



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MEDIDAS ALEATORIAS EN TEORÍA DEL RIESGO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

ACTUARIO

PRESENTA:

REBECA JAZMÍN SÁNCHEZ RIVERA

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. ANA MEDA GUARDIOLA



CIUDAD UNIVERSITARIA

SEPTIEMBRE, 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Medidas Aleatorias en Teoría del Riesgo

por

Rebeca Jazmín Sánchez Rivera

Tesis presentada para obtener el grado de

Actuario

en el

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad Universitaria. Septiembre, 2012

(I) Datos del alumno

Sánchez

Rivera

Rebeca Jazmín

5536 0600

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Actuaría

305639125

(II) Datos del tutor

Dra.

Ana

Meda

Guardiola

(III) Datos del sinodal 1

Dra.

María Asunción Begoña

Fernández

Fernández

(IV) Datos del sinodal 2

Dra.

Ruth Selene

Fuentes

García

(V) Datos del sinodal 3

Dr.

Gerardo

Rubio

Hernández

(VI) Datos del sinodal 4

Act.

José Salvador

Zamora

Muñoz

(VII) Datos del trabajo escrito

Medidas Aleatorias en Teoría del Riesgo

105 p.

2012

*Al mejor ejemplo de fuerza y dedicación
que pude haber tenido: mi mamá.*

Agradecimientos

A mi asesora, Ana Meda, gracias por dedicarme un pedacito de su agenda cada semana, por responder a mis preguntas cuando era necesario y por no responderlas cuando sabía que yo podía hacerlo sola. Gracias por inspirarme las ganas de profundizar en temas de probabilidad y alentarme a aprovechar cada oportunidad para aprender todo lo que fuera posible.

Gracias a mi familia, a todos, porque siempre me desean lo mejor y me mandan buenas vibras, sin importar lo que decida hacer.

A mis hermanos, gracias por escucharme con atención e intentar comprender lo que estaba haciendo; gracias por sonreírme y abrazarme todos los días, y por compartir anécdotas, datos interesantes y críticas constructivas.

A mi papá, gracias por confiar ciegamente en lo que hago, por apoyarme incondicionalmente en esta etapa y por no dudar ni un segundo que puedo contra cualquier obstáculo que se me presente.

A mi mamá, gracias por estar conmigo en cada momento, por ilusionarse cada vez que yo me ilusionaba y por calmarme cada vez que yo me desesperaba. Gracias por inculcarme el buen hábito de sonreírle a los buenos tiempos y, más importante, a los no tan buenos.

Gracias a mis amigos. A los de la facultad, por compartir horas de trabajo, de risas, de estrés, de sueño y todo lo que implica hacer una tesis. Gracias por las pláticas súper interesantes de todo tipo de temas; gracias por ser el mejor equipo de trabajo que pude haber tenido en esta etapa.

A mis amigos que no son de la facultad, gracias por estar ahí en todo momento, en especial cuando necesitaba distraerme y dejar de pensar; gracias por animarme y echarme porras.

Gracias a la UNAM por darme la educación más completa que pude haber recibido, con profesores de primera, con una facultad que te da otra perspectiva del mundo y por ser una universidad que no sólo se preocupa por enseñar sino que también ofrece muchas actividades culturales, sociales y recreativas, que te ayudan a formarte no sólo como profesionista sino también como persona.

Índice general

Introducción	IX
1. Medidas aleatorias y procesos puntuales	1
1.1. Definiciones básicas	2
1.2. Definición de medida aleatoria y proceso puntual	6
1.3. Procesos empíricos	9
1.4. El proceso puntual como colección de variables aleatorias de conteo	16
1.5. Propiedades del proceso puntual	21
1.6. Distribución y funcional de Laplace	22
2. Medidas aleatorias Poisson	25
2.1. Definición de medida aleatoria Poisson e integral Poisson	26
2.2. Funcional de Laplace de una medida aleatoria Poisson	30
2.3. Propiedades de la integral Poisson	35
2.4. Medidas aleatorias Poisson marcadas	44
2.5. Transformaciones de medidas aleatorias Poisson	47
2.6. Sumas de medidas aleatorias Poisson	49
3. Medidas Aleatorias Poisson en Teoría del Riesgo	51
3.1. Ejemplos de Procesos Puntuales	52
3.2. Representación del Monto Acumulado	54
3.3. Siniestros Ocurridos No Reportados	57
3.4. Factores Externos	58

3.5. Modelo General	60
3.6. Modelo General Actualizado	63
3.7. Aplicación con datos reales	64
3.7.1. Distribución de los datos	65
3.7.2. Hiperparámetros para un modelo $gamma(\alpha, \beta)$	69
3.7.3. Actualización del parámetro de $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$	72
3.7.4. Actualización de $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$	73
3.7.5. Cálculo de una cota inferior para la reserva	75
Conclusiones	81
Apéndices	83
A. Teorema de Dynkin	83
B. Propiedades del proceso Poisson compuesto	87
C. Herramientas de estadística Bayesiana	90

Introducción

El riesgo está relacionado con la posibilidad de que ocurra un evento que se traduzca en algún tipo de daño. Es por esto que se da en todos los aspectos de la vida cotidiana, por ejemplo: el riesgo de una epidemia, el riesgo de un accidente, riesgos operativos y riesgos de mercado.

La teoría del riesgo es una rama de la probabilidad que le otorga a la ocurrencia del evento de interés una distribución de probabilidad para poder hacer inferencia sobre eventos futuros provenientes del mismo modelo. Para profundizar en la teoría del riesgo y las herramientas más utilizadas en este tipo de modelos, es recomendable consultar [5].

El objetivo de este trabajo es modelar el riesgo en que incurre una aseguradora de daños con una medida aleatoria Poisson y dar los elementos necesarios para hacerlo. El modelo teórico principal se da en el capítulo 2 y la aplicación al riesgo es el capítulo 3, el capítulo 1 es necesario para comprender lo que se hace en el capítulo 2. Las ideas centrales siguen esencialmente a [9].

Una medida aleatoria es una variable aleatoria que toma valores en un espacio de medidas. Restringiendo el espacio de medidas al subespacio de medidas puntuales se obtiene un proceso puntual y, restringiendo todavía más al subespacio de medidas puntuales Poisson, se obtiene una medida aleatoria Poisson. Son estas últimas las que nos interesan, por su aplicación y por tener propiedades que resultan ser sencillas de probar.

En el capítulo 1 nos centramos en el estudio de medidas aleatorias y procesos puntuales. En el capítulo 2 se aborda la teoría de medidas aleatorias Poisson y sus características. Por último,

en el capítulo 3, se presenta una manera de modelar el riesgo de una aseguradora utilizando la teoría de medidas aleatorias Poisson. Se usan datos de una aseguradora de daños y estadística Bayesiana para ajustar el modelo.

Para poder definir los conceptos de medida aleatoria y proceso puntual, es necesaria una sección de definiciones básicas, que abarque desde espacio topológico hasta medidas de Radon. La mayoría de estas definiciones se puede consultar en [2] y [4]. Esto se hace en la sección 1.1.

Una vez definidos medida aleatoria y proceso puntual en la sección 1.2, en la sección 1.3 se aborda un ejemplo de procesos puntuales de gran utilidad en la teoría estadística: el proceso empírico. Se prueban algunas propiedades de este proceso y algunas otras necesarias para demostrar su teorema límite: el teorema de Glivenko-Cantelli. Gran parte de las características de este proceso puede ser consultada en [3].

Una propiedad muy importante del proceso puntual, es que puede ser visto como una colección de variables aleatorias de conteo, teorema que se demuestra en la sección 1.4, siguiendo las ideas de [11].

Se abordan algunas propiedades del proceso puntual en la sección 1.5 y, en la última sección del capítulo 1, se define la funcional de Laplace del proceso puntual, la relación que tiene con la distribución del proceso y por qué es más fácil trabajar con la funcional de Laplace que con la distribución.

En la primera sección del capítulo 2 se definen las medidas aleatorias Poisson, se ve su representación como proceso Poisson compuesto y se define la integral Poisson, una integral con respecto a una medida aleatoria Poisson.

Se ve la forma que tiene la funcional de Laplace de una medida aleatoria Poisson, de forma que se puede decidir si un proceso puntual es una medida aleatoria Poisson, solamente analizando su funcional de Laplace. Esto se hace en la sección 2.2.

En la sección 2.3, se demuestran varias propiedades de la integral Poisson: representación como proceso Poisson compuesto, esperanza, varianza y covarianza.

Por otro lado, existen maneras de generar medidas aleatorias Poisson a partir de otras ya existentes. Es posible “marcarlas”, es decir, adherirle una coordenada a una medida aleatoria Poisson, lo que da como resultado una medida aleatoria Poisson en un espacio más grande. Esto se plantea en la sección 2.4.

En la sección 2.5 se prueba que, al aplicarle una transformación medible a una medida aleatoria Poisson, se obtiene una medida aleatoria Poisson en otro espacio.

Por último en este capítulo se ve que al sumar medidas aleatorias Poisson, se obtiene una medida aleatoria Poisson en el mismo espacio de estados y con medida media definida de una manera muy intuitiva, tomando en cuenta cómo se comporta la suma de las variables aleatorias Poisson.

En el capítulo 3 se da un modelo basado en medidas aleatorias Poisson que cumple ciertas características deseables en un modelo para el riesgo de una aseguradora, incorporando detalles de los siniestros como son: el tiempo de ocurrencia, el tiempo que tarda en reportarse, el tiempo en que se termina de pagar y el monto.

En la primera sección de este capítulo se dan algunos ejemplos para notar que sí es factible modelar el riesgo de una aseguradora con medidas aleatorias Poisson.

Existen varias propiedades que tiene el riesgo al ser modelado de esta forma. En la sección 3.2 se ve que el monto acumulado tiene una representación como integral Poisson, que a su vez tiene una representación como proceso Poisson compuesto, gracias a lo que se tiene una manera sencilla de obtener la esperanza y la varianza del monto acumulado.

Los siniestros ocurridos no reportados se tratan con especial cuidado en la teoría del riesgo clásica ya que es difícil predecirlos. En la sección 3.3 se plantea cómo se comportan este tipo de siniestros y que solamente es necesaria una transformación medible sencilla para considerarlos, de forma que el modelo para estos siniestros sigue siendo una medida aleatoria Poisson y es fácil obtener su medida media.

En la sección 3.4, se aborda una manera de incorporar factores externos, en específico, la tasa de interés nominal y la inflación. Esto se hace utilizando un proceso estocástico en particular y considerando el modelo que obtuvimos en la sección anterior.

En la sección 3.5 se presenta el modelo general, que es una medida aleatoria Poisson marcada. Se ve que las propiedades antes vistas también se cumplen al generalizar y se divide el espacio de estados de acuerdo a las características que tienen los siniestros.

La sección 3.6 presenta una forma de actualizar el modelo general tomando en cuenta los datos observados que estén disponibles. La estadística requerida se puede ver en el Apéndice C, que sigue las ideas de [8] y [1].

En la última sección, se toman datos reales de una aseguradora de daños y se obtiene de forma explícita la medida aleatoria que modela el riesgo en que incurre esta aseguradora en particular. Gracias a esto y a la teoría vista anteriormente, es posible obtener de manera sencilla la cota inferior mínima para la reserva de esta aseguradora, fijando un horizonte de tiempo de un año.

Capítulo 1

Medidas aleatorias y procesos puntuales

Las medidas aleatorias son funciones que van de un espacio de probabilidad a un espacio de medidas que deben cumplir ciertas propiedades. Obtienen su nombre porque son variables aleatorias cuyos valores son medidas sobre otro espacio.

Podemos restringir el espacio de medidas donde toma valores una medida aleatoria. Si lo restringimos al subespacio de medidas puntuales, obtenemos lo que se conoce como “proceso puntual” y si restringimos aún más y pedimos que las medidas puntuales sean Poisson, obtenemos lo que se conoce como “medida aleatoria Poisson”.

En este capítulo empezaremos dando las definiciones básicas necesarias para entender esta teoría, definiremos los conceptos de medida aleatoria y proceso puntual, y daremos algunos ejemplos.

Además, hablaremos del proceso empírico, un proceso puntual que es bastante conocido y usado y que tiene un teorema límite, gracias al cual son válidos muchos de los procedimientos que se usan en estadística.

Probaremos también que el proceso puntual se puede ver como una colección de variables aleatorias de conteo. Gracias a este resultado, es posible definir la integral con respecto a un proceso puntual de una forma muy sencilla, ya que de otra manera, tendríamos que adentrarnos en teoría más complicada para definirla.

Dada la integral con respecto a un proceso puntual, se define la funcional de Laplace del proceso. Por último, se verá cómo se comporta la distribución del proceso puntual, se describirá su familia de distribuciones finito-dimensionales, y probaremos que éstas tienen una relación uno a uno con la funcional de Laplace.

1.1. Definiciones básicas

Esta sección contiene todos los conceptos básicos importantes, desde espacio topológico hasta medidas puntuales, pasando por espacio de probabilidad, σ -álgebra de Borel, variable aleatoria y medida de Radon, entre otros. Todos ellos son esenciales para poder definir el concepto de medida aleatoria.

Definición 1.1.1. (*Espacio topológico*)

Un espacio topológico es la pareja (E, \mathcal{E}) donde E es un conjunto y \mathcal{E} es una familia de subconjuntos de E a los que se denomina “abiertos” tales que:

(a) $\emptyset \in \mathcal{E}$,

(b) $E \in \mathcal{E}$,

(c) Si $n \in \mathbb{N}$, $E_i \in \mathcal{E}$ para $i=1, \dots, n$, entonces $\bigcap_{i=1}^n E_i \in \mathcal{E}$,

(d) Si I es un conjunto y $\{E_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{E}$, entonces $\bigcup_{i \in I} E_i \in \mathcal{E}$.

A \mathcal{E} se le llama “topología”.

Tomando un espacio topológico (E, \mathcal{E}) , si G es un conjunto abierto, entonces G^C (G complemento) es un *conjunto cerrado*. Donde $G^C = E \setminus G$.

Definición 1.1.2. (*Vecindad*)

Sea (E, \mathcal{E}) un espacio topológico y $p \in E$. Un conjunto $V \subset E$ es “vecindad” de p si $\exists U \in \mathcal{E}$ tal que $p \in U \subseteq V$.

Un espacio topológico en el que puntos distintos tienen vecindades disjuntas es un espacio de Hausdorff.

Definición 1.1.3. (*Conjunto compacto*)

Un conjunto $X \subseteq E$, con (E, \mathcal{E}) espacio topológico es compacto si:

Siempre que X está contenido en la unión de una familia de conjuntos abiertos $\{G_i\}_{i \in I}$, con I un conjunto, entonces existe una subfamilia finita $\{G_{i_k}\}_{k=1, \dots, n}$, con $i_k \in I$, $k=1, \dots, n$, cuya unión contiene a X .

Definición 1.1.4. (*Espacio medible*)

Un espacio medible es la pareja (Ω, \mathcal{F}) donde Ω es un conjunto y \mathcal{F} es una familia de subconjuntos de Ω a los que se denomina “medibles” tales que:

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(b) Si $F \in \mathcal{F}$, entonces $F^C \in \mathcal{F}$,

(c) Si $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F}$, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$.

A \mathcal{F} se le llama “ σ -álgebra” (*sigma-álgebra*).

Ejemplo 1.1.5. $\{\Omega, \emptyset\}$ es la menor σ -álgebra del conjunto Ω .

Definición 1.1.6. (*Espacio de medida*)

Un espacio de medida es la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ donde Ω es un conjunto, \mathcal{F} es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω y μ es una función no negativa $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) Dada cualquier familia numerable $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F}$ de conjuntos ajenos por parejas, entonces:

$$\mu(\cup_{k=1}^{\infty} F_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k).$$

A μ se le llama “medida”.

Definición 1.1.7. (Espacio de probabilidad)

Un espacio de probabilidad es la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde Ω es un conjunto, \mathcal{F} es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω y \mathbb{P} es una medida tal que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

A \mathbb{P} se le llama “probabilidad”. A los conjuntos de \mathcal{F} se les llama “eventos”. Se dice que un evento A ocurre “casi seguramente” (c.s.) siempre que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Proposición 1.1.8. (Intersección de σ -álgebras)

Sea E un conjunto y $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ σ -álgebras de subconjuntos de E . Sea $\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$, entonces \mathcal{F} es una σ -álgebra de subconjuntos de E .

Demostración. Como $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ son σ -álgebras de subconjuntos de E ,

(a) Ya que $E \in \mathcal{F}_i \quad \forall i \implies E \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$,

(b) Si $F \in \mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$, se tiene que $F \in \mathcal{F}_i \quad \forall i$, entonces $F^C \in \mathcal{F}_i \quad \forall i$,

por lo que $F^C \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$,

(c) Si $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$, se tiene que $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F}_i \quad \forall i$, entonces

$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \in \mathcal{F}_i \quad \forall i$, por lo que $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$.

□

Definición 1.1.9. (σ -álgebra generada)

Dado E un conjunto y \mathcal{E} una familia de subconjuntos de E , llamaremos “ σ -álgebra generada por \mathcal{E} ” a:

$$\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{G}} \{\mathcal{G} \supseteq \mathcal{E}, \mathcal{G} \text{ es } \sigma\text{-álgebra de subconjuntos de } E\}.$$

Nótese que \mathcal{E} está bien definido ya que la intersección de σ -álgebras es σ -álgebra. Además, $\mathcal{E} \neq \emptyset$ ya que al menos la potencia de \mathcal{E} , $\mathcal{P}(\mathcal{E})$, es una σ -álgebra que contiene a \mathcal{E} .

Definición 1.1.10. (*σ -álgebra de Borel*)

Dado un espacio topológico (E, \mathcal{E}) , llamaremos “ σ -álgebra de Borel” a la generada por sus abiertos, es decir, la más pequeña σ -álgebra que contiene a los abiertos de Ω .

La denotamos $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{E})$ y a sus elementos los llamamos “borelianos”.

Los abiertos y cerrados son borelianos y, si el espacio es de Hausdorff, también los compactos (pues son cerrados).

Definición 1.1.11. (*Variable aleatoria*)

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ los reales con la σ -álgebra de Borel generada por la distancia usual.

Una variable aleatoria (v.a.) es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

A estas funciones se les denomina “medibles”.

Definición 1.1.12. (*Función de distribución*)

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una v.a.

X genera una medida de probabilidad, a la que se denomina “distribución” de X , dada por:

$$P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

A la función $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, definida como:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X^{-1}(-\infty, x]) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

se le llama “función de distribución” de X .

Definición 1.1.13. (*Medida de Radon*)

Una medida de Radon es una medida definida en la σ -álgebra de Borel de subconjuntos de E , cuya topología es de Hausdorff, y es localmente finita y regular:

(a) *Localmente finita:*

Significa que cada punto tiene una vecindad de medida finita.

(b) *Regular:*

Para $A \in \mathcal{E}$, se tiene

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ compacto}\} = \inf\{\mu(G) : G \supseteq A, G \text{ abierto}\}.$$

Intuitivamente, una medida regular es aquella con la cual, mientras nos acercamos a A “por dentro” con compactos K , las medidas $\mu(K)$ también se acercan a $\mu(A)$. Lo mismo pasa si nos acercamos a A “por fuera” con abiertos G , las medidas $\mu(G)$ se acercan a $\mu(A)$.

Ejemplo 1.1.14. *(Medidas localmente finitas)*

La medida de conteo sobre los enteros con la topología usual es localmente finita, mientras que la medida de conteo sobre los reales con la topología usual no lo es. También, cualquier medida de probabilidad es localmente finita, ya que la medida del total es 1.

Ejemplo 1.1.15. *(Medidas regulares)*

La medida de Lebesgue, que le asigna a cada intervalo su longitud, es regular. Una medida no regular sería una de la forma: $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 0$, $\mu(A) = \infty$ para cualquier otra A .

Definición 1.1.16. *(Medida puntual)*

Una medida puntual es una medida $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, definida en (E, \mathcal{E}) espacio medible, tal que:

$$\mu(A) \in \mathbb{N} \quad \forall A \in \mathcal{E} \text{ compacto.}$$

1.2. Definición de medida aleatoria y proceso puntual

Dadas las definiciones anteriores, definiremos los conceptos de medida aleatoria y proceso puntual, para lo cual es necesario considerar lo siguiente:

E es un conjunto, \mathcal{E} es la topología de Hausdorff de subconjuntos de E y \mathcal{E} es la σ -álgebra de Borel de subconjuntos de E , generada por \mathcal{E} .

Las medidas aleatorias se definen utilizando:

- (I) El espacio medible (E, \mathcal{E})
- (II) Un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Primero, definimos los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{M}(E) = \{\mu : \mu \text{ es una medida de Radon en } E\},$$

$$\mathbb{M}_p(E) = \{\mu \in \mathbb{M}(E) : \mu \text{ es una medida puntual}\}.$$

Es decir, si $\mu \in \mathbb{M}_p(E)$, entonces μ es de Radon y $\mu(A) \in \mathbb{N} \quad \forall A \in \mathcal{E}$ compacto.

Definimos la σ -álgebra $\mathcal{M}(E)$ de subconjuntos de $\mathbb{M}(E)$ como la más pequeña σ -álgebra que contiene a los conjuntos de la forma $\{\mu \in \mathbb{M}(E) : \mu(A) \in B\}$ para $A \in \mathcal{E}$ y $B \in \mathcal{B}([0, \infty))$.

De la misma forma, definimos la σ -álgebra $\mathcal{M}_p(E)$ de subconjuntos de $\mathbb{M}_p(E)$ como la más pequeña σ -álgebra que contiene a los conjuntos de la forma $\{\mu_p \in \mathbb{M}_p(E) : \mu_p(A) \in B\}$, para $A \in \mathcal{E}$ y $B \in \mathcal{B}([0, \infty))$.

Es decir, $\mathcal{M}(E)$ es la más pequeña σ -álgebra que hace medibles a los mapeos $\mu \rightarrow \mu(A)$ (de $\mathbb{M}(E) \rightarrow [0, \infty)$) $\forall A \in \mathcal{E}$.

