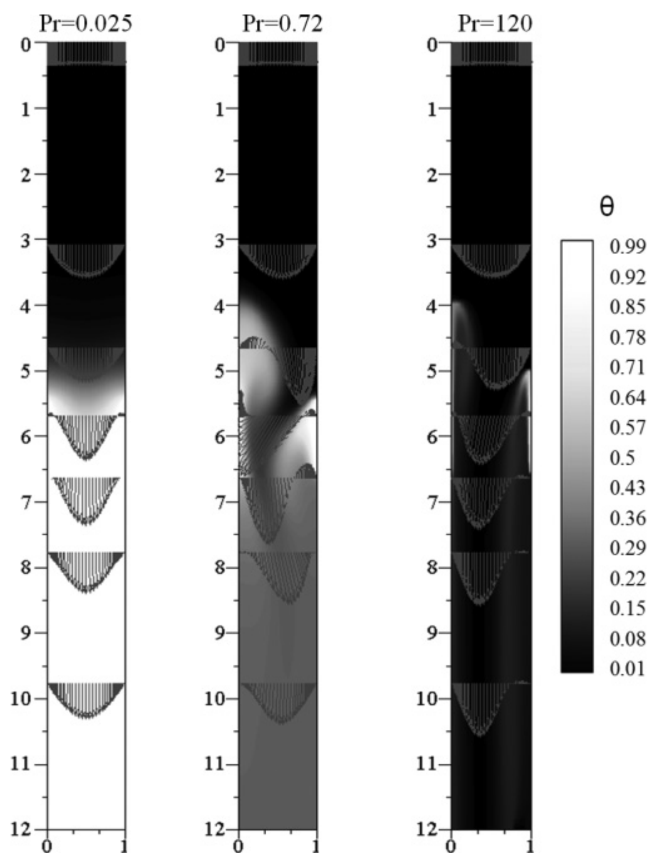

FIG. 16. Final states for a steady dynamical response of the system for Re = 100, Ri = 9, and several values of the Prandtl number. The nondimensional velocity is represented by arrows and the nondimensional temperature in shades of gray.

dynamical point of view, the two effects tend to compensate each other. The numerical results show that the dynamical system becomes more sensible to buoyancy strength. As a result, the critical value of the Richardson number for the occurrence of the different bifurcations decreases slightly for increasing values of the Reynolds number.

The effect of the Prandtl number on the final state of the system has been computed using fixed values of the Reynolds and Richardson numbers (Re $= 100$ and Ri $= 9$) for small and large values of the Prandtl number, namely, Pr $= 0.025$ (mercury), Pr $= 0.72$ (air), Pr $= 7$ (water), and Pr $= 120$ (10 cS silicone oil). Figures 14 and 15 illustrate the influence of the Prandtl number on the final dynamical state of the system by displaying the overall Nusselt number at both heated plates and the location of the stagnation points, respectively. For very small values, Pr $= 0.025$, the final dynamical state reaches rapidly a symmetric steady-state solution. The high thermal diffusivity produces a bridge between the thermal layers at both sides of the channel, thus reducing the strength of buoyancy (left hand side plot in Fig. 16). Although symmetry breaks for Pr $= 0.72$, the system still reaches a final steady-state solution. As shown in Sec. IV C, for the case of Pr $= 7$, the system reaches a global symmetric oscillatory state, while for a large value, Pr $= 120$, the transient response leads again to an asymmetric steady-state solution. For these high Prandtl number fluids, the cold downward flow is only slightly disturbed by the thin recirculation zones, and the flow deflection is unable to cut the thermal feed to the upper vortex, which is the condition for the onset of the global oscillatory state. In this sense, the dynamical response to the Prandtl number is not monotonic. As a summary, Fig. 16 shows the velocity and temperature profiles for Re $= 100$ and Ri $= 9$ for the different assumed values of the Prandtl number after the dynamical system has reached steady state.

VI. CONCLUSIONS

In summary, we have studied the nonlinear dynamical aspects of a two-dimensional countercurrent mixed convection system which produces a very rich response, from symmetrical or asymmetrical steady-state thermal and fluid flow to a chaotic response. We have shown that with the increase of the buoyancy parameter, for a fixed Reynolds number, the system undergoes several transitions and exhibits states of asymmetrical steady state (symmetry-breaking bifurcation), local vortex oscillation (Hopf bifurcation), global relaxation oscillation (gluing bifurcation), and later chaos. In this paper, the time scales and natural frequencies corresponding to the local oscillations and the global relaxation oscillations are presented, and the evolution of the nonlinear dynamical system responses are described using phase-space portraits.

ACKNOWLEDGMENTS

This work has been supported by Grants No. IXTLI and No. IX100110 from UNAM. The authors gratefully thank Eric Bautista, Oscar Bautista, and José Lizardi for computing resources. The authors are grateful for the anonymous referees' very constructive comments on this paper.

[1] T.-S. Chang and T.-F. Lin, Int. J. Heat Mass Transfer **36**, 3783 (1993).
[2] T.-F. Lin, T.-S. Chang, and Y.-F. Chen, J. Heat Transfer **115**, 342 (1993).
[3] G. Evans and R. Greif, Int. J. Heat Mass Transfer **40**, 2419 (1997).
[4] L. Martínez-Suástegui and C. Treviño, Exp. Therm. Fluid Sci. **32**, 262 (2007).
[5] L. Martínez-Suástegui and C. Treviño, Int. J. Heat Mass Transfer **51**, 5991 (2008).
[6] C. Guillet, T. Mare, and C. Nguyen, Int. J. Non-linear Mech. **42**, 981 (2007).
[7] Y.-C. Chen and J. Chung, J. Heat Transfer **120**, 127 (1998).
[8] Y.-C. Chen and J. Chung, J. Heat Transfer **120**, 127 (1998).
[9] S. Suslov and S. Paolucci, J. Fluid Mech. **302**, 91 (1995).
[10] P. Bera and A. Khalili, Adv. Water Res. **30**, 2296 (2007).
[11] P. Daniels, J. Fluid Mech. **203**, 525 (1989).
[12] E. Meron and I. Procaccia, Phys. Rev. A **35**, 4008 (1987).
[13] I. Epstein and J. Pojman, *An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics: Oscillations, Waves, Patterns, and Chaos* (Oxford University Press, Oxford, 1998)
[14] D. Ambruster, B. Nicolaenko, N. Smaoui, and P. Chossat, Physica D **95**, 81 (1996).
[15] J. Abshagen, G. Pfister, and T. Mullin, Phys. Rev. Lett. **87**, 224501 (2001).
[16] A. Arneodo, P. Coullet, and C. Tresser, Phys. Lett. A **81**, 197 (1981).
[17] A. Rucklidge, Physica D **62**, 323 (1993).
[18] F. Marques, J. Lopez, and J. Shen, Physica D **156**, 81 (2001).
[19] J. M. Lopez and F. Marques, Phys. Rev. Lett. **85**, 972 (2000).
[20] B. van der Pol, Radio Rev. **1**, 701 (1920); **1**, 754 (1920).
[21] R. FitzHugh, Biophys. J. **1**, 445 (1961).
[22] J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa, Proc. IRE **50**, 2061 (1962).
[23] P. Lundberg, F. Bahrami, and M. Zarroug, Z. Angew. Math. Mech. **89**, 995 (2009).

International Journal of Thermal Sciences xxx (2012) 1–12

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

International Journal of Thermal Sciences

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijts

Transient heating and entropy generation of a fluid inside a large aspect ratio cavity

J.C. Cajas [a,*], C. Treviño [a,b]

[a] Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad 3000, México D.F 04510, Mexico
[b] Unidad Multidisciplinaria de Docencia e Investigación, Universidad Nacional Autónoma de México, Sisal, Yucatán, Mexico

ARTICLE INFO

Article history:
Received 16 March 2011
Received in revised form
25 April 2012
Accepted 2 August 2012
Available online xxx

Keywords:
Heat transfer
Cavity
Entropy production

ABSTRACT

In this work, the transient heating of a fluid inside a vertical cavity of large aspect ratio (height/length) was studied numerically by the use of the SIMPLE algorithm. The heat sources are two vertical plates localized in the side walls of the cavity near the bottom. Calculations were performed for a fixed value of the Prandtl number, $Pr = 7$, aspect ratio of 12 and six different Rayleigh numbers between 10^3 and 10^6. The temperature and entropy production fields, the non-dimensional heat flux on the heated plates (given by the average Nusselt number) have been obtained. From a clear dependence on the Rayleigh number, different mechanisms of symmetry break and heat transfer in the cavity were found, where vortices dynamics play a very important role. A universal behavior of the mean values of the overall reduced entropy production rate was found, valid after a short initial transient.

1. Introduction

Natural convection has been widely studied due to its presence and determinant role in many of the flows around us. It is found in atmospheric currents, heat exchangers, solar collectors and even in nuclear reactors. In particular, it is of great practical interest to study natural convection in square cavities, and a great effort has been devoted to this particular system along decades. An extended review for two and three-dimensional cases with different boundary conditions is presented by Ostrach [17].

Recent studies of steady cases that represent the actual trends in the investigation of natural convection in closed enclosures are presented by Refs. [1,2,5,6,24,26]. Analyses on the effects of changes in the geometry of the walls of the cavity, the fluid enclosed and the thermal boundary conditions on the natural convection in closed enclosures are performed, besides of studies of the flow stability.

Transient analyses of related systems have been developed and provide useful information about the ways heat is transferred to reach a steady state. It also let us observe a wide variety of vortex dynamics that are hidden in the steady analyses. The effect of an increment in the aspect ratio of a lid-driven cavity flow on the transient response is presented by Gustafson and Halasi [9] for a Reynolds number of $Re = 10^4$. An increase of twice the aspect ratio has some dynamical features, which are not present in studies of steady cases or for lower Reynolds numbers or with a square cavity. Initial transient bifurcations are present by the interaction of up to four recirculation regions. It is also shown that aspect ratio is a second parameter for bifurcation of considerable importance. When the Reynolds number was held at $Re = 10^4$, a Hopf bifurcation occurs for a critical aspect ratio between 1 and 2. Pujol et al. [19] studied numerically, by use of the PHOENICS code, the transient natural convection of a fluid with Prandtl number of order 200 in a two-dimensional square cavity. One of the vertical walls of the cavity was kept at constant temperature while a constant heat flux was applied on the opposite one. For a Rayleigh number of 3.9×10^9, a thermal boundary layer was formed initially close to the heated wall, followed by the formation of a large vortical structure together with an upper intrusion layer. With time, the average temperature in the cavity increased and, during the transition to the steady state, a thermal stratification pattern was formed. The results were compared to previous scaling analyses with satisfactory agreement. Nithyadevi et al. [16] studied numerically the effect of the aspect ratio on the transient natural convection of a fluid contained in a rectangular cavity with partial heating/cooling in the side walls. The vorticity–stream function formulation with the control volume method with power law scheme and an iterative technique were used. Results are presented for Grashof number in the range $10^3 < Gr < 10^6$ with different combinations of the positions of the thermally active zones and different aspect ratios. It

* Corresponding author. Tel.: +52(55) 56226710/17x7143; fax: +52(988) 9311015.
E-mail addresses: jc_cajas@ciencias.unam.mx, jc.cajas@gmail.com (J.C. Cajas).

