UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

“Categorías en Computación, Mónadas y Seudomónadas de Kan”

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA:

Alumno: RAMÍREZ SARTILLO, CARLOS

ASESOR: MARMOLEJO RIVAS FRANCISCO

2012

Categorías en Computación, Mónadas y Seudomónadas de Kan

Índice general

Introducción V

Capítulo 1. Preliminares 1

Capítulo 2. No iteración 13

Capítulo 3. Categorías en Computación 23

Capítulo 4. Seudomónadas de Kan 39
1. Ejemplos de Seudomónadas de Kan 39
2. Ejemplos de leyes distributivas entre Seudomónadas de Kan 51

Capítulo 5. Cocompletación libre 61

Bibliografía 79

Agradecimientos

Dedicado mi padre y a mi familia

.

Dr. Francisco Marmolejo, mil gracias. Gracias señores sinodales.

Introducción

El primer objetivo de esta tesis es dar un panorama del uso y significado de las leyes distributivas en computación, enfocado al estudio de sistemas que combinan probablilidad y no determinismo en semántica [**25**], tal análisis será en el contexto de los sistemas de extensión [**17**]. El segundo y último objetivo de este trabajo es dar un panorama del uso y significado de las leyes distributivas en computación, enfocado al estudio de sus propiedades para buscar modelar de manera unificada sustitución y variable imprecindible en diferentes contextos; en particular para modelar substitución en el contexto cartesiano como en el trabajo de Fiore et al [**24**]. Todo este análisis será en el contexto de extensiones de Kan [**18**].

El presente trabajo está divido en tres partes. La primera de ellas, el Capítulo 1, concierne a todas las nociones preliminares para el desarrollo de esta tesis.

La teoría de mónadas y las leyes distributivas en una 2-categoría tratada desde el enfoque de los sistemas de extensión, así como su teoría análoga en el caso de una categoría y la utilización de ésta en el estudio de sistemas que combinan probablilidad y no determinismo en computación integran la segunda parte de este trabajo. Capítulos 2 y 3.

En la última parte de éste trabajo tenemos la intención de dar un panorama del uso y significado de las leyes distributivas en computación desde el contexto de extensiones de Kan [**18**], enfocado al estudio de sus propiedades para buscar modelar de manera unificada sustitución y variable imprecindible en diferentes contextos (Capítulo 5); en particular para modelar substitución en el contexto cartesiano como en el trabajo de Fiore et al [**24**]. Previamente en el Capítulo 4, una serie de ejemplos de seudomónadas co-lax idempotentes, así como otra de leyes distributivas sobre las categorías **ord** y **Cat** (Capítulo 4), son también abordados desde el contexto de extensiones de Kan [**18**], donde se muestra que tanto una pseudomónada co-lax idempotente como una ley distributiva de una pseudomónada co-lax idempotente sobre una pseudomónada lax idempotente pueden ser presentadas en términos de extensiones de Kan.

No iteración

Los sistemas de extensión fueron descritos por primera vez por E. Manes [**11**] y Bob Walters [**26**] como una definición alternativa para mónadas en categorías. Para funtores adjuntos $S \dashv H$, es bien sabido que estructuras de mónadas sobre S están en correspondencia biyectiva con estructuras de comónadas sobre H [**3**]. En dicho trabajo también se muestra que si $(\mathbb{S}, \mathbb{H})$ es un par correspondiente (mónada, comónada) entonces la categoría de $\mathbb{S}$-álgebras es isomorfa a la categoría de H-coálgebras via un funtor que identifica los funtores que olvidan. Es bastante claro que en [**23**] los resultados de [**3**] forman actualmente parte de la teoría formal de mónadas, las definiciones dadas tienen sentido en cualquier 2-categoría y los teoremas han sido demostrados en alguna 2-categoría adecuada. Es gracias a [**9**] que la teoría formal

de mónadas se ajusta de manera sencilla al concepto más general de bicategoría, para ello es sufiente probar más resultados en una 2-categoría en general.
La correspondencia biyectiva

$$\frac{\eta : 1 \to S}{\varepsilon : H \to 1}$$

para mónadas y comónadas es habilmente realizada mediante la sencilla aplicación de tomar parejas correspondientes bajo la adjunción $S \dashv$. Para los componentes binarios es útil considerar la correspondencia de los datos mediante un proceso en tres pasos:

$$\begin{array}{c} \mu : SS \to S \\ \hline \xi : S \to HS \\ \hline \lambda : SH \to H \\ \hline \delta : H \to HH. \end{array}$$

Esto nos permite considerar no sólo mónadas $\mathbb{S} = (S, \eta, \mu)$ y comónadas $\mathbb{H} = (H, \varepsilon, \delta)$ sino también triples $(S \dashv H, \eta, \xi)$ y $(S \dashv H, \varepsilon, \lambda)$. Para estas dos últimas es un sencillo ejercicio determinar tres ecuaciones de manera que los datos anteriores se extienden a estructuras ecuacionales. Dichas ecuaciones son dadas en **[17]** para $(S \dashv H, \eta, \xi)$, el cual entonces es llamado sistema de extensión.

Supongamos que $(S \dashv H, \eta, \xi)$ es un sistema de extensión sobre un objeto $\mathbf{C}$ en una bicategoría $\mathcal{K}$. Entonces, para cada $A, B : \mathbf{T} \to \mathbf{C}$ en $\mathcal{K}$ tenemos la composición de funciones

$$\mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{C})(B, SA) \to \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{C})(B, HSA) \to \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{C})(SB, SA)$$

donde el primer factor está dado por la composición con ξA y el segundo está dado por la biyección que se tiene de $S \dashv H$. Esta composición, que llamamos $(-)^{\mathbb{S}}$, satisface ecuaciones, pero no se requiere que S tenga adjunto derecho en $\mathcal{K}$. En **[17]** se generaliza la definición de sistema de extensión para incluir el caso donde S no necesariamente tiene adjunto derecho y se muestra que dada $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to S : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ en $\mathcal{K}$, hay una biyección entre mónadas y sistemas de extesión $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$.

En **[11]**, mónadas en **Cat** son presentadas como sistemas de extensión en los que $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to S : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ sólo requiere que esté dada inicialmente como una función objeto $|S| : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{C}|$ y η como una función definida sobre $|\mathbf{C}|$ en donde no se dice nada de la naturalidad. También es posible analizar ésta simplificación en **Cat** si consideramos la inclusión canónica de **Cat** en **Pro**, la bicategoría de profuntores. Ahí se usa el hecho de que cualquier categoría $\mathbf{C}$ es, en **Pro**, el objeto Kleisli para una mónoda canónica $\mathbb{C}$ sobre $|\mathbf{C}|$.
En dicho trabajo se definen álgebras para sistemas de extensión y se muestra que si (S, η, μ) y $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$ se corresponden entonces las categorías de álgebras para cada una son isomorfas. Hay una importante razón para considerar mónadas como sistemas de extensión. Éstos nos permiten prescindir completamente de las iteraciones SS y SSS de la flecha subyacente. Si reflexionamos un poco sobre los varios términos de términos y términos de términos de términos que aparecen en las aplicaciones prácticas ésto por si solo justifica el enfoque alternativo. Se dan ejemplos en la Sección 8 de dicho trabajo.

Se usa la simplicidad de tal aproximación para la teoría general de mónadas con respecto a la composición de mónadas via leyes distributivas y coronas. Además se hace uso de las formulaciones alternativas de leyes distributivas dadas primero en **[15]**.

Probabilidad y no determinismo en Computación.

No determinismo es modelado en teoría de dominios por la noción de dominio potencia, mientras la probabilidad es modelada por la noción de dominio potencia probabilístico. Algunos problemas surgen cuando queremos combinarlos en modelos de computación en los que ambos están presentes. En particular no hay ley distributiva categórica entre ellos. La noción de dominio potencia de valuaciones indexadas, modificación del usual dominio potencia probabilístico, permite tomar un informe más detallado en donde elecciones al azar han sido realizadas. Se muestra la existencia de una ley distributiva entre dominio potencia de valuaciones indexadas y el dominio potencia no detérministico. Por medio de una teoría ecuacional damos una caracterización alternativa de las valuaciones indexadas y la ley distributiva.

La semántica es el arte de dar a los programas de cómputo significado matemático. Entre los diferentes modelos semánticos, es costumbre hacer distinción entre modelos operacionales y modelos denotacionales. Modelos operacionales tienden a construir sobre alguna noción abstracta en computo, mientras que los modelos denotacionales utilizan contextos matemáticos.

El no determinismo es un importante concepto semántico. Cuando modelamos un programa usando no determinismo, queremos modelar el hecho de que el programa puede realizar diferentes acciones, sin conocimiento alguno sobre la acción que actualmente se realiza.

La mayor parte de sistemas de transición etiquetados usan no determinismo para modelar concurrencia. Un cómputo es una sucesión lineal de eventos. Cuando dos eventos son concurrentes, ellos pueden suceder en algún orden no deterministico. Eventos estructurales en cambio dan una noción no lineal de cómputo. Tales modelos son llamados modelos casuales porque el orden en que dos eventos suceden depende hasta ese momento de que haya alguna relación casual entre ellos.

Hay varios tipos posibles de no determinismo.

- Un sistema no deterministico puede mostrar diferentes ambientes y algunas veces tenemos simplemente para informar todas las posibilidades.
- Si consideramos las varias posibilidades como un menú a partir del cual podemos elegir la acción de nuestra preferencia, podemos ignorar malos ambientes.
- Si la elección no está bajo nuestro control pero esto es posible por algún agente externo, usualmente imaginamos esto como una posibilidad maliciosa, y consideramos solamente los peores casos.

La noción de dominio potencia fue introducida para modelar el no determinismo en teoría de dominios. Los tres diferentes tipos de no determinismo anteriores corresponden a tres diferentes nociones de dominio potencia, de Plotkin, de Hoare y el dominio potencia de Smyth respectivamente.

Hay varias maneras de combinar dos mónadas. Si las mónadas surgen de teorías ecuacionales, podemos primero combinar las teorias ecuacionales de alguna manera y entonces generar una nueva mónada. En **[25]** tres formas de combinar teorias están identificadas: suma, combinación conmutativa, combinación distributiva. En esta última, uno agrega ecuaciones que expresan distributividad de cada operación de una teoría sobre cada operación en la otra teoría. Esta forma puede algunas veces obtenerse categóricamente usando la noción de ley distributiva. Un ejemplo está dado por la teoría de grupos abelianos y la teoría de monoides. Su combinación distributiva es la teoría de anillos. La mónada anillo libre puede también obtenerse si damos una ley distributiva categórica entre la mónada grupo abeliano libre y la mónada monoide libre.

El estudio de semanticas operacionales de sistemas combinando probabilidad y no determinismo sugiere que, en algunos casos la probabilidad debería distribuirse sobre el no determinismo. Pero no hay ley distributiva categórica entre la mónada no deterministica y la mónada probabilística. Dos soluciones son posibles en este punto.
Podemos hacer la combinación distributiva de las teorías ecuacionales y generar una nueva mónada. Este es el camino seguido por Tix y Mislove [**25**], quienes, independientemente, definen la noción de dominio potencia geométricamente convexo $\mathcal{P}_{TM}$.
Otra posibilidad, consiste en modificar la definición de una de las mónadas, para admitir la existencia de una ley distributiva categórica. Analizando las razones por las que no existe tal ley distributiva, nos adelantamos a modificar la mónada probababilistica, definiendo la noción de valuación indexada. Matemáticamente, valuaciones indexadas surgen como una álgebra libre para una teoría ecuacional obtenida a partir de la teoría de conos reales removiendo una ecuación.

KZ-Doctrinas.

Las leyes distributivas para mónadas fueron introducidas por J. Beck en [**1**]. G.M. Kelly en [**7**] puntualizó al respecto que las leyes distributivas estrictas para mónadas en dimensiones superiores son raras. En [**14**] se hace el estudio de las leyes seudodistributivas. El primer paso en esta dirección es bastante fácil: se remplazan los dos triángulos conmutativos, y los dos pentágonos conmutativos de [**1**] por apropiadas celdas invertibles. El problema es determinar que condiciones de coherencia deben imponerse a estas celdas invertibles. Hay un paso en esta dirección en [**7**], la estructura obtenida a partir de tal ley distributiva entre dos 2-mónadas estrictas no es, en general, una 2-mónada estricta.
En lugar de trabajar con 2-mónadas se trabaja con el concepto más general de seudomónadas en [**14**]. Se ve que la estructura obtenida a partir de una ley distributiva entre sedomónadas es una seudomónada. Se define ley distributiva entre sedumónadas teniendo encuenta la conmutatividad salvo isomorfismo de los dos triángulos y los dos pentágonos. Se proponen nueve condiciones de coherencia para estos isomorfismos. Se observa que las condiciones de coherencia de [**7**] y las propuestas en [**14**] coinciden en este último contexto.

Co-completaciones de categorías bajo clases adecuadas de colímites fueron los ejemplos que motivaron la definición de KZ-doctrinas [**8**], [**28**]. Una KZ-doctrina es también llamada seudomónada lax idempotente [**18**]. La versión no estricta de tales doctrinas definidas via una sucesión de adjunciones completamente fiel es introducida en [**13**]. Así, una KZ-doctrina no estricta sobre una 2-categoría $\mathcal{K}$ consiste de un endomorfismo $D : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, y transformaciones fuertes $d : 1_{\mathcal{K}} \to D$, y $m : DD \to D$ de tal manera que $Dd \dashv m \dashv dD$ forman una sucesión de adjunciones plenamente fiel, satisfaciendo una ecuación que involucra a la unidad de $Dd \dashv m$ y a la counidad de $m \dashv dD$. Dado un objeto $C \in \mathcal{K}$, pensamos a DC como la co-completación de C, la cual consiste de diagramas adecuados sobre C, $dC : C \to DC$ como el funtor que asigna a cada objeto de C el diagrama sobre tal objeto con identidades para cada flecha en el diagrama, y $mC : DDC \to DC$ como un funtor colímite. La idea de proponer la sucesión de adjunciones como definición sigue los pasos de [**4**] y fue sugerida por R.J. Wood.
Ahora, dada $Dd \dashv m \dashv dD$ como sucesión de adjunciones plenamente fiel significa que la counidad $\beta : m \circ dD \to Id$ de $m \dashv dD$ es invertible (equivalentemente, la unidad $\eta : Id \to m \circ Dd$ es invertible).
Recordemos que la presentación algébraica de Kock [**8**] pide las igualdades $m \circ dD = Id$ y $Id = m \circ Dd$, y para una 2-celda $\delta : Dd \to dD$ se satisfagan cuatro ecuaciones.

En [**13**] podemos producir a partir de una sucesión de adjunciones una 2-celda $\delta : Dd \to dD$. Esta δ, de modo similar, satisface las condiciones requeridas para KZ-doctrina en [**8**]. Así, las KZ-doctrinas de [**8**] son ejemplos particulares de las KZ-doctrinas descritas en [**13**].
Se propone la definición de una KZ-doctrina en términos de una sucesión de adjunciones plenamente fiel $Dd \dashv m \dashv dD$ en [**13**]. Se da la definición en cualquier categoría Gray. También el concepto de álgebra está dado como una adjunción con counidad invertible. Se muestra que estas doctrinas son ejemplos de seudomónadas. Álgebras para seudomónadas son definidas en términos más familiares y se muestra que son las mismas que las definidas como adjunciones cuando uno comienza con una KZ-doctrina.

Las co-KZ doctrinas (también llamadas seudomónadas colax idempotentes)y sus álgebras pueden presentarse en términos de extensiones derechas de Kan [**18**]. Dualmente, las KZ-doctrinas y sus álgebras pueden presentarse en términos de extensiones izquierdas de Kan. También en este artículo se muestra que una ley distributiva de una co-KZ doctrina sobre una KZ-doctrina también tiene una presentación en términos de extensiones de Kan.
Dicho trabajo sigue el camino de [**17**] y [**26**], donde la ideas de Manes y Walters de que una mónada puede presentarse sin iteración en el endofuntor subyacente es el eje central. En [**17**] extienden la noción de operador extensión de Manes a álgebras (ya presente en [**26**]), lo cual permitirá la descripción sin iteración de las leyes distributivas y las coronas. Porque los valores del endofuntor de una mónada son objetos término, la descripción sin iteración evita mencionar términos de términos y términos de términos. Esto es partícularmente útil en la descripción de leyes distributivas y coronas.
Cuando se trabaja con mónadas de dimensión superior la idea de no iteración es más deseable. Por ejemplo, en mónadas completación con respecto a ciertas clases de límites, los téminos son diagramas categóricos que constan de objetos y flechas. Estas son en realidad mónadas completación, seudomónadas lax idempotentes, sobre las que tenemos mucho que decir. Una de tales seudomónadas $(D, d, m, \cdots)$ es también llamada ¨coKZ doctrina¨, y está caracterizada por adjunciones $dD \dashv m \dashv Dd$.
El operador extensión de Manes y aquellos en [**17**] satisfacen ecuaciones. No es ninguna sorpresa que si las sedomónadas (sobre 2-categorías, por ejemplo) son descritas en términos similares entonces las igualdades de aquellos artículos deben ser remplazadas por 2-celdas invertibles. No obstante, seudomónadas colax idempotentes casi tienen una de sus ecuaciones de 2-celdas dada por ecuaciones de adjunciones. Así, es de esperar que si las seudomónadas colax (o lax) idempotentes son descritas por operadores extensión entonces sus ecuaciones de 2-celdas también podrían ser descritas mediante propiedades universales. Este es el caso. ¡Las extensiones que aparecen en la descripción de seudomónadas colax (lax) idempotentes son extensiones de Kan derechas (izquierdas)!

Las variables imprescindibles y sustitución en Computación.

El estudio de las propiedades de leyes distributivas está motivado en [**24**] por tratar de modelar de manera unificada sustitución y la variable imprescindible en diferentes contextos; en particular para modelar substitución en el contexto cartesiano como en el trabajo de Fiore et al y para el contexto lineal en el caso de Tanaka.
Fiore et al y Tanaka toman la categoría cocartesiana libre sobre 1 y la categoría monoidal simetrica libre sobre 1 respectivamente como categoría de contexto y entonces consideran su categoría de pregavillas para construir modelos abstractos para variable imprecindible y sustitución. En [**24**] un modelo para sustitución que unifique estas dos y otras variaciones es

construido usando la categoría de pregavillas sobre una categoría pequeña con estructura que modela el contexto. Tales estructuras en diferentes contextos estan dadas por seudomónadas $\mathbb{S}$ sobre **Cat**, y categorías de pregavillas estan dadas como la seudomónada cocompletación libre $\mathbb{T}$ sobre **Cat**, por lo tanto el análisis de pseudo leyes distributivas es aplicado a la combinación de una pseudomónada con la pseudomónada cocompletación $\mathbb{T}$ en algún contexto. La existencia de tal ley distributiva conduce a una estructura monoidal que es usada para modelar sustitución. En [**24**] se muestra que de una pseudo ley distributiva de S sobre T se obtiene la pseudomónada compuesta TS, a partir de lo cual se sigue que la categoría $TS1$ tiene estructura monoidal, que en aquellos ejemplos, modela sustitución.

Las variables imprescindibles y sustitución siempre han sido un tópico importante a lo largo de la historia de la computación. La variable imprescindible es una situación donde una variable permite ser asociada con otro símbolo, típicamente denotando una operación o conceptualmente equivalente, una función, y como el resultado de esta asociación las variables pierden su plena distinción como símbolo y favorecen sólo una distinción relativa para el símbolo con el cual son asociadas. Esbozamos un ejemplo a partir de simple matemática, considerar la expresión $x + a$, donde x y a denotan variables. Entonces suponemos que llamamos a esta expresión f usando $=$ y al mismo tiempo asociamos el símbolo x con el símbolo f. Una típica representación de esta situación es la expresión $f(x) = x + a$. Decimos que la variable x está acotada en la expresión $x + a$ en el lado derecho. Podemos aplicar la misma discusión a la expresión $y + a$ para obtener la expresión $f(y) = y + a$. Entonces estas expresiones son indistinguibles , en el sentido de que x e y están asociadas a f de la misma manera y habiendo perdido la distinción como símbolos dan dos expresiones indistingibles. Este fenómeno ha sido llamado tradicionalmente α-equivalencia en el estudio de λ-cálculo, donde la función $f(x) = x + a$ es denotada por la expresión $\lambda x.x + a$. También decimos que la variable x está acotada por λ y llamamos a x variable acotada.
Se define el significado preciso de asociar un símbolo con otro, que puede darse en más de una manera, pero la más común es considerar f como orden superior, con los símbolos asociados como parámetros formales para la función.
Ahora, con una función y parámetros formales, lo siguiente a considerar es aplicar un argumento a una función. Dada una función $f(x) = x+a$ y un argumento, digamos, b, el valor $f(b)$ de este argumento aplicado a esta función es $b+a$, donde el actual argumento es sustituido por el parametro formal x. En la terminología del λ-cálculo, la aplicación de un argumento a una función es denotada por yuxtaposición, i.e. en este caso, $(\lambda x.x+a)$. Sustitución del argumento b para la variable acotada x está representada como $(x + a)[b/x]$, que es igual al valor de la aplicación $b+a$. La representación $M[N/x]$ para expresiones M, N y una variable x debe leerse ¨la expresión obtenida como resultado de sustituir N para todas las x que aparecen en M¨. Se define sustitución, pero lo que uno ha de advertir es que la definición consecuentemente tenga cuidado de situaciones donde las variables que aparecen en la expresión para ser sustituidas puedan estar acotadas como resultado de la sustitución.
La manipulación de símbolos en este nivel de complejidad representa problemas difíciles e inesperados particularmente cuando se quiere procesar tales expresiones automáticamente, i.e. usando computación, porque uno necesita formular de manera precisa y apropiada como símbolos son asociados y como y cuando símbolos son o no distinguidos. Además, es necesario dar una buena manera de ordenar para hacer uso la sintaxis natural de las expresiones. Abundantes esfuerzos se han hecho en esta área de investigación para establecer un buen modelo de variable imprescindible y sustitución.
Recientemente ha habido algunos nuevos desarrollos en la dirección de modelos categóricos.

Marcelo Fiore, Gordon Plotkin y Daniele Turi usan las categorías de pregavillas como la base para la representación de sintaxsis con variable imprecindible. Pitts y Gabbay proponen el uso de los axiomas en teoría de conjuntos de Fraenkel-Mostowski, y por tanto topos de Schanuel. El trabajo de Tanaka se enfoca en la primera dirección.
Alrededor de 1970, Kelly introduce la noción de club al trabajar con teoremas de coherencia para la teoría de categorías. Treinta años más tarde Fiore et al usa una estructura que es una variante de clubs, para dar álgebras imprecindibles para modelar variables imprecindibles y estructura monoidal para modelar sustitución.
Haviendo visto estos desarrollos en modelación de imprecindibles, Power descrive en [**20**] una idea para unificar estas estructuras para diferentes tipos de imprecindibles proporcionando una teoría categórica. Esta no solo incluye los dos ejemplos de [**24**], sino que nos permite considerar una gran variedad de ejemplos. Dicho artículo está basado en la definición de ley pseudodistributiva entre pseudomónadas dada en [**14**]. Cada uno de los detalles a cerca de todos los autores antes mencionados y la historía del desarrollo de los modelos categóricos se pueden hallar en [**24**].

El principal objetivo de [**24**] es proporcionar una fundamentación técnica sólida a la idea de Power estudiando leyes seudodistributivas entre seudomónadas y dar sus axiomas de coherencia completos. Una completa y definitiva definición de ley sedudistributiva es dada, junto con una investigación detallada de algunas de sus propiedades, seguida de una investigación de sustitución como principal ejemplo de su uso, en particular en asociación con imprescindibles cartesianos, imprescindibles lineales e imprescindibles de implicaciones grupal.
Se estudian las propiedades de leyes sedodistibuitvas comenzando a partir de la versión ordinaria de ellas; primero se prueban las propiedades de leyes distributivas ordinarias y entonces se extiende la discusión al caso de leyes seudodistributivaas.
Habiendo definido la ley seudodistributiva, es necesario hacer una discusión de como dos seudomónadas y sus seduálgebras interactúan bajo la existencia de una ley seudodistributiva. Más especificamente, los hechos importantes ahí son que una ley seudodistributiva δ de S sobre T es equivalente a un levantamiento de T a la 2-categoría de $\mathbb{S}$-álgebras y que el funtor TS adquiere estructura de seudomónada.
Para dar la unificación para substitución, también es necesario introducir la noción de seudoresistencia de una seudomónada y estudiar sus propiedades. Este es uno de los principales resultados del Capítulo 8.
Se presenta la unificación para sustitución como un ejemplo de aplicaciones del análisis sobre seudodistributividad. La construcción está basada sobre la existencia de una ley seudodistributiva de una seudomónada S sobre una seudomónada T, donde S es una seudomónada que modela cierto tipo de contexto mientras T es la seudomónada parcial cocompletación libre. Aquí se discute el ¨tamaño¨ de esta partícular seudomónada sobre **Cat** porque la cocompletación libre de una categoría pequeña $\mathbf{C}$ no es en general pequeña.