Definición 1.2.1. (*Medida aleatoria*)

Una medida aleatoria es una función $M : \Omega \rightarrow \mathbb{M}(E)$ medible.

Esto es, $\{\omega \in \Omega : M(\omega) = \mu^{(\omega)} \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{F}, \quad \forall \mathcal{M} \in \mathcal{M}(E)$.

Definición 1.2.2. (*Proceso puntual*)

Un proceso puntual es una función $N : \Omega \rightarrow \mathbb{M}_p(E)$ medible.

Esto es, $\{\omega \in \Omega : N(\omega) = \mu_p^{(\omega)} \in \mathcal{M}_p\} \in \mathcal{F}, \quad \forall \mathcal{M}_p \in \mathcal{M}_p(E)$.

En otras palabras, una medida aleatoria M es un elemento aleatorio que toma medidas como valores. Fijando ω , $M(\omega, \cdot)$ es una medida y, al evaluar en un conjunto $A \in \mathcal{E}$,

$M(\omega, A) = \mu^{(\omega)}(A)$ es la medida de A , que será una variable aleatoria si movemos la ω .

Además, la medida que se obtiene $M(\omega, A) = \mu^{(\omega)}(A)$ es una función medible, por construcción de $\mathcal{M}(E)$. Esto significa que $\forall A \in \mathcal{E}$, la medida de A será un subconjunto de $\mathcal{B}([0, \infty])$.

Algo similar sucede cuando tenemos un proceso puntual N , sólo que los valores que toma se restringen a medidas puntuales. Es decir, fijando ω , $N(\omega, \cdot)$ es una medida puntual y $N(\omega, A)$ se puede interpretar como el número de puntos en A .

Entonces,

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad N(\omega, A) = \mu_p^{(\omega)}(A) \in \mathbb{N}.$$

Visto de otra manera, consideremos una secuencia (X_i) de vectores aleatorios en E tales que, con probabilidad 1, sólo una cantidad finita de X_i 's caen en A , para todo $A \in \mathcal{E}$ compacto.

En este caso, el espacio E , donde viven los puntos, es un subconjunto boreliano de un espacio euclidiano finito-dimensional, y está equipado con la σ -álgebra de borel $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$.

Después, definimos para $A \in \mathcal{E}$,

$$N(A) = \#\{i \geq 1 : X_i \in A\},$$

es decir, $N(A)$ cuenta el número de X_i 's que caen en A . Fijando un conjunto A , $N(\omega, A)$ es aleatorio y, fijando ω , $N(\omega, \cdot)$ define una medida de conteo con átomos $X_i(\omega)$.

Veamos que $N(A)$, definido de la forma anterior, es un proceso puntual. Esto es, dados (X_i) ,

$$N(\omega, A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_A(X_i(\omega)), \quad A \in \mathcal{E},$$

es un proceso puntual, donde:

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}, \quad A \in \mathcal{E}.$$

Todos los procesos puntuales que nos interesan tienen esta representación.

Esto se comprueba debido a que, fijando una ω , obtenemos una configuración de puntos $X_i(\omega)$. Además, si $A \in \mathcal{E}$ es compacto, entonces A contiene un número finito de puntos $X_i(\omega)$ con probabilidad 1, es decir, sólo una cantidad finita de X_i 's caerán en A, por lo que, si i es suficientemente grande, $\mathbb{1}_A(X_i(\omega))=0$.

Entonces,

$$\mu_p^{(\omega)}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_A(X_i(\omega)) = \sum_{i=1}^{\eta} \mathbb{1}_A(X_i(\omega)), \quad \text{para alguna } \eta \in \mathbb{N}.$$

Además, por definición de la indicadora $\mathbb{1}_A$, la suma $\sum_{i=1}^{\eta} \mathbb{1}_A(X_i(\omega))$ cuenta las X_i 's que caen en A, entonces,

$$\sum_{i=1}^{\eta} \mathbb{1}_A(X_i(\omega)) = k, \quad \text{para alguna } k \leq \eta \implies \mu_p^{(\omega)}(A) \in \mathcal{B}([0, \infty]).$$

Para evitar hacer la notación pesada, de ahora en adelante, cuando utilicemos $N(A)$ nos estaremos refiriendo a $N(\omega, A)$. También, al utilizar una función medible f , y si es necesario hacer énfasis en ello, diremos que f es \mathcal{X}, \mathcal{Y} -medible, indicando que (X, \mathcal{X}) y (Y, \mathcal{Y}) son espacios medibles y $f : X \rightarrow Y$.

1.3. Procesos empíricos

Algunos de los procedimientos más utilizados en estadística están basados en una “muestra aleatoria” x_1, x_2, \dots, x_n de observaciones que se modelan como variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid).

Así, se supone que las observaciones ocurren como realizaciones $x_i = X_i(\omega)$ en algún espacio de muestras S, de una secuencia de “elementos aleatorios” X_1, \dots, X_n definidos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

X es un elemento aleatorio en S si existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que

$$X : \Omega \rightarrow S$$

es \mathcal{F}, S -medible, para S , una σ -álgebra apropiada en S .

La distribución de X es una medida de probabilidad en S bien definida,

$$\mu(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}), \quad A \in \mathcal{E}.$$

Es decir, (S, \mathbb{S}, μ) es un espacio de probabilidad.

Definición 1.3.1. *Una ley en \mathbb{R} (ó cualquier espacio métrico separable) es una medida de probabilidad definida en la σ -álgebra de Borel.*

Dada una v.a. real X en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con ley $\mathcal{L}(X) = \mathbb{P} \circ X^{-1} = \mu$, entonces:

$$F_X(x) = \mu((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Sean (S, \mathbb{S}, μ) , $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacios de probabilidad.

Tomemos X_1, X_2, \dots v.a. en Ω con valores en S y $\mathcal{L}(X_i) = \mu \quad \forall i$ ($X_i = X_i(\omega)$).

Definimos las medidas empíricas como

$$\mu_n(\omega, A) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_A(X_i(\omega)), \quad A \in \mathbb{S}, \omega \in \Omega.$$

En la recta real \mathbb{R} , sea μ una medida de probabilidad con función de distribución

$F(t) = \mu((-\infty, t]), -\infty < t < \infty$. Entonces las medidas empíricas μ_n tienen funciones de distribución $F_n(\omega, t) = \mu_n(\omega, (-\infty, t])$, donde F_n es llamada “función de distribución empírica” de F .

La notación $\mu_n(\omega, \cdot)$ se debe a que μ_n es una medida de probabilidad aleatoria en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ahora, veremos algunas propiedades de μ_n (Propiedades 1-3), el proceso de conteo $N_n = n\mu_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_A(X_i(\omega))$ (Propiedades 4-5) y las funciones de distribución en \mathbb{R} (Propiedades 6-7). Antes de comenzar, mencionaremos dos teoremas que son de suma importancia en esta teoría. Se pueden consultar en [4].

Teorema 1.3.2. (*Ley Fuerte de los Grandes Números*)

Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias iid. reales y $S_n = X_1 + \dots + X_n$,

(a) Si $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, entonces $S_n/n \rightarrow \mathbb{E}(X_1)$ casi seguramente.

(b) Si $\mathbb{E}|X_1| = +\infty$, entonces S_n/n no converge a un límite finito casi seguramente.

Teorema 1.3.3. (*Teorema Central del Límite*)

Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias con esperanzas finitas m_1, m_2, \dots y varianzas finitas y positivas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots$

Sean $b_n = m_1 + \dots + m_n$ y $s_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ la media y varianza de $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Entonces se tiene que,

$$\frac{S_n - b_n}{s_n} \rightarrow N(0, 1).$$

Donde $N(0,1)$ denota a la función de distribución normal estándar.

Propiedad 1.3.4. Sea \mathcal{C} un subconjunto de \mathbb{S} , y $C \in \mathcal{C}$

$$\mu_n(C) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_C(X_i),$$

$\mathbf{1}_C(X_i)$ son variables aleatorias iid “Bernoulli” con media $\mu(C)$ y varianza $\mu(C)[1 - \mu(C)]$. Se denota como $\mathbf{1}_C(X_i) \sim \text{Bernoulli}(\mu(C))$.

Demostración. Primero, si tomamos una v.a. discreta X , que tome valores en \mathbb{N} ,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{N}} xp(x), \quad \text{donde } p(x) = \mathbb{P}(X = x).$$

Entonces, al ser $\mathbf{1}_C(X_i)$ v.a. que toman valores en el conjunto $\{0, 1\}$, se tiene:

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_C(X_i)) = 1 \cdot \mathbb{P}(X_i \in C) + 0 \cdot \mathbb{P}(X_i \notin C) = \mu(C).$$

Ahora, por otro lado tenemos que $\text{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$, entonces,

$$\mathbb{E}((\mathbf{1}_C(X_i))^2) = 1 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(X_i \in C) + 0 \cdot 0 \cdot \mathbb{P}(X_i \notin C) = \mu(C),$$

Por lo tanto,

$$\text{Var}(\mathbf{1}_C(X_i)) = \mu(C) - (\mu(C))^2 = \mu(C)[1 - \mu(C)].$$

□

Propiedad 1.3.5. *Para cada $C \in \mathcal{C}$ fijo, se tiene*

$$n^{\frac{1}{2}}(\mu_n(C) - \mu(C)) \rightarrow \bar{G}_\mu(C) \quad \text{en distribución, cuando } n \rightarrow \infty$$

donde

$$\bar{G}_\mu(C) \sim N(0, \mu(C)[1 - \mu(C)]).$$

Se cumple por el Teorema Central del Límite (Teorema 1.3.3).

Propiedad 1.3.6. *Para cada $C \in \mathcal{C}$ fijo, se tiene*

$$\mu_n(C) \rightarrow \mu(C) \quad \mathbb{P}\text{-c.s. cuando } n \rightarrow \infty.$$

Se se cumple por la Ley Fuerte de los Grandes Números (Teorema 1.3.2).

Propiedad 1.3.7. *Tomemos el proceso de conteo $N_n(A) = n\mu_n(A)$, $A \in \mathcal{S}$. Entonces,*

$$N_n(A) \sim \text{Bin}(n, \mu(A)).$$

$(N_n(A))$ son variables aleatorias con función de distribución Binomial, con parámetros n y $\mu(A)$.

Esto se puede ver fácilmente ya que $N_n(A)$ es la suma de indicadoras $\mathbf{1}_A(X_i)$, que son v.a. Bernoulli con media $\mu(A)$.

Propiedad 1.3.8. (Propiedad de Markov)

Sean $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_k \subset A_{k+1} = S$ tal que $\mu(D_i) > 0$ para $D_i = A_i \setminus A_{i-1}$ y sean $0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq n$ con $m_i \in \{0, 1, \dots, n\}$, entonces

$$\mathbb{P}(N_n(A_k) = m_k | N_n(A_{k-1}) = m_{k-1}, \dots, N_n(A_1) = m_1) = \mathbb{P}(N_n(A_k) = m_k | N_n(A_{k-1}) = m_{k-1}).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N_n(A_k) = m_k | N_n(A_{k-1}) = m_{k-1}, \dots, N_n(A_1) = m_1) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(X_i) = m_k \mid \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_{k-1}}(X_i) = m_{k-1}, \dots, \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_1}(X_i) = m_1\right) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(X_i) = m_k, \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_{k-1}}(X_i) = m_{k-1}, \dots, \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_1}(X_i) = m_1)}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_{k-1}}(X_i) = m_{k-1}, \dots, \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_1}(X_i) = m_1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{D_k}(X_i) = m_k - m_{k-1}, \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{D_{k-1}}(X_i) = m_{k-1} - m_{k-2}, \dots, \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_1}(X_i) = m_1)}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{D_{k-1}}(X_i) = m_{k-1} - m_{k-2}, \dots, \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_1}(X_i) = m_1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{D_k}(X_i) = m_k - m_{k-1}) \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{D_{k-1}}(X_i) = m_{k-1} - m_{k-2}) \cdots \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_1}(X_i) = m_1)}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{D_{k-1}}(X_i) = m_{k-1} - m_{k-2}) \cdots \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_1}(X_i) = m_1)} \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{D_k}(X_i) = m_k - m_{k-1}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{D_k}(X_i) = m_k - m_{k-1}\right) \cdot \frac{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_{k-1}}(X_i) = m_{k-1})}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_{k-1}}(X_i) = m_{k-1})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{D_k}(X_i) = m_k - m_{k-1}, \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_{k-1}}(X_i) = m_{k-1})}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_{k-1}}(X_i) = m_{k-1})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(X_i) = m_k, \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_{k-1}}(X_i) = m_{k-1})}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_{k-1}}(X_i) = m_{k-1})} \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(X_i) = m_k \mid \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_{k-1}}(X_i) = m_{k-1}\right) \\ &= \mathbb{P}(N_n(A_k) = m_k | N_n(A_{k-1}) = m_{k-1}). \end{aligned}$$

□

Propiedad 1.3.9. Para cualquier función de distribución F en \mathbb{R} y $0 < t < 1$. Sea

$$X_F(t) = \inf\{x : F(x) \geq t\}.$$

Para λ la medida de Lebesgue en $(0,1)$, X_F es una v.a. con función de distribución F .

Demostración. Si $t \leq F(x)$, entonces $X_F(t) \leq x$.

Por otro lado, si $X_F(t) \leq x$, entonces, como F es no decreciente, $F(y) \geq t \forall y > x$ y, por continuidad por la derecha, $F(x) \geq t$.

Se cumple entonces la siguiente igualdad $\{t : X_F(t) \leq x\} = \{t : t \leq F(x)\}$.

Entonces,

$$\mathbb{P}(\{t : X_F(t) \leq x\}) = \mathbb{P}(\{t : t \leq F(x)\}) = \lambda((0, F(x))) = F(x).$$

Por lo tanto, X_F tiene función de distribución F .

□

Propiedad 1.3.10. Si G_n son funciones de distribución empíricas de G , entonces, para cualquier función de distribución F en \mathbb{R} , $G_n \circ F$ son funciones de distribución empíricas de F .

Demostración. Sean Y_1, Y_2, \dots variables aleatorias iid. tales que:

$$G_n(F(x)) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_i \leq F(x)\}}.$$

Entonces $X_i = X_F(Y_i)$ son v.a. iid. con función de distribución F , lo que nos lleva a $X_i \leq x \Leftrightarrow Y_i \leq F(x)$. Por esto,

$$G_n(F(x)) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(X_i),$$

esto último es la definición de función de distribución empírica de F .

□

Además de ser un proceso puntual, el proceso empírico tiene un teorema límite: el Teorema de Glivenko-Cantelli.

Teorema 1.3.11. (Glivenko-Cantelli)

Sea μ una ley en \mathbb{R} con función de distribución F .

Entonces, $F_n(\omega, \cdot) \rightarrow F$ uniformemente en \mathbb{R} casi seguramente (c.s.), cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Sabemos que $\mathbf{1}_{(-\infty, t]}(X_i) \sim \text{Bernoulli}(\mu((-\infty, t]))$. Les aplicamos la Ley Fuerte de los Grandes Números a estas v.a. y obtenemos:

$$\mu_n(\omega, (-\infty, t]) \rightarrow \mu((-\infty, t]) \text{ c.s.}$$

Por definición de función de distribución, $F_n(\omega, t) \rightarrow F(t)$ c.s.

Para probar convergencia uniforme, tomaremos el caso de la medida de Lebesgue en el $(0,1)$.

Sea G su función de distribución, $G(x) = \lambda((0, x)) = x \quad \forall x \in (0, 1)$.

Entonces, las medidas empíricas G_n son:

$$G_n(\omega, t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(-\infty, t]}(X_i) \text{ con } X_i \sim U(0, 1).$$

Donde $U(0,1)$ denota la distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$.

Para cualquier función de distribución F , $X_F \sim F$ y, para demostrar que $F_n \rightarrow F$ uniformemente en \mathbb{R} c.s., basta demostrar que $G_n \rightarrow G$ uniformemente en \mathbb{R} c.s.

Dada $\epsilon > 0$, escogemos m lo suficientemente grande para que $1/m < \epsilon/2$.

Sea $E = \{k/m : k = 0, 1, \dots, m\}$. Entonces, como E es un conjunto finito, para casi toda ω , existe n lo suficientemente grande tal que

$$|G_n(\omega, x) - G(x)| < \epsilon/2 \quad \forall x \in E.$$

Ahora, para cualquier $x \in (0, 1)$, tomamos $u, v \in E$ con $u \leq x \leq v$ y tal que $v - u = 1/m$.

Como $v - u = 1/m \implies x - u \leq 1/m < \epsilon/2 \implies x - \epsilon/2 < u$.

Se sigue que $G_n(\omega, x) \geq G_n(\omega, u) > u - \epsilon/2 > x - \epsilon$.

Por otro lado, $v - x \leq 1/m < \epsilon/2 \implies v < \epsilon/2 + x$.

Se sigue que $G_n(\omega, x) \leq G_n(\omega, v) < v + \epsilon/2 < x + \epsilon$.

Por lo tanto,

$$|G_n(\omega, x) - G(x)| < \epsilon \quad \forall x \in (0, 1).$$

□

1.4. El proceso puntual como colección de variables aleatorias de conteo

En esta sección probaremos una de las propiedades más importantes de un proceso puntual, y ésta es que se puede ver como una colección de variables aleatorias de conteo. Esto implica que el proceso puntual tendrá una representación mucho más amigable y podremos trabajar con él de manera más sencilla.

Antes de comenzar, necesitaremos algunas definiciones nuevas.

Definición 1.4.1. (π -sistema)

Sea E un conjunto y \mathcal{T} una familia de subconjuntos de E que es cerrada bajo intersecciones finitas. A \mathcal{T} se le llama “ π -sistema”.

Definición 1.4.2. (λ -sistema)

Sea E un conjunto y \mathcal{L} una familia de subconjuntos de E tal que:

- (a) $E \in \mathcal{L}$
- (b) Es cerrada bajo diferencias propias
- (c) Es cerrada bajo uniones monótonas

A \mathcal{L} se le llama “ λ -sistema”.

Definición 1.4.3. (Conjunto relativamente compacto)

Sea (E, \mathcal{E}) un espacio topológico. Un conjunto $S \subset E$ es “relativamente compacto” si su cerradura \bar{S} es un conjunto compacto.

La cerradura de un conjunto se define como:

$$\bar{S} = \bigcap \{K \subset E : K \supseteq S, K \text{ es cerrado}\}.$$

Teorema 1.4.4. (Proceso puntual como una colección de v.a. de conteo)

Sean (E, \mathcal{E}) un espacio de Hausdorff, con su σ -álgebra.

$(\mathbb{M}_p(E), \mathcal{M}_p(E))$ espacio de medidas puntuales de Radon en E , con su σ -álgebra.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad.

El mapeo $N : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{M}_p(E), \mathcal{M}_p(E))$ es un proceso puntual en E si y solo si, para cada $A \in \mathcal{E}$, $N(A)$ es una variable aleatoria con valores en $\{0, 1, \dots, \infty\}$ tal que $N(A) < \infty$ para $A \in \mathcal{E}$ compactos.

Demostración. Suponemos que N es un proceso puntual en E , entonces, por definición, el mapeo

$$\omega \mapsto N(\omega, \cdot)$$

de (Ω, \mathcal{F}) a $(\mathbb{M}_p(E), \mathcal{M}_p(E))$ es medible.

Por otro lado, para un boreliano $A \in \mathcal{E}$ dado, el mapeo

$$f_A : m \rightarrow m(A)$$

de $(\mathbb{M}_p(E), \mathcal{M}_p(E))$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ es medible por construcción de $\mathcal{M}_p(E)$.

Entonces, la composición

$$N(A) = N(\omega, A) = f_A(N(\omega, \cdot))$$

es medible, por lo tanto, $N(A)$ es una variable aleatoria y, por definición de proceso puntual, $N(A)$ es finito para A compacto.

Para probar el regreso, usaremos el Teorema de Dynkin (Apéndice A) que dice:

Si \mathcal{T} es un π -sistema y \mathcal{L} un λ -sistema, entonces $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$ implica $\sigma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{L}$.

Corolario: Si dos medidas de probabilidad son iguales en un π -sistema que genera a la σ -álgebra, son iguales en la σ -álgebra.

Entonces, para verificar que N es un proceso puntual, no es necesario verificar que

$$\omega \rightarrow N(\omega, F)$$

es medible $\forall F$, sino solamente para F en una clase más restringida, por ejemplo, rectángulos acotados si E es euclideano.

Supongamos que \mathcal{T} son conjuntos relativamente compactos en \mathcal{E} que satisfacen las siguientes propiedades:

(I) \mathcal{T} es un π -sistema.

(II) $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{E}$.

(III) Existen $E_n \in \mathcal{T}$ tales que $E_n \uparrow E$, es decir, $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ y $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Entonces N es un proceso puntual en (E, \mathcal{E}) si y solo si

$$\omega \rightarrow N(\omega, I)$$

es medible de $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow ([0, \infty), \mathcal{B}([0, \infty)))$ para cada $I \in \mathcal{T}$.

Para demostrar lo anterior, suponemos que $\omega \rightarrow N(\omega, I)$ es medible $\forall I \in \mathcal{T}$.

Para n fija definimos:

$$\mathcal{G}_n = \{F \in \mathcal{E} : \omega \rightarrow N(\omega, F \cap E_n) \text{ es } \mathcal{F}, \mathcal{B}([0, \infty))\text{-medible}\}$$

es decir, $F \in \mathcal{G}_n$ si $\{\omega \in \Omega : N(\omega, F \cap E_n) \in B\} \subseteq \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{B}([0, \infty))$.

Nótese que:

(I) $\mathcal{G}_n \supset \mathcal{T}$.

Sea $F \in \mathcal{T} \implies F \cap E_n \in \mathcal{T}$ ya que $E_n \in \mathcal{T}$ y \mathcal{T} es un π -sistema.

Entonces, por hipótesis, $\omega \rightarrow N(\omega, F \cap E_n)$ es medible.

Por lo tanto, $F \in \mathcal{G}_n$.

(II) $\mathcal{G}_n \supset E$.