1290-0729/$ – see front matter © 2012 Elsevier Masson SAS. All rights reserved.
http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2012.08.001

was found that heat transfer rate is high when the hot surface is located in the bottom on the cavity and the cold one is located in the top of the same. The heat transfer rate was observed to increase for higher aspect ratios and heat transfer enhancement was found when the low temperature zone was located in the top of the cavity. Transient natural convection of air inside a low aspect ratio cavity with a thin fin on its side wall is studied by Xu et al.[27]; where a scaling analysis and direct numerical simulation, using the SIMPLE algorithm, were performed. Four main stages of the flow are highlighted. An initial vertical thermal boundary layer followed by an intrusion under the fin and under the top wall of the cavity. Then, when the intrusion under the fin reaches the end of the same, a plume starts to develop and is drawn towards the boundary layer that feeds the top wall intrusion. Finally, an horizontal flow is established above the fin and the plume incorporates to the thermal boundary layer that feeds the higher intrusion. Time scales and defining parameters for buoyancy–viscous flow regime and buoyancy–inertial flow regime are established and show good agreement for the two methods. Zhang et al. [28] studied the unsteady conjugate conduction-natural convection in an enclosure with time periodic side wall temperature and inclination by the use of a high accuracy multi-domain temporal-spatial pseudo spectral method. The influence of the thermal properties of the wall, the time-periodic temperature patterns and the inclination angle on the flow patterns and heat transfer is studied. Interesting results concerning heat transfer enhancement and weakening in the system are presented.

Recently, heat transfer studies aimed to the design of thermal devices have relied on the analyses of second law of thermodynamics and minimal entropy production. Studies on this subject are presented by Baytas [3]; who analyzed numerically the flow and entropy production of a fluid described by the Darcy and Boussinesq approximations in an inclined square cavity. The influence of the inclination angle and the Darcy–Rayleigh number is reported. The entropy generation is studied at two levels. In the local level, it shows the zones of activity of entropy generation and gives information about their sensitivity to changes in the inclination angle. In the global level, the entropy generation provides information about the degree of irreversibility of the process. Mahmud and Fraser [14] performed a second law analysis of a steady laminar flow due to forced convection in a channel of circular cross-section and in a channel made of two parallel plates. Different cases, for which analytical approximations of the temperature and velocity fields are available were considered. General expressions for the entropy production number and the Bejan number are derived analytically for all the cases considered. Each of these expressions consist of three main parts, the first one is related to axial conduction, the second one is related to heat conduction normal to the axis and the third one is related to fluid friction. Erbay et al. [8] studied numerically the flow and heat transfer in a square enclosure, with the left side wall being completely or partially heated, the opposite side wall cooled and the other walls insulated. A finite volume method with a power law scheme was used in this study. The entropy generation and the active places of entropy generation are reported in the transient case for Prandtl numbers of 0.01 and 1.0 and for Rayleigh numbers in the range $10^2 \leq Ra \leq 10^8$. For the case of totally heated side wall, the zones of more intense entropy production are localized in the lower corner of the heated wall and the upper corner of the cooled one. In the case of partial heating, the more intense zone of entropy generation is found to be the upper part of the heated section. The entropy production due to heat transfer, mass transfer and viscous effects in an inclined square cavity for the steady state of double diffusive convection is studied numerically by Magherbi et al.[13]; who used a control volume finite element method and the SIMPLER algorithm. The total entropy generation and the effect of Grashof number is determined for different inclination angles. The total entropy generation increases with the thermal Grashof number and the buoyancy ratio for moderate Lewis number. Locally, the entropy production due to heat and mass transfer are nearly identical and are localized in the bottom and top of the heated wall. Ilis et al. [10] analyzed the effect of changes in the aspect ratio on the natural convection and entropy generation for cavities with the same area heated from one of the side walls and cooled by the opposite one with Rayleigh number in the range $10^2 \leq Ra \leq 10^5$. A finite difference method with an ADI scheme combined with a point to point scheme were used for the numerical solution. It was observed that entropy generation varies considerably with aspect ratio. For low Rayleigh numbers and entropy distribution ratio of order 10^{-4}, heat transfer irreversibilities are observed to dominate and the total entropy generation increases with the aspect ratio. For higher values of the Rayleigh number and the same entropy distribution ratio, fluid friction irreversibilities dominate and the total entropy production increases with aspect ratio, reaches a maximum value and then decreases. The total entropy production in cavities was observed to increase with Rayleigh number but the rate of increment was dependent on the aspect ratio. Varol et al. [21] investigated the entropy generation for natural convection in a square cavity limited for solid walls of different finite depths using a finite difference method. Entropy generation contours, isotherms, streamlines, Nusselt numbers and velocity profiles were obtained for Rayleigh numbers in the range $10^3 \leq Ra \leq 10^6$, and for different values of the walls width. Among the most important results, the thickness of the solid wall affects the temperature and the velocity fields, the Bejan number (ratio of the irreversibility due to heat transfer to total irreversibility) decreases when the Rayleigh number and the thermal conductivity ratio are increased and the more intense zone of local entropy generation are found to be the corners of the enclosure. It is also shown that the shape of the enclosure can be a control parameter for lower entropy production and thus energy saving. Also, similar results for a right angle trapezoidal enclosure with a vertical solid wall of finite thickness, filled with fluid saturated porous media are reported by Varol et al. [23]. In the same year, a comparison between the results of a forecasting technique for entropy generation, using support vector machines, and a direct simulation of natural convection in a partially cooled square enclosure was performed by Varol et al. [22]. The authors found good agreement and an important reduction in the calculation time.

It is clear that there have been an impressive advance in the knowledge of natural convection in rectangular enclosures. It is also clear that, the configuration and properties of vortical structures are determinant in all the different heat transfer and entropy production processes studied and that the information provided by the second law analyses is of prime importance for optimization studies. However, most of the effort and detailed studies are concentrated on square cavities, and deal with heat transfer and entropy production in steady cases. An increment of the aspect ratio of a rectangular cavity provides the scenario for a very rich vortical motion in the transient state. None of the works cited previously address the question of how the fluid inside the cavity is heated from heat sources placed below. In the present work, a fluid inside a large aspect ratio rectangular cavity heated symmetrically from two sections on the side walls is considered. Isotherms, average temperature, transverse averaged temperature, thermal centroids, average Nusselt number and both, overall and local entropy generation are calculated, in the transient state by use of the SIMPLE algorithm. The regions of important entropy production are highlighted and the different mechanisms of symmetry break and heat transfer for different Rayleigh numbers are reported and described. The second law analysis provides a fitted curve that can describe universally the mean value of the overall entropy production, except for a short initial period of time.

2. Problem formulation

A square vertical cavity with large aspect ratio L^*/H^* compared with unity, as depicted in Fig. 1, is considered in this work. Here L^* is the height of the cavity and H^* its length. The walls of the cavity are assumed to be adiabatic insulators, except by two portions of length l^* located symmetrically on the side walls at a distance L_1^* from the top of the cavity, which are held at constant temperature T_1^* higher than the initial temperature of the fluid T_0^*. The flow is considered two dimensional in the understanding that this situation is limited to the cases where the separation of the frontal and rear walls of the cavity is very small compared to its length H^*, but not small enough to make noticeable the viscous effects. Even when the vortex activity expected is intense, the two dimensional assumption is considered to hold as can be seen from the examples provided in Ref. [25] and references therein. These assumptions are to be tested in future work.

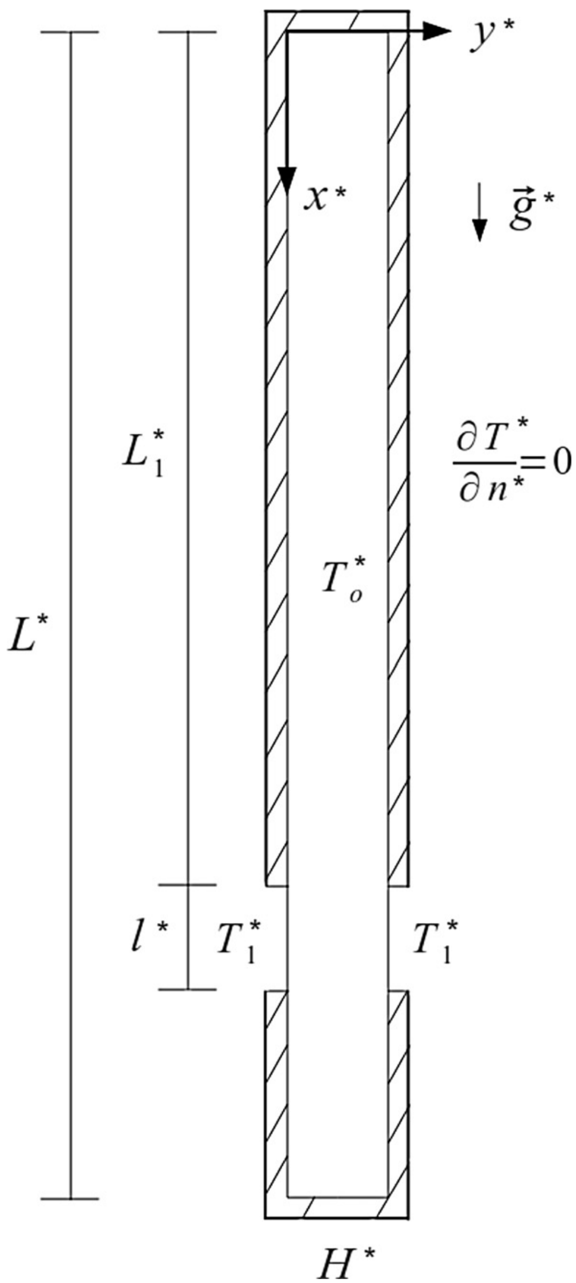

Fig. 1. Schematic representation of the cavity.