El Capítulo 1 contiene todas las nociones preeliminares para el desarrollo de esta tesis.

Nuestro próposito en el Capítulo 2 es una exposición parcial de [**17**]. Los sistemas de extensión fueron descritos por primera vez por E. Manes como una definición alternativa para mónadas en categorías en [**11**]. Se generaliza la definición de sistema de extensión y mostramos que dadas $\eta : 1_{\mathbf{C}} \Rightarrow S$, $S : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ en $\mathcal{K}$, hay una correspondecia biyectiva entre mónadas (S, η, μ) y sistemas de extensión $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$. Definimos álgebras para sistemas de extensión y mostramos que si (S, η, μ) y $(S, \eta, (-)^{\sim})$ son ¨iguales¨, entonces las categorías de álgebras para cada una de ellas son isomorfas. También utilizaremos las formulaciones alternativas de leyes distributivas dadas primero en [**15**].

Los siguientes resultados: Teorema 2.11 y Teorema 2.13, son parte esencial de esta tesis. Estos formalmente son casos similares a lo hecho en el caso general de una 2-categoría. Gracias a toda la teoría desarrollada se puede prescindir en la práctica de iteraciones tales como SS y SSS, cuando $(S, \mathbf{C})$ es una mónada. Esto es posible gracias a una presentación alternativa para mónadas y en donde la idea central es el concepto de sistemas de extensión. La experiencia en un primer contacto con el ¨cálculo¨ de iteraciones tales como SS y SSS es la de considerar varios términos de términos y términos de términos de términos; así es como uno de los objetivos que se logran es una presentación alternativa para eludir a tan difícil tarea. Tal simplicidad es de gran utilidad cuando trabajamos en la teoría general de mónadas en lo que respecta a la composición de mónadas vía leyes distributivas.

El objetivo princípal del Capítulo 3 es dar un panorama del uso y significado de leyes distributivas en computación, enfocado al estudio de sistemas que combinan probablilidad y no determinismo en semántica como en [**25**], nuestra pricipal referencia. El no determinismo es modelado en teoría de dominios por la noción de dominio potencia, mientras la probabilidad es modelada por la noción de dominio potencia probabilístico. Algunos problemas surgen cuando queremos combinarlos en modelos de computación en el que ambos están presentes. En particular no hay ley distributiva categórica entre ellos. La noción de dominio potencia de valuaciones indexadas , modificación del usual dominio potencia probabilístico, permite tomar un informe más detallado de donde elecciones al azar han sido realizadas. Definimos la mónada de valuaciones indexadas en la categoría **Con**. Se muestra la existencia de una ley distributiva entre dominio potencia de valuaciones indexadas y el dominio potencia no determinístico. Por medio de una teoría ecuacional damos una caracterización alternativa de las valuaciones indexadas y la ley distributiva.

Es bien conocida la existencia de una KZ-doctrina $\mathfrak{D}$ sobre la 2-categoría **ord** [**15**]. El seudofuntor en cuestión asigna a cada conjunto $\mathbf{X}$ el conjunto de sus subconjuntos cerrados inferiormente, la 2-categoría de $\mathfrak{D}$-álgebras es la 2-categoría de retículas completas y funciones que preservan supremos y monotonía. También, conocida es la coKZ-doctrina $\mathfrak{U}$ tal que el seudofuntor correspondiente asigna a cada conjunto $\mathbf{X}$ el conjunto de sus subconjuntos cerrados superiormente [**15**], la 2-categoría de $\mathfrak{U}$-álgebras es la 2-categoría de retículas cocompletas y funciones que preservan infimos y monotonía. Siempre tratamos de KZ-doctrinas y coKZ-doctrinas en el contexto de [**13**].
A lo largo del presente trabajo coKZ-doctrinas y seudomónadas de Kan derechas son esencialmente lo mismo como lo muestra [**18**] (nuestro guía principal en este y el siguiente capítulo). En el Capítulo 4, mostramos que $\mathfrak{U}$ es una coKZ-doctrina desde esta nueva prespectiva. Además, por dualidad, se muestra desde esta nueva prespectiva que $\mathfrak{D}$ es una KZ-doctrina.

También en este capítulo daremos el mismo tratamiento a la KZ-doctrina $\mathfrak{D}'$ =Fam y la coKZ-doctrina $\mathfrak{U}'$ =Cofam sobre **Cat** (la 2-categoría de categorías localmente pequeñas) que son parte del folklore en categorías. En el primer caso el seudofuntor en turno asigna a cada categoría localmente pequeña (que abreviamos como l-pequeña) $\mathbf{C}$ la categoría l-pequeña con coproductos finitos sobre $\mathbf{C}$, la 2-categoría de $\mathfrak{D}'$-álgebras consta de categorías l-pequeñas con coproductos finitos, las 1-celdas son funtores que preservan coproductos finitos y las 2-celdas son las transformaciones naturales. Para el caso de Cofam el seudofuntor en cuestión asigna a cada categoría l-pequeña $\mathbf{C}$ la categoría l-pequeña con productos finitos sobre $\mathbf{C}$, la 2-categoría de $\mathfrak{U}'$-álgebras consta de las categorías l-pequeñas con productos finitos, las 1-celdas son funtores que preservan productos finitos y las 2-celdas son las transformaciones naturales.

Sean $\mathbb{D}$ una seudomónada de Kan izquierda y $\mathbb{U}$ una seudomónada de Kan derecha sobre $\mathcal{K}$. Se muestra en [**18**] que $\mathbb{D}$ y $\mathbb{U}$ inducen un KZ-doctrina y un co-KZ doctrina, respectivamente, a las que también denotamos por $\mathbb{D}$ y $\mathbb{U}$. Además, como se muestra en [**13**], ambas estructuras inducen seudomónadas a las que denotamos por $\mathbb{D}'$ y $\mathbb{U}'$. Si hay una ley distributiva de $\mathbb{U}'$ sobre $\mathbb{D}'$ decimos que hay una ley distributiva de $\mathbb{U}$ sobre $\mathbb{D}$.

En la segunda parte del capítulo 4 la ya conocida ley distributiva de $\mathfrak{U}$ sobre $\mathfrak{D}$ (la cual tambien se expone en [**15**]) es presentada en términos de extensiones de Kan. Lo mismo haremos para la ya conocida ley distributiva de Cofam sobre Fam.

El propósito del Capítulo 5 es dar un panorama del uso y significado de leyes distributivas en computación, enfocado al estudio de sus propiedades para buscar modelar de manera unificada sustitución y variable imprescindible en diferentes contextos; en particular para modelar substitución en el contexto cartesiano como en el trabajo de Fiore et al [**24**]. Todo este análisis estará dado bajo un contexto de extensiones de Kan [**18**].
Iniciamos este capítulo con la demostración de que la completación $\overline{\mathbf{A}}$ de cada categoría l-pequeña $\mathbf{A}$ bajo colímites pequeños es la subcategoría plena de $\mathbf{Con}^{\mathbf{A}^{\mathbf{op}}}$ determinada por todos los colímites pequeños de representables. Para este próposito ha sido de gran ayuda [**6**]. Como consecuencia de tal hecho tenemos que existe una seudomónada derecha de Kan $\mathbb{D}$ sobre $\mathbf{Cat}$, tal que en cada categoría l-pequña $\mathbf{A}$ el valor del seudofuntor en cuestión es $\overline{\mathbf{A}}$. La 2-categoría de álgebras $\mathbb{D}$-$\overline{Alg}$ tiene como objetos a las categorías l-pequeñas con colímites pequeños, las 1-celdas son funtores que preservan colímites pequeños y las 2-celdas son transformaciones naturales.
Dualmente existe una seudomónada izquierda de Kan $\mathbb{U}$ sobre $\mathbf{Cat}$, tal que en cada categoría l-pequeña $\mathbf{A}$ el valor del seudofuntor en cuestión es la subcategoría plena de $(\mathbf{Con}^{\mathbf{A}})^{op}$ determinada por todos los límites pequeños de representables. La 2-categoría de álgebras $\mathbb{U}$-$\overline{Alg}$ tiene como objetos a las categorías l-pequeñas con límites pequeños, las 1-celdas son funtores que preservan límites pequeños y las 2-celdas son transformaciones naturales.
También en este capítulo la conocida ley distributiva de $\mathbb{U}$ sobre $\mathbb{D}$ ([**2**] y [**16**]) es presentada en términos de extensiones de Kan. Para tal afirmación mostramos previamente si $\mathbf{A}$ es una categoría l-pequeña completa entonces $\mathbf{Luc}(\mathbf{A}^{\mathbf{op}})$ (la categoría de funtores lúcidos de $\mathbf{A}^{\mathbf{op}}$ en $\mathbf{Con}$) es completa y $\mathbf{Luc}(\mathbf{A}^{\mathbf{op}}) = \mathbf{DA}$. Para la demostración del primer resultado ha sido de gran ayuda [**5**], para el segundo hemos utilizado [**21**]. Un resultado más general de este hecho se demuestra en [**2**].
Sean T_{fp} y T_{coc} como en el Ejemplo 8.1 y el Ejemplo 8.7 en [**24**]. En dicho trabajo Tanaka muestra que para las seudomónadas T_{fp} y T_{coc} sobre $\mathbf{Cat}$ el modelo de substitución de Fiore et al es un ejemplo de estructura monoidal inducido por la ley distributiva T_{fp} sobre T_{coc}. Formalmente, la ley distributiva T_{fp} sobre T_{coc} es inexistente dado que T_{coc} por razones de tamaño (en general la cocompletación libre de una categoría pequeña no es pequeña) no es una seudomónada. En este capítulo también mostramos que si $\mathbb{U}$ y $\mathbb{D}$ son como en el Corolario 4.9 y el Corolario 5.3 respectivamente entonces existe una ley distributiva de $\mathbb{U}$ sobre $\mathbb{D}$ en la 2-categoría $\mathbf{Cat}$.

Capítulo 1

Preliminares

Asumimios que el lector está familiarizado con las nociones básicas de la teoría de categorías: categoría, funtor, transformación natural, adjunción, etc. Dedicamos mayor atención a conceptos como el de mónada, ley distributiva, límite y colímite, extensión de Kan derecha. Estos son descritos con mayor precisión, en ocasiones damos por hecho resultados referentes a tales conceptos, no obstante mencionamos la fuente de consulta. El lector que desee profundizar en tales temas puede consultar [**10**], [**1**].

Definición 1.1. *Un álgebra para un endofuntor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es simplemente un objeto $A \in \mathbf{C}$ junto con un morfismo $k : F(A) \to A$. El concepto dual es llamado coálgebra.*

Las álgebras forman una categoría $\mathbf{C}^F$, donde un morfismo $\phi : (X,k) \to (X',k')$ está dado por un morfismo $\phi : X \to X'$ en $\mathbf{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\phi)"] \arrow[d, "k"'] & F(X') \arrow[d, "k'"] \\ X \arrow[r, "\phi"'] & X'. \end{tikzcd}$$

El objeto inicial la categoría de álgebras, cuando existe, es llamado álgebra inicial. La noción dual es coálgebra inicial.

El primer tema importante para nuestro trabajo es la teoría de mónadas y leyes distributivas.

Definición 1.2. *Una mónada (T, η^T, μ^T) sobre una categoría $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ consta de un endofuntor $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, y un par de transformaciones naturales $\eta^T : 1 \Rightarrow T, \quad \mu^T : TT \Rightarrow T$ (llamadas la unidad y la multiplicación de la mónada, respectivamente) que satisfacen los diagramas conmutativos*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\eta^T"] \arrow[dr, "1"'] & TT \arrow[d, "\mu^T"] & T \arrow[l, "\eta^T T"'] \arrow[dl, "1"] \\ & T & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TTT \arrow[r, "T\mu^T"] \arrow[d, "\mu^T T"'] & TT \arrow[d, "\mu^T"] \\ TT \arrow[r, "\mu^T"'] & T \end{tikzcd}$$

En algunas ocaciones caemos en un abuso de la notación y escribimos $T = (T, \eta^T, \mu^T)$.

Si T es una mónada y si $f : X \to T(Y)$, la extensión de Kleisli $f^\dagger : T(X) \to T(Y)$ está definida como

$$T(X) \xrightarrow{T(f)} T(T(Y)) \xrightarrow{\mu^T_Y} T(Y).$$

La categoría de Kleisli de una mónada T, denotada por $\mathbf{C_T}$ tiene los mismos objetos que $\mathbf{C}$ y $f : X \to Y$ en $\mathbf{C_T}$ si sólo si $f : X \to T(Y)$ en $\mathbf{C}$. La identidad es la unidad de la mónada, mientras la composición está definida usando la extensión de Kleisli.

Una álgebra para una mónada T es un álgebra (A, k) para el funtor T, que satisface las siguientes identidades

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta^T_A"] \arrow[dr, "1"'] & T(A) \arrow[d, "k"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2(A) \arrow[r, "\mu^T_A"] \arrow[d, "T(k)"'] & T(A) \arrow[d, "k"] \\ T(A) \arrow[r, "k"'] & A. \end{tikzcd}$$

Sean (A, k), (B, l) álgebras de T. Un morfismo de álgebras $f : (A, k) \to (B, l)$ es un morfismo $f : a \to b$ en $\mathbf{C}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "k"'] & T(B) \arrow[d, "l"] \\ A \arrow[r, "T(f)"'] & B. \end{tikzcd}$$

Cuando (T, η^T, μ^T) es una mónada sobre $\mathbf{C}$, denotamos la categoría de álgebras para T por $\mathbf{C^T}$.
Cada adjunción (F, G, η, ϵ), $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ y $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, genera una mónada $(GF, \eta, G\epsilon F)$ sobre $\mathbf{C}$. Inversamente, dada una mónada T, hay una adjunción $F^T \dashv U^T$, $U^T : \mathbf{C^T} \to \mathbf{C}$ es el funtor que olvida, mientras $F^T : \mathbf{C} \to \mathbf{C^T}$ está definido como

$$X \mapsto F^T(X) = (T(X), \mu^T_X) \quad \text{y } \phi : X \to X' \mapsto F^T(\phi) = T(\phi).$$

Esta adjunción genera precisamente la mónada (T, η^T, μ^T).

Una herramienta para combinar dos mónadas es la noción de ley distributiva.

Definición 1.3. *Sean (T, η^T, μ^T), (S, η^S, μ^S) mónadas sobre una categoría $\mathbf{C}$. Una ley distributiva de S sobre T es una transformación natural $d : ST \to TS$ que hace conmutar los siguientes diagramas*

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "\eta^S T"'] \arrow[dr, "T\eta^S"] & \\ ST \arrow[rr, "d"'] & & TS \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "S\eta^T"'] \arrow[dr, "\eta^T S"] & \\ ST \arrow[rr, "d"'] & & TS \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} SST \arrow[r, "Sd"] \arrow[d, "\mu^S T"'] & STS \arrow[r, "dS"] & TSS \arrow[d, "T\mu^S"] \\ ST \arrow[rr, "d"'] & & TS \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} STT \arrow[r, "dT"] \arrow[d, "S\mu^T"'] & TST \arrow[r, "Td"] & TTS \arrow[d, "\mu^T S"] \\ ST \arrow[rr, "d"'] & & TS. \end{tikzcd}$$

Dada una ley distributiva de S sobre T podemos definir una mónada sobre el funtor TS. Si $d : ST \to TS$ es una ley distributiva, entonces $(TS, \eta^T\eta^S, (\mu^T\mu^S) \circ TdS)$ es una mónada. Una TS-álgebra $\langle A, k\rangle$ es una pareja en donde A es objeto de $\mathbf{C}$ y $k : TSA \to A$ es un morfismo en $\mathbf{C}$ tales que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd} TSTSA \arrow[r, "Td_{SA}"] \arrow[d, "TS(k)"'] & T^2S^2A \arrow[r, "T^2\mu^S_A"] & T^2SA \arrow[r, "\mu^T_{SA}"] & TSA \arrow[d, "k"] \\ TSA \arrow[rrr, "k"'] & & & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta^S_A"] \arrow[drr, "1"'] & SA \arrow[r, "\eta^T_{SA}"] & TSA \arrow[d, "k"] \\ & & A. \end{tikzcd}$$

Un morfismo $f : \langle A, k\rangle \to \langle A', k'\rangle$ de TS-álgebras es un morfismo en $\mathbf{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} TSA \arrow[r, "TS(f)"] \arrow[d, "k"'] & TA' \arrow[d, "k'"] \\ A \arrow[r, "f"'] & A'. \end{tikzcd}$$

La categoría de TS-álgebras para la mónada TS, la que denotamos como TS-Alg, tiene como objetos a las TS-álgebras y sus morfismos son morfismos de TS-álgebras.

DEFINICIÓN 1.4. *Sean (T, η^T, μ^T), (S, η^S, μ^S) mónadas sobre una categoría $\mathbf{C}$, un levantamiento de la mónada T a la categoría de S-álgebras es una mónada $(\tilde{T}, \eta^{\tilde{T}}, \mu^{\tilde{T}})$ sobre $\mathbf{C^S}$ tal que si $U^S : \mathbf{C^S} \to \mathbf{C}$ es el funtor que olvida entonces*

- $U^S\tilde{T} = TU^S$.
- $U^S\eta^{\tilde{T}} = \eta^T U^S$.
- $U^S\mu^{\tilde{T}} = \mu^T U^S$.

Beck demostró el siguiente teorema [**1**].

TEOREMA 1.5. *Supongamos que tenemos dos mónadas (T, η^T, μ^T), (S, η^S, μ^S) sobre una categoría $\mathbf{C}$. Son equivalentes*

1. *Hay una ley distributiva $d : ST \to TS$.*
2. *Hay una multiplicación $\mu : TSTS \to TS$, tal que*
   - *$(TS, \eta^T\eta^S, \mu)$ es una mónada.*
   - *Las transformaciones naturales $\eta^T S : S \to TS$ y $T\eta^S : T \to TS$ son morfismos de mónadas.*

- *El siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} TS \arrow[rr, "T\eta^S\eta^S S"] \arrow[dr, "1"'] & & TSTS \\ & TS. \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

3. *Hay un levantamiento $\tilde{T}$ de la mónada T a $\mathbf{C}^{\mathbf{S}}$.*

Conceptos como el de objeto terminal, coigulador, coproducto, etc, son casos particulares de uno más general. Nos referimos al concepto de colímite.

Definición 1.6. *Dado un funtor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, un cocono para F consiste de un objeto B de $\mathbf{B}$ y una trnasformación natural $\mu : F \Rightarrow \Delta_B$ (Δ_B es el funtor constante con valor B). Escribimos*

$$\langle FA \xrightarrow{\mu_A} B\rangle_{A\in\mathbf{A}}$$

Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor. Un colímite para F es un cocono

$$\langle FA \xrightarrow{\mu_A} B\rangle_{A\in\mathbf{A}}$$

con la siguiente propiedad universal: Dado cualquier otro cocono

$$\langle FA \xrightarrow{\tau_A} C\rangle_{A\in\mathbf{A}}$$

existe un único morfismo $f : B \to C$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] & & C \\ & FA \arrow[ul, "\mu_A"] \arrow[ur, "\tau_A"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo para cada $A \in \mathbf{A}$.
De manera frecuente incurrimos en un abuso de notación y escribimos $colim F = B$.

La noción dual de colímite es la noción de límite.

Definición 1.7. *Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor. Un coproducto para F es un colímite*

$$\langle FA \xrightarrow{\mu_A} B\rangle_{A\in\mathbf{A}},$$

con $\mathbf{A}$ una categoría discreta.
Generalmente nos referimos a B como el coproducto de F. Escribimos $\coprod_{A\in\mathbf{A}} FA = B$.

Producto es la noción dual de coproducto.

Definición 1.8. *Sea $\mathbf{B}$ una categoría. Decimos que $\mathbf{B}$ es cocompleta si para cada funtor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ existe un colímite*

$$\langle FA \xrightarrow{\mu_A} B\rangle_{A\in\mathbf{A}},$$

donde $\mathbf{A}$ es una categoría pequeña (el conjunto de objetos y el conjunto de morfismos de $\mathbf{A}$ son pequeños).

Definición 1.9. *Sea $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ un funtor. Decimos que G preserva colímites si para cada funtor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tal que*

$$\langle FA \xrightarrow{\mu_A} B\rangle_{A\in\mathbf{A}},$$

es colímite de F, entonces

$$\langle GFA \xrightarrow{G\mu_A} GB\rangle_{A\in\mathbf{A}},$$

es colímite de GF.

El contexto donde se desarrolla la parte teórica de nuestro trabajo, es en su gran mayoría el de una 2-categoría. La definición de una 2-categoría que damos a continuación es la que aparece en [**12**].

Definición 1.10. *Una 2-categoría $\mathcal{C}$ consta de:*

(i) *Una clase $Ob(\mathcal{C})$ cuyos elementos $A, B, X, Y \dots$ serán llamados "objetos de la 2-categoría $\mathcal{C}$".*

(ii) *Para cada par de objetos A, B de $\mathcal{C}$, una categoría $\mathcal{C}(A,B)$. Los objetos de $\mathcal{C}(A,B)$ son llamados 1-celdas o 1-morfismos de $\mathcal{C}$ con dominio A y codominio B; escribiremos $f : A \to B$ para decir que f es un objeto de $\mathcal{C}(A,B)$. Las flechas de la categoría $\mathcal{C}(A,B)$ son llamadas 2-celdas ó 2-morfismos de $\mathcal{C}$; para f y g 1-celdas con el mismo dominio y codominio, escribimos $\alpha : f \Rightarrow g$ para indicar que α es una 2-celda con dominio f y codomio g; la composición en $\mathcal{C}(A,B)$ (i.e. composición vertical de 2-celdas) es denotada por "$\cdot$" (así la composición de $\alpha : f \Rightarrow g$ y $\beta : g \Rightarrow h$ es denotada por $\beta \cdot \alpha$) y la identidad de f es denotada por id_f o simplemente 1_f.*

(iii) *Para cada A de $\mathcal{C}$, un objeto de $\mathcal{C}(A,A)$ llamado flecha identidad $1_A : A \to A$.*

(iv) *Para cada tercia de objetos A, B, C de $\mathcal{C}$, un funtor de composición*
$$\circ_{A,B,C} : \mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C) \to \mathcal{C}(A,C).$$
Denotamos la composición horizontal de 1-celdas ($\circ$) simplemente por yuxtaposición i.e. $gf = \circ_{A,B,C}(f,g)$, en el caso de composición horizontal de 2-celdas tendremos $\alpha\beta = \circ_{A,B,C}(\alpha,\beta)$. La funtorialidad de $\circ_{A,B,C}$ equivale a:
la composición de 1-celdas
$$f : A \to B, g : B \to C \longmapsto gf : A \to C$$
y las dos composiciones de 1-celdas con 2-celdas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "hf"] \arrow[r, bend right, "hg"'] \arrow[r, phantom, "h\alpha\Downarrow"] & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & C \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "gf"] \arrow[r, bend right, "hf"'] \arrow[r, phantom, "\beta f\Downarrow"] & C \end{tikzcd}$$

donde $h\alpha = \circ_{A,B,C}(\alpha, 1_h), \beta f = \circ_{A,B,C}(1_f, \beta)$ y en la situación

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "i"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & C \end{tikzcd}$$

el diagrama

$$\begin{tikzcd} hf \arrow[r, "h\alpha"] \arrow[d, "\beta f"'] & hg \arrow[d, "\beta g"] \\ if \arrow[r, "i\alpha"'] & ig \end{tikzcd}$$

conmuta en la categoría $\mathcal{C}(A,C)$. *De hecho tenemos que* $\beta\alpha$ *(composición horizontal de 2-celdas) es la diagonal común del diagrama anterior, i.e.*

$$\beta\alpha = (\beta g)\cdot(h\alpha) = (i\alpha)\cdot(\beta f).$$

Nos referimos a instancias del diagrama conmutativo como casos de naturalidad interna, o más específicamente, naturalidad de β. *Además en el caso del ejemplo estereotípico de la 2-categoría CAT (el cual daremos más adelante), la conmutatividad del diagrama es consecuencia de la naturalidad de la transformación natural* β.

