



---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

COSMOLOGÍA CON TEORÍAS DE GRAVEDAD  
MODIFICADA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

DIEGO ANTONIO CARRANZA ORTIZ

TUTOR DE TESIS: DR. SERGIO MENODOZA RAMOS

2012





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

Índice general	III
Índice de figuras	V
Agradecimientos	VII
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Relatividad general . . . . .	4
1.2. Cosmología estándar . . . . .	9
1.3. Teorías métricas de gravitación $f(R)$ . . . . .	16
<b>2. Teoría de gravitación extendida</b>	<b>19</b>
2.1. Materia oscura . . . . .	19
2.2. Dinámica newtoniana modificada (MOND) . . . . .	22
2.3. Teoría de Gravitación Modificada . . . . .	23
<b>3. Teoría métrica de gravitación extendida</b>	<b>27</b>
3.1. Conexión entre la fenomenología MOND y una teoría métrica . . . . .	27
3.2. Teorías métricas $f(R, T)$ . . . . .	32
<b>4. Cosmología con gravitación extendida</b>	<b>37</b>
4.1. Ecuaciones del modelo cosmológico . . . . .	37
4.2. Comparación con las observaciones . . . . .	44
<b>Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>



# Índice de figuras

1.1. Módulo de distancia . . . . .	13
2.1. Curva de rotación galáctica . . . . .	21
4.1. Calibración con los datos observacionales de Supernovas Ia . . . . .	45
4.2. Comparación del método numérico con los datos de Supernovas Ia . . . . .	47

# Agradecimientos

Ahora que veo todo el camino recorrido hasta aquí pienso lo improbable que era el que hubiera pasado, pues está hecho de decisiones, momentos y circunstancias en las que la más pequeña variación hubiera cambiando todo irremediabilmente.

En primer lugar, los mayores culpables de que haya llegado hasta aquí son mis padres. Siempre han sido mis mayores motivaciones. Sin ellos, esto simplemente habría sido imposible. A mi madre Ana, que siempre antepuso mi bien y mi educación antes que cualquier cosa. Su paciencia infinita hicieron que llegara hasta donde estoy. A mi padre Rodrigo, quien de alguna manera sorprendente hizo posible el que no me faltara nada. Gracias a él y sus sacrificios he alcanzado esta meta. A los dos: gracias por confiar en mí. No podría dejar de lado a mis hermanos Diana y Rodrigo, para quienes he tratado de ser un ejemplo más o menos bueno a seguir.

A mis amigos y compañeros de la facultad, quienes hicieron que mi paso por ella fue mucho más ameno y enriquecedor. A Manuel por la ayuda y orientación brindada en mi titubeante inicio; a Omar por sus consejos y optimismo aún en las situaciones más adversas; a Ignacio y Carlos, por mostrarme, aunque sin darse cuenta, el cómo debe de ser un físico. A Tonatiuh, Lalo, Giovanni, Maribel y Bere por hacerme olvidar, aunque sea por un momento, mis problemas y obtener de mi una sonrisa. A Mayra por ser más que una amiga. Por apoyarme y dejarme apoyarla.

A la Facultad de Ciencias de la UNAM. Mejor institución no hubiera podido encontrar. Alguún día devolveré parte de la ayuda brindada. A los profesores que ayudaron en mi formación. Gracias a Marcos Ley Koo, por darme mi primera clase real de Física. A Emilio Lluís, por mostrarme la elegancia de la simplicidad. A José Antonio García por adentrarme en la Astronomía; sin él, tal vez nada de esto hubiera pasado. A Enriqueta Hernández, por haber facilitado la elección de mi camino. A Carlos Málaga, pues sus clases siempre eran razón de alegría y entusiasmo. A Miguel Alcubierre, cuya excelente manera de enseñar me convenció de mi pasión. A Axel de la Macorra, gracias a quien, éste trabajo fluyó con mayor rapidez. A Sergio Mendoza y William Lee, quienes me mostraron cómo es que lo complicado puede resultar sencillo. Seguramente muchos de ellos no me recuerdan, pero yo siempre les agradeceré por tan valiosa ayuda. Todos ellos, de alguna manera, han logrado

dejar una marca en mí.

Mención aparte merece mi asesor y director de tesis, el Dr. Sergio Mendoza Ramos. El haberme aceptado como su estudiante me ha hecho sentir que realizo un trabajo realmente importante. Algo vio en mí que lo convenció. Por lo menos no encuentro otra razón para explicármelo. Estoy convencido de que no pude haber encontrado a alguien mejor que él. Su ayuda y consejos en momentos tortuosos de este proceso fueron claves. Admiro la paciencia que me tuvo considerando mis muchas limitaciones intelectuales. Si alguna vez llego a ser más o menos igual de bueno que él, sabré que he hecho bien las cosas.

¿Pero que sería de mí sin inspiración alguna? Ésta ha venido de dos enormes personajes en particular. De Carl Sagan por enseñarme que las limitaciones no son nada en comparación con los deseos. Por recordarme siempre la importancia de compartir nuestro conocimiento con los demás. Sin eso estaríamos perdidos. Y de Lev Landau, uno de los últimos físicos en toda la extensión de la palabra. Alguien insuperable, gracias a quien he aprendido lo simple y elegante que debe de ser la Física. Si llego a ser un 4 en su escala me daré por satisfecho.

Gracias a mis sinodales el Dr. Eugenio Ley Koo, Dr. Roberto Sussman, Dr. Juan Carlos Hidalgo y Dr. César Lóopez por su disposición, cooperación y comentarios sobre este trabajo.

También debo de agradecer al Instituto de Astronomía de la UNAM por todas las facilidades y apoyos inesperados brindados en cuanto a servicios durante la realización de este trabajo. Esta investigación fue realizada gracias al Programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IN116210-3, "Gravitación Astrofísica".

## RESUMEN

En este trabajo se plantea un modelo cosmológico desarrollado a partir de una teoría métrica de gravedad  $f(R, T)$ , así como en una teoría de gravitación extendida, teniendo como objetivo el explicar la actual expansión del Universo sin la necesidad de introducir entes energéticos y materiales oscuros.

Actualmente, el modelo cosmológico estándar puede explicar, entre otras cosas, la expansión acelerada que sufre hoy en día el Universo. Para ello recurre a la existencia de componentes de energía y de materia oscura, de tal suerte que componen aproximadamente el 95 % del Universo. Sin embargo, no hay pruebas directas que confirmen su existencia. Por otra parte, han surgido inconsistencias en cuanto a la dinámica de los objetos en las afueras de las galaxias espirales, para lo cual se ha propuesto la existencia de materia no visible en ellas, siempre teniendo en mente el preservar la ley de gravitación universal. Sumado a esto, la teoría de la relatividad general, a partir de las cuales se desarrolla el modelo estándar, carece de una restricción fundamental respecto al lagrangiano correspondiente a la curvatura, haciendo viable el proponer una función arbitraria del escalar de Ricci  $R$ . Esto, junto con los puntos anteriores, sugiere como una opción alternativa una posible modificación a las teorías de gravitación, tanto de carácter relativista como no relativista.

Bajo estas observaciones, primeramente se hará una breve discusión de la teoría de la relatividad general, así como del modelo cosmológico de concordancia, señalando algunos de los problemas que este presenta al comparar sus predicciones con los datos observacionales. Además, se mencionarán rápidamente algunas alternativas, como la que representan las teorías métricas  $f(R)$ . De manera paralela a los problemas del modelo estándar, se expondrán las teorías MOND y la teoría de gravitación extendida como opciones para dar solución al problema que representa la materia oscura en las curvas de rotación en galaxias espirales. Se presentarán sus similitudes y diferencias, recalcando las ventajas que ofrece el adoptar la segunda. Una vez analizados este par de problemas, se buscará establecer una conexión entre una teoría métrica de gravedad obtenida a partir de un principio de mínima acción y una de gravedad modificada a nivel no relativista. Para esto se estudiarán las teorías métricas dependientes del escalar de Ricci y de la traza del tensor de energía-momento, las cuales proporcionan un marco natural para el desarrollo de un modelo cosmológico. Se establecerán algunas constricciones a la forma particular de la acción,



provenientes tanto de consideraciones teóricas como observacionales. Finalmente, se desarrollará el modelo basado en las ecuaciones de campo, incluyendo en ellas una fenomenología MONDiana. En particular se propondrá una función de las potencias *ad hoc* a la teoría. Comparando con datos observacionales de Supernovas Ia se buscará determinar si este tipo de teorías son capaces de reproducir la dinámica del Universo a gran escala, así como la determinación de sus parámetros. Para complementar, se propondrá una función transición de un régimen MONDdiano a uno einsteniano y que reproduzca la expansión actual.

# Capítulo 1

## Introducción

Siendo la teoría general de la relatividad propuesta por Albert Einstein la mejor teoría de gravitación que tenemos hoy en día, ésta proporciona un marco natural consistente para el estudio de la evolución del Universo como un todo ya que a gran escala la gravedad es la única de las 4 fuerzas fundamentales de la naturaleza que resulta relevante para comprender su dinámica. No obstante, la descripción que nos ofrece presenta problemas y aparentes contradicciones con las observaciones. Esto ha llevado a la necesidad de postular entes hipotéticos que ayuden a subsanar estos defectos; pero también ha puesto en duda su validez universal. Esto ha conducido a diversas controversias acerca de la existencia de componentes oscuras que debieran de dominar la evolución del Universo a grandes escalas, así como también ha motivado el modificar la teoría de la relatividad de manera que la presencia de este tipo de materia y energía sea innecesaria.

En este primer capítulo se comenzará por dar un panorama introductorio de la teoría de la relatividad general, teniendo como primera meta el obtener las ecuaciones de campo correspondientes. En base a estas se estudiará el modelo cosmológico que ofrecen, así como la manera de compararlas con las observaciones. Una vez que se hayan notado sus defectos y virtudes, se expondrán algunas de las características del modelo cosmológico de concordancia aceptado actualmente, así como una breve discusión de algunos de los problemas que lo acompañan. Por último, se enfatizará en la posibilidad de modificar las ecuaciones de campo y se presentará una introducción a los modelos de gravitación modificada denominados como teorías métricas  $f(R)$ .

## 1.1. Relatividad general

Para comenzar con el estudio de la evolución del Universo como un todo, se debe antes comprender de la teoría de la relatividad general la cual lo fundamenta. Uno de las ideas principales que introduce es el llamado *principio de equivalencia* (Will, 1993), el cual establece que el movimiento de un cuerpo en un sistema de referencia *no inercial* es *localmente* equivalente a considerarlo en un sistema *inercial* bajo la acción de un campo gravitacional apropiado (Landau, 1987). Una consecuencia sumamente importante de este principio es el hecho de que se puede describir al *espacio-tiempo* como una variedad diferenciable, en la que la masa - energía lo deforma, provocando así que los fenómenos gravitacionales puedan interpretarse simplemente como efectos geométricos de la variedad.

Con esto en mente, se pueden aplicar los conceptos de la geometría diferencial para el estudio de la gravitación, de manera que una de las cantidades más importantes de estudio e interés será la *métrica*. Ésta describe de manera cuantitativa la manera en la que se miden las distancias entre puntos en un espacio dado. De manera general se expresa como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

en donde  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico de rango 2. Aquí, y en lo que resta del trabajo se usará una métrica con signatura  $(-, +, +, +)$ . En cuanto a la notación, índices latinos tomarán valores 1, 2, 3, mientras que los griegos 0, 1, 2, 3. En la ecuación anterior está implícito el hecho de que en general se tratan *coordenadas curvilíneas*  $x^\mu$  para la descripción de los problemas. Gracias a esto aparecen de manera natural los *símbolos de Christoffel*  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  que pueden expresarse en términos de la métrica mediante la relación (Schutz, 2009):

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (1.2)$$

Ya que se pretende estudiar la manera en que el espacio se curva, debemos de tener una cantidad que describa esto de manera cuantitativa. Para este fin, el objeto que contiene toda esta información es el *tensor de Riemann*, el cual además se puede expresar en términos de los símbolos de Christoffel de la siguiente manera (Carroll, 2004; Misner et al., 1973):

$$R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} = \partial_{\beta}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\lambda}, \quad (1.3)$$

que es un tensor de rango 4, y que además también aparece de manera natural en el estudio de la no conmutatividad de las derivadas covariantes en espacios curvos. A partir de este tensor, se puede construir el *tensor de Ricci* de la siguiente manera:

$$R_{\mu\nu} := g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (1.4)$$

Su contracción da a lugar a:

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

que se conoce como el *escalar de Ricci* o de curvatura.

### El tensor de energía - momento

Hasta ahora se han considerado conceptos puramente geométricos que serán útiles en la descripción de la teoría, pero también es necesario el hablar sobre los relacionados a la manera en que se describirá a la materia, pues no hay que olvidar que se pretende estudiar como interactúan ésta y el espacio-tiempo. Dado que nuestro estudio se enfocará en el Universo, el cual a su vez es posible describir como un fluido perfecto, nos enfocaremos en este tipo particular.

Para estudiar la dinámica de las partículas que conforman al fluido, dos de las cantidades claves en su descripción son su presión  $p$  y densidad  $\rho$ . Este par pueden relacionarse de manera sencilla de acuerdo a la ecuación de estado

$$p = \omega\rho c^2, \quad (1.6)$$

donde  $\omega$  es una constante que depende del tipo de fluido que se considere. Por ejemplo, para el caso de materia sin presión, denominado como polvo,  $\omega = 0$ ; mientras que si se

trata de radiación,  $\omega = 1/3$ .