In order to define the non-dimensional variables the buoyancy induced velocity, $(g^* H^* \Delta\rho^*/\rho_0^*)^{1/2}$, is employed. Where H^* is used as the length scale, g^* represents the gravity acceleration and $\Delta\rho^* = \rho_0^* - \rho_1^*$ is the positive density variation induced by the temperature difference $T_1^* - T_0^*$. With the use of these quantities as the corresponding scales, the following non-dimensional variables arise

$$x_i = \frac{x_i^*}{H^*},\ u_i = \frac{u_i^*}{(g^* H^* \Delta\rho^*/\rho_0^*)^{1/2}},\ t = \left(\frac{g^*\Delta\rho^*}{\rho_0^* H^*}\right)^{1/2} t^*,$$

$$p = \frac{p^* - p_0^* - \rho_0^* g^* x_1^*}{g^* H^* \Delta\rho^*},\ \theta = \frac{T^* - T_0^*}{T_1^* - T_0^*}, \tag{1}$$

where x_i^* represents the i-th Cartesian component of the position vector and u_i^* represents the i-th Cartesian component of the velocity vector. p^* stands for the pressure, t^* represents the time, T^* is the temperature in dimensional form and θ is the non-dimensional normalized temperature. In addition, $x_1^* = x^*$ is the vertical coordinate (see Fig. 1) and p_0^* corresponds to pressure at the left top of the enclosure. The * superscript stands for dimensional quantities.

With the non-dimensional variables introduced in Eq. (1), the governing equations take the following form, where the Boussinesq approximation is used to describe the flow under consideration, $\rho^* = \rho_0^*\{1 - \beta^*(T^* - T_0^*)\}$, β^* is the volumetric expansion coefficient

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \theta\delta_{i1} + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{3}$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left(\frac{1}{Ra\,Pr}\right)^{1/2} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_j \partial x_j}. \tag{4}$$

Here D/DT is the usual total derivative, local plus convective, $Pr = \nu^*/\alpha^*$ is the Prandtl number, ν^* is the kinematic viscosity, α^* being the thermal diffusivity, $Ra = \beta^* g^* H^{*3}(T_1^* - T_0^*)/(\nu^*\alpha^*)$ is the Rayleigh number and δ_{ij} is the Kronecker delta $(i,j = 1,2)$, with $\delta_{ij} = 0$ if $i \neq j$ and $\delta_{ij} = 1$ if $i = j$. In the above equations, Einstein's sum convention has been used. Due to the fact that, for a relatively large value of the Rayleigh number, mixing occurs due to important fluctuations produced by flow bursting and eruptions, the energy equation can be transformed to

$$\frac{D\theta^2}{Dt} - \frac{\partial^2\theta^2}{\partial x_j \partial x_j} = -\chi = -2\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_j} \tag{5}$$

where the last term χ is called the scalar dissipation rate, which removes fluctuations due to, in this case, laminar mixing. This parameter then measures the mixing intensity. The two-dimensional form of Eqs. (2)–(4) are solved with the following boundary conditions

$$u_i = 0, \text{ on the walls of the cavity}$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial n} = 0, \text{ on the walls of the cavity, except in :} \quad (6)$$
$$x\in[L_1, L_1+l], y = 0 \text{ and } x\in[L_1, L_1+l], \; y = 1$$
$$\theta = 1, \text{ in } x\in[L_1, L_1+l], y = 0 \text{ and } x\in[L_1, L_1+l], \; y = 1.$$

The initial conditions at $t = 0$ are $u_i = \theta = p = 0$.

In this work, several averaged variables are to be employed. One of these, is the transverse averaged non-dimensional temperature, $\tilde{\theta}(x,t)$ defined as

$$\tilde{\theta}(x,t) = \int_0^1 \theta \, dy. \quad (7)$$

Of importance is also the first moment of the transverse temperature distribution (thermal centroid), $\tilde{y}(x,t)$, defined by

$$\tilde{y}(x,t) = \frac{\int_0^1 y\,\theta dy}{\tilde{\theta}(x,t)}. \quad (8)$$

The first moment of the transverse vertical velocity distribution (mass centroid), $\widehat{y}(x,t)$, defined as follow is used

$$\widehat{y}(x,t) = \int_0^1 y\,u dy. \quad (9)$$

The overall average temperature in the cavity, which is a measure of the overall energy in the cavity $\overline{\theta}$, is given by

$$\overline{\theta}(t) = \frac{\int_0^L \tilde{\theta} dx}{L}. \quad (10)$$

Finally, the average Nusselt numbers, $\overline{N}u_n$, are

$$\overline{N}u_n(t) = \frac{(-1)^n}{l} \int_{L_1}^{L_1+l} \frac{\partial\theta}{\partial y} dx, \quad (11)$$

where, l represents the length of the heated plates located on both side walls of the cavity, and $n = 1,2$ represents the left and right wall respectively.

2.1. Entropy generation for heat transfer

In a macroscopic system, entropy variations ds^* are due to the entropy exchanged with the surroundings in form of heat and mass transfer $d_e s^*$, and to the internal production of entropy in irreversible processes $d_i s^*$

$$ds^* = d_e s^* + d_i s^*,$$

where

$$d_i s^* \geq 0.$$

In the Linear Irreversible Thermodynamics formulation, an explicit expression for the entropy balance is obtained in terms of the velocity and temperature fields, which for a fluid as the considered in the present work, takes the following form after [4,11]

$$\rho_0^* \frac{dS^*}{dt^*} = -\frac{\partial}{\partial x_j^*}\left(\frac{q_j^*}{T^*}\right) + \frac{k^*}{T^{*2}}\left(\frac{\partial T^*}{\partial x_j^*}\right)^2 + \frac{\lambda^*}{T^*}\left(\frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*}\right)^2 + \frac{\mu^*}{2T^*}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*}\right)^2. \quad (12)$$

In the above expression, S^* is the entropy per unit mass, q_j^* is the heat flux vector, k^* is the thermal conductivity, λ^* is the second viscosity coefficient, and μ^* is the dynamic viscosity. It is noticed that this balance equation has the form

$$\rho_0^* \frac{dS^*}{dt^*} = -\frac{\partial}{\partial x_j^*} J_{Sj}^* + \sigma^*,$$

where $J_{Sj}^* = q_j^*/T^*$ is the entropy flux, and σ^* is the internal entropy production given by

$$\sigma^* = \frac{k^*}{T^{*2}}\left(\frac{\partial T^*}{\partial x_j^*}\right)^2 + \frac{\lambda^*}{T^*}\left(\frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*}\right)^2 + \frac{\mu^*}{2T^*}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*}\right)^2. \quad (13)$$

From this equation, it is clear that entropy is produced by two different means. The first one is the heat transfer in the system and the second one is due to the viscous effects in the fluid. For most of the cases, the contribution of the former is several orders of magnitude greater than the latter, as is in the present study.

Using Eq. (1), the internal entropy production can be written in non-dimensional form as

$$\sigma_q = \frac{\sigma_q^* H^{*2} T_0^{*2}}{k^*\left(T_1^* - T_0^*\right)^2} = \frac{1}{(1+\varepsilon\theta)^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right)^2 = \frac{\chi}{(1+\varepsilon\theta)^2} \quad (14)$$

and

$$\sigma_v = \frac{\sigma_v^* H^{*2} T_0^*}{k^*(T_1^* - T_0^*)} = \frac{Ec}{(1+\varepsilon\theta)}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2, \quad (15)$$

where Ec is the Eckert number given by $Ec = \nu^*\alpha^*/[2c_p^*(T_1^* - T_0^*)H^{*2}]$ and $\varepsilon = (T_1^* - T_0^*)/T_0^*$, which is assumed to be very small compared with unity. σ_q is the non-dimensional entropy produced by heat transfer and σ_v is the non-dimensional entropy produced by viscous effects. It is to be noticed the close relationship between σ_q and the scalar dissipation rate χ, since both are the same when $\varepsilon \to 0$, and that for common fluids with the Rayleigh numbers considered in the present study, the contribution to the total entropy production due to the viscous effects is at least six orders of magnitude lower than the produced by heat fluxes. Thus, this contribution is neglected in all cases.

3. Numerical method

The equations of motion were discretized using the power-law scheme described by Patankar [18]; and solved with a numerical code developed in Fortran 90 language by use of the SIMPLE algorithm [18]. According with the staggered grid scheme, three non-uniform grids (one for each velocity component, and one other for the pressure and temperature fields) generated by the following functions, with 76 nodes in the horizontal direction and 151 nodes in the vertical one, were used

$$x = x_c\left(1 - \frac{\sin h(m_x\{\bar{x} - B\})}{\sin h(m_x B)}\right) \tag{16}$$

$$y = \frac{1}{2} + m_y\left(\bar{y} - \frac{1}{2}\right) + \frac{(1 - m_y)erf(k_y\{\bar{y} - 1/2\})}{2erf(k_y/2)}, \tag{17}$$

with

$$B = \frac{1}{2m_x}\ln\frac{1 + (e^{m_x} - 1)(x_c/L^*)}{1 + (e^{-m_x} - 1)(x_c/L^*)}.$$

In the above expressions, $x_c = 9.5$ is the point where the grid spacing is finer in the vertical direction, $\bar{x}$ and $\bar{y}$ are uniformly distributed variables in the range [0,1], erf is the error function and m_x, m_y, and k_y are packing parameters of the mesh. The values used in the present work are $m_x = 4$, $m_y = 0.45$, $k_y = 5$. Information about the transformation functions are given in detail in Refs. [20] and [15] and are not repeated herein. These transformations provide a finer grid spacing near the walls in the horizontal direction as well as in the near zone of the plates location in the vertical one. The number of nodes was chosen in order to obtain solutions that proved to be mesh independent. Transient calculations were done up to a non-dimensional time of $t = 800$ for the values of the Rayleigh number 10^4, 10^5 and 5×10^5, for the cases of 5×10^4 and 10^6 calculations were extended up to a non-dimensional time of $t = 4000$. The non-dimensional time increment used in the calculations was $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Convergence on iteration for each time step was declared when the residual of the discretized equations were less than 10^{-10}.