Dados $f,g,h : A \to B, i,j,k : B \to C$;

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, "g" near start] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\alpha\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\beta\Downarrow"] & B \arrow[r, bend left, "i"] \arrow[r, "j" near start] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\gamma\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\delta\Downarrow"] & C \end{tikzcd}$$

tenemos

$$i(\beta\cdot\alpha) = (i\beta)\cdot(i\alpha), \qquad (\delta\cdot\gamma)f = (\delta f)\cdot(\gamma f);$$

y en la situación

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_f"] & B \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_h"] & C \end{tikzcd}$$

tenemos

$$h1_f = 1_{hf} = 1_h f.$$

(v) *Con* $1_A, 1_B$ *las 1-celdas identidad, y*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

$$f1_A = f, \alpha 1_A = \alpha, 1_B f = f, 1_B\alpha = \alpha.$$

(vi) *Para cualesquiera objetos* A,B,C,D *de* $\mathcal{C}$, *el diagrama de funtores*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(A,B)\times\mathcal{C}(B,C)\times\mathcal{C}(C,D) \arrow[r, "\circ_{A,B,C}\times 1_{\mathcal{C}(C,D)}"] \arrow[d, "1_{\mathcal{C}(A,B)}\times\circ_{B,C,D}"'] & \mathcal{C}(A,C)\times\mathcal{C}(C,D) \arrow[d, "\circ_{A,C,D}"] \\ \mathcal{C}(A,B)\times\mathcal{C}(B,D) \arrow[r, "\circ_{A,B,D}"'] & \mathcal{C}(A,D) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Esta condición es la asociatividad de la composición horizontal y puede ser expresada *equivalentemente como sigue: en la situación*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "i"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & C \arrow[r, bend left, "j"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & D \end{tikzcd}$$

tenemos

$$j(h\alpha) = (jh)\alpha \cdot j(\beta f) = (j\beta)f \cdot (\gamma h)f = \gamma(hf).$$

DEFINICIÓN 1.11. *Dadas 2-categorías $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, un homomorfismo (también llamado seudofuntor) $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ está dado por:*

(i) *Una función objeto $Ob(\mathcal{D}) \to Ob(\mathcal{D})$ (también denotada por Φ).*

(ii) *Para cada par de objetos A, B de $\mathcal{A}$, un funtor*

$$\Phi_{A,B} : \mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{D}(\Phi(A), \Phi(B)).$$

Escribimos $\Phi(f)$ para $\Phi_{A,B}(f)$, y $\Phi(\alpha)$ para $\Phi_{A,B}(\alpha)$. La funtorialidad de $\Phi_{A,B}$ está expresada por las identidades

$$\Phi(1_f) = 1_{\Phi(f)},\ \Phi(\beta \cdot \alpha) = \Phi(\beta) \cdot \Phi(\alpha).$$

(iii) *Para cada objeto A en $\mathcal{C}$, un isomorfismo $\Phi_A : 1_{\Phi(A)} \to \Phi(1_A)$.*

(iv) *Para cada tercia de objetos A, B, C de $\mathcal{C}$, un isomorfismo de funtores*

$$\Phi_{A,B,C} : (\circ_{\Phi A, \Phi B, \Phi C})(\Phi_{A,b} \times \Phi_{B,C}) \to \Phi_{A,C}(\circ_{A,B,C}),$$

más fácilmente visualizado en el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C) \arrow[r, "\circ_{A,B,C}"] \arrow[d, "\Phi_{A,B} \times \Phi_{B,C}"'] \arrow[dr, phantom, "\Phi_{A,B,C}\ \Nearrow"] & \mathcal{C}(A,C) \arrow[d, "\Phi_{A,C}"] \\ \mathcal{D}(\Phi A, \Phi B) \times (\Phi B, \Phi C) \arrow[r, "\circ_{\Phi A, \Phi B, \Phi C}"'] & \mathcal{D}(\Phi A, \Phi C). \end{tikzcd}$$

Para $f : A \to B$ y $g : B \to C$, escribimos $\Phi^{f,g}$ para $\Phi_{A,B,C}(f,g)$; así tenemos $\Phi^{f,g} : \Phi(g)\Phi(f) \to \Phi(gf)$. La naturalidad de $\Phi_{A,B,C}$ está expresada, con referencia a

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "i"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & C, \end{tikzcd}$$

por la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd} \Phi(h)\Phi(f) \arrow[r, "\Phi^{f,h}"] \arrow[d, "\Phi(h)\Phi(\alpha)"'] & \Phi(hf) \arrow[d, "\Phi(h\alpha)"] \\ \Phi(h)\Phi(g) \arrow[r, "\Phi^{g,h}"'] & \Phi(hg), \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Phi(h)\Phi(f) \arrow[r, "\Phi^{f,h}"] \arrow[d, "\Phi(\beta)\Phi(f)"'] & \Phi(hf) \arrow[d, "\Phi(\beta f)"] \\ \Phi(i)\Phi(f) \arrow[r, "\Phi^{f,i}"'] & \Phi(if). \end{tikzcd}$$

Todo lo anterior sujeto a las condiciones:

(v) *Si $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$, entonces los diagramas*

$$\begin{tikzcd} \Phi(f)\Phi(1_A) \arrow[r, "\Phi^{1_A,f}"] \arrow[dr, "1"'] & \Phi(f)1_{\Phi(A)} \arrow[d, "\Phi(f)\Phi_A"] \\ & \Phi(f)\Phi(1_A) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Phi(1_B)\Phi(f) \arrow[r, "\Phi^{f,1_B}"] \arrow[dr, "1"'] & 1_{\Phi(B)}\Phi(f) \arrow[d, "\Phi_B\Phi(f)"] \\ & \Phi(1_B)\Phi(f) \end{tikzcd}$$

conmutan.

(vi) *Dados $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ en $\mathcal{C}$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \Phi(h)\Phi(g)\Phi(f) \arrow[r, "\Phi(h)\Phi^{f,g}"] \arrow[d, "\Phi^{g,h}\Phi(f)"'] & \Phi(h)\Phi(gf) \arrow[d, "\Phi^{gf,h}"] \\ \Phi(hg)\Phi(f) \arrow[r, "\Phi^{f,hg}"'] & \Phi(hgf) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Si los isomorfismos $\Phi^{f,g}$ son todos identidades, Φ es un 2-funtor. Por otra parte si $\mathcal{C}$ es una categoría usual, i.e., una 2-categoría cuyas 2-celdas unicamente son identidades, un homomorfismo $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es llamado seudofuntor.

Si $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $\Psi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son homomorfismos de 2-categorías, podemos definir su composición $\Psi\Phi$ de manera natural.
Para

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{A}$, definimos

$$\Psi\Phi(A) = \Psi(\Phi(A)),\ \Psi\Phi(f) = \Psi(\Phi(f)),\ \Psi\Phi(\alpha) = \Psi(\Phi(\alpha)),$$
$$(\Psi\Phi)^A = \Psi(\Phi^A)\Psi^{\Phi A} \text{ y } (\Psi\Phi)^{f,h} = \Psi(\Phi^{f,h})\Psi^{\Phi f \Phi h}.$$

Esta composición es asociativa.

Definición 1.12. *Dadas 2-categorías y homomorfismos como en*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\Phi"] \arrow[r, bend right, "\Psi"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow t"] & B, \end{tikzcd}$$

una transformación $t : \Phi \Rightarrow \Psi$ está dada por:

(i) *Para cada A en $Ob(\mathcal{C})$, una 1-celda $t_A : \Phi(A) \to \Psi(A)$.*

(ii) *Para cada 1-celda $f : A \to B$ en $\mathcal{A}$, una 2-celda $t_f : \Psi(f)t_A \Rightarrow t_B\Phi(f)$.*
Todo sujeto a las siguientes condiciones:

(iii) *Para toda 2-celda*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B, \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{C}$, entonces

$$\begin{tikzcd} \Phi(A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, bend right=60, "\Phi(g)"'] \arrow[d, bend left=60, "\Phi(f)"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\Phi\alpha"] & \Psi(A) \arrow[d, "\Psi(f)"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow t_f"] \\ \Phi(B) \arrow[r, "t_B"'] & \Psi(B) \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \Phi(A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "\Phi(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow t_g"] & \Psi(A) \arrow[d, bend right=60, "\Psi(g)"'] \arrow[d, bend left=60, "\Psi(f)"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\Psi\alpha"] \\ \Phi(B) \arrow[r, "t_B"'] & \Psi(B). \end{tikzcd}$$

(iv) *Cuando $f : A \to B$ y $g : B \to C$ pertenezcan a $\mathcal{C}$, entonces*

$$\begin{tikzcd} \Phi(A) \arrow[rr, "t_A"] \arrow[dr, "\Phi f"] \arrow[dd, "\Phi(gf)"'] & & \Psi(A) \arrow[dr, "\Psi f"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow t_f"] & \\ & \Phi(B) \arrow[rr, "t_B"'] \arrow[dl, "\Phi g"] \arrow[l, phantom, "\Leftarrow\Phi^{f,g}"] & \arrow[d, phantom, "\Leftarrow t_g"] & \Psi(B) \arrow[dl, "\Psi g"] \\ \Phi(B) \arrow[rr, "t_C"'] & & \Psi(B) & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \Phi(A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[dd, "\Phi(gf)"'] \arrow[ddr, phantom, "\Leftarrow t_{gf}"] & \Psi(A) \arrow[dd, "\Psi(gf)"'] \arrow[dr, "\Psi f"] & \\ & \arrow[r, phantom, "\Leftarrow\Psi^{f,g}"] & \Psi(B). \arrow[dl, "\Psi g"] \\ \Phi(C) \arrow[r, "t_C"'] & \Psi(C) & \end{tikzcd}$$

(v) *Cuando A está en $\mathcal{C}$, y si consideramos*

$$\begin{tikzcd} \Phi(A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "\Phi(1_A)"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow t_{1_A}"] & \Psi(A) \arrow[d, "\Psi(1_A)"] \\ \Phi(A) \arrow[r, "t_A"'] & \Psi(A), \end{tikzcd}$$

entonces

$$\begin{tikzcd} \Psi(1_A)t_A \arrow[r, "t_{1_A}"] & t_A\Psi(1_A) \\ 1_{\Psi A}t_A \arrow[u, "\Psi_A t_A"] \arrow[r, "="'] & t_A 1_{\Phi A} \arrow[u, "t_A\Phi_A"'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

Decimos que una transformación t es fuerte cuando t_f es un isomorfismo para cada f. Si cada t_f es una 2-celda identidad, decimos que t es estricta.

Definición 1.13. *Dadas 2-categorías, homomorfismos y transformaciones*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\Phi"] \arrow[r, bend right, "\Psi"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow t"] & \mathcal{D} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\Phi"] \arrow[r, bend right, "\Psi"'] \arrow[r, phantom, "u\Downarrow"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

una modificación $\mu : t \to u$ consta de:

(i) *Una familia $\langle \mu_A \rangle_{A \in \mathcal{A}}$ de 2-celdas $\mu_A : t_A \to u_A$ que satisface:*

(ii) *para cualquier 1-celda $f : A \to B$, tenemos*

$$
\begin{tikzcd}
\Phi(A) \arrow[r, bend left, "t_A"] \arrow[r, bend right, "u_A"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mu_A"] \arrow[d, "\Phi f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow u_f"] & \Psi(A) \arrow[d, "\Psi(f)"] \\
\Phi(B) \arrow[r, "u_B"'] & \Psi(B)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\Phi(A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "\Phi(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow t_f"] & \Psi(A) \arrow[d, "\Psi(f)"] \\
\Phi(B) \arrow[r, bend left, "t_B"] \arrow[r, bend right, "u_B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mu_B"] & \Psi(B).
\end{tikzcd}
$$

Dadas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ 2-categorías, tenemos la 2-categoría $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ de homomorfismos de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$: sus objetos son homomorfismos de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, sus 1-celdas son transformaciones, y sus 2-celdas son modificaciones. Las composiciones estan definidas como siguen:

(i) Dados homomorfismos Φ, Ψ, Ξ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ y transformaciones $t : \Phi \to \Psi$, $u : \Psi \to \Xi$, definimos $ut : \Phi \to \Xi$ por $(ut)_A = u_A t_A$ y, para $f : A \to B$, por $(ut)_f = (u_B t_f) \cdot (u_f t_A)$.

(ii) Para

$$
\begin{tikzcd}
\Phi \arrow[r, bend left=50, "t"] \arrow[r, "u" description] \arrow[r, bend right=50, "v"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\mu\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\nu\Downarrow"] & \Psi,
\end{tikzcd}
$$

$\nu \cdot \mu$ está definida por $(\nu.\mu)_A = \nu_A \cdot \mu_A$.

(iii) Para

$$
\begin{tikzcd}
\Phi \arrow[r, bend left, "t"] \arrow[r, bend right, "u"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mu"] & \Psi \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "w"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\nu"] & \Xi,
\end{tikzcd}
$$

$v\mu$ y νt están definidas por $(v\mu)_A = v_A \mu_A$, $(\nu t)_A = \nu_A t_A$.

Definición 1.14. *Sea $\mathcal{C}$ una 2-categoría. Una adjunción (f, g, η, ϵ) en $\mathcal{C}$ está dada por*

(i) *$f : A \to B$, $g : B \to A$, $\eta : 1_B \Rightarrow gf$ y $\epsilon : fg \Rightarrow 1_A$, tales que se satisfacen las identidades triangulares*

(ii)

$$
\begin{tikzcd}
g \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "\eta g"'] & & g \\
& gfg \arrow[ur, "g\epsilon"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "f\eta"'] & & f \\
& fgf \arrow[ur, "\epsilon f"'] &
\end{tikzcd}
$$

En este caso, decimos que f es un adjunto izquierdo de g, lo denotamos como $f \dashv g$. Desde luego, una adjunción en **CAT** es lo mismo que una adjunción en el sentido usual.

Las extensiones de Kan forman parte del conjunto de ideas centrales para la tercera parte de este trabajo.

DEFINICIÓN 1.15. *Sea $\mathcal{C}$ una 2-categoría. Dadas 1-celdas $k : M \to C$ y $t : M \to A$ una extensión de Kan derecha consta de una 1-celda r y una 2-celda ε como en el diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "t"'] & C \arrow[d, "r"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\varepsilon"] \\ & A, \end{tikzcd}$$

tales que satisface la siguiente propiedad universal:
Para cualesquiera s y α, 1-celda y 2-celda respectivamente en el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "t"'] & C \arrow[d, "s"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\alpha"] \\ & A, \end{tikzcd}$$

existe una única 2-celda $\bar{\alpha} : s \Rightarrow r$ tal que $\varepsilon \cdot \bar{\alpha}k = \alpha$.

Tal universalidad determina salvo isomorfismo a la 1-celda r, a la que denotamos como $\mathrm{Ran}_k t$. Llamamos a ε la counidad. Decimos que r es una extensión de Kan derecha de t o que ε exhibe a r como extensión de Kan derecha de t a lo largo de k.
De la manera dual (volteando las 2-celdas), se tiene el concepto de extensión de Kan izquierda (que denotamos como $\mathrm{Lan}_k t$).

Dadas categorías $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, escribimos $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ para denotar a la categoría de funtores de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{A}$. Recordemos que un funtor $K : \mathbf{M} \to \mathbf{C}$ induce un funtor $\mathbf{A}^{\mathbf{K}} : \mathbf{A}^{\mathbf{C}} \to \mathbf{A}^{\mathbf{M}}$. Si para cada T en $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}$ existe $\mathrm{Ran}_K T$ entonces $\mathbf{A}^{\mathbf{K}}$ tiene adjunto derecho R_L definido en los objetos como:

$$T \mapsto R_L(T) = \mathrm{Ran}_K T.$$

Capítulo 2

No iteración

Nuestro propósito en este capítulo es dar una exposición parcial de [**17**]. Los sistemas de extensión fueron descritos por primera vez por E. Manes [**11**] y Bob Walters [**26**] como una definición alternativa para mónadas en categorías. Se generaliza la definición de sistema de extensión y mostramos que dadas $\eta : 1_{\mathbf{C}} \Rightarrow S$, $S : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ en $\mathcal{K}$, hay una correspondecia biyectiva entre mónadas (S, η, μ) y sistemas de extensión $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$. Definimos álgebras para sistemas de extensión y mostramos que si (S, η, μ) y $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$ son "iguales", entonces las categorías de álgebras para cada una de ellas son isomorfas. También utilizaremos las formulaciones alternativas de leyes distributivas dadas primero en [**15**].

Los siguientes resultados: Teorema 2.11 y Teorema 2.13, son parte esencial de esta tesis. Estos formalmente son resultados similares a lo hecho en el resultado general de una 2-categoría. Gracias a toda la teoría desarrollada se puede prescindir en la práctica de iteraciones tales como SS y SSS, cuando $(S, \mathbf{C})$ es una mónada. Esto es posible gracias a una presentación alternativa para mónadas y en donde la idea central es el concepto de sistemas de extensión. La experiencia en un primer contacto con el ¨cálculo¨ de iteraciones tales como SS y SSS es la de considerar varios términos de términos y términos de términos de términos; así es como uno de los objetivos que se logran es una presentación alternativa para eludir a tan difícil tarea. Tal simplcidad es de gran utilidad cuando trabajamos en la teoría general de mónadas en lo que respecta a la composición de mónadas vía leyes distributivas.
Trabajamos en una 2-categoría $\mathcal{K}$. Sea

(1)
$$\begin{tikzcd} & \mathbf{D} \arrow[dr, "T"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon \Downarrow"] & \\ \mathbf{C} \arrow[ur, "S"] \arrow[rr, "U"'] & & \mathbf{E} \end{tikzcd}$$

una 2-celda en $\mathcal{K}$. Para cualesquiera flechas $(C, D) : \mathbf{T} \to \mathbf{C}; \mathbf{D}$, ε define una familia de funciones

$$(-)^{\sharp}_{D,C} : \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{D})(D, SC) \to \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{E})(TD, UC)$$

cuyo efecto sobre d en $\mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{D})(D, SC)$ es el pegamiento

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T} \arrow[rr, "D"] \arrow[dr, "C"'] & \arrow[d, phantom, "d \downarrow"] & \mathbf{D} \arrow[dr, "T"] \arrow[d, phantom, "\varepsilon \downarrow"] & \\ & \mathbf{C} \arrow[ur, "S"] \arrow[rr, "U"'] & & \mathbf{E} \end{tikzcd}$$

Esta 2-celda, cuyo nombre es $d^\sharp_{D,C}$, se denotará en lo sucesivo como $d^\sharp$. La familia de funciones $(-)^\sharp_{D,C}$ respeta bigotación en $\mathbf{T}$, si para cualquier $X : \mathbf{S} \to \mathbf{T}$,

$$d^\sharp X = (dX)^\sharp \tag{2}$$

y respeta ampulación en D, si para cualquier $b : B \to D : \mathbf{T} \to \mathbf{D}$,

$$(db)^\sharp = d^\sharp \cdot Tb \tag{3}$$

Definición 2.1. *Un operador pegamiento*

$$(-)^\sharp : \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{D})(1, S) \to \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{E})(T, U)$$

es una familia de funciones

$$(-)^\sharp_{D,C} : \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{D})(D, SC) \to \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{E})(TD, UC)$$

que preserva bigotación y ampulación.

Lema 2.2. *Para 1-celdas S, T, U como en (1), los operadores pegamiento*

$$(-)^\sharp : \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{D})(1, S) \to \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{E})(T, U)$$

están en correspondencia biyectiva con 2-celdas $TS \to U$.

Demostración. Dado cualquier operador pegamiento $(-)^\sharp : \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{D})(1, S) \to \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{E})(T, U)$, tenemos

$$(1_S)^\sharp_{S,1_C} : TS \to U.$$

Como el operador pegamiento $(-)^\sharp$ respeta bigotación, para $C : \mathbf{T} \to \mathbf{C}$ tenemos que $(1_S)^\sharp C = (1_S C)^\sharp$. Pero como $(-)^\sharp$ también respeta ampulación para

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T} \arrow[rr, "D"] \arrow[dr, "C"'] & \arrow[d, phantom, "\delta \downarrow"] & \mathbf{D} \\
& \mathbf{C} \arrow[ur, "S"'] &
\end{tikzcd}$$

tenemos que

$$(1_S C \cdot \delta)^\sharp = (1_S C)^\sharp T\delta$$

Por lo que $\delta^\sharp = (1_S)^\sharp C \cdot T\delta$. De tal manera que cualquier $(-)^\sharp : \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{D})(1, S) \to \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{E})(T, U)$ está completamente determinado por $(1_S)^\sharp_{S,1_C}$ y este último puede ser cualquier 2-celda $TS \to U$. Por lo anterior tenemos que la asignación $(-)^\sharp \to (1_S)^\sharp_{S,1_C}$ es una biyección. □

Definición 2.3. *Sea $\mathbf{C}$ un objeto en una 2-categoría $\mathcal{K}$. Un sistema de extensión sobre $\mathbf{C}$ consiste de una flecha $S : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, una 2-celda $\eta : 1_\mathbf{C} \to S$ y un operador pegamiento*

$$(-)^\mathbb{S} : \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{C})(1, S) \to \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{C})(S, S)$$

al cual llamamos operador $\mathbb{S}$-extensión. Tal operador satisface las siguientes condiciones, para cada $C, B, A : \mathbf{T} \to \mathbf{C}$, $f : B \to SA$, y $g : C \to SB$,

$$\eta^\mathbb{S} = 1_S, \tag{4}$$

y los diagramas

(5)
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta B"] \arrow[dr, "f"'] & SB \arrow[d, "f^{\mathbb{S}}"] \\ & SA, \end{tikzcd}$$

y

(6)
$$\begin{tikzcd} SC \arrow[r, "g^{\mathbb{S}}"] \arrow[dr, "(f^{\mathbb{S}}g)^{\mathbb{S}}"'] & SB \arrow[d, "f^{\mathbb{S}}"] \\ & SA. \end{tikzcd}$$

conmutan.

Teorema 2.4. *Para $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to S : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ en una 2-categoría $\mathcal{K}$, hay una correspondencia biyectiva entre sistemas de extensión $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$ y mónadas (S, η, μ).*

Demostración. Por el lema anterior tenemos una biyección entre operadores pegamiento $(-)^{\mathbb{S}}$ y 2-celdas $\mu : SS \to S$. Sea (S, η, μ) una mónada. La correspondencia del Lema 2.2 muestra que $f^{\mathbb{S}} = \mu A \cdot Sf : SB \to SA$. Ahora (4) es uno de los axiomas para la unidad en una mónada.
Por el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T} \arrow[rr, "B"] \arrow[dr, "A"'] \arrow[rr, phantom, "f\downarrow" below, shift right=4ex] & & \mathbf{C} \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "S"] & & \mathbf{C} \arrow[dl, "1"] \arrow[ll, phantom, "\eta\downarrow" below, shift right=4ex] \\ & \mathbf{C} \arrow[ur, "S"'] \arrow[rr, "S"'] \arrow[rr, phantom, "\mu\downarrow" above, shift left=4ex] & & \mathbf{C} & \end{tikzcd}$$

se tiene que

$$\begin{gathered} \mu A \cdot Sf \cdot \eta B = \mu A \cdot \eta SA \cdot f. \\ \therefore\ f^{\mathbb{S}} \cdot \eta B = \mu A \cdot Sf \cdot \eta B = \mu A \cdot \eta SA \cdot f = f, \end{gathered}$$

si usamos el otro axioma para la unidad en una mónada. De esta forma se tiene (5). Finalmente, como tenemos asociatividad para nuestra mónada, i.e.

$$\mu \cdot \mu S = \mu \cdot S\mu$$

entonces

$$\begin{gathered} f^{\mathbb{S}} \cdot g^{\mathbb{S}} = \mu A \cdot Sf \cdot \mu B \cdot Sg = \mu A \cdot \mu SA \cdot SSf \cdot Sg \\ = \mu A \cdot S\mu A \cdot SSf \cdot Sg = \mu A \cdot S(\mu A \cdot Sf \cdot g) = (f^{\mathbb{S}} \cdot g)^{\mathbb{S}}. \end{gathered}$$

De manera que $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$ es un sistema de extensión.
Ahora bien, si $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$ es sistema de extensión, la correspondencia del Lema 2.2 nos dice que $\mu = (1_S)^{\mathbb{S}}$. La ecuación $\mu \cdot \eta S = (1_S)^{\mathbb{S}} \cdot \eta S = 1_S$ que debe satisfacer la mónada se tiene por (5). La segunda $\mu \cdot S\eta = (1_S)^{\mathbb{S}} \cdot S\eta = \eta^{\mathbb{S}} = 1_S$ es consecuencia de (3) y (4). Consecuencia de (2), (3) y (6) es la asociatividad de la mónada ya que:

$$\mu \cdot S\mu = (1_S)^{\mathbb{S}} \cdot S\mu = \mu^{\mathbb{S}} = ((1_S)^{\mathbb{S}})^{\mathbb{S}} = (1_S)^{\mathbb{S}} \cdot (1_{S^2})^{\mathbb{S}} = (1_S)^{\mathbb{S}} \cdot (1_S)^{\mathbb{S}} S = \mu \cdot \mu S.$$

□

Notemos que para $b : B \to D : \mathbf{T} \to \mathbf{C}$, tenemos

(7)
$$Sb = (\eta D \cdot b)^{\mathbb{S}}.$$

Damos la definición de álgebras para un sistema de extensión.