De manera general, se define la acción de materia de un sistema como

$$S_m = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.7)$$

en donde  $\Lambda$  es una función propia del sistema, y que puede asociarse a una densidad lagrangiana. Mediante la ecuación anterior podemos definir de manera formal el tensor de *energía-momento*  $T_{\mu\nu}$  de la siguiente manera (Landau, 1987):

$$\delta S_m = -\frac{1}{2c} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.8)$$

Aquí,  $g$  es el determinante de la métrica. Para el caso de un fluido perfecto, es posible mostrar que la expresión particular de  $T_{\mu\nu}$  viene dada por (Schutz, 2009; Carroll, 2004):

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho c^2) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (1.9)$$

donde  $u^\mu = dx^\mu/ds = dx^\mu/cd\tau$  es la 4-velocidad del fluido. Finalmente, un hecho importante es que al pedir la conservación de energía, este tensor cumple con que su divergencia es nula. Matemáticamente se conoce como la *ecuación de conservación de energía-momento* y se expresa como:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.10)$$

### Acción de Hilbert - Einstein

Para la obtención de las ecuaciones que describen al campo gravitacional es importante el tener en mente que dichas relaciones deben de generalizar a la teoría newtoniana de gravitación. Recordemos que ésta última tiene como ecuación fundamental a la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad (1.11)$$

Ella expresa el hecho de que la densidad de masa  $\rho$  distribuida en el espacio determina al campo gravitacional  $\phi$ . Un punto importante de (1.11) es que se trata de una ecuación diferencial de segundo orden, lo cual sugiere que una generalización también debe de poseer tal característica, sólo que de manera tensorial. De acuerdo a (1.9),  $T_{00} = \rho$ , lo cual sugiere que la generalización relativista de la materia es el tensor  $T_{\mu\nu}$ ; mientras que la del potencial resulta ser la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Como consecuencia de este argumento, resulta natural pedir que las relaciones buscadas para el campo gravitacional “deben” de ser ecuaciones diferenciales de segundo orden en la métrica. La manera formal para llegar a ellas es mediante el *principio de mínima acción*, el cual requiere minimizar la acción relativista  $S$ . Esta a su vez debe de tener dos componentes, una asociada a la materia,  $S_m$ , y otra al campo gravitacional,  $S_f$ . Para éste último, la acción se puede escribir como:

$$S_f = \int \mathcal{L} d^4x, \quad (1.12)$$

donde  $\mathcal{L}$  es una densidad lagrangiana dada por la multiplicación de una cantidad escalar y la raíz del determinante de la métrica  $g$ . Debido a que las ecuaciones resultantes de la aplicación de este principio deben de ser de segundo orden, entonces el integrando debe de contener derivadas de primer orden de  $g_{\mu\nu}$ . De acuerdo a (1.2), las cantidades que surgen como los candidatos más naturales para esto son  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ . Sin embargo, esta elección presenta el problema de que éstos no constituyen cantidades invariantes. Este hecho es evidente a partir de la idea de que en cada punto del espacio es posible considerar un sistema *localmente* plano en el cual  $g_{\mu\nu}$  es constante, y así, de acuerdo a (1.2),  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$ . Esto significa que siempre sería posible el obtener una acción nula, lo cual es una contradicción. pues la acción es una cantidad escalar. Descartada esta posibilidad, la siguiente opción la constituyen los escalares contruidos a partir del tensor de Riemann. No obstante, hay que notar que éste posee segundas derivadas de la métrica, lo cual en principio da a lugar a la posibilidad de que las ecuaciones resultantes sean de orden mayor a dos. Fue el propio Hilbert quien se dio cuenta de esto (Longair, 2008), y propuso entonces una acción relativista del campo como

$$S_f = -k \int R \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.13)$$

en la que  $k$  es una constante de acoplamiento que se obtiene a partir de tomar el límite no relativista. Sin embargo, Hilbert también era consciente de que esta elección del Lagrangiano era la más simple, pues es lineal en el escalar de Ricci. En realidad, no hay una razón más fundamental para elegir entre este lagrangiano y uno que contenga una función más general de  $R$ , sino que su elección se basa en un criterio de simplicidad.

Con esto, finalmente es posible el escribir el principio de mínima acción correspondiente a la teoría como:

$$\delta(S_f + S_m) = 0. \quad (1.14)$$

A partir de la ecuación anterior, es posible el demostrar que las ecuaciones para el campo gravitacional que se obtienen de variar la acción son (Landau, 1987):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.15)$$

que son las llamadas *ecuaciones de Einstein* y son las que nos permiten describir el campo gravitacional.<sup>†</sup> En general forman un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden, tal como se pretendía. En éstas, la variable principal a hallar es la métrica  $g_{\mu\nu}$  en términos de una distribución de materia y energía, es decir, permiten encontrar la geometría que adquiere el espacio-tiempo. Esto corresponde a una generalización de la teoría newtoniana en la que la ecuación de Poisson permite hallar la forma del campo gravitacional, una vez conocida la distribución de materia. De aquí es posible identificar al campo gravitacional como una manifestación de la curvatura del espacio tiempo.

Para completar la descripción de la dinámica de las partículas hace falta una ecuación que describa sus trayectorias. Esto se logra al hallar la trayectoria geodésica correspondiente al campo gravitacional, o lo que es lo mismo, a la geometría que adquiere el espacio-tiempo.

---

<sup>†</sup> El camino seguido por Einstein, aunque de carácter heurístico, lleva a las mismas ecuaciones. Su argumento clave consiste en relacionar a la materia con la geometría del espacio-tiempo. La primera viene representada por  $T_{\mu\nu}$ , mientras que la segunda podría en principio estar dada por el tensor  $R_{\mu\nu}$ . Sin embargo, debe de existir consistencia con la ecuación de conservación (1.10). De esta manera, el tensor adecuado resulta ser el que se encuentra al lado izquierdo en (1.15), pues cumple con que su divergencia es nula (Mendoza, 2006).

Utilizando de nuevo el principio de mínima acción, esto se expresa como:

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0. \quad (1.16)$$

No es difícil mostrar que el buscar este extremal se traduce en la siguiente ecuación dinámica (Landau, 1987):

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (1.17)$$

conocida como la *ecuación geodésica*. Es de notarse además, que esta relación también es una consecuencia de la ecuación de conservación (1.10), lo cual resulta de contraer esta última con el tensor ortogonal a  $u^\lambda$  dado por  $g_{\lambda\nu} - u_\lambda u_\nu$ . Esto es de esperarse, pues la manera en que las partículas se mueven se encuentra estrechamente ligada con la conservación de la energía. Las ecuaciones (1.15) y (1.17) dan lugar a la interpretación *geometrodinámica* de la relatividad que puede expresarse con el siguiente enunciado: *las masas le indican al espacio-tiempo como curvarse, y a su vez el espacio-tiempo le dice a las masas como moverse* (Mendoza, 2006).

## 1.2. Cosmología estándar

Hasta el momento se conocen cuatro fuerzas fundamentales en el Universo: la electromagnética, la nuclear fuerte y débil, y la gravitacional. Siendo que a gran escala existen tantas cargas eléctricas positivas como negativas, y que las de carácter nuclear son de corto alcance, la fuerza que debe regir al Universo al considerarlo como un todo, es la gravitacional. Es por esta razón que las ecuaciones de campo de la relatividad general ofrecen un marco teórico natural en el cual poder estudiar la dinámica y evolución del Universo a gran escala. Sin embargo, también es necesario el incluir algunas hipótesis adicionales, resultado de las observaciones. De éstas, la más relevantes para nuestro caso son:

- El Universo se puede considerar como *homogéneo e isotrópico* a grandes escalas ( $\geq 100$  Mpc).
- El Universo se encuentra en expansión y lo hace de la misma manera en todas las direcciones.



- A una misma época cósmica, todos los observadores en el Universo observan la misma estructura a gran escala, así como la misma ley de expansión. Aún más, las leyes de la naturaleza son las mismas a cualquier época y en cualquier lugar. A esto se le conoce como el *principio cosmológico*.

Estas hipótesis se pueden introducir matemáticamente mediante la métrica de *Friedmann - Lemaitre - Robertson - Walker* (FLRW), que corresponde a la métrica de Minkowski de todos los posibles universos en expansión (Carroll, 1997; Mendoza, 2006):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (1.18)$$

En ésta, el conjunto de coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  son llamadas *coordenadas comóviles* y se consideran como *atadas* a cada galaxia, mientras que la expansión del Universo es introducida mediante el *factor de escala*  $a(t)$ . Por último,  $\kappa$  es la curvatura gaussiana asociada al espacio. Diversas observaciones muestran que  $\kappa = 0$  (Tegmark et al., 2004). Finalmente, dada la complejidad del Universo en cuanto a las estructuras que lo componen, se acostumbra simplificar el problema al considerarlo como un fluido perfecto en expansión.

### Ecuaciones dinámicas

Aplicando las hipótesis descritas anteriormente a las ecuaciones de campo y a la ley de conservación (1.10) para un fluido perfecto con una métrica de tipo FLRW, se obtienen dos ecuaciones linealmente independientes. Estas se pueden expresar en términos de la variable  $\omega$  definida en (1.6) de la siguiente manera (Carroll, 1997):

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{\kappa}{a^2}, \quad \dot{\rho} + 3H\rho(1 + \omega) = 0. \quad (1.19)$$

Este par de relaciones constituyen las ecuaciones más importantes para la descripción dinámica del Universo. La primera de ellas es conocida como la *ecuación de Friedmann*, mientras que la segunda es la *ecuación de conservación de energía*. Sumada a estas, existe una tercera ecuación dinámica consecuencia de las 2 anteriores, la cual resulta ser más bien una relación auxiliar dada por:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho}{3} (1 + 3\omega), \quad (1.20)$$

conocida como la *ecuación de Raychaudhuri*. La variable  $H(t) := \dot{a}/a$  es la *constante de Hubble*. Es importante el mencionar que se trata de una de las cantidades más importantes en cosmología, pues conociéndola es posible el determinar las demás cantidades dinámicas. Así, las ecuaciones de campo (1.15) se han reducido al sistema de dos ecuaciones diferenciales (1.19), siendo las incógnitas  $a(t)$  y  $\rho(t)$ .

A pesar de que las dos últimas cantidades dependen claramente del tiempo, éste resulta no ser del todo apropiado en cuestiones de cosmología, por lo que es conveniente definir un nuevo parámetro  $z$  llamado *corrimiento al rojo*, el cual posee una estrecha relación con el factor de escala expresada mediante (Kolb, 1990; Lambourne, 2010):

$$1 + z = \frac{a_0}{a}. \quad (1.21)$$

Esta es una relación particularmente importante, tanto que de ahora en adelante pocas veces se hará uso del tiempo, y el corrimiento al rojo tomará su lugar.

La densidad crítica  $\rho_c = 3H^2/8\pi G$  es la densidad de materia necesaria para cerrar un Universo plano ( $\kappa = 0$ ). Se define el parámetro de densidad hoy en día como  $\Omega_0 = 8\pi G\rho_0/3H^2$ , siendo  $\rho_0$  la densidad hoy en día. De esta manera se puede definir el parámetro de densidad al tiempo  $t$  para cualquier especie energética como:

$$\Omega_i := \frac{3H^2\rho_i}{8\pi G}. \quad (1.22)$$

La ventaja que se adquiere al emplear los parámetros de densidad en vez de las densidades mismas reside en el hecho de que éstas expresan de manera adimensional la proporción que existe de los diferentes tipos de materia y/o energía con respecto a la densidad crítica de materia a diferentes épocas cosmológicas.

### Aspectos observacionales

Una vez que se tienen las ecuaciones dinámicas que describen la evolución del Universo, es indispensable el comparar sus predicciones con los datos observacionales. Sin embargo,

en la práctica no es posible el medir de manera directa la densidad ni el factor de escala. Por esta razón es que se han ideado métodos para lidiar con este problema. Uno de estos se basa en la medición de las distancias a las que se encuentran de nosotros las galaxias. La razón del porqué de esto reside en que así podemos relacionarla con el flujo de radiación electromagnética que recibimos de ellas. La forma usual de hacer esto es mediante la ayuda de las Supernovas Ia, pues se considera que estas explosiones poseen curvas de luz características (Karttunen et al., 2007). Dicho de otra forma, son objetos que permiten el calibrar las distancias a las que se encuentran las galaxias de las que éstas forman parte.

