

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE
MEXICO**

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN

**“HIPOTESIS DE LA DIDACTICA OPERATORIA A TOPICOS DE
MATEMATICAS PARA INGENIERIA “**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA.**

PRESENTA:

RAFAEL IBARROLA CEBALLOS

ASESOR:

MI. JUAN JOSE CONTRERAS ESPINOSA

CUAUTITLAN IZCALLI, MEXICO.

2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**“NO SE PUEDE CONOCER LO QUE
NO SE AMA, Y NO SE PUEDE AMAR LO
QUE NO SE CONOCE”**

**“COMO ENTENDER LAS MATEMATICAS, SI NO SE
CONOCEN Y MENOS AÚN SE COMPRENDEN”**

INTRODUCCIÓN

El enfoque integrador del conocimiento, tiene que ver con el humanismo y las corrientes psicológicas y pedagógicas de la educación y se halla en una completitud con el uso de las nuevas tecnologías informáticas, ya que la herramienta computacional ha avanzado de forma impresionante y permite demostrar que refuerza y ayuda a comprender el lenguaje matemático. De manera singular se revisará como la multidisciplinariedad, deja mejores dividendos al aprendizaje y comprensión matemática; como las actividades sobre los ejercicios, se revisara de lo básico a superior , en estos años de reforma y del tan sonado encuentro con las competencias para el desarrollo y la vida plena del individuo.

El debate sobre el beneficio de la matemática informal , sobre la formal, del uso de los métodos estrictos con ejercicios y mecanizaciones, a los métodos constructivistas, con actividades y el uso de nuevas tecnologías y software especializado en matemáticas; se abre a tomar la decisión a la mejor manera de usar recursos o medios para la enseñanza aprendizaje en pleno siglo XXI, y el constructo y la urdimbre que entretejen los investigadores en docencia , en comparación con los docentes en la enseñanza matemática se reúne para converger en las vías alternas y principales de la enseñanza matemática, por eso este trabajo precisa una parte de esas miradas e investigaciones propuestas para beneficio de la enseñanza desde básica a superior.

Por otro lado, la ruptura del paradigma conductista y operatorio hacia el constructivismo, vive un “boom”, como la nueva panacea, de la enseñanza. Sin embargo por sus propias investigaciones en enseñanza los teóricos, explican que, si es notable la superioridad del constructivismo y la educación por competencias que el aprendizaje solo operatorio hoy en día con el apoyo tecnológico. No hay duda de que los griegos, árabes, mayas, aztecas y culturas antiguas hasta la reciente; donde Newton y Leibniz ,

consumaron con las fluxiones y las antidervadas un proceso que no se construía, hasta ese tiempo, igual ocurre con la enseñanza una teoría , precede a otra buscado mejorar cada vez, así desde el escrito de Tomás S. Kuhn , en su libro “la estructura de las revoluciones Científicas”. En el siglo pasado con la denotación, de “*paradigma*” y sus efectos en el mundo, y sobre el método de acumulación de descubrimientos; sigue vigente su propósito; de que nada es para siempre en un mundo cambiante como lo establece: La teoría del caos, donde todo sistema permanece ordenado hasta que es imposible sostenerse , se quebranta en un caos para dar lugar a un nuevo sistema o cambio de paradigma, que regirá el nuevo orden mundial

La didáctica operatoria propuesta por Skinner, data del siglo pasado y es el antecedente al enfoque constructivista y de alguna forma sigue presente en la educación superior y la forma de enseñanza actual, por lo que se menciona como parte importante de la hipótesis hasta llegar al constructivismo y el uso de maple y Excel en la solución de derivadas.

La didáctica operatoria; presenta una sociedad utópica basada en el condicionamiento operante. Skinner al respecto, También escribió Ciencia y Conducta Humana, (1953) en el cual resalta la manera en que los principios del condicionamiento operatorio funcionan en instituciones sociales tales como, gobierno, el derecho, la religión, la economía y la educación (Dembo, 1994).

El trabajo de Skinner difiere de sus predecesores (condicionamiento clásico), en que él estudió la conducta operatoria (conducta voluntaria usada en operaciones dentro del entorno).

La concepción moderna del aprendizaje, requiere romper los paradigmas tradicionales del conductismo y mecanicismo clásico, que desde el principio

se lleva de manera generalizada en el sistema educativo nacional y sobre todo en el área de matemáticas desde el nivel inicial, hasta la educación superior en México. De aquí recuperamos la hipótesis de la didáctica operatoria, como un medio por el cuál se ha venido practicando parte de la enseñanza matemática y dada su modalidad, parece haber anclado en el gusto del docente para enseñar matemáticas, lo mismo que el conductismo ,mecanicista desde la enseñanza básica como superior.

Es una gran responsabilidad del docente , comprender el proceso cognitivo y servirse de las nuevas tecnologías para alcanzar una mejor comprensión, por parte de sus alumnos, pues es bien cierto que para aprender algo hay que practicarlo y en esta propuesta, se establece el principio de una metodología correlacional; entre dos tipos de software y la práctica matemática del calculo diferencial que de manera elemental debe conocerse para un primer semestre, en el área de ingeniería mecánica eléctrica del primer grado de licenciatura, revisando de manera básica algunos antecedentes, históricos, matemáticos que son elementales para su comprensión, es interesante recalcar que se pasa del nivel exploratorio, al descriptivo conforme se avanza en el capitulo y analiza el problema de enseñanza para atraer un poco más el interés en el aprendizaje analítico; pues la practica digitalizada conjuntamente con el trabajo en clase y fuera del aula deben dar como resultado un mejor aprovechamiento que es lo que se busca lograr finalmente como docente.

Se aprovecha parte de un espacio, para revisar con los agentes involucrados en este proceso de la FES-CUAUTITLAN, CAMPO CUATRO DE LA UNAM, con una muestra de los alumnos de primer semestre y docentes del mismo del área de Ingeniería Mecánica, en la licenciatura, llevando este estudio al nivel de cuasi- experimental y basándose en la resolución de cuestionarios ligados al punto de vista del mejoramiento de la enseñanza

usando el sistema Maple y EXCEL en la solución de algunas derivadas elementales.

Existe un recorrido muy grande, en este campo tan infinito de la aplicación del constructivismo en la docencia usando las nuevas tecnologías en todos los niveles educativos y campos de estudio, como la matemática que; seguramente en la posteridad rendirá mayores frutos y definitivamente es importante seguir dando pasos en la investigación educativa de nuestro país.

Tenemos dificultades con la mayoría de los alumnos desde primaria hasta nivel superior, en el gusto por el aprendizaje de las ciencias, en especial por; las matemáticas y en específico del cálculo diferencial, tema fundamental y puerta de entrada a las ingenierías y ciencias exactas en la educación superior y base del desarrollo tecnológico y científico de cualquier país.

Por lo que a través de este trabajo, se busca llegar al profesor en la educación superior que imparta la clase de matemáticas que contiene temas de análisis matemático, como el cálculo diferencial.

Con herramientas que le aporten una visión de la misión que tiene en su tarea como agente determinante en la planeación y práctica docente al ser, facilitador, animador, motivador, asesor, mediador y gestor, en el aprendizaje de sus alumnos.

En el capítulo uno, se trabaja con la justificación en la que se manifiesta la importancia de concentrar el esfuerzo pedagógico en los alumnos, por parte del que enseña, lo cual no se debe limitar a la mecanización y simple repetición de ejercicios con los métodos tradicionales, de papel, lápiz y

calculadora científica o repeticiones de ejercicios resueltos en los libros y al simple uso de pizarrón y explicación oral, como lo permite el método conductista y la hipótesis de la didáctica operatoria de Skinner. El proceso es mas complejo que esto, tanto para enseñar como para aprender, por eso es necesario el uso de métodos analíticos aplicando Excel y maple en la solución de problemas matemáticos , ya que hoy en día la tecnología se encuentra por todas partes, en diferentes formas, cubriendo demandas de mercados globales, pero poco se usa en una buena cantidad de instituciones de enseñanza, y poco se aprecia su lado matemático, como la parte natural para que fuera posible del modelo teórico ,al modelo real, cuya base, insisto es el cálculo diferencial y de su comprensión, entendimiento, gusto y conocimiento, depende la construcción de los nuevos cuadros calificados en ingeniería, científicos e investigadores.

Los objetivos de este estudio, se dirigen en la necesidad de recurrir al modelo de enseñanza cognitiva desde el enfoque constructivista y las nuevas tecnologías rompiendo algunos paradigmas de la didáctica operatoria en la hipótesis de que hasta ahora ha sido la que da “resultados” o la que más se aplica en la enseñanza de cálculo.

En el capitulo dos, se trabaja con un aspecto muy actual y necesario sobre la ética profesional, primicia del desarrollo educativo y en concreto teniendo al docente como líder moral y de facto, de sus alumnos; se manifiesta la tendencia sobre investigación educativa pasada y actual, en la educación desde básica hasta superior. en este capitulado se presenta las habilidades docentes necesarias para llevar acabo la práctica docente y finalmente, proyectando esta parte teórico-metodológico con algunas teorías del conocimiento que nos permiten entender mas fehacientemente, la practica docente , como una ciencia ,lógica, necesaria y congruente, que nos facilita ser mejores en el proceso enseñanza-aprendizaje, desde una metodología de investigación documental y descriptiva.

En el capítulo tres, se trabaja la parte de aplicación del software Excel y Maple,

Sobre ejercicios y actividades en la solución de cálculo diferencial, también desde un punto de vista descriptivo.

Y finalmente el capítulo cuatro, en una metodología que por su forma alcanza el nivel cuasi-experimental y da como resultado, el análisis de datos y la validación de la hipótesis sobre el apoyo del software en el proceso enseñanza –aprendizaje de manera significativa y funcional para el alumno de educación superior, en el área de matemáticas, centrada en el cálculo diferencial.

La materia de cálculo diferencial, no está en el gusto de la mayoría de los estudiantes, tal como se observa en el alumno de primaria, la aritmética y la geometría no es mucho de su agrado y poco la comprende, esto se verifica en diversos estudios y resultados de las propias instituciones a nivel nacional, teniendo la referencia de fuentes como la OCD, CONACYT, ENLACE, EXCALE, exámenes de diagnóstico y admisión de la propia UNAM y aún otros medios como los propios medios de información.

En el estudio de las matemáticas, se coloca la piedra angular de la construcción de las ciencias de las cuales en México se ha sobresalido muy poco y se requiere sembrar desde el infante este conocimiento básico, para que existan más y mejores cuadros calificados en las ingenierías y ciencias exactas donde la infraestructura económica en estas áreas crezca y le de el significado que el devenir le exige a esta nación, que depende demasiado de sus recursos naturales, como el petróleo y nada de su creatividad científico-tecnológica, lo que es urgente en el mundo globalizado para superar por sus profesionales los obstáculos tecnológicos; que generaran riqueza y desarrollo que de otro modo se perderán en el constante del México pasado, de pobreza, subdesarrollo y dependencia de sus habitantes

ÍNDICE

CAPITULO I

1.1 Justificación

1.2 Objetivo

1.2.1 Objetivo General

1.2.2 Objetivo Especifico

1.3 Planteamiento del problema

1.4 Hipótesis

1.5 Marco Teórico

Capítulo 2

3.1 Habilidades Docentes

3.2 Teorías del Conocimiento

3.3 Desarrollo de competencias y constructivismo

Capitulo 3

4.1 El aprendizaje

4.2 Excel, actividades en la resolución de derivadas

4.3 Maple aplicaciones en calculo

4.4 Ejercicios y problemas, análisis y comparación de resultados

Capítulo 4

5.1 Análisis de resultados de la propuesta

5.2 Validación de hipótesis

Conclusiones

Bibliografía

1.1 JUSTIFICACIÓN

Es importante señalar sobre la aplicación de la tecnología e informática, en la vida cotidiana de las personas, pues en la vida diaria en el contexto de la globalización no somos ajenos a ello, “En el contexto de la globalización, es imperativo que nuestro país adquiera mayor capacidad para participar en el avance científico y mundial y transformar esos conocimientos en aplicaciones útiles, sobre todo en materia de innovación tecnológica” PLAN

NACIONAL DE DESARROLLO,1995-2000,PODER EJECUTIVO FEDERA .MÉXICO. P.89

Conjuntar la tarea docente, con la realidad digital en la educación nos ayudara a comprender mejor los intereses de los niños y jóvenes de hoy.

La tendencia del aprendizaje operatorio de Skinner, prevalece y es el antecedente, hacia el enfoque constructivista, enfoque que actualmente da lugar a mejorar las competencias profesionales ,regidas por las normas de calidad y estándares a nivel nacional e internacional como, CONACYT ,OCD.

Por otro lado este trabajo ,adquiere una connotación multidisciplinaria, pues abarca campos de la ciencia matemática, en el área de físico matemáticas y humanísticas como, sociología, sicología, ciencias de la educación y derecho entre otras, trazo que denota la particularidad de la Universidad Nacional Autónoma de México ,cuya vanguardia han seguido otras universidades en este sentido.

El docente no puede perderse la oportunidad de usar la corriente constructivista del cognoscitivismo y al mismo tiempo de vincular esta tarea con el uso de la tecnología en especial el software educativo.

“En materia de política tecnológica e informática la acción del gobierno federal se orientara a impulsar la generación, difusión y aplicación de las innovaciones tecnológicas” ibidem

Así es muy favorable comprender que la tarea pedagógica, en el aula desde la educación básica hasta los niveles superiores debe retroalimentarse con la multiplicidad de las ciencias y las innovaciones tecnológicas.”Una tarea que merecerá gran atención será la enseñanza de la ciencia y la tecnología de niños y jóvenes, en todos los niveles educativos”.

ibidem

Sin duda una tarea que es muy importante en esta vinculación es la correlación de la ciencia matemática y la informática, y al mismo tiempo revisando los antecedentes desde lógica y conjuntos, pasando por el universo de los números y sus operaciones hasta llegar al álgebra, la geometría, la geometría analítica ,las funciones y los límites encontrando en este trabajo la solución para algunas derivadas sencillas ,con un software que normalmente se encuentra en cualquier máquina equipada con Office como es EXCEL y por otro lado las bondades de utilizar Maple en la comprobación de resultados y los pasos de estos en el cálculo diferencial. “vivimos en una sociedad tecnológica y por ello es importante que el estudiante se prepare para el uso adecuado de diferentes herramientas tecnológicas, como la calculadora, las hojas electrónicas, el Internet” .ibidem.

La aplicación práctica, en la enseñanza superior mediante el constructivismo basándose en estrategias didácticas, permitirá romper una parte de la enseñanza tradicional, conductista de ejercicios mecanizados y la simple

repetición de formulas, “El fracaso de la Reforma de la Matemática hacia los años 1960-1975, provocado fundamentalmente por la presentación de una matemática muy formal y fuertemente influenciada por la notación conjuntista, trajo consigo una reorganización de la enseñanza de la matemática.”

y por otro lado aprovechar el interés por el uso de software como EXCEL y Maple en estudiantes de primer semestre de licenciatura en la carrera de

Ingeniería mecánica, de la Facultad de estudios Superiores Cuautitlan, de la UNAM.

Nos permitirá observar y cuestionar a los mismos usuarios en una muestra representativa sobre las ventajas que observan en el uso de software y para el docente en el uso de las estrategias didácticas del constructivismo.

Y así demostrar la eficiencia y eficacia que esto produce en la enseñanza matemática en estos tiempos modernos.

1.2 OBJETIVO

Aplicar la didáctica del constructivismo, desplazando a la didáctica operatoria y emplear la informática en la enseñanza de las matemáticas y en especial de las derivadas de primer orden al resolverse en Excel y Maple.

1.2.1 OBJETIVO GENERAL

Resolver algunos problemas de derivadas, usando estrategias didácticas, constructivistas versus estrategias operatorias, al construir soluciones apoyado en la hoja electrónica de cálculo, comparando Sus resultados de manera analítica, lo mismo que con Maple.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

Distinguir la ventaja de usar métodos analíticos, para potenciar el aprendizaje del cálculo diferencial a través de recursos informáticos como la hoja electrónica de cálculo, contra el uso elemental operatorio y mecanizado, de la calculadora y la hoja de papel.

Permitir comparar las soluciones tradicionales, simplemente operatorias contra el uso de Maple, para verificar resultados en la solución de derivadas de primer orden desde el enfoque del trabajo de Constructivismo.

Verificar los resultados tanto de EXCEL y Maple, para llegar a conclusiones de problemas de derivadas en la vida cotidiana y en cualquier resolución de problemas de la ciencia matemática.

Estimar al trabajo constructivista, sobre la metodología conductista-mecanicista, en el proceso de enseñanza.

Distinguir los cinco grandes paradigmas psicopedagógicos; conductismo, humanismo, cognoscitivismo, sociocultural y constructivismo.

1. 4 HIPÓTESIS

En la actualidad a pesar de la digitalización de la vida moderna y las nuevas corrientes pedagógicas, todavía se sobreponen los métodos tradicionales de enseñanza del uso de lápiz y papel en la resolución del cálculo diferencial, basadas en la didáctica operatoria de Skinner.

Por lo que el uso de software informático, como Excel y Maple , aunado a una metodología de enseñanza constructivista, potencia el aprendizaje significativo en el alumno para aprender el calculo diferencial de una variable y de cualquier área de la ciencia matemática en cualquier nivel educativo.

HIPÓTESIS NULA

El uso de software informático, como Excel y Maple, aunado a una metodología de enseñanza constructivista, no potencia el aprendizaje significativo en el alumno para aprender el cálculo diferencial de una variable y de cualquier área de la ciencia matemática en cualquier nivel educativo.

HIPÓTESIS ALTERNAS

La práctica Docente en la Universidad, tiene mayores componentes mecanicistas, conductistas de la didáctica operatoria de Skinner, que constructivistas.

Excel por ser de uso más común en las computadoras facilitaría su uso y aprovechamiento en el aprendizaje de cálculo diferencial.

El uso de Maple es más especializado, por que no es tan común en los ordenadores.

1.5 MARCO TEORICO

La educación como fenómeno social, donde las generaciones anteriores “heredan”, su cultura a las generaciones nuevas, se ha visto continuamente en cambios paradigmáticos, de manera constante y revolucionada, sin embargo la práctica docente se vuelve, una práctica normalmente instructiva y conductista y no ha variado mucho ni en el nivel básico y menos en el universitario y lo que es más común, esta formula tradicionalista de enseñar se refleja más en la enseñanza de las matemáticas. “La observación cotidiana del aprendizaje que se alcanza tanto en los niveles escolares como en los universitarios muestra que, en general, el aprendizaje que logran los estudiantes es superficial y no consigue desarrollar al máximo su potencial intelectual”. BEAS, SANTA, UTRERAS, ENSEÑAR A PENSAR PARA APRENDER MEJOR, ALFAOMENGA 2ª EDICIÓN; MÉXICO, 2007.p.7.

Considerar opciones, para apoyar la práctica docente, donde el aprendizaje se torne significativo, funcional y permanente; no es de ninguna manera una tarea fácil sin embargo, contamos con elementos que las teorías cognitivas nos permiten y actualmente el avance tecnológico también, en específico los programas de software, como EXCEL y Maple, en soluciones de ejercicios y comprensión de la teoría matemática.

Los antecedentes teóricos de las corrientes cognitivas y como han afectado, tanto en el proceso docente como su resultante en el proceso aprendizaje, tienen que ver que las teoría conductista a fechas recientes ,la mecanización como un trabajo repetitivo y las memorización privilegiada sobre el razonamiento, nos indican que no se desarrollaron las habilidades intelectuales esperadas de la comprensión y el razonamiento ,margin que da lugar a perspectivas de visión y autoaprendizaje válidos para el mundo actual. “En educación, el proceso de enseñanza-aprendizaje fue

considerado, por varios años, desde la perspectiva del paradigma conductista, como un producto resultante de la asociación de estímulos y respuestas observables”. BEAS, SANTA, UTRERAS, ENSEÑAR A PENSAR PARA APRENDER MEJOR, ALFAOMENGA 2ª EDICIÓN; MÉXICO, 2007.p.13.

El paradigma ¹ constructivista, ha traído consigo aire fresco para la práctica docente en donde se ayuda a reflexionar al alumno, mediante sus saberes previos y a construir su conocimiento a través de la manipulación, desde un percepción más analítica y sustancialmente más significativa, por eso este enfoque de la corriente cognoscitiva si debe ayudar en todas las materias que haya que aprender y principalmente en matemáticas, desde todos los niveles y con la objetividad que la practica docente , requiere para beneficiar al alumno en el recorrido de su preparación profesional.”Hay que partir de las construcciones, hipotéticas de nuestros alumnos para que, con la creación de un conflicto cognitivo derivado de un problema específico, se inicie la construcción del nuevo conocimiento en relación sustantiva con esas ideas previas. Muchas veces en la escuela” matamos” el mundo hipotético del niño, del adolescente, del joven, por que la premura del tiempo para cubrir los contenidos no nos detenemos a explorar sus conocimientos previos y sobre todo, sus hipótesis. La construcción en la escuela es un proceso muy especial, muchas veces alejado de la realidad, por que le damos a los alumnos el conocimiento acabado y no ayudamos a reconstruir el proceso que dio lugar al mismo “.PIMIENTA PRIETO, CONSTRUCTIVISMO. PEARSON EDUCACIÓN,1ª EDIC.;MÉXICO 2005.p.4.

Olvidarnos de lo esencial que son el desarrollo de habilidades intelectuales y competencias para la vida a la hora de formar la planeación docente, impediría alcanzar los objetivos y metas propuestas en el aprendizaje para el alumno de unas manera más auto estructurante y significativa para el propio estudiante y la condición de facilitador del aprendizaje que debe tener el maestro no se cumpliría cabalmente.

Los procesos de aprendizajes deben fomentar, el vínculo con los conocimientos previos, que los sujetos socialicen los conocimientos con sus expectativas de vida, la adecuación de las asignaturas en la secuencia que requieren, que los estudiantes realicen actividades no ejercicios, que se evalúe el grado de desarrollo de sus capacidades, considerar los procesos y estrategias de pensamiento para nuevos saberes. “el logro de competencias básicas y para la vida requiere de situaciones integrales y hólísticas, que son propiciadas a partir de la intervención didáctica de los profesores”.RAMÍREZ, PÉREZ, SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS; TRIÍLLAS,.MÉXICO,2006.p11.

Vinculando esto con el proceso de enseñanza-aprendizaje y potenciando el uso de nuevas tecnologías, estaremos en condiciones de relacionar el cognoscitivismo desde el enfoque constructivista con el apoyo de software informático, de tal suerte que si la tecnología esta en nuestra vida cotidiana, debe de estar en la educación y los procesos de enseñanza aprendizaje del espacio áulico.

La sociedad moderna es más demandante, en todo sentido .Hay mayor información, la forma de los saberes se propaga más rápido que hace un decenio y lo mismo debe ocurrir con la practica computacional, desde el conocer tecnologías de celulares, red inalámbrica, Internet de banda ancha, fibra óptica, o el que va a través de la electricidad, etc.

Invita ya de por sí a que el docente se prepare en ese campo como un lenguaje más con el que se va a entender con el alumno.

1 Con la confrontación del idealismo contra el positivismo encontramos las primeras refererencias sobre paradigmas.

El paradigma refleja el dominio del pensamiento contra el nuevo empuje social que rompe ese control.,

Según Morín (1982) el paradigma rige el conocimiento y la forma de existencia humana.

Grinspun, en el año de 1974, define que además los paradigmas en su momento no solo refieren problemáticas sino también soluciones.

Los tipos de paradigmas, Metafísicos(referentes a mitos),sociológicos (referente a instituciones políticas o estado de derecho), Constructor cuando se utiliza un instrumento gramática o juego, cientifista o positivista corresponde a la meta científica, paradigma post positivista, realismo critico como una aproximación a la realidad .

Dentro del paradigma critico se incluye la ideología, Guba define tres paradigmas, diferencias ontológicas sobre la naturaleza de la realidad, diferencias epistemológicas, respecto de la naturaleza investigador objeto y metodologías sobre la naturaleza de los enunciados legales.

Paradigma constructivista;la realidad como construcción social, no hay diferencia entre el sujeto y el objeto su metodología es hermenéutica y dialéctica carece de la de progreso.

Interpretativo, sustituye las teorías de explicación predicción y control por las de comprensión significado y acción.

Se manejan tres planteamientos de paradigma y su análisis y en la modernidad, sistemas y análisis desde el punto de vista funcionalista.

Se plantean los niveles de aceptación de paradigmas, el consenso, vigencia, relacionabilidad, precisión de los límites y la realidad., códigos, criterios y prescripciones.

Para del Toro, la investigación cuantitativa es lineal, objetiva y estática su método hipotético deductivo.

Del mismo modo en el campo de la Educación Matemática, ya existe una variante al enseñanza de tipo tradicional que es la mera transmisión de la información que se caracteriza por una relación unidireccional entre el docente y el alumno; “un concepto de maestro y maestra como técnico que tienen el saber y la autoridad; el rol de docente como oradores; una excesiva

enseñanza y un escaso aprendizaje; una absorción pasiva e indiscriminada de información; una metodología pasiva, expositiva y estática; pasada en el dictado, la repetición, la memorización y ejercitación; un bajo nivel de interacción interpersonal; un total olvido al tratamiento de la diversidad”.

Manual del Profesor, Matemáticas. Edilar. España, 2002. p. 319

Considerando a los diversos autores, Skinner, Piaget, Ausbelt, Diaz-Barriga, etc. en quienes basamos el contexto explicativo para referir el enfoque constructivista y su comparativo con el conductista en la práctica docente actual, mientras que el trabajo de Bruner, Poyla, Dienes, entre otros, para referir respecto de la didáctica matemática, teniendo también consideraciones sobre la investigación de la enseñanza, educación y comunicación, uso de software en la educación de instituciones como ILCE, SEP, UNAM.

El uso de software en la educación tiene como propósito ayudar a que el alumno desarrolle actividades en lugar de hacer ejercicios que por sí mismo tienen un esquema mecanizado y simplemente se llega a un grado de mecanización sin el análisis requerido para el uso de ese conocimiento en su vida cotidiana, impidiendo el desarrollo de habilidades intelectuales que podrían dar más valor que la simple repetición y memorización. Por ello se reconoce al software matemático como un recurso didáctico y para nuestro caso el uso de Excel, maple, que redundará el primero por su fácil adquisición y el segundo por su manejabilidad, como alternativas para desarrollar los conceptos matemáticos, se plantearán algunos ejemplos con su actividades comparando uno con otro en sus resultados sin dejar de lado que existen mucho más programas para resolver situaciones problemáticas en matemáticas, como el derive, minitab, matemática, etc.

Para este estudio mencionaremos que Excel es una hoja de cálculo con la que se pueden hacer cálculos utilizando los operadores de la matemática básica como son: suma, resta, multiplicación, división, y también,

exponenciación, radicación, logaritmo y funciones especiales para el manejo de números reales y complejos.

“Los nuevas tecnologías integradas a la Enseñanza Matemáticas y otras disciplinas, en el caso particular del cálculo, la mayoría de los programas existentes se concentran en su aspecto simbólico-manipulativo, en Excel se muestra de una manera visual interactiva cuya ventaja es que esta cargado en casi todas las computadoras y se tiene su estudio a través de controles fáciles de usar. Estos mueves los valores de parámetros relevantes y las gráficas correspondientes de una manera continúa”. Mochón Cohen. El cálculo desde una perspectiva visual y dinámica. McGraw Hill. México 2004. p.v.

Una vez revisada la correspondencia para el análisis matemático, usando el software de Excel tomaremos en cuenta al software denominado maple y combinaremos ambos para producir una aprendizaje más significativo en el concepto de derivada para un aprendizaje inicial de cálculo en ingeniería mecánica. Hay que decir que maple es un sistema de computación simbólica y numérica que ofrece amplias posibilidades de visualización gráfica y experimentación gráfica que fue desarrollado originalmente por miembros del Symbolic Computation Group (SCG) en la University of Waterloo.

Además maple cuenta con un gran conjunto de herramienta gráficas, algoritmos numéricos puede estimar resultados, puede resolver problemas y como lenguaje de programación el estudiante puede desarrollar e idear programas, funciones, actividades, planteadas también por el docente. “El usuario puede crear hojas de trabajo interactivas basadas en cálculos matemáticos en la que puede cambiar datos o una ecuación y actualizar todas las soluciones inmediatamente, además el programa cuenta con una gran facilidad para estructurarlos, empleando herramientas, como los estilos o los hipervínculos, así como la posibilidad de traducir y exportar documentos realizados a otros formatos como HTML, RTF, XML, etc.

Una vez estructurado y considerado los aspectos anteriores estaremos en condiciones de potenciar al estudiante para aplicar su conocimiento a la resolución de problemas, tratamiento de actividades tanto al interior de la matemática como en otras disciplinas, ya que el lenguaje matemático le permite cuestionarse interpretar, razonar, analizar, criticar, decidir, aplicar, comprender, manipular, su conocimiento y elevar su competencia curricular en general. Mencionaremos algunos estándares curriculares y devaluación para la educación matemática. (NCTM).

Finalmente completando con los diversos autores la gran diversidad de planteamientos de alguno software comercial que ya de por sí, muestran ese requerimiento amigable e interactivo del tratamiento, de la ciencia matemática y su relación con la vida diaria, algunas series como Galileo, Lectus Vergara, páginas de Internet, serie matemática, entre otros.

Por otro lado, desde el punto de vista de la investigación educativa se planteará etnográficamente una muestra de estudiantes la carrera de Ingeniería Mecánica y Docentes de la misma que a través de la encuesta, expresarán sus consideraciones sobre la relevancia y trascendencia que en su vida cotidiana tendría o tiene el uso y conocimiento de software matemático para la resolución y comprensión de los conocimientos de esta materia en su opinión sobre cuanto se le facilitaría en uso de excel, por un lado y su comparativa con maple para el aprendizaje de la derivada y en la práctica docente la opinión del maestro basada en su experiencia su predicción sobre el beneficio de tener el apoyo de este software en su trabajo cotidiano y el beneficio para el aprendizaje significativo, funcional y permanente en sus alumnos de primer semestre de Ingeniería Mecánica al trabajar con derivadas de primer grado y primer orden, que es tema que nos ocupa en este estudio, pero sin dejar de entrever el beneficio que tenga para todos los conceptos matemáticos, y otras disciplinas de las ciencias exactas y humanísticas en el enfoque interdisciplinario que la vida moderna

exige en este mundo globalizado y altamente comunicado, con una visión diferente que el siglo pasado y cuya visión de futuro, va ser siempre el cambio continuo de paradigmas en todo sentido. “Existen diversas corrientes pedagógicas, una tradicionalista en la que los alumnos son solo receptáculos de información; otra de tecnología educativa que habla de cómo se enseña y no como se aprende y otra más didáctica crítica, en la cual el proceso se analiza y opera en forma integral.

La nuevas tecnologías de información, los desarrollos actuales en gestión del conocimiento y el análisis de los nuevos paradigmas de enseñanza-aprendizaje, obligan a un replanteamiento de que se enseña, para que, y como, pero sobre todo ¿cómo se aprende?”. Tercer foro sobre educación 2007, UNAM, Cuautitlán. 10 Nov. 2007. Octava época, volumen 20. p. 6

“Así pues, la gestión del conocimiento en el proceso de enseñanza aprendizaje para ahondar en el sustento teórico práctico y su aplicación práctica en este reto, las universidades tienen una oportunidad de desarrollar así mismas en lo que es más importante aún, contribuir de manera significativa al desarrollo del contexto social en que están enclavadas”. Ibidem.

CARACTERÍSTICAS DE LA EVALUACIÓN TRADICIONAL, OPERATORIA
Selectiva
Tensional
Inquisitoria
Convergente
Aislada
Sin propiedad
Unilateral

CARACTERÍSTICAS DE LA EVALUACIÓN DEL SIGLO XXI
Por Rubricas, Global
Estructurada
Interactiva
Personalizada
Informativa
Formativa
Comprometida
Tangible
Especializada

El docente del siglo XXI, no es el que lo sabe todo, sino en que su habilidad personal logra la reflexión y concientización en sus alumnos, dando la posibilidad de generar la oportunidad en otros para crecer en el aspecto de su vida profesional y personal como una parte de la gestión docente en el espacio aúlico.

Aprovechar las técnicas del aprendizaje constructivista para la enseñanza de matemáticas aplicadas a ingeniería, considerando el aspecto de las matemáticas denominado el análisis y en particular la derivada.

Entender el aprendizaje significativo como la meta de alumno y maestro, así mismo reconocer ese aprendizaje como un proceso constructivo interno, auto estructurante ya que el grado de aprendizaje depende del nivel de desarrollo cognitivo.

Su punto de partida, los conocimientos previos ya que es un proceso de reconstrucción de saberes culturales.

Los principios del aprendizaje constructivista aplicados al objetivo de la tesis se resumen a lo ya descrito. Sabiendo que el aprendizaje se facilita

gracias a la mediación o interacción con los otros. es muy importante esta mediación del maestro hacia el alumno

Ya que implica un proceso de reorganización interna de esquemas y que finalmente el aprendizaje se produce cuando entra en conflicto lo que el alumno ya sabe con lo que debe saber.

El futuro ingeniero es al final de la carrera un producto. Que se ha elaborado a través del proceso de aprendizaje y que mejor que este aprendizaje, sea constructivista, ya que finalmente el objetivo de esta tesis es mencionar ,el tipo de aprendizaje como un paso de entre muchos , siendo además su vinculación con la calidad de la educación superior y la vital importancia del maestro a tal enseñanza , esperando que aporte en algo este conocimiento que aún mínimo al solo mencionar un ángulo de los muchos que han de aparecer y quedarse en el largo camino de la modernización educativa a todos los niveles y que estarán para la formación de los cuadros calificados a nivel licenciatura y en especial de la carrera de Ingeniero Mecánico Electricista.



“Los “paradigmas”,
Son realizaciones científicas
Universalmente reconocidas
Que durante cierto tiempo
Proporcionan modelos de
Problemas y soluciones”
T.S. KUHN



CAPITULO 2

INVESTIGACION EDUCATIVA
HABILIDADES DOCENTES
TEORIAS DEL CONOCIMIENTO

PARADIGMAS.

Los diferentes paradigmas psicológicos han ido estableciéndose en distintas momentos históricos siempre respondiendo a necesidades sociales en general del proceso de enseñanza – aprendizaje escolarizado en particular.

El paradigma cognitivo no es una excepción. Su surgimiento y evolución es una manifestación de interés de la comunidad científica de dar respuestas y tener propuestas sobre la educación del pensamiento de las nuevas generaciones.

El paradigma cognitivo es filosóficamente hablando racionalista, dado su interés en el estudio de las representaciones internas del sujeto, independientemente de los eventos externos. En otras palabras, otorga cierta preponderancia al sujeto en particular su mente en el acto de conocimiento.

Desde la perspectiva epistemológica considera que el sujeto construye sus representaciones internas, es decir, mentales, (ideas, conceptos, etc.) de forma esencialmente individual, y éstas representaciones determinan la actividad del sujeto cognoscente.

La preocupación científica de los cognitivos se puede resumir en las respuestas que dan a las siguientes preguntas:

1- ¿Cómo se elaboran las representaciones mentales en el sujeto que conoce?

2- ¿Qué tipo de procesos mentales intervienen en la elaboración de las representaciones de la mente?

3- ¿Cómo las representaciones mentales guían los actos (internos o externos) del sujeto cognoscente en relación con su medio físico y social?

El paradigma de orientación cognitiva, también conocido en el ámbito educativo como psicología instruccional o psicología de la instrucción, o del procesamiento de la información, ha sido y es, uno de los paradigmas más fuertes de la psicopedagogía desde el punto de vista teórico y metodológico, y de los más fructíferos en cuanto a propuestas educativas innovadoras.

En una época caracterizada, entre otras cosas, por la revolución en las comunicaciones, más aún de las telecomunicaciones y de la informática y de su mutua interrelación: la telemática y por la explosión de información científica, técnica y cultural, más que de tratar de que el hombre y la mujer la “asimile” toda, que es imposible dado su volumen y complejidad, la preocupación se enfoca prioritariamente, hacia cómo hacerlo, más aún cómo saber hacerlo, para en sucesivas aproximaciones conocer, comprender, aceptar o rechazar total o parcialmente, transformar, criticar y crear. Es decir discriminar la información, realmente útil para su propósito curricular o teórico.