The numerical code used in the present study was compared with the benchmark classical problem of natural convection in a square cavity with the whole left wall at temperature $\theta = 1$, the right wall at temperature $\theta = 0$ and the top and bottom surfaces isolated adiabatically. Three different values of Rayleigh number were considered, $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$, with the value $Pr = 0.71$ for the Prandtl number. The average Nusselt number over the heated wall was calculated and compared with three different results found in the literature. The comparison is shown in Table 1. A non-uniform grid with 40 nodes in each direction was used for the cases of $Ra = 10^4$ and $Ra = 10^5$, meanwhile a non-uniform grid with 50 nodes in each direction was employed for the case of $Ra = 10^6$. Excellent agreement is observed.

In order to test the grid and the time formulations used in the present study, the results for the average Nusselt number obtained with the staggered grids of 151 × 76 nodes with non-dimensional time increment of $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$, for the highest value of the Rayleigh number studied, were compared with the results obtained with the use of the same grids with a smaller time increment of $\Delta t = 10^{-4}$, with the results of grids of 200 × 150 nodes with the two time increments, and with the results obtained with finer grids of 250 × 180 nodes with the non-dimensional time increment of $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

The overall decay of the curves is consistent in all cases, exponential decay fits were obtained for each curve with coefficient $R^2 > 0.97$ in all cases, the maximum relative differences between them is of less than 6%, and the maximum differences in the initial stages before the symmetry break, between the results corresponding to different grid sizes, are of less than 4%. Besides, the temporal formulation shows an excellent agreement with the analytical solution in the evolution of the temperature field in the case of $Ra = 10^3$, as can be seen in Fig. 3. Also, the comparison of the power spectrum of the average Nusselt number shows an exact coincidence in the main peak for all cases, except for the fourth one, where a good agreement is found. This confirms that the curves obtained are different realizations of the same phenomena. Thus, the grids and the temporal formulation used were considered adequate.

Table 1
Average Nusselt number for the benchmark problem for the present study and those found in the literature.

Reference	$Ra = 10^4$	10^5	10^6
Present	2.247	4.549	8.817
[7]	2.243	4.519	8.799
[12]	–	–	8.825
[1]	–	4.522	8.826

4. Results

The numerical calculations were performed for six different values of the Rayleigh number (10^3, 10^4, 5×10^4, 10^5, 5×10^5 and 10^6), with a Prandtl number of 7 and a fixed set of geometrical parameters ($L^* = 12H^*$, $L_1^* = 10H^*$ and $l^* = H^*$).

$Ra = 10^3$

Fig. 2 shows the evolution of the temperature field for a Rayleigh number of 10^3 at nine different non-dimensional times. For this relatively low Rayleigh number, the diffusion process is strong enough to produce, after an initial stage, quasi-horizontal isotherms which evolve up and down with time. The lower thermal stable layer reproduces a purely diffusive process. However, the thickness of the upper heated layer increases with time with a slightly higher rate due to buoyancy. No spontaneous instability occurs and the process can be assumed to be purely diffusive, as shown in Fig. 3, where the non-dimensional transverse averaged temperature $\tilde{\theta}(x, t)$, for five different positions $x = 0$, 1.87, 4.90, 8.18 and 9.11 as a function of the non-dimensional time t is plotted. For comparison, a diffusive process given in terms of the complementary error function is also plotted with filled symbols. The reference of the diffusive process ($\theta = 1$) is set to a distance $x = a$ in such a way that, the transverse averaged non-dimensional

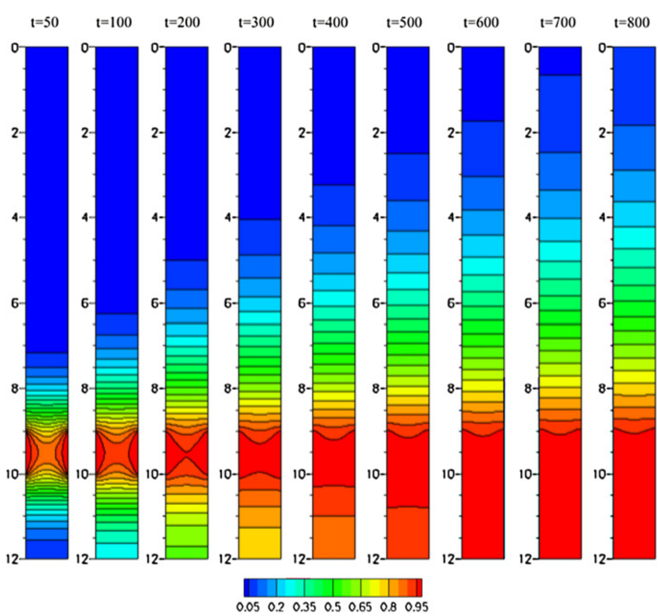

Fig. 2. Evolution of the temperature fields for $Ra = 10^3$ at different times.

ARTICLE IN PRESS

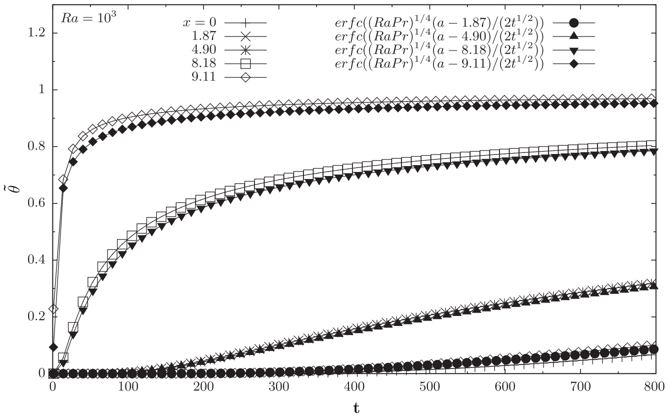

Fig. 3. Transverse averaged non-dimensional temperature for a $Ra = 10^3$ as a function of time (open symbols). Closed symbols represent a pure diffusive process. The reference of the diffusive process ($\theta = 1$) is set at $x = a$ in such a way that, the transverse averaged non-dimensional temperature coincides with that obtained at $x = 9.11$ at the initial time.

temperature coincides with that obtained at $x = 9.11$ at the initial time. The process is smooth in the whole length of the cavity.

$Ra = 10^4$

For a higher value of the Rayleigh number, $Ra = 10^4$, the process at short times is similar to the former case. Two vortical structures develop above the plates displacing the warmer fluid to higher regions of the cavity close to its walls while the colder fluid moves to lower regions of the cavity along the symmetry plane as can be seen in Fig. 4. Instability occurs, resembling to that of Rayleigh–Bénard problem. The height of the upper heated layer increases faster than in the previous case with time. If this non-dimensional height, measured from the end of the plates located at $x = 9$ is denoted by $h(t)$, the appropriate Rayleigh number based in this length is of order $Ra_B = Rah^3$. The non-dimensional horizontal wave number based in this length is $k_B = 2\pi h$. By the replace of h, the following relationship is obtained $Ra = F(k_B) = Ra_B[2\pi/k_B]^3$, where $Ra_B(k_B)$ is obtained from the neutral stability curve. For this particular case, symmetry break occurs with $h(t) \approx 2$, as can be seen from the second image in Fig. 4, where the temperature field is shown. The critical Rayleigh number is then $Ra_B \sim 8 \times 10^4$ and the non-dimensional horizontal wave number is $k_B \approx 12$. Despite not being the same conditions for the classical Rayleigh–Bénard case (flat isotherms, linear distribution of temperature and null velocity), the onset of instability can be approximately reproduced. The animation included in Fig. 4 shows the evolution of the temperature field for $Ra = 10^4$.

Instability arises at a non-dimensional time of $t \approx 159$, as can be seen in the curve that corresponds to $x = 8.18$ in Fig. 6, and a strong cell develops and lifts hot fluid at a height around $x \approx 5$ close to one wall, meanwhile the relatively cold fluid moves down along the other. In the numerical simulation, the instability produced a clockwise vortical structure which lifts hot fluid at the left wall, all later reference has to be related to this fact. The cold fluid with high axial momentum pushes the original vortical anticlockwise structure close to the right heated plate. Afterwards, the buoyancy forces in the fluid of the depressed vortical structure increase. As a result, the vortex detaches and pushes up the clockwise circulating vortex located above. This process repeats after a relative short time, with a new clockwise vortex detaching from the left plate. Finally, a new last event produces two large vortices which cover the whole length of the cavity. This is the way how, at this Rayleigh number, thermal energy is convected up.

Computations were performed up to $t = 800$, for this case. Fig. 5 illustrates the transverse averaged non-dimensional temperature plotted as a function of the non-dimensional time t, at different positions of the longitudinal coordinate. Again, the pure diffusive process is plotted with closed symbols. The upper curve was obtained at a position $x = 9.11$, which is slightly down from the upper edge of the heated plates. At this position, in the initial stage, the averaged temperature is little higher than that obtained with pure diffusion. However, after instability occurs, the temperature decreases abruptly, which is an indication that the thermal energy is rapidly convected up in the cavity. The vortex shedding episodes can be visualized as peaks at position $x = 8.18$, which is the second

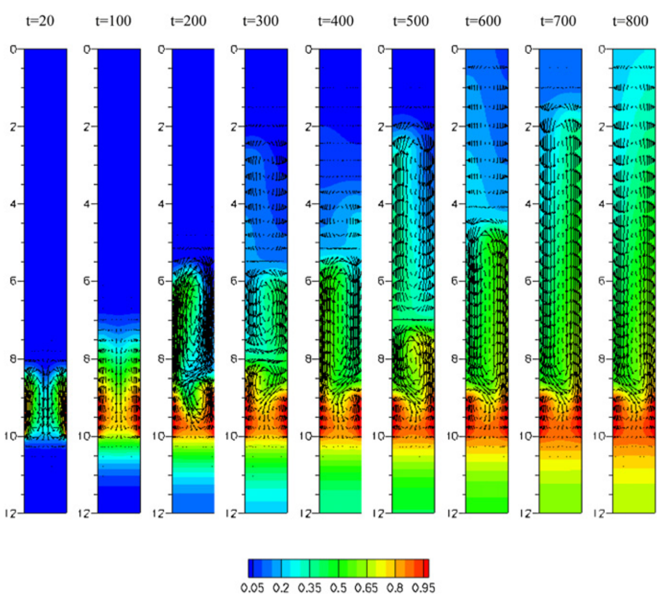

Fig. 4. Evolution of the temperature fields for $Ra = 10^4$ at different times. The two first illustrations show the increment of the non-dimensional height of the upper heated layer denoted by $h(t)$, the appropriate Rayleigh number based in this length is $Ra_B = Rah^3$. When this value reaches the critical Rayleigh number for the non-dimensional wave number $2\pi h$, instability occurs resembling to that of Rayleigh–Bénard problem.