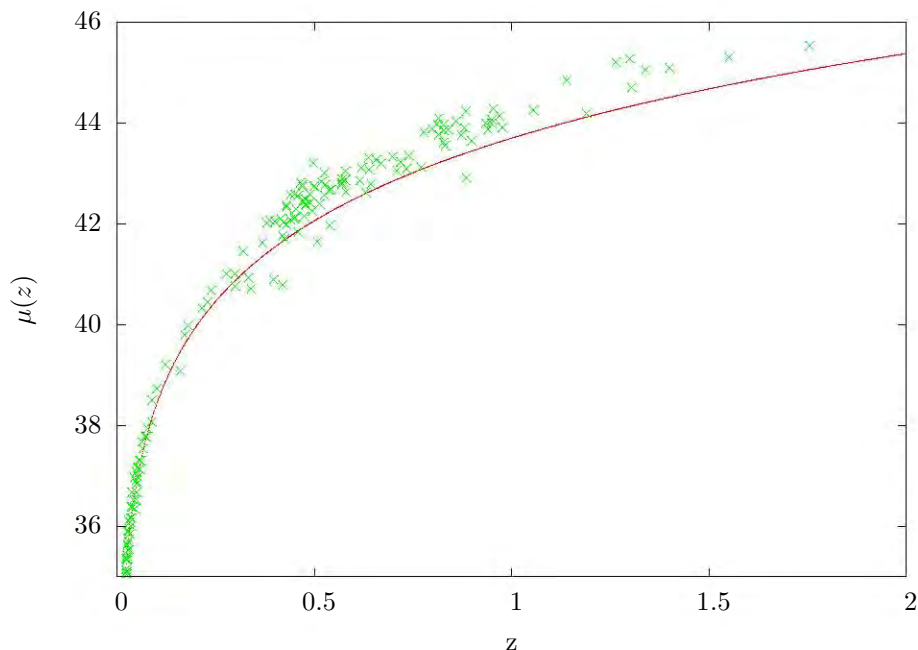
A partir de estas mediciones es posible el conocer el *módulo de la distancia*  $\mu := m - M$ , en donde  $m$  y  $M$  son las magnitudes aparentes y absolutas del objeto, respectivamente. Aún más, es posible mostrar que esta cantidad adimensional se puede expresar como (Padmanabhan, 2003):

$$\mu(z) = 5 \log_{10} [H_0 d_L(z)] - 5 \log_{10} h + 42.38. \quad (1.23)$$

Aquí la variable  $h$  queda definida mediante la relación  $H_0 = 100h \text{Km/sMpc}$ , siendo  $H_0$  el valor de la constante de Hubble hoy en día. La cantidad  $d_L$  es llamada la *distancia lumínica* y es la que nos permitirá el poder comparar el modelo teórico con las observaciones. Ésta última es estimada a partir del flujo de radiación recibida y representa la distancia física al objeto. La característica importante de ésta distancia que hace posible esto es que en sí misma considera la expansión del Universo (cuantificada por  $H$ ), así como su geometría. Para un Universo plano con métrica FLRW viene dada por (Padmanabhan, 2002):

$$d_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{c}{H(z)} dz. \quad (1.24)$$

Las ecuaciones (1.23) y (1.24) serán de suma importancia en el desarrollo de ésta tesis, pues nos permitirá comparar las predicciones del modelo teórico con los resultados observacionales. Como primer ejemplo de esto, podemos considerar el caso de las ecuaciones de evolución (1.19) en las que se debe de considerar que hoy en día la contribución de la radiación a la densidad total es despreciable. Los resultados de esto se muestran en la Figura 1.1. A partir de ésta es evidente el hecho de que las ecuaciones de campo fallan al intentar reproducir los datos observacionales, pues subestiman el módulo de distancia.



**Figura 1.1:** Módulo de distancia  $\mu(z)$  como función del corrimiento al rojo  $z$ . Los datos observacionales pertenecen al *Supernova Search Team Collaboration* (Riess et al., 2004). La línea corresponde a un modelo puramente de polvo ( $\Omega_M = 1$ ) dentro de la relatividad general asumiendo un valor de la constante de Hubble hoy en día de  $72 \text{ km/sMpc}$

Sumado a esto, hemos de mencionar que la edad del Universo en este modelo es menor a la inferida por diversos objetos estelares como cúmulos globulares. De esta manera, un modelo de Universo con  $\Omega_M = 1$  queda descartado.

### Modelo de concordancia

Como se acaba de mostrar, un modelo de Universo plano<sup>†</sup> dominado completamente por materia no reproduce las observaciones astronómicas de manera satisfactoria, así que en una primera instancia, una opción natural es modificar las ecuaciones de campo de manera que sean consistentes con ellas. Remitiéndonos a las ecuaciones (1.15), éstas poseían dos componentes: una relativa a la curvatura del espacio-tiempo, y otra a la materia. En un principio, la evidencia observacional parece inclinarse a favor de una posible modificación

<sup>†</sup> El estudio observacional de la distribución espacial de galaxias, junto con las estimaciones de sus masas han llevado a establecer que la curvatura del Universo a grandes escalas es aproximadamente nula (Longair, 2008).

al sector de materia, consecuencia principalmente de dos clases de fenómenos, uno a escalas galácticas, y otro de carácter cosmológico.

El primero de estos se refiere al problema de las curvas de rotación de galaxias espirales, pues contrario a la predicción hecha por la ley newtoniana, la velocidad de las estrellas no disminuye conforme aumenta su distancia al bulbo, sino que permanece aproximadamente constante. Esta anomalía puede ser explicada si se supone que una gran cantidad de materia se encuentra en el halo que rodea a la galaxia. A esta clase hipotética de materia se le conoce como *materia oscura* (su nombre se debe a que no emite radiación electromagnética) la cual sólo puede ser detectada mediante los efectos gravitacionales que produce (Freese, 2009). A su vez, ésta se divide en dos clases: la de tipo bariónico y la no bariónica, siendo ésta última la que más problemas representa, debido a que hasta hoy en día no se ha logrado su detección<sup>†</sup>.

Sin embargo, aún incluyendo toda esta materia parece no ser suficiente para explicar el tipo de expansión que está sufriendo el Universo hoy en día. Para subsanar esto se ha propuesto la adición de una constante  $\Lambda$  en las ecuaciones de campo, la cual se remonta a 1919 cuando el mismo Einstein la introdujo. Resultado de esto, dichas ecuaciones toman la forma (Longair, 2008):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.25)$$

en la que la constante  $\Lambda$  recibe el nombre de *constante cosmológica*.

Bajo esta consideración, ha surgido otra interpretación fuera del alcance de la física clásica basado en el siguiente argumento. En un Universo vacío regido por las ecuaciones (1.25) aún existe una fuerza que actúa sobre las partículas, tal que si  $\Lambda > 0$ , ejerce una especie de repulsión. De esta forma dicha fuerza debe de estar ligada al espacio mismo, lo cual se puede asociar a la imagen moderna del vacío cuántico (Longair, 2008). Con estos supuestos es posible el identificar a la constante cosmológica como:

---

<sup>†</sup> En cuanto a la de carácter bariónico, las enanas café, planetas y agujeros negros son representantes típicos. Mientras que para la de tipo no bariónico, las sugerencias más populares son los axiones, neutrinos masivos y los WIMPS.

$$\Lambda = -\frac{8\pi G p_v}{c^2}, \quad (1.26)$$

siendo  $p_v$  la presión del vacío (Longair, 2008). Es entonces, mediante este mecanismo que el Universo experimenta una fuerza extra de repulsión de tal modo que se expande aceleradamente. El problema que surge de aceptar esta interpretación radica en que el valor requerido para explicar las observaciones cosmológicas difiere en 120 órdenes de magnitud del predicho por la teoría cuántica. Las observaciones hechas en Supernovas Ia por Riess et al. (1998) han arrojado evidencia de una expansión acelerada del Universo, así como de la posible existencia de una componente de *energía oscura* la cual se ha asociado con una constante cosmológica<sup>†</sup>.

Considerando entonces a estas dos nuevas componentes en las ecuaciones de campo de Einstein resulta que el mejor modelo que explica diversas observaciones tiene como parámetros cosmológicos  $\Omega_m = 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7$  y  $h = 0.72$  (Tegmark et al., 2004). El primero de ellos corresponde a materia oscura tanto bariónica ( $\sim 5\%$ ) como no bariónica ( $\sim 25\%$ ); mientras que el segundo es el asociado a la energía oscura ( $\sim 70\%$ ). Esto querría decir que desconocemos el 95% de los constituyentes energéticos del Universo.

Una de las predicciones más importantes que hace este modelo es que el Universo se encuentra actualmente en una etapa de expansión acelerada (Riess et al., 1998). Esto resulta de la definición del *parámetro de desaceleración* (Capozziello et al., 2008):

$$q(t) := -\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} H^{-2}. \quad (1.27)$$

Un valor  $q < 0$  significa expansión acelerada, mientras que  $q > 0$  indica que se está en un proceso de desaceleración. Bajo este modelo es posible mostrar que existe una íntima relación entre  $q$  y las cantidades de materia y energía oscura hoy en día dada por (Longair, 2008):

---

<sup>†</sup> Matemáticamente, la incorporación de una componente de energía oscura en el modelo es equivalente a una modificación a la acción del campo gravitacional de la forma  $R - 2\Lambda$ , en vez de solamente  $R$  como en la ecuación (1.13).

$$q_0 = \Omega_0 - \frac{\Omega_\Lambda}{2}, \quad (1.28)$$

de manera que adoptando los valores antes mencionados, el resultado es que  $q_0 = -0.55$ , es decir, el Universo se está expandiendo aceleradamente. Cabe señalar que ésta cantidad no es medible de manera directa, sino que es sólo una predicción obtenida de aceptar la existencia de materia y energía oscura a través del modelo de concordancia. Estos valores en conjunto son una de las principales características del llamado modelo de concordancia, el cual goza de cierta aceptación general.

Como se vio, a pesar de que el modelo de concordancia cosmológico proporciona un marco que explica satisfactoriamente diversos aspectos de la cosmología, no está exento de problemas como el de la energía oscura. Este es una de las principales razones que han motivado la propuesta de modelos alternativos de gravedad así como otros en los que  $\Lambda$  es una variable (Padmanabhan, 2008; Ma, 2008). Esta evidencia contradictoria parece sugerir un estudio más detallado de las ecuaciones de campo, el cual pueda resultar en una posible generalización de éstas. Pero el común denominador de estas opciones debe ser el poder dar una explicación natural de la evolución del Universo.

### 1.3. Teorías métricas de gravitación $f(R)$

En la sección 1.1 se hizo énfasis en la idea de que las ecuaciones de campo correspondientes a la teoría general de la relatividad deberían de ser de segundo orden en la métrica, pues ésta es una característica que posee la ecuación no-relativista de Poisson. Además de esto, claramente al tomarse el límite no relativista se recupera la ecuación (1.11). Sin embargo, ésta imposición en el orden de las ecuaciones no descansa sobre principio fundamental alguno, pues como también se mencionó, Hilbert era consciente de que el considerar a  $R$  como el lagangiano de la acción reactivista en vez de alguno más complicado, era principalmente por sencillez. La elección de un término no lineal haría que las ecuaciones resultaran de cuarto orden en la métrica, y por ende, representaría un mayor reto el resolverlas.

Sumado a esto, en la sección anterior se mostraron las dificultades que surgen al intentar empatar las predicciones hechas por la teoría de Einstein con las observaciones astronómi-

cas. De tal tamaño es el problema, que para subsanarlo es necesario el introducir grandes cantidades de materia - energía de carácter desconocido. Por si esto no fuera suficiente, los intentos por desarrollar una teoría cuántica de la gravedad han llevado a la introducción de invariantes de mayor orden en la acción, tales como  $R_{\mu\nu\sigma\tau}R^{\mu\nu\sigma\tau}$ ,  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  y  $\square R$  entre otros más (Schmidt, 2007). Todo esto sugiere que en vez de intentar modificar el sector de materia dentro de las ecuaciones de campo, se debe de poner mayor atención en el aspecto relacionado con la curvatura para así explicar de manera natural la evolución del Universo.

No obstante, una posible generalización de la teoría debe de satisfacer ciertos requerimientos iniciales que la hagan físicamente apta. Para esto, la relatividad general y la teoría newtoniana imponen restricciones como son (Capozziello, 2008):

- *Principio de relatividad.* No existe un marco de referencia absoluto.
- *Principio de covariancia.* Las ecuaciones de campo resultantes deben de ser generalmente covariantes.
- *Principio de equivalencia.* Siempre es posible el describir de manera local a un sistema no inercial como uno inercial bajo al acción de un campo gravitacional.
- *Causalidad.* Los fenómenos superlumínicos están físicamente prohibidos. También se debe de proporcionar una descripción consistente de presente, pasado y futuro en cada punto.
- En el límite apropiado de campo débil, la gravitación newtoniana debe de ser recuperada.

De entre las diversas teorías que pretenden modificar las ecuaciones de campo que surgen con cada elección particular del lagrangiano, una clase es conocida como *teorías métricas de gravitación  $f(R)$* . Esta será a la que se prestará atención en este apartado. En particular, se tratará en su versión de formalismo métrico<sup>†</sup>, cuya acción efectiva se expresa como

$$S_{metrica} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int f(R)\sqrt{-g} d^4x + S_m. \quad (1.29)$$

---

<sup>†</sup> Existen otras dos maneras de estudiar a este tipo de teorías en los que se presta mayor atención al papel que juega la conexión  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  dentro de la acción. Estos corresponden a los formalismos de Palatini y de métrica afín (Capozziello et al., 2010).



Aquí,  $S_m$  es la acción estándar asociada a las componente de materia, dada por (1.7). De manera clara, esta ecuación muestra que la modificación al sector de curvatura de la teoría da a lugar a la posibilidad de introducir una función más general del escalar de Ricci, lo cual se puede considerar como la extensión más natural y sencilla a las ecuaciones (1.15). De manera similar al caso de relatividad general, al variar la acción total es posible mostrar que las ecuaciones de campo correspondientes a esta teoría son (Capozziello, 2011):

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) = \frac{8\pi GT_{\mu\nu}}{c^4}. \quad (1.30)$$

Como era de esperarse, con esta generalización las ecuaciones de campo resultan ser de cuarto orden en la métrica, y no de orden dos como antes. Además, es fácil notar que para el caso particular en que  $f(R) = R$ , las ecuaciones de campo de Einstein (1.15) son recuperadas.

Como se puede intuir desde una incio, el mayor problema con esta teoría es referente al hecho de que en principio no existe razón fundamental que ayude a la elección de alguna función en particular. El principio de equivalencia permite que la acción sea de la forma (1.29), pero no nos dice nada sobre su forma exacta. La única manera de discriminar es mediante la comparación directa con los datos observacionales. No obstante, existe otra cuestión de importancia que pocas veces se menciona o aclara. Al escribir a la acción como en (1.29), en general, las dimensiones físicas ya no son las correctas<sup>†</sup>, sino que dependiendo de la función que se elija, serán las dimensiones que adquiera. Esto representa desde el inicio un problema que debe de resolverse para poder establecer de manera corecta una extensión de la teoría.

---

<sup>†</sup> Las dimensiones de la acción son iguales a las de energía por tiempo.