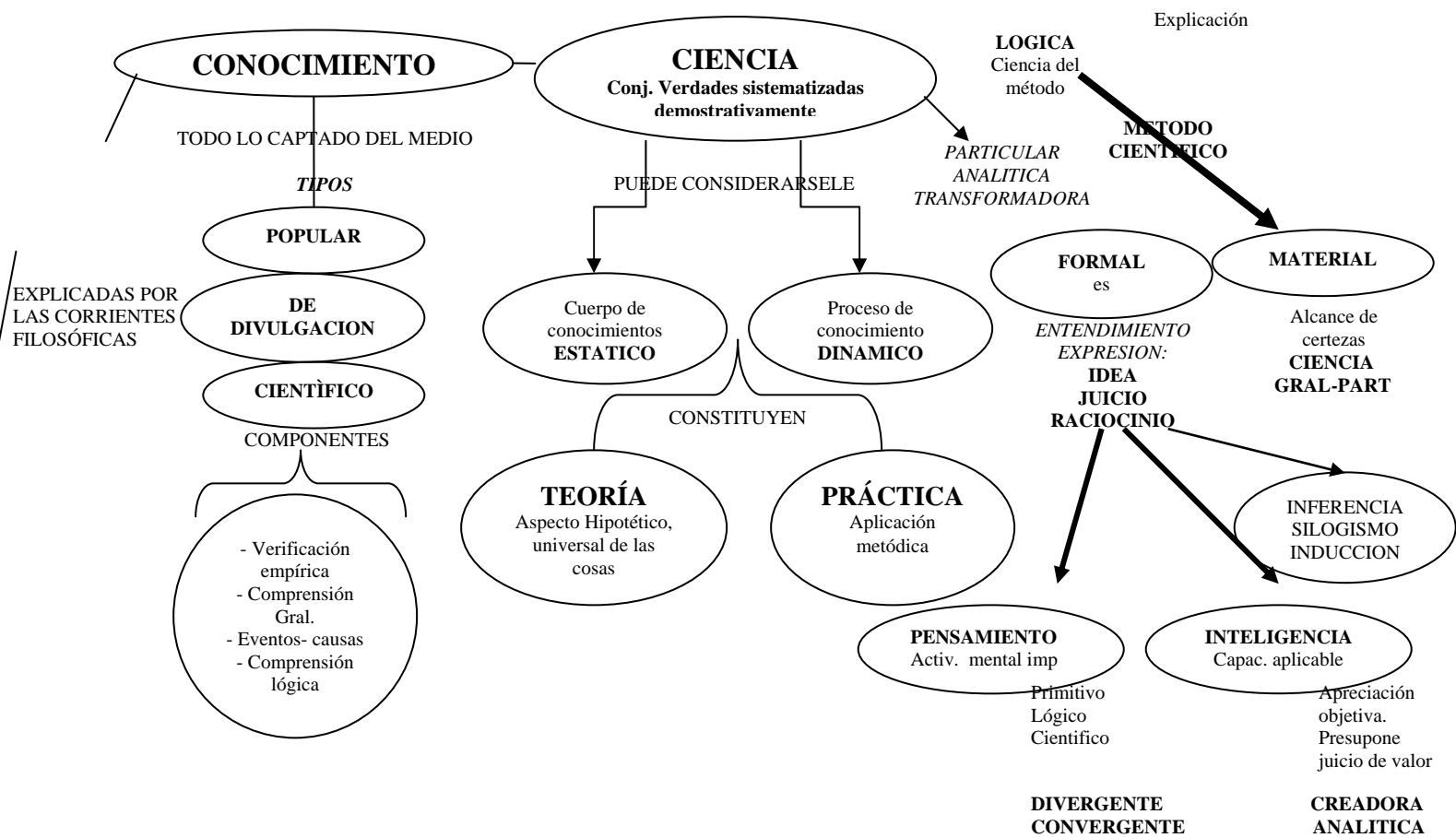
Los antecedentes del paradigma constructivista se encuentran en los trabajos de Lev. S. Vygotsky (1896 – 1934) y de Jean Piaget (1896 -1980). Para muchos el llamado constructivismo cognitivo es consecuencia directa

de los estudios de epistemología genética de Jean Piaget, en el caso de Piaget, una de las peculiaridades de su éxito también se debe a que consultaba a los diferentes expertos en las diferentes ciencias y lo aprovechaba en beneficio de la construcción de sus teorías educativas, es importante señalar la importancia de

La multidisciplinariedad y el proceso de construcción de lo que es el “pensamiento complejo “ actualmente . mientras que el constructivismo social lo es a su vez de retomar y enriquecer los planteamientos originales de Lev. S. Vygotsky por sus discípulos y seguidores y de los trabajos de H. Wallon.

Ya un “tipo” u otro de constructivismo, el cognitivo y / o social, el énfasis está en la búsqueda epistemológica y semiótica de cómo se conoce la realidad, cómo se aprende, en otras palabras la génesis y desarrollo del conocimiento y la cultura.

A diferencia de otras posiciones psicopedagógicas ya estudiados, que precedieron a este, como el conductismo, el constructivismo, muy de acuerdo con las nuevas tendencias de la ciencia contemporáneas constituye un área de estudios multi e interdisciplinario, más aún transdisciplinario, ya que en su construcción han colaborado investigadores de numerosas disciplinas científicas. De ahí que para muchos el constructivismo sea toda una concepción, más que de una ciencia en particular de muchas de ellas.



“Se afirma con toda razón que el paradigma cognitivo es, en el ámbito educativo, un movimiento con mucha fuerza por sus planteamientos teóricos, sus propuestas metodológicas y sus proyectos de aplicación a la práctica.

Ente las décadas de los años 60' y 90' del siglo XX, fundamentalmente en la década de los 80', esta orientación llamó la atención de los educadores por la audacia de sus formulaciones y aportes al desarrollo de la inteligencia, la creatividad y el talento.

Son muchos los expertos e investigadores de este paradigma y numerosa la literatura disponible al respecto. También son reconocidas las múltiples orientaciones dentro de este movimiento que pese a la variedad de especificaciones, tienen un denominador común: La preocupación por el desarrollo cognitivo humano.

Entre las principales orientaciones del Paradigma cognitivo están:

- La orientación psicogenética de Jean Piaget.**
- El enfoque del procesamiento de la información.**
- La teoría de Reuven Feuerstein.**

Si el paradigma conductista se caracteriza por su propuesta de tecnología educativa, y el humanista por el de educación personalizada, el paradigma cognitivo se identifica con el movimiento de enseñar a pensar, también conocido por otros, más tarde como, aprender a aprender.”

El humanismo (Hernández Rojas, 1998) se refiere al estudio y promoción de los procesos integrales de la persona. La personalidad humana es una organización o totalidad que está en continuo proceso de desarrollo y la persona debe ser estudiada en su contexto interpersonal y social. El

humanismo incorpora del existencialismo la idea de que el ser humano va creando su personalidad a través de las elecciones o decisiones que continuamente toma frente a diversas situaciones y problemas que se le van presentando durante su vida. Las conductas humanas no son fragmentarias e implican aspectos naturales como el egoísmo, el amor, las relaciones interpersonales afectivas, las cuestiones éticas, los valores como la bondad, o aspectos naturales físicos como la muerte, la sexualidad, entre muchos otros.

**El humanismo incorpora del existencialismo los puntos siguientes:
El ser humano es electivo, capaz de elegir su propio destino
El ser humano es libre para establecer sus propias metas de vida y
El ser humano es responsable de sus propias elecciones.**

Existen postulados comunes a la mayoría de los psicólogos humanistas, y son los siguientes:

a) El ser humano es una totalidad. Este es un énfasis holista que dice que el ser humano debe estudiarse en su totalidad y no fragmentadamente.%

b) El hombre posee un núcleo central estructurado, es decir, su “yo”, su “yo mismo” (self) que es la génesis y estructura de todos sus procesos psicológicos.

c) El hombre tiende naturalmente a su autorrealización formativamente. Ante las situaciones negativas debe trascenderlas. Si el medio es propicio, genuino y empático y no amenazante, las potencialidades se verán favorecidas.

d) El hombre es un ser en un contexto humano y vive en relación con otras personas.

e) El hombre es consciente de sí mismo y de su existencia. Nos conducimos de acuerdo con lo que fuimos en el pasado y preparándonos para el futuro.

f) El hombre tiene facultades de decisión, libertad y conciencia para elegir y tomar sus propias decisiones, lo que se traduce en un ser activo y constructor de su propia vida.

g) El hombre es intencional, es decir, que los actos volitivos o intencionales se reflejan en sus propias decisiones

El humanismo (Hernández Rojas, 1998) se refiere al estudio y promoción de los procesos integrales de la persona. La personalidad humana es una organización o totalidad que está en continuo proceso de desarrollo y la persona debe ser estudiada en su contexto interpersonal y social. El humanismo incorpora del existencialismo la idea de que el ser humano va creando su personalidad a través de las elecciones o decisiones que continuamente toma frente a diversas situaciones y problemas que se le van presentando durante su vida. Las conductas humanas no son fragmentarias e implican aspectos naturales como el egoísmo, el amor, las relaciones interpersonales afectivas, las cuestiones éticas, los valores como la bondad, o aspectos naturales físicos como la muerte, la sexualidad, entre muchos otros.

**El humanismo incorpora del existencialismo los puntos siguientes:
El ser humano es electivo, capaz de elegir su propio destino
El ser humano es libre para establecer sus propias metas de vida y
El ser humano es responsable de sus propias elecciones.**

Existen postulados comunes a la mayoría de los psicólogos humanistas, y son los siguientes:

a) El ser humano es una totalidad. Este es un énfasis holista que dice que el ser humano debe estudiarse en su totalidad y no fragmentadamente.%

b) El hombre posee un núcleo central estructurado, es decir, su “yo”, su “yo mismo” (self) que es la génesis y estructura de todos sus procesos psicológicos.

c) El hombre tiende naturalmente a su autorrealización formativamente. Ante las situaciones negativas debe trascenderlas. Si el medio es propicio, genuino y empático y no amenazante, las potencialidades se verán favorecidas.

d) El hombre es un ser en un contexto humano y vive en relación con otras personas.

e) El hombre es consciente de sí mismo y de su existencia. Nos conducimos de acuerdo con lo que fuimos en el pasado y preparándonos para el futuro.

f) El hombre tiene facultades de decisión, libertad y conciencia para elegir y tomar sus propias decisiones, lo que se traduce en un ser activo y constructor de su propia vida.

g) El hombre es intencional, es decir, que los actos volitivos o intencionales se reflejan en sus propias decisiones”.

cecte.ilce.edu.mx/maestrias.htm.2012

2.3 INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

Conocimiento científico basado en los conocimientos epistemológicos y holísticos desde un punto de vista interdisciplinarios, ha permitido que la condición de la investigación educativa, se haga llegar desde el espacio áulico, en el tratamiento de las materias y principalmente en el área de la educación matemática en concreto en la Universidad Nacional Autónoma de México, la cual ha buscado concienciar y hacer participe a su personal docente, del mismo modo la SEP de manera general, preocupada por la capacitación de los maestros, genera cursos que provean de herramientas para mejorar las técnicas en el aspecto docente y académico de la vida cotidiana en el trabajo educativo, esto es un inicio para generar confianza en donde la tarea educativa y la investigación educativa parten de la observación de los fenómenos diarios, en los espacios áulicos de todas las instituciones que se dedique a generar estos procesos.

Todos los autores que presentas este tipo de trabajos, tiene como meta primordial señalar los enfoques en que el maestro puede constituirse como un investigador y de esa manera ir cambiando su práctica docente para una mejor gestión escolar y educativa, “Los principales problemas tanto teóricos como metodológicos que ha enfrentado el maestro son: presuponer una estabilidad de rasgos de personalidad, con independencia de contexto en que se manifiestan; la multidimensionalidad de los métodos de enseñanza y las dificultades en su operacionalización; la falta de control de variables en el escenario natural; la imposibilidad de conformar grupos equivalentes, entre otras (Coll y Solé, 1990). En este sentido, resulta prácticamente imposible concensuar, en base a la investigación educativa una definición, ampliamente aceptada de lo que caracteriza a un buen profesor”. Díaz Barriga,

Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo, una interpretación constructivista. McGraw Hill. 2da. Edición. Mexico, 2006. p. 14

Es indudable que el proceso de la investigación educativa, tiene que ver con la investigación en la enseñanza y con la investigación del aprendizaje, el maestro debe responderse a estas cuestiones de manera específica a los cambios de paradigma en este tiempo, no solo de manera empírica sino de manera científica, encuadrando su objeto de estudio “De la vida en las aulas”, (Díaz Barriga, 2007). Asimismo, como lo fue el propio concepto de paradigma cuya frase se acuñó bajo la influencia de Tomas Kuhn (1970) al trabajo de los científicos sociales dándole valor a los propios objetos de investigación (algunos investigadores comienzan siempre con el supuesto de que su tarea consiste en relacionar, experimentar descriptivamente, las variaciones observadas por medición en el rendimiento de las actitudes de los alumnos con las variaciones en las conducta observada en los enseñantes). Merling Wittrock, *la Investigación de la Enseñanza*, Paydos. México 1997. p.17

La finalidad de la Investigación educativa es permitir que mejore la estructura en la enseñanza aprendizaje, cuyos procesos adquieren una connotación de verdadera transformación en la comprensión de los conocimientos adquiridos más en la educación matemática, no sea una simple recolección de fórmulas, resolución de ejercicios y el único deseo, la acreditación de la materia, así en la educación matemática podemos encontrar actividades de interacciones problematizadoras entre el sujeto y el objeto y de manera recíproca en la adquisición de las habilidades intelectuales suficientes para dar al aprendizaje anterior la relación necesaria con el aprendizaje posterior, sin perder de vista que los aprendizajes requieren de una participación activa cuyo interés es el motor que los mueve y el trabajo operativo estimula el desempeño personal; por otro lado hay elementos esenciales que deben permitir la acción matemática como lo es la inducción, deducción, el análisis, esa actitud de precisión en el lenguaje, el siempre buscar soluciones alternas originalidad en algunas aplicaciones estratégicas, innovación, cambio, búsqueda y selección de información, integración interdisciplinaria, incorporación de la tecnología como herramienta, correlación significativa y funcional entre teoría y práctica y

aplicación a los fenómenos reales y nuevos que genera la vida moderna para las soluciones de la vida cotidiana.

ESTÁNDARES CURRICULARES PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

- 1.- Las matemáticas como resolución de problemas**
- 2.- Las matemáticas como comunicación**
- 3.- Las matemáticas como razonamiento**
- 4.- Las matemáticas y su conexión con otras áreas del conocimiento**
- 5.- Estrategias para la estimación de resultados**
- 6.- El significado del número y numeración**
- 7.- Los números, sus operaciones y sus relaciones**
- 8.- La geometría y percepción espacial**
- 9.- La medición**
- 10.- La estadística y probabilidad de eventos**
- 11.- El álgebra, el pensamiento variacional**
- 12.- Los patrones y relaciones**

Estos estándares curriculares internacionales y de evaluación para la educación matemática, son los que permiten como mínimo lo que el estudiante debe manejar, las actividades que sigue los lineamiento curriculares vigentes, la propuesta de evaluación de competencias, sigue en los estándares (NCTM), National Council Of Teachers Of Mathematics , los dominios matemáticos son parte de nuestra cultura que manejamos en nuestra vida diaria como es el hecho de la proporcionalidad, el álgebra, el análisis matemático y más con la tecnología actual y el devenir de la misma, es conveniente distinguir que existen estilos de aprendizaje y estilos de enseñanza y que son condiciones muy particulares y temáticas de otros estudios, pero que sin embargo debe considerarse que el hombre aprende por diferentes medios y el docente reúne ciertas características para lograr su estilo de enseñanza, a saber existen los alumnos quinestésicos, visuales, auditivos, los cuales aprenden más rápido en ciertos canales que en otros, por lo que el trabajo multimedia abre realmente la posibilidad de que el

individuo utilice todos sus canales de percepción y el maestro le permita llevar a cabo este proceso de manera individualizada por ello es importante que el dominio matemático, siempre tenga relación con su vida cotidiana y el tratamiento que se le debe dar partirá de la disposición del docente para que el alumno sea motivado aprender en esa investigación del espacio áulico y el contexto cultural en el cual se encuentre.

La investigación educativa, no verá final por que es una ciencia cambiante y en todo momento habrá consideraciones culturales a las cuales enfrentarse y resolver de tal suerte que como en el área médica, el área educativa debe seguir avanzando, es una realidad que existe muy poca investigación en México en este campo, pero que en últimos tiempos se ha vislumbrado la importancia de crecer en ese sentido para lograr un mejor conocimiento de su propio trabajo y una reflexión sobre las razones que le generarían mayores dividendos para que el alumno tenga un aprendizaje significativo, funcional y permanente.

Es de suma importancia que el maestro considere las características y carencias sobre lo que el alumno sabe acerca de la materia que va aprender, la tarea de aprendizaje a realizar, los contenidos y materiales de estudio, con que es lo que se cuenta y que es lo que hace falta la intencionalidad y la realidad educativa que verdaderamente puede lograr para implementar el uso de los propios recursos de los cuales se pueda valer.

1° Se propone vincular asertivamente los conocimientos previos del alumnos con el nuevo conocimiento.

2° De manera global se desarrolla las actividades

3° El alumno se hace responsable de forma progresiva sobre el control de su conocimiento.

4° Hay un interrelación activa por parte del docente y el alumno

5° Aparecen de manera explicita e implícita las formas de interacción habituales donde el profesor adquiere la forma de tutor.

CAPITULO 3

**“LA REALIDAD NO ES ALGO
EXACTAMENTE TANGIBLE
ES UN “LIMITE”, UNA APROXIMACION
QUE EL HOMBRE HA INVENTADO,
HASTA EL PROXIMO PARADIGMA”
RAFAEL IBARROLA CEBALLOS**

CAPITULO

3 HABILIDADES DOCENTES

TEORIAS DEL CONOCIMIENTO

**DESARROLLO DE COMPETENCIAS Y
CONSTRUCTIVISMO.**

3.1 HABILIDADES DOCENTES

Normalmente se ha centrado la discusión del debate de enseñanza aprendizaje en el objeto de estudio, sin embargo se revisó la actuación del sujeto y con ello se precisó ahora más en el sujeto que en el objeto, sin embargo, es importante sustentar que la interrelación en ambas consideraciones dependen de las habilidades docentes, así podemos decir que las habilidades docentes son las que verdaderamente se ponen en juego al momento de hacer llegar el conocimiento de una u otra forma por parte del maestro “La formación del docente debe abarcar los planos, conceptual, reflexivo y práctico (Díaz Barriga, 2007)”.

Para Zarzar Charur, maneja cinco habilidades básicas: Definir claramente los objetivos de aprendizaje, diseñar los planes de trabajo de un curso escolar y redactar el programa para los alumnos, desarrollar el encuadre en las primeras sesiones, diseñar e instrumentar actividades de aprendizaje y de evaluación de los aprendizajes, integrar y coordinar equipos de trabajo y grupos de aprendizaje. En la primera que es el principal factor de toda planeación didáctica con gran frecuencia se pasa con gran ligereza y despreocupación, esto se debe en gran medida a la forma de reclutar a los profesores, pasando de manera inmediata al temario o índice de contenidos, muchas veces sin plantearse los objetivos de aprendizaje que se pretenden lograr, los hay de tipo informativo, que son conocer, comprender y manejar. Los hay de tipo formativo que implica la formación intelectual, humana, social, profesional.

“Coordinador: “Me hace falta un profesor de matemáticas II, para el tercer semestre de a carrera. ¿Podrías dar esa clase?”

Profesor. “¡como no!, nada más dime que les tengo que enseñar”

Coordinador “es fácil, sigue el libro fulano de tal. Es el que llevan como texto de esa materia. Ahora si quieres, te paso una copia del temario de los que dan la misma materia.”

Si preguntáramos los objetivos del aprendizaje a este Coordinador y Profesor, seguramente no responderían: el objetivo es que aprendan estos temas y que sepan resolver todos los temas que vienen en el texto.

Por el contrario, nuestra posición, es que de los objetivos que se planteen va depender todo lo demás: estructuración del contenido, organización del curso, diseño de actividades de aprendizaje dentro y fuera del aula, mecanismos y criterios de evaluación, etc.” Zarzar Charur, Habilidades básicas para la Docencia, Patria. México, 2005. p. 15

Los objetivos de tipo informativo solamente pretenden que el alumno tenga la información sobre el tema que se está tratando y puede decirse que es un conocimiento superficial no lo lleva la esencia de la razón del conocimiento, estos objetivos encuadrados en tres niveles de aprendizaje y el primero de ellos que es conocer singularmente, dan la idea de lo que son las cosas contenidos, hechos, fechas, por ejemplo conocemos que existe la teoría cuántica o conocemos que existen las derivadas pero solo como información sin llegar a mayor profundización o comprensión, en el segundo nivel que es comprender este aprendizaje informativo normalmente parte de la exposición del maestro y simplemente va bien estructurado el orden de los contenidos, pero normalmente no se maneja por que pueden ser contenidos muy teóricos o ejercicios muy mecanizados que no llegan a la realidad, en que se encuentra el sujeto que aprende. En el tercer nivel que consisten en manejar los alumnos, aplican situaciones teóricas como prácticas y demuestra que puede manejar los contenidos, pues los ha

entendido previamente, es indispensable que los alumnos participen para lograr esta tarea dentro y fuera del espacio áulico.

OBJETIVOS DE TIPO FORMATIVO

“ La función primordial básica, sustancial, de las instituciones de educación superior, es la de formar (no informar), Técnicos y Profesionistas útiles para nuestra sociedad” . Idem

Así en la educación básica constantemente se busca mejorar lo académico y la conducta de los niños y se pone mucho énfasis en su carácter formativo sin embargo en la educación medias superior y superior, parece más un ideal pues no se cumple este carácter formativo y se queda más en un carácter informativo. La formación a diferencia de la función informativa abarca cuatro aspectos.

Formación Intelectual. Se refiere al desarrollo y adquisición de métodos, habilidades y destrezas y actitudes de tipo intelectual en el ámbito de la razón, la conciencia del entendimiento de la mente humana, podemos incluir objetos en donde el alumnos aprende a pensar, razonar, analizar, sintetizar, deducir, abstraer, como en el claro ejemplo de aprender a leer y escribir, cuando ya sabe discutir y tiene una actitud crítica por que ha potencializado esa habilidad en la construcción de conocimientos superiores que le permiten desarrollar facultades como profesional en nuestra sociedad.

FORMACIÓN HUMANA

El lado humanístico no debe perderse de vista pues en el concurren la formación de valores, lo que dan la calidad y excelencia en las expectativas de aceptar límites y capacidades en el ser humano.

FORMACIÓN SOCIAL

En el aspecto de integrarse a una sociedad para su convivencia social, debe de comprender una armonía, una estabilidad para desarrollar un trabajo colaborativo con las demás personas en un espíritu de aprendizaje y formación que fomenta la construcción de su individualidad en el contexto social con el sentido de pertenencia de su comunidad, de su estado, de su país.

FORMACIÓN PROFESIONAL.

El objetivo pretende que al formar parte como futuro profesionista tenga la formación ética y la disposición, pues lleva el prestigio de la propia institución donde ha egresado y su participación, debe ser clara que podría incluirse en cualquier parte del mundo, así es conveniente señalar que las Institución de Educación Superior, deben preocuparse por esta formación, pues las empresas Mexicana son el principal cliente de ellas.

Finalmente, el docente puede concretar lo que requiera al desarrollo de esta habilidad.

Segunda Habilidad.

DISEÑAR EL PLAN DE TRABAJO DE UN CURSO Y REDACTAR EL PROGRAMA.

Mientras que un plan de estudios consiste en la planeación general de toda una carrera o de un nivel escolar (primaria, secundaria, bachillerato), el programa de estudios se refiere únicamente a la planeación de una materia.

De entrada nos interesa distinguir tres tipos de programas de estudio: el institucional, el del profesor y el del alumno.

El Programa de Estudios Institucional.

En cuanto a los programas de estudio institucionales, nos encontramos con usos y costumbres de todo tipo. En un extremo se encuentran aquellas instituciones de educación superior que no cuentan con programas institucionales de ningún tipo, ni siquiera una guía general; sólo le indican al profesor el nombre de la materia y le piden que la imparta como prefiera. Fundamentan esta costumbre en la libertad de cátedra, la cual interpretan como el derecho que todo profesor tiene de organizar su clase como él decida.

Esta práctica tiene efectos contraproducentes. Uno de ellos es que propician una gran nivel de desigualdad en la formación de los alumnos, dependiendo de con qué profesor llevaron qué materia. Otro es que se propicia el abuso o desentendimiento por parte de algunos profesores, los cuales, al no tener mayor control, llega al libertinaje académico-administrativo.

Los aspectos generales de un curso en el plan de trabajo el profesor debe manejar los siguientes aspectos como son datos generales, ubicación de la materia, contenidos temáticos, metodología del trabajo criterios y mecanismos para la calificación, la acreditación, la evaluación, y la bibliografía.

LA PLANEACIÓN DIDÁCTICA

En esta el profesor se debe guiar en un cronograma del curso a impartir, sesión por sesión, tema por tema o unidad por unidad. Debe de guiarse reflexionando sobre la mejor manera de trabajar el tema o la unidad temática en función del logro de los objetivos planteados, tanto los formativos como los informativos. Una vez definido esto con la misma planeación didáctica el profesor va fomentar el logro de otros objetivos formativos, así pasamos al aspecto del programa del alumno, donde el profesor lo toma en cuenta como el sujeto del conocimiento usando el lenguaje asequible a sus alumnos y de ninguna manera todos encuentren en la postura de saber lo que se va a realizar, cuando, como, y por qué. Así el programa del alumno debe contener la presentación del curso, la importancia de la materia, como se ubica en el plan de estudios y su relación con otras materias, los objetivos de aprendizaje que se pretenden alcanzar por parte del alumno, los contenidos temáticos separados por unidades y no como un listado de temas continuos, las metodologías de trabajo, las responsabilidades que se asignan a los alumnos y lo que se espera de ellos, la bibliografía básica obligatoria complementaria o de apoyo y por ultimo los criterios y mecanismos para la calificación, la evaluación y la acreditación.

Tercer Habilidad.

DESARROLLAR EL ENCUADRE DE LAS PRIMERAS SESIONES.

Este es el marco dentro del cual se desarrolla alguna habilidad, incluye los aspectos de fondo y de forma, su objetivo general es que los alumnos tengan claro que se va hacer, como se va hacer, que acepten y se comprometan para que la actividad que se pretende realizar los rija y se desarrolle adecuadamente, así el encuadre presenta las siguientes actividades.

- 1.- presentación de los participantes**
- 2.- Análisis de las expectativas**
- 3.- Presentación del programa**
- 4.- Plenario de acuerdos y de organización operativa**
- 5.- Prueba de diagnóstico**

Estas actividades tienen objetivos explícitos que son los que el profesor expresa abiertamente al grupo, pues indica las tareas a realizar, y los objetivos implícitos ocurren de manera paralela a la actividad en cuestión de tal suerte que el profesor se encuentra conciente de ellos aunque no los mencione.

Presentación de los participantes.

El objetivo explícito de esta actividad, es la socialización cuyo objetivo explícito es que los alumnos se conozcan entre sí, de tal forma que esta actividad dependerá del tamaño del grupo.

Presentaciones Progresivas.

En esta técnica los participantes se presentan y se conocen en parejas, encuartes, en grupos de ocho y posteriormente en plenarias, se dan entre diez minutos para esta actividad y van por momentos según la cantidad de participantes.

Cadena de presentaciones.

Se lleva a cabo con participante que ya se conocen entre sí y se realiza desde el principio en plenaria de tal forma que todos puedan verse de frente, dado que el coordinador no los conoce, le pedirá que se presenten cada uno de ellos.

Análisis de Expectativas.

Aquí el objetivo explícito es que los alumnos expresen su expectativa del curso y lo que se imaginan que va suceder en el y por otro lado el implícito el profesor revisa las motivaciones e inquietudes de los alumnos para adecuar su planeación a la realidad del grupo en cuestión.

Presentación del Programa.

Aquí el objetivo explícito es dar a conocer a los alumnos la propuesta del profesor va a darles, así como el mapa cognocitivo, del mismo de los contenidos que van a estudiar y el objetivo implícito es que el maestro muestra al alumno que llega preparado y ha planeado bien su propuesta (ya

que es una de las cosas que más notas los estudiantes y más les molesta que un profesor llegue a improvisar una clase).}

Planeario de acuerdos y organización operativa.

Es establecer la normatividad que se va manejar en el curso de manera explícita y el objetivo implícito de manera correlacional, se toman en cuenta las expectativas del profesor y las necesidades del grupo.

Prueba de Diagnóstico

Es la última actividad del encuadre cuyo objetivo explícito es conocer en nivel de conocimiento previos con que los llegan a nuestro curso, los objetivos implícitos de esta actividad es que el alumno entienda el contenido propio del curso y certificar que cuenta con los elementos teóricos necesarios para ello .

Cuarta Habilidad

DISEÑAR E INSTRUMENTAR ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y DE EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES.

Esto consiste en que una vez terminado el encuadre el profesor instrumenta actividades de aprendizaje y de la evaluación del aprendizaje las cuales diseño previamente al hacer la planeación didáctica de las unidades temáticas de tal forma que puede determinar el nivel de profundidad en que

se van abarcar los contenidos y el tipo de aprendizaje formativo que van adquirir los alumnos.

DISEÑO DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Pueden ser centradas en el profesor o centradas en el alumnos, se basan en la acreditación, la evaluación y la calificación donde el profesor muestra una actitud abierta y un compromiso sistemático de este trabajo.

Quinta Habilidad

INTEGRAR Y COORDINAR EQUIPOS DE TRABAJO Y GRUPOS DE APRENDIZAJE.

Con esto se llega a definir el nivel de profundidad con que se tocará el tema una orientación general de las técnicas de enseñanza, técnicas grupales por grupos de aprendizaje y equipos de trabajo, donde las técnicas grupales estarán centradas en la tarea y en general están instrumentadas en el trabajo individual, trabajo en equipos y trabajo en plenario. Finalmente cada técnica debe de ser para lograr un aprendizaje real y efectivo mientras que las técnicas grupales centradas en el grupo se deja de lado por un momento los contenidos específicos del curso para revisar el aspecto sociológico del grupo en cuanto a los obstáculos y dificultades que presentan entre sí, así como las causas de los mismos, existen técnicas para revisar las problemáticas de los diferentes grupos, según las necesidades por ejemplo la incapacidad de trabajar en equipo, las divisiones en el grupo, la incapacidad para lograr la toma de decisiones por consenso, et.

3.2 TEORÍAS DEL CONOCIMIENTO

- 1) Paradigma conductista**
- 2) Paradigma cognitivo (procesamiento de información)**
- 3) Paradigma humanista**
- 4) Paradigma constructivista (teoría genética)**
- 5) Paradigma sociocultural (teoría de Vygotsky).**

Existen varios esquemas epistemológicos que pretenden explicar cómo se construye y evoluciona el conocimiento científico. Algunas posturas son eminentemente racionalistas como es el caso del falsacionismo de Popper y el del falsacionismo complejo de Lakatos, los cuales sólo hacen intervenir en sus explicaciones criterios puramente endógenos racionalistas. Otras posturas, como la de Kuhn, atribuyen un importante papel a los cambios y evolución en las disciplinas científicas a factores de tipo psicosociológico.

Para Kuhn, existe un constructo medular en torno al cual puede ser explicada la evolución histórica de las disciplinas científicas. Este concepto es el de paradigma, el cual es una matriz disciplinar o principio unificador que adopta una comunidad científica. Según Kuhn existe todo un proceso en que los paradigmas se gestan y derrocan a un posible antagonista (periodo de ciencia revolucionaria) y luego se refinan y depuran como producto de los esfuerzos de las comunidades adeptas a él (periodo de ciencia normal). Este proceso es cíclico y explica la evolución de los conocimientos disciplinares científicos en forma discontinua, no acumulativa (las revoluciones científicas).

***Schulman (1989) y Pérez Gómez (1989) utilizan el término de paradigma en un sentido más restringido al que utilizamos aquí, y sólo lo aplican en la situación, instruccional. Para Schulman, los paradigmas son como líneas o pautas de investigación educativa referidas más directamente con el**

proceso de enseñanza-aprendizaje (por ejemplo paradigma proceso-producto, paradigma del tiempo de aprendizaje académico, de la cognición del alumno y del pensamiento del docente, etc). Nosotros nos hemos referido a paradigma haciendo una equiparación con el concepto de teoría. (Como en el sentido lakatosiano cuando se habla de programas de investigación científica). Esto sin duda es polémico, pero nos basamos al hacerlo en considerar que aplicamos las ideas de Kuhn: 1) que el paradigma es algo compartido por una comunidad de investigadores y divulgadores

(idea sociológica) y 2) que paradigma es una *gestalt* que orienta la manera de pensar de esa comunidad en el sentido más amplio (criterios teóricos,

teóricos, metodológicos y proyectivo-prácticos). Coteje esto con nuestro punto de vista.

Los paradigmas tienen cinco componentes: un problemática, criterios epistemológicos, supuestos teóricos, prescripciones metodológicas y proyecciones de aplicación.

Según varios autores la disciplina psicológica es multiparadigmática. Del mismo modo en el seno de la Psicología de la Educación existen varios paradigmas alternativos, que hacen progresar el avance de los tres núcleos que la conforman.

Estos paradigmas vigentes en Psicología de la Educación son: el conductista, el cognitivo, el humanista, el constructivista y el sociocultural.

LOS FUNDAMENTOS DE LAS TEORÍAS DE APRENDIZAJE

Conductismo: se basa en los cambios observables en la conducta del sujeto. Se enfoca hacia la repetición de patrones de conducta hasta que estos se realizan de manera automática.

Cognoscitivismo: se basa en los procesos que tienen lugar atrás de los cambios de conducta. Estos cambios son observados para usarse como indicadores para entender lo que esta pasando en la mente del que aprende.

Constructivismo: se sustenta en la premisa de que cada persona construye su propia perspectiva del mundo que le rodea a través de sus propias experiencias y esquemas mentales desarrollados. El constructivismo se enfoca en la preparación del que aprende para resolver problemas en condiciones ambiguas.

(Schuman, 1996)

Los fundamentos del conductismo

El conductismo, como teoría de aprendizaje, puede remontarse hasta la época de Aristóteles, quien realizó ensayos de “Memoria” enfocada en las asociaciones que se hacían entre los eventos como los relámpagos y los truenos. Otros filósofos que siguieron las ideas de Aristóteles fueron Hobbs (1650), Hume (1740), Brown (1820), Bain (1855) y Ebbinghause (1885) (Black, 1995).

La teoría del conductismo se concentra en el estudio de conductas que se pueden observar y medir (Good y Brophy, 1990). Ve a la mente como una “caja negra” en el sentido de que la respuestas a estímulos se pueden observar cuantitativamente ignorando totalmente la posibilidad de todo

proceso que pueda darse en el interior de la mente. Algunas personas claves en el desarrollo de la teoría conductista incluyen a Pavlov, Watson, Thorndike y Skinner.

Pavlov (1849 – 1936)

Para la mayoría de la gente, el nombre de “Pavlov” lo asocia al repiqueteo de campanas. El fisiólogo ruso es mejor conocido por su trabajo en condicionamiento clásico o sustitución de estímulos. El experimento más conocido de Pavlov lo realizó con comida, un perro y una campana.

Experimento de Pavlov

- Antes de condicionar, hacer sonar una campana no producía respuesta alguna en el perro. Al colocar comida frente al perro hacía que este comenzara a babear.
- Durante el condicionamiento con el sonido de la campana, esta se hacía sonar minutos antes de poner el alimento frente al perro.
- Después del condicionamiento, con sólo escuchar el sonido de la campana el perro comenzaba a salivar.

(Dembo, 1994).

Los elementos del experimento de Pavlov estímulo y respuesta

Comida	Estímulo no condicionado
Salivación	Respuesta no condicionada (natural, no aprendida)
Sonido Campana	Estímulo de condicionamiento
Salivación	Respuesta condicionada (por el sonido de la campana, aprendida)

Otras Observaciones hechas por Pavlov

- **Generalización de estímulos:** Una vez que el perro ha aprendido la salivación con el sonido de la campana, producirá salivación con otros sonidos similares.
- **Extinción:** Si se deja de sonar la campana cuándo se le presenta la comida, eventualmente la salivación desaparece con el sonido de la campana solo.
- **Recuperación espontánea:** Las respuestas extinguidas se pueden recuperar después de un periodo corto de estimulación, pero se extinguirá nuevamente si no se le presenta la comida.
- **Discriminación:** El perro puede aprender a discriminar entre sonidos parecidos y distinguir cuál de los sonidos está asociado con la presentación de la comida y cual no.
- **Condicionamiento de orden superior:** Una vez que el perro ha adquirido el condicionamiento con la asociación del sonido de la campana y el alimento, se pueden realizar al mismo tiempo, tales como encender un foco. De esta manera el perro también producirá saliva con solo encender el foco (sin el sonido de la campana).