Definición 2.5. *Para $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$, un sistema de extensión sobre $\mathbf{C}$ y $\mathbf{X}$ un objeto, ambos en $\mathcal{K}$, una $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$-álgebra con dominio $\mathbf{X}$ es un par $\mathbb{B} = (B, (-)^{\mathbb{B}})$, donde $B : \mathbf{X} \to \mathbf{C}$ y*

$$(-)^{\mathbb{B}} : \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{C})(1, B) \to \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{C})(S, B)$$

es un operador pegamiento, al cual llamamos operador $\mathbb{B}$-extensión, sujeto a las siguientes ecuaciones, para cada $h : Y \to BD$ y cada $k : Z \to SY : \mathbf{T} \to \mathbf{C}$,

(8)
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\eta Y"] \arrow[dr, "h"'] & SY \arrow[d, "h^{\mathbb{B}}"] \\ & BD, \end{tikzcd}$$

(9)
$$\begin{tikzcd} SZ \arrow[r, "k^{\mathbb{S}}"] \arrow[dr, "(h^{\mathbb{B}} \cdot k)^{\mathbb{B}}"'] & SY \arrow[d, "h^{\mathbb{B}}"] \\ & BD. \end{tikzcd}$$

Un homomorfismo $p : \mathbb{B} = (B, (-)^{\mathbb{B}}) \to (A, (-)^{\mathbb{A}})$ de $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$-álgebras con dominio $\mathbf{X}$ es una 2-celda $p : B \to A$ sujeta a la siguiente ecuación, para toda $h : Y \to BD$,

(10)
$$\begin{tikzcd} SY \arrow[r, "h^{\mathbb{B}}"] \arrow[dr, "(pD \cdot h)^{\mathbb{A}}"'] & BD \arrow[d, "pD"] \\ & AD. \end{tikzcd}$$

Es fácil ver que las $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$-álgebras con dominio $\mathbf{X}$ y sus homomorfismos son una categoría, la cual denotamos por $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{C}, (\mathbf{S}, \eta, (-)^{\mathbb{S}}))$; se tiene además un funtor que olvida de esta categoría a $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{C})$. Convenimos en que las (S, η, μ)-álgebras son las descritas en **[13]** y escribimos $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{C}, (\mathbf{S}, \eta, \mu))$ para dicha categoría.

Teorema 2.6. *Las categorías $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{C}, (\mathbf{S}, \eta, (-)^{\mathbb{S}}))$ y $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{C}, (\mathbf{S}, \eta, \mu))$ son isomorfas.*

Demostración. Por el Lema 2.2, los operadores pegamiento $(-)^{\mathbb{B}} : \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{C})(1, B) \to \mathcal{K}(\mathbf{T}, \mathbf{C})(S, B)$ están en correspondencia biyectiva con las 2-celdas $\beta : SB \Rightarrow B$. Es suficiente mostrar que cada $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$-álgebra y cada homomorfismo en $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{C}, (\mathbf{S}, \eta, (-)^{\mathbb{S}}))$ determinan una (S, η, μ)-álgebra y un homomorfismo únicos en $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{C}, (\mathbf{S}, \eta, \mu))$ y viceversa.
Sea $(B, (-)^{\mathbb{B}})$ una $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$-algebra y consideramos $(B, (1_B)^{\mathbb{B}})$, donde $(1_B)^{\mathbb{B}}$ surge a partir de $(-)^{\mathbb{B}}$ como en el Lema 2.2. Tenemos que $(1_B)^{\mathbb{B}} \cdot \eta B = 1_B$ por (8), y

$$(1_B)^{\mathbb{B}} \cdot S(1_B)^{\mathbb{B}} = (1_B)^{\mathbb{B}} \cdot (\eta B \cdot (1_B)^{\mathbb{B}})^{\mathbb{S}} = ((1_B)^{\mathbb{B}} \cdot \eta B \cdot (1_B)^{\mathbb{B}})^{\mathbb{B}} = ((1_B)^{\mathbb{B}})^{\mathbb{B}}$$
$$= (1_B)^{\mathbb{B}} \cdot (1_{SB})^{\mathbb{S}} = (1_B)^{\mathbb{B}} \cdot (1_S)^{\mathbb{S}} B = (1_B)^{\mathbb{B}} \cdot \mu B,$$

por $(7), (9), (8), (9)$ y (2). Si $p : (B, (-)^{\mathbb{B}}) \to (A, (-)^{\mathbb{A}})$ es un homomorfismo de $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$-álgebras entonces

$$(1_A)^{\mathbb{A}} \cdot Sp = (1_A)^{\mathbb{A}} \cdot (\eta A \cdot p)^{\mathbb{S}} = ((1_A)^{\mathbb{A}} \cdot \eta A \cdot p)^{\mathbb{A}} = p^{\mathbb{A}} = p \cdot (1_B)^{\mathbb{B}},$$

por $(7), (9), (8)$ y (10), por lo cual $p : (B, (1_B)^{\mathbb{B}}) \to (A, (1_A)^{\mathbb{A}})$, es homomorfismo de (S, η, μ)-álgebras.
Supongamos ahora que (B, β) es una (S, η, μ)-álgebra entonces, para $h : Y \Rightarrow BD : \mathbf{Y} \to \mathbf{C}$, definimos

$$h^{\mathbb{B}} = SY \xrightarrow{Sh} SBD \xrightarrow{\beta D} BD.$$

Dado que (B, β) es una (S, η, μ)-álgebra entonces $\beta \cdot \eta B = 1$. Además si consideramos

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Y} \arrow[rr, "Y"] \arrow[dr, "D"'] & & \mathbf{C} \arrow[rr, bend left, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\eta \Downarrow"] \arrow[rr, "S"'] & & \mathbf{C} \\
& \mathbf{X} \arrow[ur, "B"'] \arrow[u, phantom, "h \Downarrow"] & & &
\end{tikzcd}$$

tenemos que $Sh \cdot \eta Y = \eta BD \cdot h$. Por lo tanto

$$h^{\mathbb{B}} \cdot \eta Y = \beta D \cdot Sh \cdot \eta Y = \beta D \cdot \eta BD \cdot h = h,$$

y (8) se satisface.
Por otra parte, como (B, β) es una (S, η, μ)-álgebra se tiene que $\beta \cdot S\beta = \beta \cdot \mu B$ y de

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T} \arrow[rr, "Z"] \arrow[dd, "D"'] \arrow[dr, "Y"] & \arrow[d, phantom, "k \Downarrow"] & \mathbf{C} \arrow[dd, "S"] \\
\arrow[r, phantom, "h \Downarrow"] & \mathbf{C} \arrow[ur, "S"'] \arrow[dr, "S"] \arrow[r, phantom, "\mu \Downarrow"] \arrow[d, phantom, "\beta \Downarrow"] & {} \\
\mathbf{X} \arrow[ur, "B"] \arrow[rr, "B"'] & {} & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

hallamos que $\beta D \cdot \mu BD \cdot SSh \cdot Sk = \beta D \cdot Sh \cdot \mu Y \cdot Sk$. Por lo anterior

$$(h^{\mathbb{B}} \cdot k)^{\mathbb{B}} = \beta B \cdot S\beta D \cdot SSh \cdot Sk = \beta D \cdot \mu BD \cdot SSh \cdot Sk$$
$$= \beta D \cdot Sh \cdot \mu Y \cdot Sk = h^{\mathbb{B}} \cdot k^{\mathbb{S}}.$$

De manera que (9) se cumple.
Si $p : (B, \beta) \to (A, \alpha)$ es homomorfismo de (S, η, μ)-álgebras, no es difícil ver que éste induce un $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$-homomorfismo. $\square$

Convenimos en no distinguir entre mónadas y sistemas de extensión. Si $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}})$ y (S, η, μ) se corresponden, escribimos $(S, \eta, (-)^{\mathbb{S}}) = \mathbb{S} = (S, \eta, \mu)$ y libremente usamos las ecuaciones relacionadas con ambas.

Sea $\mathcal{K}$ una 2-categoría. Recordemos, a partir de **[23]** , que un objeto de la 2-categoría $\mathrm{Mnd}(\mathcal{K})$ consiste de un par $(\mathbf{C}, \mathbb{S})$ donde $\mathbf{C}$ es un objeto de $\mathcal{K}$ y $\mathbb{S}$ es una mónada sobre $\mathbf{C}$. Una 1-celda de $(\mathbf{D}, \mathbb{T})$ a $(\mathbf{C}, \mathbb{S})$ consiste de una 1-celda $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ y una 2-celda $\lambda : SF \Rightarrow FT$ en $\mathcal{K}$ tal que los diagramas

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\eta_S F"'] \arrow[dr, "F\eta_T"] & \\ SF \arrow[rr, "\lambda"'] & & FT \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S^2F \arrow[r, "S\lambda"] \arrow[d, "\mu_S F"'] & SFT \arrow[r, "\lambda T"] & FT^2 \arrow[d, "F\mu_T"] \\ SF \arrow[rr, "\lambda"'] & & FT \end{tikzcd}$$

conmutan, y una 2-celda $(F, \lambda) \Rightarrow (F', \lambda') : (\mathbf{D}, \mathbb{T}) \to (\mathbf{C}, \mathbb{S})$ consiste de una 2-celda $\varphi : F \Rightarrow F'$ en $\mathcal{K}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} SF \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "S\varphi"'] & FT \arrow[d, "\varphi T"] \\ SF' \arrow[r, "\lambda'"'] & F'T \end{tikzcd}$$

conmuta.
En el espíritu de la Proposición 3.4 en **[15]**, tenemos el siguiente lema.

LEMA 2.7. *Dado $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, hay una biyección entre las 2-celdas $\lambda : SF \to FT$ tales que $(F, \lambda) : (\mathbf{D}, \mathbb{T}) \to (\mathbf{C}, \mathbb{S})$ es una 1-celda en $Mnd(\mathcal{K})$ y las 2-celdas $\alpha : SFT \to FT$ tales que (FT, α) es una $\mathbb{S}$-álgebra y satisface la ecuación*

$$\begin{tikzcd} SFT^2 \arrow[r, "\alpha T"] \arrow[d, "SF\mu_T"'] & FT^2 \arrow[d, "F\mu_T"] \\ SFT \arrow[r, "\alpha"'] & FT. \end{tikzcd}$$

Además, si bajo la biyección λ y α se corresponden, dado $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ y si λ' y α' se corresponden dado $F' : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, entonces una 2-celda $\varphi : F \to F'$ da una 2-celda $\varphi : (F, \lambda) \to (F', \lambda')$ de $Mnd(\mathcal{K})$ si y sólo si $\varphi T : FT \to F'T$ es un $\mathbb{S}$-homomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Si comenzamos con α, entonces $\lambda = \alpha \cdot SF\eta_T$. En dirección opuesta, dada λ, definimos $\alpha = F\mu_T \cdot \lambda T$. $\square$

TEOREMA 2.8. *Sea $\mathbb{T} = (T, \eta_T, (-)^{\mathbb{T}})$ una mónada sobre $\mathbf{D}$, y sea $\mathbb{S} = (S, \eta_S, (-)^{\mathbb{S}})$ una mónada sobre $\mathbf{C}$. Una 1-celda en $Mnd(\mathcal{K})$ de $(\mathbf{D}, \mathbb{T})$ a $(\mathbf{C}, \mathbb{S})$ puede equivalentemente estar definida como sigue: $(F, (-)^{\lambda}) : (\mathbf{D}, \mathbb{T}) \to (\mathbf{C}, \mathbb{S})$ donde $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, y $(FT, (-)^{\lambda})$ es una $\mathbb{S}$-álgebra, tal que para cada $u : U \to TV : \mathbf{X} \to \mathbf{D}$ y $h : X \to FTU : \mathbf{X} \to \mathbf{C}$, el diagrama*

(11)
$$\begin{tikzcd} SX \arrow[r, "h^{\lambda}"] \arrow[dr, "(Fu^{\mathbb{T}}.h)^{\lambda}"'] & FTU \arrow[d, "Fu^{\mathbb{T}}"] \\ & FTV \end{tikzcd}$$

conmuta.
Por lo tanto, dadas $(F,(-)^\lambda),(F',(-)^{\lambda'}) : (\mathbf{D},\mathbb{T}) \to (\mathbf{C},\mathbb{S})$, *entonces* $\varphi : F \to F'$ *es una 2-celda en Mnd(*$\mathcal{K}$*) si y sólo si* $\varphi T : (FT,(-)^\lambda) \to (F'T,(-)^{\lambda'})$ *es un morfismo de* $\mathbb{S}$*-álgebras.*

Demostración. Consultar [**17**]. □

Recordamos la caracterización de leyes distributivas dada en la Proposición 3.5 de [**15**].

Teorema 2.9. *Dadas mónadas* $\mathbb{T}$ *y* $\mathbb{S}$ *sobre* $\mathbf{C}$ *en una 2-categoría* $\mathcal{K}$*, hay una correspondencia biyectiva entre las leyes distributivas* $\lambda : ST \to TS$ *de* $\mathbb{S}$ *sobre* $\mathbb{T}$ *y las* $\mathbb{S}$*-álgebras* $\alpha : STS \to TS$ *que satifacen la conmutatividad de los diagramas*

$$\begin{tikzcd} STS^2 \arrow[r, "ST\mu_S"] \arrow[d, "\alpha S"'] & STS \arrow[d, "\alpha"] \\ TS^2 \arrow[r, "T\mu_S"'] & TS \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "S\eta_T S"] \arrow[d, "\mu_S"'] & STS \arrow[d, "\alpha"] \\ S \arrow[r, "\eta_T S"'] & TS \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} ST^2S \arrow[r, "ST\eta_S TS"] \arrow[dd, "S\mu_T S"'] & STSTS \arrow[r, "\alpha TS"] & TSTS \arrow[d, "T\alpha"] \\ & & T^2S \arrow[d, "\mu_T S"] \\ STS \arrow[rr, "\alpha"'] & & TS \end{tikzcd}$$

dado por

$$\lambda \mapsto (STS \xrightarrow{\lambda S} TS^2 \xrightarrow{T\mu_S} TS)$$

con inversa

$$\alpha \mapsto (ST \xrightarrow{ST\eta_S} STS \xrightarrow{\alpha} TS).$$

Teorema 2.10. *Sean* $\mathbb{T} = (T, \eta_T, (-)^{\mathbb{T}})$ *y* $\mathbb{S} = (S, \eta_S, (-)^{\mathbb{S}})$ *mónadas sobre* $\mathbf{C}$*. Una ley distributiva de* $\mathbb{S}$ *sobre* $\mathbb{T}$ *puede equivalentemente estar dada como sigue. Una* $\mathbb{S}$*-álgebra* $(TS,(-)^\lambda)$*, tal que*

$$(T\eta_S \cdot \eta_T)^\lambda = \eta_T S, \tag{12}$$

y la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} SX \arrow[r, "h^\lambda"] \arrow[dr, "((r^\lambda)^T \cdot h)^\lambda"'] & TSU \arrow[d, "(r^\lambda)^T"] \\ & TSV, \end{tikzcd} \tag{13}$$

tiene lugar para cada $h : X \to TSU$ *y* $r : U \to TSV$*.*

Demostración. Supongamos que $(TS,(-)^\lambda)$ está dada con las propiedades iniciales. Mostramos primero que $(T,(-)^\lambda) : (\mathbf{C},\mathbb{S}) \to (\mathbf{C},\mathbb{S})$ es una 1-celda en $Mnd(\mathcal{K})$. En realidad, para $u : U \to SV$ tenemos

$$T(u^{\mathbb{S}}) = (\eta_T SV \cdot u^{\mathbb{S}})^{\mathbb{T}} = ((T\eta_S V \cdot \eta_T V)^\lambda \cdot u^{\mathbb{S}})^{\mathbb{T}} = (((T\eta_S V \cdot \eta_T V)^\lambda \cdot u)^\lambda)^{\mathbb{T}},$$

como consecuencia de (7), (12) y (9). En consecuencia $T(u^{\mathbb{S}}) \cdot h^\lambda = (((T\eta_S V \cdot \eta_T V)^\lambda \cdot u)^\lambda)^{\mathbb{T}} \cdot h^\lambda$. Luego, por (13), $T(u^{\mathbb{S}}) \cdot h^\lambda = [(((T\eta_S V \cdot \eta_T V)^\lambda \cdot u)^\lambda)^{\mathbb{T}} \cdot h]^\lambda$. Así $T(u^{\mathbb{S}}) \cdot h^\lambda = (T(u^{\mathbb{S}}) \cdot h)^\lambda$, por lo tanto se cumple (11). Para la correspondiente 2-celda $\alpha = (1_{TS})^\lambda$, por el Teorema 2.8, (TS, α) es una $\mathbb{S}$-álgebra y α satisface la primera ecuación en el Teorema 2.9.
Para la segunda igualdad del Teorema 2.9 tomamos en cuenta que:
$(TS,(-)^\lambda)$ es una $\mathbb{S}$-álgebra $\Rightarrow$

$$\alpha \cdot S\eta_T S = (1_{TS})^{\lambda} \cdot (\eta_S TS \cdot \eta_T S)^{\mathbb{S}} = ((1_{TS})^{\lambda} \cdot \eta_S TS \cdot \eta_T S)^{\mathbb{S}} = (\eta_T S)^{\lambda}$$
$$= ((T\eta_S \cdot \eta_T)^{\lambda})^{\lambda} = (T\eta_S \cdot \eta_T)^{\lambda} \cdot (1_S)^{\mathbb{S}} = \eta_T S \cdot \mu_S.$$

La segunda igualdad se tiene por ser $(TS, (-)^{\lambda})$ $\mathbb{S}$-álgebra. La tercera y la quinta porque (TS, α) es $\mathbb{S}$-álgebra. La cuarta y la última se siguen de (12).
Finalmente, para la tercera igualdad del Teorema 2.9 tenemos:

$$\alpha \cdot S\mu_T S = (1_{TS})^{\lambda} \cdot (\eta_S TS \cdot \mu_T S)^{\mathbb{S}} = ((1_{TS})^{\lambda} \cdot \eta_S TS \cdot \mu_T S)^{\lambda} = (\mu_T S)^{\lambda} = (1_{TS}{}^{\mathbb{T}})^{\lambda}$$
$$= (((1_{TS})^{\lambda} \cdot \eta_S TS)^{\mathbb{T}})^{\lambda} = ((((1_{TS})^{\lambda})^{\mathbb{T}} \cdot \eta_T STS \cdot \eta_S TS)^{\mathbb{T}})^{\lambda}$$
$$= (((1_{TS})^{\lambda})^{\mathbb{T}} \cdot (\eta_T STS \cdot \eta_S TS)^{\mathbb{T}})^{\lambda} = (((1_{TS})^{\lambda})^{\mathbb{T}} \cdot T\eta_S TS)^{\lambda}.$$

La primera igualdad es cierta por ser $(-)^{\mathbb{S}}$ operador. La segunda porque $(TS, (-)^{\lambda})$ es $\mathbb{S}$-álgebra. (TS, α) como una $\mathbb{S}$-álgebra nos da la tercera y la quinta. La penúltima y la última se dan por ser $(T, \eta_T, (-)^{\mathbb{T}})$ sistema de extensión.
Además, como:

$$(((1_{TS})^{\lambda})^{\mathbb{T}} \cdot T\eta_S TS)^{\lambda} = ((((1_{TS})^{\lambda})^{\mathbb{T}})^{\lambda} \cdot \eta_S TSTS \cdot T\eta_S TS)^{\lambda}$$
$$= ((((1_{TS})^{\lambda})^{\mathbb{T}})^{\lambda} \cdot (\eta_S TSTS \cdot T\eta_S TS)^{\mathbb{S}} = ((((1_{TS})^{\lambda})^{\mathbb{T}})^{\lambda} \cdot ST\eta_S TS$$
$$= ((1_{FT})^{\lambda})^{\mathbb{T}} \cdot (1_{TSTS})^{\lambda} \cdot ST\eta_S TS = \alpha^{\mathbb{T}} \cdot \alpha TS \cdot ST\eta_S TS$$
$$= (1_{TS}{}^{\mathbb{T}} \cdot \eta_T TS \cdot \alpha)^{\mathbb{T}} \cdot \alpha TS \cdot ST\eta_S TS = 1_{TS}{}^{\mathbb{T}} \cdot (\eta_T TS \cdot \alpha)^{\mathbb{T}} \cdot \alpha TS \cdot ST\eta_S TS$$
$$= \mu_T S \cdot T\alpha \cdot \alpha TS \cdot ST\eta_S TS.$$

La primera igualdad es consecuencia de (6) y porque (TS, α) es una $\mathbb{S}$-álgebra. Dos, se sigue porque $(TS, (-)^{\lambda})$ es $\mathbb{S}$-álgebra. La tercera, porque $(-)^{\mathbb{S}}$ es operador. De (13), obtenemos la cuarta. La quinta igualdad es cierta por ser $(-)^{\lambda}$ operador. Seis y siete se deducen de que $(T, \eta_T, (-)^{\mathbb{T}})$ es mónada. Por último, la octava igualdad se desprende de que $(-)^{\mathbb{T}}$ es un operador.

Supongamos ahora que tenemos una $\mathbb{S}$-álgebra $\alpha : STS \Rightarrow TS$ que satisface las condiciones de Teorema 2.9. Su correspondiente operador pegamiento en $h : X \to TSU$, según Teorema 2.6 y Teorema 2.8, está dado por

$$SX \xrightarrow{Sh} STSU \xrightarrow{\alpha U} TSU,$$

y nos da una 1-celda $(T, (-)^{\lambda}) : (\mathbf{C}, \mathbb{S}) \to (\mathbf{C}, \mathbb{S})$. De manera que

$$(T\eta_S \cdot \eta_T)^{\lambda} = \alpha \cdot ST\eta_S \cdot S\eta_T = \alpha \cdot S\eta_T S \cdot S\eta_S = \eta_T S \cdot \mu_S \cdot S\eta_S = \eta_T S,$$

la segunda igualdad se debe a la Definición 1.10 (iv), la tercera se tiene por hipótesis y la última por ser $(\mathbf{C}, \mathbb{S})$ una mónada.
Por otro lado, para $h : X \to TSU$ y $r : U \to TSV$, se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
STSU \arrow[rrr, "\alpha U"] \arrow[d, "STSr"'] \arrow[dr, phantom, "(a)"] & & & TSU \arrow[dd, "TSr"] \\
 & TSTSV \arrow[drr, "\alpha TSV"] & & \\
STSTSV \arrow[ur, "1_{STSTSV}"] \arrow[r, "ST\eta_S STSV"'] & STS^2TSV \arrow[u, "ST\mu_S TSV"'] \arrow[r, "\alpha STSV"'] & TS^2TSV \arrow[r, "T\mu_S TSV"'] \arrow[ul, phantom, "(b)"] \arrow[u, phantom, "(c)"] & TSTSV
\end{tikzcd}$$

la conmutatividad de (a) se debe a la Definición 1.10, (b) conmuta por que $(\mathbf{C}, \mathbb{S})$ es una mónada y (c) conmuta por hipótesis. Por otro lado,

$$\begin{tikzcd}
STSTSV \arrow[r, "ST\eta_S STSV"] \arrow[d, "ST\alpha V"'] \arrow[dr, phantom, "(d)"] & STS^2TSV \arrow[r, "\alpha STSV"] \arrow[d, "STS\alpha V"'] \arrow[dr, phantom, "(e)"] & TS^2TSV \arrow[r, "T\mu_S TSV"] \arrow[d, "TS\alpha V"'] \arrow[dr, phantom, "(f)"] & TSTSV \arrow[d, "T\alpha V"] \\
ST^2SV \arrow[r, "ST\eta_S TSV"'] \arrow[d, "S\mu_T SV"'] & STSTSV \arrow[r, "\alpha TSV"'] \arrow[d, phantom, "(g)"] & TSTSV \arrow[r, "T\alpha V"'] & T^2SV \arrow[d, "\mu_T SV"] \\
STSV \arrow[rrr, "\alpha V"'] & & & TSV
\end{tikzcd}$$

(d) y (e) se siguen de la naturalidad interna de la 2-categoría, como (TS, α) es una $\mathbb{S}$-álgebra implica que (f) sea conmutativo y por hipótesis (g) conmuta.
La conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
SX \arrow[r, "Sh"] \arrow[dd, "S((r^{\lambda})^{\mathbb{T}} \cdot h)"'] & STSU \arrow[d, "STSr"] \\
& STSTSV \arrow[d, "ST\alpha V"] \\
STSV & ST^2SV \arrow[l, "S\mu_T SV"]
\end{tikzcd}$$

se desprende de la definición de los operadores $(-)^{\mathbb{T}}$, $(-)^{\lambda}$.
Los tres diagramas anteriores muestran que $(r^{\lambda})^{\mathbb{T}} \cdot h^{\lambda} = ((r^{\lambda})^{\mathbb{T}} \cdot h)^{\lambda}$. □

A lo que hemos estado llamando sistemas de extensión fueron descritos por primera vez por E. Manes como una definición alternativa para mónadas en [**11**]. El procedimiento hecho por E. Manes en categorías clásicas es análogo al correspondiente para 2-categorías, de aquí que muchas demostraciones sean similares. A continuación se dan afirmaciones para este importante caso particular.