## Capítulo 2

# Teoría de gravitación extendida

De manera paralela a los problemas surgidos de la teoría de la relatividad general expuestos en la sección 1.2, en este segundo capítulo, se abordarán los referentes a la teoría de gravitación no relativista que surgen de estudiar ciertos sistemas astrofísicos. Primero se resumirán algunas de las observaciones astronómicas que no pueden ser explicadas de manera natural por la teoría newtoniana, lo cual lleva a la inclusión de materia oscura dentro del modelo. A partir de esta evidencia, y como una alternativa, se expondrá la teoría MOND la cual sacrifica la validez de la dinámica newtoniana para evitar la necesidad de postular materia exótica. Todo esto siempre teniendo en mente la evidencia observacional. Finalmente se expondrá la teoría de gravitación modificada, propuesta en Mendoza et al. (2011) cuyo ángulo de ataque es el proponer que la teoría de gravitación clásica posee límites de validez en condiciones de aceleraciones muy pequeñas. Se expondrán sus semejanzas con MOND, pero resaltando las ventajas que posee sobre ésta, y señalando la necesidad de una extensión relativista de esta teoría para explicar la dinámica del Universo sin la necesidad de energía y materia oscura.

### 2.1. Materia oscura

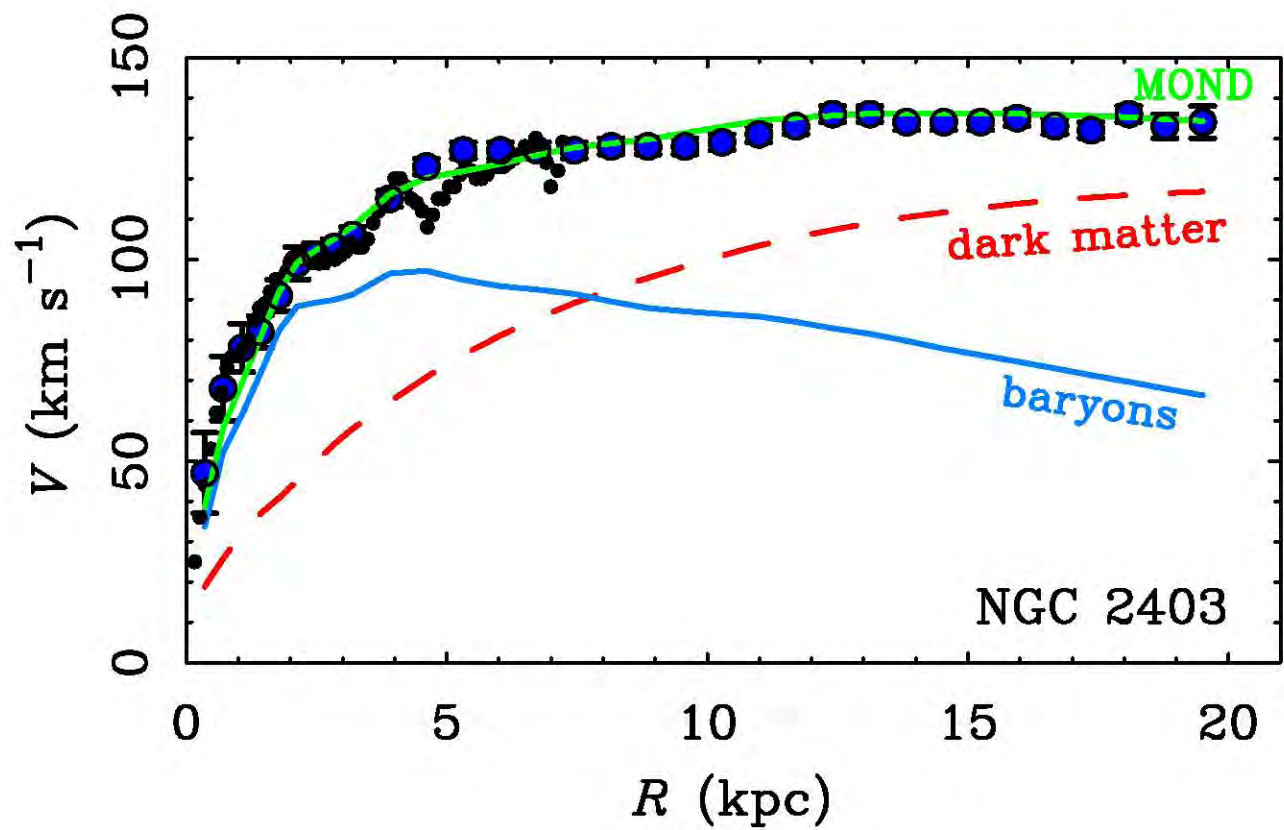
La teoría de la gravitación newtoniana ha mostrado a lo largo del tiempo su capacidad para reproducir los datos experimentales con gran precisión. Sin embargo, formalmente sólo se ha probado para escalas no mayores a las del sistema solar (Will, 1984). Siendo las galaxias objetos no relativistas, ésta teoría debiera de reproducir las observaciones astronómicas como la velocidad de rotación de las estrellas que las conforman, además de

poder inferir su masa. La realidad es que la comparación entre las predicciones hechas por la teoría y los datos observacionales conllevan a fuertes contradicciones, pues el cociente masa - luminosidad obtenido para estos objetos resulta demasiado alto, si suponemos que la mayor parte de la masa se encuentra presente en las estrellas.

Como se mencionó brevemente en la sección 1.2, las curvas de rotación de galaxias espirales presentan un problema a grandes distancias. De acuerdo a la ecuación (1.11), a medida que se aumenta la distancia del centro galáctico, la velocidad de las partículas debería de decrecer como  $r^{-1/2}$  tal como sucede en el sistema solar de acuerdo con la tercera ley de Kepler. Sin embargo, como se muestra en la Figura 2.1, ésta permanece aproximadamente constante a partir de una cierta distancia. Para evitar tal problema sin modificar la teoría, es necesario el suponer la existencia de grandes cantidades de materia oscura no bariónica presente en el halo ( $\sim 90\%$  de la masa total) (Zwicky, 1933). Esto, siempre y cuando se acepte a la teoría de gravitación de Newton como válida a esas escalas, además del hecho de que las estrellas están en equilibrio gravitacional en órbitas casi circulares.

En principio, esta parece ser la opción más natural para explicar dichas anomalías, dado que no sería la primera vez que las leyes de Newton predican la existencia de un objeto oscuro (Adams, 1846). El principal problema con esta hipótesis radica en que hasta ahora no se ha podido confirmar de manera directa, es decir, no se han detectado partículas de materia oscura. Su introducción siempre ha estado motivada para poder explicar las observaciones. Por si fuera poco, parece estar presente a diversas escalas. En el estudio de las galaxias elípticas se requieren cantidades aún mayores de esta materia para explicar la dinámica de sus componentes, así como también resulta indispensable en cúmulos globulares y galácticos (Hernandez & Jiménez, 2012), sin mencionar que su presencia es clave para explicar otros fenómenos como las lentes gravitacionales y la formación de estructuras en el Universo temprano (Zwicky, 1933).

Debido a su carácter exótico y a que hasta ahora sólo representa una hipótesis que confirmar, en realidad no se conoce de manera clara su naturaleza ni propiedades electromagnéticas o termodinámicas. más que su obvia interacción gravitacional con la materia bariónica. Tales cuestiones se hacen más fuertes al estudiar diversos fenómenos astrofísicos, sobre todo en cosmología, en los que es necesario el distinguir entre varias clases de materia oscura como la caliente, fría y tibia para poder ofrecer una explicación satisfactoria a los hechos.



**Figura 2.1:** Curva de rotación para la galaxia NGC2403 (Sanders & McGaugh, 2002). Los puntos observacionales son obtenidos a partir de la emisión de Hidrógeno en 21 cm. La línea continua muestra la contribución de materia bariónica, mientras que la punteada representa la cantidad de materia oscura necesaria para explicar los datos.

## 2.2. Dinámica newtoniana modificada (MOND)

Sin una prueba clara de su existencia, una posible explicación alternativa es el proponer que las leyes de la dinámica no sean aplicables a tales sistemas. Una de las propuestas más exitosas y populares es la llamada *MOND* (Modified Newtonian Dynamics) propuesta por Milgrom (1983b). Teniendo como principal motivación el problema de las curvas de rotación (suponiendo que la estimación de las velocidades es correcta) y la idea de que no debe haber cantidades tan grandes de materia faltante en el Universo, Milgrom consideró que en tales sistemas astronómicos las leyes de la dinámica newtoniana no tienen validez. Esto no por cuestiones de escala, sino más bien por algunas condiciones dinámicas que se presentan en tales sistemas.

Además de ésta radical suposición, la hipótesis más importante de Milgrom consiste en asumir que para aceleraciones pequeñas ( $\sim 10^{-10} \text{ms}^{-2}$ , tales como las que sufren las estrellas en las partes más externas de las galaxias espirales) es necesario el modificar la segunda ley de Newton mediante una expresión más general, es decir, modifica la dinámica al considerar a la aceleración como el parámetro relevante para su correcta descripción. Una consecuencia directa de esto es la introducción de una constante  $a_0 \approx 1.2 \times 10^{-10} \text{m/s}^2$  con unidades de aceleración. Para el caso gravitacional en simetría esférica, la aceleración que experimenta una partícula es:

$$a \mu \left( \frac{a}{a_0} \right) = \frac{GM}{r^2}, \quad (2.1)$$

donde  $\mu$  es una función tal que cuando  $a/a_0 \gg 1$  entonces  $\mu \approx 1$ , con lo que se recupera el caso newtoniano; mientras que para aceleraciones pequeñas, es decir,  $a/a_0 \ll 1$ , se obtiene  $\mu(x) \approx x$ , y así poder explicar de manera natural las anomalías que presentan las curvas de rotación. Aquí se ha definido  $x := a/a_0$ .

Respecto a la naturaleza de la constante de aceleración de Milgrom  $a_0$ , existen diversas interpretaciones del papel que juega en la teoría, siendo la más común la que la considera como el valor en que se da la transición de MOND a gravitación newtoniana (Milgrom, 1983b). Otras por su parte, la toman como una medida del ancho de la transición entre ambas teorías; mientras que también se le conecta con aspectos cosmológicos como el valor de

la energía oscura, debido a que numéricamente  $a_0 \approx cH_0$ . Bajo esta hipótesis, el establecer en qué régimen se encuentra una partícula puede determinarse conociendo la aceleración que experimenta. Entre otras interpretaciones, Milgrom (2001) ha propuesto que puede tratarse no de una constante, sino de una cantidad que además de cambiar con el tiempo también lo hace a mayores escalas de longitud, de manera que la plantea como análoga a la aceleración de la gravedad  $g$ . Sin embargo, en Bernal et al. (2011a) se ha mostrado que  $a_0$  puede ser expresada en términos de constantes universales, sugiriendo que es una cantidad fundamental de los sistemas autogravitantes.

Ahora, en cuanto a la comparación con las observaciones, esta hipótesis reproduce de buena manera el perfil de velocidades en galaxias espirales que tanto problema representan para la dinámica clásica. Esto último es claro, pues en el límite en que  $\mu = a/a_0$ , la velocidad para partículas lejanas es  $v = (GMa_0)^{1/4}$ . De esta manera MOND predice una curva de rotación plana para distancias grandes del centro, tal y como las observaciones lo muestran. Además reproduce de manera natural la relación Tully - Fisher para estas galaxias, pues  $v \propto M^{1/4}$ . Evidentemente, para que esto sea posible, es necesario el ajustar el parámetro  $a_0$ . De acuerdo al estudio de distintos sistemas astrofísicos en los que es necesaria este tipo de descripción, el valor común que permite reproducir los datos observacionales es  $10^{-10} \text{ms}^{-2}$  (Begeman et al., 1991).

A pesar del éxito del que MOND goza, es importante recalcar el hecho de que está construida con el propósito de ajustarse a los datos y debe de considerarse simplemente como una descripción aproximada que resulta efectiva para tales fines. No obstante, se ha desarrollado un formalismo para derivarla de un principio de mínima acción usando un Lagrangiano acuadrático (AQUAL) (Bekenstein & Milgrom, 1984), bajo el cual sí constituye una teoría en sí.

### 2.3. Teoría de Gravitación Modificada

Como se mencionó, MOND se basa en la modificación de la inercia para poder reproducir las observaciones. No obstante, de manera alternativa se puede pensar en modificar la ley de gravitación, dejando la dinámica intacta. Para lograr tal extensión de la teoría, primeramente se debe de establecer cuáles son las cantidades relevantes del problema. Para el caso de un modelo no relativista, éstas estas son en principio la masa  $M$  del objeto

que provoca la aceleración a la carga de prueba, junto con la distancia  $r$  que las separa y la constante de gravitación  $G$ . Sin embargo, siguiendo las hipótesis de Milgrom, resulta fundamental el introducir otra constante  $a_0$  con unidades de aceleración en la descripción del problema. Mediante el uso del teorema II de Buckingham de análisis dimensional es posible establecer que el valor absoluto de la aceleración de una partícula moviéndose en un campo gravitacional producido por una masa puntual  $M$  es (Mendoza et al., 2011):

$$a = a_0 f(x). \quad (2.2)$$

Aquí se ha definido la variable adimensional  $x := l_M/r$ , y se ha introducido la *masa - longitud*,  $l_M := (GM/a_0)^{1/2}$ . De manera similar al caso de MOND, existen dos casos límite: cuando  $x \gg 1$ , entonces  $f(x) = x^2$  para recuperar la gravitación newtoniana; mientras que para  $x \ll 1$ , entonces  $f(x) = x$  y así el comportamiento es de tipo MOND. Basado en esto, la introducción de  $a_0$  como una cantidad relevante para la descripción de los fenómenos gravitacionales resulta en que  $x$  es el parámetro importante mediante el cual pasar de la gravitación newtoniana a un régimen MONDiano, siendo  $x = 1$  el valor aproximado en que se da esta transición. Es importante el recalcar también que un sistema que posea un distribución de masa cuya longitud sea mucho menor a su valor correspondiente de  $l_M$ , se encuentra en el régimen newtoniano, y uno en el que su longitud sea mucho mayor que  $l_M$  necesita una descripción MONDiana. Esto es, la gravitación pasa a ser una teoría dependiente de la escala.