Thorndike (1874 – 1949)

Edward Thorndike realizó su investigación, también observando la conducta de animales pero después realizó experimentos con personas. Thorndike implantó el uso de “métodos usados en las ciencias exactas” para los problemas en educación al hacer énfasis en el “tratamiento cuantitativo exacto de la información”. “Cualquier cosa que exista, debe existir en determinada cantidad y por lo tanto puede medirse” (Johcich, citado en Rizo,

1991). Su teoría, conexionismo, establece que aprender es el establecimiento de conexiones entre estímulos y respuestas.

- La “ley de efecto” dice que cuando una conexión entre un estímulo y respuesta es recompensada (retroalimentación positiva) la conexión se refuerza y cuando es castigado (retroalimentación negativa) la conexión se debilita. Posteriormente Thorndike revisó esta ley cuando descubrió que la recompensa negativa (el castigo) no necesariamente debilitaba la unión y que en alguna medida parecía tener consecuencias de placer en lugar de motivar el comportamiento.
- La “ley de ejercicio” sostiene que mientras más se practique una unión estímulo-respuesta mayor será la unión. Como en la ley de efecto, la ley de ejercicio también tuvo que ser actualizada cuando Thorndike encontró que en la práctica sin retroalimentación no necesariamente refuerza el rendimiento.
- La “ley de sin lectura”: Debido a la estructura del sistema nervioso, ciertas unidades de conducción, en condiciones determinadas, están más dispuestas a conducir que otras.

Las leyes de Thorndike se basan en la hipótesis estímulo respuesta. Él creía que se establecía un vínculo neural entre el estímulo y la respuesta cuando la respuesta era positiva. El aprendizaje se daba cuando el vínculo se establecía dentro de un patrón observable de conducta (Saettler, 1990)

Watson (1878 – 1958)

John B. Watson fue el primer psicólogo norteamericano en usar las ideas de Pavlov. Al igual que Thorndike, primero comenzó sus estudios con animales y posteriormente introdujo la observación de la conducta humana.

Watson pensaba que los humanos ya traían, desde su nacimiento, algunos reflejos y reacciones emocionales de amor y furia, y que todos los demás comportamientos se adquirirían mediante la asociación estímulo-respuesta; esto mediante un acondicionamiento.

El Experimento de Watson

Watson demostró el condicionamiento clásico con un experimento en el que participó un niño de algunos meses de nacido (de nombre Albert) y una rata blanca. El experimento consistía en acercar la rata a Albert para que la tocara, al principio Albert no mostraba temor por el pequeño animal, pero al comenzar a hacer, de repente un fuerte ruido cada vez que Albert tocaba la rata, al poco tiempo Albert comenzó a mostrar temor por la rata aún sin hacer el ruido (debido al condicionamiento). Este miedo se generalizó para otros animales pequeños. Watson después “extinguió” el miedo presentando la rata al niño en repetidas ocasiones sin hacer el ruido. Algunos hechos del estudio sugieren que el condicionamiento al miedo fue más poderoso y permanente que el realmente observado. (Harris, 1979; Samelson, 1980, en Brophy, 1990).

En realidad los métodos de investigación usados por Watson en la actualidad serían cuestionados, su trabajo demostró el papel del condicionamiento en el desarrollo de la respuesta emocional para ciertos estímulos. Esto puede dar explicación a determinados sentimientos, fobias y prejuicios que desarrollan las personas.

(A Watson se le atribuye el término “conductismo”)

Skinner (1904 –1990)

Al igual que Pavlov, Watson y Thorndike, Skinner creía en los patrones estímulo-respuesta de la conducta condicionada. Su historia tiene que ver con cambios observables de conducta ignorando la posibilidad de cualquier proceso que pudiera tener lugar en la mente de las personas. El libro de Skinner publicado en 1948, Walden Two, presenta una sociedad utópica basada en el condicionamiento operante. También escribió Ciencia y Conducta Humana, (1953) en el cual resalta la manera en que los principios del condicionamiento operatorio funcionan en instituciones sociales tales como, gobierno, el derecho, la religión, la economía y la educación (Dembo, 1994).

El trabajo de Skinner difiere de sus predecesores (condicionamiento clásico), en que él estudió la conducta operatoria (conducta voluntaria usada en operaciones dentro del entorno).

A pesar de todos los esfuerzos , que se han hecho por proponer en esta nueva teoría cognitivista, sobre la didáctica operatoria y conductista, la realidad es que a pesar de la nueva tendencia, del constructivismo y las inteligencias múltiples o lo investigado por Gardner, sobre inteligencia emocional, el conductismo esta inherente a las actividades humanas, el estímulo respuesta, será parte de nuestra formación, sin embargo el enfoque constructivista, nos hace comprender los conocimientos a impartir en el alumno como conceptuales, instrumentales, procedimentales y valórales así como evaluarlos para el enfoque docente del siglo XXI.

Por otro lado los comparativos de las didácticas más practicadas en el aula nos permiten observar algunos comparativos entre la didáctica operatoria y la conductista.

Respecto de como se pensaba al respecto sobre como se aprende y los condicionamientos para este aprendizaje.

No es asumir la razón en este paradigma, pero si es plantear una hipótesis al respecto sobre la didáctica operatoria y sus aplicaciones practicas, que acepta el conductismo sobre la manera de enseñar y de aprender mecanizando y resolviendo ejercicios como se estila normalmente en matemáticas, de manera general en las aulas, de primaria y secundaria.

De igual manera es el procedimiento didáctico que se ha mantenido por muchos años en prepa y universidad, a decir de varios autores en diversos congresos sobre la enseñanza de las matemáticas en la propia Unam y la FES- CUAUTITLAN, que se han celebrado anualmente.

Diferencias entre condicionamiento clásico y operatorio

Condicionamiento Clásico (Pavlov)	Condicionamiento Operatorio (instrumental), (Skinner)
<p>Estímulo sin condicionar <input type="checkbox"/><input type="checkbox"/></p> <p>Respuesta sin condicionar (comida) (salivación)</p>	<p>Respuesta <input type="checkbox"/><input type="checkbox"/><input type="checkbox"/><input type="checkbox"/> Estímulo (recompensa) (presiona palanca) (comida)</p>
<p>Estímulo sin condicionar <input type="checkbox"/><input type="checkbox"/><input type="checkbox"/></p> <p>Respuesta sin condicionar (comida) (salivación)</p> <p>Estímulo de condicionamiento <input type="checkbox"/> (sonido de campana)</p>	<p>Tiempo</p>
<p>Estímulo condicionado <input type="checkbox"/><input type="checkbox"/><input type="checkbox"/></p> <p>Respuesta condicionada (sonido de campana) (salivación)</p>	<p>Respuesta condicionada <input type="checkbox"/></p> <p>Estímulo condicionado (presiona palanca) (comida)</p>
<p>En condicionamiento clásico, un estímulo neurológico se convierte en un reflejo asociado. El sonido de la campana, como un estímulo neurológico, se asocia al reflejo de salivación</p>	<p>En el condicionamiento operatorio el aprendiz “opera” en el entorno y recibe una recompensa por determinada conducta (operaciones). Eventualmente se establece la relación entre la operación (accionar una palanca) y el estímulo de recompensa (alimento)</p>

Mecanismo de condicionamiento operatorio de Skinner

- **El refuerzo positivo o recompensa:** Las respuestas que son recompensadas tienen alta probabilidad de repetirse (Buen grado de refuerzo y cuidadoso estudio).
- **El refuerzo negativo:** Respuestas que reflejan actitudes de escape al dolor o de situaciones no deseables tienen alta probabilidad de repetirse (han sido excluidas del escrito un final debido a un buen trabajo terminal).
- **Extinción o ausencia de refuerzo:** Respuestas que no son reforzadas son poco probable que se repitan (Ignorando las conductas errores del estudiante la conducta esperada debe de extinguirse).
- **Castigo:** Respuestas que son castigadas de consecuencias no deseables serán eliminadas, pero podrían repetirse si las condiciones de refuerzo cambian (Un castigo retardado a un estudiante, mediante el retiro de privilegios podría no tener efecto)

(Good y Brophy)

Desarrollo de la conducta de Skinner

Si colocas dentro de una caja a un animal podría requerir de una cantidad significativa de tiempo para darse cuenta que activando una palanca puede obtener comida. Para lograr esa conducta será necesario realizar una serie de repeticiones sucesivas de la operación acción-respuesta hasta que el animal aprenda la asociación entre la palanca y la recompensa (el alimento). Para comenzar a crear el perfil, la recompensa se le da al animal primero con tan solo voltear a ver la palanca, después cuando se acerque a ella, cuando olfatee la palanca y finalmente cuando la presione.

Escalas de refuerzo

Una vez que la respuesta esperada se logra, el refuerzo no tiene que ser el 100%; de hecho se puede mantener mediante lo que Skinner ha llamado escalas de refuerzo parcial. Las escalas de refuerzo parcial incluyen intervalos de escalas y tasas de escala.

- **Escalas de intervalos fijos:** la respuesta de interés se refuerza un tiempo determinado fijo después, de que se le haya dado el último reforzamiento.
- **Escala de intervalo variable:** es similar a las escalas de intervalo fijo, con la diferencia que la cantidad de tiempo entre cada refuerzo es variable.
- **Escala de tasa fija:** aquí, debe de ocurrir un número de respuestas correctas para poder recibir la recompensa.
- **Escala de tasa variable:** el número de respuestas varía para recibir el refuerzo.

El intervalo variable y especialmente, las escalas de tasa variable, producen estabilidad y tasas de respuestas más persistentes debido a que los aprendices no pueden predecir el momento de reforzamiento a pesar de que saben que eventualmente sucederá.

Los fundamentos del cognoscitvismo

Desde 1920 algunos investigadores comenzaron a encontrar limitaciones en el uso del conductismo para explicar el proceso de aprendizaje. Edwar Tolman, por ejemplo, encontró que las ratas usadas en los experimentos mostraban algún tipo de mapa mental del laberinto que él estaba usando.

Tolman observó que cuando cerraba determinadas partes del laberinto, las ratas no se interesaban en intentar ciertas trayectorias que “sabían” que las conduciría a la parte bloqueada. Las ratas no podían ver que estos caminos la conducirían a un lugar sin salida, pero preferían tomar un camino más largo que sabían que les conduciría al lugar de la recompensa (Condicionamiento Operativo).

El conductismo fue incapaz de explicar ciertas conductas sociales. Por ejemplo, los niños no imitan todas las conductas que han sido reforzadas, es más, ellos pueden desarrollar nuevos patrones de conducta días o semanas después de su observación sin que estas hubieran recibido ningún refuerzo. Debido a estas observaciones, Bandura y Walters difieren de la explicación del condicionamiento operativo tradicional en la que el niño debe realizar y recibir refuerzo antes de haber aprendido. Ellos establecieron en su libro publicado en 1963, *Aprendizaje Social y Desarrollo de Personalidad*, que un individuo puede adoptar conductas mediante la observación del comportamiento de otra persona. Este postulado condujo a la Teoría Cognitiva Social (Dembo, 1994).

¿Qué es el cognoscitvismo?

“Los teóricos del cognoscitvismo reconocen que una buena cantidad de aprendizaje involucra las asociaciones que se establecen mediante la proximidad con otras personas y la repetición. También reconocen la importancia del reforzamiento, pero resaltan su papel como elemento retroalimentador, para corrección de respuestas y sobre su función como un motivador. Sin embargo, inclusive aceptando tales conceptos conductistas, los teóricos del cognoscitvismo ven el proceso de aprendizaje como la adquisición o reorganización de las estructuras cognitivas a través de las cuales las personas procesan y almacenan la información.” (Good y Brophy, 1990, pp. 187).

Al igual que con el conductismo, la psicología del cognoscitvismo se remonta a la época de Platón y Aristóteles. La revolución cognitiva comenzó a evidenciarse en la psicología norteamericana durante la década de los 50 (Seattler, 1990). Uno de los principales protagonistas en el desarrollo del cognoscitvismo fue Jean Piaget, quién planteó los principales aspectos de esta teoría durante los años 20. Las ideas de Piaget no impactaron a los psicólogos norteamericanos hasta los 60's cuando Miller y Bruner crearon el Centro para Estudios Cognitivos de la Universidad de Harvard.

Conceptos Claves de la Teoría Cognoscitivista

- **Esquema** – Una estructura de conocimiento interna. La nueva información se compara con las estructuras cognitivas existentes llamada “esquema”. El esquema se puede combinar, ampliar o alterar para dar espacio a la nueva información.
- **Modelo de procesamiento de la información en tres etapas** – Primero entra a un registro sensorial, después se procesa en la memoria de corto plazo y posteriormente se transfiere a la memoria de largo plazo para su almacenamiento y recuperación.
 - **Registro sensorial** – La información es recibida a través de los sentidos, la cuál es retenida entre uno y cuatro segundos y después tiene a desaparecer o a ser remplazado. La mayor parte de la información casi nunca alcanza la memoria de corto plazo pero toda la información es monitoreada a cierto nivel y actúa la mente si es necesario.
 - **Memoria de Corto Plazo (MCP).** – La entrada sensorial que se considera importante o interesante se transfiere del registro sensorial a la MCP. Aquí la memoria retiene la información hasta por 20 segundos o más si se ensaya repetidamente. La memoria de corto plazo puede retener información de dos eventos diferentes hasta por más o menos 7 minutos. Esta capacidad de memoria se puede incrementar si la información se divide en pequeñas secciones que tengan algún significado.
 - **Memoria y Almacenamiento de largo Plazo** – El almacenamiento de la información de la MCP es para usarse en la memoria de largo plazo. La memoria de largo plazo tiene capacidad sin límite. Algunos materiales son forzados en la memoria de largo plazo mediante memorización remota y sobre el aprendizaje. Los niveles más profundos de

procesamiento tales como la generación de vínculos entre la información nueva con la vieja son mucho mejor para la retención de material con más éxito.

- **Efectos de amplificación** – La información amplificada es más fácil de retener y recordar (Cofer, 1971, en Good y Brophy, 1990). Si el aprendiz relaciona información poco significativa con sus esquemas cognitivos previos serán más fáciles de recordar (Wittrock, Marks y Docrow, 1975, en Good y Brophy 1990).
- **Efectos de Posición Serial** – Es más fácil recordar objetos al principio o al final de una lista que los que están en la parte intermedia a menos que los objetos sean claramente diferentes.
- **Efectos Práctica** – La práctica y la repetición mejora la retención especialmente cuando es práctica distribuida. Mediante la práctica distribuida el aprendiz asocia el material con diferentes contextos en lugar de uno solo con práctica intensa.
- **Efectos Transferencias** – se refiere a los efectos del aprendizaje previos en el aprendizaje de nuevas tareas o materiales.
- **Efectos de Interferencia** – Se presentan cuando los aprendizajes previos interfieren el aprendizaje de nuevos materiales.
- **Efectos de Organización** – Cuando el aprendiz organiza los elementos nuevos (entradas) de la misma forma en que se organizan los artículos en un supermercado o despensa lo que facilita su localización.
- **Efectos de Niveles de Procesamiento** – Las palabras se pueden procesar con análisis sensorios de niveles bajos de sus características físicas para análisis esquemáticos de alto nivel de su significado (Craik y Lockhart, 1972, en Good y brophy, 1990). Mientras más profundo sea el proceso de análisis, más fácil será recordada.
- **Efectos de Estado Dependiente** – Si el aprendizaje se realiza dentro de determinado contexto será más fácil recordarlo en ese contexto que en otro diferente.

- **Efectos Nemónicos** – Los Nemónicos son estrategias que utilizan los aprendices para organizar significados relativos con sus imágenes significativas o sus esquemas contextuales. Por ejemplo, Las notas de una escala musical se pueden recordar por el ritmo: todo buen chico se merece un dulce.
- **Efectos Esquemas** – Si la información no se ajusta a los esquemas de la persona será más difícil para ella recordar y comprender.
- **Organizador Avanzado** – Los organizadores avanzados de Ausebels preparan al aprendiz para el material que van a aprender. No son simplemente alertados sobre el material sino que el material permite al estudiante dar sentido a la lección

3.3 DESARROLLO DE COMPETENCIAS Y CONSTRUCTIVISMO

Los fundamentos del constructivismo

El pionero de la primera aproximación constructivista fue Barlett (1932, en Good y Brophy, 1990) el constructivismo se sustenta en que “el que aprende construye su propia realidad o al menos la interpreta de acuerdo a la percepción derivada de su propia experiencia, de tal manera que el conocimiento de la persona es una función de sus experiencias previas, estructuras mentales y las creencias que utiliza para interpretar objetos y eventos.” “Lo que alguien conoce es aterrizado sobre las experiencias físicas y sociales las cuales son comprendidas por su mente.” (Jonasson, 1991).

Si cada persona tiene sus propios puntos de vista acerca de la realidad, entonces, ¿cómo podemos comunicarnos dentro de la sociedad y/o coexistir? Jonassen, retoma este aspecto en su artículo *Tecnología del Pensamiento: Hacia un Modelo de Diseño Constructivista*, en el que hace los siguientes comentarios:

- Quizás la percepción más equivocada del constructivismo es la de creer que cada quien construye una realidad única, que la realidad existe solamente en la mente del que la conoce, lo cual conduciría a una anarquía intelectual.
- Una respuesta razonable a esta crítica la da Gibsonian con su perspectiva, la cual considera que existe un mundo físico que está sujeto a las leyes de la naturaleza que todos afortunadamente reconocemos de la misma manera, porque esas leyes también afortunadamente son percibidas por el ser humano de la misma manera.

- Los constructivistas también creen que una buena parte de la realidad es compartida a través del proceso de negociación social...

Si exploramos a través de algunas teorías filosóficas y psicológicas del pasado, las tendencias hacia el constructivismo las podríamos encontrar en los escritos de Bruner, Ulrick, Neiser, Goodman, Kuhn, Dewey y Habermas. La influencia más profunda se debe al trabajo de Jean Piaget el cual es interpretado y ampliado por Von Glasserfield (Smorgansbord, 1997).

La construcción Realista contra la Radical

El constructivismo realista considera la cognición como el proceso mediante el cual el aprendiz eventualmente construye estructuras mentales que corresponden o se acoplan a las estructuras externas de su entorno.

El constructivismo radical concibe a la cognición como el proceso que sirve para que el que aprende organice las experiencias del mundo que le rodea en lugar de descubrir la realidad ontológicamente.

(Cobb, 1996, en Smorgansbord, 1997)

Las Suposiciones del Constructivismo de Merrill

- El conocimiento se construye a partir de la experiencia.
- El aprendizaje es una interpretación personal del mundo.
- El Aprendizaje es un proceso activo en el cual el significado se desarrolla sobre la base de la experiencia.
- El crecimiento conceptual proviene de la negociación de significado, del compartir múltiples perspectivas y de la modificación de nuestras propias representaciones a través del aprendizaje colaborativo.

- **El aprendizaje debe situarse sobre acuerdos realistas; la prueba debe integrarse con las tareas y no con actividades separadas.**

(Merril, 1991 en Smorgansbord, 1997)

DESARROLLO DE COMPETENCIAS Y CONSTRUCTIVISMO

Reconocer que la ciencia y la tecnología inician su contexto cuando el individuo que las adquiere ha desarrollado un proceso cultural intrínseco, antropológico y a su vez asusodonio, con el resto de las ciencias. Comentado esto definimos al constructivismo como una capacidad que el individuo ha logrado apartir de la construcción del aprendizaje y la finalidad última del valor educativo que el individuo aprenda a aprender así expresaremos una aproximación constructivista del aprendizaje y la enseñanza, todo esto reconociendo el análisis epistemológico de la naturaleza ,estructura y organización del conocimiento científico y de su traducción en conocimiento escolar y personal; la reflexión sobre las prácticas pedagógicas y la función reproductora y de transmisión ideológica de la institución escolar el papel de otros agentes socializadores en el aprendizaje del individuo ,sean los padres el grupo de referencia o los medios masivos de comunicación etc..

Esto constituye unas aproximaciones psicológicas como:

- 📁 como es el individuo intelectualmente respecto al aprendizaje.**
- 📁 cuales son las motivaciones y los intereses personalizados de los alumnos al proceso enseñanza-aprendizaje.**
- 📁 Las materias que estudian tengan significado y les plantee el deseo de auto aprendizaje.**
- 📁 el balance entre al afecto, la relación de grupo y los criterios de estudio.**
- 📁 Los recursos que sean de interés para desarrollar las actividades cognitivas innovadores y novedosos.**
- 📁 El aprendizaje cooperativo con la solvencia de interacción entre el alumno y el maestro y entre los mismos alumnos.**

La revalorización del papel del docente como mediador del aprendizaje, enfatizando el papel de ayuda pedagógica que presta reguladamente al alumno.

La postura constructivista se alimenta de las aportaciones de diversas corrientes psicológicas asociadas genéricamente a la psicología cognitiva. el conocimiento no es una copia fiel de la realidad si no una construcción del ser humano que construye con los esquemas que ya posee es decir con lo que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea.

“Dicho conocimiento depende de dos aspectos fundamentales:

De los conocimientos previos o representación que se tenga de la nueva información de la actividad o tarea a resolver

De la actividad externa o interna que el aprendizaje realice al respecto.

Ante la pregunta ¿Que es el constructivismo? Carretero argumenta:

“Básicamente puede decirse que es la idea que mantienen que el individuo -tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos -no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas sino una construcción propia, que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia fiel de la realidad.

La resolución de un problema nuevo se inicia casi siempre con procedimientos de ensayo y error: se prueban hipótesis, ideas, resultados particulares. Al resolver otros problemas similares, poco a poco se van construyendo ciertas relaciones que permiten elaborar procedimientos sistemáticos.

Frecuentemente, un problema un poco más complejo, por ejemplo a números más grandes propicia el abandono de procedimientos muy ligados a casos particulares y la construcción de otros más generales y sistemáticos. En el proceso de búsqueda es muy difícil determinar de antemano que operación o fórmula se va a usar .A veces, no es sino después de resolver varios problemas que puede identificarse la pertinencia de una herramienta ya conocida.

Por su puesto si antes de plantearse el problema a una persona ,se le enseña la fórmula que lo resuelva de manera sistemática, se le quita la oportunidad de hacer matemáticas, es decir de construir por sí mismos herramientas para resolver problemas ,y este es o debe de ser el propósito de la enseñanza de las matemáticas.

LA MATEMATICA EXPULSADA DE LA ESCUELA

LUIS MORENO ARMELLA

“Saber matemáticas”.- Es mirar un lenguaje de la naturaleza, traducido en símbolos, cada símbolo contiene significados matemáticos traducidos al lenguaje cotidiano para su comprensión logrando, La capacidad de usar flexiblemente herramientas matemáticas para resolver los problemas que se nos presenten en nuestra vida diaria.

El saber matemáticas nos es únicamente centrar la atención en los contenidos matemáticos formales, sino en la capacidad de pensar matemáticamente, con un pensamiento crítico y pensamiento complejo de generar y crear procesos no canónicos, pero incluso creativos; para resolver problemas.

Hay personas que aprenden matemáticas a partir de que se enfrentan a numerosos problemas que tienen que resolver a lo largo de su vida, la que vende en el mercado incluso sin formación escolar básica, o la que va al trabajo y tiene que hacer trabajo aritmético para pagar el camión, pagar sus alimentos etc.

La función de la escuela, es desarrollar la capacidad, la habilidad y competencias del pensamiento superior de los alumnos para resolver problemas utilizando los conocimientos matemáticos con los que cuentan es decir sus saberes previos.

DOS CONCEPCIONES DE LOS QUE ES HACER MATEMATICAS:

- **Se considera que los alumnos son poco creativos en el uso de las herramientas matemáticas porque no se les permite que utilicen otros**

recursos matemáticos como los procesos de matematización que los mismos niños hacen, y que se expresen verbalmente o por escrito, en un lenguaje informal (utilización de procedimientos no convencionales) el uso de medidas no convencionales, como el uso de distancias usando objetos diversos y al final el uso del sistema métrico decimal o incluso el uso “intuitivo “ en problemas de calculo diferencial.

- Está ausente el sentido que deben tener los algoritmos, tanto por los problemas que permite resolver, como por los procedimientos largos y no sistemáticos que sustituye.

Los alumnos deberán resolver inicialmente los problemas con recursos informales para después identificar que esos procedimientos “no son validos” para utilizar la “operación” con la que se “deben” resolver.

Los niños desde primer año llegan a la escuela con “cosas” que han aprendido fuera de ella, es necesario reconocer que en esas “cosas” hay saberes matemáticos, al igual el alumno al iniciar el semestre inicial del cálculo diferencial, con elementos de aritmética, geometría, trigonometría, geometría analítica, algebra que es básico para resolver los problemas de calculo diferencial.

Tal vez un niño tarde un poco más en conocer el lenguaje formal de las matemáticas si se le permite utilizar recursos informales, pero desarrollan una actitud y disposición creativa y de búsqueda frente a problemas.

Si la matemática es una colección de relaciones formales y establecidas, la discusión, el debate, la formulación de hipótesis y la necesidad de probar o refutar, están fuera de las prácticas escolares, pero generadas a raíz de un problema, entonces puede haber lugar al debate y la demostración.

La visión del maestro respecto a las matemáticas como lenguaje formal, ha expulsado de la escuela a la matemática informal, y ella, la capacidad de pensar matemáticamente, de buscar soluciones a los problemas y de inventar procedimientos de solución.

CONSTRUCTIVISMO Y EDUCACION MATEMATICA

-EL PAPEL DE LA EPISTEMOLOGIA EN LA PRÁCTICA EDUCATIVA

Sin duda el “estado del arte”, término acuñado en el lenguaje informático, que pretende expresar el conocimiento más alto en el que se encuentra materia alguna, de las ciencias, cualesquiera que estas sean.

Al hablar de “educación matemática” no se habla solo de la labor que realiza el profesor dentro del aula, sino de los factores que intervienen y hacen posible que la matemática se enseñe y se aprenda mejor aún se comprenda (constructos, urdimbres, diseño, desarrollo de planes y programas de estudio, libros de texto. Metodologías de la enseñanza, teorías de aprendizaje, evaluación, seguimiento etc.)

-BREVE BOSQUEJO HISTORICO

La epistemología es una disciplina cuyo objeto de estudio, es el conocimiento científico, su construcción, su estructuración en teorías, las bases sobre las que descansa, su naturaleza, sus alcances.

Los filósofos pre-socráticos aseguraban que era posible el conocimiento de la realidad, aunque algunos sugirieron que ese conocimiento podría obtenerse mejor de unas fuentes que de otras.

A Platón se le considera el verdadero iniciador de la epistemología, que fue él, quien hizo intentos sistemáticos de explicar sus cuestiones básicas como: ¿Qué es el conocimiento? ¿En dónde se fundamenta? ¿Qué tanto de lo que pensamos o conocemos es realmente conocimiento?.

-LA MATEMATICA COMO, OBJETO DE ENSEÑANZA

La concepción filosófica dominante sobre la matemática, ha sido formalista, nos la presenta como un cuerpo estructurado de conocimientos. El formalismo extirpa el significado de los objetos, para trabajar sólo con las “formas” y con las relaciones entre dichos objetos que se derivan de la base axiomática de las teorías.

La práctica educativa que se deriva de una concepción formalista de, la matemática, no ha sido fructífera.

La epistemología de la matemática que domina la enseñanza tradicional tiene sus raíces en la época de la antigua Grecia.

Para Platón, conocer significa reconocer, trasladar el cuerpo de objetos y relación es preexistentes en un mundo exterior, e implantarlos en el intelecto del individuo, a esta postura se le llama realismo matemático (separación explícita entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento).

Por otro lado hay que señalar, que la forma tradicional de enseñanza y el debate de la modernidad sobre los diferentes aspectos de la enseñanza de la matemática hacia los 60' y 70', trajeron consigo efectos donde se subrayan los siguientes:

Se subrayaron las estructuras abstractas en diversas áreas especialmente en álgebra.

Se pretendió profundizar en el rigor lógico, en la comprensión, contraponiendo ésta a los aspectos operativos y manipulativos.

Esto último condujo de forma natural al énfasis en la fundamentación a través de las nociones iniciales de la teoría de conjuntos y el álgebra donde el rigor es fácilmente alcanzable.

La geometría elemental y la intuición espacial sufrió un gran detrimento. La geometría es, en efecto mucho más difícil de fundamentar rigurosamente.

“Enseñar el área lógico-matemática en la educación infantil requiere una cualificación profesional nada desdeñable y tiene la misma importancia que enseñar matemática a un futuro ingeniero.” Chamorro, Didáctica de las matemáticas; PEARSON EDUCACION, Madrid ,2005.

CAPITULO 4

**“LA FILOSOFIA, LA SED
DEL ESPIRITU HUMANO ,
HACIA UNA UNA NUEVA VISION
A LO INESPERADO, A LO IMPENSABLE,
A LO IMPOSIBLE, A LO INCREIBLE A
SINTETIZARLO, EN LA LENGUA NATURAL
Y UNIVERSAL DE LA HUMANIDAD,
LA MATEMATICA”
RAFAEL IBARROLA CEBALLOS**

CAPITULO 4

DIDACTICA OPERATORIA

EL APRENDIZAJE

EXCEL Y MAPLE, ACTIVIDADES EN

LA SOLUCION DE DERIVADAS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

COMPARACION DE RESULTADOS

4.1 Aprendizaje

LOS FACTORES DEL APRENDIZAJE

Se basa en los estilos de aprendizaje, estrategias de aprendizaje las estrategias operativas de aprendizaje

¿QUÉ ES UN ESTILO?

♦ En el lenguaje pedagógico, el como le hace un individuo para aprender es decir su canal de aprendizaje, en el caso del docente en como enseñar, es decir los medios para enseñar y aprovechar los canales de aprendizaje, suele utilizarse para señalar una serie de distintos comportamientos reunidos bajo una sola etiqueta para el caso del niño o el adulto existe la posibilidad de un perfil grupal.

♦ Conclusiones acerca de la forma como actúan las personas, psicológicamente tenemos maneras de ser y ello nos da la idea de como le hacemos para aprender.

♦ Resultan útiles para clasificar y analizar los comportamientos las caracterizaciones de aula o el perfil grupal, que nos lleva a entender como aprenden los sujetos, es decir su canal de aprendizaje, auditivo el que aprende mejor escuchando, visual por medio de observar y el kinestésico que aprende mejor manipulando o con actividades.

♦ Algo superficial compuesto por comportamientos externos.

CORRIENTE FENOMENOLÓGICA

♦ Las características estilísticas son los indicadores de superficie de dos niveles profundos de la mente humana:

- el sistema total de pensamiento.

- las peculiares cualidades de la mente que un individuo utiliza para establecer lazos con la realidad.

¿ QUÉ ES ESTILO EDUCATIVO?

♦Dirige su atención a la manera en que un individuo se compromete, se orienta o combina varias experiencias educativas.

♦Se aprenden en la interacción con los demás, además se confirman, modifican o adaptan.

♦Tienen carácter social.

¿QUÉ SON LOS ESTILOS DE APRENDIZAJE?

♦La mayoría de los autores coinciden en que se trata de cómo la mente procesa la información o como es influida por las percepciones de cada individuo.

♦Son rasgos cognitivos, efectivos y fisiológicos, que sirven como indicadores relativamente, de cómo los discentes perciben, interaccionan y responden a sus ambientes de aprendizaje.

El Aprendizaje. . .

. . . Enfoques de APRENDIZAJE:

CONCEPTUALIZACIÓN Y CATEGORIZACIÓN:

♦Los sujetos demuestran consistencia en cómo forman y utilizan los conceptos, interpretan la información, resuelven problemas.

♦Enfoque relacional-contextual.

♦Enfoque analítico-descriptivo.

ESTILO ACTIVO

CARACTERÍSTICAS GENERALES...	APRENDEN MEJOR CUANDO ...	TIENEN DIFICULTAD PARA APRENDER CUANDO TIENEN QUE ...
<ul style="list-style-type: none"> ◆ Se involucran totalmente y sin prejuicios en las experiencias nuevas ◆ Disfrutan el momento presente ◆ Tienen a actuar primero y pensar después en las consecuencias ◆ Llenan sus días de actividades ◆ Les aburren realizar planes a largo plazo ◆ Les gusta trabajar rodeados de gente. ◆ Son: animadores, improvisadores, innovadores, conversadores, participativos, competitivos, etc. 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Realizan actividades que son desafíos. ◆ Intentan nuevas experiencias ◆ Hay emoción, drama y crisis ◆ Dramatizan . Representan roles. ◆ Acaparan la atención ◆ Resuelven problemas como parte de un equipo ◆ Encuentran personas de mentalidad semejante 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Adoptar un papel pasivo. ◆ Oír conferencias, exposiciones ◆ Analizar e interpretar datos. ◆ Trabajar solos ◆ Exponer temas muy teóricos, explicando causas, antecedentes, etc. ◆ Prestar atención a los detalles o realizar trabajos que exijan detallismo. ◆ Repetir reiteradas veces una misma actividad.

UN BOSQUEJO SOBRE USO DE PROGRAMACIÓN.

Al iniciar el estudio universitario, fue interesante recibir algunas herramientas de lenguajes de programación como en su momento lo fue fortran 77 o más tarde pascal, reconociendo la evolución de Gw Basic, o Basic o algol, al Visual Basic, usando aquí Excel y maple para el bosquejo didáctico al que queremos recurrir en el constructivismo matemático y una aplicación con la computadora.

Los métodos numéricos como solución a la serie de problemas de gran cantidad de operaciones de la matemática finita e infinita. Para iniciar este procedimiento revisemos el Visual Básic 6.0, para programar podemos decir que Visual Basic no es sólo un lenguaje de programación, sino una plataforma idónea para el mantenimiento y ampliación de todos los instrumentos que un sistema informático contiene.

Gestión de base de datos (prácticamente cualquier tipo), animaciones gráficas, aplicaciones multimedia, (conexiones tv y video, sonidos midi ect.)

Desde la aparición del lenguaje de programación Visual Basic, la programación de aplicaciones informáticas dio un giro tajante y decidido hacia los entornos gráficos como Windows u OS/2, de los que se ha dicho por expertos en la industria de desarrollo informático que gracias a su plasticidad y facilidad de manejo para el usuario son los entornos perfectos para los programadores de los años noventa.

Este lenguaje surgió como respuesta a las necesidades de programación de los más importantes diseñadores de aplicaciones para Windows debido a la complejidad que representaban algunos de los lenguajes hasta entonces existentes. De este modo el enfoque de programación de Visual Basic, es que la programación resulte sencilla, tanto más en su comprensión.

Es importante plantear en este trabajo que el uso de las tecnologías de la información es necesario en el desarrollo pleno y actual, del aprendizaje-enseñanza matemático actual, incluso mencionar que las plataformas de diseño y objetos de aprendizajes son una útil herramienta para este propósito, las redes sociales, en los diferentes medios y paginas de internet, worddraw, Facebook, skydrive, you tube, yahoo ,twiter, ect. Accesible a un gran público y en crecimiento exponencial también para el desarrollo académico formal e informal en el entorno Windows .

Conceptos como ADO, bases de datos relacionales, exploradores de Internet, Browser, Páginas HTML dinámicas que ocupan la actualidad ,son de propio mérito situaciones interesante que implican además el beneficio de estar al día y practicarlo como un elemento de retroalimentación de cualquier clase de matemáticas.

El enfoque de la programación debe ser eminentemente práctico como lo es, la necesidad del hombre por comprender su realidad y el conocimiento de los conceptos en este mundo de constantes revoluciones de todo género.

A saber se tomaran los siguientes aspectos a esta aplicación:

- Programación estructurada
- Utilización con Windows
- Listados de mensajes de error
- Uso en base de datos
- Gestión de memorimétodología, tradicional y metodología orientada a objetos.
- Uso de redes sociales y plataformas virtuales.

Es sin duda la observación y la prueba reiterativamente que se asimila lo que se pretende enseñar y es de ahí que en este aspecto se recurre a la

interpretación de este trabajo ; que es un esbozo de aplicar un cierto lenguaje de programación par enriquecer el trabajo docente en al aula.

Dado que el aprendizaje debe ser divertido y eficaz se busca similitud con esta metodología de trabajo que sin duda el docente en su práctica mejoraría de así desearlo y aquí no es más que una practica para tal fin.

El día quince de junio de 1988.Microsoft anunció la próxima aparición de su nuevo producto para la creación de aplicaciones: Visual Básic 6.0.propone como base que será el sistema popular de programación. “(Rapid Application Development).Visual Básic 6.0 vendrá provisto de un total interpretador de gráficos , de cualquier tipo ; un sistema integrado de acceso de datos ,tanto internos como externos (ODBC, object Data Conneción ; OLE DB., ect.) además de un diseñador de bases de datos para Oracle y SQL Server.Un nuevo entorno de fácil manejo para la creación de páginas web al mismo tiempo que esta programando” .

Por reconocer un poco los antecedentes del Visual Básic , transcribimos algunos datos desde su aparición.