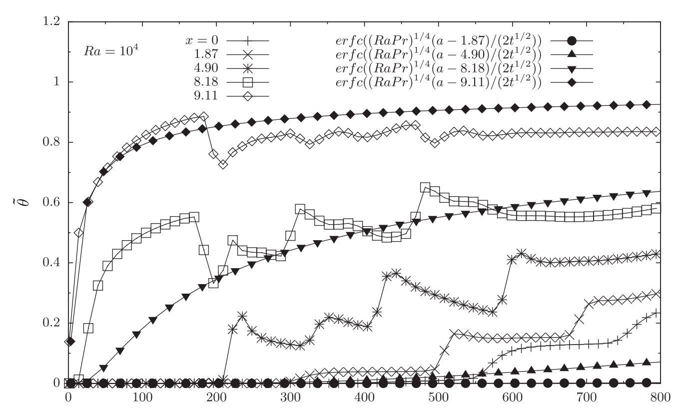

Fig. 5. Transverse averaged non-dimensional temperature for $Ra = 10^4$ as a function of time (open symbols). Closed symbols represent a pure diffusive process. The reference of the diffusive process ($\theta = 1$) is set at $x = a$ in such a way that, the transverse averaged non-dimensional temperature coincides with that obtained at $x = 9.11$ at the initial time. The thermal propagation velocity can be inferred from the corresponding peaks at positions $x = 8.18$ and $x = 4.90$, being $0.025(g^* H^* \Delta\rho^*/\rho_0^*)^{1/2}$.

Please cite this article in press as: J.C. Cajas, C. Treviño, Transient heating and entropy generation of a fluid inside a large aspect ratio cavity, International Journal of Thermal Sciences (2012), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2012.08.001

curve from the top in Fig. 5. There are a total of four different peaks which are the indications of instability and three vortex shedding episodes. The thermal propagation velocity can be inferred from the corresponding peaks at a position $x = 4.90$, being $0.025(g^* H^* \Delta\rho^*/\rho_0^*)^{1/2}$, exactly the same for the three episodes. Fig. 6(a) shows the thermal centroid $\tilde{y}(x,t)$ as a function of time at different longitudinal positions for the same Rayleigh number of 10^4. Thermal instability or symmetry break occurs at a time close to 159. At a given position, positive values of $\tilde{y}(x,t) - 0.5$ represent anticlockwise vortices. Vortex shedding episodes are clearly shown by crossing the line $\tilde{y}(x,t) = 0.5$. At large non-dimensional times a large cell covering almost the whole cavity develops (which rotates in the opposite direction of the initial vortex after instability). The same information concerning the symmetry break, the vortex shedding episodes and the direction of rotation of the vortices is provided by Fig. 6(b), where the first moment of the vertical velocity distribution is plotted as function of the non-dimensional time for different positions. The agreement between the two quantities, in the named aspects of the flow structure, is due to the strong coupling of the heat and mass fluxes for the Rayleigh numbers $Ra \geq 10^4$ studied in the present work.

The evolution of the entropy production field is shown in the animation included in Fig. 7. Initially, two symmetrical wide regions of entropy generation develop in the zone near the plates and extend their size as the vortical structures move in the upward direction. After instability occurs, alternating zones of entropy production are created in the cavity, following the vortex shedding episodes and highlighting the zones of stronger heat flux. As a consequence of heat diffusion, a weak entropy generation region develops below the location of the plates and vanishes with time. As the temperature increases in the whole cavity, the entropy generation zones start to disappear or become less intense.

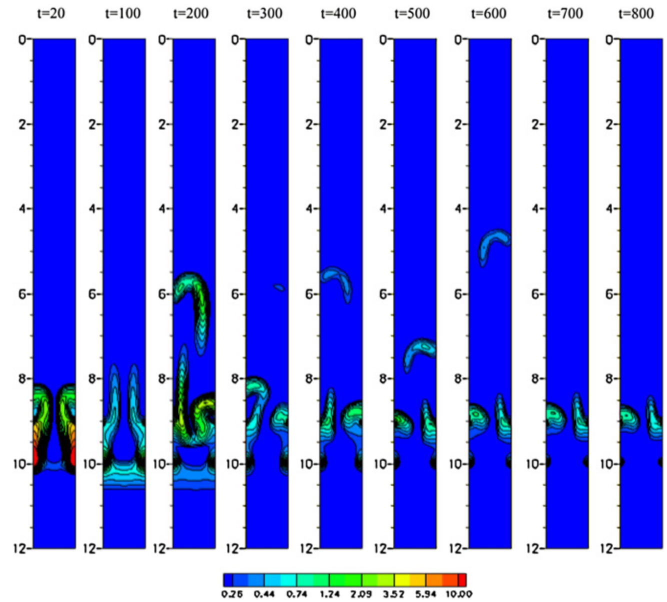

Fig. 7. Evolution of the entropy production field for $Ra = 10^4$ at different times.

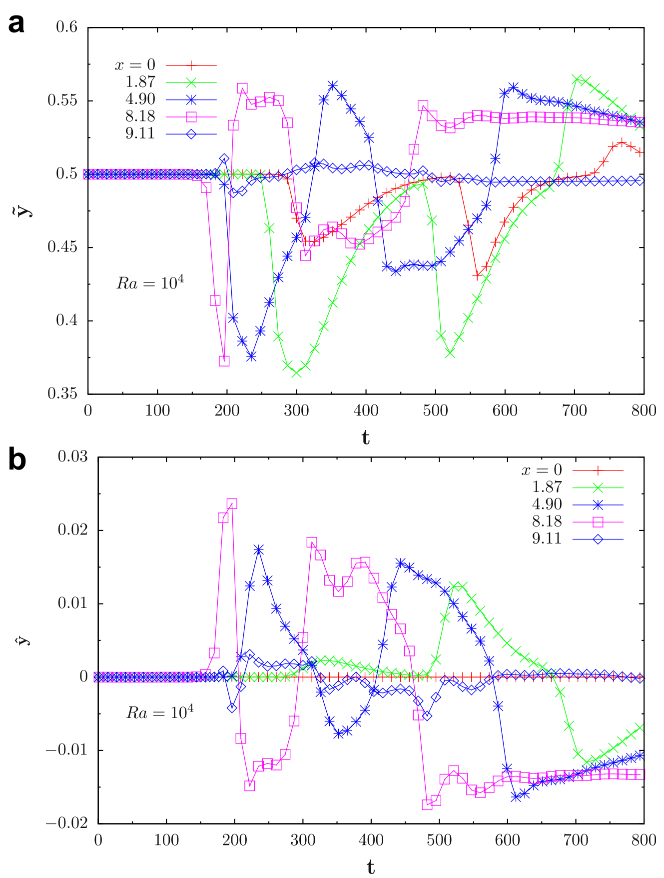

Fig. 6. (a) Thermal centroid for $Ra = 10^4$ as a function of time. Symmetry break occurs at $t \approx 159$. At a given position, positive values of $\tilde{y}(x,t) - 0.5$ represent anticlockwise vortices. Vortex shedding episodes are clearly shown by crossing the line $\tilde{y}(x,t) = 0.5$. (b) Mass centroid as a function of time. Positive values of $\hat{y}(x,t)$ represent clockwise vortices. Vortex shedding episodes are shown by crossing the line $\hat{y}(x,t) = 0$.

$Ra = 5 \times 10^4$

For a larger Rayleigh number, $Ra = 5 \times 10^4$, the convective heat transfer mechanism changes qualitatively. The animation included in Fig. 8 shows the evolution of the temperature field for this

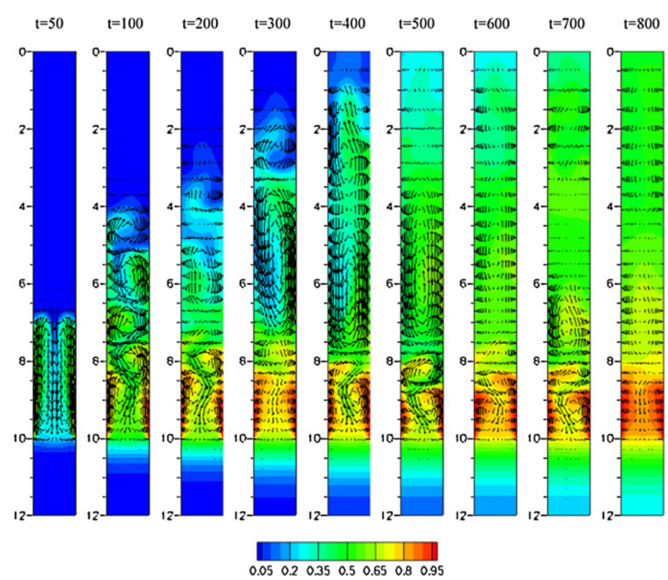

Fig. 8. Evolution of the temperature fields for $Ra = 5 \times 10^4$ at different times. Two large symmetrical cells develop at small non-dimensional times. Hot fluid climbs in regions close to the walls, cold fluid falls in the central section of the cavity and creates a channel-like structure. Important shear occurs due to counter-flowing streams and gives place to a Kelvin–Helmholtz instability mechanism. The engulf and swallow process can be observed in $t = 300$.

Please cite this article in press as: J.C. Cajas, C. Treviño, Transient heating and entropy generation of a fluid inside a large aspect ratio cavity, International Journal of Thermal Sciences (2012), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2012.08.001

Rayleigh number. Two large symmetrical cells develop at small times and the leading edge of each vortex reaches the position $x \approx 6$. Hot fluid climbs in regions close to the walls and cold fluid falls in the central section of the cavity, which creates a channel-like structure between the recirculation regions. In this central part, important shear occurs due to counter-flowing streams giving place to a Kelvin–Helmholtz instability mechanism. The cold fluid located in the central part of the cavity produces a disturbance in the cells. As a result, one of them climbs further while the other is depressed. This amplifies the central channel perturbation and gives it a sinusoidal form. Further amplification leads to the formation of several counter-rotating vortices of the size of the length of the channel. These series of vortical structures oscillate and spread up with time. After a process of vortex pairing or recombinations, the highest vortex engulfs fluid with low temperature and takes it rapidly to lower sections of the cavity along the falling branches of the series of vortices. This type of episode is named engulf and swallow process, and occurs three times in the heat transfer process for the geometrical configuration employed.