Esto se debe a que $E \cap E_n = E_n$ y $E_n \in \mathcal{T}$.

Entonces, por hipótesis, $\omega \rightarrow N(\omega, E \cap E_n)$ es medible.

Por lo tanto, $E \in \mathcal{G}_n$.

(III) \mathcal{G}_n es cerrado bajo diferencias propias.

Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{G}_n$ tales que $F_1 \supset F_2$, entonces,

$$N(\omega, (F_1 \setminus F_2) \cap E_n) = N(\omega, F_1 \cap E_n) - N(\omega, F_2 \cap E_n).$$

Se tiene que

$$N(\omega, F_2 \cap E_n) \leq N(\omega, F_1 \cap E_n) \leq N(\omega, E_n) < \infty.$$

Las primeras dos desigualdades se cumplen debido a que la medida es positiva (para cada $\omega \in \Omega$, $N(\omega, A)$ es una medida puntual de A) y $F_2 \cap E_n \subset F_1 \cap E_n \subseteq E_n$.

La última desigualdad se cumple ya que $E_n \in \mathcal{T}$ (lo cual implica que es relativamente compacto), que para cualquier conjunto S , $S \subseteq \bar{S}$ y que todas las medidas puntuales cumplen $m(K) < \infty$, para K compacto.

Entonces, tenemos la diferencia de dos funciones medibles y finitas,

$\implies \omega \rightarrow N(\omega, (F_1 \setminus F_2) \cap E_n)$ es medible.

Por lo tanto, $F_1 \setminus F_2 \in \mathcal{G}_n$.

(IV) \mathcal{G}_n es cerrado bajo límites no decrecientes.

Sean $F_1 \subset F_2 \subset \dots \in \mathcal{G}_n$, es decir,

$$F_i \in \mathcal{E} \text{ y } \omega \rightarrow N(\omega, F_i \cap E_n) \text{ es medible } \forall i = 1, 2, \dots$$

Pero n es fija $\Rightarrow E_n$ es fijo también. Entonces, las $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ crecen pero se intersectan con E_n , por lo que a lo más se tiene $\omega \rightarrow N(\omega, E_n)$, que es medible ya que $E_n \in \mathcal{T}$.

Entonces $\omega \rightarrow N(\omega, \lim_{i \rightarrow \infty} F_i \cap E_n)$ es medible.

Por lo tanto, $\lim_{i \rightarrow \infty} F_i \in \mathcal{G}_n$.

Por lo anterior, \mathcal{G}_n es un λ -sistema y $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}_n$. Por el Teorema de Dynkin, tenemos que $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{G}_n$, lo que implica que $\forall F \in \mathcal{E}$, $\omega \rightarrow N(\omega, F \cap E_n)$ es medible.

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$, sucede que $E_n \uparrow E$ y $F \cap E_n \uparrow F \cap E = F$.

La medibilidad se preserva ya que nos acercamos a F “por adentro” con compactos y, para cada $\omega \in \Omega$, $N(\omega, \cdot)$ es de Radon.

Entonces,

$$\omega \rightarrow N(\omega, F) \text{ es medible } \forall F \in \mathcal{E}.$$

Esto es, N es un proceso puntual. □

Gracias a este teorema, se tiene que, para (E, \mathcal{E}) un espacio de Hausdorff con su σ -álgebra y para $A \in \mathcal{E}$, el proceso $N(\omega, A)$, definido como una función $N : \Omega \rightarrow \mathbb{M}_p(E)$ medible, se puede ver como una colección de variables aleatorias de conteo, es decir, admite la representación:

$$N(\omega, A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_A(X_i(\omega)).$$

Donde X_i son vectores aleatorios con valores en E tales que, con probabilidad 1, cualquier realización de N es una medida puntual en \mathcal{E} . Esto es, con probabilidad 1, cualquier boreliano $A \in \mathcal{E}$ contiene una cantidad finita de puntos X_i .

Definición 1.4.5. *(Integral con respecto a un proceso puntual)*

Sea $N = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\bullet}(X_i)$ un proceso puntual y $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa, acotada y $\mathcal{E}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ -medible.

Entonces,

$$\int_E g dN = \sum_{i=1}^{\infty} g(X_i).$$

Nótese que $\int_E g dN$ es una integral Lebesgue-Stieltjes bien definida y en particular

$$\int_A dN = \int_E \mathbf{1}_A dN = N(A).$$

1.5. Propiedades del proceso puntual

Aquí veremos algunas propiedades del proceso puntual, en particular que la esperanza de la integral con respecto a un proceso puntual se puede ver como una integral con respecto a una medida, a saber, la medida de intensidad del proceso puntual.

Definición 1.5.1. (*Medida de intensidad*)

Sea $N = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\bullet}(X_i)$ un proceso puntual en E y sea:

$$\zeta(A) = \mathbb{E}(N(A)), \quad A \in \mathcal{E}.$$

A ζ se le llama “medida de intensidad de N ”.

Propiedad 1.5.2. $\zeta : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ definida atrás es una medida.

Demostración. Como para cada $\omega \in \Omega$, $N(\omega, A) = \mu_p^{(\omega)}(A)$ es una medida, cada una de ellas cumple la definición de medida, es decir,

(a) $N(\omega, \emptyset) = \mu_p^{(\omega)}(\emptyset) = 0$,

(b) Para $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}$ ajenos por parejas,

$$N(\omega, \cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu_p^{(\omega)}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_p^{(\omega)}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} N(\omega, A_k).$$

Entonces,

(a) $\zeta(\emptyset) = \mathbb{E}(N(\emptyset)) = \mathbb{E}(0) = 0$,

(b) Para $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}$ ajenos por parejas,

$$\zeta(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mathbb{E}[N(\cup_{k=1}^{\infty} A_k)] = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{\infty} N(A_k)] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[N(A_k)],$$

la última igualdad es válida ya que $\sum_{k=1}^n N(A_k) \leq \sum_{k=1}^{n+1} N(A_k)$ y son positivas.

□

El siguiente teorema sólo será mencionado para completar esta sección y lo demostraremos en el siguiente capítulo, pero solamente para el caso en el que N es una medida aleatoria Poisson, es decir, un proceso puntual que restringe sus valores a la familia de medidas Poisson sobre E . La demostración del caso general se puede consultar en [6].

Teorema 1.5.3. (*Teorema de Campbell*)

Sea $N = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\bullet}(X_i)$ un proceso puntual en E y consideremos $f : E \rightarrow [0, \infty)$ una función $\mathcal{E}, \mathcal{B}([0, \infty))$ -medible. Entonces $\int_E f(x)N(dx)$ es una variable aleatoria y

$$\mathbb{E} \left[\int_E f(x)N(dx) \right] = \int_E f(x)\zeta(x),$$

donde ζ es la medida de intensidad de N .

1.6. Distribución y funcional de Laplace

En esta última sección veremos cómo se comportan la distribución de un proceso puntual N y su funcional de Laplace, la relación que tienen y por qué es mucho más fácil trabajar con la funcional de Laplace del proceso puntual que con su distribución.

Las realizaciones de un proceso puntual son medidas puntuales, por lo que la distribución de N está definida en conjuntos de medidas puntuales:

$$P_N(A) = \mathbb{P}(N \in A) = \mathbb{P}(\{\omega : N(\omega, \cdot) \in A\}), \quad A \in \mathcal{M}_p(E).$$

Esta distribución no es fácil de imaginar debido al conjunto en el que está definida. Sin embargo, la distribución del proceso está determinada por la familia de distribuciones finito-dimensionales, de los vectores aleatorios $\mathbf{N}_m = (N(A_1), \dots, N(A_m))$, que son vectores de variables aleatorias

reales de conteo y cuya distribución es:

$$\mathbb{P}(N(A_1) = k_1, \dots, N(A_m) = k_m), \quad k_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, m.$$

Definición 1.6.1. (*Funcional de Laplace de un proceso puntual*)

Sea $N = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\bullet}(X_i)$ un proceso puntual en E . La funcional de Laplace del proceso puntual N está definida de la siguiente forma:

$$\Psi_N(g) = \mathbb{E} \left(e^{-\int_E g dN} \right),$$

donde $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ es no negativa, acotada y $\mathcal{E}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ -medible.

Notemos que la esperanza siempre es finita, ya que, al ser $g \geq 0$, se tiene que $\int_E g dN \geq 0$ y la exponencial es menor o igual a 1.

Lema 1.6.2. *Dado un proceso puntual N , su funcional de Laplace Ψ_N determina unívocamente la distribución del proceso, que llamamos P_N .*

Demostración. Consideremos la siguiente función acotada, no negativa en el espacio E :

$$g_z = z_1 \mathbf{1}_{A_1} + \dots + z_m \mathbf{1}_{A_m}, \quad z_i \geq 0, A_i \in \mathcal{E} \text{ para } i=1, \dots, m.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \Psi_N(g_z) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ -\int_E g_z dN \right\} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ -(z_1 \int_E \mathbf{1}_{A_1} dN + \dots + z_m \int_E \mathbf{1}_{A_m} dN) \right\} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{-(z_1 N(A_1) + \dots + z_m N(A_m))} \right) \end{aligned}$$

ésta es la transformada de Laplace-Stieltjes del vector $\mathbf{N}_{\mathbf{m}} = (N(A_1), \dots, N(A_m))$. Esta transformada determina unívocamente la distribución de $\mathbf{N}_{\mathbf{m}}$.

Entonces:

(I) $\Psi_N(g_z), z_i \geq 0$ para $i=1, \dots, m$ determina las distribuciones finito-dimensionales de N .

(II) Las distribuciones finito-dimensionales de N determinan la distribución P_N .

$\therefore \Psi_N(g_z)$ determina P_N .

□

Capítulo 2

Medidas aleatorias Poisson

Las medidas aleatorias Poisson son de los procesos puntuales más importantes ya que aparecen naturalmente como límites del “proceso puntual binomial”, es decir, un proceso puntual con puntos independientes.

Además, las medidas aleatorias Poisson tienen propiedades importantes como independencia y representación como proceso Poisson compuesto.

Por otro lado, la integral Poisson, que se define como una integral con respecto a una medida aleatoria Poisson, hereda las propiedades de la medida aleatoria Poisson y se facilitan los desarrollos.

La funcional de Laplace de una medida aleatoria Poisson se define en términos de la integral Poisson, por lo que es de suma importancia dar una regla de convergencia para dicha integral.

Una vez definida la funcional de Laplace, obtenemos una forma especial que adopta cuando el proceso es una medida aleatoria Poisson, de forma que, conociendo la funcional de Laplace, inmediatamente se conoce cuál es su medida media. Es por esta razón que conociendo esta funcional, se puede saber si estamos tratando con una medida aleatoria Poisson o bien con un proceso puntual de otro tipo.

En la última parte de este capítulo se ven algunas formas de generar medidas aleatorias Poisson a partir de otras ya conocidas, en específico, es posible obtener nuevas medidas aleatorias Poisson sumando, transformando y marcando las que ya se tenían, más adelante se verán los detalles de cada una de estas operaciones.

2.1. Definición de medida aleatoria Poisson e integral Poisson

En esta sección trabajaremos en el espacio de estados $E \subset \mathbb{R}^d$, donde \mathcal{E} es la σ -álgebra de Borel de subconjuntos de E . Tenemos también un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y recordemos que una medida μ en E es de Radon si es localmente finita y regular.

Definición 2.1.1. (Medida Aleatoria Poisson)

Sea μ una medida de Radon en E . Un proceso puntual N es una medida aleatoria Poisson con medida media μ ($PRM(\mu)$, por sus siglas en inglés) si:

- (a) Para $A \in \mathcal{E}$, $N(A)$ tiene distribución Poisson con parámetro $\mu(A)$,
- (b) Para cualesquiera $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{E}$ disjuntos, las variables aleatorias $N(A_1), \dots, N(A_m)$ son independientes.

El nombre *medida media* de una $PRM(\mu)$, N , toma sentido al notar que

$$\zeta(A) = \mathbb{E}(N(A)) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{E}.$$

Además, la propiedad de Radon de μ asegura que, para cualquier conjunto compacto $K \in \mathcal{E}$, $\mathbb{E}(N(K)) = \mu(K) < \infty$, por lo que $N(K) < \infty$ c.s. De esta forma, se cumple la definición de proceso puntual.

Recapitulando, un proceso puntual es un elemento aleatorio que toma medidas puntuales como valores. Por lo que, una medida aleatoria Poisson N es también un elemento aleatorio que toma medidas puntuales como valores, sólo que, en este caso, nos estamos restringiendo a la familia

de medidas puntuales Poisson.

Entonces,

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad N(\omega, A) = \mu_p^{(\omega)}(A) \text{ tiene distribución } Poi(\mu(A)) \in \mathbb{N}.$$

Las medidas aleatorias Poisson se pueden representar como un proceso Poisson compuesto, lo que se demostrará en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.2. (*Medida aleatoria Poisson como proceso Poisson compuesto*)

Cualquier PRM(μ), N , con $\mu(E) < \infty$ se puede representar de la siguiente forma:

$$N(A) = \sum_{i=1}^{\tau} \mathbf{1}_A(X_i), \quad A \in \mathcal{E}.$$

$(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores aleatorios i.i.d. que toman valores en E , independientes de la variable aleatoria τ .

$$\tau \text{ se distribuye } Poi(\mu(E)), \quad \mathbb{P}(X \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu(E)}, \quad A \in \mathcal{E}.$$

Demostración. Sean $z_1, \dots, z_m \geq 0$.

Tomemos $\mathbf{N}_m = (N(A_1), \dots, N(A_m))$ y su transformada de Laplace-Stieltjes, utilizando la definición original de PRM(μ):

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(e^{-(z_1 N(A_1) + \dots + z_m N(A_m))}) \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} e^{-(z_1 n_1 + \dots + z_m n_m)} \mathbb{P}(N(A_1) = n_1, \dots, N(A_m) = n_m) \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} e^{-(z_1 n_1 + \dots + z_m n_m)} \left[\frac{e^{-\mu(A_1)} \mu(A_1)^{n_1}}{n_1!} \right] \dots \left[\frac{e^{-\mu(A_m)} \mu(A_m)^{n_m}}{n_m!} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-(\mu(A_1)+\dots+\mu(A_m))} \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{(\mu(A_1)e^{-z_1})^{n_1}}{n_1!} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} \frac{(\mu(A_m)e^{-z_m})^{n_m}}{n_m!} \\
&= e^{-(\mu(A_1)+\dots+\mu(A_m))} \exp\{\mu(A_1)e^{-z_1}\} \dots \exp\{\mu(A_m)e^{-z_m}\} \\
&= \exp\{-[\mu(A_1)(1 - e^{-z_1}) + \dots + \mu(A_m)(1 - e^{-z_m})]\}
\end{aligned}$$

Ahora, tomemos la transformada de \mathbf{N}_m pero con la representación de $N(A)$ como proceso Poisson compuesto:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(e^{-(z_1N(A_1)+\dots+z_mN(A_m))}) \\
&= \mathbb{E}(e^{-(z_1 \sum_{i=1}^{\tau} \mathbf{1}_{A_1}(X_i) + \dots + z_m \sum_{i=1}^{\tau} \mathbf{1}_{A_m}(X_i))}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{-(z_1 \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_1}(X_i) + \dots + z_m \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_m}(X_i))} | \tau = n) \mathbb{P}(\tau = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{-\sum_{i=1}^n (z_1 \mathbf{1}_{A_1}(X_i) + \dots + z_m \mathbf{1}_{A_m}(X_i))}) \mathbb{P}(\tau = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left[\mathbb{E}(e^{-(z_1 \mathbf{1}_{A_1}(X_i) + \dots + z_m \mathbf{1}_{A_m}(X_i))}) \right] \mathbb{P}(\tau = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left[e^{-z_1} \mathbb{P}(X \in A_1) + \dots + e^{-z_m} \mathbb{P}(X \in A_m) + \mathbb{P}(X \notin \{A_1 \cup \dots \cup A_m\}) \right] \mathbb{P}(\tau = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left[e^{-z_1} \frac{\mu(A_1)}{\mu(E)} + \dots + e^{-z_m} \frac{\mu(A_m)}{\mu(E)} + 1 - \frac{\mu(A_1) + \dots + \mu(A_m)}{\mu(E)} \right] \mathbb{P}(\tau = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\mu(E)} [\mu(A_1)(e^{-z_1} - 1) + \dots + \mu(A_m)(e^{-z_m} - 1) + \mu(E)] \right] \frac{e^{-\mu(E)} \mu(E)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu(E)^n} [\mu(A_1)(e^{-z_1} - 1) + \dots + \mu(A_m)(e^{-z_m} - 1) + \mu(E)]^n \frac{e^{-\mu(E)} \mu(E)^n}{n!} \\
&= e^{-\mu(E)} \exp\{\mu(A_1)(e^{-z_1} - 1) + \dots + \mu(A_m)(e^{-z_m} - 1) + \mu(E)\} \\
&= \exp\{-[\mu(A_1)(1 - e^{-z_1}) + \dots + \mu(A_m)(1 - e^{-z_m})]\}
\end{aligned}$$

Hemos demostrado que ambas transformadas dan lo mismo, lo que implica que la medida aleatoria Poisson N , con la definición original, tiene la misma distribución que el proceso Poisson

compuesto, es decir,

$$N(A) = \sum_{i=1}^{\tau} \mathbf{1}_A(X_i), \quad A \in \mathcal{E}, \text{ en distribución.}$$

□

Ejemplo 2.1.3. (*PRM homogénea*)

Consideremos N una $PRM(\Lambda)$, en un espacio $E = [0, \infty)$, para alguna $\lambda > 0$ y donde Λ denota λ veces la medida de Lebesgue en E .

Definimos $N(t) = N([0, t])$, $t \geq 0$. Este proceso tiene incrementos estacionarios, ya que, dados $0 < a < b < \infty$ y $h > 0$, $N((a + h, b + h])$ se distribuye $Poi(\lambda(b - a))$.

Además, para $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < \infty$, los conjuntos $(t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, m$, son disjuntos, por lo que $N((t_{i-1}, t_i])$, $i=1, \dots, m$, son independientes.

Por otra parte, $\mathbb{E}(N(0)) = \mathbb{E}(N(\{0\})) = \Lambda(\{0\}) = 0$, esto es, $N(0)=0$ c.s.

Recordemos que una medida aleatoria Poisson es un caso particular de proceso puntual. Por ello, dada N una $PRM(\mu)$ en E , N tiene una representación como:

$$N(\omega, A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_A(X_i(\omega)), \quad A \in \mathcal{E},$$

con la particularidad de que $N(A)$ se distribuye $Poisson(\mu)$ y si dividimos el soporte en conjuntos disjuntos, las v.a. resultantes son independientes.

Definición 2.1.4. (*Integral Poisson*)

Sea N una $PRM(\mu)$ en E y $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa, acotada y $\mathcal{E}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ -medible.

Entonces,

$$\int_E g dN = \sum_{i=1}^{\infty} g(X_i).$$

$\int_E g dN$ se le llama “integral Poisson”.

La integral Poisson cumple todas las propiedades antes vistas de la integral con respecto a cualquier proceso puntual. Pero, además, por ser N una $PRM(\mu)$ en E , la integral tiene algunas

propiedades extra. Por ejemplo, cuando $\mu(E) < \infty$, la integral Poisson tiene una representación como proceso Poisson compuesto. Estas propiedades de la integral Poisson las demostraremos más adelante.

2.2. Funcional de Laplace de una medida aleatoria Poisson

Una de las cosas más útiles en la teoría de medidas aleatorias Poisson es caracterizar su funcional de Laplace, ya que, de esta forma, cuando tengamos un proceso puntual cualquiera, podemos analizar su funcional de Laplace y concluir si es o no una medida aleatoria Poisson.

El siguiente teorema nos dice qué forma tiene la funcional de Laplace de una PRM(μ) y una condición para que la integral Poisson sea finita c.s., lo que implica que la funcional de Laplace sea finita.

Teorema 2.2.1. (*Funcional de Laplace de una medida aleatoria Poisson*)

Sea N una PRM(μ) en $E \subset \mathbb{R}^d$ y $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa, acotada y $\mathcal{E}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ -medible.

Entonces,

(a) La funcional de Laplace de N está dada por:

$$\Psi_N(g) = \exp \left\{ - \int_E (1 - e^{-g(x)}) \mu(dx) \right\}.$$

(b)

$$\int_E \min(g(x), 1) \mu(dx) < \infty \implies \int_E g dN < \infty \quad c.s.$$

Demostración. Parte (a)

Empecemos con una función simple $g(x) = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{A_i}$, para $A_i \in \mathcal{E}$ disjuntos y $a_i \geq 0$, $i=1, \dots, m$.

Entonces,

$$\int_E g dN = \sum_{i=1}^m a_i \int_E \mathbf{1}_{A_i}(x) N(dx) = \sum_{i=1}^m a_i \int_{A_i} N(dx) = \sum_{i=1}^m a_i N(A_i).$$

Por ser medida aleatoria Poisson, $N(A_i)$ son independientes con media $\mu(A_i)$, para $i=1, \dots, m$.

Ahora, si $\mu(A_i) = \infty$ y $a_i > 0$ para alguna i , entonces $N(A_i) = \infty$ c.s., por la definición de una v.a. Poisson con media infinita, esto implicaría que $\int_E g dN = \infty$ c.s. y $\Psi_N(g) = 0$.
 Suponemos entonces que $\mu(A_i) < \infty$,

$$\begin{aligned}
 \Psi_N(g) &= \mathbb{E} \left(e^{-\int_E g dN} \right) \\
 &= \mathbb{E} \left(e^{-\sum_{i=1}^m a_i N(A_i)} \right) \\
 &= \prod_{i=1}^m \mathbb{E} \left(e^{-a_i N(A_i)} \right) \\
 &= \prod_{i=1}^m \exp \left\{ -\mu(A_i)(1 - e^{-a_i}) \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\sum_{i=1}^m \mu(A_i)(1 - e^{-a_i}) \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\sum_{i=1}^m \mathbb{E}_\mu \left[(1 - e^{-a_i}) \mathbf{1}_{A_i} \right] \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\sum_{i=1}^m \int_E (1 - e^{-a_i}) \mathbf{1}_{A_i}(x) \mu(dx) \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\sum_{i=1}^m \int_E (1 - e^{-a_i \mathbf{1}_{A_i}(x)}) \mu(dx) \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\int_E \sum_{i=1}^m (1 - e^{-a_i \mathbf{1}_{A_i}(x)}) \mu(dx) \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\int_E (1 - e^{-\sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{A_i}(x)}) \mu(dx) \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\int_E (1 - e^{-g(x)}) \mu(dx) \right\}.
 \end{aligned}$$

Hemos probado que la expresión para $\Psi_N(g)$ es válida para $g \geq 0$ simple, ahora tomemos una función $g \geq 0$ medible en E , no necesariamente simple.