Cabe señalar algunos conceptos como :

- Migración a controles OLE. Enlace de controles de Visual Básic con otras aplicaciones .
- Objetos OLE insertables dentro de la caja de herramientas. (Toolbox).
- Automatización OLE mejorada .Más dinamismo, facilidad y velocidad para enlazar Visual Basic con cualquier aplicación que soporte la técnica OLE.
- Objetos y colecciones reutilizables.

Que ofrece Visual Básic, una serie de ayudas para hacer que su trabajo se centre en codificar o traducir a lenguaje máquina, en contraposición a lo que antes era organizar diseños, control de aplicaciones.

Sugiere haber logrado, DE abierta que es una extensión, Creación de objetos con sus propios métodos personalizados.

Nuevo control enlazado a datos .Gestores de bases de datos, enlace con datos externos.

Generador de informes Cristal y comandos de recursos de archivos (REG).

Se ha introducido también una nueva tecnología de manejo de datos. La llamada active X Data Objete (ADO).Se trata de una fácil forma de acceso a los datos desde cualquier tipo de gestor de almacenamiento, incluido servidores de internet5. ADO soporta también el uso compartido por múltiples usuarios dentro de entornos cliente /servidor.

Respecto de IDE cabe señalar que tiene las mejores plataformas de la programación orientada a eventos para Internet

Para definir exactamente que a través de este lenguaje de programación y su utilidad en la didáctica para aplicarla en matemáticas, cabe señalar lo siguiente:

Se pretende un punto de vista particular y una aplicación que deje oportunidad para quién así lo desee también pueda incluirlo en su trabajo diario, así mismo definir algunos detalles importantes de las tecnologías en computación a las que se tienen acceso como las diversas tecnologías de redes, o simplemente en aplicaciones cotidianas de multimedia o simplemente al usar el office convencional.

Señalemos pues que OLE Object and Embedding (incrustación y vinculación de objetos). La tecnología que permite aplicaciones que contengan llamadas, código o cualquier componente de otras aplicaciones se denomina OLE.

IDE ,”Interface Development Integrated “.También es importante señalar que con el Nuevo Wizard se simplifica la distribución de las aplicaciones para personalizar tales eventos en cd, o presentaciones desapareciendo las problemáticas de los registros DLL”s, referencias pérdidas de los controles perdidas de componentes etc.

Resolución a innovaciones o implantes nuevos en la plataforma sobre todo en el trabajo con Internet para facilitar la asimilación de recursos, multivariable y de interfase.

Sin embargo el uso extensivo de office, es del común entre los usuarios de sistemas computacionales desde los primeros grados de estudio de educación básica, sin embargo la utilización de maple posibilita a los estudiantes del primer curso de universidad, habilitándolos en una programación específica era importante señalar elementos computacionales como los mencionados para abrir el abanico de posibilidades de la estructura digital infinita que abre la relación del aprendizaje de matemáticas y la era digital , hasta actualmente con los sistemas colaborativos en redes internacionales de conocimiento, de aprendizaje, sociales y no solo la individualización y mecanización de antaño.

DIDACTICA OPERATORIA.

El contenido siguiente ,sigue las formalidades, operatorias a las que estamos acostumbrados con la diferencia que se proponen al final algunas consideraciones hacia el enfoque constructivista, como el hecho de lograr aprendizajes basados en un trabajo creativo del desarrollo del pensamiento complejo y pensamiento critico.


4.2 EXCEL, APLICACIONES EN LA RESOLUCION DE DERIVADAS.

La noción principal para entender, el cálculo elemental, parte de la idea de función, gráfica y modelo, debe señalarse el Trabajo de Rene Descartes al vincular a dos ramas de la ciencia matemática ,como son la geometría y el álgebra, constituyendo la geometría analítica, partiendo del rigor matemático de la filosofía cartesiana hay que señalar la importancia del plano cartesiano. “Las posibilidades de éxito del cálculo aumentarían siguiendo el mismo método, es decir, realizar el calculo desde múltiples perspectivas –gráfica, analítica y numérica-incrementará la comprensión de los conceptos fundamentales.”

La manera de iniciar el estudio del cálculo, normalmente es bajo el entendimiento de un curso de álgebra y geometrías intermedias, y existen autores que manejan textos de precálculo, de tal suerte que al iniciar por abrir un texto de cálculo, lo primero que encuentras es un repaso de las formulas básicas de geometría y trigonometría, álgebra y geometría analítica, así como álgebra lineal, conjuntos y funciones.

Contando con ello evidenciaremos algunos problemas elementales y su tratamiento con software para lograr una mayor, atracción e interés en lo pedagógico.

Por ejemplo autores de la presente década usan los colores para diversificar y hacer atractivo el estudio del análisis, otros contienen software y colores y algunos su propia página Web y los vínculos correspondientes.



Otro ejemplo de trabajo en Excel, que por su formato parece interesante y dará al estudiante una intención clara de que a observarlo puede manipularlo o crearlo en Excel.

Graficando funciones racionales en Excel

En esta práctica se observa la importancia de conocer el dominio de una función para poder graficarla correctamente en Excel, que es sin duda la idea de una derivada como una función y la noción clave de dominio de una función.

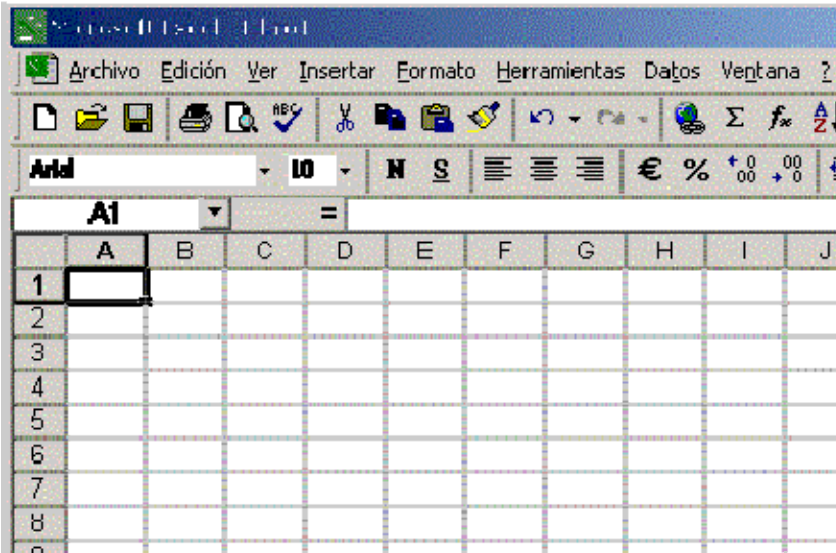
Ejemplo paso a paso

Primero vamos a intentar graficar una función racional sin tomar en cuenta su dominio. Vamos a ver que la gráfica así obtenida es incorrecta, y después obtendremos la gráfica correcta.

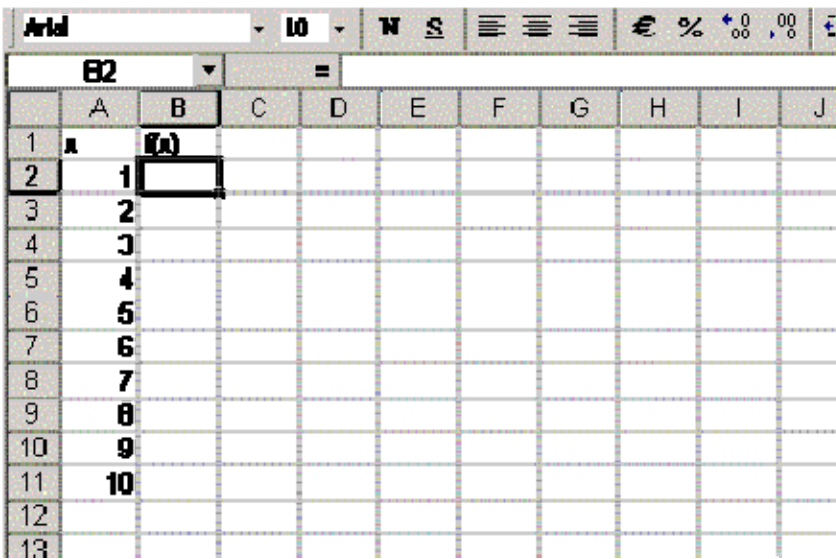
Vamos a intentar graficar la siguiente función racional:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6}{x^2 - 4}$$

Primero comenzamos con una hoja nueva de Excel:



Escribe valores para la variable x, desde 1 hasta 10:



Vamos a introducir la función

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6}{x^2 - 4}$$

Escribe en la celda **B2** la siguiente formula:

$$=(3*A2^2+6)/(A2^2-4)$$

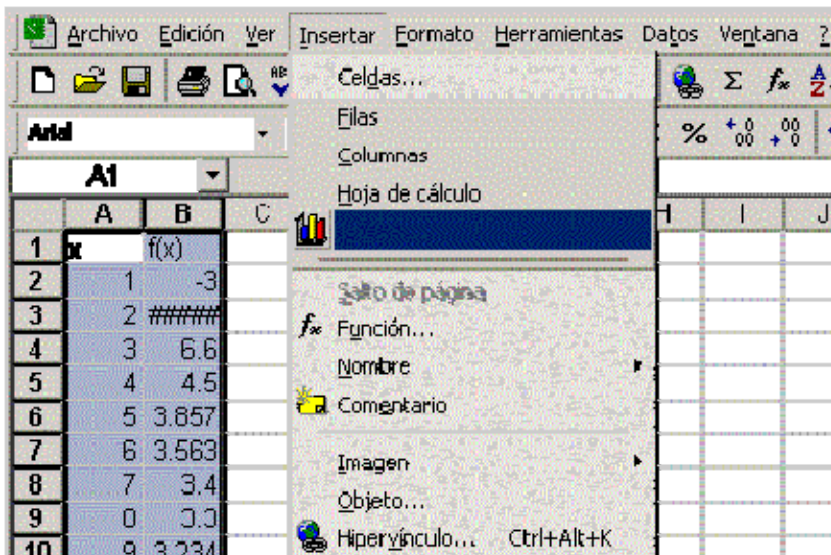
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	f(x)								
2	1	-3								
3	2									
4	3									
5	4									
6	5									
7	6									
8	7									
9	8									
10	9									
11	10									

Ahora **copia y pega (copy-paste)** la celda **B2** en las celdas **B3** a **B11**. Esto se puede hacer **arrastrando (drag)** la celda **B2** con el ratón oprimido desde la esquina inferior derecha de la celda **B2** hasta la celda **B11**:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	f(x)								
2	1	-3								
3	2	###								
4	3	6.6								
5	4	4.5								
6	5	3.857								
7	6	3.963								
8	7	3.4								
9	8	3.3								
10	9	3.234								
11	10	3.188								

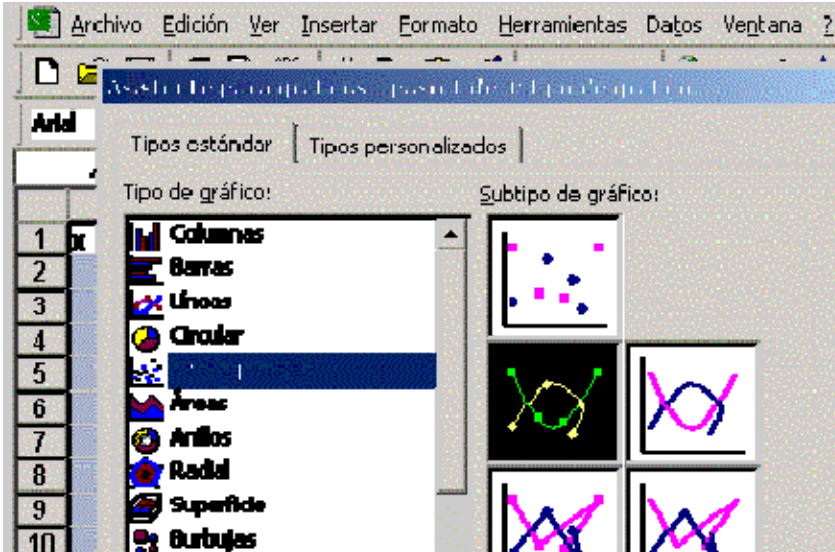
Observa que cada celda tiene su propia versión de la fórmula, por ejemplo la celda **B7** tiene la fórmula: $= (3*A7^2+6)/(A7^2-4)$; sin embargo esto no significa que tengas que escribir 10 versiones diferentes de la fórmula, sólo debes **arrastrar (drag)** o **copiar y pegar (copy-paste)** de la celda **B2** a las celdas **B3** a **B11**.

Selecciona con el ratón todas las celdas desde **A1** hasta **B11**. A continuación inserta un gráfico

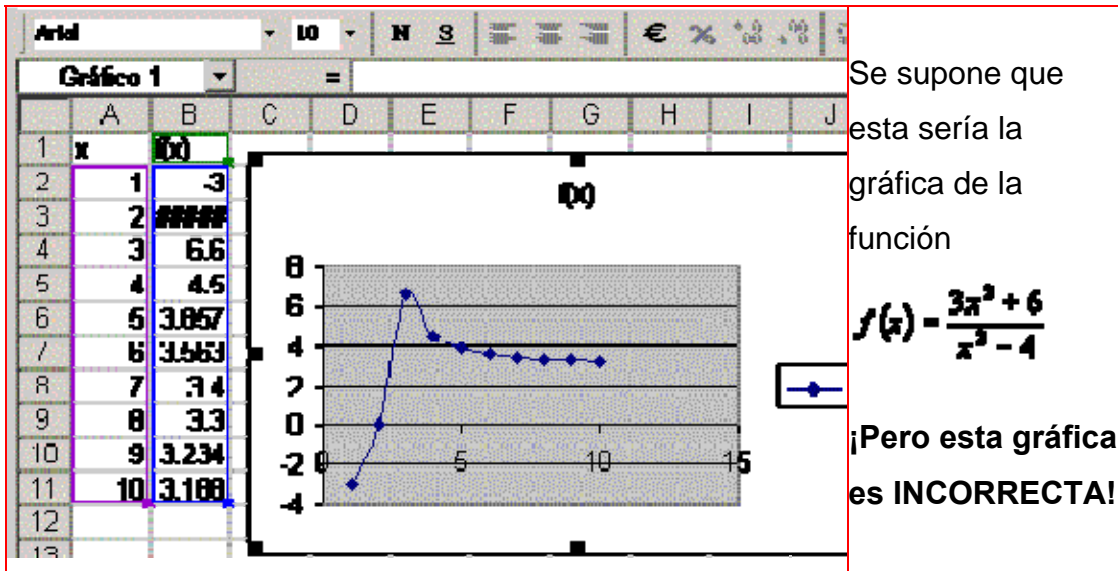


Selecciona gráfica de tipo **XY(Dispersión)** con puntos conectados por líneas suavizadas:

Ejemplos comunes de cálculo tradicional:



Oprime **Finalizar** y obtienes la siguiente gráfica:



Esta gráfica es incorrecta porque Excel no puede identificar que la gráfica de la función debe estar "rota" (discontinua) en $x=2$.

Por eso es importante conocer el dominio de una función antes que intentar graficarla en Excel.

El dominio de la función

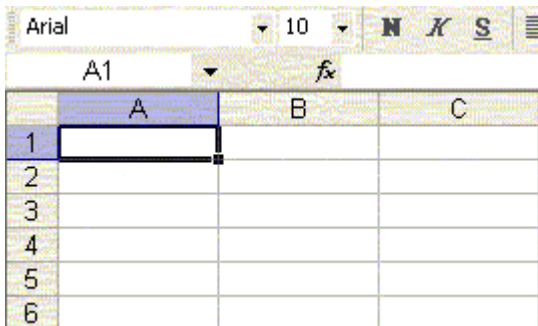
$$f(x) = \frac{3x^2 + 6}{x^2 - 4}$$

son todos los reales excepto -2 y 2:

$$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$$

Para hacer una gráfica correcta, debemos graficar tres regiones: antes del -2, entre el -2 y el 2 y después del 2.

Comenzamos una vez más con una hoja de Excel nueva.



The image shows a screenshot of an Excel spreadsheet. The top ribbon shows the font 'Arial' and size '10'. The formula bar contains 'fx'. The spreadsheet grid has columns labeled A, B, and C, and rows numbered 1 through 6. Cell A1 is currently selected.

Escribimos valores para x en los tres intervalos (antes del -2, entre el -2 y el 2 y después del 2):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x<-2	f(x)		x de -2 a 2	f(x)		x>2	f(x)
2	-5			-1.5			2.5	
3	-4.5			-1			3	
4	-4			-0.5			3.5	
5	-3.5			0			4	
6	-3			0.5			4.5	
7	-2.5			1			5	
8				1.5			5.5	
9							6	
10								

Vamos a introducir la función

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6}{x^2 - 4}$$

Escribe en la celda B2 la siguiente fórmula:

$$=(3*A2^2+6)/(A2^2-4)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x<-2	f(x)		x de -2 a 2	f(x)		x>2	f(x)
2	-5	$=(3*A2^2+6)/(A2^2-4)$		-1.5			2.5	
3	-4.5			-1			3	
4	-4			-0.5			3.5	
5	-3.5			0			4	
6	-3			0.5			4.5	
7	-2.5			1			5	
8				1.5			5.5	
9							6	
10								

Al oprimir Enter aparece el resultado del cálculo:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x<-2	f(x)		x de -2 a 2	f(x)		x>2	f(x)
2	-5	3.85714286		-1.5			2.5	
3	-4.5			-1			3	
4	-4			-0.5			3.5	
5	-3.5			0			4	
6	-3			0.5			4.5	
7	-2.5			1			5	
8				1.5			5.5	
9							6	
10								

Ahora copia y pega (copy-paste) la celda B2 en las celdas B3 a B7. Esto se puede hacer arrastrando (drag) la celda B2 con el ratón oprimido desde la esquina inferior derecha de la celda B2 hasta la celda B7:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x<-2	f(x)		x de -2 a 2	f(x)		x>2	f(x)
2	-5	3.85714286		-1.5			2.5	
3	-4.5	4.10769231		-1			3	
4	-4	4.5		-0.5			3.5	
5	-3.5	5.18181818		0			4	
6	-3	6.6		0.5			4.5	
7	-2.5	11		1			5	
8				1.5			5.5	
9							6	
10								

Escribe en la celda E2 la siguiente formula:

$$=(3*D2^2+6)/(D2^2-4)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x<-2	f(x)		x de -2 a 2	f(x)		x>2	f(x)
2	-5	3.85714286		-1.5	$=3*(D2^2+6)/(D2^2-4)$		2.5	
3	-4.5	4.10769231		-1			3	
4	-4	4.5		-0.5			3.5	
5	-3.5	5.18181818		0			4	
6	-3	6.6		0.5			4.5	
7	-2.5	11		1			5	
8				1.5			5.5	
9							6	
10								

Ahora copia y pega (copy-paste) la celda E2 en las celdas E3 a E8. Esto se puede hacer arrastrando (drag) la celda E2 con el ratón oprimido desde la esquina inferior derecha de la celda E2 hasta la celda E8:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x<-2	f(x)		x de -2 a 2	f(x)		x>2	f(x)
2	-5	3.85714286		-1.5	-7.28571429		2.5	
3	-4.5	4.10769231		-1	-3		3	
4	-4	4.5		-0.5	-1.8		3.5	
5	-3.5	5.18181818		0	-1.5		4	
6	-3	6.6		0.5	-1.8		4.5	
7	-2.5	11		1	-3		5	
8				1.5	-7.28571429		5.5	
9							6	
10								

Escribe en la celda H2 la siguiente formula:

$$=(3*G2^2+6)/(G2^2-4)$$

Arial 10 **N X S** $\$$ % 000 $\frac{0}{00}$ $\frac{00}{0}$

ABS \times \checkmark $f_x = (3*G2^2+6)/(G2^2-4)$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x<-2	f(x)		x de -2 a 2	f(x)		x>2	f(x)
2	-5	3.85714286		-1.5	-7.28571429		2.5	$y/(G2^2-4)$
3	-4.5	4.10769231		-1	-3		3	
4	-4	4.5		-0.5	-1.8		3.5	
5	-3.5	5.18181818		0	-1.5		4	
6	-3	6.6		0.5	-1.8		4.5	
7	-2.5	11		1	-3		5	
8				1.5	-7.28571429		5.5	
9							6	
10								

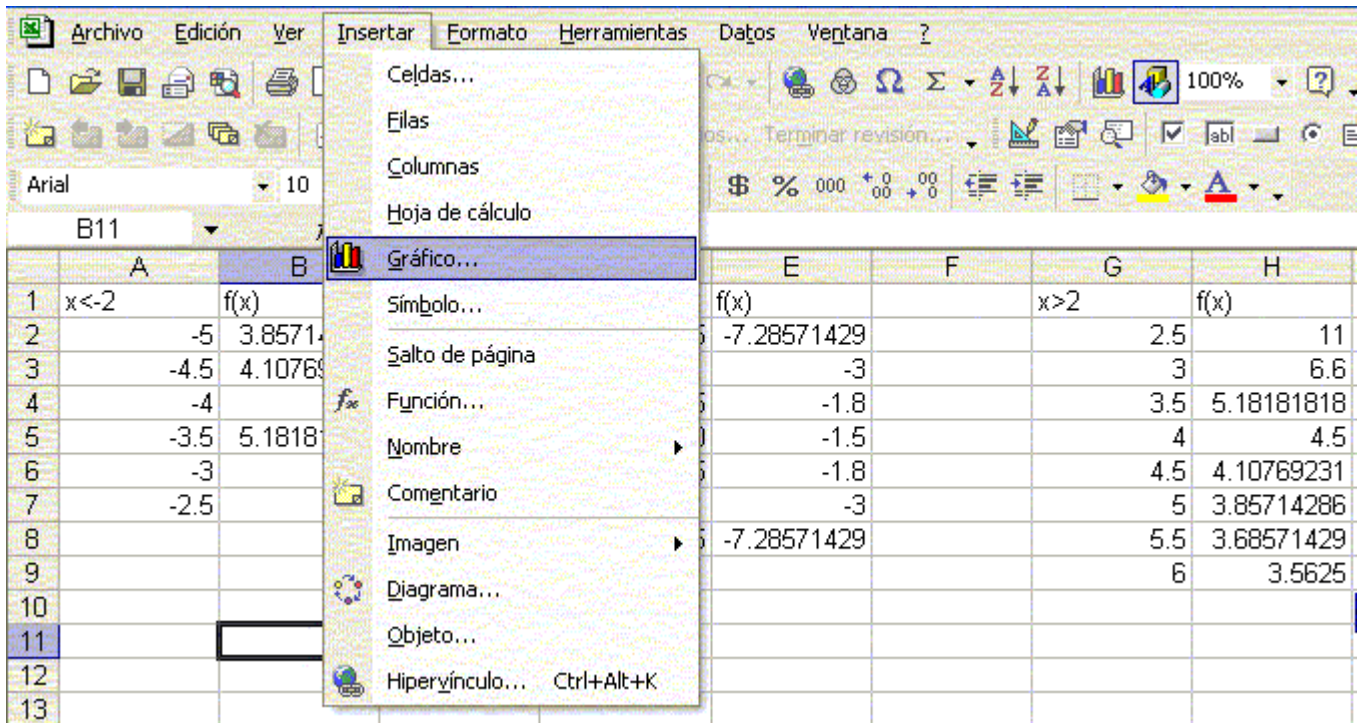
Ahora copia y pega (copy-paste) la celda H2 en las celdas H3 a H9. Esto se puede hacer arrastrando (drag) la celda H2 con el ratón oprimido desde la esquina inferior derecha de la celda H2 hasta la celda H9:

Arial 10 **N X S** $\$$ % 000 $\frac{0}{00}$ $\frac{00}{0}$

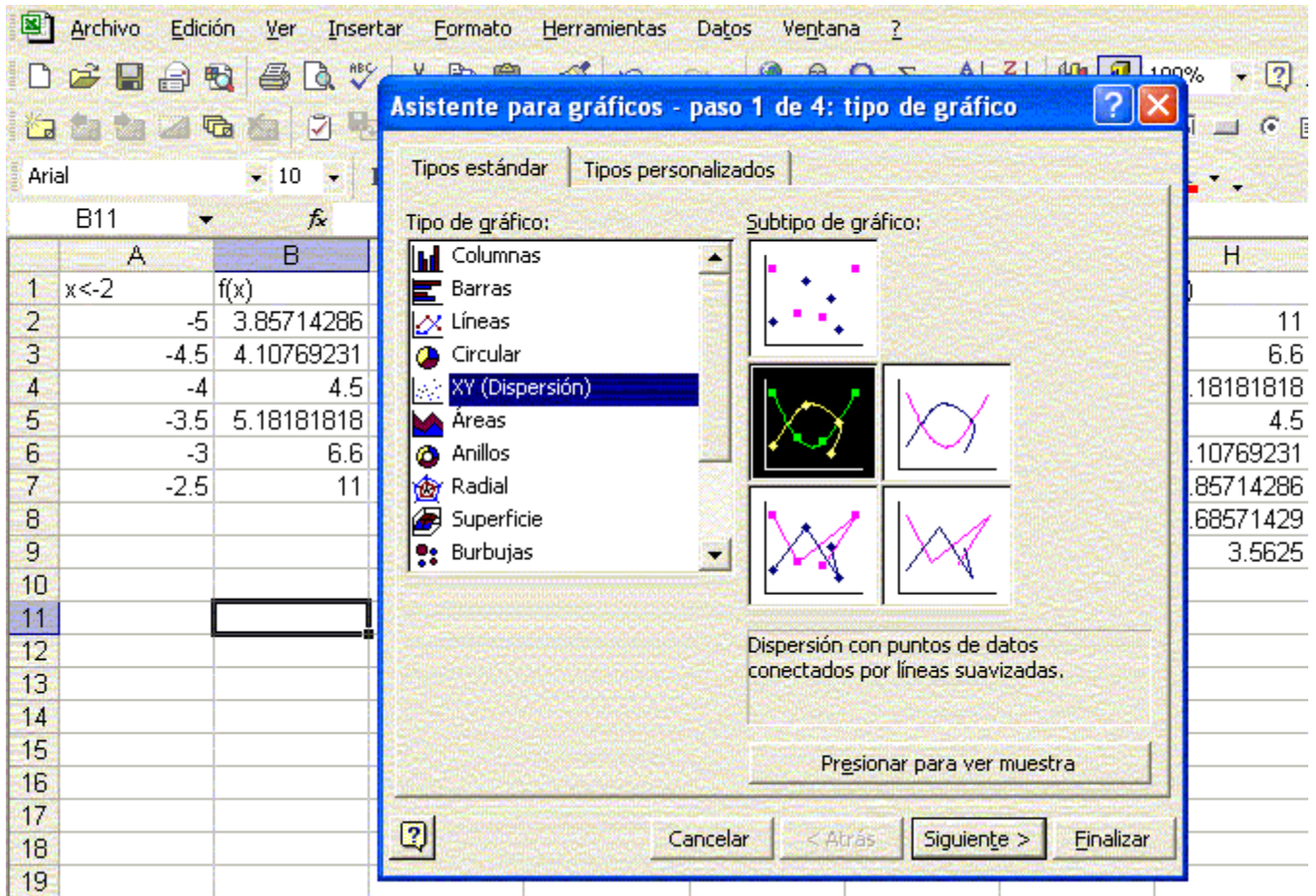
H9 \times \checkmark $f_x = (3*G9^2+6)/(G9^2-4)$

	A	B	Barra de fórmulas	D	E	F	G	H
1	x<-2	f(x)		x de -2 a 2	f(x)		x>2	f(x)
2	-5	3.85714286		-1.5	-7.28571429		2.5	11
3	-4.5	4.10769231		-1	-3		3	6.6
4	-4	4.5		-0.5	-1.8		3.5	5.18181818
5	-3.5	5.18181818		0	-1.5		4	4.5
6	-3	6.6		0.5	-1.8		4.5	4.10769231
7	-2.5	11		1	-3		5	3.85714286
8				1.5	-7.28571429		5.5	3.68571429
9							6	3.5625
10								

Inserta un nuevo gráfico (no debes tener seleccionado ningún rango de celdas):



Elige el tipo de gráfica XY(Dispersión), con puntos conectados por líneas suavizadas:



Oprime el botón Siguiete y después selecciona la pestaña Serie:

Asistente para gráficos - paso 2 de 4: datos de origen

Rango de datos Serie

Para crear un gráfico, haga clic en Agregar para agregar una serie de datos. A continuación, escriba la información de la serie o introduzca las referencias de las celdas en las casillas Nombre y Valores.

Serie

Agregar Quitar

Cancelar < Atrás Siguiente > Finalizar

	A	B
1	$x < -2$	$f(x)$
2	-5	3.85714286
3	-4.5	4.10769231
4	-4	4.5
5	-3.5	5.18181818
6	-3	6.6
7	-2.5	11
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		

Oprime el botón Agregar:

	A	B
1	$x < -2$	$f(x)$
2	-5	3.85714286
3	-4.5	4.10769231
4	-4	4.5
5	-3.5	5.18181818
6	-3	6.6
7	-2.5	11

Oprime la flechita roja al extremo derecho del campo Valores de X. La ventana se va a hacer pequeña para que puedas seleccionar en la hoja de cálculo. Con el ratón selecciona desde la celda A2 hasta la celda A7 y oprime Enter:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$x < -2$	$f(x)$	x de -2 a 2	$f(x)$			$x > 2$	$f(x)$
2	-5	3.85714286	-1.5	-7.28571429			2.5	11
3	-4.5	4.10769231	-1	-3			3	6.6
4	-4	4.5	-0.5	-1.8			3.5	5.18181818
5	-3.5	5.18181818	0	-1.5			4	4.5
6	-3	6.6	0.5	-1.8			4.5	4.10769231
7	-2.5	11	1	-3			5	3.85714286
8			1.5	-7.28571429			5.5	3.68571429
9							6	3.5625

Oprime la flechita roja al extremo derecho del campo Valores de Y.

The image shows the 'Datos de origen' (Data Source) dialog box in Microsoft Excel. The dialog box is open over a spreadsheet. The spreadsheet has columns A and B. Column A contains values: $x < -2$, -5, -4.5, -4, -3.5, -3, -2.5. Column B contains values: $f(x)$, 3.85714286, 4.10769231, 4.5, 5.18181818, 6.6, 11. The dialog box has a 'Rango de datos' tab selected. It shows a preview of a scatter plot with one data point at (-5, 3.85714286). Below the preview, the 'Serie' section shows 'Serie1' selected. The 'Valores de X' field contains '=Hoja1!\$A\$2:\$A\$7' and the 'Valores de Y' field contains '={1}'. There are 'Agregar' and 'Quitar' buttons. At the bottom of the dialog are 'Cancelar', '< Atrás', 'Siguiente >', and 'Finalizar' buttons.

La ventana se va a hacer pequeña para que puedas seleccionar en la hoja de cálculo. Con el ratón selecciona desde la celda B2 hasta la celda B7 y oprime Enter:

Datos de origen - Valores: ? X

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x<-2	f(x)		x de -2 a 2	f(x)		x>2	f(x)
2	-5	3.85714286		-1.5	-7.28571429		2.5	11
3	-4.5	4.10769231		-1	-3		3	6.6
4	-4	4.5		-0.5	-1.8		3.5	5.18181818
5	-3.5	5.18181818		0	-1.5		4	4.5
6	-3	6.6		0.5	-1.8		4.5	4.10769231
7	-2.5	11		1	-3		5	3.85714286
8				1.5	-7.28571429		5.5	3.68571429
9							6	3.5625
10								

Oprime el botón **Agregar**:

Datos de origen ? X

Rango de datos Serie

Serie

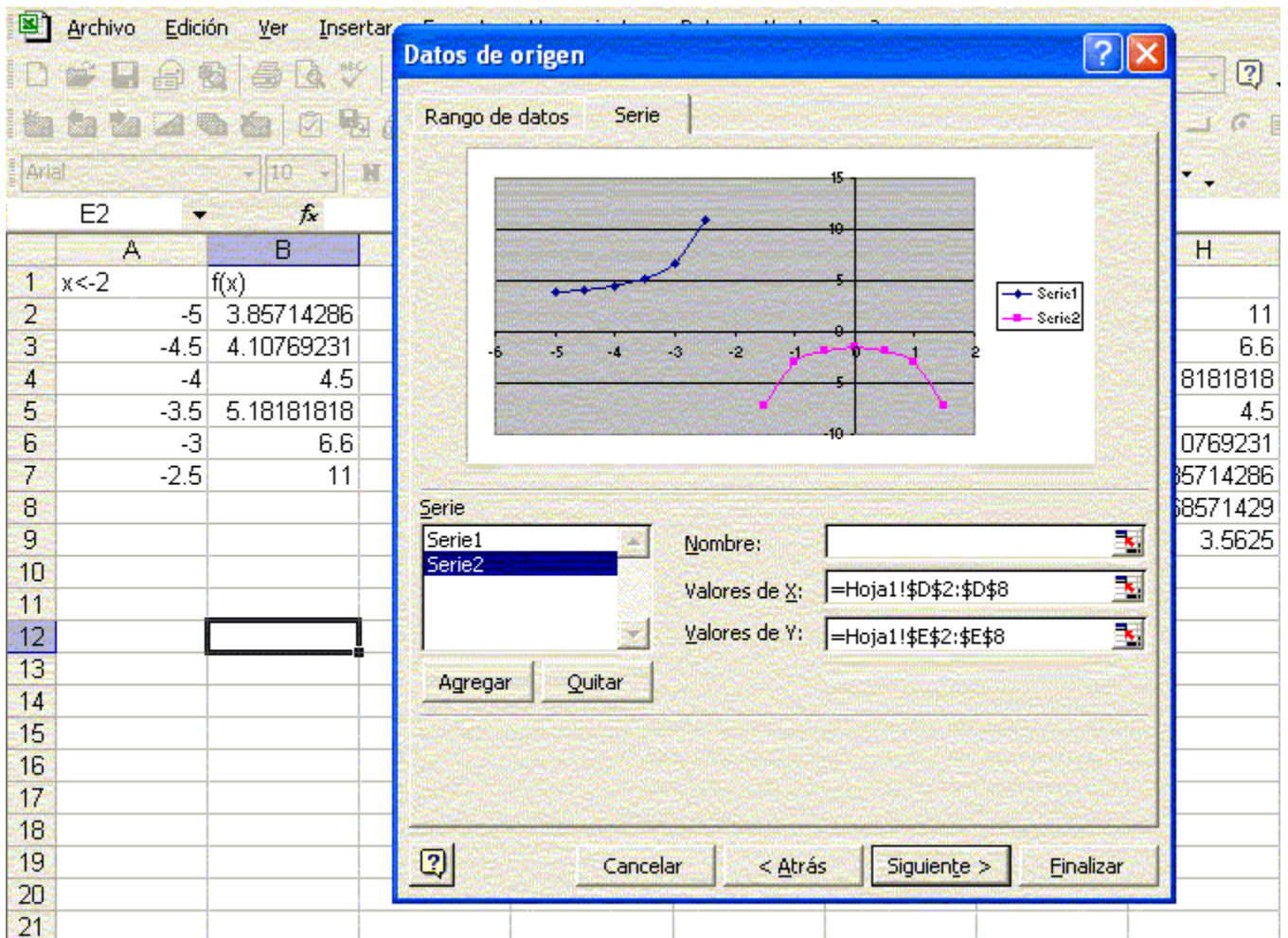
Serie1 Nombre:

Valores de X:

Valores de Y:

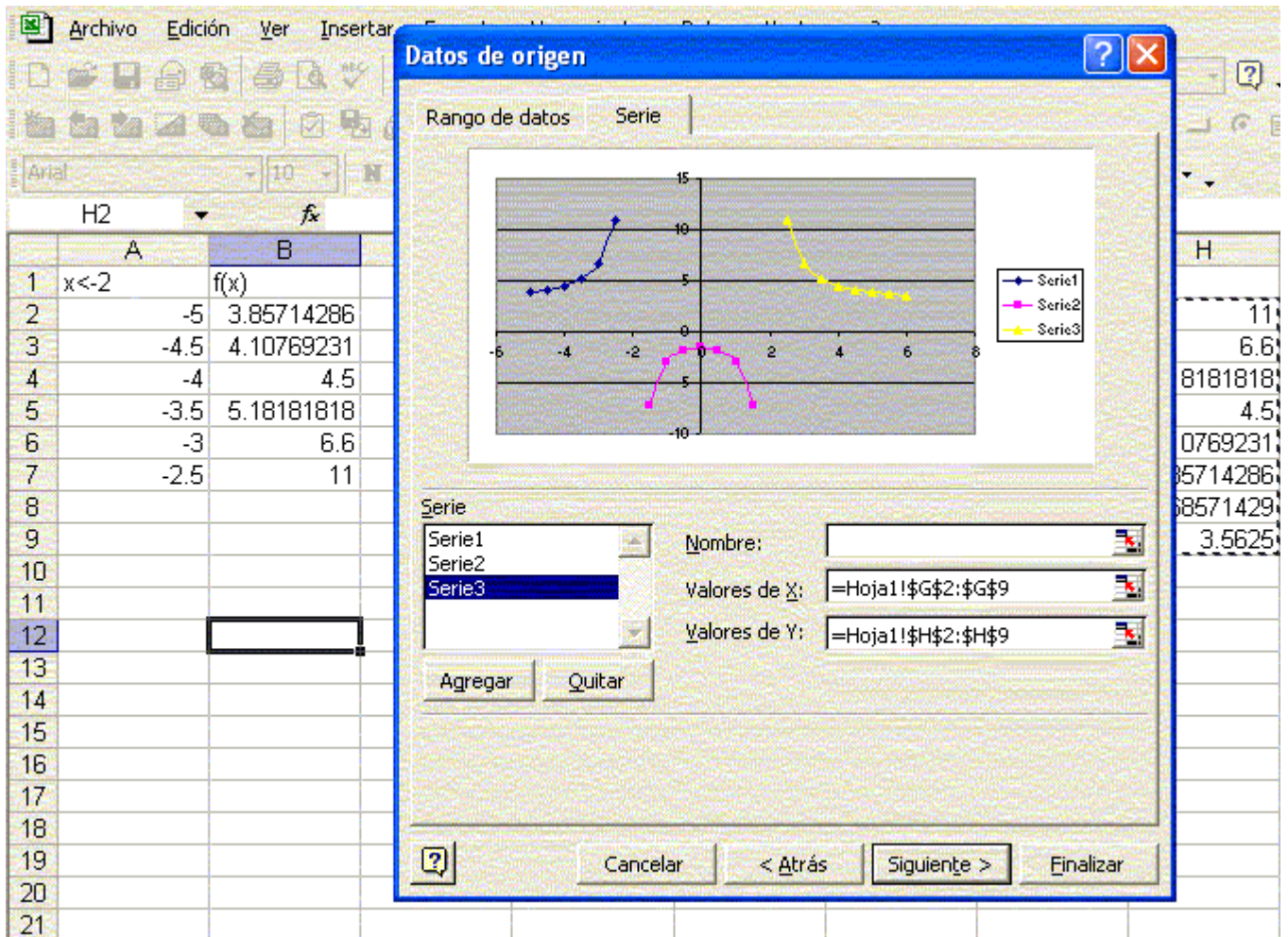
	A	B
1	x<-2	f(x)
2	-5	3.85714286
3	-4.5	4.10769231
4	-4	4.5
5	-3.5	5.18181818
6	-3	6.6
7	-2.5	11
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		

Con la Serie2 seleccionada oprime la flechita roja al extremo derecho del campo Valores de X. La ventana se va a hacer pequeña para que puedas seleccionar en la hoja de cálculo. Con el ratón selecciona desde la celda D2 hasta la celda D8 y oprime Enter. Oprime la flechita roja al extremo derecho del campo Valores de Y. La ventana se va a hacer pequeña para que puedas seleccionar en la hoja de cálculo. Con el ratón selecciona desde la celda E2 hasta la celda E8 y oprime Enter.