Evidentemente, la ecuación (2.2) debe de predecir las curvas de rotación planas en galaxias espirales si pretende funcionar como una alternativa a MOND. De esta relación es inmediato el establecer que en el régimen  $x \ll 1$ , la velocidad de las estrellas resulta ser  $v = (GMa_0)^{1/4}$ , es decir, reproduce el comportamiento de MOND. Es más, ya sea dentro de este enfoque o mediante el de MOND, la aceleración que sufre una partícula de prueba bajo el campo generado por una maasa  $M$  es:

$$a = \frac{(a_0 GM)^{1/2}}{r}. \quad (2.3)$$

En vista de este resultado, se podría pensar que ambos enfoques son equivalentes en

cuanto a la descripción de la dinámica a bajas aceleraciones. Sin embargo, el modificar la ley de gravitación en vez de la segunda ley de Newton ofrece más ventajas, tanto en sencillez como al comparar con datos observacionales. Primeramente, la equivalencia sólo se da formalmente en casos en que las simetrías del problema son suficientes para simplificar el modelo de Milgrom. Sumado a esto, el demostrar los teoremas de Newton no representa problema dentro esta teoría, mientras que en MOND no pueden ser probados. En cuanto a las predicciones astrofísicas se ha visto que mediante una elección adecuada de la función  $f(x)$  se pueden obtener de manera natural relaciones como las de Tully - Fisher y Faber - Jackson, así como la del plano fundamental en galaxias elípticas (Mendoza et al., 2011). En contraparte, aunque MOND también reproduce la primera de estas relaciones empíricas, tiene problemas al intentar explicar ciertas características de los cúmulos de galaxias (Sanders & McGaugh, 2002). Por último, las características de MOND son el resultado de motivaciones observacionales, mientras que el análisis dimensional proporciona de manera natural la física de la gravitación modificada.

Siendo tanto MOND como este modelo de carácter no relativista, naturalmente ambos deben de fallar al intentar explicar fenómenos como las lentes gravitacionales y la evolución del Universo en su conjunto. Motivado por esto, se han propuesto posibles extensiones relativistas a MOND, siendo la más exitosa la teoría tensorial - vectorial - escalar (TeVeS) formulada en Bekenstein (2004). No obstante, ésta presenta grandes complicaciones matemáticas, además de fallar al intentar explicar ciertos fenómenos astrofísicos de importancia (Ferrerias et al., 2009). Por este razón, y dadas las ventajas que presenta una modificación a la teoría de la gravitación, es necesario el prestar atención a una extensión de ésta última que permita una correcta descripción de los fenómenos relativistas en el régimen  $x \ll 1$ .





## Capítulo 3

# Teoría métrica de gravitación extendida

En este tercer capítulo, se expondrá la teoría métrica de gravitación extendida propuesta en Bernal et al. (2011c). A partir de un principio de mínima acción, en el que se introducen las cantidades relevantes para los sistemas gravitacionales MONDianos, se mostrarán las ecuaciones de campo correspondientes. Bajo un estudio a orden de magnitud y perturbativo de dichas ecuaciones, es posible el reproducir la fenomenología MOND, así como obtener restricciones sobre la forma del Lagrangiano. Basado en esto, se propondrá una función que transita de un régimen einsteniano a uno MONDdiano. Finalmente, se mostrarán algunas de las características que presenta la teoría métrica  $f(R, T)$  presentada en Harko et al. (2011) para así poder establecer una conexión natural con MOND, todo esto dirigido a tener un marco en el cual desarrollar un modelo cosmológico.

### 3.1. Conexión entre la fenomenología MOND y una teoría métrica

Una vez expuestos algunos de los problemas que presentan las teorías de gravitación tanto a nivel relativista como no relativista al intentar explicar diversos fenómenos astrofísicos, así como algunas alternativas a ello, es momento de unificar ambos aspectos. Al final del capítulo anterior se resaltó el hecho de que tanto la teoría MOND como la de gravitación extendida son de carácter completamente no relativista. De manera que aunque

expliquen correctamente las observaciones en ciertos sistemas, si se pretende desarrollar un modelo cosmológico bajo sus hipótesis, es imperante la necesidad de extenderlas a una teoría relativista de la gravedad que nos permita reproducir la dinámica del Universo sin la necesidad de contemplar entes oscuros.

De manera similar al caso de gravitación extendida, se debe de comenzar determinando las variables que describen al problema en su totalidad. Tratándose de un problema de gravitación, deben de introducirse la constante de gravitación universal  $G$ , la velocidad de la luz  $c$  y la constante de aceleración de Milgrom  $a_0$ . Considerando este conjunto de variables como las relevantes en la teoría, es posible construir dos cantidades con dimensiones de longitud:

$$r_g := \frac{GM}{c^2}, \quad l_M := \left( \frac{GM}{a_0} \right)^{1/2}. \quad (3.1)$$

La primera de ellas resulta ser el radio gravitacional, el cual siempre aparece en los fenómenos relativistas, mientras que la segunda es la denominada masa - longitud presentada en el capítulo anterior, cuya aparición se da en sistemas tipo MOND.

Ya que se busca una teoría métrica que presente tanto características tipo MOND como relativistas, éste par de cantidades deben de ser consideradas por igual. La manera formal de lograr una posible extensión es mediante un principio de mínima acción al igual que como se hizo en el caso de relatividad general. La diferencia entre estas dos es la inclusión de las longitudes (3.1).

En la sección 1.3 se hizo evidente la ambigüedad en cuanto a las dimensiones físicas de las teorías  $f(R)$ . Motivado en esto, una manera alternativa de escribir la acción del campo es (Bernal et al., 2011c):

$$S = \frac{c^3}{16\pi GL_M^2} \int f(\chi) \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.2)$$

Aquí se ha definido la cantidad adimensional  $\chi$  que será de gran importancia para el resto de este trabajo como:

$$\chi := RL_M^2, \quad (3.3)$$

en donde  $L_M$  es una longitud fundamental de la teoría que queda por determinar. De esta manera, se observa que el problema que se generaba al considerar una generalización  $f(R)$  queda eliminado, pues siendo  $\chi$  adimensional, cualquier elección para la función  $f(\chi)$  preservará las dimensiones correctas de la acción. Para completar la descripción se debe de introducir la acción correspondiente a la materia, que igual que en relatividad general, viene dada por la ecuación (1.7). Variando la acción respecto a la métrica es posible obtener las ecuaciones de campo correspondientes a esta teoría (Bernal et al., 2011c):

$$f'(\chi)\chi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(\chi)g_{\mu\nu} - L_M^2(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square)f'(\chi) = \frac{8\pi GL_M^2}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

donde se ha definido  $\chi_{\mu\nu} := L_M^2 R_{\mu\nu}$  como una generalización tensorial de la cantidad definida en (3.3). Una observación importante sobre ésta es el que puede ser vista como una generalización de la variable  $x$  utilizada en (2.3). Esto significa que para casos en que  $\chi \gg 1$  (campo fuerte) la relatividad general es recuperada, mientras que si  $\chi \ll 1$  (campo débil), una versión relativista de MOND debe de ser empleada.

Una vez conocidas las ecuaciones de campo uno podría tratar de resolverlas para una métrica dada y con una elección adecuada de la función  $f(\chi)$ . Aún así, como ya se ha mencionado, se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de cuarto orden en la métrica. Así que en vez de eso, primero se puede buscar una solución aproximada válida en ciertas condiciones físicas. Esto último es con el propósito de encontrar una relación entre esta teoría métrica y el comportamiento observado en el régimen MONDiano.

Para este fin se puede estudiar el problema del campo gravitacional que genera una partícula puntual de masa  $M$ . Bajo esta consideración, es claro que la traza de (3.4) proporciona toda la información física relevante del problema:

$$f'(\chi)\chi - 2f(\chi) + 3L_M^2\square f'(\chi) = \frac{8\pi GL_M^2}{c^4}T, \quad (3.5)$$

donde  $T := T_\alpha^\alpha$ . Sin embargo, aún queda pendiente el problema de la elección de  $f(\chi)$ . Como una primera aproximación se puede tomar el caso sencillo de una ley de potencias de la forma  $f(\chi) = \chi^n$ , siendo  $n$  un parámetro constante y ajustable de la teoría mediante observaciones. Esta propuesta engloba además a la relatividad general, pues si  $n = 1$  las ecuaciones (3.4) se reducen a las de Einstein dadas por (1.15).

Una primera manera de atacar el problema es mediante el estudio a orden de magnitud de (3.5) dentro del régimen de campo débil para así poder establecer una conexión con MOND. En Bernal et al. (2011c) se mostró que imponiendo condiciones adecuadas en la curvatura del espacio, es posible el reproducir un comportamiento tipo MONDiano bajo éste modelo. Para lograr tal cosa resulta ser necesario que el exponente  $n$  tenga el valor de  $3/2$ .

El caso en que  $n = 3/2$  merece algo de atención, pues además de reproducir una dinámica tipo MOND (Bernal et al., 2011c), surge naturalmente del estudio de las simetrías de Noether del problema, es decir, está detrás de la existencia de cantidades conservadas, las cuales además resultan estar relacionadas con las longitudes (3.1). Sumando a esto, Capozziello & Fang (2002) han mostrado que un modelo cosmológico simple bajo una teoría  $f(R)$  y proponiendo una ley de potencias de escalar de Ricci, arroja de manera natural una solución del tipo  $f(R) = R^{3/2}$  que además es coherente con algunos resultados observacionales. Toda esta evidencia junta sugiere que dentro de una teoría de gravitación modificada se debe de prestar particular atención al caso en que  $n = 3/2$ .

Un punto que es importante señalar es que un valor de  $n = 3/2$  sólo reproduce un comportamiento tipo MOND en el que  $a \propto r^{-1}$ , el cual por sí sólo no es formalmente equivalente a la forma expuesta en la relación (2.3). Por esta razón es necesario un análisis más detallado de la constantes de acoplamiento del problema. De hecho, las longitudes (3.1) deben de estar presentes de alguna manera en la formulación de la teoría métrica y deben de estar relacionadas con la cantidad  $L_M$  del problema. Reuniendo este par de ideas, se puede proponer una relación entre este conjunto de longitudes de la siguiente forma (Bernal et al., 2011c):

$$L_M = \zeta r_g^{\alpha} l_M^{\beta}, \tag{3.6}$$

siendo  $\zeta$  una constante de proporcionalidad. Bajo esta suposición, se concluye que los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  son tales que  $\alpha = \beta = 1/2$ . Aunque esta propuesta para conectar las longitudes fundamentales de la teoría puede parecer un poco arbitraria, es notable el hecho que al introducirla dentro del análisis del problema (junto con  $n = 3/2$ ), tiene como consecuencia el que la aceleración que sufre una partícula bajo un campo gravitacional es de la forma  $a = (a_0 GM)^{1/2} / r$ , que no es más que el comportamiento MONDiano expuesto en (2.3). Así, el problema que se planteó al inicio tiene como resultado el poder recuperar la dinámica de MOND a partir de una teoría métrica de gravitación extendida en el límite de campo débil.

Aún en el caso de considerar una teoría  $f(\chi)$  en vez de una  $f(R)$ , el problema referente a la búsqueda del tipo de función adecuada persiste. Dentro del marco de ésta última, algunas propuestas van de considerar  $f(R) = R - 2\Lambda$ , a otras un poco más complicadas como  $f(R) = R^2$  o  $f(R) = R + aR^n$ , siendo  $\Lambda$ ,  $a$  y  $n$  constantes a determinar. A pesar de que algunas de ellas generan ciertos comportamientos dinámicos observados a escalas cosmológicas como períodos de expansión acelerada, en muchas ocasiones sufren de complicaciones para explicar ciertos fenómenos en sistemas más pequeños. Como se mostró en el apartado anterior, el considerar una ley de potencias parece ofrecer buenos resultados tanto en fenómenos relativistas como no - relativistas.

Como una primera restricción, podemos notar lo que sucede en la época de radiación. A partir del modelo estándar cosmológico y de partículas elementales es posible el predecir la abundancia de elementos ligeros en el Universo creados en el proceso de nucleosíntesis primordial. Resulta notable el que estas predicciones concuerden de gran manera con las cantidades observadas sin la necesidad de incluir materia o energía oscura. A partir de esto se puede concluir que el Universo en épocas tempranas se encuentra en un régimen *einsteniano*.

Con esto en mente, una función que pretenda describir la evolución del Universo a distintas épocas debe de reducirse al caso de relatividad general cuando la radiación es la componente dominante. Al mismo tiempo, para el caso en que domine la materia (como hoy en día) debe de comportarse de maneras distinta, pues parece ser descrito por una dinámica MONDiana. Esto es, debe de poder transitar entre estos dos tipos de regímenes.

Sumado a esto, se debe de cuidar que dicha función reproduzca el comportamiento en los diferentes límites (relatividad general y MOND relativista) en función del valor del parámetro  $\chi$ , pues como ya se dijo, dicha cantidad resulta ser la relevante para determinar qué tipo de descripción es la adecuada. Basado en esto, tal función debe de transitar de manera suave de un régimen al otro.