Pero cualquier función no negativa y medible en E es el límite creciente de funciones simples no negativas, es decir,

$$g_n \uparrow g, \text{ para } g_n \text{ simples.}$$

$$g_n = \sum_{i=1}^m a_i^n \mathbb{1}_{A_i^n}(x) \implies \int_E g_n dN = \sum_{i=1}^m a_i^n N(A_i^n) = X_n,$$

X_n son v.a. para $n=1,2,\dots$

Para X_n y X_{n+1} , tomemos el refinamiento (A_i^*) que incluya a los puntos de las particiones (A_i^n) y (A_i^{n+1}) , para $i=1,2,\dots$

Sabemos que N no cambia para las distintas X_n , ya que sólo cuenta el número de puntos que cayeron en los conjuntos A_i .

Reindexemos las constantes (a_i^n) y (a_i^{n+1}) de acuerdo al refinamiento (A_i^*) ,

$$\implies a_i^n \leq a_i^{n+1} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m^*\}$$

$$\implies a_i^n N(A_i^*) \leq a_i^{n+1} N(A_i^*) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m^*\}$$

$$\implies \sum_{i=1}^{m^*} a_i^n N(A_i^*) \leq \sum_{i=1}^{m^*} a_i^{n+1} N(A_i^*)$$

Pero,

$$\sum_{i=1}^m a_i^n N(A_i^n) = \sum_{i=1}^{m^*} a_i^n N(A_i^*),$$

$$\sum_{i=1}^m a_i^{n+1} N(A_i^{n+1}) = \sum_{i=1}^{m^*} a_i^{n+1} N(A_i^*).$$

Entonces,

$$X_n = \sum_{i=1}^m a_i^n N(A_i^n) \leq \sum_{i=1}^m a_i^{n+1} N(A_i^{n+1}) = X_{n+1}.$$

Por lo tanto, la sucesión $X_n = \int_E g_n dN$ es monótona creciente y, por Teorema de Convergencia Monótona, tiene un límite,

$$\int_E g_n dN = X_n \uparrow X = \int_E g dN.$$

Por otro lado, $1 - e^{-g_n(x)} \leq 1 - e^0 \leq 0$, entonces, por Teorema de Convergencia Dominada,

$$\int_E (1 - e^{-g_n(x)}) \mu(dx) \longrightarrow \int_E (1 - e^{-g(x)}) \mu(dx),$$

pero $\int_E g_n dN = \int_E (1 - e^{-g_n(x)})\mu(dx)$, ya que g_n son simples no negativas.

Por lo tanto,

$$\int_E g dN = \int_E (1 - e^{-g(x)})\mu(dx), \quad g \geq 0 \text{ medible.}$$

Parte (b).

Antes de comenzar la prueba, daremos algunas afirmaciones que nos servirán más adelante.

$$\text{Afirmación (I): } \int_E g dN < \infty \text{ c.s.} \iff \int_E (1 - e^{-g(x)})\mu(dx) < \infty.$$

Dado el resultado de la parte (a),

$$\mathbb{E} \left(e^{-\int_E g dN} \right) = \exp \left\{ - \int_E (1 - e^{-g(x)})\mu(dx) \right\},$$

entonces:

(1) Cuando se van a infinito y tomando en cuenta las propiedades de la exponencial,

$$\begin{aligned} \int_E g dN = \infty \text{ c.s.} &\iff e^{-\int_E g dN} = 0 \text{ c.s.} \iff \mathbb{E} \left(e^{-\int_E g dN} \right) = 0 \\ &\iff \exp \left\{ - \int_E (1 - e^{-g(x)})\mu(dx) \right\} = 0 \iff \int_E (1 - e^{-g(x)})\mu(dx) = \infty. \end{aligned}$$

(2) Cuando se mantienen finitas,

$$\begin{aligned} \int_E g dN < \infty \text{ c.s.} &\iff e^{-\int_E g dN} > 0 \text{ c.s.} \iff \mathbb{E} \left(e^{-\int_E g dN} \right) > 0 \\ &\iff \exp \left\{ - \int_E (1 - e^{-g(x)})\mu(dx) \right\} > 0 \iff \int_E (1 - e^{-g(x)})\mu(dx) < \infty. \end{aligned}$$

$$\text{Afirmación (II): } \int_E \min(g(x), 1)\mu(dx) < \infty \implies \int_E (1 - e^{-g(x)})\mu(dx) < \infty.$$

Para este inciso, separemos la segunda integral de la siguiente forma:

$$\int_E (1 - e^{-g(x)})\mu(dx) = \int_{x:g(x)>1} (1 - e^{-g(x)})\mu(dx) + \int_{x:g(x)\leq 1} (1 - e^{-g(x)})\mu(dx),$$

Llamaremos:

$$I_1 = \int_{x:g(x)>1} (1 - e^{-g(x)})\mu(dx) \quad , \quad I_2 = \int_{x:g(x)\leq 1} (1 - e^{-g(x)})\mu(dx),$$

(1) Para I_1 , $(1 - e^{-g(x)}) \in (1 - e^{-1}, 1]$, entonces $(1 - e^{-g(x)}) \leq 1$,

$$\therefore \int_{x:g(x)>1} (1 - e^{-g(x)})\mu(dx) \leq \int_{x:g(x)>1} \mu(dx).$$

(2) Para I_2 , tomamos la expansión de Taylor de $(1 - e^{-g(x)})$.

Para cualquier \mathcal{X} , tenemos:

$$(1 - e^{-\mathcal{X}}) = \mathcal{X} - \frac{\mathcal{X}^2}{2} + \frac{\mathcal{X}^3}{3!} - \dots$$

Y sabemos que la fórmula del residuo del polinomio grado n es:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \text{ en el intervalo deseado, en este caso, } [0, 1].$$

Entonces,

$$(1 - e^{-g(x)}) = g(x) + \frac{1}{2}e^{-\xi}, \quad \xi \in [0, 1].$$

$$\implies (1 - e^{-g(x)}) \leq g(x),$$

por lo que

$$\int_{x:g(x)\leq 1} (1 - e^{-g(x)})\mu(dx) \leq \int_{x:g(x)\leq 1} g(x)\mu(dx).$$

Entonces, se tiene que:

$$\int_E (1 - e^{-g(x)})\mu(dx) \leq \int_E \min(g(x), 1)\mu(dx).$$

Ahora, suponemos que $\int_E \min(g(x), 1)\mu(dx) < \infty$ para $g \geq 0$.

Por (b), $\int_E (1 - e^{-g(x)})\mu(dx) < \infty$.

Usando Teorema de Convergencia Monótona cuando $z \downarrow 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\int_E g dN < \infty\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\int_E g dN < \infty\}}\right) \\
&= \lim_{z \downarrow 0} \mathbb{E}\left(e^{-z \int_E g dN} \mathbf{1}_{\{\int_E g dN < \infty\}}\right) \\
&= \lim_{z \downarrow 0} \mathbb{E}\left(e^{-z \int_E g dN}\right) \\
&= \lim_{z \downarrow 0} \exp\left\{-z \int_E (1 - e^{-g(x)})\mu(dx)\right\} \\
&= \exp\left\{\lim_{z \downarrow 0} -z \int_E (1 - e^{-g(x)})\mu(dx)\right\} \\
&= e^0 = 1.
\end{aligned}$$

□

2.3. Propiedades de la integral Poisson

Dado este último resultado, probaremos algunas propiedades de la integral Poisson: su representación como proceso Poisson compuesto, independencia cuando el dominio de las integrales es ajeno, su esperanza, varianza y covarianza.

En esta sección utilizaremos con mucha frecuencia la propiedades del proceso Poisson compuesto (Apéndice B).

Propiedad 2.3.1. *(La integral Poisson como proceso Poisson compuesto)*

Sea $g \geq 0$ una función medible en E , tal que $\int_E \min(g(x), 1)\mu(dx) < \infty$.

Si $0 < \mu(E) < \infty$ entonces $\int_E g dN$ tiene la representación como una proceso Poisson compuesto,

$$\int_E g dN = \sum_{i=1}^M Z_i, \quad \text{en distribución,}$$

donde M se distribuye $\text{Poi}(\mu(E))$ independiente de las $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias iid no nega-

tivas.

$$F_Z(B) = [G(g^{-1})](B) = G(\{x \in E : g(x) \in B\}) \quad B \in \mathcal{B}([0, \infty)),$$

$$G(dx) = \frac{\mu(dx)}{\mu(E)} \quad \text{es una medida de probabilidad en } (E, \mathcal{E}).$$

Demostración. Como se cumple que $\int_E \min(g(x), 1)\mu(dx) < \infty$, entonces $\int_E g dN < \infty$.

Tomamos $z \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{-z \int_E g dN} \right) &= \mathbb{E} \left(e^{-\int_E (zg) dN} \right) \\ &= \exp \left\{ -\int_E (1 - e^{-zg(x)}) \mu(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\mu(E) \int_E (1 - e^{-zg(x)}) G(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\mu(E) \int_{g(E)} (1 - e^{-zy}) G(g^{-1}(dy)) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\mu(E) \int_{g(E)} (1 - e^{-zy}) F_Z(dy) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\mu(E) \left[1 - \int_{[0, \infty)} e^{-zy} F_Z(dy) \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\mu(E) [1 - \mathbb{E}(e^{-zZ})] \right\} \end{aligned}$$

Esto ya que tomamos la transformación $y = g(x)$.

Al observar que $g(E) = \{g(x) : x \in E\} \subset [0, \infty)$ y, por la definición de F_Z , fuera del rango de g , los conjuntos tienen medida cero.

Además, como Z esta definida en $([0, \infty), \mathcal{B}([0, \infty)), G(g^{-1}))$, se tiene que:

$$\int_{g(E)} F_Z(dy) = \int_{[0, \infty)} F_Z(dy) = 1.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(e^{-z \sum_{i=1}^M Z_i} \right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(e^{-z \sum_{i=1}^m Z_i} | M = m \right) \mathbb{P}(M = m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^m e^{-z Z_i} \right) \mathbb{P}(M = m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(e^{-mzZ} \right) \mathbb{P}(M = m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(e^{-zZ} \right)^m \mathbb{P}(M = m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(e^{-zZ} \right)^m \frac{e^{-\mu(E)} \mu(E)^m}{m!} \\
&= e^{-\mu(E)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\mathbb{E}(e^{-zZ}) \mu(E)]^m}{m!} \\
&= e^{-\mu(E)} \exp\{\mathbb{E}(e^{-zZ}) \mu(E)\} \\
&= \exp\{-\mu(E)(1 - \mathbb{E}(e^{-zZ}))\}.
\end{aligned}$$

Entonces, demostramos que las generadoras de momentos de ambas son iguales, por lo tanto las variables son iguales en distribución, es decir,

$$\int_E g dN = \sum_{i=1}^M Z_i, \quad \text{en distribución.}$$

□

Propiedad 2.3.2. (*Independencia de $\int_E g dN$*)

Sea N una PRM(μ) en $E \subset \mathbb{R}^d$ y g_i , $i=1, \dots, k$, funciones reales medibles en E con soportes disjuntos. Supongamos que $\int_E g_i dN$ existen y son finitas c.s.

Entonces las variables aleatorias $\int_E g_i dN$, $i=1, \dots, k$ son independientes.

Demostración. Denotemos el soporte de g_i como A_i ,

$$\Rightarrow \int_E g_i dN = \int_{A_i} g_i dN.$$

Primero, tomemos g_i simples, es decir,

$$g_i = \sum_{j=1}^m a_j^{(i)} \mathbf{1}_{A_j^{(i)}}, \text{ para } a_j^{(i)} \geq 0 \text{ y } A_j^{(i)} \subset A_i \text{ disjuntos.}$$

Sin pérdida de generalidad, suponemos que el número m de conjuntos $A_j^{(i)}$, partición de A_i , es independiente de i . Recordamos que, al ser $A_j^{(i)}$ disjuntos, $N(A_j^{(i)})$ son independientes.

Entonces, para $z_i \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \sum_{i=1}^k z_i \int_{A_i} g_i dN \right\} \right) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \sum_{i=1}^k z_i \int_{A_i} \sum_{j=1}^m a_j^{(i)} \mathbf{1}_{A_j^{(i)}} dN \right\} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m z_i a_j^{(i)} N(A_j^{(i)}) \right\} \right) \\ &= \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^m \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - z_i a_j^{(i)} N(A_j^{(i)}) \right\} \right) \\ &= \prod_{i=1}^k \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \sum_{j=1}^m z_i a_j^{(i)} N(A_j^{(i)}) \right\} \right) \\ &= \prod_{i=1}^k \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - z_i \int_{A_i} g_i dN \right\} \right). \end{aligned}$$

Pero esta expresión significa que las integrales $\int_E g_i dN$ son independientes.

Ahora, tomemos $g_i \geq 0$ medibles. Cada g_i es el límite puntual de una sucesión no decreciente de funciones simples no negativas con el mismo soporte que g_i , A_i , es decir, $g_{i_r} \uparrow g_i$.

Además, sabemos que $\int_{A_i} g_{i_r} dN$ son monótonas, entonces:

$$\begin{aligned} X_{i_n} &= \int_{A_i} g_{i_r} dN \uparrow \int_{A_i} g_i dN = X_i \quad \text{para cada } i. \\ \Rightarrow \left(z_1 \int_{A_1} g_{1_r} dN + \dots + z_k \int_{A_k} g_{k_r} dN \right) &\uparrow \left(z_1 \int_{A_1} g_1 dN + \dots + z_k \int_{A_k} g_k dN \right). \end{aligned}$$

Entonces, por un lado, dado que la función exponencial es continua y creciente,

$$\exp \left\{ - \sum_{i=1}^k z_i \int_E g_{i,r} dN \right\} \downarrow \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k z_i \int_E g_i dN \right\},$$

vemos que para cada r se cumple que $\exp \left\{ - \sum_{i=1}^k z_i \int_E g_{i,r} dN \right\} < e^0 = 1$. Por lo que usamos Teorema de Convergencia Dominada y tenemos que:

$$\mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \sum_{i=1}^k z_i \int_E g_{i,r} dN \right\} \right) \longrightarrow \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \sum_{i=1}^k z_i \int_E g_i dN \right\} \right).$$

Por otro lado, notamos que

$$\begin{aligned} \int_{A_i} g_{i,r} dN \uparrow \int_{A_i} g_i dN &\Rightarrow z_i \int_{A_i} g_{i,r} dN \uparrow z_i \int_{A_i} g_i dN, \\ \exp \left\{ -z_i \int_{A_i} g_{i,r} dN \right\} &\downarrow \exp \left\{ -z_i \int_{A_i} g_i dN \right\}, \quad \text{para cada } i. \end{aligned}$$

De igual manera, acotamos por uno y utilizamos el Teorema de Convergencia Dominada para obtener:

$$\mathbb{E} \left(\exp \left\{ -z_i \int_{A_i} g_{i,r} dN \right\} \right) \longrightarrow \mathbb{E} \left(\exp \left\{ -z_i \int_{A_i} g_i dN \right\} \right).$$

Además, la función producto $\prod : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, por lo que,

$$\prod_{i=1}^k \mathbb{E} \left(\exp \left\{ -z_i \int_{A_i} g_{i,r} dN \right\} \right) \longrightarrow \prod_{i=1}^k \left(\exp \left\{ -z_i \int_{A_i} g_i dN \right\} \right).$$

En resumen, tenemos:

$$\mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \sum_{i=1}^k z_i \int_E g_{i,r} dN \right\} \right) \longrightarrow \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \sum_{i=1}^k z_i \int_E g_i dN \right\} \right),$$

y

$$\prod_{i=1}^k \mathbb{E} \left(\exp \left\{ -z_i \int_{A_i} g_{i,r} dN \right\} \right) \longrightarrow \prod_{i=1}^k \mathbb{E} \left(\exp \left\{ -z_i \int_{A_i} g_i dN \right\} \right),$$

pero

$$\mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \sum_{i=1}^k z_i \int_{A_i} g_{i,r} dN \right\} \right) = \prod_{i=1}^k \mathbb{E} \left(\exp \left\{ -z_i \int_{A_i} g_{i,r} dN \right\} \right),$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \sum_{i=1}^k z_i \int_{A_i} g_i dN \right\} \right) = \prod_{i=1}^k \mathbb{E} \left(\exp \left\{ -z_i \int_{A_i} g_i dN \right\} \right).$$

Esta última igualdad significa que $\int_E g_i dN$ son independientes, para $g_i \geq 0$.

Por último, tomamos g_i sólomente medibles. Notemos que g_i se puede ver de la siguiente forma:

$$g_i = g_i^+ - g_i^-, \quad i=1,\dots,k.$$

Cada una de ellas es no negativa, es decir, $g_i^+ \geq 0$ y $g_i^- \geq 0$, por lo que tienen su respectiva sucesión de simples $g_{i,r}^+$ y $g_{i,r}^-$ que convergen monótonamente a ellas.

De esta forma, aplicamos el mismo procedimiento y obtenemos el resultado. □

Propiedad 2.3.3. (Esperanza de $\int_E g dN$)

Sea N una PRM(μ) en $E \subset \mathbb{R}^d$ y g una función medible con valores reales.

Suponemos que $\int_E |g(x)|\mu(dx) < \infty$. Entonces:

$$\mathbb{E} \left(\int_E g dN \right) = \int_E g(x)\mu(dx).$$

Demostración. Bajo la hipótesis, $\int_E g^+ dN < \infty$ y $\int_E g^- dN < \infty$ c.s.

Además, su soporte es disjunto, por lo que

$$\int_E g^+ dN \text{ y } \int_E g^- dN \text{ son independientes.}$$

Como la diferencia de dos variables aleatorias independientes tiene esperanza finita si y sólo si las dos variables tienen esperanza finita, sólo necesitamos que $\mathbb{E} \left(\int_E g^\pm dN \right) < \infty$ para que se

cumpla $\mathbb{E} \left(\int_E g dN \right) < \infty$. Entonces, sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que $g \geq 0$.

Primero, cuando $\mu(E) < \infty$, podemos hacer $\int_E g dN = \sum_{i=1}^M Z_i$ y tenemos lo siguiente:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^M Z_i \right) = \mathbb{E}(M) \mathbb{E}(Z).$$

Dado que M tiene distribución $Poi(\mu(E))$, $\mathbb{E}(M) = \mu(E)$.

Para la esperanza de Z, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \int_{[0, \infty)} x G(g^{-1}(dx)) \\ &= \int_{[0, \infty)} x \frac{\mu(g^{-1}(dx))}{\mu(E)} \\ &= \int_{g^{-1}([0, \infty))} g(y) \frac{\mu(dy)}{\mu(E)} \\ &= \int_E g(y) \frac{\mu(dy)}{\mu(E)} \end{aligned}$$

Lo último debido a que $g(E) \subset [0, \infty)$ y fuera de $g(E)$, los conjuntos tienen probabilidad cero.

Entonces:

$$\mathbb{E} \left(\int_E g dN \right) = \mathbb{E}(M) \mathbb{E}(Z) = \int_E g(y) \mu(dy).$$

Cuando no tenemos que $\mu(E) < \infty$, utilizamos que μ es de Radon, entonces existen borelianos $E_n \uparrow E$ tal que $\mu(E_n) < \infty \quad \forall n$.

Para cada n, regresamos al caso anterior, y se tiene que:

$$\mathbb{E} \left(\int_{E_n} g dN \right) = \int_{E_n} g(x) \mu(dx).$$

Luego, $g \mathbf{1}_{E_n} \uparrow g$ y $\int_{E_n} g dN$ crecen monótonamente cuando E_n se acerca a E.

$$\Rightarrow X_n = \int_E g \mathbf{1}_{E_n} dN \uparrow \int_E g dN = X$$

Usando Teorema de Clase Monótonas,

$$\mathbb{E} \left(\int_{E_n} g dN \right) \uparrow \mathbb{E} \left(\int_E g dN \right).$$

Por otro lado,

$$\mathbb{E} \left(\int_{E_n} g dN \right) = \int_{E_n} g(x) \mu(dx) \uparrow \int_E g(x) \mu(dx).$$

Entonces:

$$\mathbb{E} \left(\int_E g dN \right) = \int_E g(x) \mu(dx).$$

□

Nótese que la propiedad anterior es el Teorema de Campbell visto en el capítulo 1, en el caso particular de las medidas aleatorias Poisson. Esto es claro ya que, cuando N denota a una $PRM(\mu)$, se tiene que $\zeta(A) = \mathbb{E}(N(A)) = \mu(A)$, para $A \in \mathcal{E}$.

Propiedad 2.3.4. (*Varianza de $\int_E g dN$*)

Sea N una $PRM(\mu)$ en $E \subset \mathbb{R}^d$ y g una función medible con valores reales.

Suponemos que $\int_E \max([g(x)]^2, |g(x)|) \mu(dx) < \infty$. Entonces:

$$\text{var} \left(\int_E g dN \right) = \int_E [g(x)]^2 \mu(dx).$$

Demostración. La variable aleatoria $\text{var} \left(\int_E g dN \right) < \infty$ si y sólo si el segundo momento es finito.

Como $\int_E g^+ dN < \infty$, $\int_E g^- dN < \infty$ c.s. y $\int_E g^+ dN$ y $\int_E g^- dN$ son independientes,

$$\mathbb{E} \left(\left(\int_E g dN \right)^2 \right) < \infty \iff \mathbb{E} \left(\left(\int_E g^\pm dN \right)^2 \right) < \infty.$$

Entonces, sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que $g \geq 0$.