Oprime el botón Agregar. Con la Serie3 seleccionada oprime la flechita roja al extremo derecho del campo Valores de X. La ventana se va a hacer pequeña para que puedas seleccionar en la hoja de cálculo. Con el ratón selecciona desde la celda G2 hasta la celda G9 y oprime Enter. Oprime la flechita roja al extremo derecho del campo Valores de Y. La ventana se va a

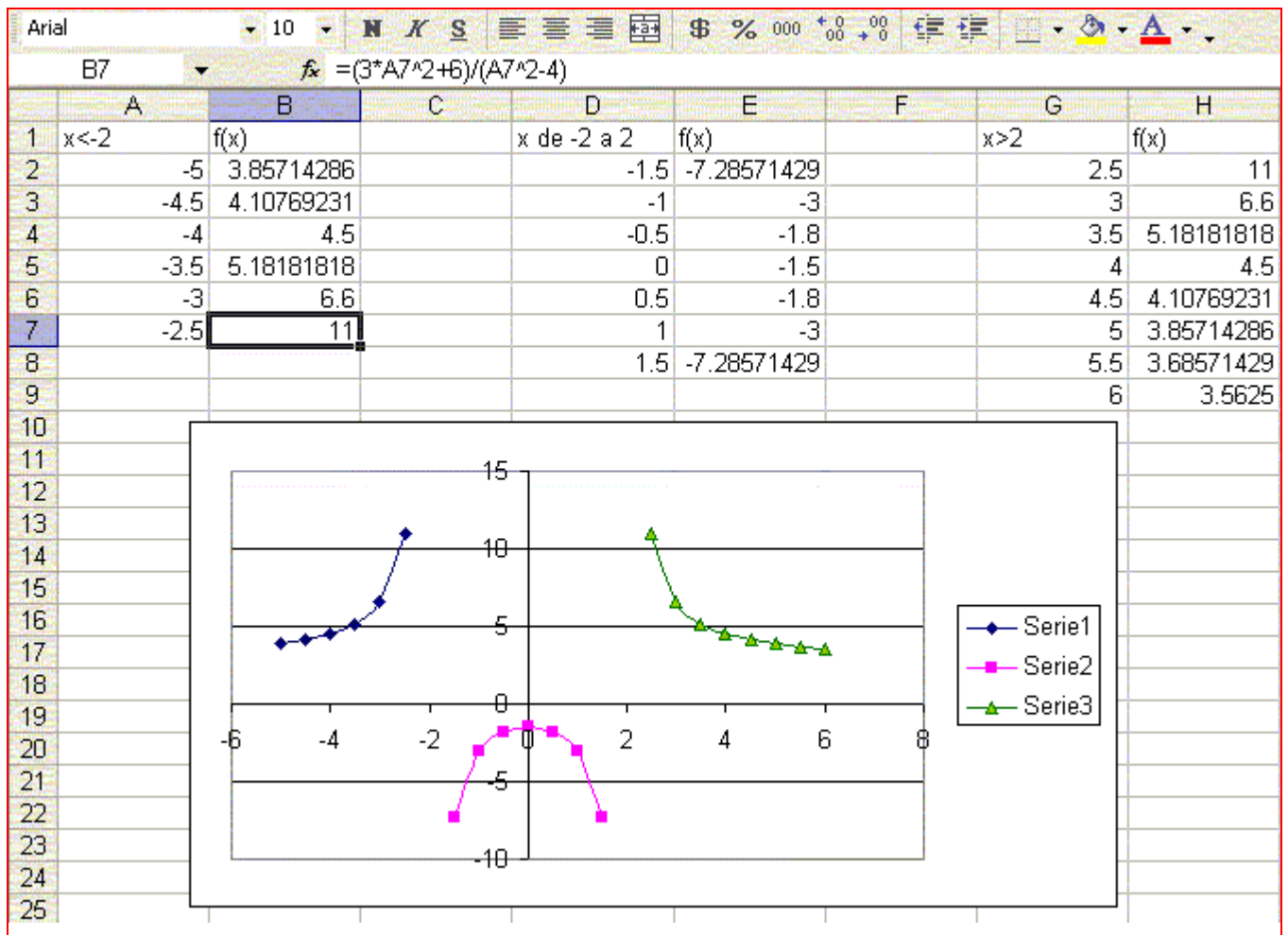
hacer pequeña para que puedas seleccionar en la hoja de cálculo. Con el ratón selecciona desde la celda H2 hasta la celda H9 y oprime Enter.



Oprime el botón **Finalizar**. Obtienes la siguiente gráfica:

Esta es la gráfica correcta de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6}{x^3 - 4}$$



Observa que la gráfica correcta está "rota" en $x=-2$ y $x=2$. Se dice que es *discontinua* en $x=-2$ y $x=2$.

[Contenido](#)

Comandos de Excel que fueron utilizados

Tipo de gráfica XY(Dispersión)

El tipo de gráfica "XY(Dispersión)" muestra la columna Y como función de la columna X. Es muy importante no confundirla con otro tipo de gráfica llamado "Líneas". El tipo "Líneas" hace otra cosa: muestra al mismo tiempo

a Y y a X como función del número de renglón. Para las gráficas matemáticas casi nunca vas a necesitar el tipo "Líneas", pero si vas a necesitar el tipo "XY(Dispersión)".

Comandos de Excel en Inglés

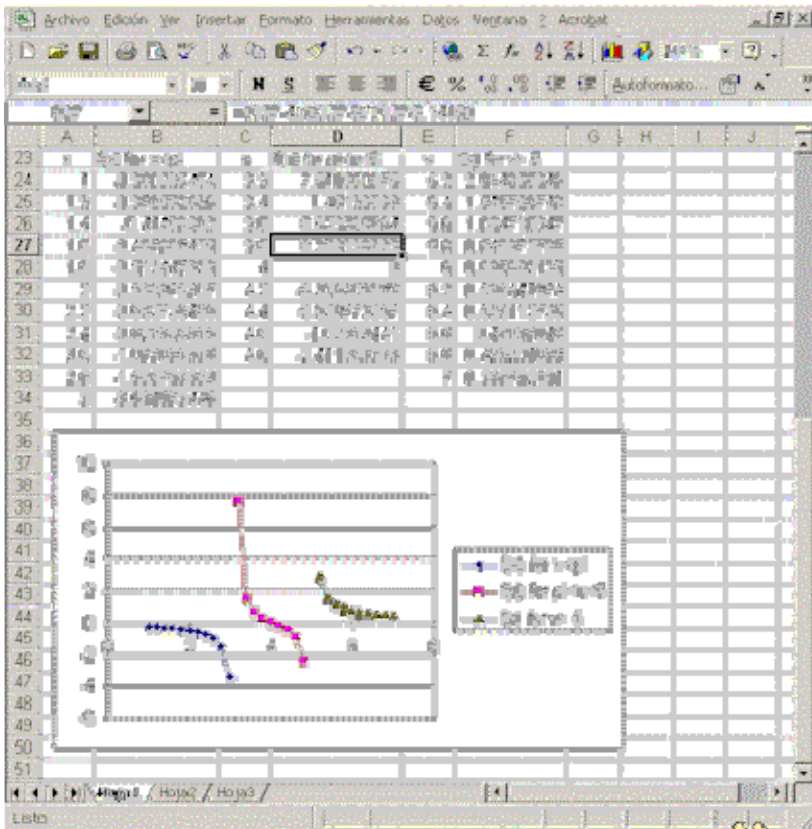
Si tienes Excel en Inglés entonces el tipo de gráfica "XY(Dispersión)" se llama XY(Scatter).

Usa Excel para graficar la función:

$$f(x) = \frac{x-4}{(x-5)(x-\pi)}$$

Nota: Es muy importante que uses paréntesis para agrupar el denominador:

$$=(A2-4)/((A2-5)*(A2-3.1416))$$



Ejemplos comunes de cálculo diferencial:

Basados en , 2006 © D.R. Universidad Nacional Autónoma de México. Programa de Conocimientos Fundamentales.

México.

El curso de Cálculo Diferencial e Integral empieza con el estudio de las funciones. En base al conocimiento de los números reales, las propiedades de las operaciones aritméticas y su interpretación geométrica en la recta.

La derivada como función

Si necesitáramos saber la velocidad instantánea en muchos momentos: t_1 , t_2 , t_3, \dots , tendríamos que calcular los límites para todos estos valores t_1, t_2, t_3, \dots , lo cual resulta sumamente laborioso. Tratemos mejor de calcular el límite anterior de manera general para cualquier t .

Como la distancia recorrida por el clavadista, en t segundos a partir de su caída es $d(t) = 4.9t^2$, calculamos el límite

$$\begin{aligned} d'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(t+h) - d(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9(t^2 + 2th + h^2 - t^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9(2th + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4.9(2t + h) = 9.8t, \end{aligned}$$

de esta manera, si queremos encontrar la velocidad instantánea en algún momento, por ejemplo $t = 0.5$ segundos, simplemente evaluamos

$$d'(t) = 9.8t \text{ en } t = 0.5$$

de donde

$$d'(0.5) = 9.8(0.5) = 4.9 \text{ m/s}$$

En general,

Si f es una función real, la función definida por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se llama la *función derivada* de f . El dominio de f' es el conjunto de puntos x

para los cuales este límite existe. Observamos que la regla de correspondencia de f' es más complicada, en las que básicamente intervenían solo operaciones aritméticas.

1. Encontrar la derivada de la función $f(x) = 3x - 4$.

Calculamos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3(x+h) - 4) - (3x - 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3, \end{aligned}$$

así que $f'(x) = 3$ para todo x .

2. Encontrar la derivada de la función $\frac{1}{x}$.

Calculamos

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2},$$

así que $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ para todo $x \neq 0$.

3. Encontrar la derivada de la función $f(x) = |x|$.

Calculamos

$$(|x|)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}.$$

Debemos hacer los cálculos por separado cuando $x > 0$, $x = 0$ y $x < 0$.

Si $x > 0$, como h tiende a cero, entonces $x+h$ se parece a $x > 0$ así que podemos suponer que $x+h > 0$, entonces

$$(|x|)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = 1.$$

Si $x < 0$, entonces podemos suponer que $x+h < 0$, así que

$$(|x|)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = -1.$$

Finalmente, si $x = 0$, el signo de $0+h$ dependerá de qué lado del cero esté h . Si $h < 0$ entonces

$$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

en cambio, si $h > 0$,

$$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Como los límites por la derecha y por la izquierda son distintos, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

no existe, por lo que $|x|$ no es derivable en 0 .

Recapitulando

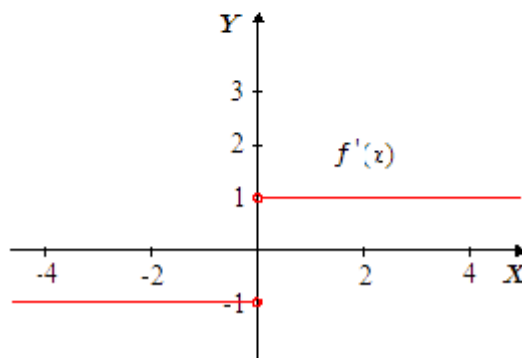
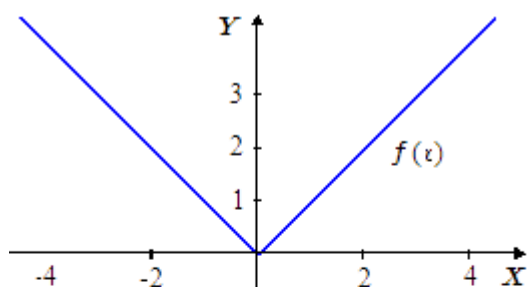
$$(|x|)' = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

y no está definida para $x = 0$.

En la gráfica de $|x|$ observamos que la recta tangente a $|x|$ en un punto $(x, |x|)$, con $x \neq 0$ es una de las rectas que componen su gráfica y tiene

pendiente -1 para $x < 0$ y tiene pendiente 1 para $x > 0$, pero la gráfica de $|x|$ no tiene tangente en $(0,0)$.

Observa que la gráfica de f' da un brinco cerca de cero. En realidad, $|x|$ no está definida en cero su gráfica correcta se muestra a continuación.



Continuidad de las funciones derivables. Si una función es derivable en un punto a , entonces su gráfica tiene una recta tangente en el punto $(a, f(a))$, así que parece claro que f no puede estar rota en a . Esta propiedad se enuncia de la siguiente manera:

Si f es derivable en un punto a entonces es continua en a .

La demostración de este resultado aparece en el apéndice del capítulo.

El ejemplo anterior, $f(x) = |x|$, muestra que el recíproco de esta propiedad no es cierto, ya que $|x|$ es continua en 0 y sin embargo no es derivable en ese punto.

Notación.

Para $y = f(x)$, denotamos la derivada de f respecto a x como $f'(x)$ o simplemente como y' o como f' .

Propiedades algebraicas de la derivada

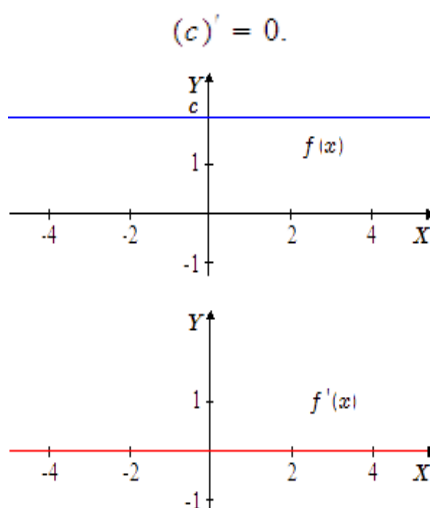
Para encontrar la derivada de una función, por ejemplo, $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$, podríamos calcular directamente la derivada de esta función mediante el cálculo de

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

pero las expresiones resultantes pueden ser algo complicadas.

En lugar de ello, podemos utilizar las propiedades algebraicas de la derivada y descomponer esta función en funciones más sencillas. Estas propiedades se enlistan a continuación.

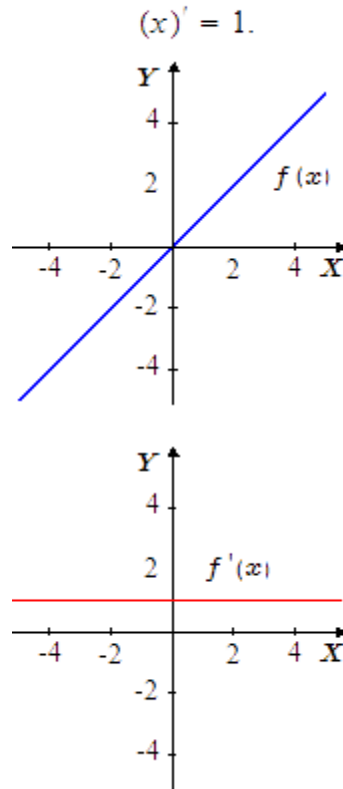
- Derivada de una constante. Si $f(x) = c$, donde c es una constante, entonces $f'(x) = 0$ para todo número real x .



Idea de la demostración: En la figura se ve que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = c$ en cualquiera de sus puntos es ella misma, y tiene

pendiente igual a 0 por ser horizontal. La demostración se deja como ejercicio.

- Derivada de la función idéntica. Si $f(x) = x$ para todo x , entonces $f'(x) = 1$ para todo número real x .

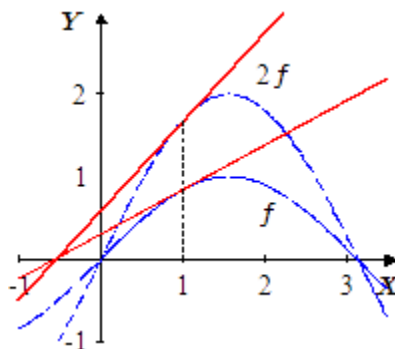


En la figura se ve que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x$, en cualquiera de sus puntos, es ella misma, y tiene pendiente igual a 1 .

- Derivada del producto de una función por una constante. Si $f(x)$ es derivable y c es una constante, entonces $cf(x)$ es derivable y

$$(cf)' = cf'.$$

Esta regla dice: "*La derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función*". Esta propiedad también se puede enunciar diciendo que la constante c puede salir del signo de diferenciación.



En la figura se muestran dos funciones: f y $2f$ y sus tangentes en $x = 1$. Se observa que la pendiente de la tangente a $2f$ es el doble de la pendiente de la tangente a f .

- Derivada de x^n . Si n es cualquier número real, entonces

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Esta regla dice: "Poner el exponente como coeficiente y restar uno al exponente"

Observación: La demostración de esta propiedad puede hacerse viendo primero que es cierta cuando n es un número natural, luego, usando la fórmula de la derivada de un cociente, puede verse que es cierta cuando n es cualquier entero. Para probarla cuando n es un número racional es necesario usar propiedades de la función inversa, . Finalmente, para ver que es cierta para cualquier número real se necesita utilizar la función exponencial e^x .

- Derivada de la suma y resta de dos funciones. Si f y g son funciones derivables entonces $f+g$ y $f-g$ son derivables y

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f-g)' = f' - g'.$$

Esta regla dice: "La derivada de una suma es la suma de las derivadas"

- Derivada de un producto de funciones. Si f y g son funciones derivables entonces fg es derivable y

$$(fg)' = fg' + f'g.$$

Esta regla dice: *"La derivada del producto de dos funciones es: la primera por la derivada de la segunda más la segunda por la derivada de la primera"*.

- Derivada de un cociente de funciones. Si f y g son funciones derivables entonces $\frac{f}{g}$ es derivable donde $g(x) \neq 0$ y

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Esta regla dice: *"La derivada del cociente de dos funciones es: el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, entre el denominador al cuadrado"*.

Un caso particular de esta regla es cuando f es la función constante ¹, ya que entonces $f' = 0$ y obtenemos

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

1. Calcular la derivada de $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$.

Usamos varias de las propiedades anteriores:

$$\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)' = (3x^2)' + \left(\frac{1}{x}\right)'$$

Derivada de una suma.

$$= 3(x^2)' + (x^{-1})'$$

Derivada de una constante por una función.

$$= 3(2)x + 7(-1)x^{-2}$$

Derivada de x^n .

$$= 6x - \frac{7}{x^2}.$$

2. Calcular la derivada de $f(x) = \frac{5x^2 - 7}{x^3 + 5x}$.

$$\left(\frac{5x^2 - 7}{x^3 + 5x}\right)' = \frac{(5x^2 - 7)'(x^3 + 5x) - (5x^2 - 7)(x^3 + 5x)'}{(x^3 + 5x)^2}$$

Derivada de un cociente.

$$= \frac{(10x)(x^3 + 5x) - (5x^2 - 7)(3x^2 + 5)}{(x^3 + 5x)^2}$$

Derivada de cada polinomio.

$$= \frac{-5x^4 + 46x^2 + 35}{(x^3 + 5x)^2}$$

Simplificación.

3. Calcular la derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Escribimos la raíz como exponente:

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3}.$$

Usamos la derivada de x^n . La fórmula vale para cualquier exponente real n .

$$(x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{1/3-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

Que también puede escribirse como

$$\frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

4. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2\sqrt{x+3}$ en el punto $(1, f(1))$.

Escribimos la raíz como exponente:

$$f(x) = 2\sqrt{x+3} = 2(x+3)^{1/2}.$$

Como la ecuación de una recta es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

y $f'(-1)$ es la pendiente de la recta tangente en $(-1, f(-1))$, entonces tenemos que $x_1 = -1$, $y_1 = f(-1)$ y $m = f'(-1)$.

Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)(x+3)^{1/2-1} = (x+3)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x+3}}.$$

De donde

$$f'(-1) = \frac{1}{\sqrt{-1+3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y

$$f(-1) = 2\sqrt{-1+3} = 2\sqrt{2}.$$

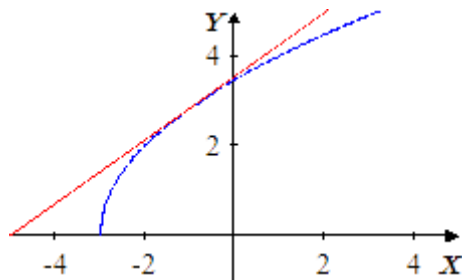
Así la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$$

$$y - 2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + 1),$$

es decir,

$$y = 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x + 1).$$



Derivadas de las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante son derivables en todo su dominio y:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

$$(\operatorname{cos} x)' = -\operatorname{sen} x.$$

$$(\operatorname{tan} x)' = \sec^2 x.$$

$$(\operatorname{cot} x)' = -\operatorname{csc}^2 x.$$

$$(\operatorname{sec} x)' = \sec x \operatorname{tan} x.$$

$$(\operatorname{csc} x)' = -\operatorname{csc} x \operatorname{cot} x.$$

1. Calcular la derivada de $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

$$f'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)'x - \operatorname{sen} x(x)'}{x^2} = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}.$$

2. Calcular la derivada de $f(x) = 2 \cos x \operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\cos x)' \operatorname{sen} x + 2 \cos x (\operatorname{sen} x)' = 2(-\operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x + 2 \cos x \cos x \\ &= 2 \cos^2 x - 2 \operatorname{sen}^2 x = 2 \cos(2x) \end{aligned}$$

Regla de la cadena

Encontrar la derivada de la función

$$h(x) = (5x^2 + 3x)^2.$$

Vamos a ver dos maneras distintas de resolver este ejercicio.

Primera solución: Para poder utilizar las fórmulas que tenemos hasta este momento, debemos calcular el cuadrado y luego derivar el resultado

$$h(x) = 25x^4 + 30x^3 + 9x^2,$$

entonces

$$h'(x) = 100x^3 + 90x^2 + 18x.$$

Segunda solución: Veamos ahora otra manera de resolver este problema que consiste en pensar a $h(x) = (5x^2 + 3x)^2$ como la composición de dos funciones.

Si hacemos

$$y = 5x^2 + 3x$$

y

$$g(y) = y^2,$$

entonces

$$h = g(y),$$

en efecto:

$$h = g(y) = y^2 = (5x^2 + 3x)^2.$$

Si calculamos por separado las derivadas de g y y ,

$$y' = 10x + 3$$

$$g'(y) = 2y,$$

las multiplicamos

$$g'(y)y' = 2y(10x + 3)$$

y sustituimos y por $5x^2 + 3x$, obtenemos

$$g'(y)y' = 2(5x^2 + 3x)(10x + 3),$$

lo cual coincide con la derivada de $h(x) = 25x^4 + 30x^3 + 9x^2$ como podemos comprobar haciendo las multiplicaciones indicadas:

$$\begin{aligned} g'(y)y' &= 2(5x^2 + 3x)(10x + 3) = (10x^2 + 6x)(10x + 3) \\ &= 100x^3 + 90x^2 + 18x = h'(x). \end{aligned}$$

Es decir,

$$h'(x) = g'(y)f'(x).$$

Este procedimiento se conoce como la Regla de la Cadena y se enuncia de la siguiente manera:

Regla de la cadena: Si f es derivable en x y g es derivable en $y = f(x)$ entonces la composición $h(x) = g(f(x))$ es derivable en x y

$$h'(x) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

o más brevemente, si $h = g(y)$, entonces

$$h' = g'(y)y'.$$

Hay funciones que son composición de funciones, como la del ejemplo introductorio, que antes de derivarse pueden reescribirse, efectuando las operaciones indicadas, para convertirlas en una función más simple, en el ejemplo, elevamos al cuadrado antes de derivar, pero no siempre las funciones propuestas se prestan a ello.

1. Derivar $h(x) = (8x^2 - 4x + 1)^4$.

Hacemos $y = 8x^2 - 4x + 1$ y $g(y) = y^4$, entonces $h = g(y)$ de donde

$$h' = g'(y)y' = 4y^3((16x - 4)) = 4(8x^2 - 4x + 1)^3(16x - 4).$$

2. Derivar $h(x) = \sqrt{5x^3 - 2x}$.

Hacemos $y = 5x^3 - 2x$ y $g(y) = \sqrt{y} = y^{1/2}$, entonces $h = g(y)$ de donde

$$\begin{aligned} h' &= g'(y)y' = \frac{1}{2}y^{-1/2}(15x^2 - 2) = \frac{1}{2}(5x^3 - 2x)^{-1/2}(15x^2 - 2) \\ &= \frac{15x^2 - 2}{2\sqrt{5x^3 - 2x}}. \end{aligned}$$

3. Derivar $h(x) = \cos(6x^2)$.

Hacemos $f(x) = 6x^2$ y $g(y) = \cos y$, entonces $h = g \circ f$ de donde

$$h' = g'(f(x))f'(x) = -\sin(y)(12x) = -\sin(6x^2)(12x).$$

Razón de cambio

Si en un cubo cambiamos el tamaño de la arista, claramente también cambia su volumen. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen respecto a la longitud de las aristas cuando la longitud de las aristas es 2 ?

La razón de cambio de una variable y respecto a otra variable x se define como la derivada de y respecto a x . Llamemos V al volumen del cubo, V es función de x y está dada por la fórmula

$$V = x^3,$$

así que

$$V' = 3x^2.$$

Cuando $x = 2$ tenemos

$$V'(2) = 3(2^2) = 12.$$

Lo que esto significa es que si un cubo tiene aristas de longitud 2 y éstas crecen una cantidad pequeña, entonces el volumen crecerá aproximadamente 12 veces esa cantidad. Por ejemplo, si un cubo de 2 cm por lado se calienta y crece 0.1 cm por lado, entonces su volumen crecerá aproximadamente $12 \times 0.1 = 1.2$ cm³.

Podemos ver directamente que el volumen de un cubo de 2 cm de lado tiene un volumen de $2^3 = 8$ cm³ y un cubo de 2.1 cm tiene un volumen de $2.1^3 = 9.261$ cm³ y observa que el incremento en el volumen es

$$9.261 - 8 = 1.261$$

que es parecido al 1.2 que habíamos previsto.

Si $s = f(t)$ representa la posición de un vehículo que se mueve en línea recta, t_0 es un momento determinado, el cociente

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

es la velocidad promedio del vehículo en el intervalo de tiempo entre t y t_0 , y la derivada de f

$$s' = f'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

es la velocidad instantánea del vehículo en el tiempo t_0 .

La velocidad dice qué tan rápido cambia la posición del vehículo. Esta idea de medir cómo cambia una variable respecto a otra, en este caso, la distancia recorrida respecto al tiempo, se puede aplicar en muchas otras situaciones, por ejemplo:

- cómo cambia la temperatura de un sartén respecto al tiempo cuando lo caliente en la estufa,
- cómo cambia el radio de un globo respecto al volumen cuando cambia el volumen,
- cómo cambia el volumen de un poliedro regular respecto a la longitud de las aristas cuando cambia el tamaño de ellas,
- cómo cambia la altura del agua en un tinaco respecto al tiempo conforme se va vaciando,
- cómo cambia el costo unitario de un producto con respecto a la cantidad de productos producidos cuando aumenta o disminuye el número de productos producidos,
- cómo cambia el rendimiento de combustible de un automóvil respecto a la velocidad cuando cambia la velocidad,

- cómo cambia la población de una especie respecto al tiempo cuando se enferma o es atacada por depredadores.

Normalmente reservamos la palabra velocidad para indicar cómo cambia una variable respecto al tiempo. Cuando la variable de referencia no es el tiempo, se suele decir *razón de cambio* en lugar de velocidad, así:

Si $y = f(x)$ es una función derivable y x_0 es un número fijo y $y_0 = f(x_0)$, el cociente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\text{cambio en la variable } y}{\text{cambio en la variable } x}$$

es la razón de cambio promedio de la variable y respecto a la variable x , cerca de x_0 , y la derivada de f

$$y' = f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

es la razón de cambio instantáneo en x_0 de la variable y respecto a la variable x .

Ejemplos

1. Una llave de agua está llenando un tinaco cilíndrico que tiene 0.5 metros de radio. Si la llave vierte 20 litros por minuto y si no está saliendo agua del tinaco, obviamente el nivel del agua sube conforme pasa el tiempo. ¿A qué velocidad crece la altura, h cuando $t = 5$ minutos?

Solución

Conforme el agua entra al tinaco, se forma un cilindro de agua, con el mismo radio del tinaco, es decir, 0.5 m. El volumen de este cilindro aumenta 20 litros por minuto. Si V es el volumen de agua, la velocidad con la que cambia el volumen respecto al tiempo es la derivada de V respecto a t .

Así que,

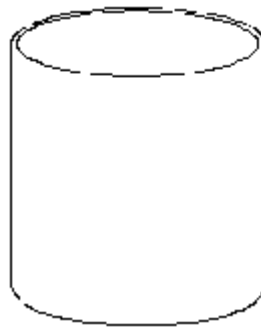
$$V = 20t \text{ litros}$$

y

$$V'(t) = 20 \text{ litros/min.}$$

Necesitamos ahora alguna fórmula que relacione el volumen y la altura de un cilindro. Recordamos la fórmula del volumen de un cilindro:

$$V = \pi r^2 h.$$



Si r y h están en metros, entonces V está dado en m^3 , así que es mejor convertir los litros en m^3 ($1 \text{ m}^3 = 1000$ litros)

$$20 \text{ litros} = 0.02 \text{ m}^3$$

y entonces

$$V'(t) = 0.02 \text{ m}^3/\text{min.}$$

Nuestro cilindro tiene un radio conocido, 0.5 m , así que

$$V = \pi(0.5)^2 h = 0.25\pi h.$$

De la fórmula anterior podemos despejar h

$$h = \frac{V}{0.25\pi},$$

es decir, la altura h del cilindro depende de su volumen.

Y la velocidad con la que cambia la altura respecto al volumen será la derivada de h respecto a V

$$h'(V) = \frac{1}{0.25\pi}.$$

Como la altura, h , depende del volumen, V , y éste a su vez depende del tiempo, t , por la regla de la cadena,

$$h'(t) = h'(V)V'(t) = \frac{1}{0.25\pi}(0.02) = \frac{0.08}{\pi} \approx 0.0255.$$

Así que la altura del cilindro aumenta 0.0255 m/min.

Observa que como el tanque es cilíndrico, la altura tiene un crecimiento constante, es decir, no depende del tiempo.

2. Un globo esférico se está llenando a razón de 1 litro por minuto. ¿Cómo está creciendo el radio del globo cuando $t = 5$ minutos?

Solución

Como el globo se está llenando a razón de 1 litro por minuto, el volumen del globo aumenta $0.001 \text{ m}^3/\text{min}$, entonces

$$V(t) = 0.001t \text{ m}^3$$

y

$$V'(t) = 0.001 \text{ m}^3/\text{min},$$

donde t está medido en minutos y V en m^3 .

Buscamos ahora una fórmula que nos relacione el radio del globo con su volumen. La fórmula del volumen de la esfera es

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

De aquí podemos despejar el radio

$$r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}.$$

El radio depende del volumen y el volumen depende del tiempo, para encontrar cómo cambia el radio respecto al tiempo, aplicamos la regla de la cadena: Calculamos $r'(V)$, $V'(t)$ y multiplicamos

$$r'(V) = \frac{1}{3} \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{-2/3}$$

$$V'(t) = 0.001,$$

Entonces :

$$r'(t) = r'(V)V'(t) = \frac{1}{3} \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{-2/3} (0.001).$$

Sustituyendo V por su valor dependiendo del tiempo,

$$r'(t) = \frac{1}{3} \left(\frac{3(0.001t)}{4\pi}\right)^{-2/3} (0.001).$$

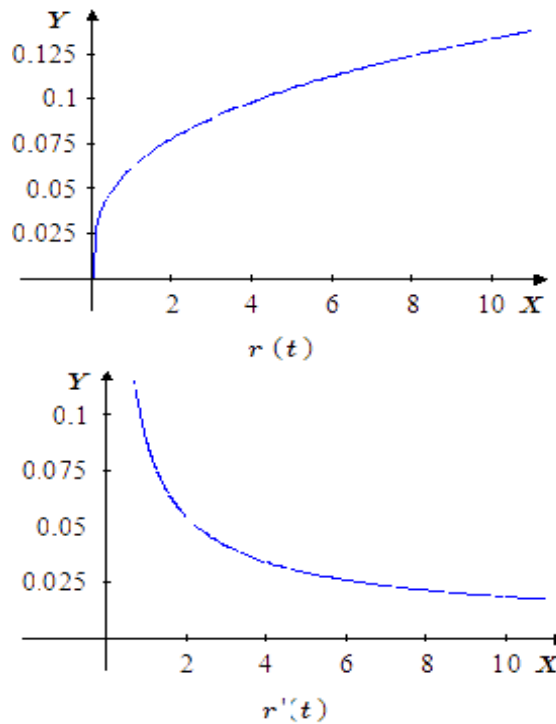
Finalmente, para ver cuánto crece el radio cuando $t = 5$ minutos, sustituimos $t = 5$ en la ecuación anterior

$$r'(5) = \frac{1}{3} \left(\frac{3(0.005)}{4\pi}\right)^{-2/3} (0.001) \approx 0.029 \text{ m/min}$$

Observa, que aunque el volumen del globo crece a una razón constante, su radio crece cada vez más lento, por ejemplo, para 10 minutos

$$r'(10) = \frac{1}{3} \left(\frac{3(0.01)}{4\pi} \right)^{-2/3} 0.001 \approx 0.018 \text{ m/min}$$

A continuación se muestran las gráficas de $r(t)$ y $r'(t)$ en las que se observa que r es creciente, pero crece cada vez más despacio.



3. (Costo marginal) El costo de producción para producir x unidades de cierto producto está dado por

$$c(x) = 10 + 5x + \frac{100}{x}.$$

¿Cuál es la razón de cambio del costo de producción respecto al número de unidades producidas cuando $x = 50$?