Mencionamos el Ejercicio 1.3.12, página 32 de [**11**]:

TEOREMA 2.11. *Una mónada $\mathbb{S}$ sobre una categoría $\mathbf{C}$ puede estar definida de manera equivalente como: Una función $|S| : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{C}|$, un morfismo $\eta A : A \to SA$, y para cada morfismo $f : B \to SA$ en $\mathbf{C}$, una $\mathbb{S}$-extensión $f^{\mathbb{S}} : SB \to SA$ sujeta a los axiomas: para cada A en $\mathbf{C}$,*

$$(\eta A)^{\mathbb{S}} = 1_{SA},$$

para cada $f : B \to SA$ y $g : C \to SB$, los diagramas

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta B"] \arrow[dr, "f"'] & SB \arrow[d, "f^{\mathbb{S}}"] & SC \arrow[r, "g^{\mathbb{S}}"] \arrow[dr, "(f^{\mathbb{S}} \cdot g)^{\mathbb{S}}"'] & SB \arrow[d, "f^{\mathbb{S}}"] \\
& SA & & SA
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Recordar que para $\ell : B \to A$, podemos definir S sobre ℓ por la fórmula $S\ell = (\eta A \cdot \ell)^{\mathbb{S}}$, de esta forma $S : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es un funtor y $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to S$ una transformación natural. La definición de μA está dada por $\mu A = (1_{SA})^{\mathbb{S}}$.

TEOREMA 2.12. *Dada una mónada* $\mathbb{S} = (S, \eta_S, (-)^{\mathbb{S}})$ *sobre la categoría* $\mathbf{C}$*, una* $\mathbb{S}$*-álgebra puede ser definida como sigue:* $\mathbb{B} = (B, (-)^{\mathbb{B}})$*, donde* B *es un objeto de* $\mathbf{C}$*, y* $(-)^{\mathbb{B}}$ *asigna a cada flecha de la forma* $h : X \to B$ *en* $\mathbf{C}$*, una extensión* $h^{\mathbb{B}} : SX \to B$ *sujeta a la conmutatividad de los siguientes diagramas (con* $h : X \to B$ *y* $y : Y \to SX$*):*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta X"] \arrow[dr, "h"'] & SX \arrow[d, "h^{\mathbb{B}}"] \\ & B, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} SY \arrow[r, "y^{\mathbb{S}}"] \arrow[dr, "(h^{\mathbb{B}} \cdot y)^{\mathbb{B}}"'] & SX \arrow[d, "h^{\mathbb{B}}"] \\ & B. \end{tikzcd}$$

Un morfismo de $\mathbb{S}$*-álgebras de* $(B, (-)^{\mathbb{B}})$ *a* $(A, (-)^{\mathbb{A}})$ *puede definirse como una flecha* $\ell : B \to A$ *en* $\mathbf{C}$ *sujeta a la conmutatividad del diagrama (donde* $h : X \to B$*):*

$$\begin{tikzcd} SX \arrow[r, "h^{\mathbb{B}}"] \arrow[dr, "(\ell . h)^{\mathbb{A}}"'] & B \arrow[d, "\ell"] \\ & A. \end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN. Dada $(B, (-)^{\mathbb{B}})$ definimos la acción por $(1_B)^{\mathbb{B}}) : SB \to B$. Por otra parte, dada una $\mathbb{S}$-álgebra (B, β) y $h : X \to B$ en $\mathbf{C}$, definimos $h^{\mathbb{B}} = \beta \cdot Sh$. $\square$

TEOREMA 2.13. *Sean* $\mathbb{S} = (S, \eta_S, (-)^{\mathbb{S}})$ *y* $\mathbb{T} = (T, \eta_T, (-)^{\mathbb{T}}$ *mónadas sobre la categoría* $\mathbf{C}$*. Una ley distributiva de* $\mathbb{S}$ *sobre* $\mathbb{T}$ *puede estar definida como sigue. Para cada* A *en* $\mathbf{C}$ *una* $\mathbb{S}$*-álgebra* $(TSA, (-)^{\lambda})$ *tal que para cada* A *en* $\mathbf{C}$*,* $(T\eta_S A \cdot \eta_T A)^{\lambda} = \eta_T SA$*, y para cada* $f : B \to TSA$*,* $(f^{\lambda})^{\mathbb{T}} : (TSB, (-)^{\lambda}) \to (TSA, (-)^{\lambda})$ *es un morfismo de* $\mathbb{S}$*-álgebras.*

Capítulo 3

Categorías en Computación

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este capítulo es dar un panorama del uso y significado de leyes distributivas en computación, enfocado al estudio de sistemas que combinan probablilidad y no determinismo en semántica como en [**25**], la cual es nuestra principal referencia. A grandes rasgos damos una descripción de la rama de la computación en que trabajamos. Definimos la mónada de valuaciones indexadas en la categoría **Con**. Mostramos la existencia de una ley distributiva entre la mónada de valuaciones indexadas y la mónada conjunto potencia de subconjuntos finitos no vacíos desde el enfoque de los sistemas de extensión como en [**17**]. Caracterizamos a las valuaciones indexadas como una construcción libre y mostramos que la ley distributiva categórica corresponde a una ley distributiva ecuacional.

El no determinismo es modelado en teoría de dominios por la noción de dominio potencia, mientras la probabilidad es modelada por la noción de dominio potencia probabilístico. Algunos problemas surgen cuando queremos combinarlos en modelos de computación en el que ambos están presentes. En particular no hay ley distributiva categórica entre ellos. La noción de dominio potencia de valuaciones indexadas, modificación del usual dominio potencia probabilístico, permite tomar un informe más detallado de donde elecciones al azar han sido realizadas. Se muestra la existencia de una ley distributiva entre dominio potencia de valuaciones indexadas y el dominio potencia no determinístico. Por medio de una teoría ecuacional damos una caracterización alternativa de las valuaciones indexadas y la ley distributiva.

La semántica es el arte de dar a los programas de cómputo significado matemático. Entre los diferentes modelos semánticos, es costumbre hacer distinción entre modelos operacionales y modelos denotacionales. Los modelos operacionales tienden a construir sobre alguna noción abstracta en cómputo, mientras que los modelos denotacionales utilizan contextos matemáticos.

El no determinismo es un importante concepto semántico. Cuando modelamos un programa usando no determinismo, queremos modelar el hecho de que el programa puede realizar diferentes acciones, sin conocimiento alguno sobre la acción que actualmente se realiza.

La mayor parte de sistemas de transición etiquetados usan no determinismo para modelar concurrencia. Un cómputo es una sucesión lineal de eventos. Cuando dos eventos son concurrentes, ellos pueden suceder en algún orden no determinístico. Eventos estructurales en cambio dan una noción no lineal de cómputo. Tales modelos son llamados modelos causales porque el orden en que dos eventos suceden depende hasta ese momento de que haya alguna relación de causa entre ellos.

Hay varios tipos posibles de no determinismo.

- Un sistema no determinístico puede mostrar comportamientos diferentes y a veces simplemente tiene que considerar todas las posibilidades.

- Si consideramos las varias posibilidades como un menú a partir del cual podemos elegir la acción de nuestra preferencia, podemos ignorar malos ambientes.
- Si la elección no está bajo nuestro control pero esto es posible por algún agente externo, usualmente imaginamos esto como una posibilidad maliciosa, y consideramos solamente los peores casos.

La noción de dominio potencia fue introducida para modelar el no determinismo en teoría de dominios. Los tres diferentes tipos de no determinismo anteriores corresponden a tres diferentes nociones de dominio potencia, de Plotkin [**19**], de Hoare [**27**] y el dominio potencia de Smyth [**22**] respectivamente.

DEFINICIÓN 3.1. *Una signatura* Σ *es un par* (Ω, α) *donde* Ω *es un conjunto de símbolos de operaciones y* $\alpha : \Omega \to \mathbb{N}$ *asigna a cada símbolo su aridad.*
Sea F^{Σ}:***Con***$\to$***Con*** *el funtor tal que:*

$$Y \mapsto \uplus_{f\in\Omega} Y^{\alpha(f)}$$
$$g : Y \to Z \mapsto F^{\Sigma}(g),$$

donde $F^{\Sigma}(g)$ *está definida como:*

$$F^{\Sigma}(g)(y_1, \cdots, y_{\alpha(h)}) = (g(y_1), \cdots, g(y_{\alpha(h)})).$$

Para cada símbolo operación f*, la* f*-ésima componente de* k *es la función* $f_k : Y^{\alpha(f)} \to Y$*. Una* Σ*-álgebra absoluta para* Σ *es un álgebra* k *para el funtor* F^{Σ}*. Morfismos de* Σ*-álgebras son funciones que respetan operaciones. Es decir, si* h *es morfismo de* Σ*-álgebras entonces*

$$h(f_k(y_1, \cdots, y_{\alpha(h)})) = f_k(h(y_1), \cdots, h(y_{\alpha(f)})).$$

Sea X un conjunto. Definimos el funtor F^{σ}:**Con**$\to$**Con** tal que:

$$Y \mapsto F^{\Sigma}(Y) \uplus X$$
$$g : Y \to Z \mapsto F^{\sigma}(g),$$

donde $F^{\sigma}(g)$ está definida como:

$$F^{\sigma}(g)(y_1, \cdots, y_{\alpha(h)}) = F^{\Sigma}(g)(y_1, \cdots, y_{\alpha(h)})$$

si $(y_1, \cdots, y_{\alpha(h)}) \in Y^{\alpha(h)}$. Si $x \in X$ tenemos que

$$F^{\sigma}(g)(x) = x.$$

Su álgebra inicial existe y T(X) es el conjunto de términos sobre X. Ser objeto inicial quiere decir que si (Y, h) es una Σ-álgebra, entonces cada función $j : X \to Y$ puede extenderse de forma única a un Σ-morfismo $j^{\sharp} : T(X) \to Y$.
Los términos pueden describirse inductivamente de la manera usual:

- si $x \in X$ entonces x es un término;
- si $t_1, \cdots, t_n$ son términos, $f \in \Omega$ y $\alpha(f) = n$ entonces $f(t_1, \cdots, t_n)$ es un término.

Sea V un conjunto fijo de variables. Una teoría ecuacional es un conjunto de pares ordenados $E \subset T(V) \times T(V)$. Cada par de términos (t_1, t_2) es interpretado como una ecuación $t_1 = t_2$. Si (Y, k) es una σ-álgebra, y si $j : V \to Y$ es una función, tenemos la extensión $j^{\sharp} : T(V) \to Y$. Una Σ-álgebra (Y, k) satisface una teoría ecuacional E si para cada ecuación $(t_1, t_2) \in E$ y cada $j : V \to Y$, $j^{\sharp}(t_1) = j^{\sharp}(t_1)$. Tales álgebras son llamadas (Σ, E)-álgebras. La categoría de (Σ, E)-álgebras es denotada por $\mathbf{Con}(\Sigma, E)$, o $\mathbf{Con}(\Sigma)$, si E es vacío.

DOMINIOS POTENCIA NO DETERMINÍSTICOS

Consideramos la siguiente teoría ecuacional sobre la signatura $(\{\uplus\}, \alpha)$, donde $\alpha(\uplus) = 2$. Llamamos a la operación representante por $\uplus$ unión formal.

- $A \uplus B = B \uplus A$;

- $A \uplus (B \uplus C) = (A \uplus B) \uplus C$;
- $A \uplus A = A$.

Dado que $\uplus$ es una operación asociativa y conmutativa, introducimos la siguiente convención. Si X es un conjunto donde $\uplus$ está definida, y $(x_i)_{i\in I}$ es una familia finita de elementos de X, escribimos $\uplus x_{i\in I}$ para denotar la unión formal de todas las x_i´s.
Un módelo para la teoría anterior es una semi-retícula. La categoría de semi-retículas es denotada por **SRet**. Es sabido que el funtor semi-retícula libre puede representarse concretamente como el funtor conjunto potencia de subconjuntos finitos no vacíos $P : \mathbf{Con} \to \mathbf{SRet}$ donde el símbolo $\uplus$ es interpretado como la unión. Si X es un conjunto, Z una semi-retícula y $f : X \to Z$ es una función, la única extensión $\bar{f} : P(X) \to Z$ está definida por

$$\bar{f}(Y) = \biguplus_{y\in Y} f(y). \tag{14}$$

La correspondiente mónada $P : \mathbf{Con} \to \mathbf{Con}$ tiene la siguiente unidad y multiplicación

$$\eta_X^P(x) = \{x\}; \quad \mu_X^P(S) = \bigcup S.$$

TOPOLOGÍA

Un espacio topológico es una pareja (X, τ), donde $\tau \subset P(X)$ es una familia de subconjuntos de X que satisface

- $\varnothing, X \in \tau$;
- si $F \subset \tau$ entonces $\cup F \in \tau$;
- si $O_1, O_2 \in \tau$ entonces $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

Decimos que la familia τ es una topología sobre X. Los elementos de τ son llamados abiertos. Si O es abierto, entonces $X\backslash O$ es llamado cerrado. Una familia $B \subset P(X)$ es base de la topología τ si para cada $O \in \tau$ existe $C \subset B$ tal que $O = \cup C$. El conjunto potencia $P(X)$ es un ejemplo de topología sobre X, la cual es llamada la topología discreta.

VALUACIONES SOBRE UNA RETICULA.

Definición 3.2. *Una retícula es una álgebra para la siguiente teoría en la categoría de conjuntos parcialmente ordenados.*

- $A \uplus B = B \uplus A$;
- $A \uplus (B \uplus C) = (A \uplus B) \uplus C$;
- $A \uplus A = A$;
- $A \sqsubseteq A \uplus B$;
- $A \sqcap B = B \sqcap A$;
- $A \sqcap (B \sqcap C) = (A \sqcap B) \sqcap A$;
- $A \sqcap A = A$;
- $A \sqcap B \sqsubseteq A$.

Una retícula es distributiva si

$$(A \uplus B) \sqcap C = (A \sqcap C) \uplus (B \sqcap C).$$

Para este trabajo $\overline{\mathbb{R}^+}$ denota el conjunto de los números reales positivos, cero e infininito con el orden usual.

Definición 3.3. *Una valuación sobre una retícula X con mínimo $\perp$ es una función $\nu : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ tal que*

- $\nu(\perp) = 0$.
- *Monotonía:* $A \sqsubseteq B \Rightarrow \nu(A) \leq \nu(B)$.
- *Modularidad:* $\nu(A) + \nu(B) = \nu(A \uplus B) + \nu(A \sqcap B)$.

VALUACIONES CONTINUAS SOBRE UNA TOPOLOGÍA

Los conjuntos abiertos de un espacio topológico forman una retícula distributiva con mínimo.

DEFINICIÓN 3.4. *Una valuación contínua sobre un espacio topólogico* (X, τ) *es una valuación sobre* τ *que satisface:*

- *Continuidad: Cuando* $\mathcal{J}$ *es un subconjunto dirigido de* $(\tau, \subseteq)$,
$$\nu(\bigcup \mathcal{J}) = sup_{U \in \mathcal{J}} \nu(U).$$

Usamos letras griegas ν, ξ para denotar valuaciones continuas. Dos operaciones de suma y producto escalar de valuaciones son definidas puntualmente:

$$(\nu \oplus \xi)(O) = \nu(O) + \xi(O);$$
$$(p\nu)(O) = p(\nu(O)), p \in [0, +\infty].$$

Para cada $x \in X$, la función η_x tal que

$$\eta_x(U) = 1$$

si $x \in U$, o bien

$$\eta_x(U) = 0$$

en caso contrario, es una valuación continua y es llamada valuación puntual o delta de Dirac. Una valuación *simple* es una combinación lineal de valuaciones puntuales, es decir

$$\bigoplus_{x \in Y} p_x \eta_x$$

para algún $Y \subseteq_{fin} X$.

VALUACIONES DISCRETAS

Las valuaciones continuas sobre la topología discreta requieren tratamiento aparte.

DEFINICIÓN 3.5. *Una valuación discreta sobre un conjunto* X *es una función* $\nu : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$.

Una valuación discreta determina una única valuación contínua sobre la topología discreta definida como

$$\nu[Y] = \Sigma_{y \in Y} \nu(y).$$

El *soporte* de una valuación discreta ν sobre X es el conjunto

$$Sopt(\nu) = \{x \in X | \nu(x) > 0\}$$

El conjunto de valuaciones sobre X es denotado por $V_\infty(X)$.
Las valuaciones discretas que toman valores en $[0, +\infty]$ son llamadas *valuaciones con masa.* Una *valuación finita* es una valuación con masa cuyo soporte es finito.

VALUACIONES COMO CONSTRUCCIÓN LIBRE

Podemos carecterizar a las valuaciones finitas como un álgebra libre para una teoría ecuacional adecuada.

DEFINICIÓN 3.6. *Un cono real es un álgebra para la siguiente teoría en la categoría* ***Con***.

1. $A \oplus B = B \oplus A$;

2. $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$;
3. $A \oplus \underline{0} = A$;
4. $0A = \underline{0}$;
5. $1A = A$;
6. $p(A \oplus B) = pA \oplus pB \;\; p \in \mathbb{R}^+$;
7. $p(qA) = (pq)A \;\; p, q \in \mathbb{R}^+$;
13. $(p+q)A = pA \oplus qA \;\; p, q \in \mathbb{R}^+$.

Llamamos **RCO** a la categoría de conos reales y homomorfismos.
Si X es un conjunto, al conjunto de valuaciones finitas (denotado $V(X)$) las podemos dotar de una estructura de cono real, las operaciones son definidas puntualmente:

$$(p\nu)(x) = p\nu(x);$$
$$(\nu \oplus \xi)(x) = \nu(x) + \xi(x).$$

Se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 3.7. *Las valuaciones finitas son el cono real libre.*

Remitimos al lector a [**25**].

Hay varias maneras de combinar dos mónadas. Si las mónadas surgen de teorías ecuacionales, podemos primero combinar las teorías ecuacionales de alguna manera y entonces generar una nueva mónada. En [**25**] tres formas de combinar teorías están identificadas: suma, combinación conmutativa, combinación distributiva. En esta última, uno agrega ecuaciones que expresan distributividad de cada operación de una teoría sobre cada operación en la otra teoría. Esta forma puede algunas veces obtenerse categóricamente usando la noción de ley distributiva. Un ejemplo está dado por la teoría de grupos abelianos y la teoría de monoides. Su combinación distributiva es la teoría de anillos. La mónada anillo libre puede también obtenerse si damos una ley distributiva categórica entre la mónada grupo abeliano libre y la mónada monoide libre.
El estudio de semánticas operacionales de sistemas combinando probabilidad y no determinismo sugiere que, en algunos casos la probabilidad debería distribuirse sobre el no determinismo. Pero no hay ley distributiva categórica entre la mónada no determinística y la mónada probabilística. Dos soluciones son posibles en este punto.
Podemos hacer la combinación distributiva de las teorías ecuacionales y generar una nueva mónada. Este es el camino seguido por Tix y Mislove [**25**], quienes, independientemente, definen la noción de dominio potencia geométricamente convexo $\mathcal{P}_{TM}$.
Otra posibilidad es modificar la definición de una de las mónadas para admitir la existencia de una ley distributiva categórica. Analizando las razones por las que no existe tal ley distributiva, nos adelantamos a modificar la mónada probababilística, definiendo la noción de valuación indexada. Matemáticamente, las valuaciones indexadas surgen como una álgebra libre para una teoría ecuacional obtenida apartir de la teoría de conos reales removiendo una ecuación.
Supongamos que $\oplus_p$ es un operador de elección probabilística: $A \oplus_p B$ es elegir A con probabilidad p y B con probabilidad $(1-p)$. Este operador usualmente satisface $A \oplus_p A = A$, porque la elección entre dos posibilidades equivalentes es considerada igual a no hacer alguna elección entre todas. Note que esto supone que el acto de hacer la elección es invisible. Supongamos también que $\uplus$ representa alguna especie de operador elección no determinístico: $A \uplus B$ propone al ambiente la elección entre A y B. Distribuimos un operador sobre el otro mediante la siguiente ley:

$$A \oplus_p (B \uplus C) = (A \oplus_p B) \uplus (A \oplus_p C).$$

Intuitivamente esto significa que es indiferente cuando el medioambiente elige antes o después de que la elección probabilística ha sido hecha. Claramente esto no es cierto en todas las situaciones, pero si suponemos que el ambiente no puede ver la elección probabilística, esto último es plausible.
Una vez aceptada la ley distributiva, entonces la ley extra de convexidad

$$A \uplus B = A \uplus B \uplus (A \oplus_p B) \uplus (B \oplus_p A)$$

debe también aceptarse, porque

$$A \uplus B = (A \uplus B) \oplus_p (A \uplus B) = (A \oplus_p A) \uplus (B \oplus_p B) \uplus (A \oplus_p B) \uplus (B \oplus_p A).$$

Si la ley distributiva ecuacional corresponde a la ley distributiva categórica, por el Teorema 1.5 la mónada no determinística debería levantarse a la categoría de álgebras para la mónada probabilística. En la categoría **Con** esto significa que la mónada conjunto potencia debería levantarse a la categoría de conos reales. La ley de convexidad sugiere que esto no es posible, en general los conjuntos no satisfacen esta propiedad. En realidad el siguiente teorema nos dice que la definición obvia de las operaciones para el conjunto potencia no satisfacen $A \oplus_p A = A$. Supongamos que tenemos una teoría ecuacional. Tomamos un módelo X para ésta. Podemos extender cada operación f de aridad n a los subconjuntos de X por

$$f(X_1, \cdots, X_n) = \{f(x_1, \cdots, x_n) | x_i \in X_i, i \in I_n\}.$$

TEOREMA 3.8. *Una condición necesaria y suficiente para que las operaciones definidas en $\mathcal{P}(X)$ satisfagan una ecuación de una teoría es que cada varible individual ocurra a lo más una vez en ambos lados de la ecuación.*

Vease [**25**].

La ecuación $A \oplus_p A = A$ no satisface tal condición. Esto no excluye la posibilidad de definir las operaciones de manera que se pueda obtener una ley distributiva. Sin embargo, si (P, η^P, μ^P) es la mónada conjunto potencia restringido a subconjuntos finitos no vacíos, y (V, η^V, μ^V) es la mónada valuación finita en la categoría **Con**, tenemos

PROPOSICIÓN 3.9. *No hay ley distributiva de V sobre P.*

DEMOSTRACIÓN. Consutar [**25**]. $\square$

La solución propuesta por Varacca consiste en modificar la definición de mónada probabilística removiendo la ley $A \oplus_p A = A$. En [**25**], la mónada probabilistica es generada por la teoría de conos reales. La elección probabilística está definida ahí por $A \oplus_p B = pA \oplus (1-p)B$. Se elimina la ecuación $pA \oplus qA = (p+q)A$ en la teoría de conos reales. En la categoría **Con**, la mónada libremente generada por la nueva teoría ecuacional es llamada mónada de valuaciones indexadas finitas IV.