Primero, cuando $\mu(E) < \infty$, podemos hacer $\int_E g dN = \sum_{i=1}^M Z_i$ y tenemos:

$$\text{var} \left(\sum_{i=1}^M Z_i \right) = \mathbb{E}(M) \mathbb{E}(Z^2).$$

Ahora, para la $\mathbb{E}(Z^2)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z^2) &= \int_{[0,\infty)} x^2 G(g^{-1}(dx)) \\
&= \int_{[0,\infty)} x^2 \frac{\mu(g^{-1}(dx))}{\mu(E)} \\
&= \int_{g^{-1}([0,\infty))} [g(y)]^2 \frac{\mu(dy)}{\mu(E)} \\
&= \int_E [g(y)]^2 \frac{\mu(dy)}{\mu(E)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{var} \left(\sum_{i=1}^M Z_i \right) = \mathbb{E}(M)\mathbb{E}(Z^2) = \int_E [g(y)]^2 \mu(dy).$$

Cuando no tenemos que $\mu(E) < \infty$, usamos el mismo argumento que para la esperanza, μ es de Radon, por lo que se tienen $E_n \uparrow E$ tales que $\mu(E_n) < \infty$ y $g\mathbf{1}_{E_n} \uparrow g$.

Como las $\int g\mathbf{1}_{E_n} dN$ son monótonas, $\int g\mathbf{1}_{E_n} dN \uparrow \int_E g dN$, y $(\int g\mathbf{1}_{E_n} dN)^2 \uparrow (\int_E g dN)^2$.

Aplicamos Teorema de Clases Monótonas y obtenemos

$$\mathbb{E} \left[\left(\int g\mathbf{1}_{E_n} dN \right)^2 \right] \uparrow \mathbb{E} \left[\left(\int_E g dN \right)^2 \right].$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(\int g\mathbf{1}_{E_n} dN \right)^2 \right] &= \text{var} \left(\int_{E_n} g dN \right) + \left[\mathbb{E} \left(\int_{E_n} g dN \right) \right]^2 \\
&= \int_{E_n} (g(x))^2 \mu(dx) + \left(\int_{E_n} g(x) \mu(dx) \right)^2 \\
&\uparrow \int_E (g(x))^2 \mu(dx) + \left(\int_E g(x) \mu(dx) \right)^2
\end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\text{var} \left(\int_E g dN \right) = \int_E (g(x))^2 \mu(dx).$$

□

Propiedad 2.3.5. (Covarianza de $\int_E f dN$ y $\int_E g dN$)

Sea N una $PRM(\mu)$ en $E \subset \mathbb{R}^d$ y f, g funciones medibles con valores reales.

Suponemos que $\int_E \max([g(x)]^2, |g(x)|) \mu(dx) < \infty$ y f satisface la condición correspondiente.

Entonces:

$$\text{cov} \left(\int_E f dN, \int_E g dN \right) = \int_E f(x)g(x) \mu(dx).$$

Demostración. Usaremos la igualdad:

$$\text{cov}(Y_1, Y_2) = \frac{1}{4} [\text{var}(Y_1 + Y_2) - \text{var}(Y_1 - Y_2)].$$

Tomamos $Y_1 = \int_E f dN$ y $Y_2 = \int_E g dN$.

La condición de hipótesis implica que $\text{var}Y_1 < \infty$ y $\text{var}Y_2 < \infty$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \text{cov} \left(\int_E f dN, \int_E g dN \right) &= \frac{1}{4} \left[\int_E (f(x) + g(x))^2 \mu(dx) - \int_E (f(x) - g(x))^2 \mu(dx) \right] \\ &= \frac{1}{4} \int_E (f(x))^2 \mu(dx) + \frac{1}{2} \int_E f(x)g(x) \mu(dx) + \frac{1}{4} \int_E (g(x))^2 \mu(dx) \\ &\quad - \left[\frac{1}{4} \int_E (f(x))^2 \mu(dx) - \frac{1}{2} \int_E f(x)g(x) \mu(dx) + \frac{1}{4} \int_E (g(x))^2 \mu(dx) \right] \\ &= \int_E f(x)g(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

□

2.4. Medidas aleatorias Poisson marcadas

Las medidas aleatorias Poisson tienen una propiedad importante: se puede adherir una coordenada extra a los puntos de la medida aleatoria Poisson y, bajo ciertas restricciones sobre la distribución de la coordenada extra, el proceso resultante es de nuevo una medida aleatoria Poisson en un espacio más grande.

Al proceso de “adherir” una coordenada se le llama marcar.

Proposición 2.4.1. (*PRM marcadas*)

Supongamos que $N_X = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\bullet}(X_i)$ es una $PRM(\mu)$ con un espacio de estados $E_1 \subset \mathbb{R}^d$. Sea

(Y_n) una secuencia iid de vectores aleatorios con valores en $E_2 \subset \mathbb{R}^m$ y distribución F . Si (X_n) y (Y_n) son independientes, entonces el proceso Poisson

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\bullet}(X_i, Y_i) \text{ es una PRM}(\mu \times F), \text{ con espacio de estados } E = E_1 \times E_2.$$

También, cualquier PRM N en $E = E_1 \times E_2$ con medida media $\mu \times F$, donde μ es una medida de Radon en E_1 y F una distribución de probabilidad en E_2 , se puede interpretar como una PRM marcada.

Demostración. Antes de comenzar, notemos que

$$\int_E g dN_X = \sum_{i=1}^{\infty} g(X_i) \implies \int_E g dN = \sum_{i=1}^{\infty} g(X_i, Y_i).$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \Psi_N(g) &= \mathbb{E} \left(e^{-\int_E g dN} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ -\sum_{i=1}^{\infty} g(X_i, Y_i) \right\} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^{\infty} \exp\{-g(X_i, Y_i)\} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(\exp\{g(X_i, Y_i)\}) \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\exp\{-g(X_i, Y_i)\}|X_i)) \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(h(X_i)) \end{aligned}$$

Esto último se obtiene al tomar:

$$h(x_i) = \mathbb{E}(\exp\{-g(X_i, Y_i)\}|X_i = x_i) \quad \text{que es una esperanza que se hace sobre } Y_i.$$

Entonces

$$h(X_i) = \mathbb{E}(\exp\{-g(X_i, Y_i)\}|X_i) \quad \text{es una variable aleatoria que sólo depende de } X_i.$$

Resolviendo,

$$\begin{aligned}
 h(x_i) &= \mathbb{E}(\exp\{-g(x_i, Y_i)\}) \\
 &= \int_{E_2} e^{-g(x_i, y)} F_{Y_i}(dy) \\
 &= \int_{E_2} e^{-g(x_i, y)} F_Y(dy)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$h(X_i) = \int_{E_2} e^{-g(X_i, y)} F_Y(dy).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(h(X_i)) &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{\infty} h(X_i)\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{\infty} \int_{E_2} e^{-g(X_i, y)} F(dy)\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\exp\left(\log\left(\prod_{i=1}^{\infty} \int_{E_2} e^{-g(X_i, y)} F(dy)\right)\right)\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \log\left(\int_{E_2} e^{-g(X_i, y)} F(dy)\right)\right)\right)
 \end{aligned}$$

Tomemos la función:

$$f(x) = -\log\left(\int_{E_2} e^{-g(x, y)} F(dy)\right),$$

entonces, la funcional se ve de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \Psi_N(g) &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{-\sum_{i=1}^{\infty} f(X_i)\right\}\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{-\int_{E_1} f(x) dN_X\right\}\right)
 \end{aligned}$$

Ahora, analicemos $f(x)$:

(a) $g(x, y) \geq 0$ por definición $\implies e^{-g(x, y)} \leq 1$.

(b) Como F es una distribución, $\int_{E_2} e^{-g(x, y)} F(dy) \in [0, 1]$.

(c) Por otra parte, para $a \leq 1$,

$$-\log(a) \geq 0 \implies f \geq 0.$$

(d) Como $f \geq 0$, podemos aplicar el Lema de la funcional de una medida aleatoria Poisson.

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \int_{E_1} f(x) dN_X \right\} \right) &= \exp \left\{ - \int_{E_1} (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{E_1} \left(1 - \int_{E_2} e^{-g(x,y)} F(dy) \right) \mu(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{E_1} \int_{E_2} (1 - e^{-g(x,y)}) F(dy) \mu(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{E_1 \times E_2} (1 - e^{-g(x,y)}) (F \times \mu)(dy, dx) \right\} \end{aligned}$$

Esto último es la funcional de Laplace deseada. □

2.5. Transformaciones de medidas aleatorias Poisson

Otra propiedad importante de las medidas aleatorias Poisson es que se les puede aplicar cualquier transformación medible y el resultado obtenido es nuevamente una medida aleatoria Poisson en otro espacio. Su medida media depende de la μ del proceso original, por lo cual es muy sencillo verificar las propiedades que debe cumplir la medida media de la nueva medida aleatoria Poisson.

La importancia de esta propiedad se verá más adelante en algunos ejemplos del siguiente capítulo, pero principalmente lo que sucede es que, sin importar la transformación, mientras sea medible, se tiene que las propiedades del proceso no cambian y podemos trabajar con él sin necesidad de abordar otra teoría sobre un nuevo proceso puntual.

Proposición 2.5.1. (*Transformaciones de PRM*)

Sea $N = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\bullet}(X_i)$ una PRM(μ) con espacio de estados $E \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$.

Suponemos que los puntos X_i de N son transformados por $\psi : E \rightarrow E'$ medible, donde $E' \subset \mathbb{R}^m$,

$\mathcal{E}' = \mathcal{B}(E')$. Suponemos que la medida μ es finita en E .

Entonces:

$$N_\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\bullet}(\psi(X_i))$$

es una medida aleatoria Poisson con medida media μ_ψ y espacio de estados E' , donde

$$\mu_\psi(A) = \mu(\psi^{-1}(A)) = \mu(\{x \in E : \psi(x) \in A\}), \quad A \in \mathcal{E}'.$$

Además, μ_ψ es de Radon.

Demostración. Como μ_ψ es la medida media de una PRM, debe ser de Radon.

Esto es automático ya que:

$$\mu_\psi(E') = \mu(\psi^{-1}(E')) \leq \mu(E) < \infty.$$

Sea g una función acotada, no negativa y medible en E' y observemos que $g(\psi)$ es una función acotada, no negativa y medible en E .

Se tiene que:

$$\int_{E'} g dN_\psi = \sum_{i=1}^{\infty} g(\psi(X_i)) = \int_E g(\psi) dN.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \Psi_{N_\psi}(g) &= \mathbb{E} \left(e^{-\int_E g(\psi) dN} \right) \\ &= \exp \left\{ - \int_E (1 - e^{-g(\psi(x))}) \mu(dx) \right\} \end{aligned}$$

Sea $y = \psi(x)$, por lo cual $dy = \psi(dx) \Rightarrow dx = \psi^{-1}(dy)$.

$$\begin{aligned} \Psi_{N_\psi}(g) &= \exp \left\{ - \int_{\psi(E)} (1 - e^{-g(y)}) \mu(\psi^{-1}(dy)) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{E'} (1 - e^{-g(y)}) \mu_\psi(dy) \right\} \end{aligned}$$

Esto último es la funcional de Laplace de una PRM(μ_ψ). □

2.6. Sumas de medidas aleatorias Poisson

Otro método para generar medidas aleatorias Poisson a partir de otras ya dadas, es sumándo-las. Es análogo al resultado sobre variables aleatorias que dice que, dadas X_1, \dots, X_n v.a. Poisson con parámetro λ_i para $i = 1, \dots, n$, la v.a. $X = X_1 + \dots + X_n$ se distribuye Poisson con parámetro $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

La importancia de esta propiedad se observa resaltando que, si tenemos varias medidas aleatorias Poisson y nos interesa unir las, al sumarlas obtenemos una medida aleatoria Poisson sobre el mismo espacio, es decir, no siempre es necesario trabajar en un espacio de estados de dimensión más grande.

Proposición 2.6.1. (Suma de PRM)

Sean N_1, \dots, N_m procesos puntuales mutuamente independientes con espacio de estados $E \subset \mathbb{R}^d$. Si N_i son PRM(μ_i), $i=1, \dots, m$, entonces:

$$N = N_1 + \dots + N_m \sim PRM(\mu), \quad \mu = \mu_1 + \dots + \mu_m.$$

Demostración. Sea g una función medible, acotada y no negativa.

Nótese que:

$$\begin{aligned} \int_E g dN_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} g(X_i^1), \dots, \int_E g dN_m = \sum_{i=1}^{\infty} g(X_i^m), \\ \implies \int_E g dN &= \int_E g d(N_1 + \dots + N_m) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\infty} g(X_i^k) = \sum_{k=1}^m \int g dN_k. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \Psi_N(g) &= \mathbb{E} \left(e^{-\int_E g dN} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{-\sum_{k=1}^m \int_E g dN_k} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{k=1}^m e^{-\int_E g dN_k} \right) \end{aligned}$$

Como los procesos son independientes,

$$\begin{aligned}
\Psi_N(g) &= \prod_{k=1}^m \mathbb{E} \left(e^{-\int_E g dN_k} \right) \\
&= \prod_{k=1}^m \exp \left\{ -\int_E (1 - e^{-g(x)}) \mu_k(dx) \right\} \\
&= \exp \left\{ -\sum_{k=1}^m \int_E (1 - e^{-g(x)}) \mu_k(dx) \right\} \\
&= \exp \left\{ -\int_E (1 - e^{-g(x)}) d[\mu_1(x) + \dots + \mu_m(x)] \right\} \\
&= \exp \left\{ -\int_E (1 - e^{-g(x)}) \mu(dx) \right\}
\end{aligned}$$

Esto último es la funcional de Laplace deseada. □

Capítulo 3

Medidas Aleatorias Poisson en Teoría del Riesgo

La teoría del riesgo es, desde el enfoque matemático, una rama de la teoría de probabilidad, mientras que sus aplicaciones se dan en todos los ámbitos de la vida cotidiana. Se usa para tomar decisiones concernientes a algún evento de interés, cuando no se tiene suficiente información pero se sigue un modelo de probabilidad.

En los capítulos anteriores hemos acumulado mucha teoría sobre medidas aleatorias Poisson, el objetivo de este capítulo es aplicar esa teoría para modelar el riesgo de una aseguradora, considerando varios elementos de los siniestros.

En primer lugar, se presentan algunos ejemplos sencillos de procesos puntuales muy utilizados, para resaltar bajo qué hipótesis se está tratando con una medida aleatoria Poisson.

Se abordan algunas propiedades que tiene el riesgo de una aseguradora al ser modelado como una medida aleatoria Poisson: el monto acumulado puede verse como una integral Poisson, se consideran a los siniestros ocurridos no reportados y se ve una manera de incorporar inflación y tasas de interés nominal. Todo esto con modelos “pequeños” que solamente toman en cuenta algunos elementos de los siniestros.

El modelo general pretende considerar gran parte de la información disponible sobre los siniestros y modelarlos con una medida aleatoria Poisson en $(0, \infty)^4$. Un aspecto importante es que, sin importar el espacio en el que se trabaja, todo lo visto anteriormente es válido, desde la forma de la funcional de Laplace hasta la manera de tomar en cuenta a los factores externos.

Se utilizan las herramientas de estadística bayesiana (Apéndice C) para incorporar los datos observados al modelo general, sin cambiar su estructura, para que sigan siendo válidos los procedimientos anteriores. Esto se hace en la sección 3.5.

Por último, teniendo observaciones de una aseguradora de daños, se obtiene la forma del modelo general de acuerdo a los datos. Después se actualiza el modelo con las observaciones utilizando el estimador de máxima verosimilitud y estadística bayesiana.

Con este nuevo modelo, que sigue cumpliendo las características de una medida aleatoria Poisson, es posible calcular fácilmente la esperanza del monto acumulado, que es un buen estimador de la reserva que tendría que tener la aseguradora.

3.1. Ejemplos de Procesos Puntuales

En esta sección veremos la forma de modelar el riesgo de una aseguradora con medidas aleatorias Poisson. Empezaremos con el modelo más simple, que toma en cuenta solamente el tiempo de ocurrencia y supone independencia, e iremos agregando elementos e hipótesis hasta llegar a una medida aleatoria Poisson.

Ejemplo 3.1.1. *(Proceso puntual)*

Sea $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $T_0 = 0$, $T_i = Y_1 + \dots + Y_i \in \mathbb{R}^+$, $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias iid y positivas. Por la Ley Fuerte de los Grandes Números, T tiende a infinito c.s. cuando i tiende a infinito.

Entonces, para cada A boreliano acotado del $(0, \infty)$,

$$N(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_A(T_i) = \#\{i \geq 1 : T_i \in A\} < \infty \quad \text{c.s.}$$

Por lo que N es un proceso puntual.

Ejemplo 3.1.2. (Proceso puntual marcado)

Tomemos el modelo de seguros:

Sea $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ como en el ejemplo anterior. Al tiempo T_i , ocurre una reclamación de tamaño X_i . Suponemos que $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son variables aleatorias iid, no negativas y (X_i) es independiente de (T_i) . Entonces:

$$N(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_A(T_i, X_i) = \#\{i \geq 1 : (T_i, X_i) \in A\}$$

es un proceso puntual en $(0, \infty)^2$.

Con el mismo argumento del ejemplo anterior, cualquier $A \subset (0, \infty)^2$ acotado contiene un número finito de puntos (T_i, X_i) .

Ejemplo 3.1.3. (Medida Aleatoria Poisson)

En el esquema anterior, supongamos que $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es un proceso Poisson homogéneo en $(0, \infty)$ con intensidad $\lambda > 0$ (por ejemplo, tomando Y_i v.a. exponenciales con parámetro λ) y que (X_i) son v.a. iid en $(0, \infty)$ que tienen función de distribución F .

Se tiene entonces que los puntos (T_i, X_i) forman una medida aleatoria Poisson marcada en $E = (0, \infty)^2$ y medida media $\Lambda \times F$, donde Λ representa λ veces la medida de Lebesgue.

Con esto tenemos que las v.a. $N(A_1), \dots, N(A_m)$ se distribuyen Poisson y son independientes cuando A_1, \dots, A_m son disjuntos, como lo vimos en el capítulo anterior.

De aquí se derivan dos casos especiales:

(a) Cuando descomponemos el tiempo en intervalos disjuntos $(a_i, b_i]$, $i=1, \dots, m$, y consideramos conjuntos de la forma $A_i = (a_i, b_i] \times B_i$, para cualesquiera $B_i \in \mathcal{B}((0, \infty))$.

En este caso se tiene que el número de reclamaciones con tiempos en $(a_i, b_i]$ y montos en B_i son independientes. Los intervalos de tiempo podrían ser años, meses, días, etc.

(b) Cuando descomponemos el espacio de los montos en intervalos disjuntos $(c_i, d_i]$, $i=1, \dots, m$. Entonces, para cualesquiera $C_i \in \mathcal{B}((0, \infty))$, los montos $N(C_i \times (c_i, d_i])$ son v.a. Poisson independientes con media $\lambda|C_i|(F(d_i) - F(c_i))$, donde $|C_i|$ representa la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

Todo lo anterior también se puede generalizar si las $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forman un proceso Poisson no homogéneo. Lo que cambia es la medida media del proceso Poisson, es decir, $N(C_i \times (c_i, d_i])$ se distribuye $\text{Poi}(\mu(C_i)[F(d_i) - F(c_i)])$ y son independientes.

3.2. Representación del Monto Acumulado

En esta sección se verá que el monto acumulado de las reclamaciones en cierto conjunto se puede ver como una integral Poisson.

La importancia de esta propiedad se resalta al recordar que la integral Poisson hereda las propiedades de la medida aleatoria Poisson, en particular, son independientes cuando el soporte es disjunto.

En otras palabras, gracias al modelo con medidas aleatorias Poisson, se puede probar fácilmente que el monto acumulado será independiente para intervalos de tiempo disjuntos o rangos en el monto disjuntos.

Tomemos $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ los puntos de un proceso Poisson homogéneo con intensidad $\lambda > 0$ en $(0, \infty)$, independiente de $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ que tienen función de distribución F . Sean $A \in \mathcal{E} = \mathcal{B}([0, \infty)^2)$ y g una función tal que $g(t, x) = x$. Se tiene que:

$$\int_A g dN = \sum_{i: (T_i, X_i) \in A} X_i.$$

Con $(\Lambda \times F)(A) < \infty$, la integral tiene una representación como proceso Poisson compuesto,

$$\int_A xN(dt, dx) = \sum_{i=1}^M Z_i, \quad \text{donde la igualdad es en distribución.}$$

Donde:

(I) M se distribuye $Poi((\Lambda \times F)(A))$,

(II) $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son variables aleatorias iid con función de distribución

$$F_Z(y) = G(\{(t, x) \in A : x \leq y\}), \quad \text{donde } G(dx) = \frac{(\Lambda \times F)(dx)}{(\Lambda \times F)(A)},$$

(III) M es independiente de (Z_i) .

Entonces, F_Z es de la forma:

$$F_Z(y) = \frac{(\Lambda \times F)(A \cap [(0, \infty) \times [0, y]])}{(\Lambda \times F)(A)}.$$

En particular, tomemos $A = B \times C$, con $B, C \in \mathcal{B}([0, \infty))$, $F(C) > 0$ y $|B| > 0$.