Solución

Debemos calcular $c'(x)$ y evaluarla en $x = 50$.

$$c'(x) = 5 - \frac{100}{x^2}$$
$$c'(50) = 5 - \frac{100}{50^2} = 4.96.$$

La razón de cambio del costo de producción de un producto respecto a la cantidad de unidades producidas se llama *costo marginal*. En economía esto es importante, pues, si el número de unidades producidas es grande, un incremento de una unidad es muy pequeño, el costo marginal será aproximadamente igual al costo de producir una unidad más del producto dado. Es decir, el costo de producir la unidad número ⁵¹ es de \$4.96.

En el ejercicio, el costo de producir ⁵⁰ unidades es

$$c(50) = 10 + 5(50) + \frac{100}{50} = 262$$

y el costo de producir ⁵¹ unidades es

$$c(51) = 10 + 5(51) + \frac{100}{51} = 266.96.$$

El incremento en el costo es

$$c(51) - c(50) = 266.96 - 262 = 4.96$$

que es el costo marginal que obtuvimos antes.

De manera similar, se definen la utilidad marginal y el ingreso marginal como la razón de cambio de la función utilidad o la función ingreso respecto al número de unidades producidas.

4. (Utilidad marginal) Un fabricante de lápices estima que el precio al que puede vender un lápiz es

$$P(x) = 4 - 0.001x$$

y el costo por producir x lápices al día es de

$$C(x) = 2 + 1.2x + 10\sqrt{x}.$$

Observa que cuando x crece, el precio debe bajar, ya que se satura el mercado, por otro lado, el costo de producción tiene un costo fijo de \$2, un término que es proporcional al número de lápices producidos y un término que depende de \sqrt{x} , esto quiere decir que mientras más lápices se produzcan, el costo unitario va a ir disminuyendo.

El ingreso se obtiene multiplicando el número de lápices vendidos y el costo de cada uno:

$$I(x) = xP(x) = x(4 - 0.001x).$$

La utilidad obtenida por la producción y venta de x lápices estará dada por la diferencia entre el ingreso y el costo.

$$\begin{aligned} U(x) &= I(x) - C(x) \\ &= x(4 - 0.001x) - (2 + 1.2x + 10\sqrt{x}) \\ &= -0.001x^2 + 2.8x - 10\sqrt{x} - 2. \end{aligned}$$

Las funciones ingreso marginal, costo marginal y utilidad marginal son

$$\begin{aligned} I'(x) &= 4 - 0.002x \\ C'(x) &= \frac{5}{\sqrt{x}} + 1.2 \\ U'(x) &= 2.8 - \frac{5}{\sqrt{x}} - 0.002x. \end{aligned}$$

5. (Crecimiento de bacterias) La cantidad de bacterias en un caldo de cultivo está dada de forma aproximada mediante la fórmula

$$f(x) = x^5 + 10x^4 + 56x^3 + 240x^2 + 693x + 1000$$

en la que x representa el número de días que lleva el cultivo. ¿Cuál es la razón de cambio de la cantidad de bacterias respecto al tiempo cuando $x = 1$? ¿cuándo $x = 2$?

Solución

Debemos calcular la derivada de la función que representa el número de bacterias.

$$f'(x) = 5x^4 + 40x^3 + 168x^2 + 480x + 693$$

y evaluarla cuando $x = 1$.

$$f'(1) = 5 + 40 + 168 + 480 + 693 = 1386,$$

esto significa que la población de bacterias está creciendo a razón de 1386 bacterias al día al final del primer día.

Cuando $x = 2$:

$$f'(2) = 5(2)^4 + 40(2)^3 + 168(2)^2 + 480(2) + 693 = 2725,$$

es decir, al final del segundo día, las bacterias están creciendo a razón de 2725 bacterias por día.

- Si una función f es derivable en un punto a , entonces es continua en a .
- La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función derivable $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.
- $(x^n)' = nx^{n-1}$.
- $(x^{1/n})' = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$.
- $(\text{sen } x)' = \text{cos } x$.
- $(\text{cos } x)' = -\text{sen } x$.
- $(\text{tan } x)' = \text{sec}^2 x$.
- $(\text{cot } x)' = -\text{csc}^2 x$.
- $(\text{sec } x)' = \text{sec } x \text{tan } x$.
- $(\text{csc } x)' = -\text{csc } x \text{cot } x$.

Si f y g son funciones derivables y c es una constante entonces

- $(cf)'(x) = cf'(x)$.
- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$.
- Si $h(x) = g(f(x))$ entonces $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

- Continuidad de las funciones derivables. Si una función f es derivable en un punto a , entonces es continua en a .

Demostración:

Si f es derivable en a entonces existe el límite

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

de donde

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a+h) - f(a))}{h} h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} h = f'(a)(0) = 0. \end{aligned}$$

Así que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = 0,$$

como

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a) = f(a)$$

puesto que es constante, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a) + f(a)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) + \lim_{h \rightarrow 0} f(a) = f(a) \end{aligned}$$

así que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a).$$

El punto $x = a+h$ tiende a a cuando h tiende a cero, así que el límite anterior puede escribirse como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Por lo que f es continua en a

- Derivada del producto de una función por una constante. Si $f(x)$ es derivable y c es una constante, entonces cf es derivable y $(cf)' = cf'$.

Demostración:

$$\begin{aligned}(cf)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} c \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x).\end{aligned}$$

Así que

$$(cf)' = cf'.$$

- Derivada de x^n . Si n es cualquier número real, entonces $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Demostración: Demostración para n natural:

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Factorizamos

$$\begin{aligned}(x+h)^n - x^n &= ((x+h) - x) \left((x+h)^{n-1} \right. \\ &\quad \left. + (x+h)^{n-2}x \right. \\ &\quad \left. + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1} \right) \\ &= h \left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x \right. \\ &\quad \left. + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1} \right)\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}.$$

Calculamos el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1},$$

simplemente haciendo $h = 0$ y obtenemos el resultado deseado

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}.$$

- **Derivada de la suma de dos funciones.** Si f y g son funciones derivables entonces $f+g$ es derivable y

$$(f+g)' = f' + g'.$$

Demostración:

$$(f+g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}.$$

Aplicando la definición de suma de funciones obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

podemos ahora separar en dos fracciones

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &+ \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

sustituyendo en (dem2) tenemos

$$(f+g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right).$$

Ahora usamos la regla de suma de límites (ver la página)

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

así que hemos probado que para cualquier x

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$

es decir,

$$(f+g)' = f' + g'.$$

- **Derivada de un producto de funciones.** Si f y g son funciones derivables entonces fg es derivable y

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Demostración:

$$(fg)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h}.$$

Aplicamos la definición del producto de funciones

$$\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Sumamos y restamos el término $f(x+h)g(x)$ en el numerador, el valor de la expresión no cambia, pues estamos sumando 0 .

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) + f(x)g(x)}{h}$$

Acomodamos los términos y separamos en dos sumandos

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) + f(x)g(x)}{h} \\ &= f(x+h) \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) + g(x) \left(\frac{f(x+h) + f(x)}{h} \right). \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x+h) \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \right. \\ & \quad \left. + g(x) \left(\frac{f(x+h) + f(x)}{h} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ahora usamos las reglas de suma y producto de límites (ver la página)

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ & + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \end{aligned}$$

y los calculamos:

El primer límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$$

ya que como f es derivable, entonces f es continua.

El segundo y tercer límite son la derivada de g y de f respectivamente, y el último límite vale $g(x)$, ya que no depende de h . Entonces :

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Así que

$$(fg)' = fg' + f'g.$$

- **Derivada del inverso multiplicativo.** Si f es una función derivable entonces $1/f$ es derivable donde $f(x) \neq 0$ y

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Demostración:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h}.$$

Simplificamos la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} &= \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x+h)f(x)h} \\ &= \left(\frac{-1}{f(x+h)f(x)}\right) \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (dem4),

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\left(\frac{-1}{f(x+h)f(x)}\right) \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) \right).$$

Aplicamos la regla del producto de límites (ver la página)

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{f(x+h)f(x)} \right) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

y evaluamos los límites.

- Como la función f es derivable en x , entonces es continua en x , así que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x).$$

Entonces :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{f(x+h)f(x)} \right) = -\frac{1}{f(x)^2}.$$

El segundo límite es la definición de la derivada de f . Así que

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{1}{(f(x))^2} f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Por tanto,

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

- Derivada de un cociente de funciones. Si f y g son funciones derivables entonces f/g es derivable donde $g(x) \neq 0$ y

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Demostración:

Escribimos el cociente como un producto

$$\frac{f}{g} = f\left(\frac{1}{g}\right)$$

y aplicamos la regla de la derivada de un producto

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\left(\frac{1}{g}\right)\right)' = f'\left(\frac{1}{g}\right) + f\left(\frac{1}{g}\right)'$$

Ahora usamos la fórmula de la derivada del inverso multiplicativo acabamos de probar, aplicándosela a la función $\frac{1}{g}$ y simplificamos

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}$$

Escribimos con un denominador común y obtenemos el resultado deseado

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

- **Regla de la cadena. Si f es derivable en x y g es derivable en $y = f(x)$ entonces la composición $h(x) = g(f(x))$ es derivable en x y**

$$h'(x) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Demostración:

Haremos una demostración simplificada en la que supondremos que $f(x+h) \neq f(x)$ para todo h suficientemente parecido a cero. Lo cual no es una restricción muy grande, ya que todas las funciones que estamos revisando satisfacen esta propiedad, excepto si f es constante en un intervalo que encierra a x , en cuyo caso h también es constante en ese intervalo y se satisface la fórmula deseada ya que de ambos lados vale cero.

Debemos calcular

$$h'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h}.$$

Multiplicamos y dividimos por $f(x+h) - f(x)$, que por la hipótesis adicional es distinta de cero,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h(x+h) - h(x)}{h} \right) \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x+h) - f(x)} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h(x+h) - h(x)}{f(x+h) - f(x)} \right) \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right). \end{aligned}$$

Calculemos el límite de cada factor por separado.

Para el primero, llamemos $y = f(x)$ y $k = f(x+h) - y$, entonces

$$\frac{h(x+h) - h(x)}{f(x+h) - f(x)} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{k} = \frac{g(y+k) - g(y)}{k}.$$

Como la función f es continua en x , si h tiende a cero entonces $f(x+h)$ tiende a $y = f(x)$ y por tanto k tiende a cero, así que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{f(x+h) - f(x)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = g'(y).$$

El segundo límite es inmediato, pues es la derivada de f en x

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Multiplicando estos dos límites obtenemos la expresión deseada

$$h'(x) = g'(y)f'(x).$$

Para calcular las derivadas de las funciones seno y coseno, necesitamos recordar dos identidades trigonométricas

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}a \cos b + \cos a \text{sen}b$$

$$\text{cos}(a+b) = \text{cos}a \cos b - \text{sen}a \text{sen}b$$

y dos límites importantes y:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{cos}x}{x} = 0.$$

- Derivada de la función seno: $(\text{sen}x)' = \text{cos}x$.

Demostración:

En esta prueba utilizamos primero la fórmula del seno de una suma para reescribir $\text{sen}(x+h)$ y posteriormente utilizamos los dos límites mencionados anteriormente.

$$\begin{aligned} (\text{sen}x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x \cos h + \cos x \text{sen}h - \text{sen}x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \text{sen}h}{h} \right) \\ &= \text{sen}x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}h}{h} \\ &= (\text{sen}x)(0) + (\cos x)(1) = \text{cos}x. \end{aligned}$$

- Derivada de la función coseno: $(\text{cos}x)' = -\text{sen}x$.

Demostración:

En esta prueba utilizamos primero la fórmula del coseno de una suma para reescribir $\cos(x+h)$ y posteriormente utilizamos nuevamente los límites mencionados anteriormente.

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen} x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\ &= (\cos x)(0) - (\operatorname{sen} x)(1) = -\operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

- Derivada de la función tangente: $(\tan x)' = \sec^2 x$.

Demostración:

Para esta función y las siguientes, utilizamos la derivada de un cociente y las derivadas del seno y el coseno.

Expresamos $\tan x$ como cociente de $\operatorname{sen} x$ entre $\cos x$ y derivamos usando la regla del cociente.

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)'(\cos x) - (\cos x)'(\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (-\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Ahora utilizamos la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y obtenemos

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x} \right)^2 = \sec^2 x.$$

- Derivada de la función cotangente: $(\cot x)' = -\operatorname{csc}^2 x$.

Demostración:

Expresamos $\cot x$ como cociente de $\cos x$ entre $\sin x$ y derivamos usando la regla del cociente.

$$\begin{aligned}(\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)'(\sin x) - (\sin x)'(\cos x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x},\end{aligned}$$

Nuevamente utilizamos la identidad trigonométrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ y obtenemos

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(\frac{1}{\sin x} \right)^2 = -\csc^2 x.$$

- Derivada de la función secante: $(\sec x)' = \tan x \sec x$.

Demostración:

Expresamos $\sec x$ como $1/\cos x$ y derivamos usando la regla del inverso multiplicativo.

$$\begin{aligned}(\sec x)' &= \left(\frac{1}{\cos x} \right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) \left(\frac{1}{\cos x} \right) = \tan x \sec x.\end{aligned}$$

- Derivada de la función cosecante: $(\csc x)' = -\cot x \csc x$.

Demostración:

Expresamos $\csc x$ como $1/\operatorname{sen} x$ y derivamos usando la regla del inverso multiplicativo

$$\begin{aligned}(\csc x)' &= \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)' = -\frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= -\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right) \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) = -\cot x \csc x.\end{aligned}$$

4.3 Maple aplicaciones en Cálculo.

Soluciones de la derivada con maple.

Maple es un sistema de programas, iniciado en la Universidad de Waterloo, en Canada, se usa para resolver diversos tipos de problemas matemáticos desde, aritmética, algebra y el análisis en este caso se resolverá algunos problemas sobre derivadas.

Primero se deben comprender algunas aplicaciones sencillas, sobre funciones y la forma de programar de manera elemental:

```
> with(Student[Calculus1]):
```

```
NewtonMethod(sin(x) + 1, x = 1);
```

```
-1.619017361
```

```
> NewtonMethod(sin(x) + 1, x = 2, output = sequence);
```

```
2, 6.588037826, 5.225039135, 4.962948756, 4.837009302, 4.774618375
```

```
> NewtonMethod(x^3 - x, x = -0.432, view = [-2..1, DEFAULT], output = plot);
```

```
> NewtonMethod(x^3 - x, x = 2, view = [0..3, DEFAULT], output = plot);
```

```
> NewtonMethod(x^2 + x + 1, x = 2, output = plot);
```

Para la función tangente:

Tangents

The Tangent routine returns the tangent to a curve at a given point.

> Tangent(sin(x), x=1, output = line);

Where the tangent is vertical, an equation form is returned.

> Tangent(surd(x,3), x=0, output = line);

> Tangent(sin(x), x=1, output = plot);

> Tangent(surd(x - 1,3), x=1, output = plot);

Para funciones inversas:

nverse of a FunctionThe inverse of a function can be plotted using the

InversePlot routine. The default plot domain and range are chosen to

the display reasonable portions of the function and its inverse.

> InversePlot(sin(x), x=0..4*Pi);

> InversePlot(tan(x), x=0..Pi);

> InversePlot((3*x^3 + x + 1)/(x^2 + 1), x=-3..3);

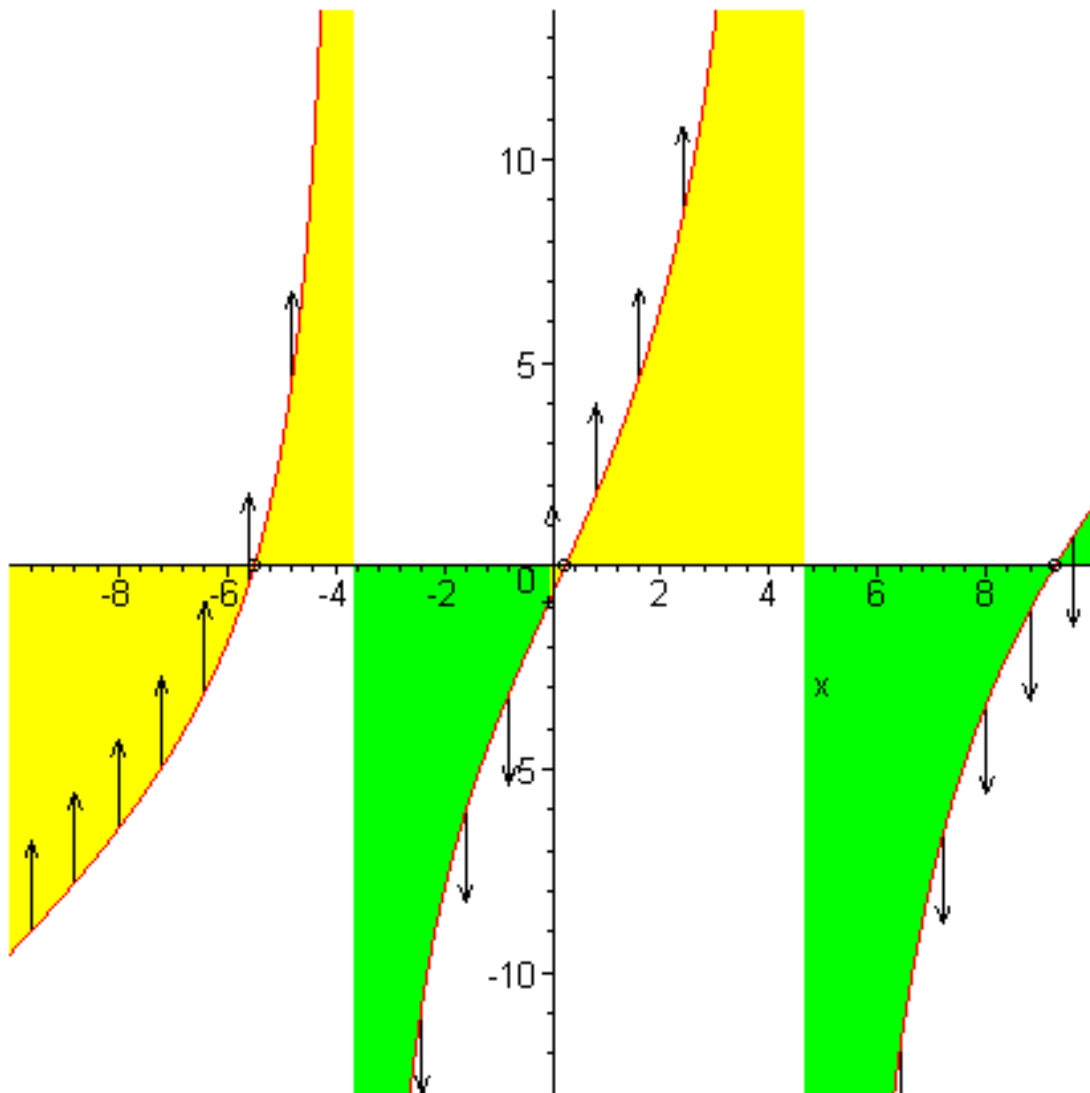
Resolución de funciones con Maple:

```
> with(Student[Calculus1]):  
FunctionChart((x^3 - 4*x^2 - 50*x + 12)/(x^2 - x - 17));  
FunctionChart(x*exp(x), -6..1, concavity=[], slope=color(red, black));  
FunctionChart(sin(x) + x, pointoptions=[symbolsize=20]);  
FunctionChart(sin(x) + x/2, slope=[thickness(2, 1), linestyle(solid, dash)],  
concavity=arrow, pointoptions=[symbolsize=20]);  
FunctionChart(2*x^3 + 1, x, sign=[linestyle(dash,solid), color(cyan, magenta),  
filled(coral, wheat), thickness(3,1) ], slope=[], concavity=[]);
```

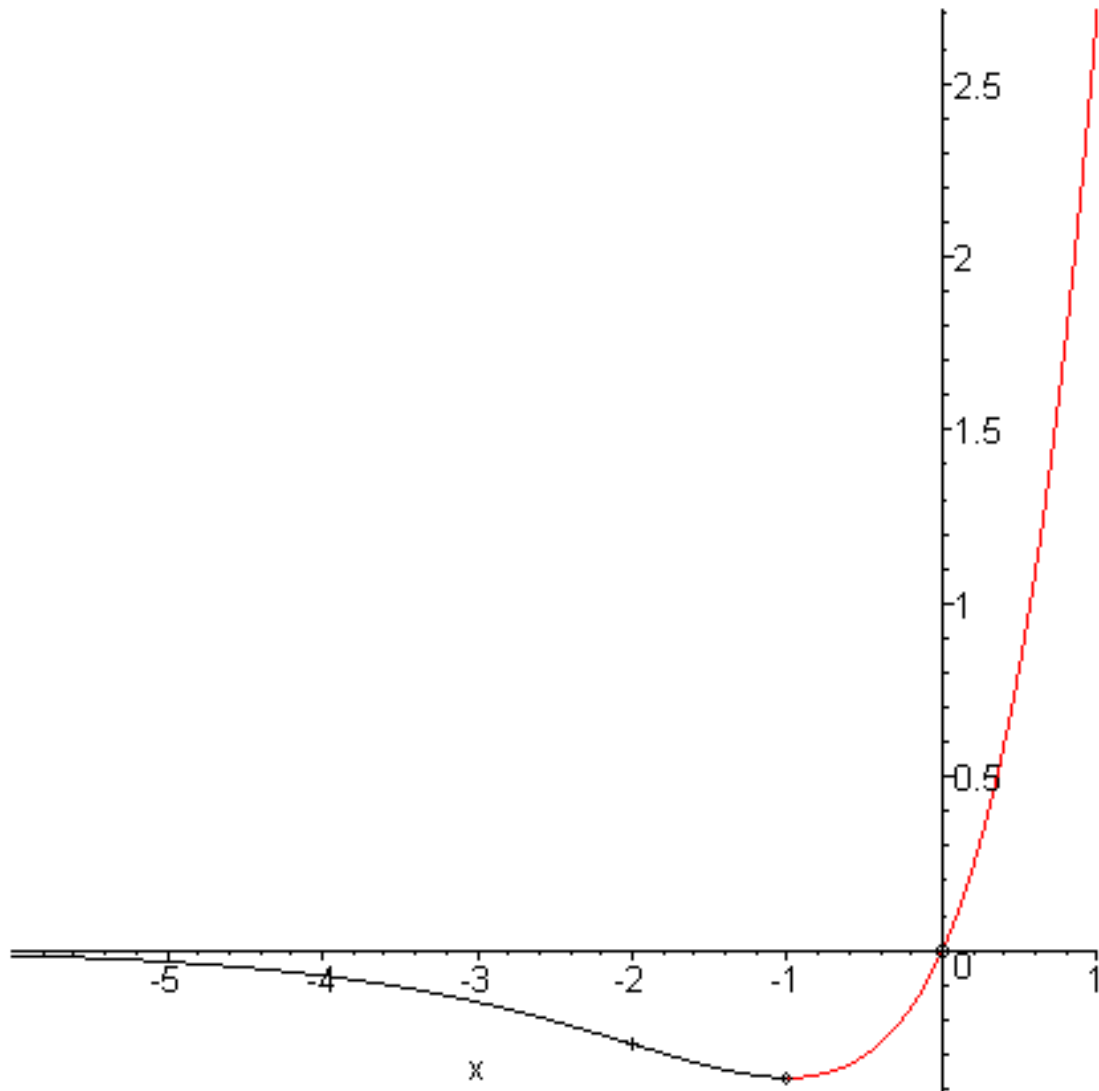
The Chart of

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 50x + 12}{x^2 - x - 17}$$

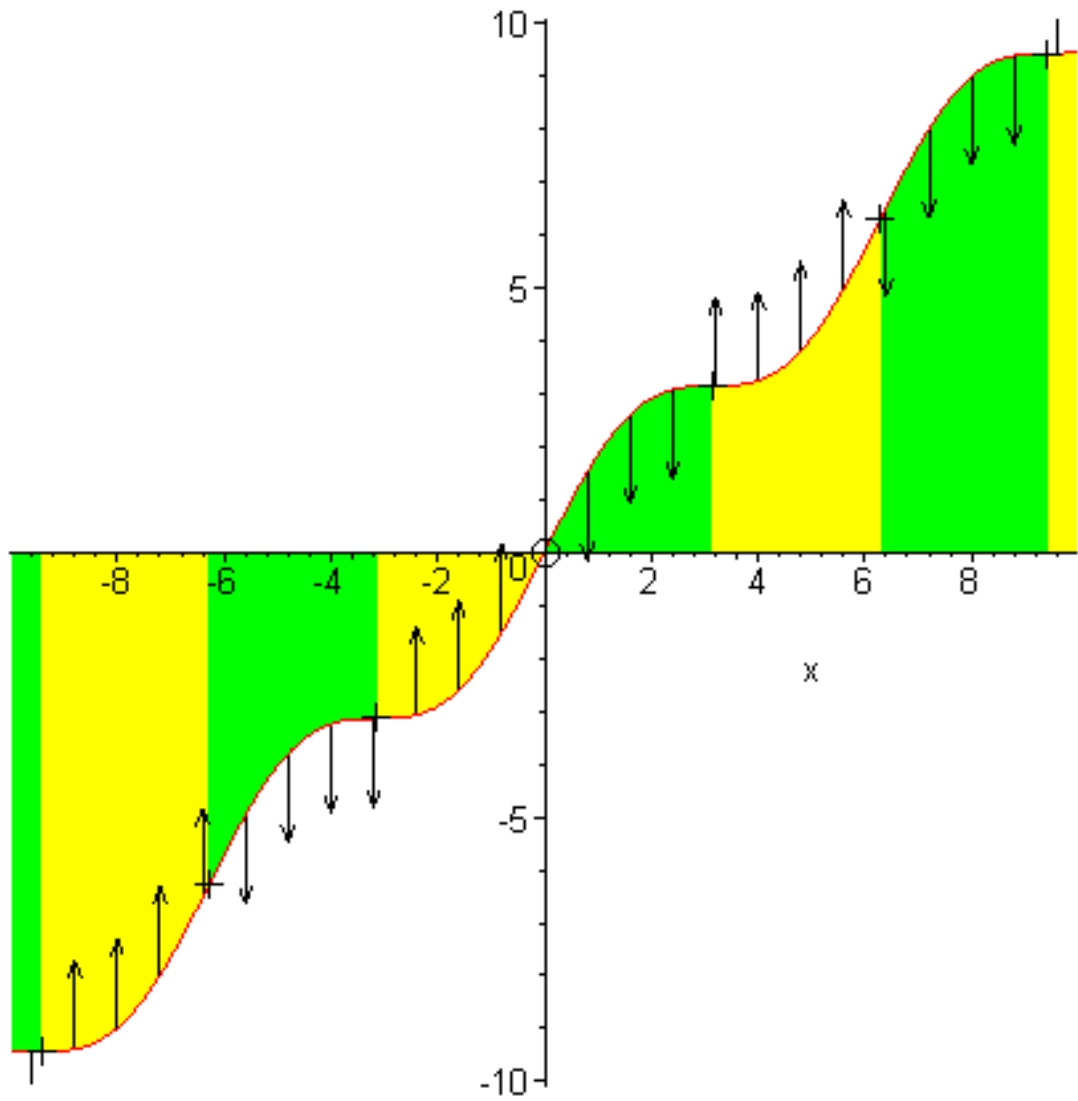
on the Interval [-10, 10]



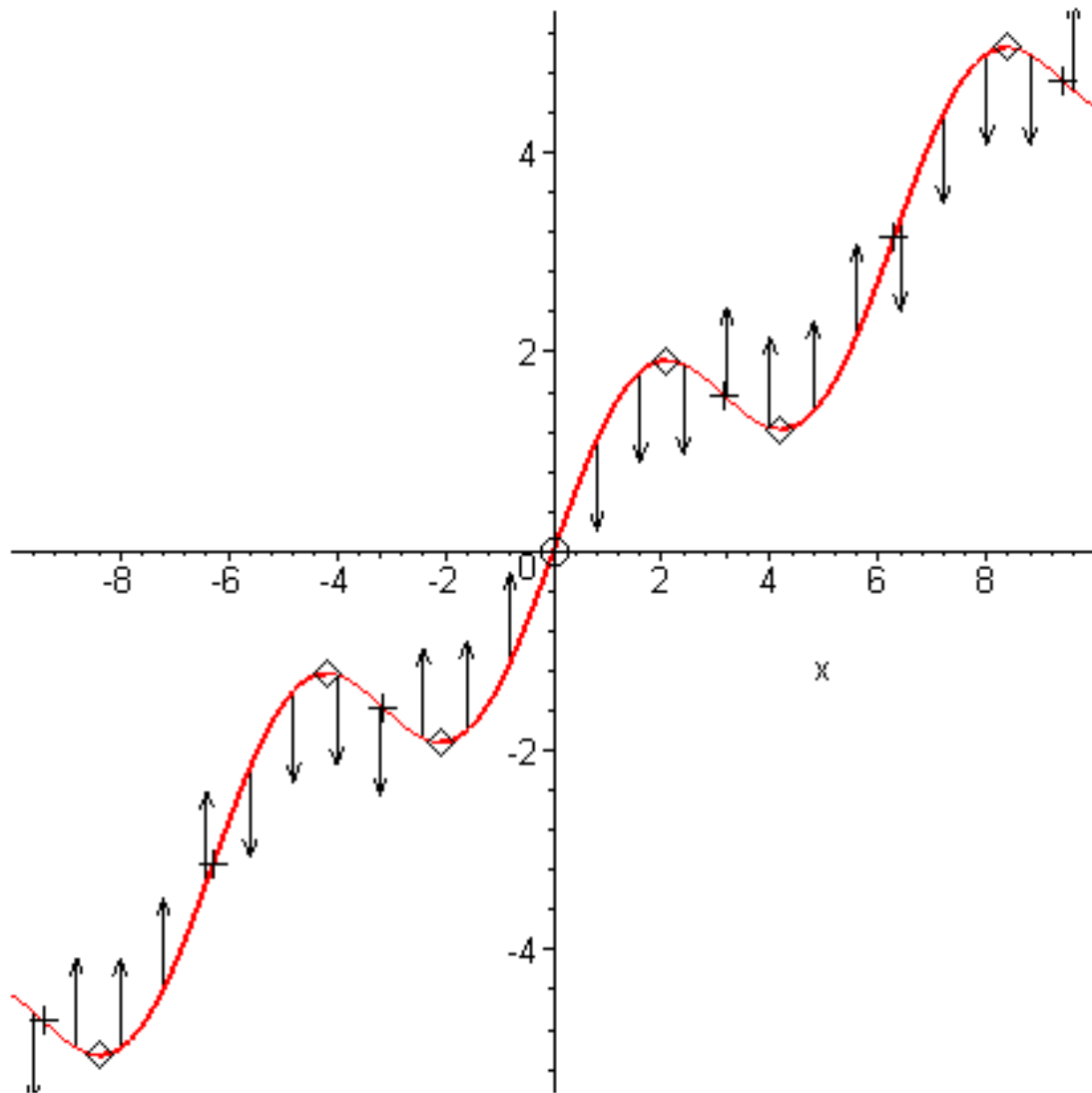
The Chart of
 $f(x) = x \cdot \exp(x)$
on the Interval $[-6, 1]$



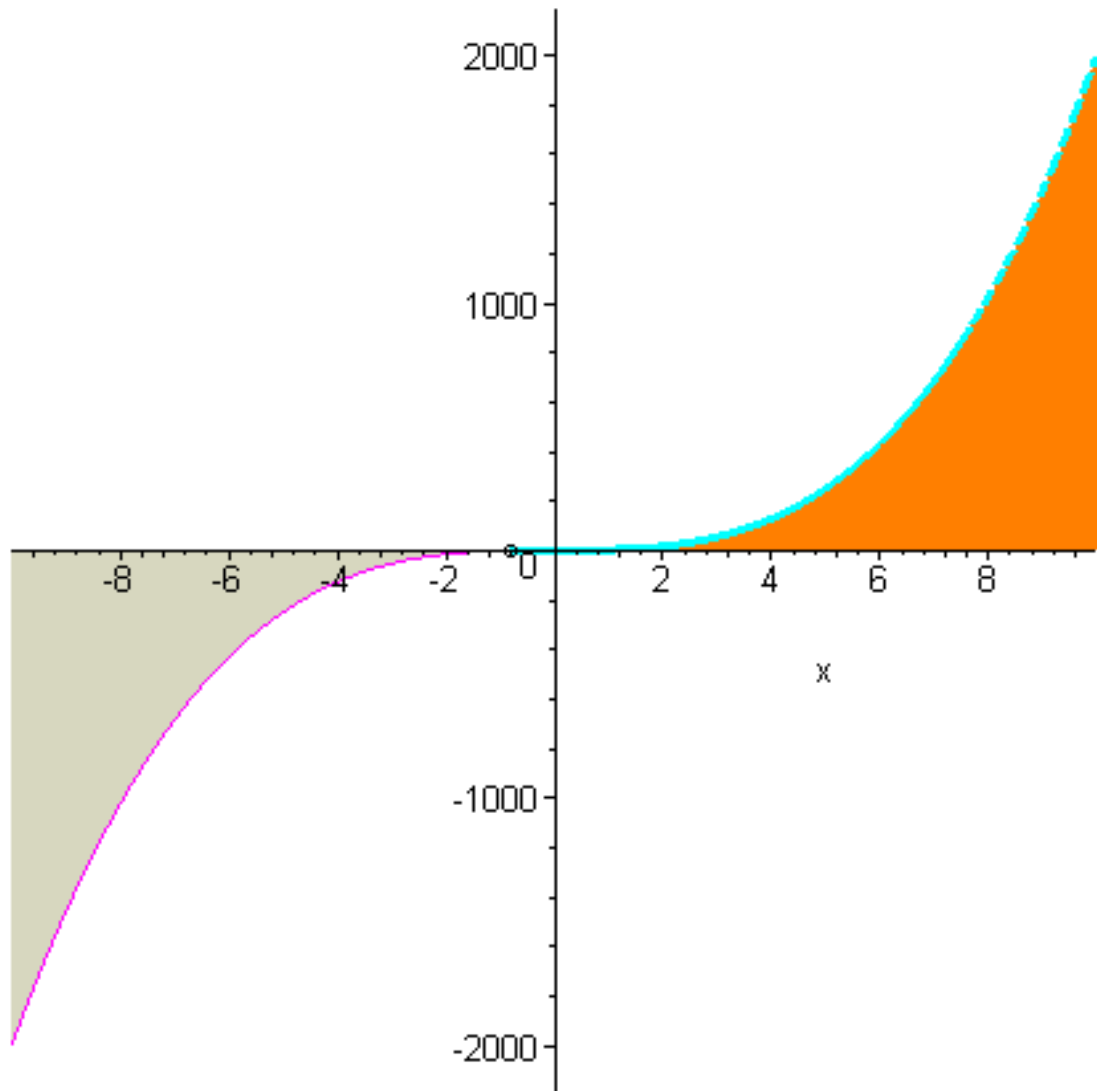
The Chart of
 $f(x) = \sin(x)+x$
on the Interval $[-10, 10]$



The Chart of
 $f(x) = \sin(x) + 1/2 \cdot x$
on the Interval $[-10, 10]$



The Chart of
 $f(x) = 2x^3 + 1$
on the Interval $[-10, 10]$

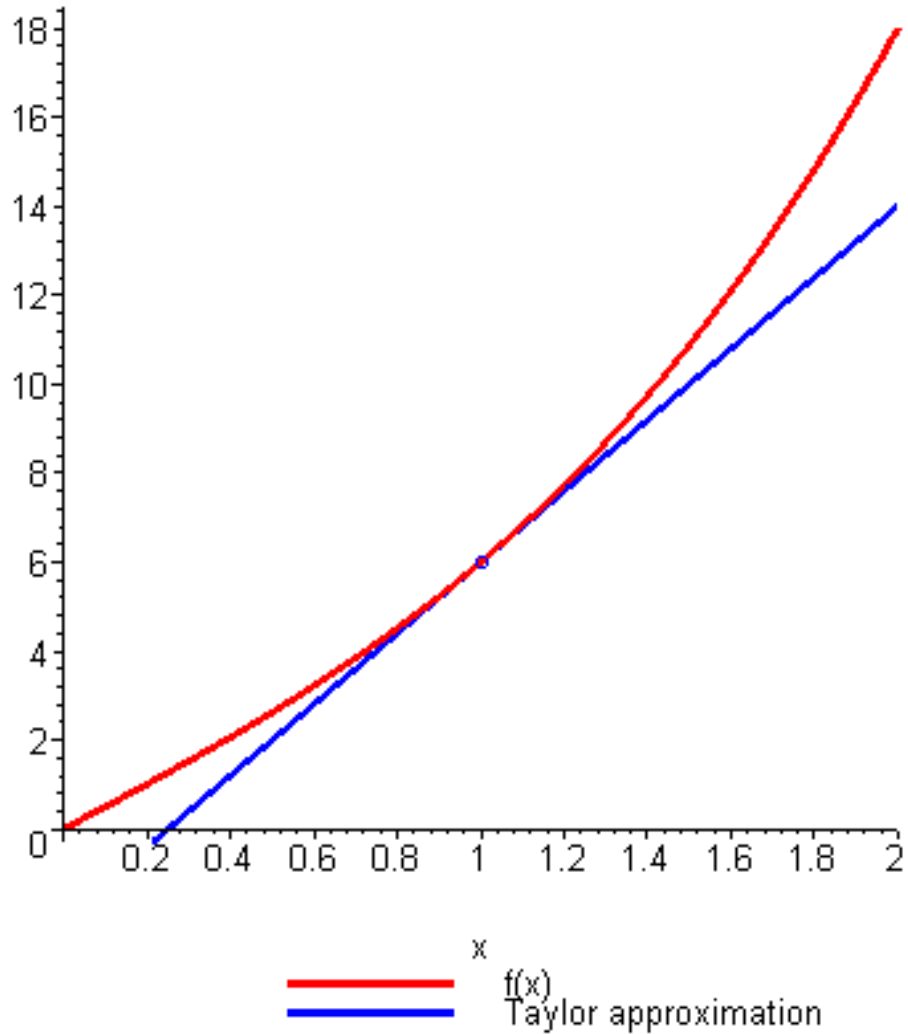


```
>with(Student[Calculus1]):  
TaylorApproximation( x^3 + 5*x, x = 1, output = plot,  
thickness = 3, scaling = UNCONSTRAINED );  
TaylorApproximation( x^3 + 5*x, x = 1, output = plot,  
thickness = 3, scaling = CONSTRAINED );
```