Siendo ésta la situación, una propuesta del tipo  $f(\chi) = \chi^n$  puede que resulte exitosa para entender las observaciones actuales, pero definitivamente fallará al intentar reproducir las cantidades de elementos creadas en el Universo temprano, así como al tomar los límites para  $\chi$ . Tomando como ejemplo la propuesta de gravedad no relativista planteada en Mendoza et al. (2011), se puede proponer una función del tipo:

$$f(\chi) = \chi^{3/2} \frac{1 \pm \chi^{r+1}}{1 \pm \chi^{r+3/2}}, \quad (3.7)$$

donde  $r$  de nuevo es un parámetro constante a determinar. Esta elección se basa en los límites mencionados arriba. Para  $\chi \gg 1$  esta expresión se reduce a  $f(\chi) = \chi$  que no es más que el caso de relatividad general. Y por otro lado, en el límite  $\chi \ll 1$ , se obtiene  $f(\chi) = \chi^{3/2}$  que reproduce un comportamiento MONDiano, tal y como se espera. En medio de estos dos casos límite el valor del parámetro  $\chi$  para el Universo debe de ser tal que transite de manera suave, teniendo en  $\chi = 1$  el punto de transición aproximado. La manera precisa en que lo ha de hacer claramente depende del valor de  $r$ .

### 3.2. Teorías métricas $f(R, T)$

La introducción del nuevo parámetro  $\chi$  dentro de una teoría gravitacional sugiere que la masa del sistema, así como sus dimensiones juegan un papel importante en la determinación del régimen apropiado para su descripción adecuada. Motivado por esto, una posible modificación a la gravitación puede introducirla desde la acción relativista correspondiente al campo.

En el caso más simple, la información sobre la masa está totalmente contenida en la

traza  $T$  del tensor de energía momento correspondiente al sistema. Por esta razón es que una manera simple de generalizar un modelo gravitacional modificado es mediante la propuesta de una teoría  $f(R, T)$ , siendo como antes,  $R$  el escalar de Ricci.

De manera similar al caso de teorías  $f(R)$ , la acción total modificada toma la forma (Harko et al., 2011):

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int f(R, T) \sqrt{-g} d^4x - \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega, \quad (3.8)$$

donde el segundo término es la contribución del sector de materia dado por (1.7). Haciendo nula la variación de esta acción, las ecuaciones de campo que resultan son las mostradas en Harko et al. (2011):

$$f_R(R, T)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R, T)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu)f(R, T) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - f_T(R, T)T_{\mu\nu} - f_T(R, T)\Theta_{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

donde se ha empleado la siguiente notación:  $f_R(R, T) := \partial f(R, T)/\partial R$  y  $f_T(R, T) := \partial f(R, T)/\partial T$ . Además, se ha definido el tensor  $\Theta_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \frac{\delta T_{\mu\nu}}{\delta g_{\mu\nu}}$ . De esta manera, este tensor se encuentra asociado al de energía - momento y su aparición es resultado de considerar a  $T$  dentro de la acción.

Un aspecto importante que hay que señalar es el hecho de que al variar la acción (3.8) se han considerado a  $R$  y a  $T$  como cantidades independientes dentro la teoría. Así, parte del desarrollo estará basado en el que este par de cantidades son de carácter fundamental en la descripción del campo gravitacional, y en principio no dependerán explícitamente entre ellas.

Aún teniendo las ecuaciones de campo de manera explícita, todavía falta el determinar la forma del tensor  $\Theta_{\mu\nu}$ . A partir de su definición, es posible mostrar que para un fluido perfecto como el descrito por (1.9), éste toma la forma (Harko et al., 2011):

$$\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} - pg_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$



siendo  $p$  la presión que actúa sobre el fluido de densidad  $\rho$ . Con esta relación, en principio se pueden obtener las ecuaciones dinámicas dada una cierta métrica. Sin embargo, aún falta una ecuación que describa la evolución de las componentes de materia - energía, es decir, una análoga a la de conservación de energía. Para el caso de relatividad general ésta viene dada por (1.10), pero ya que ahora se ha contemplado a  $T$  dentro de la acción, el resultado será diferente. Partiendo del hecho de que el lado izquierdo de (3.9) tiene divergencia nula, se puede demostrar que esto implica que el tensor de energía - momento satisface:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G/c^4 + f_T(R, T)} \{T^{\mu\nu} \nabla_{\mu} f_T(R, T) + g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} [f_T(R, T)p]\}, \quad (3.11)$$

Esto hace evidente que para una teoría  $f(R, T)$  la divergencia de  $T_{\mu\nu}$  no se anula en general, sino que depende de la forma elegida de la función. La interpretación que se le puede dar es que al introducir a  $T$  dentro de la formulación, surgen ‘fuentes’ o ‘sumideros’ de materia - energía. Esto en sí constituye una diferencia fundamental con las teorías  $f(R)$  estándar. Más aún, las trayectorias que siguen ahora las partículas ya no son en general geodésicas, sino que surge una fuerza perpendicular a su vector de 4 - velocidad que afecta su movimiento. Todas estas diferencias deben de ser consideradas como consecuencia de el proponer una función que de forma general dependa tanto de  $T$  como de  $R$ .

Para los casos en que la dependencia de  $f$  en el escalar  $T$  no sea explícita, es decir,  $f_T(R, T) = 0$ , las ecuaciones (1.10) y (1.30) son recuperadas sin problema alguno. Y para el caso particular en que  $f(R, T) = R$  todas las ecuaciones de relatividad general son obtenidas, incluso la correspondiente a las trayectorias geodésicas.

Una vez expuestas de manera general las descripciones de la gravedad mediante las teorías  $f(\chi)$  y  $f(R, T)$ , es momento de establecer un vínculo entre ellas. Para esto, es útil el hacer la siguiente observación. En el caso en que  $M = \text{const}$  (y por lo tanto  $L_M^2 = \text{const}$ ), es directo el mostrar que las ecuaciones (3.9) se reducen a las (3.4). Esto evidencia la equivalencia entre las teorías siempre y cuando la masa del sistema en consideración permanezca constante, lo cual era de esperarse ya que en la deducción de (3.4) se supuso tal cosa. Aunque en muchos casos ésta suposición es válida, en general no tiene porque ser cierta.

En particular, si consideramos el problema del Universo como un todo, debido a la expansión que sufre, es claro que la masa relevante para el problema aumentará a medida que el tiempo cósmico aumente. Esto hace necesaria una generalización para introducir a la masa como una cantidad variable en la teoría, pero en vez de tener que introducirla en la acción (3.2), las ecuaciones de campo (3.9) proporcionan por sí solas una descripción adecuada a este tipo de problemas.

Ahora que se han adoptado a las ecuaciones de la teoría  $f(R, T)$  para describir los campos gravitacionales, un punto indispensable en la resolución de problemas es el conocer la forma general de la función. Para obtener una pista sobre esto, remitámonos a la acción para  $f(\chi)$  dada por (3.2). En ella, el factor  $L_M^2$  se encuentra fuera de la integral, de manera que si queremos que la masa sea considerada como una variable, ésta debe de formar parte del integrando. Esta observación nos sugiere entonces que la forma de la función  $f(R, T)$  sea:

$$f(R, T) = \frac{f(\chi)}{L_M^2}. \quad (3.12)$$

Sin embargo, aún si consideramos a esta como la forma adecuada que debe de poseer  $f(R, T)$ , es inevitable el problema que conlleva la elección de la función  $f(\chi)$ . Obviamente, su forma particular dependerá del problema del que se trate, así como del régimen al que pertenezca. No hay que perder de vista, sin embargo, el que debe de estar motivada por la física, es decir, las características que la definan deben de estar basadas en las observaciones.



## Capítulo 4

# Cosmología con gravitación extendida

En este último capítulo se abordará el problema particular de la construcción de un modelo cosmológico basado en una teoría de gravitación modificada de gravedad. Específicamente, se estudiará bajo una teoría  $f(R, T)$  en la que se han introducido aspectos característicos de la fenomenología de las teorías MOND. Primeramente se estudiarán las ecuaciones dinámicas correspondientes, teniendo como objetivo el resolverlas bajo una propuesta simple para la función  $f(\chi)$  en un modelo de polvo. Esto nos permitirá poder comparar el modelo teórico con la evidencia observacional, y así determinar su viabilidad para reproducir la dinámica global del Universo, además de establecer constricciones sobre su forma funcional. Por último, se hará una comparación similar para una función más general como la dada en la ecuación (3.7) la cual transita del régimen de relatividad general a uno tipo MOND.

### 4.1. Ecuaciones del modelo cosmológico

Teniendo como motivación primaria el desarrollar un modelo gravitacional consistente en el que no sea necesario el tener que recurrir a entes de carácter oscuro para explicar la dinámica del Universo, se propone una teoría modificada de gravitación. En particular, una de tipo  $f(R, T)$  como la discutida en la sección 3.2, en la que se ha elgido una función de la forma

$$f(R, T) = \frac{f(\chi)}{L_M^2} = \frac{\chi^n}{L_M^2}, \quad (4.1)$$

siendo  $n$  es un coeficiente constante a determinar a partir de la comparación con las observaciones. La búsqueda de esta cantidad será en buena parte una de los principales objetivos de esta tesis. Un punto importante a señalar es que los datos observacionales de Supernovas Ia sólo corresponden a épocas cosmológicas recientes en las que la materia domina. Debido a esto, el modelo que se considerará es uno de polvo, para el cual la presión es  $p = 0$ .

A pesar de haber modificado las ecuaciones de campo de la relatividad general, no es necesario el replantear las hipótesis cosmológicas como lo son la expansión del Universo y su isotropía. Es por esto que una métrica de tipo FLRW es adecuada para desarrollar el modelo cosmológico. Aún más, el concepto de fluido perfecto (1.9) será de gran importancia, aunque éste también sufrirá una modificación en cuanto a algunas de sus propiedades.

Antes de mostrar las ecuaciones de evolución propias a este modelo, es útil el reordenar un poco las ecuaciones de campo (3.9). Para un modelo de polvo, éstas se pueden escribir como:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[ \left( 1 + \frac{c^4}{8\pi G} f_T \right) \frac{T_{\mu\nu}}{f_R} + \frac{c^4}{8\pi G f_R} \left[ \left( \frac{1}{2} (f(R, T) - R f_R) - \square f_R \right) g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f_R \right] \right], \quad (4.2)$$

en donde se ha introducido el *tensor de Einstein*, que se define como:

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

Este reacomodo tiene la intención de mostrar por separado a las componentes geométricas  $G_{\mu\nu}$  y de materia  $T_{\mu\nu}$  presentes en las ecuaciones de campo. Bajo esta visión se define un tensor de energía - momento asociado a la curvatura como:

$$T_{\mu\nu}^{\text{curv}} := \frac{c^4}{8\pi G f_R} \left[ \left( \frac{1}{2} (f(R, T) - R f_R) - \square f_R \right) g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f_R \right]. \quad (4.4)$$

De esta manera las ecuaciones de campo (4.2) se pueden escribir en una forma más compacta:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[ \left( 1 + \frac{c^4}{8\pi G} f_T \right) \frac{T_{\mu\nu}}{f_R} + T_{\mu\nu}^{\text{curv}} \right]. \quad (4.5)$$

Es importante el recalcar que el tensor  $T_{\mu\nu}^{\text{curv}}$  no tiene una relación directa con una componente de materia - energía<sup>†</sup>, sino que su definición ha sido sólo por razones de conveniencia (Capozziello & Fang, 2002).

Una vez reescritas las ecuaciones de campo, se puede obtener una ecuación de evolución mediante su componente 00. Para esto notemos que como  $T_{00} = \rho c^2$ , siendo  $\rho$  la densidad de masa-energía. Entonces podemos definir análogamente  $T_{00}^{\text{curv}} = \rho_{\text{curv}} c^2$ , es decir, se define una “densidad de curvatura”. Por otra parte, para una métrica FLRW, el escalar de Ricci se puede expresar como (Dalarsson, 2005):

$$R = \frac{6}{c^2} \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa c^2}{a^2} \right]. \quad (4.6)$$

De todo esto se sigue que la componente 00 de las ecuaciones de campo (4.5) para un Universo plano es:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \left( 1 + \frac{c^4}{8\pi G} f_T \right) \frac{\rho}{f_R} + \rho_{\text{curv}} \right]. \quad (4.7)$$

Esta última ecuación corresponde a una generalización de la ecuación de Friedmann (1.19), razón por la cual resultará de suma importancia para el desarrollo del modelo. De hecho, esta será la ecuación principal a resolver en este trabajo. Es de notarse que para el caso particular de la relatividad general en el que  $f(R, T) = R$ , ésta se reduce de manera inmediata a la ecuación de Friedmann estándar.

---

<sup>†</sup> Una posible interpretación que se le puede dar, y que justifica un poco su nombre, es que se le puede pensar como una componente equivalente a la energía oscura. Sin embargo, no posee la interpretación cuántica que se le da a ésta última.

Aunque la densidad asociada al tensor  $T_{\mu\nu}^{\text{curv}}$  no representa de ninguna manera una componente física de masa - energía, resultará útil el mostrarla de manera explícita. Sabiendo que el operador de Laplace - Beltrami aplicado a un escalar  $\phi$  se puede expresar como (Lightman et al., 1973):

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\nu})\phi, \quad (4.8)$$

es directo el mostrar entonces a partir de la definición (4.4) que la densidad asociada a la componente de la curvatura viene dada por:

$$\rho_{\text{curv}} = \frac{c^2}{8\pi G f_R} \left[ \frac{1}{2} (R f_R - f) - \frac{3H}{c^2} \frac{df_R}{dt} \right], \quad (4.9)$$

de donde es evidente su relación con el sector de curvatura de la teoría y no con el de materia. Por supuesto, también es clara su dependencia con la forma particular de la función  $f(R, T)$ .