VALUACIONES INDEXADAS EN LA CATEGORÍA DE CONJUNTOS

Presentamos la definición de mónada valuación indexada en la categoría de **Con** y mostramos la existencia de una ley distributiva categórica entre valuaciones indexadas y el conjunto potencia restringido a subconjuntos finitos no vacíos.

DEFINICIÓN 3.10. *Sea X un conjunto. Una valuación indexada discreta (VID) sobre X es un par (a, p) donde $a : I \to X$ es una función y p es una valuación discreta sobre I, para algún conjunto I.*

No es necesario que a sea inyectiva. El motivo principal de tal construcción es que queremos dividir la probabilidad de un elemento entre sus índices. Una posible interpretación es que los índices en I representan computación, mientras elementos de X representan observaciones.
Escribimos x_i para $a(i)$ y p_i para $p(i)$. Una valuación discreta $\xi = (a, p)$ también será denotada como $(x_i, p_i)_{i\in I}$. Llegado el momento utilizaremos letras griegas para a en (a, p): (ψ, p) y escribiremos ψ_i para $\psi(i)$. i.e. (ψ, p) será denotada como $(\psi_i, p_i)_{i\in I}$.
Definimos una relación de equivalencia sobre el conjunto de valuaciones indexadas. Esta será la cerredura transitiva de dos relaciones de equivalencia.

DEFINICIÓN 3.11. *Decimos $(a, p) = (x_i, p_i)_{i\in I} \sim_1 (b, q) = (y_j, q_j)_{j\in J}$ si y sólo si hay una biyección $h : I \to J$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "a"] & \\
(0,\infty) & J \arrow[l, "q"] \arrow[r, "b"'] & X
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Dada $(a, p) = (x_i, p_i)_{i\in I}$, sea $I_0 = \{i \in I | p_i = 0\}$.

DEFINICIÓN 3.12. *Decimos que $(a, p) = (x_i, p_i)_{i\in I} \sim_2 (b, q) = (y_j, q_j)_{j\in J}$ si y sólo si $I\backslash I_0 = J\backslash J_0$, $\forall i \in I\backslash I_0$ $x_i = y_i$ y $p_i = q_i$.*

DEFINICIÓN 3.13. *La relación de equivalencia en el conjunto de valuaciones indexadas discretas $\sim$ es la cerradura transitiva de $\sim_1 \cup \sim_2$.*

A partir de ahora utilizamos el término ¨valuación indexada discreta¨ para denotar clases de equivalencias bajo $\sim$.
Dado un conjunto X y un número cardinal infinito α definimos el conjunto $IV_\alpha(X)$ como:

$$IV_\alpha(X) = \{(x_i, p_i)_{i\in I} |\ \ |I| < \alpha\}/\sim.$$

En particular $IV_{\aleph_0}(X)$ es el conjunto de valuaciones indexadas discretas cuyo conjunto indexando es finito.

NOTA. Por comodidad incurrimos en el siguiente abuso de notación: $(x_i, p_i)_{i\in I}$ también denota al elemento $\overline{(x_i, p_i)}_{i\in I}$ de $IV_{\aleph_0}(X)$.

DEFINICIÓN 3.14. *Una valuación indexada finita $(x_i, p_i)_{i\in I}$ sobre X es un elemento de $IV_{\aleph_0}(X)$ para el que $p(i) < +\infty$ $\forall i \in I$. El conjunto de valuaciones indexadas finitas sobre X es denonotado por $IV(X)$.*

TEOREMA 3.15. *Las valuaciones indexadas definen una mónada $\mathbb{IV}$ sobre **Con**.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $f : Y \to \mathbb{IV}(X)$. Para cada $y \in Y$ denotamos el palmo $f(y)$ como

$$(0,\infty) \xleftarrow{r^y} K_y \xrightarrow{\chi^y} X.$$

Definimos $f^{\mathbb{IV}} : \mathbb{IV}(Y) \to \mathbb{IV}(\mathbb{X})$ sobre el palmo

$$(0,\infty) \xleftarrow{q} J \xrightarrow{\psi} Y$$

como el palmo

$$(0,\infty) \xleftarrow{r} \coprod_{j\in J} K_{\psi(j)} \xrightarrow{\chi} X,$$

donde r y χ son las únicas funciones tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) \arrow[d, "q(j)"'] & K_{\psi(j)} \arrow[l, "r^{\psi(j)}"'] \arrow[d, "inc_j"] \arrow[dr, "\chi^{\psi(j)}"] & \\
(0,\infty) & \coprod_{j\in J} K_{\psi(j)} \arrow[l, "r"'] \arrow[r, "\chi"'] & X
\end{tikzcd}$$

conmuta para cada $i \in I$. Así para cada $k \in K_{\psi(j)}$ tenemos $\chi(k) = \chi^{\psi(j)}(k)$ y $r(k) = q(j).r^{\psi(j)}(k)$ (multiplicamos por $q(j)$).
Veamos que $f^{\mathbb{IV}}$ está bien definida. Para esto, sean

$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) & J \arrow[l, "q"'] \arrow[r, "\psi"] & Y \\
(0,\infty) & I \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "\varphi"] & Y
\end{tikzcd}$$

palmos en $\mathbb{IV}(Y)$ tales que $(\psi_j, q_j)_{j\in J} \sim_2 (\varphi_i, p_i)_{i\in I}$. Por lo cual $J\backslash J_0 = I\backslash I_0$, $\forall j \in J\backslash J_0$ $\psi_j = \varphi_j$ y $q_j = p_j$. También

$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) \arrow[d, "p(i)"'] & K_{\varphi(i)} \arrow[l, "r^{\varphi(i)}"'] \arrow[d, "inc_i"] \arrow[dr, "\chi^{\varphi(i)}"] & \\
(0,\infty) & B = \coprod_{i\in I} K_{\varphi(i)} \arrow[l, "s"] \arrow[r, "\lambda"'] & X,
\end{tikzcd}$$

con $\lambda(k) = \chi^{\varphi(i)}(k)$ y $s(k) = p(i).r^{\varphi(i)}$para cada $k \in K_{\varphi(i)}$.
Sea $A = \coprod_{j\in J} K_{\psi(j)}$ entonces si $k \in A\backslash A_0 \Rightarrow r(k) \neq 0 \Rightarrow q(j).r^{\psi(j)}(k) \neq 0 \Rightarrow j \in J\backslash J_0 = I\backslash I_0 \Rightarrow q(j) = p(j)$ y $\psi(j) = \varphi(j) \Rightarrow f(\psi(j)) = f(\varphi(j))$. Por ello $k \in K_{\varphi(j)}$ y $s(k) = p(j).r^{\varphi(j)}(k) = q(j).r^{\psi(j)}(k) \neq 0 \Rightarrow k \in B\backslash B_0$. Concluimos que $A\backslash A_0 \subseteq B\backslash B_0$. De modo similar $B\backslash B_0 \subseteq A\backslash A_0$.
Por el anterior párrafo, también se cumple $\forall k \in A\backslash A_0$ $r(k) = s(k)$ y $\chi(k) = \chi^{\psi(j)}(k) = \chi^{\varphi(j)}(k) = \lambda(k)$. Así $f^{\mathbb{IV}}(\psi_j, q_j)_{j\in J} \sim_2 f^{\mathbb{IV}}(\varphi_i, p_i)_{i\in I}$.

Sean $(\psi_j, q_j)_{j\in J}, (\varphi_i, p_i)_{i\in I}$ en $\mathbb{IV}(Y)$ tales que $(\psi_j, q_j)_{j\in J} \sim_1 (\varphi_i, p_i)_{i\in I}$. Esto significa que existe una función biyectiva $h : J \to I$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& J \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "\psi"] & \\
(0,\infty) & I \arrow[l, "p"] \arrow[r, "\varphi"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

De modo que $ph(j) = q(j)$ y $\varphi h(j) = \psi(j)$. Entonces, para cada $j \in J$ $K_{\psi(j)} = K_{\varphi h(j)}$. Sea e la única función biyectiva que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{j\in J} K_{\psi(j)} \arrow[r, "e"] & \coprod_{I\in I} K_{\varphi(i)} \\
K_{\psi(j)} \arrow[u, "inc"] \arrow[r, equal, "1"'] & K_{\varphi h(j)}. \arrow[u, "inc"']
\end{tikzcd}$$

Veamos la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod_{j\in J} K_{\psi(j)} \arrow[dl, "r"'] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, "\chi"] & \\
(0,\infty) & \coprod_{i\in I} K_{\varphi(i)} \arrow[l, "s"] \arrow[r, "\lambda"'] & X.
\end{tikzcd}$$

Para $f^{\mathbb{IV}}(\varphi_i, p_i)_{i\in I}$ se tiene

$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) \arrow[d, "ph(j)"'] & & K_{\varphi h(j)} \arrow[ll, "r^{\varphi h(j)}"'] \arrow[d, "inc"] \arrow[dr, "\chi^{\varphi h(j)}"] & \\
(0,\infty) & & B = \coprod_{i\in I} K_{\varphi(i)} \arrow[ll, "s"] \arrow[r, "\lambda"'] & X,
\end{tikzcd}$$

Sea $k \in A = \coprod_{j\in K} K_{\psi(j)} \Rightarrow k \in K_{\psi(j)} = K_{\varphi h(j)}$.
Entonces por definición de e, $se(k) = p(h(j)).r^{\varphi h(j)}(k) = q(j).r^{\psi(j)}(k) = r(k)$.
Así mismo, $\lambda e(k) = \chi^{\varphi h(j)}(k) = \chi^{\psi(j)}(k) = \chi(k)$.
Por lo tanto $f^{\mathbb{IV}}(\psi_j, q_j)_{j\in J} \sim_1 f^{\mathbb{IV}}(\varphi_i, p_i)_{i\in I}$ en $IV(X)$.

Sea $\eta_Y^{\mathbb{IV}} : Y \to IV(Y)$ tal que $\eta_Y^{\mathbb{IV}}(y) = (y, 1)_{\{*\}}$. Es claro que $f^{\mathbb{IV}}\eta_Y^{\mathbb{IV}} = f$.

Para $g : Z \to IV(Y)$ escribimos $g(z)$ como

$$(0,\infty) \xleftarrow{q^z} J_z \xrightarrow{\psi^z} Y \tag{15}$$

Evaluamos $f^{\mathbb{IV}} g^{\mathbb{IV}}(\zeta_i, p_i)_{i\in I}$.
$g^{\mathbb{IV}}(\zeta_i, p_i)_{i\in I} = (\psi_j, q_j)_{j\in J}$, es decir

$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) \arrow[d, "p(i)"'] & & J_{\zeta(i)} \arrow[ll, "q^{\zeta(i)}"'] \arrow[d, "inc"] \arrow[dr, "\psi^{\zeta(i)}"] & \\
(0,\infty) & & J = \coprod_{i\in I} J_{\zeta(i)} \arrow[ll, "q"] \arrow[r, "\psi"'] & Y,
\end{tikzcd}$$

tal que $\forall i \in I$, $j \in J_{\zeta(i)}$ se tiene $\psi(j) = \psi^{\zeta(i)}(j)$ y $q(j) = p(i).q^{\zeta(i)}(j)$.
Así $f^{\mathbb{IV}} g^{\mathbb{IV}}(\zeta_i, p_i)_{i\in I} = f^{\mathbb{IV}}(\psi_j, q_j)_{j\in J} = (\chi_k, r_k)_{k\in K}$ con

$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) \arrow[d, "q(j)"'] & & K_{\psi^{\zeta(i)}(j)} \arrow[ll, "r^{\psi^{\zeta(i)}(j)}"'] \arrow[d, "inc"] \arrow[dr, "\chi^{\psi^{\zeta(i)}(j)}"] & \\
(0,\infty) & & K = \coprod_{j\in J} K_{\psi^{\zeta(i)}(j)} \arrow[ll, "r"] \arrow[r, "\chi"'] & Y,
\end{tikzcd}$$

i.e.

$$\coprod_{j\in\coprod_{i\in I} J_{\zeta(i)}} K_{\psi^{\zeta(i)}(j)} \xrightarrow[r]{} X$$

donde para $k \in K_{\psi(j)}$ con $j \in J_{\zeta(i)}$ tenemos

$$\chi(k) = \chi^{\psi^{\zeta(i)}(j)}(k) \text{ y } r(k) = p(i).q^{\zeta(i)}(j).r^{\psi^{\zeta(i)}(j)}(k).$$

Por otra parte ,para $(\zeta_i, p_i)_{i\in I}$, como $f^{\mathbb{IV}}g : Z \to IV(X)$, $\forall i \in I$ denotamos a $f^{\mathbb{IV}}g(\zeta(i))$como

$$(0,\infty) \xleftarrow{r^{\zeta(i)}} K_{\zeta(i)} \xrightarrow{\chi^{\zeta(i)}} X.$$

Así $(f^{\mathbb{IV}}g)^{\mathbb{IV}}(\zeta_i, p_i)_{i\in I} = (\xi_k, t_k)_{k\in L}$ es tal que

$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) \arrow[d, "p(i)"'] & & K_{\zeta(i)} \arrow[ll, "r^{\zeta(i)}"'] \arrow[d, "inc"] \arrow[dr, "\chi^{\zeta(i)}"] & \\
(0,\infty) & & L = \coprod_{i\in I} K_{\zeta(i)} \arrow[ll, "t"] \arrow[r, "\xi"'] & X,
\end{tikzcd}$$

donde para cada $k \in K_{\zeta(i)}$ con $i \in I$ tenemos

$$\xi(k) = \chi^{\zeta(i)}(k) \text{ y } t(k) = p(i).r^{\zeta(i)}(k).$$

Ahora bien, $\forall i \in I$ escribimos

$$(0,\infty) \xleftarrow{q^{\zeta(i)}} J_{\zeta_i} \xrightarrow{\psi^{\zeta(i)}} Y$$

para $g(\zeta(i))$. Por lo que $f^{\mathbb{IV}}$ sobre dicho palmo es el palmo en la parte inferior del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) \arrow[d, "q^{\zeta(i)}(j)"'] & & K_{\psi^{\zeta(i)}(j)} \arrow[ll, "r^{\psi^{\zeta(i)}(j)}"'] \arrow[d, "inc"] \arrow[dr, "\chi^{\psi^{\zeta(i)}(j)}"] & \\
(0,\infty) & & \coprod_{j\in J_{\zeta_i}} K_{\psi^{\zeta(i)}(j)} \arrow[ll, "r^{\zeta(i)}"] \arrow[r, "\chi^{\zeta(i)}"'] & X,
\end{tikzcd}$$

donde $r^{\zeta(i)}$ y $\chi^{\zeta(i)}$ $\forall i \in I$ son las únicas funciones que hacen conmutativo a tal diagrama.
Por lo tanto para $k \in K_{\psi^{\zeta(i)}(j)}$ con $j \in J_{\zeta_i}$, $i \in I$ se tiene que

$$\xi(k) = \chi^{\psi^{\zeta(i)}(j)}(k) \text{ y } t(k) = p(i).q^{\zeta(i)}(j).r^{\psi^{\zeta(i)}(j)}(k).$$

Entonces el isomorfismo canónico

$$\coprod_{j\in\coprod_{i\in I} J_{\zeta(i)}} K_{\psi^{\zeta(i)}(j)} \xrightarrow{\quad\simeq\quad} \coprod_{i\in I}\coprod_{j\in J_{\zeta_i}} K_{\psi^{\zeta(i)}(j)}$$

muestra que $f^{\mathbb{IV}}g^{\mathbb{IV}}(\zeta_i,p_i)_{i\in I}$ y $(f^{\mathbb{IV}}g)^{\mathbb{IV}}(\zeta_i,p_i)_{i\in I}$ son el mismo elemento en $IV(X)$.
Por lo tanto, por el Teorema 2.11 se ha demostrado que $\mathbb{IV}$ es una mónada.

□

TEOREMA 3.16. *Hay una ley distributiva de $\mathbb{IV}$ sobre $\mathbb{P}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $h : Y \to P(V(X))$ y el palmo

$$(0,\infty) \xleftarrow{q} J \xrightarrow{\psi} Y.$$

Para cada función de elección $l : J\backslash J_0 \to \cup_{j\in J\backslash J_0} h(\psi(j))$ (con la condición, $l(j) \in h(\psi(j))$), si $l(j)$ es el palmo

$$(0,\infty) \xleftarrow{r^j} K_j \xrightarrow{\chi^j} X,$$

para $j \in J\backslash J_0$, formamos el palmo $S(l,q,\psi)$ del modo siguiente

$$(0,\infty) \xleftarrow{\quad r\quad} \coprod_{j\in J\backslash J_0} K_j \xrightarrow{\quad\chi\quad} X,$$

donde para cada $k \in K_j$ definimos $\chi(k) = \chi^j(k)$ y $r(k) = q(j).r^j(k)$. Definimos

$$h^\lambda((\psi,q)) = \{S(l,\psi,q) | l : J\backslash J_0 \to \cup_{j\in J\backslash J_0} h(\psi(j)) \text{ es una función de elección}\}.$$

Afirmamos que h^λ está bien definida.
Sean $(\psi_j,q_j)_{j\in J}$, $(\varphi_i,p_i)_{i\in I}$ en $V(Y)$ tales que $(\psi_j,q_j)_{j\in J} \sim_2 (\varphi_i,p_i)_{i\in I}$. No es difícl mostrar que $h^\lambda(\psi,q) = h^\lambda(\varphi,p)$.
Ahora, sean $(\psi_j,q_j)_{j\in J}$, $(\varphi_i,p_i)_{i\in I}$ en $V(Y)$ tales que $(\psi_j,q_j)_{j\in J} \sim_1 (\varphi_i,p_i)_{i\in I}$. Entonces existe $t : J \to I$ función biyectiva tal que $\varphi(t(j)) = \psi(j)$ y $p(t(j)) = q(j)$.
Ahora bien, consideremos el palmo siguiente

$$(0,\infty) \xleftarrow{p} I \xrightarrow{\varphi} Y.$$

Para cada función de elección $m : I\backslash I_0 \to \cup_{i\in I\backslash I_0} h(\varphi(i))$ (con la condición, $m(i) \in h(\varphi(i))$), si $m(i)$ es el palmo

$$(0,\infty) \xleftarrow{s^i} K_i \xrightarrow{\phi^i} X,$$

para $i \in I\backslash I_0$, formamos el palmo $S(m,p,\varphi)$ del modo siguiente

$$(0,\infty) \xleftarrow{\quad s\quad} \coprod_{i\in I\backslash I_0} K_i \xrightarrow{\quad\phi\quad} X,$$

donde para cada $k \in K_i$ definimos $\phi(k) = \phi^i(k)$ y $s(k) = p(i).s^i(k)$.
Tenemos además lo siguiente.
La función $u : J\backslash J_0 \to I\backslash I_0$ es biyectiva, donde $u = t|_{J\backslash J_0}$.
Por lo cual $\cup_{i\in I\backslash I_0} h(\varphi(i)) = \cup_{j\in J\backslash J_0} h(\psi(j))$ y $\coprod_{i\in I\backslash I_0} K_i = \coprod_{j\in J\backslash J_0} K_{t(j)}$.
La función $\mu : J\backslash J_0 \to \cup_{j\in J\backslash J_0} h(\psi(j))$, es de elección.
Por todo lo cual tenemos que $S(mu,q,\psi) \sim_1 S(m,p,\varphi)$. Entonces $h^\lambda(\varphi,p) \subseteq h^\lambda(\psi,q)$. De manera semejante se tiene que $h^\lambda(\psi,q) \subseteq h^\lambda(\varphi,p)$. Por la definción de $IV(X)$, concluimos que h^λ está bien definida.

Indicamos quien es $h^{\lambda}g^{\mathbb{IV}}(\zeta,p)$. Suponemos que $g(z)$ está dado por (15). Primero, $g^{\mathbb{IV}}(\zeta,p)$ es el palmo en la base del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) \arrow[d, "p(i)"'] & J_{\zeta(i)} \arrow[l, "q^{\zeta(i)}"'] \arrow[d, "inc"] \arrow[dr, "\psi^{\zeta(i)}"] & \\
(0,\infty) & J=\coprod_{i\in I} J_{\zeta(i)} \arrow[l, "q"] \arrow[r, "\psi"'] & X.
\end{tikzcd}$$

De manera que $\forall i\in I$ y cada $j\in J_{\zeta(i)}$ tomamos un elemento

$$(0,\infty) \xleftarrow{r^{ij}} K_{ij} \xrightarrow{\chi^{ij}} X$$

en $h(\psi^{\zeta(i)}(j))$. Entonces, un elemento $S(l,\psi,q)$ de $h^{\lambda}g^{\mathbb{IV}}(\zeta,p)$ es el palmo en la base del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) \arrow[d, "q(j)"'] & K_{ij} \arrow[l, "r^{ij}"'] \arrow[d, "inc"] \arrow[dr, "\chi^{ij}"] & \\
(0,\infty) & K=\coprod_{j\in J\backslash J_0} K_{ij} \arrow[l, "r"] \arrow[r, "\chi"'] & X,
\end{tikzcd}$$

donde para cada $k\in K_{ij}$, $\chi(k)=\chi^{ij}(k)$ y $r(k)=p(i).q^{\zeta(i)}(j).r^{ij}(k)$.

Por otro lado un elemento $S(m,\zeta,p)$ de $(h^{\lambda}g^{\mathbb{IV}})^{\lambda}(\zeta,p)$ es de la siguiente forma:
Para cada $i\in I\backslash I_0$, tomamos $m(i)\in h^{\lambda}g\zeta(i)$ como el palmo

$$(0,\infty) \xleftarrow{s^{i}} K_{i} \xrightarrow{\varphi^{i}} X$$

Por lo que $S(m,\zeta,p)$, es el palmo en la base de

$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) \arrow[d, "p(i)"'] & K_{i} \arrow[l, "s^{i}"'] \arrow[d, "inc"] \arrow[dr, "\varphi^{i}"] & \\
(0,\infty) & K_1=\coprod_{i\in I\backslash I_0} K_{i} \arrow[l, "s"] \arrow[r, "\varphi"'] & X,
\end{tikzcd}$$

Si consideramos que para cada $i\in I\backslash I_0$, por (15), $g(\zeta(i))$ es el palmo

$$(0,\infty) \xleftarrow{q^{\zeta(i)}} J_{\zeta(i)} \xrightarrow{\psi^{\zeta(i)}} Y.$$

Para cada $i\in I\backslash I_0$, sea $n_i : A_i = J_{\zeta(i)}\backslash(J_{\zeta(i)})_0 \to \cup_{j\in A_i} h(\psi^{\zeta(i)}(j))$ una función de eleccción.

Para cada $j\in J_{\zeta(i)}\backslash(J_{\zeta(i)})_0$, $n_i(j)\in h(\psi^{\zeta(i)}(j))$ es el palmo

$$(0,\infty) \xleftarrow{r^{ij}} K_{ij} \xrightarrow{\chi^{ij}} X.$$

Entonces $S(n_i,\psi^{\zeta(i)},q^{\zeta(i)})$ es el palmo en la base de

$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) \arrow[d, "q^{\zeta(i)}(j)"'] & K_{ij} \arrow[l, "r^{ij}"'] \arrow[d, "inc"] \arrow[dr, "\chi^{ij}"] & \\
(0,\infty) & K_i = \coprod_{j\in A_i} K_{ij} \arrow[l, "s^i"] \arrow[r, "\varphi^i"'] & X,
\end{tikzcd}$$

Se concluye así que para el palmo (φ, s), se tiene para cada $k \in K_{ij}$

$$\varphi(k) = \chi^{ij}(k) \text{ y } s(k) = p(i).q^{\zeta(i)}(j).r^{ij}(k).$$

El isomorfismo canónico

$$\coprod_{j\in J\setminus J_0} K_{ij} \xrightarrow{\simeq} \coprod_{i\in I\setminus I_0} K_i$$

muestra que $S(l,\psi,q) \sim_1 S(m,\zeta,p)$.