Taylor Approximation of

$$f(x) = x^3 + 5x$$

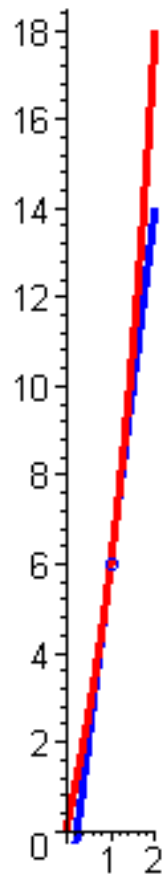
at the Point (1, f(1))



Taylor Approximation of

$$f(x) = x^3 + 5x$$

at the Point $(1, f(1))$

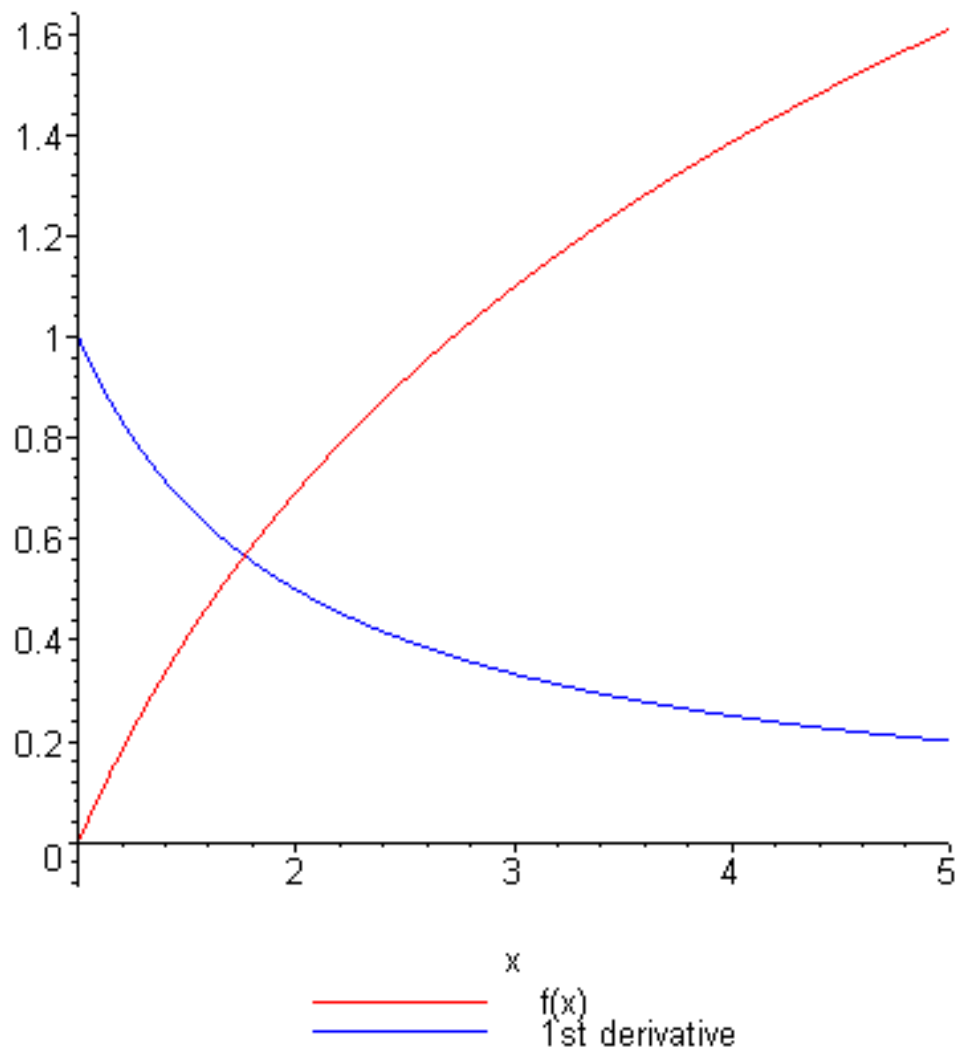


x
- f(x)
- Taylor approximation

Una parte esencial del cálculo es la grafica, maple nos ayuda graficando, expresiones que por su resolución se observan mejor en una grafica:

```
> DerivativePlot(ln(x), x=1..5);  
DerivativePlot(x^4 - 3*x^3 + 3*x + 1, x=0..2, order=1..4);
```

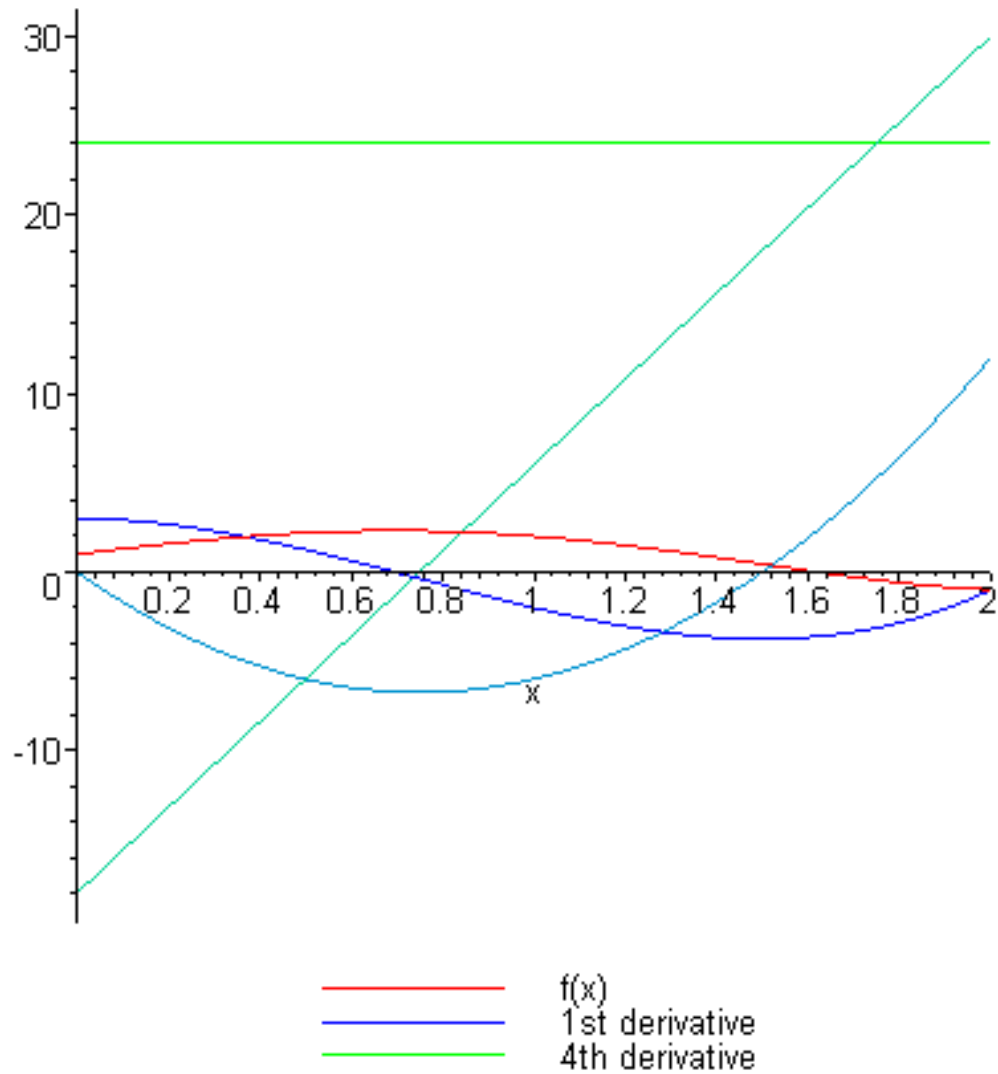
The Derivative of
 $f(x) = \ln(x)$
on the Interval $[1, 5]$



Derivatives of Various Order of

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x + 1$$

on the Interval $[0, 2]$

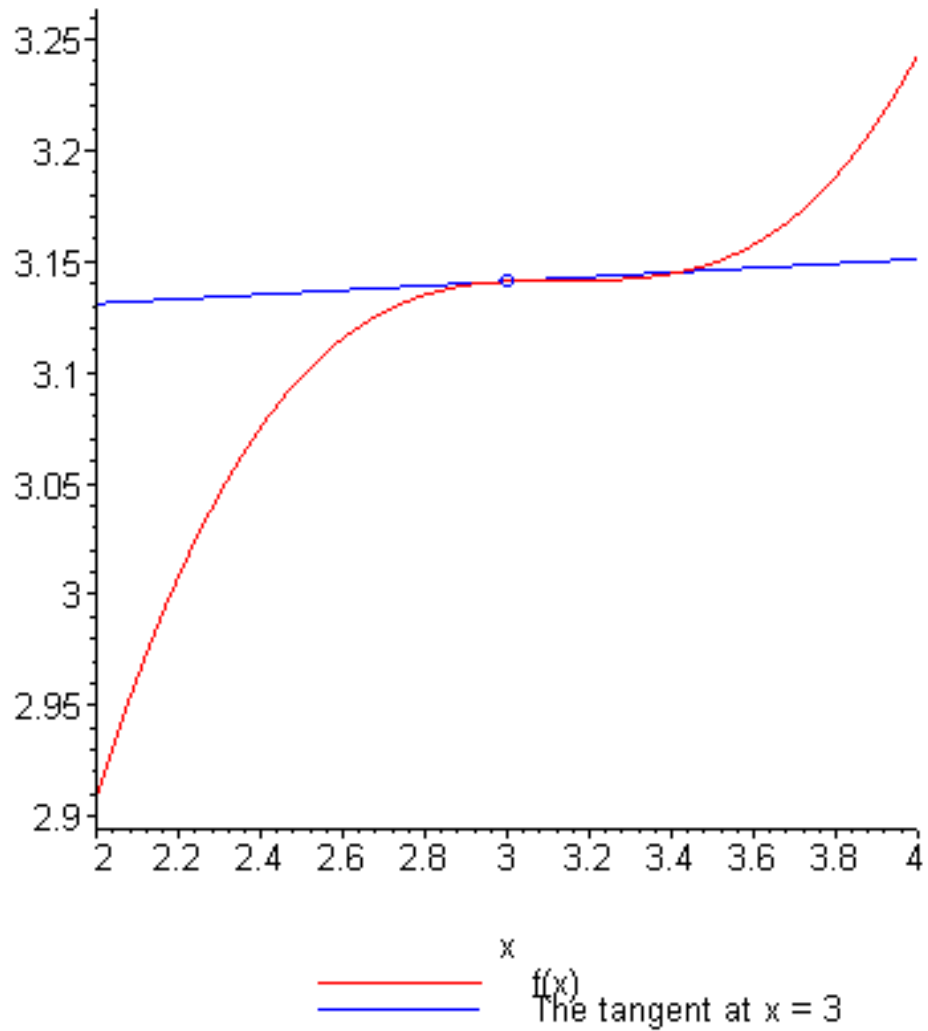


> Tangent(sin(x), x=3, output=line);

$$x \cos(3) + \sin(3) - 3 \cos(3)$$

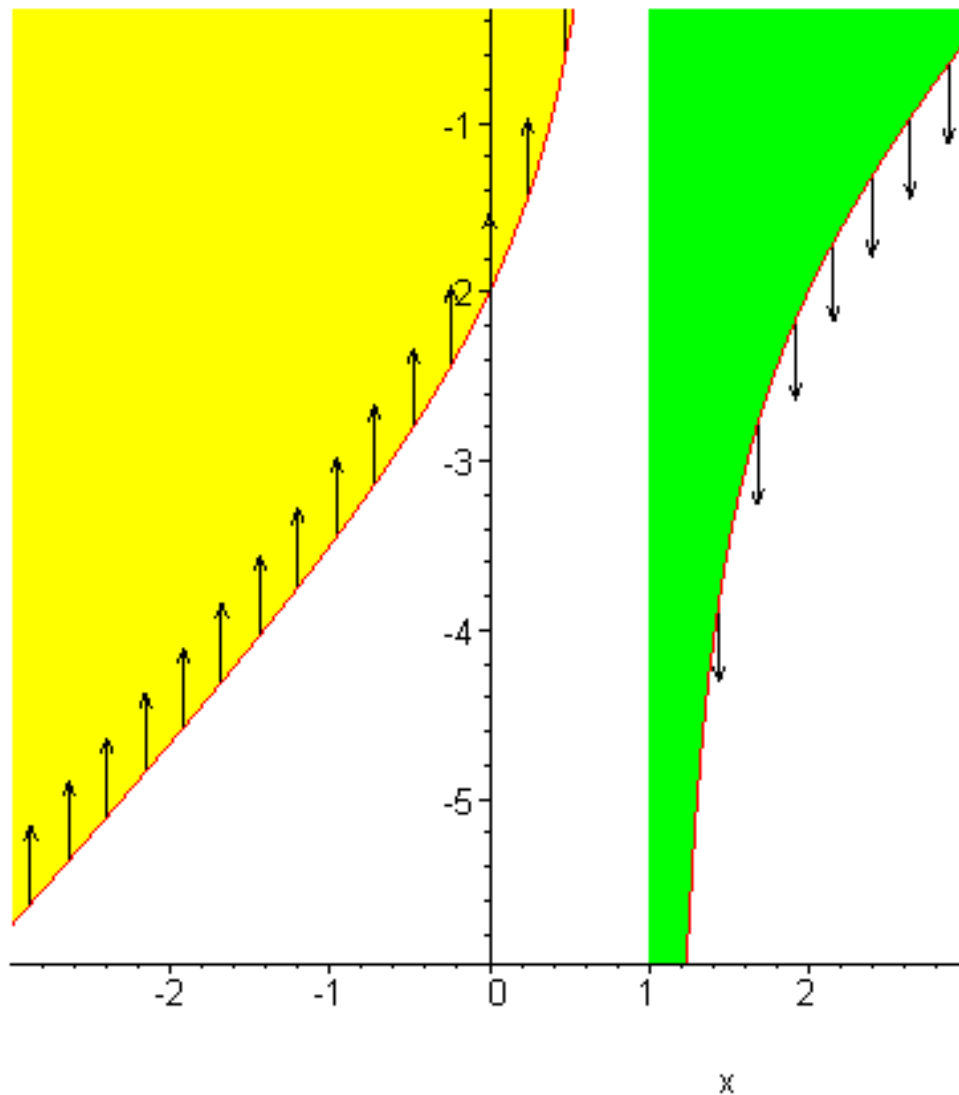
> Tangent(sin(x)+x, x=3, output=plot);

The Tangent to the Graph of
 $f(x) = \sin(x)+x$
at the Point $(3, f(3))$



> FunctionChart(sin(x), x=0..2*Pi);
> FunctionChart((x^2 - 4*x + 2)/(x - 1), x=-3..3);

The Chart of
 $f(x) = (x^2 - 4x + 2)/(x - 1)$
on the Interval [-3, 3]



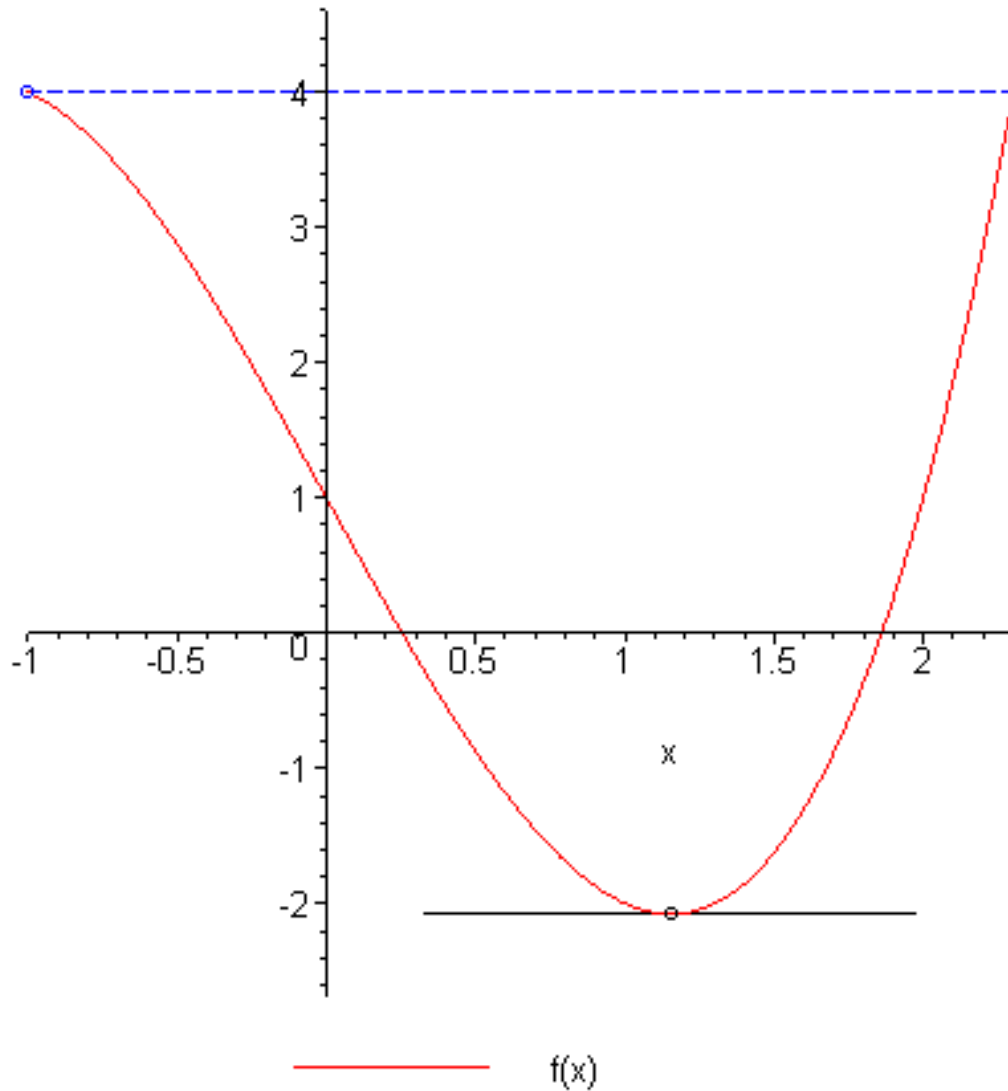
> `RollesTheorem(sin(x), x=1..3*Pi-1, output = points);`

$$\left[\frac{1}{2} \pi, \frac{3}{2} \pi, \frac{5}{2} \pi \right]$$

> `RollesTheorem(sin(x), x=1..3*Pi-1);`

> `RollesTheorem(x^3 - 4*x + 1, x=-1..1/2 + sqrt(13)/2);`

Rolle's Theorem Applied to
 $f(x) = x^3 - 4x + 1$
 on the Interval $[-1, 1/2 + 1/2 \cdot 13^{1/2}]$



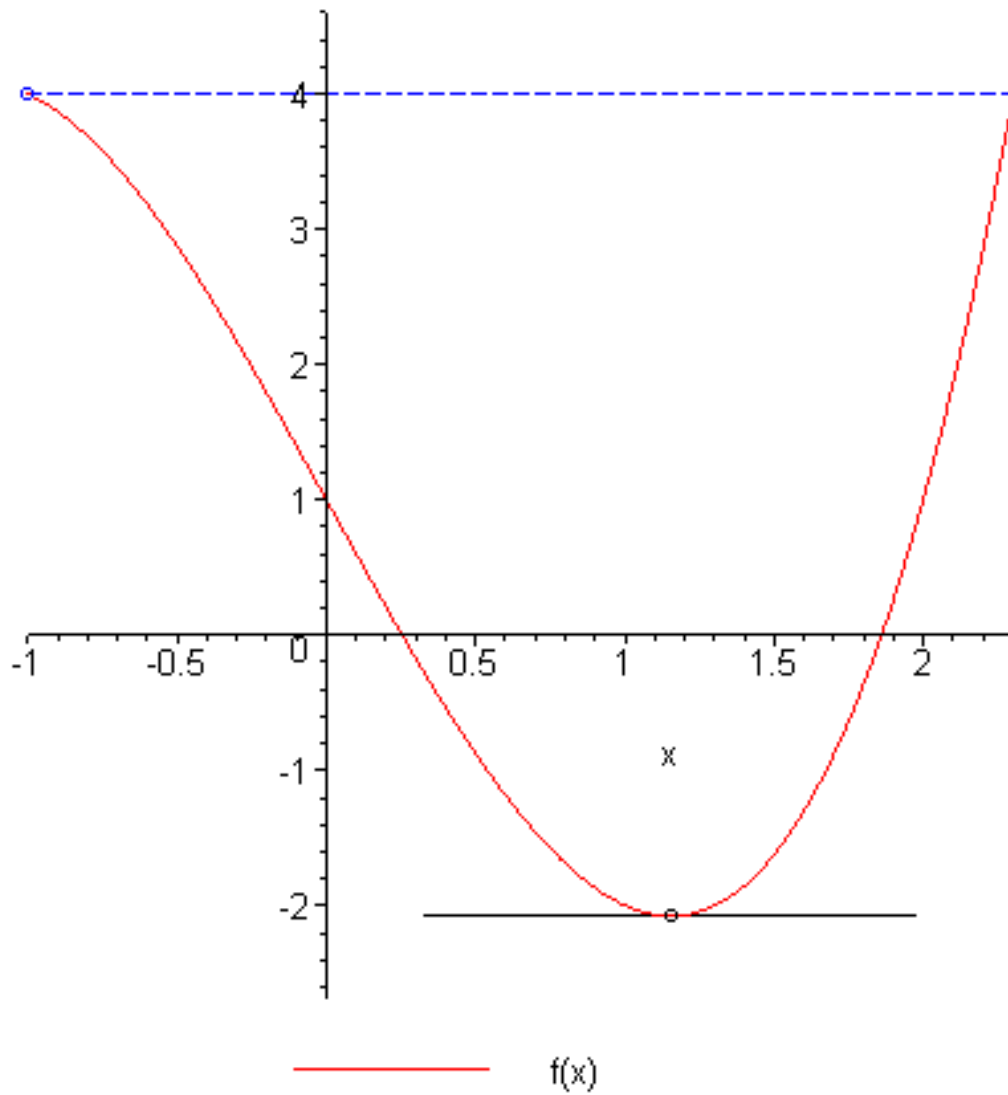
> `RolleTheorem(sin(x), x=1..3*Pi-1, output = points);`

$\left[\frac{1}{2} \pi, \frac{3}{2} \pi, \frac{5}{2} \pi \right]$

- > RollesTheorem(sin(x), x=1..3*Pi-1);
 - > RollesTheorem(x^3 - 4*x + 1, x=-1..1/2 + sqrt(13)/2);
- Rolle's Theorem Applied to

$$f(x) = x^3 - 4x + 1$$

on the Interval $[-1, 1/2 + 1/2\sqrt{13}]$



> MeanValueTheorem(cos(x), x=1..10, output = points);

$$\left[-\arcsin\left(-\frac{1}{9}\cos(10) + \frac{1}{9}\cos(1)\right) + \pi, \arcsin\left(-\frac{1}{9}\cos(10) + \frac{1}{9}\cos(1)\right) + 2\pi, \right. \\ \left. -\arcsin\left(-\frac{1}{9}\cos(10) + \frac{1}{9}\cos(1)\right) + 3\pi \right]$$

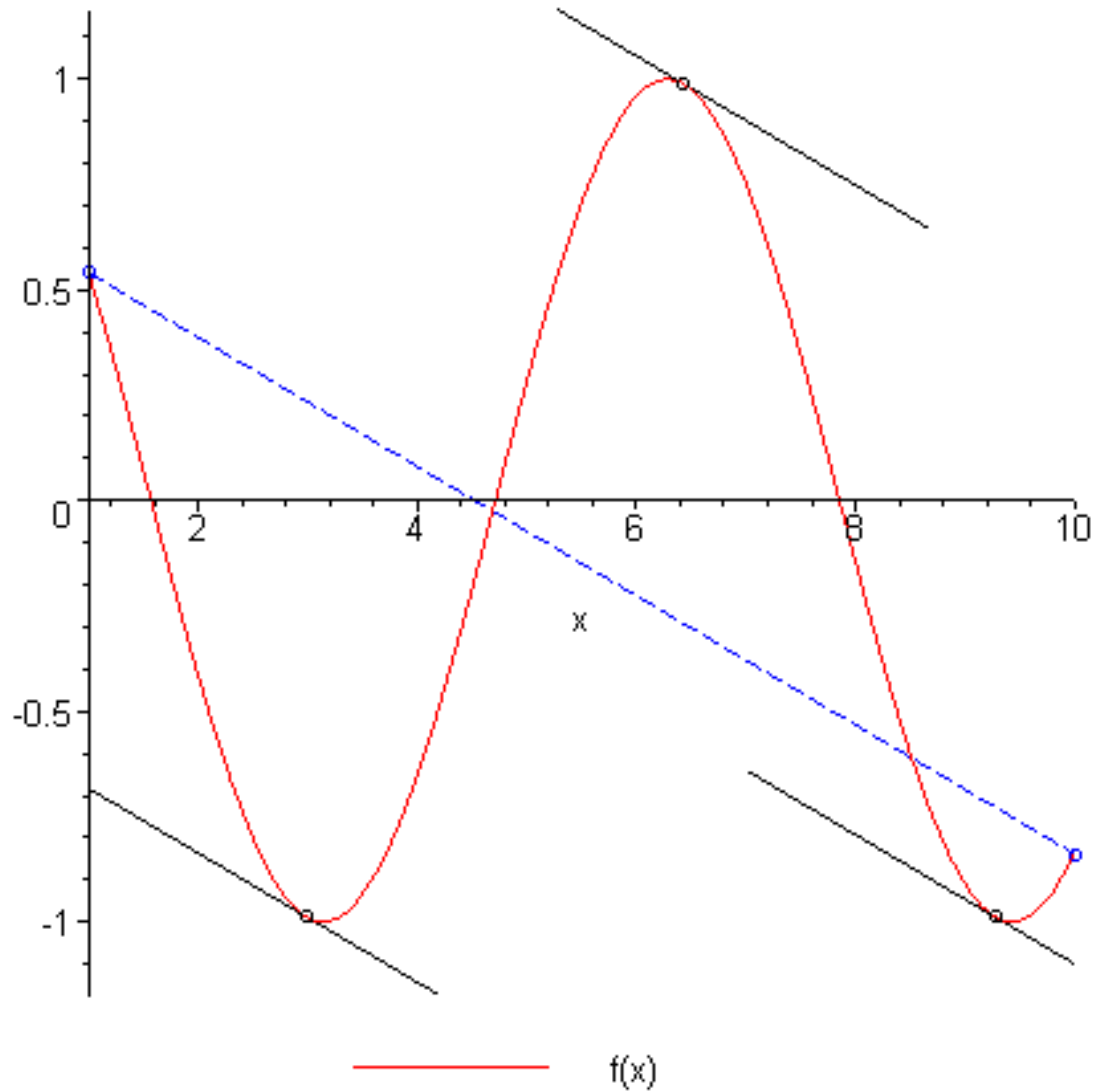
> MeanValueTheorem(cos(x) + x^2, x=1..10, numeric, output = points);
[4.935793732]

> MeanValueTheorem(cos(x), x=1..10);

> MeanValueTheorem(x^4 - 3*x^2 + 4*x + 1, x=-1..4);

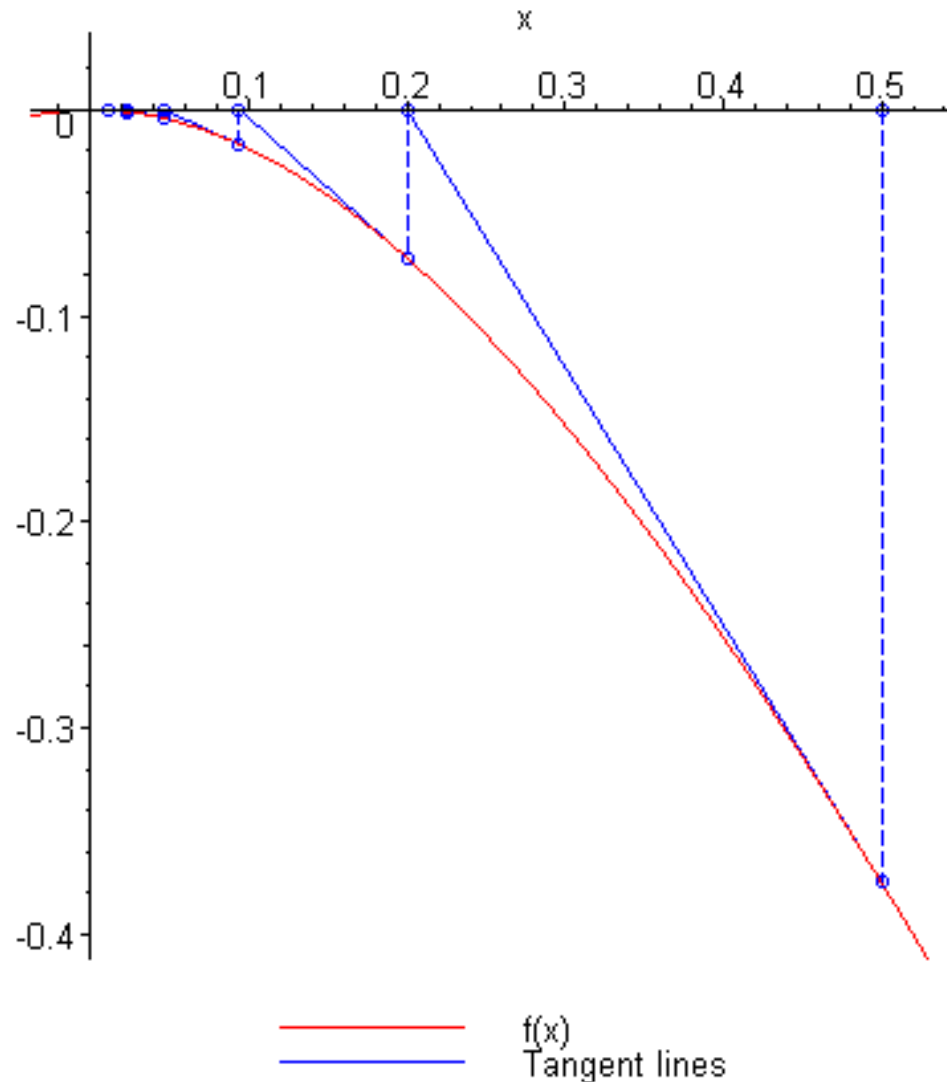
> MeanValueTheorem(cos(x), x=1..10);

The Mean Value Theorem Applied to
 $f(x) = \cos(x)$
 on the Interval $[1, 10]$



- > `NewtonMethod(sin(x), x=2);`
3.141592654
- > `NewtonMethod(sin(x), x=2, iterations=7);`
3.141592654
- > `NewtonMethod(x^3 - 2*x^2, x=1/2, output=plot);`
 >

5 Iterations of Newton's Method Applied to
 $f(x) = x^3 - 2x^2$
 with Initial Point $x = 1/2$



>

```
> with(Student[Calculus1]):
VolumeOfRevolution(x^2 + 1, x=0..1);
       $\frac{28}{15} \pi$ 
```

> VolumeOfRevolution(x^10 + 1, x^2 + 1, x=0..1);

$$-\frac{736}{1155} \pi$$

> VolumeOfRevolution(sin(x) + 1, x=0..3, output=integral);

$$\int_0^3 \pi (\sin(x) + 1)^2 dx$$

> VolumeOfRevolution(sin(x) + 1, x=2*Pi..3*Pi, output=integral, axis=vertical);

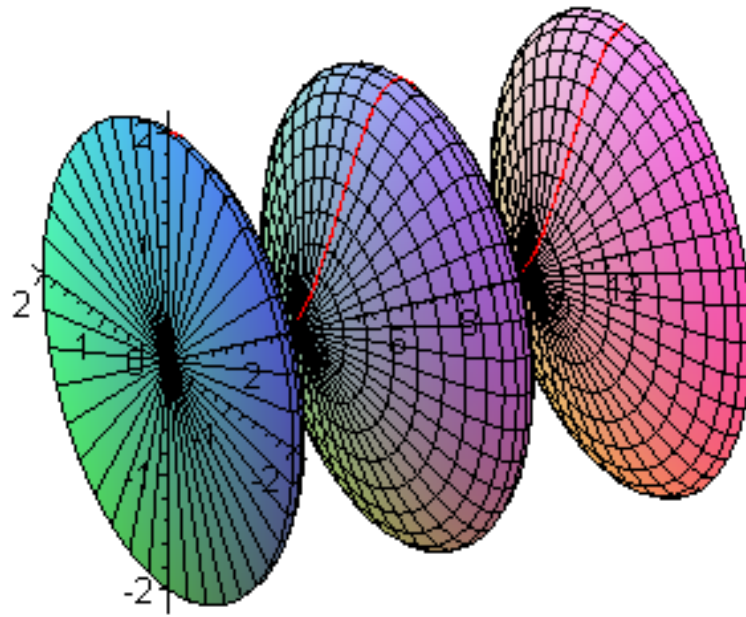
$$\int_{2\pi}^{3\pi} 2\pi x (\sin(x) + 1) dx$$

> VolumeOfRevolution(cos(x) + 1, x=0..4*Pi, output=plot);

VolumeOfRevolution(cos(x) + 3, sin(x) + 2, x=0..4*Pi, output=plot);

VolumeOfRevolution(sin(x) + 1, x=2*Pi..3*Pi, output=plot, axis=vertical);

The Volume of Revolution Around the Horizontal Axis of
 $f(x) = \cos(x)+1$
on the Interval $[0, 4\pi]$



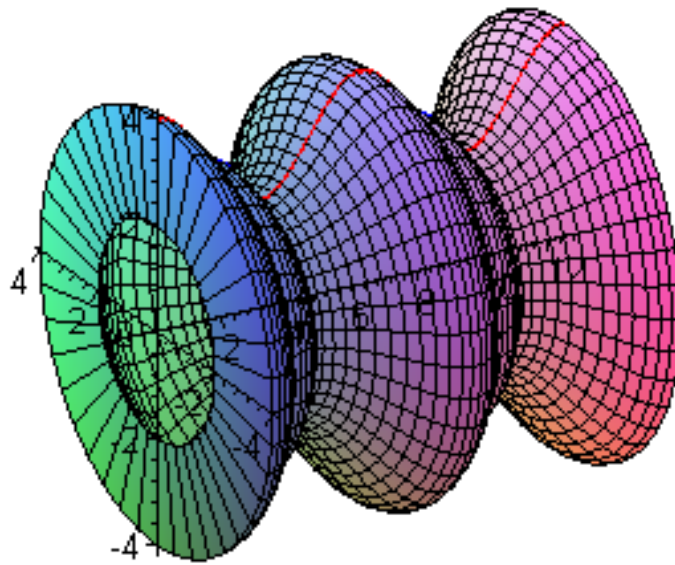
The Volume of Revolution Around the Horizontal Axis Between

$$f(x) = \cos(x)+3$$

and

$$g(x) = \sin(x)+2$$

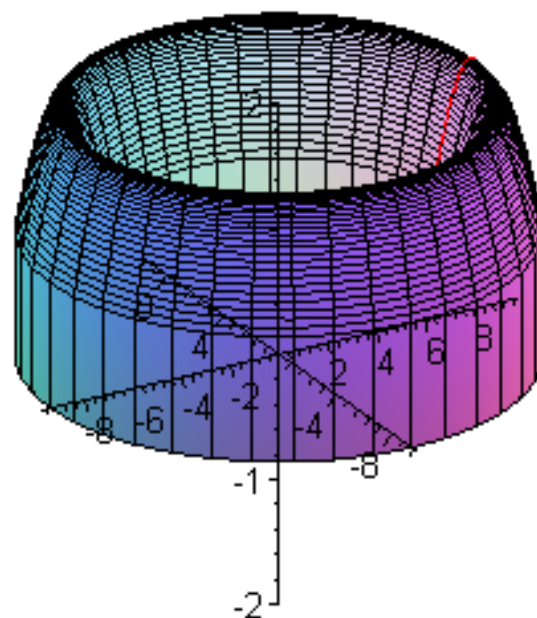
on the Interval $[0, 4\pi]$



The Volume of Revolution Around the Vertical Axis of

$$f(x) = \sin(x)+1$$

on the Interval $[2\pi, 3\pi]$



La belleza que muestran las figuras, de los cuerpos de revolución, creadas a partir de formulas matemáticas y el poder que tienen en la solución de problemas de la vida cotidiana, nos demuestran indudablemente su operacionalidad, a partir de modelos creados en base a la Naturaleza y a las necesidades de la vida diaria.