Entonces se tiene que M se distribuye $Poi(\lambda|B|F(C))$ y

$$F_Z(y) = \frac{\lambda|B|F(C \cap [0, y])}{\lambda|B|F(C)} = \frac{F(C \cap [0, y])}{F(C)} = \mathbb{P}(X_1 \leq y | X_1 \in C), \quad y \geq 0.$$

Además, se tienen las siguientes propiedades:

(a) Para la esperanza,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\int_A g dN \right) &= \int_A g(x) \mu(dx) \\
 &= \int_{B \times C} x (\Lambda \times F)(dt, dx) \\
 &= \int_B \Lambda(dt) \int_C x F(dx) \\
 &= \lambda |B| \int_C x F(dx).
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mathbb{E}(X_1) = \int_0^\infty x F(dx) \implies \mathbb{E}(X_1 | X_1 \in C) = \frac{\int_C x F(dx)}{F(C)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\int_A g dN \right) &= \lambda |B| F(C) \mathbb{E}(X_1 | X_1 \in C) \\
 &= (\Lambda \times F)(A) \mathbb{E}(X_1 | X_1 \in C).
 \end{aligned}$$

(b) Para la varianza,

$$\begin{aligned}
 \text{var} \left(\int_A g dN \right) &= \int_A (g(x))^2 \mu(dx) \\
 &= \int_{B \times C} x^2 (\Lambda \times F)(dt, dx) \\
 &= \int_B \Lambda(dt) \int_C x^2 F(dx) \\
 &= \lambda |B| \int_C x^2 F(dx).
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \int_0^\infty x^2 F(dx) \implies \mathbb{E}(X_1^2 | X_1 \in C) = \frac{\int_C x^2 F(dx)}{F(C)}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \text{var} \left(\int_A g dN \right) &= \lambda |B| F(C) \mathbb{E}(X_1^2 | X_1 \in C) \\ &= (\Lambda \times F)(A) \mathbb{E}(X_1^2 | X_1 \in C). \end{aligned}$$

3.3. Siniestros Ocurridos No Reportados

Trabajaremos nuevamente con el modelo de seguros pero supongamos que la i -ésima reclamación, que sucede al tiempo T_i con un monto de X_i , no se reporta en el momento en el que ocurre, sino al tiempo $T_i + D_i$.

Tomamos $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ los puntos de un proceso Poisson homogéneo con intensidad $\lambda > 0$, $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ v.a. iid con función de distribución F_D y $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ v.a. iid con función de distribución F . Además, suponemos independencia entre los tres procesos.

Como las transformaciones medibles de medidas aleatorias Poisson son medidas aleatorias Poisson, $(T_i + D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forman una PRM, que denotaremos N_{T+D} , en $(0, \infty)$ y con medida media en el intervalo $(0, t]$ dada por:

$$\begin{aligned} \nu(0, t] &= \mathbb{E}(N_{T+D}(0, t]) \\ &= (\Lambda \times F_D)(\{(s, r) : 0 < s + r \leq t\}) \\ &= \int_0^t \int_0^{t-r} (\Lambda \times F_D)(ds, dr) \\ &= \lambda \int_0^t \int_0^{t-r} ds F_D(dr) \\ &= \lambda \int_0^t (t - r) F_D(dr). \end{aligned}$$

Tomando $u = t - r$,

$$\begin{aligned}\nu(0, t] &= \lambda \int_0^t u F_D(du) \\ &= \lambda \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(0, t]} D_1).\end{aligned}$$

Si marcamos a N_{T+D} con $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid, entonces $(T_i + D_i, X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forman una $PRM(\nu \times F)$ en $E = (0, \infty)^2$.

Hasta el momento hemos utilizado transformaciones medibles de medidas aleatorias Poisson y medidas aleatorias Poisson marcadas; con estas herramientas hemos podido crear un modelo que tome en cuenta el tiempo de ocurrencia de siniestro, el tiempo en que se reporta y su monto.

Más adelante se verá que se puede considerar información extra sobre los siniestros sin complicar mucho la teoría que se utiliza.

3.4. Factores Externos

En esta sección consideramos de nuevo el caso en la que la i -ésima reclamación sucede al tiempo T_i , se reporta al tiempo $T_i + D_i$ y tiene un monto X_i .

Trabajamos con un proceso estocástico en particular y obtenemos el valor presente del monto, el cual, dependiendo de cómo sea la tasa, se puede interpretar como que hubo inflación o que se tenía el dinero invertido y se obtuvo una tasa de interés nominal positiva.

Inclusive, se podría utilizar la tasa real, que toma en cuenta tanto a la inflación como a la tasa de interés. Es decir, si la inflación es mayor a la tasa de interés nominal, la tasa real resulta ser negativa; si la inflación es menor a la tasa de interés nominal, la tasa real resulta ser positiva.

Entonces, $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son los puntos de un proceso Poisson, $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son v.a. iid con función de

distribución F_D , $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son v.a. iid con función de distribución F y los tres son independientes. Los puntos $(T_i + D_i, X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forman una $PRM(\nu \times F)$, que denotaremos $N_{T+D, X}$, en $E = (0, \infty)^2$.

Sea $f(y, x)$ una función medible no negativa en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ tal que $f(y, x) = 0 \quad \forall y < 0$.

Sea $t \geq 0$ y tomemos el siguiente proceso estocástico:

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_E f(t - y, x) N_{T+D, X}(dy, dx) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f(t - (T_i + D_i), X_i). \end{aligned}$$

Nótese que si $T_i + D_i > t$ entonces $f = 0$. Por esto, solamente tomamos en cuenta el número de puntos $(T_i + D_i)$ que caen en el intervalo $(0, t]$.

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_{T+D}(0, t]} f(t - (T_i + D_i), X_i).$$

Si hacemos $f(y, x) = e^{-ry} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(y) \cdot x$, con $r \in \mathbb{R}$, entonces:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_{T+D}(0, t]} e^{-r(t - (T_i + D_i))} X_i.$$

Ahora, tomando $\tau = t - (T_i + D_i) \geq 0$, para cada i , $VP(X_i) = e^{-r\tau} X_i$ es el valor presente del monto X_i .

(I) Si $r > 0$, se tiene que $VP(X_i) < X_i$.

Esto indica que el monto X_i valía más en el pasado, por lo tanto, hubo una inflación.

(II) Si $r < 0$, se tiene que $VP(X_i) > X_i$.

Esto indica que el monto X_i vale más ahora que en el pasado, por lo que se puede decir que se tenía el monto invertido y r se puede interpretar como la tasa de interés.

Además, tomando $r = 0$ y $D_i = 0$ c. s., obtenemos el modelo clásico de Cramér-Lundberg.

3.5. Modelo General

A partir de este momento generalizamos el modelo anterior y consideramos el tiempo en que ocurre la i -ésima reclamación, su monto, el tiempo en que fue reportado y el tiempo en que se termina de pagar el monto.

Gracias a la teoría que hemos desarrollado sobre las medidas aleatorias Poisson, el proceso resultante es también una medida aleatoria Poisson y podemos trabajar con él con las herramientas que ya tenemos.

Por último, dado un tiempo $T > 0$, el cual se interpreta como el presente, dividiremos el espacio en el que se trabaja de acuerdo a si en ese momento la reclamación ya se pagó, no se ha pagado pero ya se reportó, ya ocurrió pero no se ha reportado o todavía no ocurre.

Veremos también cómo se comportan el número de reclamaciones y el monto acumulado en esos conjuntos.

El modelo general tiene las siguientes características:

- (a) La i -ésima reclamación se asocia con (T_i, D_i, S_i, X_i) . Donde el siniestro ocurre a tiempo T_i con un monto X_i , se reporta al tiempo $T_i + D_i$ y el monto se paga en el intervalo $[T_i + D_i, T_i + D_i + S_i]$.
- (b) La secuencia de tiempos $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es un proceso Poisson homogéneo en $(0, \infty)$ con intensidad $\lambda > 0$.
- (c) La secuencia de montos $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son v.a. iid. con distribución F en $(0, \infty)$.
- (d) La secuencia $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son v.a. iid. con distribución F_D en $(0, \infty)$.
- (e) La secuencia $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son v.a. iid. con distribución F_S en $(0, \infty)$.
- (f) $(T_i), (X_i), (D_i)$ y (S_i) son independientes.

Nótese que, bajo estas hipótesis, (T_i, D_i, S_i, X_i) forman una medida aleatoria Poisson marcada, a la cual denotaremos N .

Se verifica que N es una $PRM(\Lambda \times F_D \times F_S \times F)$ debido a que la secuencia $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forma una $PRM(\Lambda)$, que es independiente de la secuencia $(D_i, S_i, X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, con distribución $F_D \times F_S \times F$.

El espacio de estados en el cual toma valores la medida aleatoria Poisson N es $E = (0, \infty)^4$, y dado un tiempo $T > 0$, se puede dividir en los siguientes conjuntos:

$$(I) E_P = \{(t, d, s, x) : t + d + s \leq T\}$$

describe a las reclamaciones que ya fueron **pagadas** a tiempo T .

$$(II) E_{RNP} = \{(t, d, s, x) : t + d \leq T < t + d + s\}$$

describe a las reclamaciones que ya fueron **reportadas** pero aún **no** completamente **pagadas** a tiempo T .

$$(III) E_{ONR} = \{(t, d, s, x) : t \leq T < t + d\}$$

describe a las reclamaciones **ocurridas** pero que **no** han sido **reportadas** a tiempo T .

$$(IV) E_{NO} = \{(t, d, s, x) : T < t\}$$

describe a las reclamaciones **no ocurridas** a tiempo T .

Nótese que $E = E_P \cup E_{RNP} \cup E_{ONR} \cup E_{NO}$.

El conjunto E_{NO} contiene una infinidad de puntos de N con probabilidad 1. Para evitar esta situación, se puede trabajar con el riesgo de la aseguradora hasta un horizonte de tiempo finito $T_0 < \infty$, con $T < T_0$.

Ahora, para cada tiempo $T > 0$, el número de reclamaciones

$$N(E_P), N(E_{RNP}), N(E_{ONR}), N(E_{NO})$$

son variables aleatorias Poisson independientes y se pueden ver de la siguiente forma:

$$(I) N(E_P) = \#\{i \geq 1 : T_i + D_i + S_i \leq T\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_i + D_i + S_i \leq T\}},$$

$$(II) \quad N(E_{RNP}) = \#\{i \geq 1 : T_i + D_i \leq T < T_i + D_i + S_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_i + D_i + S_i \leq T < T_i + D_i + S_i\}},$$

$$(III) \quad N(E_{ONR}) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq T < T_i + D_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_i \leq T < T_i + D_i\}},$$

$$(IV) \quad N(E_{NO}) = \#\{i \geq 1 : T < T_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T < T_i\}}.$$

Visto de esta manera es más claro notar que $N(E_{NO}) = \infty$ a menos de que se trabaje con un horizonte de tiempo finito.

Utilizando el mismo razonamiento que en la sección 3.2, el monto acumulado es una integral Poisson en cada uno de los conjuntos:

$$S(E_q) = \int_{E_q} x dN = \sum_{i:(T_i, D_i, S_i, X_i) \in E_q} X_i,$$

para $q = P, RNP, ONR, NO$.

Por último, recordemos que los puntos $(T_i + D_i)$ forman una $PRM(\nu)$, donde:

$$\nu(0, t] = \lambda \int_0^t u F_D(du) = \lambda \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(0, t]} D_1).$$

Por otro lado, y con los mismos argumentos que para $(T_i + D_i)$, los puntos $(T_i + D_i + S_i)$ forman una $PRM(\gamma)$, donde:

$$\gamma(0, t] = \lambda \int_0^t u F_{D+S}(du) = \lambda \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(0, t]} (D_1 + S_1)).$$

En este caso, F_{D+S} , la función de distribución de $(D_i + S_i)$, se define con la convolución,

$$F_{D+S}(y) = \int_0^y F_D(y-s) F_S(ds), \quad y \geq 0.$$

Es posible trabajar también con la medida aleatoria Poisson generada por los puntos $(T_i, T_i + D_i, T_i + D_i + S_i, X_i)$, que tiene medida media $(\Lambda \times \nu \times \gamma \times F)$.

3.6. Modelo General Actualizado

En la sección anterior vimos el modelo general, donde (T_i, D_i, S_i, X_i) son los puntos de una medida aleatoria Poisson N con medida media $(\Lambda \times F_D \times F_S \times F)$. Ahora, se tienen observaciones disponibles que representan el tiempo de ocurrencia, el tiempo de reporte, el tiempo de liquidación y el monto de algunos siniestros a los que ha tenido que hacer frente una aseguradora.

Lo que se hace es tomar en cuenta las observaciones que se tienen para actualizar el modelo. La estadística Bayesiana (Apéndice C) es un enfoque estadístico que se basa en la Regla de Bayes para modificar lo que se supone (el modelo teórico) con base en lo que se observa (los datos), es por esta razón que será de gran utilidad en esta sección. Se utiliza la estadística Bayesiana para obtener las funciones de distribución predictivas de las secuencias.

La idea de obtener las funciones de distribución predictivas se obtuvo de [10], en ese artículo se hace solamente para la sucesión de los montos, mientras que nosotros actualizamos todas las sucesiones y las unimos para formar una nueva medida aleatoria Poisson. A continuación se explicará lo que se pretende hacer.

Necesitamos que el modelo resultante sea también una medida aleatoria Poisson, para así poder utilizar la teoría que se tiene hasta el momento. Por esto, empezaremos recordando cuáles son las características que tiene N que la convierten en una medida aleatoria Poisson.

Si observamos con detenimiento las características del modelo general, es necesario que la sucesión $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sea una $PRM(\Lambda)$ y que los procesos sean independientes. Por otro lado, no es necesario que los procesos $(X_i), (D_i), (S_i)$ tengan alguna distribución en particular.

Por esta razón, en la sucesión $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ solamente actualizaremos el parámetro λ (con el Estimador de Máxima Verosimilitud), para que siga siendo un proceso Poisson. Si se requiere más información sobre el Estimador de Máxima Verosimilitud y las razones por las que es un buen estimador, es recomendable consultar [7].

Para actualizar las sucesiones $(X_i), (D_i), (S_i)$, suponemos independencia en sus respectivos parámetros y utilizamos las herramientas de estadística bayesiana para obtener sus distribuciones predictivas.

Las sucesiones resultantes tendrán las siguientes características:

- (a) La sucesión de tiempos $(T_i^\pi)_{i \in \mathbb{N}}$ es un proceso Poisson homogéneo en $(0, \infty)$ con intensidad $\lambda^\pi > 0$, donde λ^π representa el parámetro actualizado.
- (b) La sucesión de montos $(X_i^\pi)_{i \in \mathbb{N}}$ son v.a. iid con distribución F^π en $(0, \infty)$, donde F^π representa la función de distribución predictiva de X .
- (c) La sucesión $(D_i^\pi)_{i \in \mathbb{N}}$ son v.a. iid. con distribución F_D^π en $(0, \infty)$, donde F_D^π representa la función de distribución predictiva de D .
- (d) La sucesión $(S_i^\pi)_{i \in \mathbb{N}}$ son v.a. iid. con distribución F_S^π en $(0, \infty)$, donde F_S^π representa la función de distribución predictiva de S .

Además, ya que se supuso independencia entre los parámetros de $(X_i), (D_i)$ y (S_i) , las sucesiones resultantes $(T_i^\pi), (D_i^\pi), (S_i^\pi)$ y (X_i^π) son independientes.

Se tiene entonces que la sucesión $(T_i^\pi)_{i \in \mathbb{N}}$ es una $PRM(\Lambda^\pi)$, donde Λ^π representa λ^π veces la medida de Lebesgue, que es independiente de la sucesión $(D_i^\pi, S_i^\pi, X_i^\pi)_{i \in \mathbb{N}}$, con distribución $F_D^\pi \times F_S^\pi \times F^\pi$.

Al marcar a (T_i^π) con $(D_i^\pi, S_i^\pi, X_i^\pi)$, se obtiene una medida aleatoria Poisson con espacio de estados $E = (0, \infty)^4$ y medida media $(\Lambda^\pi \times F_D^\pi \times F_S^\pi \times F^\pi)$.

3.7. Aplicación con datos reales

En esta sección tomaremos el modelo general y lo actualizaremos tomando en cuenta datos reales de una aseguradora. Para poder hacer esto, se explica el estimador de máxima verosimilitud, se define lo que es la familia exponencial de distribuciones y sus distribuciones a priori conjugadas, para utilizarlas y facilitar el desarrollo. Por último, obtendremos una cota inferior

razonable para la reserva, utilizando las herramientas presentadas en las secciones anteriores.

Tenemos 94 observaciones que se muestran en la tabla 3-5, al final de esta sección, son siniestros a los que hace frente una aseguradora con los siguientes datos: ramo, pago $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, fecha de ocurrencia $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, fecha de reporte $(T_i + D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y fecha de liquidación $(T_i + D_i + S_i)_{i \in \mathbb{N}}$. El ramo nos indica que se trata de una aseguradora de daños.

Teniendo estos datos, se hicieron modificaciones para obtener las secuencias que nos interesan, que son $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, y se hicieron histogramas de cada una. En este último punto hay que tomar en cuenta que, para la secuencia $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, nos interesa el histograma del proceso de conteo originado por

$$N(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_A(T_i) = \#\{i \geq 1 : T_i \in A\}, \quad \text{para } A \text{ un boreliano de } (0, \infty),$$

por lo que hubo que hacer un poco más de modificaciones.

3.7.1. Distribución de los datos

A cada secuencia se le otorga una distribución y parámetros adecuados, de acuerdo a cuáles se ajustaban mejor a la curva originada por los datos, con simulaciones en \mathbb{R} .

Esto es, se sabe que todas las secuencias están formadas por variables aleatorias positivas, por lo que distribuciones como la *normal* o *t de Student* quedan descartadas, luego se tomaron las distribuciones más utilizadas en teoría del riesgo que cumplen esta condición, como son la distribución *gamma*, *lognormal* y *pareto*, y se probó con diferentes parámetros para ajustar las curvas.

Por otro lado, el proceso de conteo originado por $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ debe ser un proceso Poisson, por lo que sólo es necesario obtener un parámetro λ adecuado. Las gráficas se muestran a continuación, donde las simulaciones tienen color gris y los datos tienen color negro.

Tiempos de ocurrencia

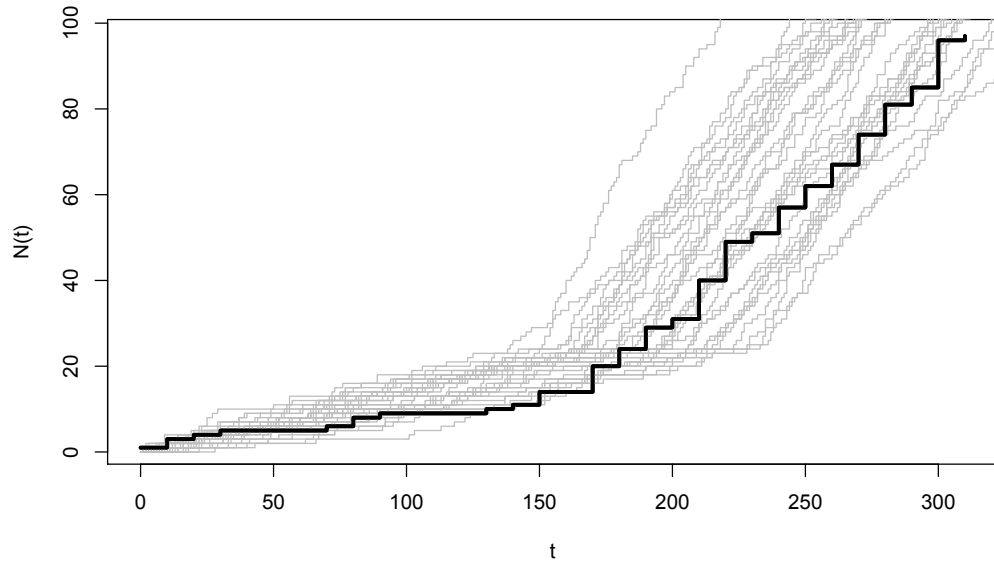


Figura 3-1: $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$

Tiempos de reporte

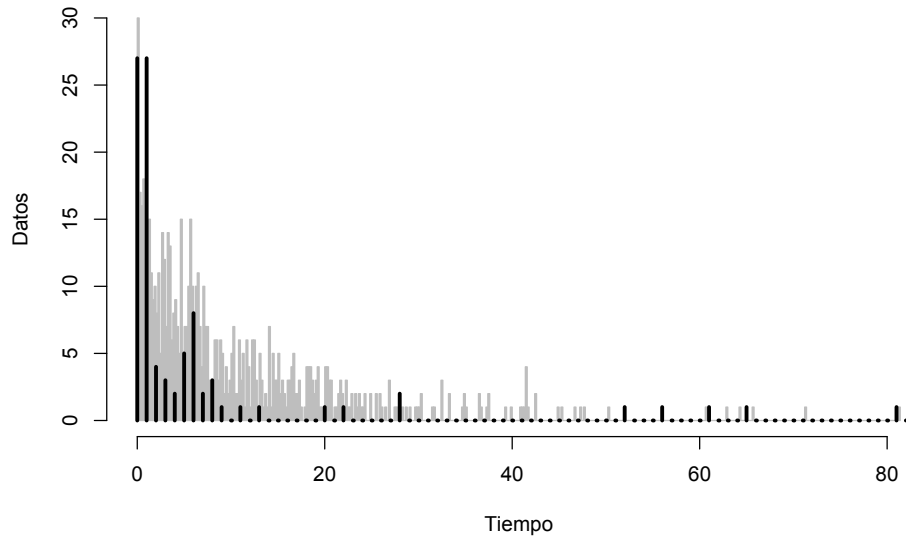


Figura 3-2: $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$

Tiempos de pago

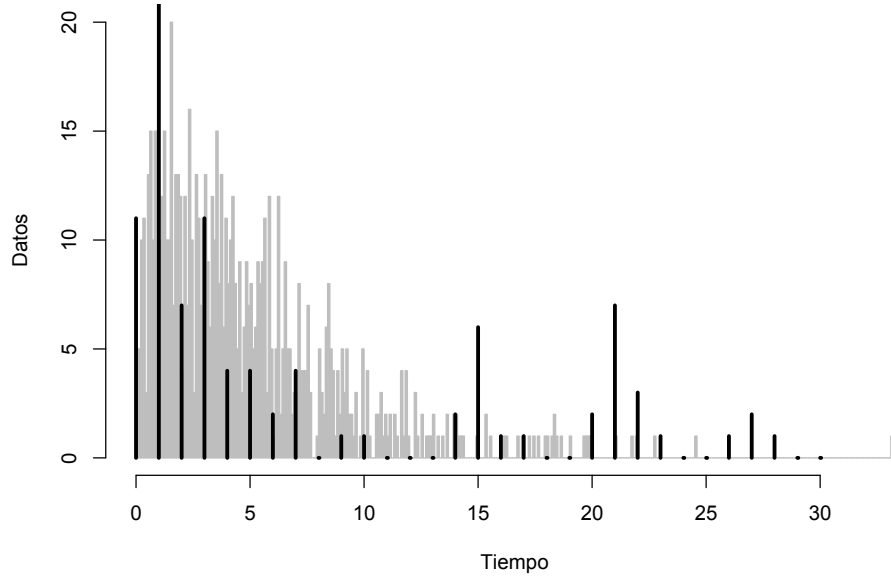


Figura 3-3: $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$

Montos

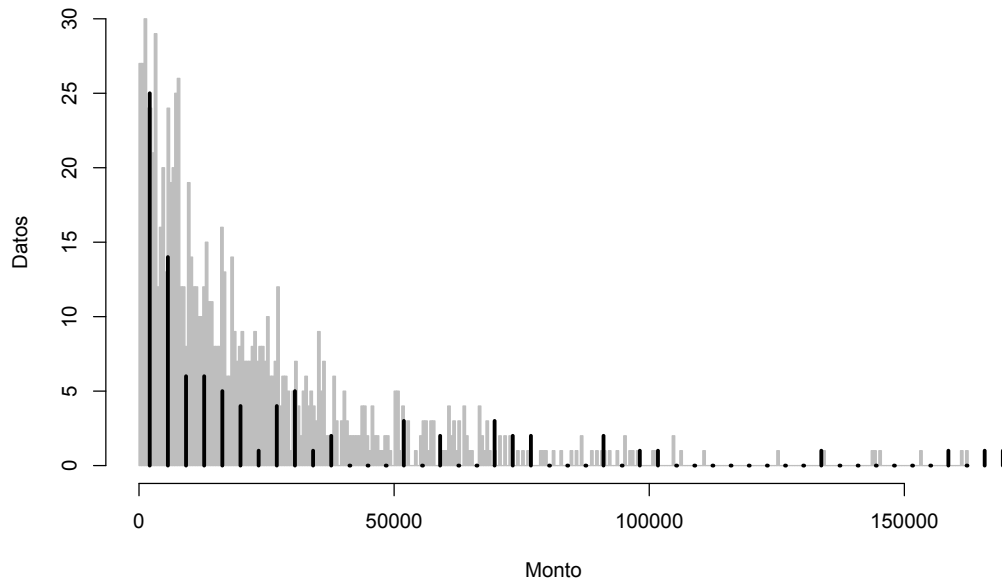


Figura 3-4: $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$

Se obtuvo lo siguiente:

- (I) $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es la suma de dos procesos Poisson: $(T_i^1)_{i \in \mathbb{N}}$ con $\lambda_1 = 0.13$ y $(T_i^2)_{i \in \mathbb{N}}$ con $\lambda_2 = 0.8$,
dada por $(T_i) = (1/10)(T_i^1) + (9/10)(T_i^2)$,
- (II) $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tiene distribución $gamma(0.8, 12.5)$,
- (III) $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tiene distribución $gamma(1.5, 10/3)$,
- (IV) $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tiene distribución $gamma(0.8, 25000)$,
- (V) $(T_i), (D_i), (S_i)$ y (X_i) son independientes.