Por lo tanto tenemos que $h^\lambda g^{\mathbb{IV}} = (h^\lambda g)^\lambda$.

Es inmediato que $(\eta^{\mathbb{P}}_{IV(X)} \cdot \eta^{\mathbb{IV}}_X)^\lambda = \eta^{\mathbb{P}}_{IV(X)}$.

Por último, sean $k : Z \to P(IV(Y))$ y $h : Y \to P(IV(X))$.
Mostramos que $(h^\lambda)^{\mathbb{P}} k^\lambda = ((h^\lambda)^{\mathbb{P}} k)^\lambda$. Donde $(h^\lambda)^{\mathbb{P}} = \overline{h^\lambda}$, como en (14).
Sea el palmo

$$(0,\infty) \xleftarrow{p} I \xrightarrow{\zeta} Z$$

en $IV(Z)$. Entonces un elemento de $(h^\lambda)^{\mathbb{P}} k^\lambda(\zeta_i, p_i)_{i\in I}$ está formado como sigue:
Para cada $i \in I\setminus I_0$ elegimos un palmo

$$(0,\infty) \xleftarrow{q^i} J_i \xrightarrow{\psi^i} Y$$

en $k(\zeta(i))$, entonces para cada $j \in J\setminus J_0$ ($J = \coprod_{i\in I\setminus I_0} J_i$) elegimos un palmo

$$(0,\infty) \xleftarrow{r^{ij}} K_{ij} \xrightarrow{\chi^{ij}} X$$

en $h(\psi^i(j))$; de modo que un elemento en cuestión es

$$(0,\infty) \xleftarrow{r} \coprod_{j\in J\setminus J_0} K_{ij} \xrightarrow{\chi} X,$$

donde para cada $k \in K_{ij}$, $j \in J\setminus J_0$ tenemos $\chi(k) = \chi^{ij}(k)$ y $r(k) = p(i).q^i(j).r^{ij}(k)$.

Por otra parte un elemento en $((h^\lambda)^{\mathbb{P}} k)^\lambda(\zeta_i, p_i)_{i\in I}$ está formado como sigue:
Para cada $i \in I\setminus I_0$ elegimos un palmo

$$(0,\infty) \xleftarrow{q^i} J_i \xrightarrow{\psi^i} Y$$

en $k(\zeta(i))$, entonces para cada $j \in J_i\setminus(J_I)_0$ tomamos un palmo

$$(0,\infty) \xleftarrow{r^{ij}} K_{ij} \xrightarrow{\chi^{ij}} X$$

en $h(\psi^i(j))$; entonces un elemento en cuestión es

$$(0,\infty) \xleftarrow{r'} \coprod_{i\in I\backslash I_0} \coprod_{j\in J_i\backslash (J_i)_0} K_{ij} \xrightarrow{\chi'} X,$$

donde para cada $k \in K_{ij}$, $j \in J_i\backslash(J_i)_0$ se tiene $\chi'(k) = \chi^{ij}(k)$ y $r'(k) = p(i).q^i(j).r^{ij}(k)$.
El isomorfismo canónico

$$\coprod_{j\in J\backslash J_0} K_{ij} \xrightarrow{\simeq} \coprod_{i\in I\backslash I_0} \coprod_{j\in J_i\backslash (J_i)_0} K_{ij}$$

muestra que $(\chi_k, r_k)_{k\in K_1} \sim_1 (\chi'_k, r'_k)_{k\in K_2}$. Concluimos que $(h^\lambda)^{\mathbb{P}} k^\lambda(\zeta_i, p_i)_{i\in I} = ((h^\lambda)^{\mathbb{P}} k)^\lambda(\zeta_i, p_i)_{i\in I}$.

$$\therefore (h^\lambda)^{\mathbb{P}} k^\lambda = ((h^\lambda)^{\mathbb{P}} k)^\lambda.$$

Por lo tanto, por el Teorema2.13 hay una ley distributiva de $\mathbb{IV}$ sobre $\mathbb{P}$.

□

Caracterizamos a la mónada $\mathbb{IV}$ como una construcción libre y mostramos la correspondencia entre la ley distributiva ecuacional y la ley distributiva categórica.

Definimos dos operaciones sobre las valuaciones indexadas discretas.

Definición 3.17. *Sean $\nu = (a,p) = (x_i, p_i)_{i\in I}$, $\xi = (b,q) = (y_j, q_j)_{j\in J}$ valuaciones indexadas discretas sobre X. Supogamos $I \cap J = \emptyset$. Definimos $\nu \oplus \xi$ como $(a\cup b, p\cup q)$, donde $a \cup b$ es la función definida por partes de $I \cup J$ en X a partir de las funciones a y b. Análogamente $p \cup q$. Para $p \in \mathbb{R}^+$ definimos $p\nu$ como (x_i, pp_i). Con $\bar{0}$ denotamos a la valuación indexada discreta indexada por el vacío.*

Notamos, en particular, que cuando p no es 0 o 1, $p\nu \oplus (1-p)\nu \nsim \nu$, porque los conjuntos indexantes no tienen las misma cardinalidad.
Consideramos la siguiente teoría ecuacional:

1. $A \oplus B = B \oplus A$;
2. $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$;
3. $A \oplus \bar{0} = A$;
4. $0A = \bar{0}$;
5. $1A = A$;
6. $p(A \oplus B) = pA \oplus pB$ $p \in \mathbb{R}^+$;
7. $p(qA) = (pq)A$ $p, q \in \mathbb{R}^+$.

Estos axiomas son casi los mismos que aparecen en la definición de cono real. La diferencia es que hemos suprimido el axioma $(p+q)A = pA \oplus qA$.

Definición 3.18. *Un cuasicono real es un álgebra para la teoría ecuacional* (1)-(7) *en la categoría **Con**.*

Teorema 3.19. *Las valuaciones indexadas finitas son el cuasicono real libre.*

Demostración. Consultar [**25**]. □

Recordemos que una semi-retícula es un módelo de la siguiente teoría.

8. $A \uplus B = B \uplus A$;
9. $A \uplus (B \uplus C) = (A \uplus B) \uplus C$;
10. $A \uplus A = A$.

Hemos visto que el conjunto de subconjuntos finitos no vacíos es la semi-retícula libre.
Consideremos la teoría ecuacional obtenida de combinar (1)-(10) y los siguientes axiomas.

11. $p(A \uplus B) = pA \uplus pB$;
12. $A \oplus (B \uplus C) = (A \oplus B) \uplus (A \oplus C)$.

Las ecuaciones (11) y (12) expresan que el operador probabilisctico se distribuye sobre el no deterministico.

TEOREMA 3.20. *La mónada $\mathbb{P} \circ \mathbb{IV}$ obtenida a partir de la ley distributiva categórica defininida previamente es el álgebra libre para la teoría ecuacional* (1)-(12).

DEMOSTRACIÓN. Vease [**25**]. $\square$

Capítulo 4

Seudomónadas de Kan

Suponemos que el lector está familiarizado con las KZ-doctrinas [**13**]. Las seudomónadas de Kan izquierdas son una manera equivalente de definir las KZ-doctrinas [**18**] (nuestro guía príncipal en lo que resta de este trabajo). Tenemos la siguiente KZ-doctrina $\mathfrak{D}$ sobre la 2-categoría **ord** [**15**]. El seudofuntor en cuestión asigna a cada conjunto $\mathbf{X}$ el conjunto de sus subconjuntos cerrados inferiormente, la 2-categoría de $\mathfrak{D}$-álgebras es la 2-categoría de retículas completas y funciones que preservan supremos y monotonía. Tenemos también la coKZ-doctrina $\mathfrak{U}$ tal que el seudofuntor correspondiente asigna a cada conjunto $\mathbf{X}$ el conjunto de sus subconjuntos cerrados superiormente [**15**], la 2-categoría de $\mathfrak{U}$-álgebras es la 2-categoría de retículas cocompletas y funciones que preservan infimos y monotonía. Siempre tratamos de KZ-doctrinas y coKZ-doctrinas en el contexto de [**13**].
En este capítulo mostramos que $\mathfrak{U}$ es una coKZ-doctrina desde esta nueva prespectiva i.e. tenemos que ésta es una seudomónada de Kan derecha.
Además, por dualidad, se muestra desde esta nueva prespectiva que $\mathfrak{D}$ es una KZ-doctrina i.e. se tiene que ésta es una Pseudomónada de Kan izquierda.

El mismo tratamiento daremos a la KZ-doctrina $\mathfrak{D}'$ =Fam y la coKZ-doctrina $\mathfrak{U}'$ =Cofam sobre **Cat** (la 2-categoría de categorías localmente pequeñas), que son parte del folklore en categorías. En el primer caso el seudofuntor en turno asigna a cada categoría localmente pequeña (que abreviamos como l-pequeña) $\mathbf{C}$ la categoría l-pequeña libre con coproductos finitos sobre $\mathbf{C}$, la 2-categoría de $\mathfrak{D}'$-álgebras consta de categorías l-pequeñas con coproductos finitos, las 1-celdas son funtores que preservan coproductos finitos y las 2-celdas son las transformaciones naturales. Para el caso de Cofam el seudofuntor en cuestión asigna a cada categoría l-pequeña $\mathbf{C}$ la categoría l-pequeña libre con productos finitos sobre $\mathbf{C}$, la 2-categoría de $\mathfrak{U}'$-álgebras consta de categorías l-pequeñas con productos finitos, las 1-celdas son funtores que preservan productos finitos y las 2-celdas son las transformaciones naturales.

En la segunda parte de este capítulo la ya conocida ley distributiva de $\mathfrak{U}$ sobre $\mathfrak{D}$ (la que también se expone en [**15**]) es presentada en términos de extensiones de Kan. Lo mismo haremos para la ya conocida ley distributiva de Cofam sobre Fam.

1. Ejemplos de Seudomónadas de Kan

Damos la definición de seudomónada derecha de Kan y de las álgebras para ésta.

Definición 4.1. *Sea $\mathcal{K}$ una 2-categoría. Una seudomónada de Kan derecha $\mathbb{U}$ sobre $\mathcal{K}$ consta de:*
(i) Una aplicación $U : Ob(\mathcal{K}) \to Ob(\mathcal{K})$.
(ii) Para cada $\mathbf{A}$ en $\mathcal{K}$, una 1-celda $u\mathbf{A} : \mathbf{A} \to U\mathbf{A}$.

(iii) Para cada 1*-celda* $F : \mathbf{B} \to U\mathbf{A}$*, una extensión de Kan derecha de* F *a lo largo de* $u\mathbf{B}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "u\mathbf{B}"] \arrow[dr, "F"'] & U\mathbf{B} \arrow[d, "F^{\mathbb{U}}"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow \mathbb{U}_F"] \\ & U\mathbf{A}, \end{tikzcd}$$

con $\mathbb{U}_F$ *invertible.*
Todo lo anterior sujeto a los siguientes axiomas.
(a) Para cada $\mathbf{A}$ *en* $\mathcal{K}$*,*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "u\mathbf{A}"] \arrow[dr, "u\mathbf{A}"'] & U\mathbf{A} \arrow[d, "1_{U\mathbf{A}}"] \arrow[dl, phantom, "="] \\ & U\mathbf{A}, \end{tikzcd}$$

exhibe a $1_{U\mathbf{A}}$ *como una extensión de Kan derecha de* $u\mathbf{A}$ *a lo largo de* $u\mathbf{A}$*.*
(b) Para cada $G : \mathbf{C} \to U\mathbf{B}$ *y* $F : \mathbf{B} \to U\mathbf{A}$ *la* 2*-celda*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "u\mathbf{C}"] \arrow[dr, "G"'] & U\mathbf{C} \arrow[d, "G^{\mathbb{U}}"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow \mathbb{U}_G"] & \\ & U\mathbf{B} \arrow[r, "F^{\mathbb{U}}"] & U\mathbf{A}, \end{tikzcd}$$

exhibe a $F^{\mathbb{U}}G^{\mathbb{U}}$ *como una extensión de Kan derecha de* $F^{\mathbb{U}}G$ *a lo largo de* $u\mathbf{C}$*.*

Definimos la 2-categoría de álgebras para una seudomónada de Kan derecha $\mathbb{U}$ en términos de extensiones de Kan derechas. Denotamos a ésta por $\mathbb{U}\text{-}\overline{Alg}$ y la definimos como sigue. Un objeto $\mathbb{B}$ en $\mathbb{U}\text{-}\overline{Alg}$ consiste de un objeto $\mathbf{B}$ en $\mathcal{K}$ junto con una asignación que a cada $F : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ le asocia una extensión de Kan derecha de F a lo largo de $u\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "u\mathbf{C}"] \arrow[dr, "F"'] & U\mathbf{C} \arrow[d, "F^{\mathbb{B}}"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow \mathbb{B}_F"] \\ & \mathbf{B}, \end{tikzcd}$$

con $\mathbb{B}_F$ invertible, de tal manera que para cada $G : \mathbf{X} \to U\mathbf{C}$ en $\mathcal{K}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "u\mathbf{X}"] \arrow[dr, "G"'] & U\mathbf{X} \arrow[d, "G^{\mathbb{U}}"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow \mathbb{U}_G"] & \\ & U\mathbf{C} \arrow[r, "F^{\mathbb{B}}"] & \mathbf{B}, \end{tikzcd}$$

exhibe a $F^{\mathbb{B}}G^{\mathbb{U}}$ como una extensión de Kan derecha de $F^{\mathbb{B}}G$ a lo largo de $u\mathbf{X}$. Una 1-celda $H : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ en $\mathbb{U}\text{-}\overline{Alg}$ es una 1-celda $H : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ en $\mathcal{K}$ tal que para cada $F : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "u\mathbf{C}"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\Swarrow \mathbb{B}_F"] & U\mathbf{C} \arrow[d, "F^{\mathbb{B}}"] & \\ & \mathbf{B} \arrow[r, "H"] & \mathbf{A}, \end{tikzcd}$$

exhibe a $HF^{\mathbb{B}}$ como extensión de Kan derecha de HF a lo largo de $u\mathbf{C}$.
Una 2-celda $\tau : H \to K : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ es simplemente una 2-celda $\tau : H \to K$ en $\mathcal{K}$. La composión de 2-celdas es la misma que en $\mathcal{K}$. No es difícil demostrar que la composición de 1-celdas en $\mathbb{U}$-$\overline{Alg}$ resulta una 1-celda en $\mathbb{U}$-$\overline{Alg}$.

Nuestro primer objetivo será mostrar que la KZ-doctrina $\mathfrak{D}$ sobre la 2-categoría **ord** [**15**]. Recuerde que tal que el seudofuntor en cuestión asigna a cada conjunto $\mathbf{X}$ el conjunto de sus subconjuntos cerrados inferiormente y cuya 2-categoría de $\mathfrak{D}$-álgebras es la 2-categoría de retículas completas y funciones que preservan supremos y monotonía, es una KZ-doctrina desde esta nueva prespectiva de extensiones de Kan.

Sea **ord** la 2-categoría que tiene como objetos a los conjuntos parcialmente ordenados $(\mathbf{X}, \leq)$, escribimos simplemente copo, las 1-celdas $f : (\mathbf{X}, \leq) \to (\mathbf{Y}, \leq)$ son funciones monótonas y hay una 2-celda

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\tau \Downarrow"] & \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

si y sólo si $\forall x \in \mathbf{X}$, $f(x) \leq g(x)$. Para cada copo $\mathbf{X}$ definimos, $\mathbf{X}^{\mathbf{l}} = \{A/ A\subseteq \mathbf{X}$ y A es cerrado superiormente $\}$. Sea A en $\mathbf{X}^{\mathbf{l}}$, A es cerrado superiormente sí y sólo sí $\forall x \in \mathbf{X}$ tal que si $a \leq x$ para algún $a \in A$, entonces $x \in A$. El orden en $\mathbf{X}^{\mathbf{l}}$ está dado de la siguiente manera, para cualesquiera A, B en $\mathbf{X}^{\mathbf{l}}$, $A \leq B \Leftrightarrow B \subseteq A$.

Proposición 4.2. *Sea $\mathbf{Y}$ un copo. La completación de $\mathbf{Y}$ bajo ínfimos (productos) en **ord** es el copo $\mathbf{Y}^{\mathbf{l}}$. En otras palabras, esto significa que cualquier subconjunto de $\mathbf{Y}^{\mathbf{l}}$ tiene ínfimo y existe una función monótona $y^l : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}^{\mathbf{l}}$ que satisface la siguiente propiedad universal:*
Dada cualquier función monótona $F : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$, para $\mathbf{X}$ tal que cualquier subconjunto de él tiene ínfimo, existen una única función mónotona F^l que preserva ínfimos y una 2-celda invertible l_F como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Y} \arrow[r, "y^l"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\Swarrow l_F"] & \mathbf{Y}^{\mathbf{l}} \arrow[d, "F^l"] \\ & \mathbf{X}, \end{tikzcd}$$

que exhibe a F^l como extensión derecha de Kan de F a lo largo de y^l.

Demostración. No es difícil mostrar que para $\mathbf{Y}$ copo, $y^l : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}^{\mathbf{l}}$ tal que

$$x \mapsto y^l(x) = \uparrow x,$$

donde $\uparrow x = \{t \in \mathbf{X} / x \leq t\}$, es una función mónotona.
Veamos ahora lo siguiente.

Observación 4.3. *Sea $(\mathbf{X}, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, entonces $\mathbf{X^1}$ tiene ínfimos.*

Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ tal que X_i está en $\mathbf{X^1}$, $\forall i \in I$. Es fácil checar que $\bigcup_{i\in I} X_i$ es cerrado superiormente, entonces $\bigcup_{i\in I} X_i$ está en $\mathbf{X^1}$. Observamos que $X_i \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i$, $\forall i \in I$, entonces $\bigcup_{i\in I} X_i \leq X_i$, $\forall i \in I$. Finalmente, sea X en $\mathbf{X^1}$ tal que $X \leq X_i$, $\forall i \in I$, entonces $X_i \subseteq X$, $\forall i \in I$, asi que $\bigcup_{i\in I} X_i \subseteq X$, entonces $X \leq \bigcup_{i\in I} X_i$. En lo sucesivo escribiremos $\bigcup_{i\in I} X_i \cong \bigwedge_{i\in I} X_i$.

$$\therefore \ \mathbf{X^1} \text{ tiene ínfimos.}$$

Resta mostrar que $y^l : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y^1}$ tiene la propiedad universal deseada. Sea $F : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ una función mónotona donde $\mathbf{X}$ es tal que cualquier subconjunto de él tiene ínfimo, definimos la aplicación $F^l : \mathbf{Y^1} \to \mathbf{X}$ como

$$Y \mapsto F^l(Y) = \bigwedge_{z\in Y} F(z).$$

Es fácil mostrar que F^l es función mónotona. Afirmamos que $F^l y^l = F$. Sea $z \in \mathbf{Y}$ entonces $F^l(\uparrow z) = \bigwedge_{x\in\uparrow z} F(x)$. Mostramos que $F(z) \cong \bigwedge_{x\in\uparrow z} F(x)$. Dado que F es mónotona $F(z) \leq F(x)$, $\forall x \in \uparrow z$. Además, para cada $X \in \mathbf{X}$ si $X \leq F(x)$ $\forall x \in \uparrow z$ entonces (como $z \in \uparrow z$) $X \leq F(z)$. Por lo cual $F(z) \cong F^l(\uparrow z)$. Por la definición de **ord**, $l_F = 1 : F^l y^l \Rightarrow F$ es un isomorfismo.
Ahora bien, es un ejercicio sencillo mostrar que F^l preserva ínfimos porque F^l es mónotona, l_F es isomorfismo y para cada $Y \in \mathbf{Y^1}$, $Y = \bigwedge_{y\in Y} \uparrow y$. Tampoco es difícil mostrar que F^l es única.
Finalmente, sean $G : \mathbf{Y^1} \to \mathbf{X}$ una función mónotona y τ una 2-celda como en

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Y} \arrow[r, "y^l"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbf{Y^1} \arrow[d, "G"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\tau"] \\
& \mathbf{X}.
\end{tikzcd}$$

En consecuencia $G(\uparrow y) \leq F(y)$, $\forall y \in Y$. Sabemos que para cada Y en $\mathbf{Y^1}$ se cumple que $Y = \bigwedge_{y\in Y} \uparrow y = \bigcup_{y\in Y} \uparrow y$. Luego tenemos $G(Y) \leq G(\uparrow y)$, $\forall y \in Y$, ya que G es función monótona. Entonces $G(Y) \leq G(\uparrow y) \leq F(y)$, $\forall y \in Y$. De modo que por la definición de ínfimo $G(Y) \leq \bigwedge_{y\in Y} F(y) = F^l(Y)$. Por todo lo anterior tenemos que para cada Y en $\mathbf{Y^1}$, $G(Y) \leq F^l(Y)$. Por lo tanto, por definición de **ord**, se tiene que existe una 2-celda $\bar{\tau} : G \to F^l$. Es inmediato que $l_F.\bar{\tau}u\mathbf{Y} = \tau$. Por la propiedad universal del ínfimo $\bar{\tau}$ es única. $\square$

Teorema 4.4. *Sea **ord** la 2-categoría de conjuntos parcialmente ordenados. Las siguientes condiciones determinan una seudomónada de Kan derecha $\mathbb{U}$ sobre **ord**.*

(i) *Sea la aplicación $U : Ob(\textbf{ord}) \to Ob(\textbf{ord})$, tal que*
$$\mathbf{X} \mapsto U\mathbf{X} = \mathbf{X^1}.$$
(ii) *Para cada $\mathbf{X}$ en **ord**, la 1-celda $u\mathbf{X} = \mathbf{x^l} : \mathbf{X} \to U\mathbf{X}$.*
(iii) *Para cada 1-celda $F : \mathbf{Y} \to U\mathbf{X}$, la 2-celda $\mathbb{U}_F = l_F$ exhibe a $F^{\mathbb{U}} = F^l$ como extensión derecha de Kan de F a lo largo de $u\mathbf{X}$.*

Demostración. Por la Proposición 4.2, (iii) se satisface.
Sea $\mathbf{Y}$ un copo. La demostración de que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Y} \arrow[r, "y^l"] \arrow[dr, "y^l"'] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "="] & \mathbf{Y^l} \arrow[d, "1"] \\
& \mathbf{Y^l},
\end{tikzcd}$$

exhibe a $1_{U\mathbf{Y}}$ como extensión derecha de Kan de $u\mathbf{Y}$ a lo largo de $u\mathbf{Y}$ es semejante a como se ha demostrado que l_F exhibe a F^l como extensión derecha de Kan de F a lo largo de y^l en la Proposición 4.2.
Por último demostramos que para cada $G : \mathbf{P} \to U\mathbf{Y}$ y $F : \mathbf{Y} \to U\mathbf{X}$ la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P} \arrow[r, "u\mathbf{P}"] \arrow[dr, "G"'] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\Swarrow \mathbb{U}_G"] & U\mathbf{P} \arrow[d, "G^{\mathbb{U}}"] & \\
& U\mathbf{Y} \arrow[r, "F^{\mathbb{U}}"] & U\mathbf{X},
\end{tikzcd}$$

exhibe a $F^{\mathbb{U}}G^{\mathbb{U}}$ como extensión de Kan derecha de $F^{\mathbb{U}}G$ a lo largo de $u\mathbf{P}$. Sea la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P} \arrow[r, "u\mathbf{P}"] \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \theta"] & U\mathbf{P} \arrow[d, "H"] \\
U\mathbf{Y} \arrow[r, "F^{\mathbb{U}}"'] & U\mathbf{X}.
\end{tikzcd}$$

i.e. para cada P en $U\mathbf{P}$ se tiene que $\forall x \in P$ $H(\uparrow x) \leq F^{\mathbb{U}}G(x)$; además

$$H(P) \leq \bigwedge_{x\in P} H(\uparrow x) \leq \bigwedge_{x\in P} F^{\mathbb{U}}G(x) \cong \bigwedge_{x\in P} F^{\mathbb{U}}G^{\mathbb{U}}(\uparrow x) \cong F^{\mathbb{U}}G^{\mathbb{U}}(\bigwedge_{x\in P} \uparrow x) = F^{\mathbb{U}}G^{\mathbb{U}}(P).$$

La primera desigualdad se tiene porque $P = \bigwedge_{x\in P} \uparrow x \leq \uparrow x$, la segunda se tiene gracias a θ, el primer isomorfismo gracias a $F^{\mathbb{U}} \circ \mathbb{U}_G$ y el segundo isomorfismo se cumple porque $F^{\mathbb{U}}$ y $G^{\mathbb{U}}$ preservan ínfimos.
Por tanto, para cualquier P en $U\mathbf{P}$ existe una 1-celda en $U\mathbf{X}$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H(P) = H(\prod_{x\in P} \uparrow x) \arrow[r, "\bar{\theta}_P"] \arrow[d, "H\pi"'] & F^{\mathbb{U}}G^{\mathbb{U}}(P) = F^{\mathbb{U}}G^{\mathbb{U}}(\prod_{x\in P} \uparrow x)) \arrow[d, "F^{\mathbb{U}}G^{\mathbb{U}}\pi"] \\
H(\uparrow x) \arrow[r, "F^{\mathbb{U}}\mathbb{U}_G.\theta(\uparrow x)"'] & F^{\mathbb{U}}G^{\mathbb{U}}(\uparrow x)
\end{tikzcd}$$

De la definición de **ord** existe una 2-celda $\bar{\theta} : H \to F^{\mathbb{U}}G^{\mathbb{U}}$. Es inmediato que $F^{\mathbb{U}}\mathbb{U}_G \cdot \bar{\theta}u\mathbf{P} = \theta$.
La unicidad de $\bar{\theta}$ se sigue de la propiedad universal del producto.