En este punto estamos en condiciones, comparando el trabajo en Excel, la forma tradicional y rigurosa, las demostraciones y la perspectiva desde Maple en soluciones de la Derivada:

CAPITULO 5

**ANALISIS DE RESULTADOS
VALIDACION DE HIPOTESIS
CONCLUSIONES
BIBLIOGRAFIA**

5.1 ANALISIS DE RESULTADOS

CUESTIONARIO PARA DOCENTES DE PRIMER SEMESTRE DE LA CARRERA DE IME, SOBRE LA MATERIA DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

CONTESTE LO QUE CONSIDERE MAS CERCANO A LA REALIDAD.

1.- ¿Cómo considera, que enseña cálculo diferencial?

a) Con ejercicios y repeticiones

b) Con actividades y demostraciones

C) Analizando y con nuevas tecnologías

2.-¿ Como Considera debe ser la enseñanza, del calculo diferencial?

a) Conductista y rigurosamente

c) con ejercicios y Usando algún software

d) constructivista y usando un software, especializado como Maple

3.-¿En su trabajo docente, toma en cuenta al enseñar cálculo diferencial , alguna teoría cognoscitivista?

a) Ninguna

b) memorística y conductista

Constructivista y Usando software

CUESTIONARIO PARA ALUMNOS DE PRIMER SEMESTRE DE LA CARRERA DE IME, SOBRE LA MATERIA DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

CONTESTA LO QUE CONSIDERES MAS CERCANO A LA REALIDAD.

1.- ¿Cómo consideras, que aprendes matemáticas?

**a) De memoria y
y
con repeticiones**

**b) analizando y
comprendiendo**

**c) mecanizando
para pasar
exámenes.**

2.-¿ Como Consideras el aprendizaje, del calculo diferencial?

**a) fácil, por como
solo por**

b) difícil, por como

c) conveniente

**Aprendí matemáticas
curso**

aprendí matemáticas

acreditar el

3.-¿Cómo te gustaría , aprender Cálculo Diferencial?

a)con ejercicios

b) con actividades

c) con a , b y

aprovechando el uso

de la computadora.

4.-¿ como te gustaría que te enseñaran cálculo diferencial?

a) Repasando y

Repitiendo ejercicios

Solo con libros, cuadernos y

b) con ejercicios

y el uso de la computadora

**c) analizando y
usando programas
específicos para
cálculo diferencial
como Maple**

Calculadora.

**En un universo 300 alumnos de primer ingreso , a primer semestre de la licenciatura de ingeniería mecánica, eléctrica, electrónica industrial.
Y de acuerdo a los instrumentos aplicados encontramos lo siguiente.**

La muestra es de 10%, es decir 30 alumnos

En lo que respecta a los docentes 4 de 16.es decir 25%

En la muestra de 10%,

A la primer pregunta

6 alumnos contestaron a la primer respuesta

15 a la tercera

6 ninguna

3 a la segunda

A la segunda pregunta:

24 a la segunda

0 a la primera

6 a la tercera

A la tercera pregunta

10 no contestaron

15 a la tercera

3 a la segunda

2 a la primera

A la cuarta :

4 a la segunda

3 a la primera

18 a la tercera

5 no contestaron

Por lo que se observa que:

NO

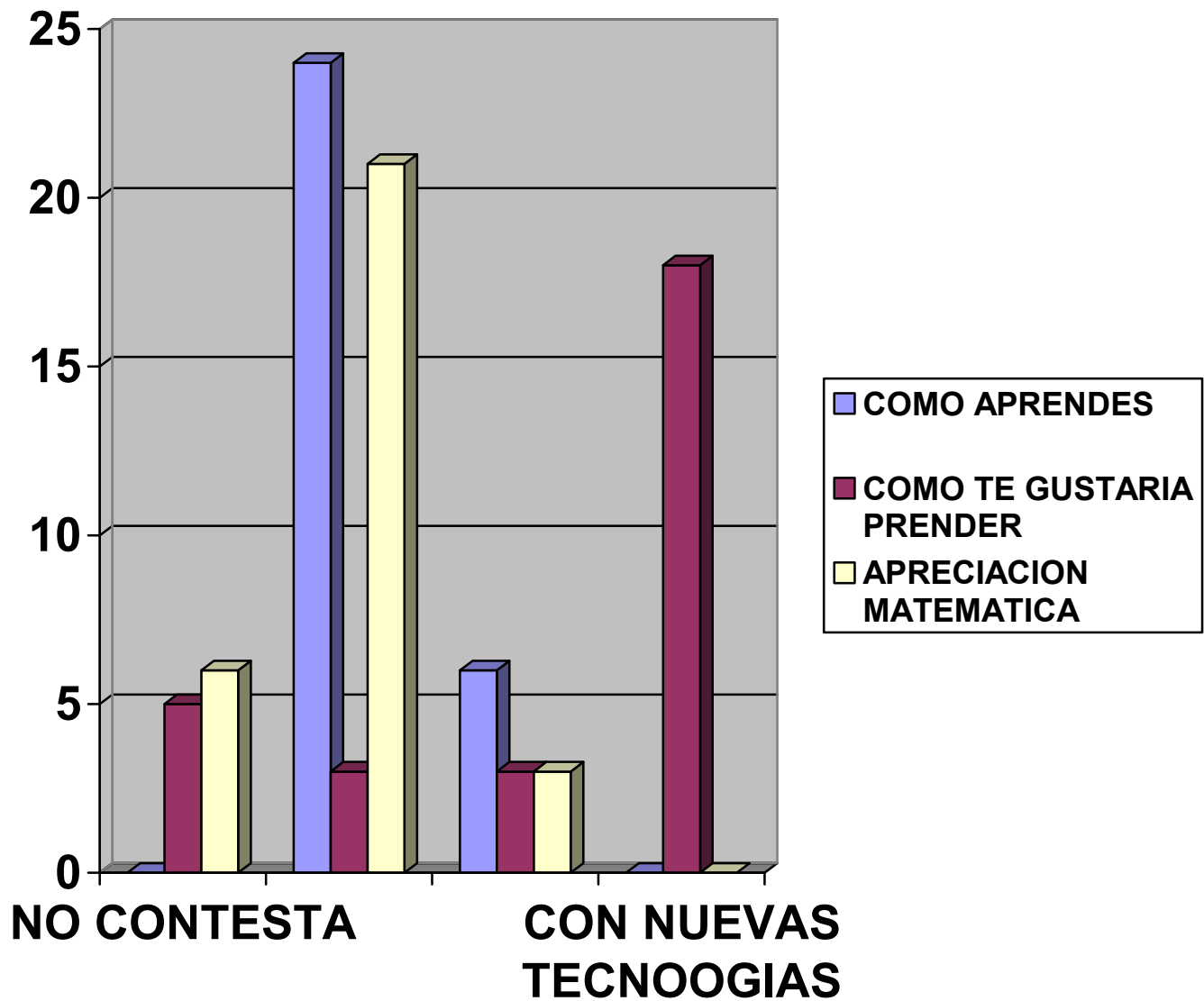
HAY

GUSTO

POR

APRENDER

CALCULO



TENIENDO LOS DATOS DE UNA MUESTRA DE 10%, ENCONTRAMOS LO SIGUIENTE:

RESPECTO DE COMO SE APRENDE CÁLCULO DIFERENCIAL:

24	LO CONSIDERA DIFICIL	80%
0	FACIL	0%
6	SOLO PARA PASAR LA MATERIA	20%

RESPECTO DE CÓMO SE APRENDE MATEMATICAS

21	CONDUCTISTAMENTE DE MANERA	70%
3	CONSTRUCTIVISTA	10%
6	NO CONTESTARON	20%

**RESPECTO DE CÓMO SE QUISIERA APRENDER CALCULO
DIFERENCIAL:**

15	CON SOFTWARE ESPECIAL	50%
10	NO CONTESTARON	33%
3	CON ACTIVIDADES	10%
2	CON EJERCICIOS	7%

**RESPECTO DE CÓMO LE GUSTARIA QUE EL DOCENTE LE ENSEÑERA
CALCULO:**

	EJERCICIOS	Y	
4	COMPUTADORA		13.3%
3	MECANICAMENTE DE MANERA		10%
18	CONSTRUCTIVISTA		60%
5	NO CONTESTARON		16.7%

**DE LO CUAL SE PUEDE OBSERVAR QUE EN LOS ALUMNOS
HAY:**

**LA TENDENCIA ES EL APRENDIZAJE, MECANICISTA, MEMORISTICO O
LA APATIA**

**HAY TAMBIEN , INTERES POR USAR LAS NUEVAS TECNOLOGIAS Y UN APRENDIZAJE
CONSTRUCTIVISTA**

RESPECTO DE LOS DOCENTES:

**DOS DE LOS ENCUESTADOS, USAN LA NUEVAS TECNOLOGIAS Y
SOFTWARE ESPECIALIZADO Y UNO ES CONDUCTISTA EL OTRO NO
CONTESTO.**

A LO QUE SE INFIERE QUE 25% OMITE HABLAR SOBRE EL TEMA.

25% ES CONDUCTISTA

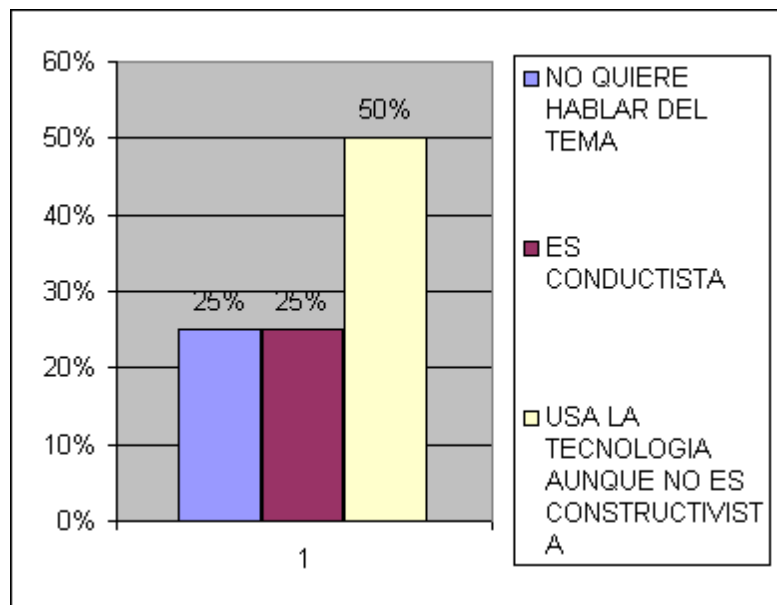
**50% APLICA LAS NUEVAS TECNOLOGIAS AUN QUE NO PROPIAMENTE EL
CONSTRUCTIVISMO**

25% OMITE EL TEMA

25% ES CONDUCTISTA

USA EL SOFTWARE

50% ESPECIALIZADO



5.2 VALIDACION DE HIPÓTESIS

El uso de software informático, como Excel y Maple, adecuándolo a una metodología de enseñanza constructivista, potencia el aprendizaje significativo en el alumno para aprender el cálculo diferencial de una variable y de cualquier área de la ciencia matemática en cualquier nivel educativo.

Puede validarse, pues no hay un gusto por la apreciación matemática y menos aun por comprender el cálculo diferencial de forma tradicional.

Observando los resultados, de las encuestas realizadas, a la muestra de alumnos nos refleja lo anterior, así mismo a los docentes.

No omitiendo señalar que en la publicación de resultados de examen diagnóstico de la, FES-Cuautitlan, a los alumnos de nuevo ingreso generación 2008, se les práctico un examen de matemáticas básicas para ingeniería que abarca de lo básico, operaciones aritméticas, algebraicas, geometría, trigonometría hasta el cálculo diferencial e integral. Y al observar el listado mas del cincuenta por ciento no clasifico, es decir obtuvo 0 como calificación.

Esto nos permite PROPONER:

Que el uso de sistemas de software especializado como maple ayudaría a comprender y daría una alternativa en el gusto por el análisis, del cálculo diferencial y al mismo tiempo el uso de software popular y común como Excel ayudara a comparar y alentará más al alumno a la comprensión del calculo diferencial pues Excel, es un software con el que se haya más familiarizado.

Se cumple también que l aprendizaje de la didáctica operatoria aparece en el modelo de enseñanza actual, en la universidad y llevará un proceso de tiempo para aceptar el trabajo con el enfoque constructivista, rompiendo el paradigma de enseñanza conductista al nuevo enfoque.

CONCLUSIONES

En la actualidad a pesar de la digitalización de la vida moderna y las nuevas corrientes pedagógicas, todavía se sobreponen los métodos tradicionales de enseñanza, conductistas y operatorios del uso de lápiz y papel en la resolución del cálculo diferencial.

La puesta en práctica del trabajo del alumno, se basa en un medio tan económico como el cuaderno de apuntes y el uso de la calculadora, difícilmente aborda el laboratorio de cómputo, para resolver problemas de cálculo diferencial.

La práctica Docente en la Universidad, tiene mayores componentes mecanicistas, conductistas, operatorios que constructivistas.

Tal y como se observa, en las universidades publicas, el uso de pizarrón tradicional o pintarrón, en lugar del interactivo electrónico o digital; por que además no lo hay.

Excel por ser de uso más común en las computadoras facilitaría su uso y aprovechamiento en el aprendizaje de cálculo diferencial, ya que el alumno esta familiarizado con el programa y el análisis numérico, con lo que puede llegar a demostraciones y conclusiones que no observaría desde el papel y lápiz, incluso disponiendo de parámetros de control necesarios para delimitar, operaciones lógicas en el cálculo, estimando también que hay que elaborar muchos procesos, para llegar a convertir una formula en manipulable, lo que Maple haría en menos operaciones por que es mas directo.

El uso de Maple es más especializado, por que no es tan común en los ordenadores. Pero es un sistema especializado, que se puede conseguir.

Sin embargo se debe conocer un mínimo de programación, principalmente para operarlo, pero identificando y conociendo los comandos principales se puede llevar acabo, practicándolo.

BIBLIOGRAFIA

- 1- Dennis G. Zill .(1987).”Cálculo Con Geometría Analítica “ , México: Grupo Editorial Iberoamericana.**
- 2-Hernández rojas g. (1998). “paradigmas en psicología de la educación”. Paidós educador. México.**
- 3-Hernández Rojas G. (1991). “Paradigmas de la Psicología educativa”. Maestría en Tecnología educativa ILCE, Unidad I. México.**
- 4-Ausubel, D.P. y otros. (1983). Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo. 2da Edición. México. Trillas.**
- 5-Bruner, J.S. (1972). Hacia una Teoría de la Instrucción. México. Uteha.**
- 6-Bruner, J. (1991). Actos de Significado. Más allá de la revolución cognitiva. Madrid, España. Alianza.**
- 7-De Vega, M. (1984). Introducción a la Psicología Cognitiva. Madrid, España. Alianza.**
- 8-Gagné, E. D. (1984). La Psicología Cognitiva del Aprendizaje Escolar. Madrid, España. Visor.**
- 9-Gardner, H. (1987). La Nueva Ciencia de la Mente: Historia de la psicología cognitiva. Barcelona, España, Paidós.**
- 10-Luria, A. R. (1974). El Cerebro en Acción. Barcelona, España, Fontarella.**
- 11-Nickerson, R.S. y otros. (1987). Enseñar a Pensar. Aspectos de la aptitud intelectual. Barcelona, España, Paidós.**
- 12-Norman, D.A. (1987). Perspectivas de la Ciencia Cognitiva. Barcelona, España. Paidós.**
- 13-Novak, J. y D. Gowin. (1988). Aprendiendo a Aprender. Barcelona, España. Martínez Roca.**
- 14-Piaget, J. (1979). Psicología de la Inteligencia. Buenos Aires, Argentina- Psique.**
- 15-Pozo, J. I. (1989). Teorías Cognitivas del Aprendizaje. Madrid, España, Morata.**

- 16-Riviere, A. (1987). *El Sujeto de la Psicología Cognitiva*. Madrid, España. Alianza.
- 17-Rubinstein, S. L. (1974). *El Desarrollo de la Psicología. Principios y métodos*. Buenos aires, Argentina. Grijalbo.
- 18-Varela, F.J. (1990). *Conocer las Ciencias Cognitivas: Tendencias y perspectivas*. Barcelona. Gedisa.
- 19-Vigotsky, L.S. (1991, 1993, 1995). *Obras Escogidas*. Vol. I, II, III. Madrid, España. Visor.
- 20-Yaroshevsky, M.G. (1979). *La Psicología del siglo XX*. México. Grijalbo.
- 21-Blanck Guillermo (De). *Vigotsky, Memoria y Vigencia*. C. And Ediciones, Argentina.
- 22-Carretero, M. *La Concepción del desarrollo*. Tomado de: Cuadernos de Pedagogía. No. 141, Oct, .
- 23-Cole, M. y Scribner, S. (1974). *Culture and Thought. A Psychological Introduction*. Wiley. New York. 1974.
- 24-Del Río, Pablo. *Una Sinfonía Inacabada*. Tomado de: Cuadernos de Pedagogía . Op. pp. 8-10.
- 25-Davydov, Vasily, R. *The Influence of L.S. Vigotski on Education Theory. Research and Practice*. Educational Research, Vol.24. No. 3. pp. 21-21 .
- 26-Ferreiro Gravié, R. *Lev Semionovich Vigotski. En el Año del Centenario de su Nacimiento (1896 –1934)*. Revista Mexicana de Pedagogía No. 26,27, Y 29, 1995 y 1996.
- 27-J. P. Das and Boris Ginnns. *Vigotski L.S. and Contemporary Educational Psychology*. Educational Psychologist. Volumen 30, No. 2 Spring 1995.
- 28-Luria, A. R. *The Making of Mind*. Harvard University Press. 1ra. De U.S. A. 1979.
- 29-Luria , A. R. *Vigotski y las Funciones Psíquicas Superiores*. Tomado de Luria, A. R. Massuco, A. y otros. *Problemática Científica de la Psicología Actual*. De Orbeluz. Primera Edición Bs. Argentina, 1977. pp. 16-19.

- 30-Moll, Luis C: (compilador)Vigotski y la Educación. Connotaciones y aplicaciones de la Psicología Sociohistórica en la Educación. Edit. AIQUE, Argentina 1993 .
- 31- Moll, Luis. Vigotski an Education: Instrucciona Implications and Applications of Sociohistorical Psychology. Cambridge, University Press, Estados Unidos, 1990
- 32-Riviere, Angel. La Psicología de Vigotski Edit. Aprendizaje Visor, Madrid, España , 1998.Tercera Edición.
- 33-Riviere, Amgel. Razonamiento y Representación. Edit. Siglo XXI. Madrid, España. 1ra Edición. 1986
- 34-Ramírez, J. D. La Perspectiva Sociohistórica. Tomado de: Cuadernos de Pedagogía. Op.Cit. pp. 16- 19.
- 35-Ven der Veer, René and Valsiner Joan. Understandig Vigotski a Quest for Synthesis Blackwell. Oxfort University and Cambridge, Massachusets. U.S.A. 1993
- 36-Vigotski. L. S. El Desarrollo de los Procesos Psicopedagógicos Superiores. Edit. Grijalbo S. A. México D.F. 1ra. Edición No. de páginas 226.
- 37-Vigotski, L. S. El Desarrollo De las Funciones Psicológicas Superiores . Edit. Grijalbo , Barcelona España, 1978.
- 38-Vigotski, L. S. Obras Escogidas I. Edit. Aprendizaje Visor. Ministerio de Educación y Ciencias , Madrid. España, 1991.
- 39-Vigotski, L. S. Pensamiento y Lenguaje. Edit. La Pláyade, Buenos Aires, Argentina. 1985.
- 40-Vigotski, L. S. Pensamiento y Lenguaje. Edit. Quito Sol. 1990. No. de páginas 219.
- 41-Wertsch, J. V. Vigotski and Formation of Mind. Harvard University Press, 1ra de U.S.A. 1985.

- 42-Blanck Guillermo (De). **Vigotsky, Memoria y Vigencia. C. And Ediciones, Argentina.**
- 43-Carretero, M. **La Concepción del desarrollo. Tomado de: Cuadernos de Pedagogía. No. 141, Oct, .**
- 44-Cole, M. y Scribner, S. (1974). **Culture and Thought. A Psychological Introduction. Wiley. New York. 1974.**
- 45-Del Río, Pablo. **Una Sinfonía Inacabada. Tomado de: Cuadernos de Pedagogía . Op. pp. 8-10.**
- 46-Davydov, Vasily, R. **The Influence of L.S. Vigotski on Education Theory. Research and Practice. Educational Research, Vol.24. No. 3. pp. 21-21 .**
- 47-Ferreiro Gravié, R. **Lev Semionovich Vigotski. En el Año del Centenario de su Nacimiento (1896 –1934). Revista Mexicana de Pedagogía No. 26,27,Y 29, 1995 y 1996.**
- 48-J. P. Das and Boris Ginnns. **Vigotski L.S. and Contemporary Educational Psychology. Educational Psychologist. Volumen 30, No. 2 Spring 1995.**
- 49-Luria, A. R. **The Making of Mind. Harvard University Press. 1ra. De U.S. A. 1979.**
- 50-Luria , A. R. **Vigotski y las Funciones Psíquicas Superiores. Tomado de Luria, A. R. Massuco, A. y otros. Problemática Científica de la Psicología Actual. De Orbeluz. Primera Edición Bs. Argentina, 1977. pp. 16-19.**
- 51-Moll, Luis C: (compilador)**Vigotski y la Educación. Connotaciones y aplicaciones de la Psicología Sociohistórica en la Educación. Edit. AIQUE, Argentina 1993 .**

- 52- Moll, Luis. **Vigotski an Education: Instruccional Implications and Applications of Sociohistorical Psychology.** Cambridge, University Press, Estados Unidos, 1990
- 53-Riviere, Angel. **La Psicología de Vigotski** Edit. Aprendizaje Visor, Madrid, España , 1998.Tercera Edición.
- 54-Riviere, Amgel. **Razonamiento y Representación.** Edit. Siglo XXI. Madrid, España. 1ra Edición. 1986
- 55-Ramírez, J. D. **La Perspectiva Sociohistórica.** Tomado de: Cuadernos de Pedagogía. Op.Cit. pp. 16- 19.
- 56-Ven der Veer, René and Valsiner Joan. **Understandig Vigotski a Quest for Synthesis** Blackwell. Oxfort University and Cambridge, Massachusets. U.S.A. 1993
- 57-Vigotski. L. S. **El Desarrollo de los Procesos Psicopedagógicos Superiores.** Edit. Grijalbo S. A. México D.F. 1ra. Edición No. de páginas 226.
- 58-Vigotski, L. S. **El Desarrollo De las Funciones Psicológicas Superiores .** Edit. Grijalbo , Barcelona España, 1978.
- 59-Vigotski, L. S. **Obras Escogidas I.** Edit. Aprendizaje Visor. Ministerio de Educación y Ciencias , Madrid. España, 1991.
- 60-Vigotski, L. S. **Pensamiento y Lenguaje.** Edit. La Pláyade, Buenos Aires, Argentina. 1985.
- 61-Vigotski, L. S. **Pensamiento y Lenguaje.** Edit. Quito Sol. 1990. No. de páginas 219.
- 62-Wertsch, J. V. **Vigotski and Formation of Mind.** Harvard University Press, 1ra de U.S.A. 1985.
- 63-Ferreiro R. (1995 y 1996). **Lev S. Vigotsky en el Centenario de su Nacimiento.** Revista Mexicana de Pedagogía. Cuatro partes: No. 25,26,27 y 28. México
- 64-Ferreiro R. (Septiembre – octubre de 1998) **Lev. S. Vigotsky, el Mozart de la Psicología.** Revista UNAM. Facultad de Psicología No.36. México.

65-Ferreiro R. y Calderon M. (2000). El ABC del Aprendizaje Cooperativo. Edit. TRILLAS, México.

66-Ferreiro R., M. Calderón., El ABC del Aprendizaje Cooperativo. Edit. Trillas, México., 2002

67-Llanos Goytia, Enfoques Metodológicos Críticos e Investigación en Cs. Sociales, Edit. Plaza y Valdez, México, (2004).

68-Whetten y Cameron, “Desarrollo de Habilidades Directivas”,Edit. Pearson, México (2005)

69-SEIEM “Dirección de Educación Superior”, “Aplicación del Enfoque de las Matemáticas”, México (2007)

70-Mochón Cohén, “El Cálculo desde una Perspectiva Visual y Dinámica con actividades en la Computadora, McGraw Hill Interamericana, México, (2004)

71-Hidalgo Guzmán, “Aprendizaje Operatorio”,Casa de la Cultura, México (1992)

72-Colegio de Estudios de Posgrado de la Cd. De México, “Antología”, Modelos de Investigación II, México 2008.

73-Enciclopedia Temática Biblos 2000, Matemáticas, España 1998.

74-UNAM “Antología “ Parámetros de las Funciones y su Comportamiento Tendencial, México , (2005)

75-Mérida Ramírez; Matemáticas 5 y 6 “Cálculo Diferencial e Integral”, Pearson, México (2004).

76-Cuevas Vallejo, “Cálculo Visual” Oxford, México (2003)

77-Larson Hostetler, “Cálculo y Geometría Analítica”, McGraw Hill, México, (1986)

78-Dirk J. Struik, “Historia Concisa de las Matemáticas”, Instituto Politécnico Nacional, México (1980).

79-Ibáñez, Torres, “Matemáticas IV, Precálculo”, Thomson, México, (2006).

80-Richardson, “Fundamentos de Matemáticas”, CECSA, México (1976).

81-Pimenta, Acosta, Ramos, “Matemáticas III”, “Un Enfoque Constructivista”, Pearson, México (2006).

82-Larson Edwards, “Cálculo I” ,McGraw Hill, China (2006)

83-Cuellar Carbajal, “Matemáticas IV” “Relaciones y Funciones”, McGraw Hill, México (2006).

84-Merlin C. Wittrock, “La Investigación de la Enseñanza I”, Paidós, España (1997).

85-Díaz Barriga, “Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo, Una Interpretación Constructivista”, McGraw Hill, México (2006).

86-Joseph H. Kindle, “Geometría Analítica”, McGraw Hill, Colombia, (1970)

87-Murria R. Spiegel, “Algebra Superior”, McGraw Hill, México (1985).

88-Illanes Mejía, “Principios de Olimpiada Matemática”, Instituto de Matemáticas UNAM, México, (2002).

89-Oteyza , Osnaya, Carrillo, “Geometría Analítica y Trigonometría”, Software interactivo, Prentice Hall, México (2001).

90-A.Baldor “Algebra”, México, Publicaciones Cultural (1988).

91-A.Baldor, “Aritmética”, Publicaciones Cultural, México (1988).

92-Lira Mojica “Didáctica Vectorial” Instituto Politécnico Nal. México(1995)

93-I.Galdos,”Consultor Matematico, Introducción al Cálculo”;España,(1998)

94- I.Galdos,”Consultor Matematico, Artmetica”;España,(1998)

95-Barnett/Nolasco, “Algebra Elemental” Mc Graw Hill, Colombia (1986).

96-Gran enciclopedia Educativa “Matematicas”;programa Educativo Visual; Colombia 1995.

97-Estrategias Para la enseñanza;Euro Méxco,Mexico (2006).

98-Steen “La Enseñanza Agradable de las Matematicas”; Limusa; México (1998).

98-Gómez,Rico;”Educación Matematica”;Iberoamericana; México (1995).

99-Huerta Ibarra,”Organización Lógica de las Experiencias de Aprendizaje” Trillas; México (1990).

100-Granville;”Calculo Diferencial e Integral”; Limusa; México (1997).

101-Earl w.Swokowski;”Cálculo con Geometría Analítica”; México (1989).

102-Didrikson,Campos; “El futuro de la Educación Superior en México”,UNAM; México (2004).

103-Azinián;”Resolución de Problemas, Matemáticos, visualización y manipulación con computadora “; Novedades Educativas; México(1997).

104- Roger S.Walker; “Informática Básica”,Anaya Multimedia; España (1991).

105-Oaxaca, Rivera, Luna; "Matemáticas Activas, El papel del profesor en la enseñanza de las matemáticas",UNAM; México (2005).

106- Oaxaca, Rivera, Luna; "Matemáticas Activas, Uso y dominio del software matemático, su Utilización como recurso Didáctico";UNAM, México (2005).

107-Zarzar Charur;"Habilidades Básicas para la Docencia"; Patria; México (2005).

108- Pimienta Prieto; "Constructivismo" ;Pearson; México (2005).

109-Fullan,Stiegelbauer;"El Cambio Educativo";Trillas; México (2004).

110-Stewart, "Cálculo, conceptos y contextos",Thomson;Mexico (2006).

111-Louis Leithold; "El cálculo"; Harla; México (1972).

112-Oteyza Elen,"Conocimientos fundamentales de matemáticas, Cálculo Diferencial e Integral ",Pearson, México, UNAM(2006).

113-López, Wisniewski; "Cálculo Diferencial "; Thomson, México (2006).

114- Smith, Minton "Cálculo Diferencial e Integral ",Mc Graw Hill, México (2005)

115-"Auto evaluación de Centros Escolares Para la Gestión de Calidad ",SEP (2007).

116- Nicolau,Marcela Belen; Oviedo, Lina Monica
"Matemática y computación: desde un marco teórico-epistemológico a la práctica. consideraciones básicas del entorno clic para docentes no informatizados". *edutec: revista electrónica de tecnología educativa*. (españa), no: 21, mes: jul, año: 2006, págs: 1-29.

117- Pires,Celia Maria Carolino
"Currículos de matemática: para onde se orientam?". *revista de educacao puc-campinas*. (brasil), no: 18, mes: jun, año: 2005, págs: 25-34.

118- Orozco Moret, Cirilo de Jesus; Morales de Perez, Vilma
"Algunas alternativas didácticas y sus implicaciones en el aprendizaje de contenidos de la teoría de conjuntos". *redie: revista electrónica de investigación educativa*. (mexico), vol: 9, no: 1, año: 2007, págs: 1-19.

119-Teran de Serpentino, Mirian; Pachano Rivera, Lizabeth

"La investigación-acción en el aula: tendencias y propuestas para la enseñanza de la matemática en sexto grado". *educere*. (Venezuela), vol: 9, no: 29, mes: abr-jun, año: 2005, págs: 171-180.

120- Rivas, Pedro Jose

"La educación matemática como factor de deserción escolar y exclusión social". *educere*. (Venezuela), vol: 9, no: 29, mes: abr-jun, año: 2005, págs: 165-170.

121- Lopez Fernandez, Ricardo

"La resolución de problemas y los soportes hipermedia". *aula: revista de enseñanza e investigación educativa*. (España), vol: 14, año: 2002, págs: 93-107

122-Fernandez,Tabare; Blanco, Emilio

"Cuanto importa la escuela? el caso de México en el contexto de América latina". *reice: revista electrónica iberoamericana sobre calidad eficacia y cambio en educación*. (España), vol: 2, no: 1, mes: ene-jun, año: 2004, págs: 1-27.

123- ICME-8; "El Futuro del Cálculo Infinitesimal".Iberoamericana .Sevilla, España.

124-T.S.Kuhn; "La Estructura de las Revoluciones Científicas ".Fondo de Cultura Económica.

125- Maita Guedez, Maryianela

"Una experiencia de formación inicial: la producción de software educativo por alumnos de la carrera de educación". *acción pedagógica*. (Venezuela), vol: 11, no: 2, año: 2002, págs: 66-75.

126- Suarez Tellez,Liliana

"De los paquetes didácticos hacia un repositorio de objetos de aprendizaje: un reto educativo en matemáticas. uso de las gráficas, un ejemplo". *ried: revista iberoamericana de educación a distancia*. (España), vol: 8, no: 1-2, año: 2005, págs: 307-334.

127- Girondo,Luisa

"Competencia matemática i práctica educativa". *guix: elements d'acció educativa*. (España), vol: 30, no: 329, mes: nov, año: 2006, págs: 16-23.

128-Mendoza, Orlando A.;Gonzalez,Fredy Enrique

"El currículum nulo en matemática en la educación básica venezolana". *alternativas: serie espacio pedagógico*. (Argentina), vol: 11, no: 44, mes: sep, año: 2006, págs: 223-240.

129- Torralbo Rodriguez, Manuel; Vallejo Ruiz, Monica; Fernandez Cano, Antonio; Rico Romero, Luis

"Análisis metodológico de la producción española de tesis doctorales en educación matemática (1976-1998)". *relieve: revista electronica de investigacion y evaluacion educativa*. (español), vol: 10, no: 1, año: 2004, págs: 1-19.

130-Sepulveda Lopez, Armando; Santos Trigo, Luz Manuel

"Desarrollo de episodios de comprensión matemática: estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas". *revista mexicana de investigacion educativa*. (México), vol: 11, no: 31, mes: oct-dic, año: 2006, págs: 1389-1422.

131-Front Moll, Vicenc; Ramos, Ana Beatriz

"Objetos Personales Matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. el caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales". *revista de educacion*. (español), no: 338, mes: sep-dic, año: 2005, págs: 309-345.

132-Perez, Olga; "¿Cómo diseñar el sistema de evaluación del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas?". *relime: revista latinoamericana de investigacion en matematica educativa*. (México), vol: 9, no: 2, mes: jul, año: 2006, págs: 267-297.

133-Ochoa, Granados "Aprenda Maple 8 como si estuviera en primero" ; San Sebastián, España, (2004).

134-Carraher, Schliemann "En la vida diez, en la escuela cero"; Siglo XXI, México, 1989.

135-Santos Trigo "Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas"; Iberoamericana, México, 1997.

136- Rincón, García "Cálculo científico con Maple"; Rama, España, 1995.

137-Barreras Alconchel "Matemáticas con Microsoft Excel"; Alfaomega, Rama. México, 2006.

138- Resnick, Ford "la enseñanza de las matemáticas sus fundamentos, psicológicos " ; Paídos, Ministerio de Educación y Ciencia.

139-Artigue, Douady "Ingeniería Didáctica en Educación Matemática " ; Iberoamericana, Bogotá, 1995.

140-Ma. Del Carmen Chamorro. "Didáctica de las matemáticas " ; Pearson Prentice Hall; Madrid ,2005.

- 141- Ma. Del Carmen Chamorro. "Didáctica de las matemáticas para primaria"; Pearson Prentice Hall; Madrid ,2003.
- 142-Gascon, Paredes y otros: "Didáctica General "; Mc Graw Hill; España, 2008.
143. Jiménez, René:"Calculo Diferencial "; Pearson Prentice Hall; México ,2008.
144. Purcell, Varberg, Rigdon." Cálculo"; Pearson Prentice Hall; México, 2008.
145. Michael Spivak. "Calculus"; Reverte; Barcelona; 1980.
146. Mendelson; "Introducción a Calculo "; Mc Graw Hill; México; 1986.
147. Ibáñez, García; "Cálculo Diferencial ": Thomson: México; 2007.
- 148 Ortiz Campos; "Cálculo Diferencial ": Patria: México; 2007.
- 149- Prado, Zuñiga, Aguilar; "Cálculo Diferencial para ingeniería ": Pearson Prentice Hall; México; 2006.
- 150- Drede, Spiegel; "Cálculo avanzado "Mc Graw Hill; España; 2004.