Figs. 9 and 10 show the transverse averaged non-dimensional temperature $\tilde{\theta}(x,t)$, and the thermal centroid $\tilde{y}(x,t)$, as functions of time for different longitudinal positions, respectively. In Fig. 9, it is to be noticed that the relative time delay to produce remarkable temperature increase at the top of the cavity decreases drastically for this Rayleigh number (5×10^4) compared with the previous one (10^4). The average temperature for larger values of the x coordinate shows larger oscillations than those found in the previous case, this indicates that the fluid moving down reach the location of the plates at low temperature enough to have an important impact on the average temperature in this position. The amplitude of the oscillations decrease for the lower values of x, and vanish at the top of the cavity. Fig. 10 shows that instability or symmetry break occurs at the position $x \approx 5$ at a time close to $t \approx 77$. This figure also shows a large activity of the vortices (changing gyre together with oscillations). The normalized power spectrum of $\tilde{y}$ at $x = 8.18$ is shown in Fig. 11 as a function of the Strouhal number or non-dimensional frequency, given by $St = f^*[\rho_0^* H^*/(g^*\Delta\rho^*)]^{1/2}$, with f^* being the frequency in dimensional form. There are three main peaks on the figure, all being of almost same amplitude. Peak A reflects the low frequency episodes related to the engulf and swallow processes, peak B results from the translation of the vortical structures, while peak C evidences the oscillating character

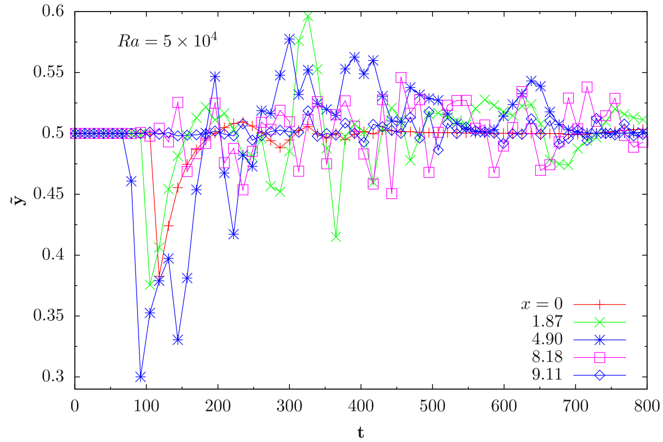

Fig. 10. Thermal centroid for $Ra = 5 \times 10^4$ as a function of time, at different positions. Instability or symmetry break occurs at $t \approx 77$. At a given position, positive values of $\tilde{y}(x,t) - 0.5$ represent anticlockwise vortices. Vortex shedding episodes are clearly shown by crossing the line $\tilde{y}(x,t) = 0.5$.

of this dancing vortices. For values of the non-dimensional time $t > 800$, the process continues with some more vortex shedding episodes of much less intensity than those found before. As time goes by, the process reaches a mainly diffusive stage, as indicated by the slow and smooth decay of the average Nusselt number showed in Fig. 18.

The evolution of the entropy production field is shown in the animation included in Fig. 12. Initially, two symmetrical large and narrow regions of intense entropy generation are created due to the presence of relatively cold fluid (moving downwards), next to the thin layer of hot fluid (moving upwards) near to the heated plates. As instability occurs, the large regions of entropy generation break down into smaller ones in accordance to the vortices created by the amplification of the perturbation in the channel described above. As time goes by, entropy generation regions move upwards in the cavity, following the vortex shedding episodes and highlighting the zones of stronger heat flux as in the previous case. However, the regions of entropy production are considerably thinner and more intense than that of $Ra = 10^4$. It is to be noticed, that the engulf and swallow process takes, in short periods of non-dimensional time, cold fluid from the upper zone to the hot lower one. Thus, intense

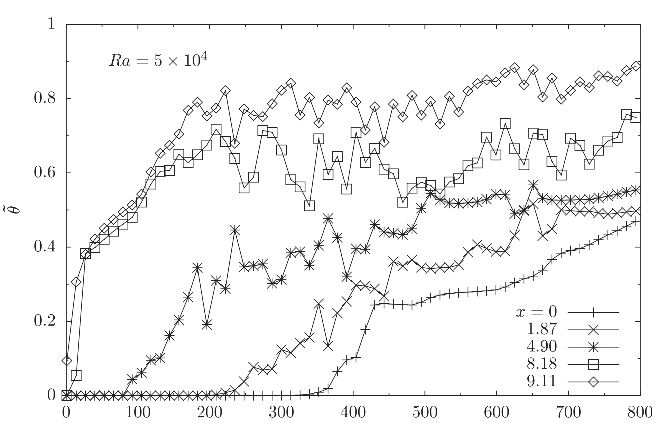

Fig. 9. Transverse averaged non-dimensional temperature for $Ra = 5 \times 10^4$ as a function of time. The relative non-dimensional time delay to produce remarkable temperature increase at the top of the cavity decreases drastically in comparison with the previous case ($Ra = 10^4$).

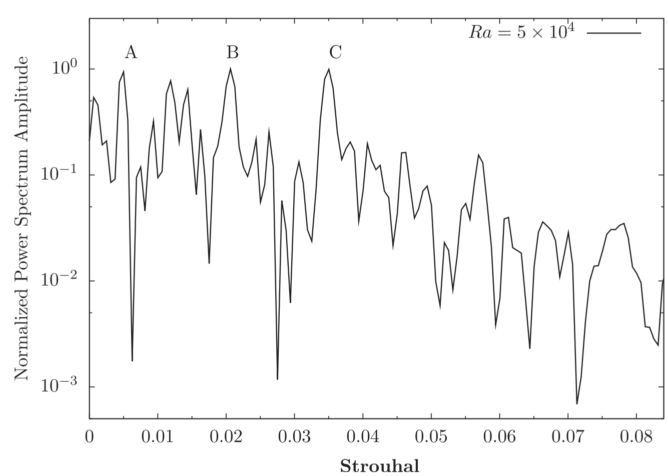

Fig. 11. Normalized power spectrum at $x = 8.18$ for $Ra = 5 \times 10^4$, using $\tilde{y}$. Peak A reflects the low frequency episodes related to the engulf and swallow processes, peak B results from the translation of the vortical structures and peak C evidences the oscillating character of this dancing vortices.

Please cite this article in press as: J.C. Cajas, C. Treviño, Transient heating and entropy generation of a fluid inside a large aspect ratio cavity, International Journal of Thermal Sciences (2012), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2012.08.001

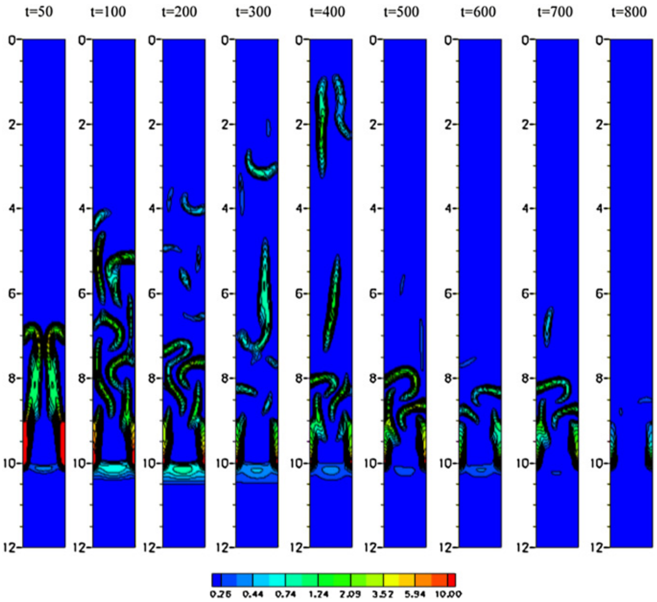

Fig. 12. Evolution of the entropy production field for $Ra = 5 \times 10^4$ at different times.

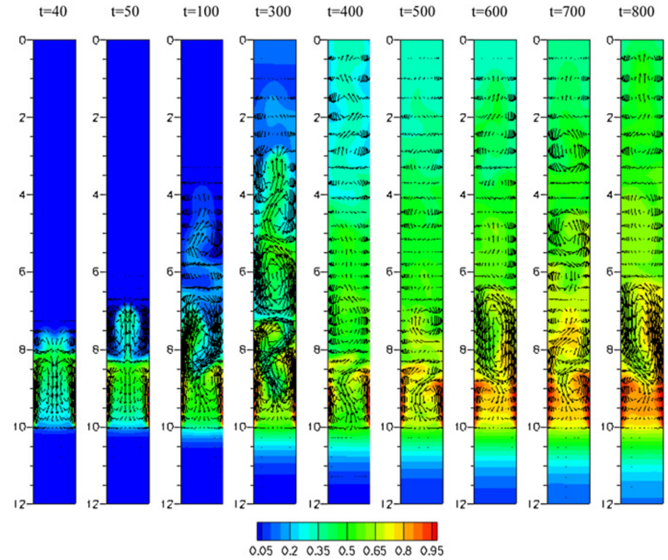

Fig. 13. Evolution of the temperature fields for $Ra = 10^5$ at different times. Two strong recirculation regions develop, one in front of each heated plate, collide and create a thermal bubble. After relatively short non-dimensional time, the bubble moves up and is isolated by the cold fluid flowing down close to the walls. The bubble then rises rapidly, generating a wavy wake that finally breaks the symmetry. The engulf and swallow process can be observed in $t = 300$.

entropy production near the location of the heated plates is observed in this episodes. As the temperature increases in the whole cavity, the entropy generation zones start to become less intense or to disappear.

$Ra = 10^5$

For this Rayleigh number, two strong symmetrical boundary layers develop close to the heated plates, which deflect rapidly towards the center due to the cold stream flowing down (mass conservation). Then, two recirculation regions develop in front of each plate as in the previous cases. However, due to the strength of the boundary layers, the recirculation regions collide and create a stagnation plane above them, isolating the flow in the upper part of the cavity. Two new recirculation regions develop rapidly above the stagnation plane (one at each side of the symmetry plane) with high temperature fluid moving up in the central part of the cavity, and low temperature fluid moving down near the walls. A thermal bubble is then created with increasing buoyancy. After relatively short non-dimensional time, the bubble moves up and the cold fluid flowing down close to the walls isolates it from the high temperature fluid in the stagnation plane. This produces a detachment and the bubble then rises rapidly, generating a wavy wake that finally breaks the symmetry at position $x \approx 6$ and non-dimensional time $t \approx 50$, as can be seen in Fig. 15. Series of dancing vortices are produced, and move up following the path used by the thermal plume produced by the first bubble. New thermal plumes are generated and rapidly reach the top of the cavity. An increased number of engulf and swallow episodes take place for this Rayleigh number, which is the most important heat transfer mechanism. All these phenomena are shown in the animation included in Fig. 13.