Las secuencias $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tienen distribución $gamma(\alpha, \beta)$, dada por:

$$f(x) = \beta^\alpha x^{\alpha-1} \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)},$$

donde se cumple que $\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}$.

En [1], se presenta la siguiente distribución:

$gamma - gamma(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \alpha)$:

$$Gg(x|\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \alpha) = \mathcal{C} \frac{x^{\alpha-1}}{(\tilde{\beta} + x)^{\tilde{\alpha}+\alpha}}, \quad x > 0,$$

donde $\mathcal{C} = \tilde{\beta}^{\tilde{\alpha}} \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+\alpha)}{\Gamma(\tilde{\alpha})\Gamma(\alpha)}$.

La esperanza y varianza de una variable aleatoria Y con distribución $gamma - gamma(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \alpha)$ están dadas por:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\alpha\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha} - 1}, \quad var(Y) = \frac{\tilde{\beta}^2(\alpha^2 + \alpha(\tilde{\alpha} - 1))}{(\tilde{\alpha} - 1)^2(\tilde{\alpha} - 2)}.$$

La parte importante es que esta distribución se puede obtener de la siguiente manera:

$$Gg(x|\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \alpha) = \int_0^\infty Ga(x|\alpha, \beta) Ga(\beta|\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) d\beta,$$

donde Ga representa la distribución *gamma*.

Entonces, ya que el modelo de los datos es $gamma(\alpha, \beta)$, si el parámetro β tuviera una distribución a posteriori que también fuera $gamma(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, obtendríamos de una manera muy sencilla la distribución predictiva de x_{n+1} . Esto ya que la distribución $Ga(x|\alpha, \beta)Ga(\beta|\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ sería la información disponible de x_{n+1} y β dado $\mathcal{D}_n = (x_1, \dots, x_n)$ y, como se está integrando sobre β , se obtiene la marginal de x_{n+1} dado \mathcal{D}_n , mejor conocida como su distribución predictiva.

Ahora, si la distribución muestral de los datos es $gamma(\alpha, \beta)$, con α conocido, y la distribución a priori de β es $gamma(\alpha_0, \beta_0)$, entonces la distribución a posteriori de β dado \mathcal{D}_n es $gamma(\alpha_0 + n, \beta_0 + \sum_{i=1}^n x_i)$. Esta propiedad se verá más claramente y se demostrará al abordar las siguientes proposiciones.

3.7.2. Hiperparámetros para un modelo $gamma(\alpha, \beta)$

Cuando el modelo es de la familia exponencial de distribuciones, es decir, una familia de distribuciones con densidades de la forma

$$f_{\theta}(x) = h(x) \exp\{\theta R(x) - \Psi(\theta)\}, \quad \theta, R(x) \in \mathbb{R}^d,$$

existe una clase de distribuciones a priori conjugadas:

$$\pi(\theta|\xi, \lambda) \propto \exp\{\theta\xi - \lambda\Psi(\theta)\}.$$

Estas distribuciones a priori son tales que las distribuciones a posteriori resultantes son de la misma forma, es decir, pueden verse como

$$\pi(\theta|\xi'(x), \lambda'(x)),$$

donde $\xi'(x)$ y $\lambda'(x)$ están definidas en términos de la observación x .

En otras palabras, el modelo de probabilidad de la observación x tiene un parámetro θ (o

el modelo podría ser de dos parámetros pero nos interesa hacer inferencia sobre uno en particular). A este parámetro le damos una distribución que, si es de cierta forma, se puede controlar la forma que tendrá la distribución a posteriori de θ dado ξ, λ, x .

Proposición 3.7.2.1. *(Forma a posteriori de los hiperparámetros)*

Dada una observación que proviene de una distribución de la familia exponencial con parámetro θ , que tiene una distribución a priori de la forma $\pi(\theta|\xi, \lambda) \propto \exp\{\theta\xi - \lambda\Psi(\theta)\}$ y una distribución a posteriori de la forma $\pi(\theta|\xi'(x), \lambda'(x))$, entonces:

$$\xi'(x) = \xi + R(x), \quad \lambda'(x) = \lambda + 1.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \pi(\theta|\xi, \lambda, x) &\propto l(\theta|x)\pi(\theta) \\ &= h(x) \exp\{\theta R(x) - \Psi(\theta)\} \exp\{\theta\xi - \lambda\Psi(\theta)\} \\ &= h(x) \exp\{\theta R(x) - \Psi(\theta) + \theta\xi - \lambda\Psi(\theta)\} \\ &= h(x) \exp\{\theta(\xi + R(x)) - \Psi(\theta)(\lambda + 1)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $\xi'(x) = \xi + R(x)$, $\lambda'(x) = \lambda + 1$. □

Corolario 3.7.2.2. *Se puede generalizar la proposición anterior y obtener la forma a posteriori de los hiperparámetros para el caso en que se tienen n observaciones, $\mathcal{D}_n = (x_1, \dots, x_n)$,*

$$\begin{aligned} \pi(\theta|\xi, \lambda, \mathcal{D}_n) &\propto l(\theta|\mathcal{D}_n)\pi(\theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i)\pi(\theta) \\ &= \prod_{i=1}^n [h(x_i) \exp\{\theta R(x_i) - \Psi(\theta)\}] \exp\{\theta\xi - \lambda\Psi(\theta)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^n h(x_i) \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^n R(x_i) - m\Psi(\theta) \right\} \exp\{\theta\xi - \lambda\Psi(\theta)\} \\
&= \prod_{i=1}^n h(x_i) \exp \left\{ \theta \left(\xi + \sum_{i=1}^n R(x_i) \right) - \Psi(\theta)(\lambda + n) \right\}.
\end{aligned}$$

Entonces, se tiene que $h(\mathcal{D}_n) = \prod_{i=1}^n h(x_i)$ y los hiperparámetros tienen la siguiente forma:

$$\xi'(\mathcal{D}_n) = \xi + \sum_{i=1}^n R(x_i), \quad \lambda'(\mathcal{D}_n) = \lambda + n.$$

Hasta este punto hemos obtenido la forma a posteriori que tienen los hiperparámetros cuando la distribución de los datos es de la familia exponencial y la distribución del parámetro es una distribución conjugada, por lo que falta ver que la distribución *gamma* es de la familia exponencial para obtener el resultado.

Proposición 3.7.2.3. *(La distribución gamma como parte de la familia exponencial)*

La función de distribución gamma tiene dos parámetros que son reales positivos: α y β .

Fijando α y tomando $\theta = \beta$, esta distribución forma parte de la familia exponencial de distribuciones, es decir, puede verse de la siguiente forma:

$$Ga(x|\alpha, \beta) = h(x) \exp\{\beta R(x) - \Psi(\beta)\}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
Ga(x|\alpha, \beta) &= \beta^\alpha x^{\alpha-1} \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \exp\{-\beta x + \alpha \ln \beta\} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \exp\{(-x)\beta - (-\alpha \ln \beta)\} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$h(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad R(x) = -x, \quad \Psi(\beta) = -\alpha \ln \beta.$$

□

Dadas estas proposiciones, tenemos que la distribución muestral de los datos es $gamma(\alpha, \beta)$ y, si la distribución a priori de β fuera $gamma(\alpha_0, \beta_0)$, entonces la distribución a posteriori de β dado \mathcal{D}_n sería $gamma(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, con $\tilde{\alpha} = \alpha_0 + n$ y $\tilde{\beta} = \beta_0 + \sum_{i=1}^n x_i$.

Entonces, debemos darle a cada parámetro $\beta_D, \beta_S, \beta_X$, de las secuencias $(D_i), (S_i), (X_i)$ respectivamente, una distribución a priori $gamma$ con parámetros adecuados.

3.7.3. Actualización del parámetro de $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$

A la secuencia $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ le actualizaremos el parámetro con el método de máxima verosimilitud, de modo que no cambie su distribución y siga siendo un proceso Poisson.

El método de máxima verosimilitud, como su nombre lo indica, requiere que el estimador del parámetro maximice la verosimilitud, es decir, que la derivada de la verosimilitud con respecto al parámetro sea cero. En ocasiones se trabaja con la derivada del logaritmo de la verosimilitud con respecto al parámetro para hacer el desarrollo más sencillo y sin alterar el resultado.

En este caso nos interesa el estimador de máxima verosimilitud para la distribución exponencial, cuya verosimilitud es:

$$l(\lambda|\mathcal{D}_n) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i},$$

tomando en cuenta que se tienen n datos observados.

El logaritmo de la verosimilitud es:

$$\log(l(\lambda|\mathcal{D}_n)) = n \log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

Sacamos su derivada e igualamos a cero.

$$\frac{\partial \log(l(\lambda|\mathcal{D}_n))}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Despejando se obtiene lo siguiente:

$$\frac{n}{\hat{\lambda}} = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Además, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \log(l(\lambda|\mathcal{D}_n))}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{2\lambda^2},$$

que es negativo, por lo tanto, $\hat{\lambda}$ es un máximo de la función de verosimilitud.

En nuestro caso, se observa que los datos provenientes de (T_i^1) son 15 y suman 165 y los datos provenientes de (T_i^2) son 79 y suman 136. Se tiene entonces que:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{15}{165} = 0.09, \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{79}{136} = 0.5809.$$

3.7.4. Actualización de $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$

Para actualizar las sucesiones $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, debemos darle a cada parámetro, β_D, β_S y β_X , una distribución a priori *gamma* con parámetros adecuados.

Esto lo haremos tomando en cuenta que, para Y una v.a. *gamma* (α, β) , su esperanza es $\mathbb{E}(Y) = \frac{\alpha}{\beta}$. Queremos que esta esperanza sea muy similar a β_k , para $k = D, S, X$, y que la varianza, dada por $\text{var}(Y) = \frac{\alpha}{\beta^2}$, sea lo más grande posible. Esto último para darle más libertad, ya que no se tiene información previa del parámetro.

Una vez hecho esto, obtendremos la distribución a posteriori de β_k dado \mathcal{D}_n para $k = D, S, X$. Es decir, obtendremos los parámetros $\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k, \alpha_k$, para $k = D, S, X$, de la función de distribución *gamma-gamma*, que será la función de distribución predictiva de d_{n+1}, s_{n+1} y x_{n+1} respec-

tivamente.

Se obtuvieron los siguientes resultados:

- (I) β_D tiene una distribución a priori $gamma(0.5, 0.04)$,
- (II) β_S tiene una distribución a priori $gamma(0.1, 0.03)$,
- (III) β_X tiene una distribución a priori $gamma(25, 0.0001)$.

Se tiene que si la distribución de los datos es $gamma(\alpha, \beta)$, con α conocido, y la distribución a priori de β es $gamma(\alpha_0, \beta_0)$, entonces la distribución a posteriori de β dado \mathcal{D}_n es $gamma(\alpha_0 + n, \beta_0 + \sum_{i=1}^n x_i)$. Calculemos entonces los parámetros de las distribuciones a posteriori de β_k , para $k = D, S, X$.

Para β_D , $\alpha_0 = 0.5$, $\beta_0 = 0.04$, $n = 94$ y $\sum_{i=1}^n d_i = 528$, por lo tanto, su función de distribución a posteriori dado $\mathcal{D}_n = (d_1, \dots, d_n)$ es $gamma(94.5, 528.04)$.

Para β_S , $\alpha_0 = 0.1$, $\beta_0 = 0.03$, $n = 94$ y $\sum_{i=1}^n s_i = 699$, por lo tanto, su función de distribución a posteriori dado $\mathcal{D}_n = (s_1, \dots, s_n)$ es $gamma(94.1, 699.03)$.

Para β_X , $\alpha_0 = 25$, $\beta_0 = 0.001$, $n = 94$ y $\sum_{i=1}^n x_i = 2'964,977.03$, por lo tanto, su función de distribución a posteriori dado $\mathcal{D}_n = (x_1, \dots, x_n)$ es $gamma(119, 2'964,977.03)$.

Obtenemos el siguiente modelo actualizado:

- (I) $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es la suma de dos procesos Poisson: $(T_i^1)_{i \in \mathbb{N}}$ con $\lambda_1 = 0.09$ y $(T_i^2)_{i \in \mathbb{N}}$ con $\lambda_2 = 0.5808$, dada por $(T_i) = (1/10)(T_i^1) + (9/10)(T_i^2)$,
- (II) $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tiene distribución $gamma - gamma(94.5, 528.04, 0.8)$,
- (III) $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tiene distribución $gamma - gamma(94.1, 699.03, 1.5)$,
- (IV) $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tiene distribución $gamma - gamma(119, 2'964,977.0301, 0.8)$,

(v) $(T_i), (D_i), (S_i)$ y (X_i) son independientes.

3.7.5. Cálculo de una cota inferior para la reserva

$N = (T_i, D_i, S_i, X_i)$ es una medida aleatoria Poisson marcada con espacio de estados $(0, \infty)^4$ y medida media $(\Lambda \times F_D \times F_S \times F_X)$, donde Λ representa λ veces la medida de Lebesgue y $\lambda = (1/10)(0.09) + (9/10)(0.5808)$. F_D, F_S y F_X son las distribuciones *gamma – gamma* de las secuencias $(T_i), (D_i)$ y (X_i) , con sus respectivos parámetros.

Por otro lado, tomando $g(t, d, s, x) = x$ y basándonos en el trabajo realizado en la sección 3.2, se tiene que, dado A un conjunto,

$$\int_A g dN \text{ es el monto acumulado en } A.$$

Tenemos también que $\mathbb{E}(\int_A g dN) = \mu(A)\mathbb{E}(X_1|X_1 \in B)$, donde B es la proyección de A al espacio donde toma valores X y μ es la medida media de la medida aleatoria Poisson N .

Sabemos que la esperanza del monto acumulado es una cota inferior para la reserva, ya que al menos debe de tener suficiente dinero para cubrir los gastos proyectados para siniestros en el siguiente periodo, sin tomar en cuenta otros detalles como son gastos administrativos.

Se fija un horizonte de tiempo, por ejemplo un año, para obtener la reserva que debería tener la aseguradora para hacer frente a los siniestros que podrían ocurrir en un año.

Si tomamos el tiempo $t = 0$ como el presente y queremos hacer la estimación para un año, fijamos $T = 360$. No queremos restringir a si ya los reportaron, ya los pagó la aseguradora o un rango en el monto, solamente queremos estimar los siniestros que hayan ocurrido del tiempo 0 al tiempo 360, por lo que las restricciones quedan como sigue:

(a) $T_i \leq 360,$

(b) $D_i \in (0, \infty),$

(c) $S_i \in (0, \infty)$,

(d) $X_i \in (0, \infty)$.

Por lo tanto el conjunto que nos interesa es

$$A = (0, 360) \times (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Entonces, como la medida media de N es $\mu = \Lambda \times F_D \times F_S \times F_X$, la medida de A es

$$\mu(A) = \lambda|(0, 360)|F_D((0, \infty))F_S((0, \infty))F_X((0, \infty)).$$

Como las secuencias (D_i) , (S_i) y (X_i) toman valores en $(0, \infty)$, se tiene que $F_D((0, \infty)) = 1$, $F_S((0, \infty)) = 1$ y $F_X((0, \infty)) = 1$.

Esto es, $\mu(A) = 360\lambda$. Para nuestro caso, $\lambda = (1/10)(0.09) + (9/10)(0.5808) = 0.5319$, por lo que $\mu(A) = 191.4786$.

Se tiene que $\mathbb{E}\left(\int_A g dN\right) = \mu(A)\mathbb{E}(X_1|X_1 \in B)$ y en nuestro caso $B = (0, \infty)$, por lo tanto $\mathbb{E}(X_1|X_1 \in B) = \mathbb{E}(X_1)$, que es una variable aleatoria *gamma-gamma*(119, 2'964, 977.03, 0.8), entonces:

$$\mathbb{E}(X_1) = 0.8 \frac{2'964, 977.03}{119 - 1} = 20, 101.54.$$

Por lo tanto, la esperanza del monto acumulado en el próximo año es

$$\mathbb{E}\left(\int_A g dN\right) = \mu(A)\mathbb{E}(X_1) = (191.48)(20, 101.54) = 3'849, 015,$$

que es una cota inferior para la reserva de la aseguradora en el próximo año, considerando que los datos disponibles eran en realidad todas las observaciones que tuvo la aseguradora en el año pasado.

El cálculo de esta manera ya que la intención es considerar todos los siniestros que posiblemente ocurrirán en el siguiente año, por esta razón, sólo restringimos el tiempo de ocurrencia

y no pusimos otras restricciones ni a los otros tiempos ni al monto.

Una posible modificación sería si la aseguradora hubiera contratado un reaseguro para evitar pérdidas demasiado grandes, por ejemplo, que no pasen de un monto de 1'000,000, caso en el que $X_i \in (0, 1'000,000)$. Por otro lado, si quisiéramos modelar los siniestros de la reaseguradora, se tendría que $X_i \in (1'000,000, \infty)$.

También, si quisiéramos considerar solamente los siniestros ocurridos no reportados, sería necesario trabajar con la medida aleatoria Poisson mencionada en la última parte de la sección 3.4, que es generada por los puntos $(T_i, T_i + D_i, T_i + D_i + S_i, X_i)$, donde las restricciones que se tendrían que hacer son: $T_i \in (0, 360)$ y $T_i + D_i \in (360, \infty)$.

De esta forma y siguiendo lo que se hizo en la sección 3.5, se puede dividir el espacio de estados dependiendo de las características que tienen los siniestros. Así, se podría obtener una reserva apropiada para un tipo de siniestros en particular.