Como se acaba de mencionar, una de las metas importantes es el resolver la ecuación (4.7) cuya variable principal a encontrar es el factor de escala  $a(t)$ . Para lograr tal cosa se propondrá una solución simple de la forma:

$$a(t) = a(t_0) \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\alpha}, \quad (4.10)$$

siendo  $\alpha$  un coeficiente constante a encontrar y  $a(t_0)$  el factor de escala hoy en día. De manera semejante, para la densidad de materia se propone una solución de la forma

$$\rho(a) = \rho_0 \left( \frac{a}{a(t_0)} \right)^{\beta}, \quad (4.11)$$

en la cual  $\rho_0$  es la densidad hoy en día y  $\beta$  es una incógnita.

Ya que se han dado las ecuaciones de movimiento y la forma de sus soluciones, es momento de resolverlas de manera explícita. Para esto, sin embargo, es necesario el conocer

las expresiones para  $f_R$ ,  $f_T$  y sus derivadas temporales. Para el primer par, su obtención es inmediata a partir de la función (4.1), mientras que para sus derivadas es un poco más complicado, pues hay que tener clara cuál es la masa del sistema.

La masa relevante en el problema resulta ser una cantidad un tanto problemática, pues la evidencia observacional muestra que el Universo se encuentra en un proceso de expansión. De aquí el hecho de que la masa que observamos aumente continuamente. De manera simple, podemos considerar que la masa se encuentra en una distribución esférica con radio igual al radio de Hubble dado por  $r_H = (c/H(t))^3$ . La razón física principal para considerar esto, radica en que sólo la masa contenida dentro de este volumen se encuentra causalmente conectada, con un observador fundamental. Pero no hay que perder de vista que conforme pase el tiempo, cada vez más materia entrará a este volumen, por lo que también se le debe de considerar. Bajo todas estas suposiciones, podemos estimar a la masa relevante mediante:

$$M = \int_0^{r_H} \rho \sqrt{-g} \, d^3x = \frac{4}{3} \pi \rho \frac{c^3}{H^3}. \quad (4.12)$$

Una vez aclarada la forma en que se tomará a la masa del Universo, la cantidad  $L_M$  definida en (3.6) resulta ser:

$$L_M = \zeta \frac{(\frac{4}{3} \pi c^3 G)^{3/4} \rho^{3/4}}{ca_0^{1/4} H^{9/4}}, \quad (4.13)$$

con lo que se sigue que las derivadas temporales buscadas toman la forma:

$$\frac{df_R}{dt} = n(n-1)R^{n-1}L_M^{2(n-1)}H \left[ \frac{j-q-2}{1-q} + \frac{3}{2} \left( \beta + \frac{3}{\alpha} \right) \right], \quad (4.14)$$

$$\frac{df_T}{dt} = \frac{3}{2}(n-1) \frac{R^n L_M^{2n-2}}{\rho c^2}, \quad (4.15)$$

en donde

$$j := \frac{1}{a} \frac{d^3 a}{da^3} H^{-3}, \quad (4.16)$$



representa el *jerk* (Capozziello et al., 2008) y  $q$  es el parámetro de desaceleración (cf. Sección 1.2). Con esto, la densidad de curvatura de la ecuación (4.9) toma la forma:

$$\rho_{\text{curv}} = \frac{3H^2}{8\pi G}(n-1) \left[ (1-q) - \frac{j-q-2}{1-q} - \frac{3}{2}(\beta + \frac{3}{\alpha}) \right]. \quad (4.17)$$

Y así, con todo lo anterior, es posible mostrar que la ecuación de Friedmann (4.7) puede escribirse de una manera compacta como:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3Zf_R}, \quad (4.18)$$

para la cual se ha definido la cantidad adimensional  $Z$  como:

$$Z := 1 + (n-1) \left[ \frac{j-q-2}{1-q} - \frac{4(1-q)}{n} + \frac{3}{2}(\beta + \frac{3}{\alpha}) \right]. \quad (4.19)$$

Un caso que resulta de importancia y de particular interés en cuanto a sus implicaciones es el de evaluar la ecuación de Friedmann (4.18) hoy en día en que domina por completo la materia. Expresándola en términos del parámetro de densidad definido en (1.22), y con ayuda de la relación para  $L_M$  dada en (4.13) es fácil el mostrar que dicha ecuación toma la forma:

$$a_0 = \left[ \frac{9}{4} \zeta^4 (1-q_0)^2 (nZ_0)^{\frac{2}{n-1}} (\Omega_M^{(0)})^{\frac{3n-5}{n-1}} \right] cH_0. \quad (4.20)$$

Aquí el subíndice (o superíndice) 0 indica el valor hoy en día. Podemos notar que el factor encerrado en corchetes es una cantidad adimensional  $\sim 2$ . Esto hace posible el escribirla de una forma aproximada como:

$$a_0 \approx cH_0. \quad (4.21)$$

Resulta entonces que un modelo cosmológico bajo una teoría  $f(R, T)$  implica de manera natural una relación entre las constantes  $c$ ,  $H_0$  y  $a_0$ . Esto no significa de ninguna man-

era que esto se cumpla para cualquier época, sino que por lo menos hoy en día es válida. Es interesante el observar que esta relación ya ha sido propuesta anteriormente por Milgrom (1983a,b), aunque basada principalmente sólo en argumentos numéricos, por lo que el mérito en este caso radica en que el modelo por sí sólo la predice. La relación 4.21 podría también interpretarse como que  $a_0(t) = cH(t)$ , con lo cual  $a_0$  dejaría de ser una constante fundamental de la naturaleza y sería sólo una relación auxiliar dependiente del tiempo. El trabajo hecho por Bernal et al. (2011b) muestra que esto no sucede, y por lo tanto  $a_0$  resulta ser una cantidad constante fundamental de la naturaleza.

Para completar el modelo cosmológico debemos además introducir la ecuación de conservación de energía correspondiente. En este caso, recordemos que ésta viene dada por (3.11). Para un modelo de polvo, y con las suposiciones que se han hecho sobre la evolución del factor de escala y la densidad, toma la forma:

$$(\dot{\rho} + 3H\rho) + \frac{c^2}{8\pi G} \left( A \frac{\dot{\rho}}{\rho} + BH \right) R^n L_M^{2(n-1)} = 0, \quad (4.22)$$

en donde:

$$A := \frac{9}{4} (n-1)^2, \quad (4.23)$$

$$B := \frac{9}{2} \frac{n-1}{n} + \frac{27}{4} \frac{(n-1)^2}{\alpha} + \frac{3}{2} \frac{n(n-1)(j-q-2)}{1-q}. \quad (4.24)$$

Proponiendo una solución de la forma (4.11), esta ecuación diferencial impone por sí sola una ecuación de restricción entre las cantidades  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $n$ :

$$\beta = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{9-5n}{3n-5} \right). \quad (4.25)$$

## 4.2. Comparación con las observaciones

Al no tener otra ecuación, además de la (4.25) que relacione a estos parámetros del modelo, es evidente la necesidad de conocer dos de ellos para así poder obtener el tercero. Pero tampoco se debe de perder de vista que tales valores deben de reproducir las observaciones, por lo que será necesaria la comparación del modelo con estos. Para esto recordemos que aún no se ha resuelto la ecuación de Friedmann, pero ahora que se conoce el cómo evoluciona la densidad es posible hacerlo. La sustitución de (4.25) en (4.18) resulta en que:

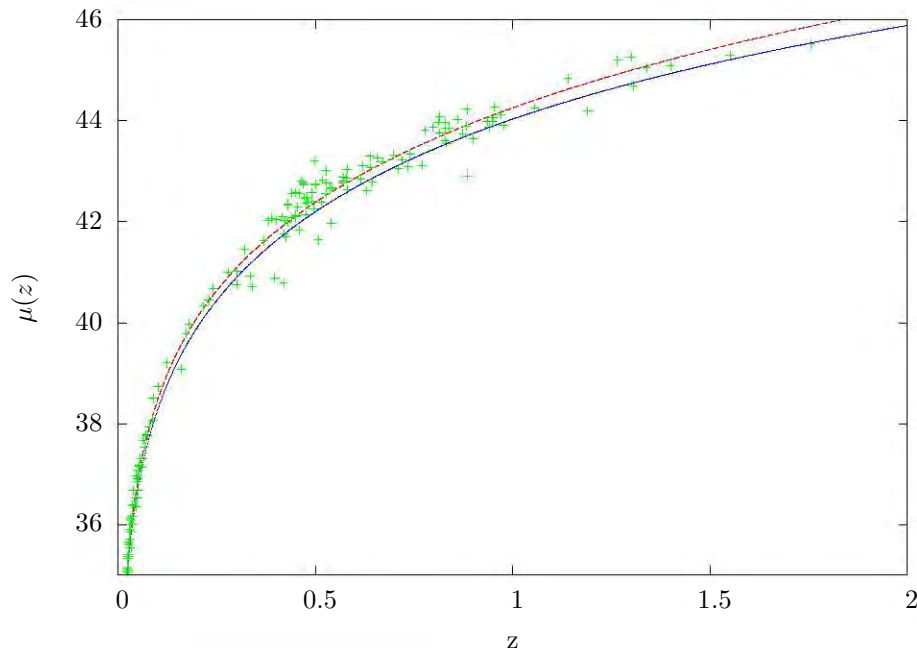
$$H(a) = H_o \left( \frac{a}{a(t_0)} \right)^{-1/a} = H_o(1+z)^{1/a}. \quad (4.26)$$

Así, finalmente se ha encontrado la solución a la ecuación de Friedmann dentro de este modelo. Esto hace entonces posible el poder comparar las predicciones teóricas con los datos observacionales. Tal oportunidad la brinda el módulo de la distancia, pues ahora que se conoce  $H(z)$ , la ecuación (1.23) permite el obtener  $\mu(z)$  dentro de este modelo, y así, al compararlo con los datos observacionales se podrá conocer el valor de  $\alpha$ . Los datos para comparar son los dados en Riess et al. (2004). El mejor ajuste logrado se muestra en la Figura 4.1. Tal curva corresponde a los valores de  $\alpha = 1.359 \pm 0.139$  y  $h = 0.64 \pm 0.009$  <sup>†</sup>. Esta comparación muestra ser capaz de explicar la expansión actual del Universo sin la necesidad de invocar entes oscuros. De esta forma, un modelo cosmológico basado en una modificación a la relatividad general debe de ser considerado como uno físicamente aceptable y una opción seria para el entendimiento de la dinámica global del Universo.

El haber obtenido el valor del parámetro  $\alpha$  no completa la descripción, pues aún es necesario el conocer ya sea a  $\beta$  o a  $n$ . Recordemos que el primero de estos rige la evolución de la densidad, lo que sugiere que puede ser determinado mediante consideraciones sobre la materia. Si exigimos que la cantidad de materia se conserve, y suponemos por simplicidad una distribución esférica, ésta toma la forma  $M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 a^3 dr$ , siendo  $R$  el radio de todo el Universo y  $a(t)$  el factor de escala. El pedir que esta cantidad permanezca constante, junto con la solución de la ecuación de energía exige que  $\beta = 3$ . Hecho esto, ahora sí es

---

<sup>†</sup> Este conjunto de valores fue obtenido mediante el ajuste de la función de módulo de distancia correspondiente a la ecuación (4.26) a los datos de Supernovas Ia obtenidos de Riess et al. (2004). Para ello se empleó el paquete de graficación *gnuplot*, el cual utiliza el algoritmo Marquardt - Levenberg para el ajuste de funciones no lineales, también llamado de mínimos cuadrados amortiguado.



**Figura 4.1:** Comparación del módulo de la distancia  $\mu$  como función del corrimiento al rojo  $z$  del modelo  $f(R, T)$  (línea punteada) con los datos observacionales de Supernovas Ia presentados en Riess et al. (2004). También se muestra el modelo de concordancia  $\Lambda$ CDM (línea continua). La calibración mediante los datos observacionales fue hecha con ayuda el paquete *gnuplot*, el cual emplea el algoritmo de Marquardt - Levenberg para funciones no lineales. El mejor ajuste a los datos corresponde a los valores de  $n = 1.57 \pm 0.56$  y  $h = 0.64 \pm 0.009$ .

posible el determinar  $n$ . Mediante la sustitución de  $\alpha$  y  $\beta$  en la relación (4.25) se obtiene que  $n = 1.57 \pm 0.56$ . Es decir, éste valor es consecuencia natural de exigir la conservación de materia que se ajusta a las observaciones astronómicas.