Figs. 14 and 15 show the transverse averaged non-dimensional temperature $\tilde{\theta}(x,t)$, and the thermal centroid $\tilde{y}(x,t)$, as functions of non-dimensional time for different longitudinal positions, respectively. Again, the relative time delay to produce remarkable temperature increase at the top of the cavity decreases in comparison to the previous cases. It is clearly shown that even the temperature at the top is sometimes larger than that of a position just below, $x = 1.87$. The power spectrum of the thermal centroid, showed in Fig. 16, provides information about the dynamics of the vortical structures in this transient heat transfer process. In this plot, the normalized power spectrum amplitude is shown for two different positions, at the top of the cavity, namely $x = 0$ and at $x = 8.18$. The low frequency events registered at $x = 0$ ($St \simeq 0.012$) are related to the arrival of the thermal plumes at the top of the cavity. The most important peak at $x = 8.18$ ($St \simeq 0.026$) is related to the vortex dynamics that represents how thermal energy is transported upwards in the cavity.

The entropy production field for this case is shown in the animation included in Fig. 17. Although the regions are initially symmetric, as in the former cases, their shape is very different from those obtained earlier. Again, the zones of higher entropy production become more intense and narrower. Two high entropy production layers next to the heated plates can be observed. The

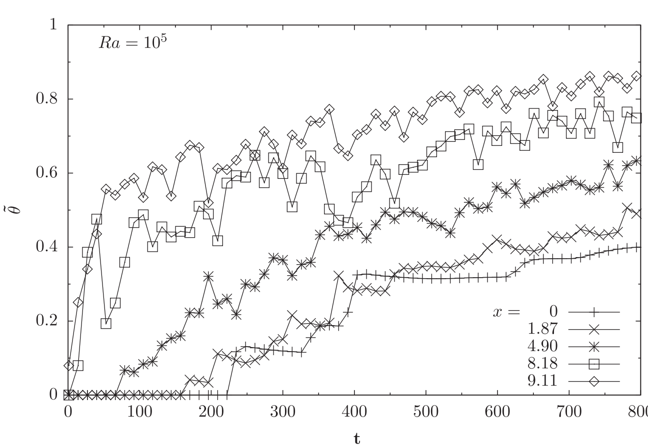

Fig. 14. Transverse averaged non-dimensional temperature for $Ra = 10^5$ as a function of time. The relative non-dimensional time delay to produce remarkable temperature increase at the top of the cavity decreases drastically in comparison with the previous cases. It is clearly shown that even the temperature at the top is sometimes larger than that of a position just below.

Please cite this article in press as: J.C. Cajas, C. Treviño, Transient heating and entropy generation of a fluid inside a large aspect ratio cavity, International Journal of Thermal Sciences (2012), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2012.08.001

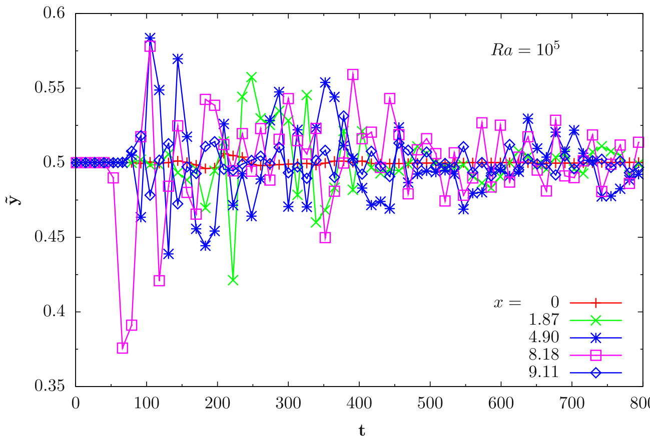

Fig. 15. Thermal centroid for $Ra = 10^5$ as a function of time, at different positions. Instability or symmetry break occurs at $t \approx 50$. At a given position, positive values of $\tilde{y}(x,t) - 0.5$ represent anticlockwise vortices. Vortex shedding episodes are clearly shown by crossing the line $\tilde{y}(x,t) = 0.5$.

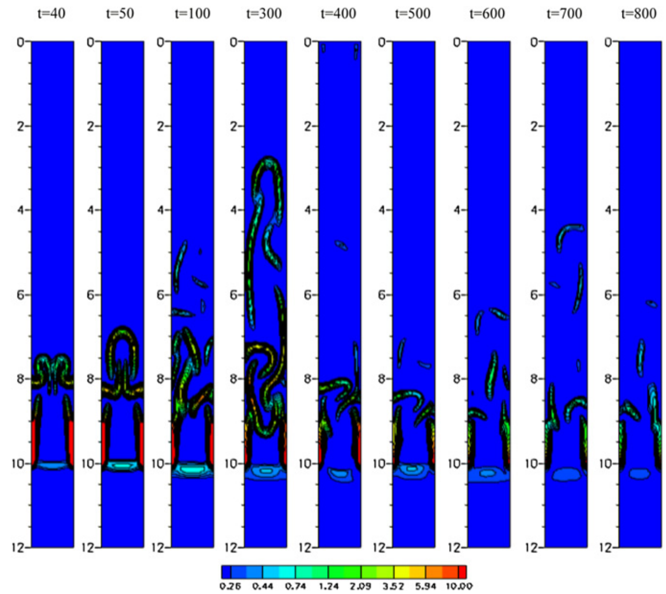

Fig. 17. Evolution of the entropy production field for $Ra = 10^5$ at different times.

deflection of the thermal boundary layers, the stagnation plane, the vortices created above it and the bubble previously described, are clearly shown by their highlighted borders, where low and high temperature fluid are in contact. After symmetry breaks, worm-like entropy generation zones are created in the lower part of the cavity. With time, they move upwards and when the engulf and swallow process occurs, this worm-like regions get connected and form longer structures which show the path followed by the low temperature fluid in its way downwards. As the temperature increases in the whole cavity, the entropy generation zones start to vanish.

$Ra = 5 \times 10^5$ and $Ra = 10^6$

For larger values of the Rayleigh number, up to 10^6, the behavior is similar to the case with $Ra = 10^5$, but with thinner boundary layers in the initial stage. The symmetry break is provoked by the collision of the recirculation regions created. The main heat transfer mechanism (the engulf and swallow process) also remains the same as described before. Different vortices dynamics are observed, with higher frequencies of vortex shedding and swallow episodes.

The entropy generation zones become stronger and more localized than in previous cases. As before, they follow the vortices dynamics, highlighting the regions of intense mixing.

4.1. Global responses

The overall Nusselt numbers for both heated plates, as a function of the non-dimensional time, are shown in Fig. 18 for several values of the Rayleigh number. In all cases the decrement with time is not smooth, but with fluctuations mainly due to the vortex interaction inside the cavity explained above. These jumps can be produced by instabilities, vortex shedding or engulf and swallow processes. It is remarkable that the overall Nusselt numbers at both heated plates follow almost the same trends for the whole history. It is important to notice that a different response occurs between $Ra = 5 \times 10^4$ and $Ra = 10^5$, which is mainly due to the larger influence of diffusion for smaller Rayleigh numbers. As well, it is to be noticed that in the cases of $Ra = 5 \times 10^4$ and 10^6, where the simulations were extended up to $t = 4000$, the decay of the average Nusselt number after $t = 800$ becomes smoother and slower than before. There are still

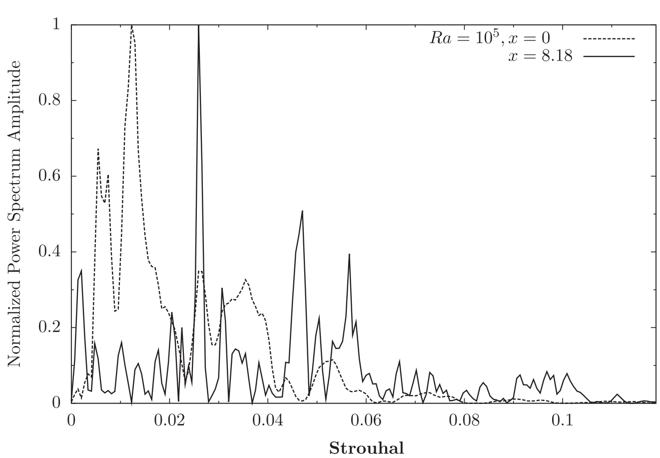

Fig. 16. Normalized power spectrum at two positions $x = 8.18$ and $x = 0$ for $Ra = 10^5$, using $\tilde{y}$. The low frequency events registered at $x = 0$ are related to the arrival of the thermal plumes at the top of the cavity. The most important peak at $x = 8.18$ is related to the vortex dynamics that represents how thermal energy is transported upwards in the cavity.

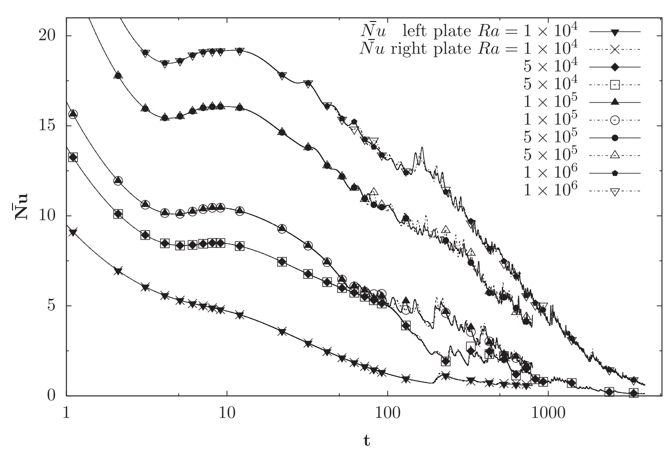

Fig. 18. Average Nusselt numbers as functions of non-dimensional time for different values of the Rayleigh numbers.