RAMO	PAGOS	OCURRENCIA	REPORTE	LIQUIDACION
INCENDIO	3699	24/08/11	24/08/11	26/08/11
INCENDIO	77156.8	14/10/11	14/10/11	17/10/11
INCENDIO	89788.79	25/10/11	26/10/11	26/10/11
INCENDIO	7075	08/08/11	08/08/11	23/08/11
INCENDIO	20354.78	30/10/11	31/10/11	03/11/11
INCENDIO	60049	02/11/11	03/11/11	25/11/11
INCENDIO	169399	20/11/11	23/11/11	19/12/11
INCENDIO	2300	24/11/11	29/11/11	20/12/11
INCENDIO	2120	24/11/11	29/11/11	20/12/11
INCENDIO	166574	13/11/11	14/11/11	28/11/11
INCENDIO	2656	24/11/11	30/11/11	21/12/11
INCENDIO	4925	24/11/11	30/11/11	22/12/11
INCENDIO	13654.44	02/11/11	02/11/11	25/11/11
INCENDIO	324.19	13/06/11	13/06/11	22/06/11
INCENDIO	35487.03	20/07/11	10/09/11	26/09/11
INCENDIO	7990	20/04/11	22/11/11	19/12/11
INCENDIO	2399	30/10/11	31/10/11	03/11/11
MISCELANEOS	1609.4	22/02/11	01/03/11	29/03/11
MISCELANEOS	30389.42	02/10/11	02/10/11	06/10/11
MISCELANEOS	13348.33	30/08/11	31/08/11	02/09/11
MISCELANEOS	4718.88	14/07/11	14/07/11	14/07/11
MISCELANEOS	2916.96	04/09/11	05/09/11	05/09/11
MISCELANEOS	75000	09/09/11	09/09/11	12/09/11
MISCELANEOS	2424.84	27/08/11	07/09/11	12/09/11
MISCELANEOS	9518.73	26/10/11	26/10/11	26/10/11
MISCELANEOS	1088.65	31/08/11	06/09/11	08/09/11
MISCELANEOS	15434.68	15/02/11	28/02/11	10/03/11
MISCELANEOS	178191.75	16/08/11	17/08/11	18/08/11
MISCELANEOS	29858.62	28/08/11	29/08/11	29/08/11
MISCELANEOS	59000	22/09/11	22/09/11	23/09/11
MISCELANEOS	4000	28/08/11	29/08/11	29/08/11
MISCELANEOS	38712.61	21/10/11	22/10/11	25/10/11
MISCELANEOS	1762.44	12/04/11	13/04/11	14/04/11
MISCELANEOS	3495.29	05/06/11	25/08/11	26/08/11
MISCELANEOS	557.74	14/07/11	20/07/11	20/07/11
MISCELANEOS	4000	19/09/11	19/09/11	20/09/11
MISCELANEOS	17244.2	19/09/11	19/09/11	20/09/11
MISCELANEOS	16842.6	11/11/11	12/11/11	17/11/11
MISCELANEOS	30366.06	01/10/11	02/10/11	04/10/11
MISCELANEOS	3438.4	12/10/11	18/10/11	21/10/11
MISCELANEOS	18350.9	02/10/11	10/10/11	11/10/11
MISCELANEOS	4000	11/02/11	11/03/11	18/03/11
MISCELANEOS	52269.76	18/10/11	18/10/11	19/10/11
MISCELANEOS	5678.95	29/09/11	29/09/11	05/10/11

RAMO	PAGOS	OCURRENCIA	REPORTE	LIQUIDACION
MISCELANEOS	16788.19	28/11/11	28/11/11	02/12/11
MISCELANEOS	28868.8	20/09/11	20/09/11	21/09/11
MISCELANEOS	53527.1	24/10/11	25/10/11	25/10/11
MISCELANEOS	26677.31	23/11/11	23/11/11	24/11/11
MISCELANEOS	8295.62	29/08/11	26/09/11	27/09/11
MISCELANEOS	37000	29/11/11	30/11/11	21/12/11
MISCELANEOS	10149.23	08/11/11	08/11/11	10/11/11
MISCELANEOS	26709.57	24/04/11	24/04/11	25/04/11
RAMOS TECNICOS	2950	27/09/11	01/10/11	04/10/11
RAMOS TECNICOS	6231.02	24/10/11	25/10/11	25/10/11
RAMOS TECNICOS	1737.76	23/06/11	23/08/11	24/08/11
RAMOS TECNICOS	2410	22/07/11	28/07/11	01/08/11
RAMOS TECNICOS	12700	23/08/11	24/08/11	25/08/11
RAMOS TECNICOS	1400	17/10/11	17/10/11	18/10/11
RAMOS TECNICOS	4871.88	31/08/11	08/09/11	08/09/11
RAMOS TECNICOS	3600	22/09/11	14/10/11	17/10/11
RAMOS TECNICOS	6200	29/07/11	01/08/11	02/08/11
RAMOS TECNICOS	10515	28/09/11	06/10/11	07/10/11
RAMOS TECNICOS	2190	31/08/11	01/09/11	02/09/11
RAMOS TECNICOS	13545.15	28/07/11	17/08/11	18/08/11
RAMOS TECNICOS	3960	31/07/11	02/08/11	04/08/11
RAMOS TECNICOS	24000	04/11/11	09/11/11	09/11/11
RAMOS TECNICOS	1570.45	04/10/11	13/10/11	17/10/11
RAMOS TECNICOS	2502.15	23/10/11	27/10/11	03/11/11
RAMOS TECNICOS	3513.15	10/11/11	10/11/11	11/11/11
RAMOS TECNICOS	2700	26/10/11	27/10/11	03/11/11
RAMOS TECNICOS	2491.28	02/11/11	04/11/11	07/11/11
RESP. CIVIL	11010	14/10/11	14/10/11	17/10/11
RESP. CIVIL	28194.59	12/08/11	12/08/11	18/08/11
RESP. CIVIL	1627.92	16/11/11	17/11/11	22/11/11
RHM	75917.88	31/08/11	01/09/11	21/09/11
RHM	13167.23	09/10/11	10/10/11	27/10/11
RHM	5940	04/09/11	06/09/11	21/09/11
RHM	174674.22	08/08/11	08/08/11	23/08/11
RHM	96673.44	24/08/11	24/08/11	26/08/11
RHM	27989.1	30/06/11	25/08/11	26/08/11
RHM	31145.4	30/06/11	02/07/11	23/08/11
RHM	132510.6	08/08/11	08/08/11	23/08/11
RHM	8376.32	04/02/11	31/08/11	15/09/11
RHM	15750.9	09/08/11	16/08/11	23/08/11
RHM	68782.06	08/08/11	08/08/11	23/08/11
RHM	159400.11	31/08/11	01/09/11	21/09/11

RAMO	PAGOS	OCURRENCIA	REPORTE	LIQUIDACION
RHM	4859.1	04/09/11	07/09/11	21/09/11
RHM	91791.42	24/11/11	30/11/11	21/12/11
RHM	72578.53	24/11/11	29/11/11	20/12/11
RHM	69640.16	24/11/11	30/11/11	22/12/11
RHM	18250.2	21/07/11	22/07/11	27/07/11
RHM	6840	28/08/11	29/08/11	30/08/11
RHM	51153.68	17/07/11	18/07/11	23/08/11
RHM	19744.96	16/07/11	19/09/11	22/09/11
RHM	101358.21	24/11/11	29/11/11	20/12/11
TERREMOTO	70326.1	20/04/11	22/11/11	19/12/11

Figura 3-5: Datos

Conclusiones

En este trabajo se aborda una manera de utilizar la teoría de medidas aleatorias para modelar el riesgo en que incurre una aseguradora.

La parte “bonita” es que, después de abordar toda la teoría, la aplicación con los datos reales se vuelve un proceso bastante sencillo, ya que todo se simplifica porque las medidas aleatorias Poisson tienen propiedades bastante útiles y que resultan ser fáciles de probar.

Por esta razón, y como se mencionó en la última subsección, es posible considerar diferentes tipos de riesgo con tan sólo ponerle una condición a la medida aleatoria Poisson; o ver el problema tanto desde la perspectiva de la aseguradora como desde la perspectiva de una reaseguradora, y los cambios que se deben hacer para abordar los diferentes problemas son mínimos.

Vale la pena remarcar que nuestra manera de modelar el riesgo (con medidas aleatorias Poisson) es una generalización de la teoría del riesgo clásica, donde se utiliza un proceso Poisson para modelar la sucesión de tiempos.

Esto es, utilizando la notación clásica,

$$N((-\infty, t], A) = N_t(A), \quad A \in \mathcal{E},$$

donde \mathcal{E} puede ser los Borelianos de \mathbb{R} .

Adicionalmente, en nuestro modelo es posible incorporar detalles de los siniestros como son

el tiempo de ocurrencia, el tiempo que tarda en reportarse, el tiempo en que se termina de pagar y el monto, sin complicar la teoría.

Por otra parte, si queremos generalizar, hay que considerar lo siguiente: para una cartera que al principio tenía N contratos (en nuestro caso desconocido) llegan 95 reclamaciones en promedio. Es decir, por cada individuo se tienen $\frac{95}{N}$ reclamaciones. Si luego se modifica el tamaño de la cartera a M , entonces el promedio del número de reclamaciones deberá ser de $M \left(\frac{95}{N}\right)$.

De esta forma, es posible considerar el mismo modelo para el siguiente año, sin tener que hacer nuevamente los cálculos y ajustándolo con los nuevos datos, al igual que como lo hicimos aquí, con estadística Bayesiana.

Apéndice A

Teorema de Dynkin

Teorema A.1. (*Teorema de Dynkin*)

Sea X un conjunto. Sea \mathcal{T} un π -sistema de subconjuntos de X y \mathcal{L} un λ -sistema de subconjuntos de X tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$.

Entonces $\sigma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{L}$.

Demostración. Mencionaremos primero las siguientes propiedades:

- (I) Un λ -sistema que también es un π -sistema es una σ -álgebra.
- (II) Como la intersección de λ -sistemas es también un λ -sistema, definimos al más pequeño λ -sistema que contiene a P de la siguiente forma:

$$l(P) := \bigcap_{\Lambda \lambda\text{-sistema y } P \subset \Lambda} \Lambda.$$

- (III) Sea P un π -sistema, entonces $l(P)$ es una σ -álgebra.

Ahora, demostraremos el teorema, suponiendo las propiedades anteriores.

Sabemos que \mathcal{T} es un π -sistema y \mathcal{L} un λ -sistema tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$.

Entonces, por definición de $l(\mathcal{T})$ como el más pequeño λ -sistema que contiene a \mathcal{T} , tenemos,

$$l(\mathcal{T}) \subset \mathcal{L},$$

Pero $\mathcal{I}(\mathcal{T})$ es una σ -álgebra y $\mathcal{T} \subset \mathcal{I}(\mathcal{T})$
 entonces,

$$\sigma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{I}(\mathcal{T}),$$

Por lo tanto,

$$\sigma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{L}.$$

Esto completa el argumento, por lo que sólo falta demostrar las propiedades I y III.

Propiedad (I): Un λ -sistema que también π -sistema, es una σ -álgebra

Dadas las propiedades de λ -sistema y π -sistema, basta probar que es cerrado bajo uniones numerables. Tomemos entonces $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{L}$.

Sabemos que \mathcal{L} es cerrado bajo uniones numerables crecientes, entonces tenemos que escribir E_1, E_2, \dots como conjuntos crecientes de \mathcal{L} .

$$\begin{aligned} H_1 &= E_1 \\ H_2 &= E_1 \cup E_2 = (E_1^c \cap E_2^c)^c \\ H_3 &= H_2 \cup E_3 = (H_2^c \cap E_3^c)^c \\ &\vdots = \vdots \\ H_j &= H_{j-1} \cup E_j = (H_{j-1}^c \cap E_j^c)^c \end{aligned}$$

Estos conjuntos $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son crecientes, por lo que

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \cup_{n \in \mathbb{N}} H_n \in \mathcal{L}.$$

Propiedad (III): P un π -sistema $\Rightarrow \mathcal{I}(P)$ es una σ -álgebra

Por definición, $l(P)$ es un λ -sistema y hemos visto que un λ -sistema que también es un π -sistema es una σ -álgebra.

Entonces, basta probar que $l(P)$ es un π -sistema, es decir, $A, B \in l(P) \Rightarrow A \cap B \in l(P)$.

Primero, tomamos un $A \in l(P)$ fijo y

$$l_A = \{B \subset X : A \cap B \in l(P)\},$$

Demostraremos que l_A es un λ -sistema,

(a) $\emptyset \in l_A$ ya que $\emptyset \in l(P)$

(b) Si $B \in l_A$ entonces $A \cap B^c = A \setminus (A \cap B)$ es una diferencia propia de conjuntos en $l(P)$ y por ello está en l_A

(c) Si $B_1, B_2, \dots \in l_A$ tal que $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$, tenemos $(A \cap B_1), (A \cap B_2), \dots \in l(P)$, por definición de l_A .

Observamos que $(A \cap B_1) \subseteq (A \cap B_2) \subseteq \dots \Rightarrow \cup_n (A \cap B_n) \in l(P)$ ya que $l(P)$ es λ -sistema.

Entonces, $A \cap (\cup_n B_n) \in l(P) \Rightarrow \cup_n B_n \in l_A$.

Por lo tanto, l_A es cerrado bajo uniones numerables crecientes.

Ahora, tomamos $A \in P$ fijo y observamos que $A \cap B \in P \subset l(P) \quad \forall B \in P$, pero por definición de l_A , ésto significa que $B \in l_A$. Entonces $P \subset l_A$.

Además, por definición de $l(P)$ como el más pequeño λ -sistema que contiene a P , se tiene,

$$l(P) \subset l_A.$$

Entonces, si nos fijamos en la definición de l_A , esto quiere decir que

$$A \cap B \in l(P) \text{ para } A \in P, B \in l(P).$$

Utilizaremos $B \in l(P)$ fijo y l_B .

Por la propiedad (I), l_B es un λ -sistema y hemos probado que $P \subset l_B$, lo que implica

$$l(P) \subset l_B.$$

Esto significa que $A \cap B \in l(P) \quad \forall A \in l(P)$ pero tenemos $B \in l(P)$ fijo, por lo que

$$A \cap B \in l(P) \text{ para } A, B \in l(P).$$

Entonces, $l(P)$ es un π -sistema.

Con esto, queda terminada la prueba.

□

Apéndice B

Propiedades del proceso Poisson compuesto

Definición B.1. (*Proceso Poisson compuesto*)

Sea M una v.a. con función distribución Poisson con parámetro μ y sean $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias iid independientes de M .

Sea $Y = \sum_{i=1}^M Z_i$, a Y se le llama “proceso Poisson compuesto”.

Propiedad B.2. (*Esperanza de Y*)

Sea $Y = \sum_{i=1}^M Z_i$ un proceso Poisson compuesto.

Entonces, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(M)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^M Z_i\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^M Z_i \mid M = m\right) \mathbb{P}(M = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^m Z_i\right) \mathbb{P}(M = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(Z) \mathbb{P}(M = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} m \mathbb{E}(Z) \mathbb{P}(M = m) \\ &= \mathbb{E}(Z) \mathbb{E}(M)\end{aligned}$$

□

Propiedad B.3. (Varianza de Y)

Sea $Y = \sum_{i=1}^M Z_i$ un proceso Poisson compuesto.

Entonces, $\text{var}(Y) = \mathbb{E}(Z^2)\mathbb{E}(M)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \text{var}(Y) &= \text{var} \left(\sum_{i=1}^M Z_i \right) = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^M Z_i \right)^2 \right] - \left[\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^M Z_i \right) \right]^2 \\
 &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^M Z_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq M} Z_i Z_j \right) - [\mathbb{E}(M)\mathbb{E}(Z)]^2 \\
 &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^M Z_i^2 \right) + 2\mathbb{E} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq M} Z_i Z_j \right) - \mathbb{E}(M)^2 \mathbb{E}(Z)^2 \\
 &= \mathbb{E}(M)\mathbb{E}(Z^2) + 2\mathbb{E} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq M} Z_i Z_j \right) - \mathbb{E}(M)^2 \mathbb{E}(Z)^2
 \end{aligned}$$

Ahora, para el segundo término se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq M} Z_i Z_j \right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq m} Z_i Z_j \mid M = m \right) \mathbb{P}(M = m) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{1 \leq i < j \leq m} \mathbb{E}(Z_i Z_j) \mathbb{P}(M = m) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{1 \leq i < j \leq m} \mathbb{E}(Z)^2 \mathbb{P}(M = m) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m}{2} \mathbb{E}(Z)^2 \mathbb{P}(M = m) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1)}{2} \mathbb{E}(Z)^2 \mathbb{P}(M = m) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(Z)^2 \sum_{m=0}^{\infty} (m^2 - m) \mathbb{P}(M = m) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(Z)^2 [\mathbb{E}(M^2) - \mathbb{E}(M)]
 \end{aligned}$$

Por otro lado, como $M \sim Poi(\mu)$, $var(M) = \mu = \mathbb{E}(M)$.

Además, por definición de varianza,

$$var(M) = \mathbb{E}(M^2) - \mathbb{E}(M)^2$$

$$\implies \mathbb{E}(M^2) = var(M) + \mathbb{E}(M)^2 = \mathbb{E}(M) + \mathbb{E}(M)^2.$$

Entonces, regresando a la demostración de la $var(Y)$,

$$\begin{aligned} var(Y) &= \mathbb{E}(M)\mathbb{E}(Z^2) + \mathbb{E}(Z)^2[\mathbb{E}(M^2) - \mathbb{E}(M)] - \mathbb{E}(M)^2\mathbb{E}(Z)^2 \\ &= \mathbb{E}(M)\mathbb{E}(Z^2) + \mathbb{E}(Z)^2[\mathbb{E}(M) + \mathbb{E}(M)^2 - \mathbb{E}(M)] - \mathbb{E}(M)^2\mathbb{E}(Z)^2 \\ &= \mathbb{E}(M)\mathbb{E}(Z^2) + \mathbb{E}(Z)^2\mathbb{E}(M)^2 - \mathbb{E}(M)^2\mathbb{E}(Z)^2 \\ &= \mathbb{E}(M)\mathbb{E}(Z^2) \end{aligned}$$

□

Apéndice C

Herramientas de estadística Bayesiana

Cuando se tienen datos observados de cierto proceso y se requiere tener más información sobre ellos, es cuando se utiliza la estadística, principalmente para describir las características del proceso que produce los datos observados y para describir el comportamiento esperado de observaciones futuras provenientes del mismo proceso.

Un elemento importante de cualquier análisis estadístico es determinar un modelo de probabilidad que describa al proceso que genera los datos observados en función de un parámetro.

En el enfoque bayesiano, todo parámetro que forme parte del modelo de probabilidad utilizado para describir los datos también debe de tener una distribución de probabilidad que describa la información disponible sobre sus valores, es decir, los parámetros son tratados como variables aleatorias. Ésta es la principal diferencia con otros enfoques estadísticos.

La regla de Bayes, que mencionaremos a continuación, es la base para esta teoría.

Propiedad C.1. (*Regla de Bayes*)

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, A_1, \dots, A_n una partición de Ω y B un evento cual-

quiera, entonces:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)}.$$

Dada $\mathcal{D}_n = (x_1, \dots, x_n)$ una muestra de datos que se modelan como variables aleatorias iid. provenientes de una densidad $f_\theta = f(\cdot|\theta)$, con un parámetro desconocido $\theta \in \Theta$, la función de “verosimilitud” asociada es:

$$l(\theta|\mathcal{D}_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i).$$

Esta cantidad es de suma importancia para el análisis de la información que se obtiene de θ a partir de la muestra \mathcal{D}_n .

La estadística Bayesiana modifica la función de verosimilitud para convertirla en la distribución “a posteriori”, que es una función de probabilidad en Θ definida por:

$$\pi(\theta|\mathcal{D}_n) = \frac{l(\theta|\mathcal{D}_n)\pi(\theta)}{\int l(\theta|\mathcal{D}_n)\pi(\theta)d\theta}.$$

El factor $\pi(\theta)$ es la distribución “a priori” y representa la información disponible sobre θ antes de observar la muestra \mathcal{D}_n .

Existen diferentes razones para asignar la distribución a priori del parámetro, por ejemplo, se pueden utilizar iniciales conjugadas (cerradas bajo muestreo), iniciales no informativas (cuando no se tiene información previa del parámetro y se quiere ser lo más objetivo posible) o iniciales de referencia (cuando se tienen varios parámetros pero sólo se requiere inferencia sobre el parámetro de interés).

Nótese que la fórmula de la distribución a posteriori, $\pi(\theta|\mathcal{D}_n)$, puede también obtenerse al considerar que θ es una variable aleatoria con función de densidad $\pi(\theta)$ y que \mathcal{D}_n , condicionado a θ , se distribuye como $l(\theta|\mathcal{D}_n)$.

Considerando que la muestra $\mathcal{D}_n = (x_1, \dots, x_n)$ proviene de $f_\theta = f(\cdot|\theta)$ y que x_{n+1} es una

observación futura de la misma distribución, su distribución “predictiva” es:

$$\begin{aligned} f^\pi(x_{n+1}|\mathcal{D}_n) &= \int f(x_{n+1}|\theta, \mathcal{D}_n)\pi(\theta|\mathcal{D}_n)d\theta \\ &= \int f(x_{n+1}|\theta)\pi(\theta|\mathcal{D}_n)d\theta. \end{aligned}$$

La distribución predictiva se define de este modo ya que, dada la muestra \mathcal{D}_n , la información disponible de la pareja (x_{n+1}, θ) se resume con la distribución conjunta $g(x_{n+1}, \theta|\mathcal{D}_n) = f(x_{n+1}|\theta, \mathcal{D}_n)\pi(\theta|\mathcal{D}_n) = f(x_{n+1}|\theta)\pi(\theta|\mathcal{D}_n)$.

La función predictiva de x_{n+1} es solamente su marginal.

Bibliografía

- [1] Bernardo, José M. y Adrian F. M. Smith: *Bayesian Theory*. John Wiley & Sons, 1995.
- [2] Brzézniak, Zdzislaw y Tomasz Zastawniak: *Basic Stochastic Processes*. Springer, 1999.
- [3] Gaenssler, Peter: *Empirical Processes*. Lecture Notes-Monograph Series. Institute of Mathematical Statistics, 1983.
- [4] Gut, Allan: *Probability: A Graduate Course*. Springer Text in Statistics. Springer, 2005.
- [5] Kaas, Rob, Marc Goovaerts, Jan Dhaene y Michel Denuit: *Modern Actuarial Risk Theory*. Springer, 2004.
- [6] Kingman, J. F. C.: *Poisson Processes*. Oxford Studies in Probability. Oxford University Press, 1993.
- [7] Knight, Keith: *Mathematical statistics*. Texts in Statistical Science. Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [8] Marin, Jean Michel y Christian P. Robert: *Bayesian Core: A Practical Approach to Computational Bayesian Statistics*. Springer Text in Statistics. Springer, 2007.
- [9] Mikosch, Thomas: *Non Life Insurance in Mathematics. An Introduction with the Poisson Process*. Universitext. Springer-Verlag, segunda edición, 2009.
- [10] Norberg, Ragnar: *Prediction of Outstanding Liabilities in Non-Life Insurance*. ASTIN Bulletin 23, 1993.
- [11] Resnick, S. I.: *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*. Springer, New York, 1987.