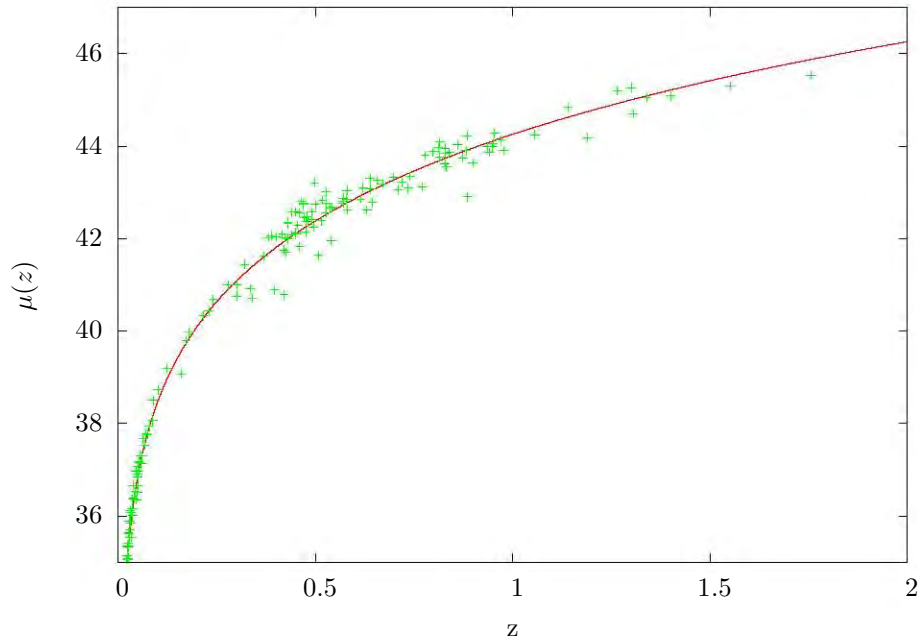
Este último resultado merece destacarse. En el capítulo 3 se mencionó el hecho de que un valor de  $n = 3/2$  surge de manera natural en las teorías de gravedad modificada, tanto de carácter relativista como no relativista. En este contexto, es de notarse el que el modelo cosmológico basado en una teoría  $f(R, T)$  arroje como solución una en que el exponente  $n$  sea  $\approx 1.5$ . Este resultado refuerza aún más la idea de que una modelo cosmológico basado en una extensión de la gravitación newtoniana debe de introducir modificaciones a la curvatura, así como características de la fenomenología MOND.

Una descripción más general que la anterior debe estar basada en considerar una función de la forma expuesta en (3.7), pues reproduce los límites correctos para la descripción del Universo temprano y hoy en día. Para desarrollar un modelo con esta expresión es necesario el resolver la ecuación de Friedmann junto con la ecuación de conservación de energía. Claramente las características de la nueva función a estudiar hacen que este problema no se preste a una solución analítica, pero sí a una mediante métodos numéricos. Para esto son necesarios los valores iniciales (valores hoy en día), y dado que la ecuación de Friedmann resulta ser ahora un ecuación de cuarto orden en el tiempo, serán necesarias 4 cantidades. Sumado a esto, la ecuación de continuidad también requiere condiciones iniciales para el parámetro de densidad y sus derivadas. A paritr del modelo de ley de potencias anterior es posible el conocer tales valores numéricos, los cuales vienen dados por el siguiente conjunto:

$$a_0 = 1, \quad \dot{a}_0 = 0.64, \quad \ddot{a}_0 = 0.108, \quad \dddot{a}_0 = -0.032, \quad (4.27)$$

$$\Omega_0 = 0.13, \quad \dot{\Omega}_0 = -0.26, \quad \ddot{\Omega}_0 = 0.77. \quad (4.28)$$

Integrando numéricamente y de manera simultánea las ecuaciones de Friedmann y de continuidad se logra encontrar al factor de escala como función del corrimiento al rojo. Es así que la ecuación (1.23) nos permite obtener el módulo de distancia y con ello comparar con los datos observacionales. Tales resultados se muestran en la Figura 4.2. En esta se observa que el modelo basado en (3.7) logra reproducir de buena manera los datos sin la necesidad de introducir materia ni energía oscuras. No obstante, esta comparación es válida



**Figura 4.2:** Módulo de la distancia  $\mu$  como función del corrimiento al rojo  $z$  bajo un modelo correspondiente a la función (3.7). Se observa que independientemente del valor del parámetro  $r$ , se reproduce la expansión del Universo en la época actual de acuerdo a su comparación con los datos observacionales dados en (Riess et al., 2004).

sólo para épocas recientes en que domina la materia. El ampliar la curva teórica requeriría de la incorporación de una componente asociada a la radiación, que a su vez interactuara con la correspondiente a la materia. Aún más, dicha componente se vuelve cada vez más significativa conforme  $z$  aumenta.

Es de gran importancia el señalar que los datos observacionales provenientes de explosiones de Supernovas Ia sólo alcanzan corrimientos al rojo no mayores a  $z = 2$ . Ésta limitante hace difícil el descartar los diversos modelos, pues las predicciones que hacen sobre la evolución del Universo hoy en día (cosmológicamente hablando) son parecidas. Por esta razón resulta necesario el ampliar este rango, y así tener herramientas que nos ayuden a discriminar entre los diferentes modelos cosmológicos.



# Conclusiones

En esta tesis se ha desarrollado un modelo cosmológico basado en la unificación entre una teoría métrica de gravedad y una modificación a la gravedad newtoniana. Este tratamiento alternativo ha estado motivado por la existencia de problemas relacionados con el modelo estándar, el cual tiene como sustento teórico a la relatividad general. Dos de las principales consecuencias de aceptar tal modelo son la introducción de la energía y materia oscura.

La propuesta fundamental radica en una modificación del sector de curvatura dentro de las ecuaciones de campo en la que se considera como las cantidades fundamentales al escalar de Ricci  $R$  y a la traza del tensor de energía momento  $T$ . En particular, se abordó bajo el formalismo métrico de una teoría  $f(R, T)$ . Tal propuesta está motivada por la búsqueda de un modelo que de manera natural explique las inconsistencias entre la teoría y las observaciones, así como los intentos que buscan unificar la gravitación con la mecánica cuántica en el régimen de bajas energías, y sin dejar de lado la ausencia de argumentos que evitan la posibilidad de generalizar la acción relativista

Específicamente, en este trabajo se estudió un modelo sin materia ni energía oscura en el que se propuso una función simple de la forma  $f(R, T) = \chi^n/L_M^2$  siendo  $\chi = RL_M^2$  y  $L_M$  una longitud característica del sistema en cuestión. Para establecer la viabilidad de un modelo bajo esta teoría se comparó con los datos observacionales proporcionados por el estudio de las Supernovas tipo Ia. El mejor ajuste a tales datos arrojó como resultado un valor de  $n = 1.57$  para el cual se reproduce la expansión actual del Universo. La importancia de este resultado radica en el hecho de que un valor de  $n = 1.5$  surge de manera natural en las generalizaciones relativistas de las teorías de gravitación newtoniana extendida, así como en las propiedades de simetría de éste tipo de sistemas.

Bajo este mismo modelo, se logró obtener de una manera natural la relación  $a_0 \approx cH_0$ , la cual sólo había sido establecida anteriormente de manera puramente numérica. A su vez, esto sugiere la existencia de una conexión más profunda entre estas constantes de la naturaleza, la cual sólo puede ser notada dentro del estudio de un modelo cosmológico bajo una teoría de gravedad modificada.



Sumado a esto se propuso también una función  $f(R, T)$  que transitara del régimen de relatividad general, válido en la época de radiación, a uno de gravedad modificada, adecuado para la época actual. Mediante el empleo de métodos numéricos, se comparó de nuevo con los datos observacionales dando como resultado la posibilidad de explicar la expansión actual.

Este estudio muestra un primer paso sólido hacia un modelo que modifique las ecuaciones de campo de la relatividad general capaz de reproducir las observaciones astronómicas sin la necesidad de introducir entes oscuros.

# Bibliografía

- ADAMS, J. C., 1846. Explanation of the observed irregularities in the motion of Uranus, on the hypothesis of disturbance by a more distant planet. *MNRAS*, **7**, 149.
- BEGEMAN, K. G., BROEILS, A. H. & SANDERS, R. H., 1991. Extended rotation curves of spiral galaxies - Dark haloes and modified dynamics. *MNRAS*, **249**, 523–537.
- BEKENSTEIN, J. & MILGROM, M., 1984. Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian gravity? *ApJ*, **286**, 7–14.
- BEKENSTEIN, J. D., 2004. Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm. *Physical Review D*, **70**(8), 083509.
- BERNAL, T., CAPOZZIELLO, S., CRISTOFANO, G. & DE LAURENTIS, M., 2011a. Mond's Acceleration Scale as a Fundamental Quantity. *Modern Physics Letters A*, **26**, 2677–2687.
- BERNAL, T., CAPOZZIELLO, S., CRISTOFANO, G. & DE LAURENTIS, M., 2011b. Mond's Acceleration Scale as a Fundamental Quantity. *Modern Physics Letters A*, **26**, 2677–2687.
- BERNAL, T., CAPOZZIELLO, S., HIDALGO, J. C. & MENDOZA, S., 2011c. Recovering MOND from extended metric theories of gravity. *European Physical Journal C*, **71**, 1794.
- CAPOZZIELLO, S. FRANCAVIGLIA, M., 2008. Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications. *General Relativity and Gravitation*, **40**, 357–420.
- CAPOZZIELLO, S., CARDONE, V. F. & SALZANO, V., 2008. Cosmography of f(R) gravity. *Physical Review D*, **78**(6), 063504.

- CAPOZZIELLO, S., DE LAURENTIS, M. & FARAONI, V., 2010. A Bird's Eye View of f(R)-Gravity. *The Open Astronomy Journal*, **3**, 49–72.
- CAPOZZIELLO, S. & FANG, L. Z., 2002. Curvature Quintessence. *International Journal of Modern Physics D*, **11**, 483–491.
- CAPOZZIELLO, S. FARAONI, V., 2011. *Beyond Einstein Gravity. A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*. Springer.
- CARROLL, S., 1997. *Lectures Notes in General Relativity*.
- CARROLL, S., 2004. *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley.
- DALARSSON, M. DALARSSON, N., 2005. *Tensor Calculus, Relativity and Cosmology*. Elsevier Academic Press.
- FERRERAS, I., MAVROMATOS, N. E., SAKELLARIADOU, M. & YUSAF, M. F., 2009. Incompatibility of rotation curves with gravitational lensing for TeVeS theory. *Physical Review D*, **80**(10), 103506.
- FREESE, K., 2009. Review of Observational Evidence for Dark Matter in the Universe and in upcoming searches for Dark Stars. In E. Pecontal, T. Buchert, P. di Stefano & Y. Copin, eds., *EAS Publications Series*, vol. 36 of *EAS Publications Series*, 113–126.
- HARKO, T., LOBO, F. S. N., NOJIRI, S. & ODINTSOV, S. D., 2011. f(R,T) gravity. *Physical Review D*, **84**(2), 024020.
- HERNANDEZ, X. & JIMÉNEZ, M. A., 2012. The Outskirts of Globular Clusters as Modified Gravity Probes. *ApJ*, **750**, 9.
- KARTTUNEN, K., KROGER, P., OJA, H., POUTANEN, M. & DONNER, K., 2007. *Fundamental Astronomy*. Springer, 5th ed.
- KOLB, E.W. TURNER, M., 1990. *The Early Universe*. Addison Wesley.
- LAMBOURNE, R., 2010. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. Cambridge University Press.

- LANDAU, L.D. LIFSHITZ, E., 1987. *The Classical Theory of Fields*. Butterworth - Heine-  
mann, 4th ed.
- LIGHTMAN, A., PRESS, W., PRICE, R. & TEUKOLSKY, S., 1973. *Problem Book in Rela-  
tivity and Gravitation*. Princeton University Press.
- LONGAIR, M., 2008. *Galaxy Formation*. Springer.
- MA, Y.-Z., 2008. Variable cosmological constant model: The reconstruction equations and  
constraints from current observational data. *Nuclear Physics B*, **804**, 262–285.
- MENDOZA, S., 2006. *Notas de Clase del Curso de Astrofísica Relativista*.
- MENDOZA, S., HERNANDEZ, X., HIDALGO, J. C. & BERNAL, T., 2011. A natural ap-  
proach to extended Newtonian gravity: tests and predictions across astrophysical scales.  
*MNRAS*, **411**, 226–234.
- MILGROM, M., 1983a. A modification of the Newtonian dynamics - Implications for galax-  
ies. *ApJ*, **270**, 371–389.
- MILGROM, M., 1983b. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative  
to the hidden mass hypothesis. *ApJ*, **270**, 365–370.
- MILGROM, M., 2001. MOND — a Pedagogical Review. *Acta Physica Polonica B*, **32**,  
3613.
- MISNER, C., THORNE, K. & WHEELER, J., 1973. *Gravitation*. W.H. Freeman and  
Company.
- PADMANABHAN, T., 2002. *Theoretical Astrophysics Vol. III: Galaxies and Cosmology*.  
Cambridge University Press.
- PADMANABHAN, T., 2003. Cosmological constant-the weight of the vacuum. *Physics  
Reports*, **380**, 235–320.
- PADMANABHAN, T., 2008. Dark energy and gravity. *General Relativity and Gravitation*,  
**40**, 529–564.
- RIESS, A. G., FILIPPENKO, A. V., CHALLIS, P., CLOCCHIATTI, A., DIERCKS, A. ET  
AL., 1998. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a  
Cosmological Constant. *Astronomical Journal*, **116**, 1009–1038.

- RIESS, A. G., STROLGER, L.-G., TONRY, J., CASERTANO, S., FERGUSON, H. C. ET AL., 2004. Type Ia Supernova Discoveries at  $z > 1$  from the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution. *ApJ*, **607**, 665–687.
- SANDERS, R. H. & MCGAUGH, S. S., 2002. Modified Newtonian Dynamics as an Alternative to Dark Matter. *Ann. Rev. Ast. & Ast.*, **40**, 263–317.
- SCHMIDT, H.-J., 2007. Fourth Order Gravity: Equations, History, and Applications to Cosmology. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **4**, 209.
- SCHUTZ, B., 2009. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2nd ed.
- TEGMARK, M., STRAUSS, M. A., BLANTON, M. R., ABAZAJIAN, K., DODELSON, S. ET AL., 2004. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. *Physical Review D*, **69**(10), 103501.
- WILL, C., 1993. *Theory and Experiment In Gravitational Physics*. Cambridge University Press, 1st ed.
- WILL, C. M., 1984. The confrontation between general relativity and experiment: an update. *Physics Reports*, **113**, 345–422.
- ZWICKY, F., 1933. Spectral Displacement of Extragalactic Nebulae. *Helvetica Physica Acta*, **6**, 110–127.