Please cite this article in press as: J.C. Cajas, C. Treviño, Transient heating and entropy generation of a fluid inside a large aspect ratio cavity, International Journal of Thermal Sciences (2012), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2012.08.001

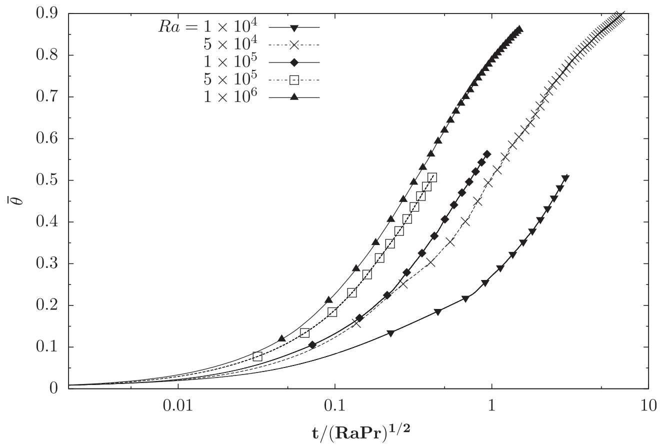

Fig. 19. Overall mean non-dimensional temperature in the cavity as a function of $t/(RaPr)^{1/2}$ for different values of the Rayleigh number.

some fluctuations due to vortex shedding episodes and, in the case of $Ra = 10^6$, the engulf and swallow process. However, the heat transfer finally reaches a mainly diffusive stage. Of interest is the Rayleigh number dependence of the global evolution of thermal energy in the whole cavity, represented by $\overline{\theta}(t)$, as shown in Fig. 19 as a function of $t/(RaPr)^{1/2}$. This compressed time scale illustrates better the diffusive part of the process and is independent of the Rayleigh number. It can be observed that in the early stage of the process, the values of the overall mean non-dimensional temperature increase in a similar way, that corresponds to the small lapse of non-dimensional time where diffusion has a considerable influence. Later, when convection dominates, the overall mean non-dimensional temperature increases at a higher rate for higher values of the Rayleigh number, as was expected.

The overall reduced entropy production is

$$\overline{\sigma}_{qr} = \frac{1}{(Ra\,Pr)^{1/2}} \int_0^{12} \int_0^1 \sigma_q \mathrm{d}y\mathrm{d}x, \tag{18}$$

assuming $\varepsilon \to 0$, which is the same as the overall reduced scalar dissipation rate $\overline{\chi}_r$, is plotted in Fig. 20 as a function of the non-dimensional time. In this figure, the universal character of these quantities can be observed, being almost independent of the Rayleigh number. There is some scatter for relatively low Rayleigh numbers, but the mean can be fitted by

$$\overline{\sigma}_{qr} = \overline{\chi}_r \simeq 4.04 \times 10^{-5} + 1.39 \times 10^{-3} \exp[-t/510.12], \tag{19}$$

except for the short initial stage.

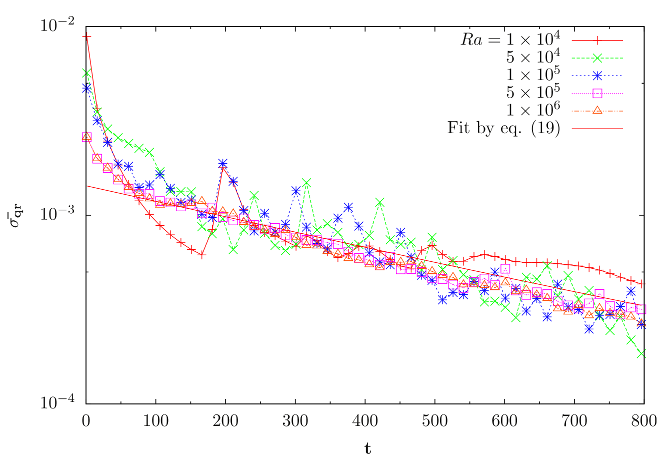

Fig. 20. Overall reduced entropy production as a function of convective time for different values of the Rayleigh number.

5. Conclusions

In this work, the transient heating of a fluid in a vertical cavity of large aspect ratio, AR = 12, from two heated vertical plates localized in the side walls of the cavity near the bottom, was studied numerically by use of the SIMPLE algorithm. Calculations were performed for a fixed value of the Prandtl number, $Pr = 7$, and six different Rayleigh numbers between 10^3 and 10^6. The temperature field, the entropy production field, the non-dimensional heat flux on the heated plates (given by the average Nusselt number) and the vortices dynamics of the process are obtained. Different mechanisms of symmetry break and heat transfer in the cavity are observed depending on the value of the Rayleigh number.

For the case of a low value of the Rayleigh number, $Ra = 10^3$, no instability occurs and the process is almost pure diffusive. For larger values of the Rayleigh number, three different kinds of instabilities and two different main heat exchange mechanisms are found. For the case of $Ra = 10^4$, an instability similar to the encountered in the Rayleigh–Bénard problem occurs and the main heat transfer mechanism is the repetition of vortex detachments from the zone near the heated plates, which pushes up the previously created recirculation regions. For $Ra = 5 \times 10^4$, a Kelvin–Helmholtz instability is found and the main heat transfer mechanism is the named engulf and swallow process described in the results section. The instability found for the higher values of Rayleigh number investigated, is due to the collision of the strong recirculation regions created near the heated plates, and the main heat transfer mechanism remains to be the engulf and swallow process.

Finally, the behavior of the overall entropy production and the overall scalar dissipation rate increases with the square root of the Rayleigh number and their main value can be characterized by the use of Eq. (19).

Acknowledgments

This work has been supported by Grant IXTLI, IX100110 from UNAM.

Appendix A. Supplementary data

Supplementary data related to this article can be found at http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2012.08.001.

References

[1] A. AlAmiri, K. Khanafer, I. Pop, Buoyancy-induced flow and heat transfer in a partially divided square enclosure, International Journal of Heat and Mass Transfer 52 (2009) 3818–3828.
[2] S. Aminossadati, B. Ghasemi, Natural convection cooling of a localised heat source at the bottom of a nanofluid-filled enclosure, European Journal of Mechanics B/Fluids 28 (2009) 630–640.
[3] A. Baytas, Entropy generation for natural convection in an inclined porous cavity, International Journal of Heat and Mass Transfer 43 (2000) 2089–2099.
[4] A. Bejan, Entropy Generation through Heat and Fluid Flow, John Wiley & Sons. Inc., Canada, 1994.
[5] F. Corvaro, M. Paroncini, An experimental study of natural convection in a differentially heated cavity through a 2d-piv system, International Journal of Heat and Mass Transfer 52 (2009) 335–365.
[6] A. Dalal, M.K. Das, Numerical study of laminar natural convection in a complicated cavity heated from top with sinusoidal temperature and cooled from other sides, Computers & Fluids 36 (2007) 680–700.

[7] G. De Vahl Davis, Natural convection of air in a square cavity a benchmark numerical solution, International Journal for Numerical Methods in Fluids 3 (1983) 249–264.
[8] L.B. Erbay, Z. Altaç, B. Sülüş, An analysis of the entropy generation in a square enclosure, Entropy 5 (2003) 496–505.
[9] K. Gustafson, K. Halasi, Cavity flow dynamics at higher reynolds number and higher aspect ratio, Journal of Computational Physics 70 (1987) 271–283.
[10] G.G. Ilis, M. Mobedi, B. Sunden, Effect of aspect ratio on entropy generation in a rectangular cavity with differentially heated vertical walls, International Communications in Heat and Mass Transfer 35 (2008) 696–703.
[11] D. Kondepudi, I. Prigogine, Modern Thermodynamics, John Wiley & Sons, 1999.
[12] P. Le Quéré, Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number, Computers & Fluids 20 (1) (1991) 29–41.
[13] M. Magherbi, H. Abbassi, N. Hidouri, A. Ben Brahim, Second law analysis in convective heat and mass transfer, Entropy 8 (1) (2006) 1–17.
[14] S. Mahmud, R.A. Fraser, The second law analysis in fundamental convective heat transfer problems, International Journal of Thermal Sciences 42 (2003) 177–186.
[15] L. Martínez-Suástegui, C. Treviño, Transient laminar opposing mixed convection in a differentially and asymmetrically heated vertical channel of finite length, International Journal of Heat and Mass Transfer 51 (2008) 5991–6005.
[16] N. Nithyadevi, P. Kandaswamy, J. Lee, Natural convection in a rectangular cavity with partially active side walls, International Journal of Heat and Mass Transfer 50 (2007) 4688–4697.
[17] S. Ostrach, Natural convection in enclosures, Journal of Heat Transfer 110 (1988) 1175–1190.
[18] S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
[19] F. Pujol, J. Rojas, E. Ramos, Transient natural convection in a cavity with heat input and a constat temperature in opposite sides, International Journal of Heat and Fluid Flow 14 (4) (1993).
[20] J.C. Tannehill, D.A. Anderson, R.H. Pletcher, Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, second ed., Taylor & Francis, 1997.
[21] Y. Varol, H.F. Oztop, A. Koca, Entropy generation due to conjugate natural convection in enclosures bounded by vertical solid walls with different thicknesses, International Communications in Heat and Mass Transfer 35 (2008) 648–656.
[22] Y. Varol, H.F. Oztop, A. Koca, E. Avci, Forecasting of entropy production due to buoyant convection using support vector machines (svm) in a partially cooled square cross-sectional room, Expert Systems with Applications 36 (2009) 5813–5821.
[23] Y. Varol, H.F. Oztop, I. Pop, Entropy analysis due to conjugate-buoyant flow in a right-angle trapezoidal enclosure filled with a porous medium bounded by a solid vertical wall, International Journal of Thermal Sciences 48 (2009) 1161–1175.
[24] X. Wang, Y. Wei, X. Shen, Numerical investigation of the first bifurcation for natural convection of fluids enclosed in a 2d square cavity with pr lower than 1.0, Energy Conversion and Management 50 (2009) 2504–2512.
[25] C.E. Wayne, Vortices and two-dimensional fluid motion, Notices of the American Mathematical Society 58 (1) (2011).
[26] W. Wu, C. Ching, Laminar natural convection in an air-filled square cavity with partitions on the top wall, International Journal of Heat and Mass Transfer 53 (2010) 1759–1772.
[27] F. Xu, J.C. Patterson, C. Lei, Transient natural convection flows around a thin fin on the sidewall of a differentially heated cavity, Journal of Fluid Mechanics 639 (2009) 261–290.
[28] W. Zhang, C. Zhang, G. Xi, Conjugate conduction-natural convection in an enclosure with time-periodic sidewall temperature and inclination, International Journal of Heat and Fluid Flow 32 (2011) 52–64.