$\therefore$ $\mathbb{U}$ es una seudomónada de Kan derecha sobre **ord**.

$\square$

Sea $\mathbf{X}$ un copo. Definimos el copo

$$\mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}^{\mathbf{r}} = \{\text{A}/\ \text{A} \subseteq \mathbf{X} \ \text{ y A es cerrado inferiormente }\}.$$

Aquí para A en $\mathbf{X}^{\mathbf{r}}$, A es cerrado inferiormente sí y sólo sí $\forall x \in \mathbf{X}$ si $x \leq a$ para algún $a \in A$, entonces $x \in A$. El orden en $\mathbf{X}^{\mathbf{r}}$ está dado de la siguiente manera, para cualesquiera A, B en $\mathbf{X}^{\mathbf{r}}$, $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Observación 4.5. *Para cada conjunto parcialmente ordenado* $\mathbf{X}$*,* $\mathbf{X}^{\mathbf{r}}$ *tiene supremos. Para cada* $\{X_i\}_{i \in I}$ *tal que* $X_i \in \mathbf{X}^{\mathbf{r}}$*,* $\forall i \in I$*,* $\bigvee_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} X_i$*.*

Por la Proposición 4.2 y dualidad tenemos lo siguiente.

Corolario 4.6. *Sea* ***ord*** *la* 2*-categoría de conjuntos parcialmente ordenados. Las siguientes condiciones determinan una seudomónada de Kan izquierda* $\mathbb{D}$ *sobre* ***ord****.*

(i) *Sea* $D : Ob(\boldsymbol{ord}) \to Ob(\boldsymbol{ord})$ *la aplicación tal que*

$$\mathbf{X} \mapsto D\mathbf{X} = \mathbf{X}^{\mathbf{r}}.$$

(ii) *Para cada* $\mathbf{X}$ *en* ***ord****, la* 1*-celda* $d\mathbf{X} : \mathbf{X} \to D\mathbf{X}$ *es tal que*

$$x \mapsto d\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \downarrow \mathbf{x},$$

donde $\downarrow x = \{t \in \mathbf{X}/t \leq x\}$*.*

(iii) *A cada* 1*-celda* $F : \mathbf{Y} \to \mathbf{DX}$*, la extensión de Kan derecha* $F^{\mathbb{D}}$ *de* F *a lo largo de* $d\mathbf{Y}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Y} \arrow[r, "d\mathbf{Y}"] \arrow[dr, "F"'] & D\mathbf{Y} \arrow[d, "F^{\mathbb{D}}"] \arrow[dl, phantom, "\mathbb{D}_F = 1"] \\ & D\mathbf{X}, \end{tikzcd}$$

con $\mathbb{D}_F$ *invertible, está definida como:*

$$Y \mapsto F^{\mathbb{D}}(Y) = \coprod_{y \in Y} F(y) = \bigcup_{y \in Y} F(y).$$

En lo que resta de este trabajo **cat** denota a la 2-categoría de categorías pequeñas: sus objetos son las categorías pequeñas, las 1-celdas son funtores entre categorías pequeñas y las 2-celdas son transformaciones naturales mientras que **Cat** denota a la 2-categoría de categorías localmente pequeñas: sus objetos son las categorías localmente pequeñas, las 1-celdas son funtores entre categorías localmente pequeñas y las 2-celdas son transformaciones naturales.

Ahora nos ocuparemos de mostrar que la coKZ-doctrina $\mathfrak{U}'$ sobre **Cat**, tal que el seudofuntor en cuestión asigna a cada categoría l-pequeña $\mathbf{C}$ la categoría l-pequeña libre con productos finitos sobre $\mathbf{C}$ y cuya 2-categoría de $\mathfrak{U}'$-álgebras consta de las categorías l-pequeñas con productos finitos, las 1-celdas son funtores que preservan productos finitos y las 2-celdas son las transformaciones naturales, es una coKZ-doctrina desde el contexto de extensiones de Kan.

Describimos la categoría l-pequeña libre que el seudofuntor $\mathfrak{U}'$ asigna a cada categoría l-pequeña $\mathbf{C}$.

Sea $\mathbf{C}$ en **Cat**. No es difícil mostrar que los siguientes conjuntos de objetos y morfismos, así como la composición para tales morfismos definen para una categoría l-pequeña $\mathbf{C}$ una categoría en **Cat** a la que llamamos cofam de $\mathbf{C}$ y denotamos por Cof($\mathbf{C}$):

(i) Los objetos son familias $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ tal que A_i es un objeto de $\mathbf{C}$ $\forall i \in I$, donde I es conjunto finito.

(ii) Para $\langle A_i\rangle_{i\in I}$, $\langle B_j\rangle_{j\in J}$ objetos en Cof($\mathbf{C}$), el conjunto Cof($\mathbf{C}$)$(\langle A_i\rangle_{i\in I}, \langle B_j\rangle_{j\in J})$ tiene como elementos $\langle \varphi, \langle f_j\rangle_{j\in J}\rangle$, donde $\varphi : J \to I$ es una función y $f_j : A_{\varphi(j)} \to B_j$ es un morfismo en $\mathbf{C}$ $\forall j \in J$.

(iii) Sean $\langle \varphi, \langle f_j\rangle_{j\in J}\rangle : \langle A_i\rangle_{i\in I} \to \langle B_j\rangle_{j\in J}$ y $\langle \psi, \langle g_l\rangle_{l\in L}\rangle : \langle B_j\rangle_{j\in J} \to \langle C_l\rangle_{l\in L}$ morfismos en Cof($\mathbf{C}$), se define la composición de la siguiente manera (la composición en Cof($\mathbf{C}$) la denotamos por yuxtaposición):
$\langle \psi, \langle g_l\rangle_{l\in L}\rangle\langle \varphi, \langle f_j\rangle_{j\in J}\rangle = \langle \varphi\psi, \langle g_l f_{\psi(l)}\rangle_{l\in L}\rangle$, donde $\varphi\psi : L \to I$ es la composición usual de funciones y $g_l f_{\psi(l)}$ es la composición usual de morfismos en $\mathbf{C}$.

(iv) Para cada $\langle A_i\rangle_{i\in I}$ en Cof($\mathbf{C}$), tomamos $1_{\langle A_i\rangle_{i\in I}} = \langle 1_I, \langle 1_{A_i}\rangle_{i\in I}\rangle$ que es fácil ver que es el morfismo identidad en $\langle A_i\rangle_{i\in I}$.

La siguiente observación será de gran ayuda.

Observación 4.7. *Para cada $\mathbf{C}$ en **Cat**, la categoría Cof($\mathbf{C}$) tiene productos finitos.*

Sea $\{\langle A_{(i,j)}\rangle_{i\in I_j}\}_{j\in J}$ tal que $\langle A_{(i,j)}\rangle_{i\in I_j}$ está en Cof($\mathbf{C}$) $\forall j \in J$.
Definimos para cada $j \in J$ el siguiente morfismo en Cof($\mathbf{C}$):

$$\langle \varphi_j, \langle 1_{A_{(i,j)}}\rangle_{i\in I_j}\rangle : \langle A_{(i,j)}\rangle_{(i,j)\in\coprod_{j\in J}(I_j\times\{j\})} \longrightarrow \langle A_{(i,j)}\rangle_{i\in I_j},$$

donde $\varphi_j : I_j \to \coprod_{j\in J}(I_j \times \{j\})$ es la función, tal que $i \mapsto \varphi_j(i) = (i, j)$.
Veamos que

$$\textstyle\prod_{j\in J}\langle A_{(i,j)}\rangle_{i\in I_j} \cong \langle A_{(i,j)}\rangle_{(i,j)\in\coprod_{j\in J}(I_j\times\{j\})},$$

donde $\forall j \in J$ las proyecciones correspondientes están dadas por $\langle \varphi_j, \langle 1_{A_{(i,j)}}\rangle_{i\in I_j}\rangle$.
Tomemos $\langle B_k\rangle_{k\in K}$ y para cada $j \in J$ $\langle \psi_j, \langle g_{ij}\rangle_{i\in I_j}\rangle : \langle B_k\rangle_{k\in K} \to \langle A_{(i,j)}\rangle_{i\in I_j}$ en Cof($\mathbf{C}$). En el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\langle B_k\rangle_{k\in K} \arrow[r, "{\langle\psi,\langle g_{ij}\rangle_{(i,j)\in X}\rangle}"] \arrow[dr, "{\langle\psi_j,\langle g_{ij}\rangle_{i\in I_j}\rangle}"'] & \langle A_{(i,j)}\rangle_{(i,j)\in\coprod_{j\in J}(I_j\times\{j\})} \arrow[d, "{\langle\varphi_j,\langle 1_{A_{(i,j)}}\rangle_{i\in I_j}\rangle}"] \\
& \langle A_{(i,j)}\rangle_{i\in I_j}
\end{tikzcd}$$

el morfismo $\langle \psi, \langle g_{ij}\rangle_{(i,j)\in X}\rangle$ es tal que ψ es la única función que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{j\in J}(I_j\times\{j\}) \arrow[r, "\psi"] & K \\
& I_j \arrow[ul, "\varphi_j"] \arrow[u, "\psi_j"']
\end{tikzcd}$$

para cada $j \in J$ y $X = \coprod_{j\in J}(I_j \times \{j\})$. Por definición de $\langle \psi, \langle g_{ij}\rangle_{(i,j)\in X}\rangle$ el primero de los dos diagramas anteriores conmuta y la unicidad de $\langle \psi, \langle g_{ij}\rangle_{(i,j)\in X}\rangle$ es consecuencia de la definición de $\langle \varphi_j, \langle 1_{A_{(i,j)}}\rangle_{i\in I_j}\rangle$ para cada $j \in J$.

$$\therefore\ \text{Cof}(\mathbf{C}) \text{ tiene productos finitos.}$$

De ahora en adelante usaremos $\prod_{j\in J}\langle A_{(i,j)}\rangle_{i\in I_j} \cong \langle A_{(i,j)}\rangle_{(i,j)\in\coprod_{j\in J}(I_j\times\{j\})}$.

Teorema 4.8. *Sea $\mathbf{B}$ una categoría l-pequeña. La completación de $\mathbf{B}$ bajo productos finitos en **Cat** es la categoría Cof($\mathbf{B}$). En otras palabras, esto significa que Cof($\mathbf{B}$) tiene productos* *finitos y existe un funtor* $b^1 : \mathbf{B} \to$*Cof(*$\mathbf{B}$*) que satisface la siguiente propiedad universal: Dado cualquier funtor* $F : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ *, para* $\mathbf{A}$ *una categoría l-pequeña que tiene productos finitos, existen un único funtor* F^1 *que preserva productos finitos y un isomorfismo natural* ϵ_F*, como en el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "b^1"] \arrow[dr, "F"'] & Cof(\mathbf{B}) \arrow[d, "F^1"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow \epsilon_F"] \\ & \mathbf{A}, \end{tikzcd}$$

tales que para cada funtor $G :$*Cof(*$\mathbf{B}$*)*$\to \mathbf{A}$ *y cualquier transformación natural* τ *como en*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "b^1"] \arrow[dr, "F"'] & Cof(\mathbf{B}) \arrow[d, "G"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow \tau"] \\ & \mathbf{A}. \end{tikzcd}$$

existe una única transformación natural $\bar{\tau} : G \to F^1$ *tal que* $\tau = \epsilon_F \cdot \bar{\tau} b^1$.

Demostración. El funtor $b^1 : \mathbf{B} \to$Cof($\mathbf{B}$) está definido como sigue:

$$B \mapsto b^1(B) = \langle B \rangle_{\{*\}} \text{ y } f : B \to B' \mapsto \langle 1_{\{*\}}, \langle f \rangle \rangle$$

para B, B' objetos de $\mathbf{B}$ y cada morfismo f en $\mathbf{B}$.
Hemos visto en la observación anterior que Cof($\mathbf{B}$) tiene productos finitos.
Ahora veamos que b^1 tiene la propiedad universal deseada.
Sea $F : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ un funtor, con $\mathbf{A}$ una categoría que tiene productos finitos. No es difícil ver que F^1 definido como:

$$\langle B_j \rangle_{j \in J} \mapsto F^1 \langle B_j \rangle_{j \in J} = \textstyle\prod_{j \in J} FB_j \text{ y}$$
$$\langle \varphi, \langle f_k \rangle_{k \in K} \rangle : \langle B_j \rangle_{j \in J} \to \langle B'_k \rangle_{k \in K} \mapsto F^1 \langle \varphi, \langle f_k \rangle_{k \in K} \rangle,$$

donde $F^1 \langle \varphi, \langle f_k \rangle_{k \in K} \rangle$ es el único morfismo que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \prod_{j \in J} FB_j \arrow[r, "F^1 \langle \varphi, \langle f_k \rangle_{k \in K} \rangle"] \arrow[d, "\pi_{\varphi(k)}"'] & \prod_{k \in K} FB'_k \arrow[d, "\pi_k"] \\ FB_{\varphi(k)} \arrow[r, "F(f_k)"'] & FB'_k, \end{tikzcd}$$

es un funtor.
También es fácil mostrar que $F = F^1 \circ b^1$. Por lo que definimos $\epsilon_F = 1_F$.
El funtor F^1 preserva productos finitos debido a que:
Para cada $\langle B_j \rangle_{j \in J}$ en Cof($\mathbf{B}$)

$$\langle \langle B_j \rangle_{j \in J} \xrightarrow{\langle e_j, \langle 1_{B_j} \rangle \rangle} \langle B_j \rangle_{j \in \{j\}} \rangle_{j \in J} \tag{16}$$

es un cono universal por la Observación 4.7 y

$$F^1\langle\langle B_j\rangle_{j\in J} \xrightarrow{F^1\langle e_j,\langle 1_{B_j}\rangle\rangle} \langle B_j\rangle_{j\in\{j\}}\rangle_{j\in J} =$$
$$\langle\textstyle\prod_{j\in J} FB_j \xrightarrow{\pi_j} FB_j\rangle_{j\in J}$$

Además, debido a que cada familia finita $\{\langle B_{(i,j)}\rangle_{i\in I_j}\}_{j\in J}$ se tiene la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
\prod_{(i,j)\in\coprod_{j\in J}(I_j\times\{j\})} FB_{(i,j)} \arrow[r, "F^1(x_j)"] \arrow[d, "\pi_{(i,j)}"'] & \prod_{i\in I_j} FB_{(i,j)} \arrow[d, "\pi_i"] \\
FB_{(i,j)} \arrow[r, "F(1_{B_{(i,j)}})"'] & FB_{(i,j)},
\end{tikzcd}$$

donde

$$\langle B_{(i,j)}\rangle_{(i,j)\in\coprod_{j\in J}(I_j\times\{j\})} \xrightarrow{x_j=\langle\varphi_j,\langle 1_{B_{(i,j)}}\rangle_{i\in I_j}\rangle} \langle B_{(i,j)}\rangle_{i\in I_j}$$

es el morfismo definido en la Observación 4.7 $\forall i\in I_j$ y $\forall j\in J$.
Desde luego la propiedad universal del producto es también fundamental para que F^1 preserve productos finitos.
El funtor F^1 es único debido a la definición de Cof($\mathbf{B}$) y porque éste preserva productos finitos.
Por último, mostramos que $\epsilon_F = 1_F$ exhibe a F^1 como extensión derecha de Kan de F a lo largo de b^1.
Sean G, θ, un funtor y una transformación natural respectivamente como en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, "b^1"] \arrow[dr, "F"'] & Cof(\mathbf{B}) \arrow[d, "G"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\theta"] \\
& \mathbf{A}.
\end{tikzcd}$$

Dado que para cada $\langle B_j\rangle_{j\in J}$ en Cof($\mathbf{B}$) se cumple que $\langle B_j\rangle_{j\in J} = \prod_{j\in J}\langle B_j\rangle_{j\in\{j\}}$, G es funtor y θ natural entonces, por la propiedad universal del producto, existe un morfismo único $\theta'_{\langle B_j\rangle_{j\in J}}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
G\langle B_j\rangle_{j\in J} \arrow[r, "\theta'_{\langle B_j\rangle_{j\in J}}"] \arrow[d, "G(\pi_j)"'] & F^1\langle B_j\rangle_{j\in J} \arrow[d, "\pi_j"] \\
G\langle B_j\rangle_{j\in\{j\}} \arrow[r, "\theta_{B_j}"'] & FB_j,
\end{tikzcd}$$

conmuta. No es difícil mostrar que $\bar{\theta} : G \Rightarrow F^1$, tal que $\bar{\theta}_{\langle B_j\rangle_{j\in J}} = \theta'_{\langle B_j\rangle_{j\in J}}$, es una transformación natural. Claramente $1\cdot\bar{\theta}b^1 = \theta$.
La unicidad de $\bar{\theta}$ es consecuencia de su naturalidad y la propiedad universal del producto. □

COROLARIO 4.9. *Sea* ***Cat*** *la 2-categoría de categorías l-pequeñas. Las siguientes condiciones determinan una seudomónada de Kan derecha* $\mathbb{U}$ *sobre* ***Cat***.

(i) *Sea U :Ob(**Cat**) →Ob(**Cat**) la aplicación tal que*
$$\mathbf{B} \mapsto U\mathbf{B} = Cof(\mathbf{B}).$$
(ii) *Para cada* $\mathbf{B}$ *en* ***Cat****, definimos el funtor* $u\mathbf{B}$ *como* $u\mathbf{B} = \mathbf{b^1} : \mathbf{B} \to U\mathbf{B}$.
(iii) *Para cada funtor* $F : \mathbf{B} \to \mathbf{UA}$ *la transformación natural*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "u\mathbf{B}"] \arrow[dr, "F"'] & U\mathbf{B} \arrow[d, "F^{\mathbb{U}}"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow \mathbb{U}_F = 1"] \\ & U\mathbf{A} \end{tikzcd}$$

exhibe a $F^{\mathbb{U}} = F^1$ *como extesión derecha de* F *a lo largo de* $u\mathbf{B}$.

Mostramos que la KZ-doctrina $\mathfrak{D}'$ sobre **Cat**, tal que el seudofuntor en cuestión asigna a cada categoría l-pequeña $\mathbf{C}$ la categoría l-pequeña libre con coproductos finitos sobre $\mathbf{C}$ y cuya 2-categoría de $\mathfrak{U}'$-álgebras consta de las categorías l-pequeñas con coproductos finitos, las 1-celdas son funtores que preservan coproductos finitos y las 2-celdas son las transformaciones naturales, es una KZ-doctrina desde el contexto de extensiones de Kan.

Describimos la categoría l-pequeña libre que el seudofuntor $\mathfrak{D}'$ asigna a cada categoría l-pequeña $\mathbf{C}$.

Sea $\mathbf{C}$ en **Cat**. No es difícil mostrar que los siguientes conjuntos de objetos y morfismos, así como la composición para tales morfismos definen para una categoría l-pequeña $\mathbf{C}$ una categoría en **Cat** a la que llamamos fam de $\mathbf{C}$ y denotamos por Fam($\mathbf{C}$):

(i) Los objetos son familias $\langle A_i \rangle_{i\in I}$ tal que A_i es un objeto de $\mathbf{C}$ $\forall i \in I$, donde I es un conjunto finito.
(ii) Para $\langle A_i \rangle_{i\in I}$, $\langle B_j \rangle_{j\in J}$ objetos en Fam($\mathbf{C}$), el conjunto Fam($\mathbf{C}$)($\langle A_i \rangle_{i\in I}, \langle B_j \rangle_{j\in J}$) tiene como elementos $\langle \varphi, \langle f_i \rangle_{i\in I} \rangle$, donde $\varphi : I \to J$ es una función y $f_i : A_i \to B_{\varphi(i)}$ es un morfismo en $\mathbf{C}$ $\forall i \in I$.
(iii) Sean $\langle \varphi, \langle f_i \rangle_{i\in I} \rangle : \langle A_i \rangle_{i\in I} \to \langle B_j \rangle_{j\in J}$ y $\langle \psi, \langle g_j \rangle_{j\in J} \rangle : \langle B_j \rangle_{j\in J} \to \langle C_l \rangle_{l\in L}$ morfismos en Fam($\mathbf{C}$), se define la composición de la siguiente manera (la composición en Fam($\mathbf{C}$) la denotamos por yuxtaposición):
$\langle \psi, \langle g_j \rangle_{j\in J} \rangle \langle \varphi, \langle f_i \rangle_{i\in I} \rangle = \langle \psi\varphi, \langle g_{\varphi(i)} f_i \rangle_{l\in L} \rangle$, donde $\psi\varphi : I \to L$ es la composición usual de funciones y $g_{\varphi(i)} f_i$ es la composición usual de morfismos en $\mathbf{C}$.
(iv) Para cada $\langle A_i \rangle_{i\in I}$ en Fam($\mathbf{C}$), tomamos $1_{\langle A_i \rangle_{i\in I}} = \langle 1_I, \langle 1_{A_i} \rangle_{i\in I} \rangle$ que es fácil ver que es el morfismo identidad en $\langle A_i \rangle_{i\in I}$.

El siguiente resultado es la versión dual del Teorema 4.8. Aquí el funtor $b^r : \mathbf{B} \to$Fam($\mathbf{B}$) está definido como sigue:
$$B \mapsto b^r(B) = \langle B \rangle_{\{*\}} \text{ y } f : B \to B' \mapsto \langle 1_{\{*\}}, \langle f \rangle \rangle$$
para B, B' objetos de $\mathbf{B}$ y cada morfismo f en $\mathbf{B}$.

Teorema 4.10. *Sea* $\mathbf{B}$ *una categoría l-pequeña. La completación de* $\mathbf{B}$ *bajo coproductos finitos en* ***Cat*** *es la categoría l-pequeña Fam(*$\mathbf{B}$*). En otras palabras, esto significa que Fam(*$\mathbf{B}$*) tiene coproductos finitos y existe un funtor* $b^r : \mathbf{B} \to$*Fam(*$\mathbf{B}$*) que satisface la siguiente propiedad universal:*
Dado cualquier funtor $F : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ *, para* $\mathbf{A}$ *una categoría l-pequeña que tiene coproductos*

finitos, existen un único funtor F^r que preserva coproductos finitos y una transformación natural δ_F, como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "b^r"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[dr, phantom, bend left, "\delta_F \Uparrow"] & Fam(\mathbf{B}) \arrow[d, "F^r"] \\ & \mathbf{A}, \end{tikzcd}$$

tales que para cada funtor G :Fam($\mathbf{B}$)$\rightarrow$ $\mathbf{A}$ y cualquier transformación natural τ como en

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "b^r"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[dr, phantom, bend left, "\tau \Uparrow"] & Fam(\mathbf{B}) \arrow[d, "G"] \\ & \mathbf{A}. \end{tikzcd}$$

existe una única transformación natural $\bar{\tau} : F^r \to G$ tal que $\tau = \bar{\tau} b^r \cdot \delta_F$.

Naturalmente, también hay una versión dual del Corolario 4.9.

Corolario 4.11. *Sea **Cat** la 2-categoría de categorías l-pequeñas. Las siguientes condiciones determinan una seudomónada de Kan derecha $\mathbb{D}$ sobre **Cat**.*

(i) *Sea D :Ob(**Cat**) $\rightarrow$Ob(**Cat**) la aplicación tal que*

$$\mathbf{B} \mapsto D\mathbf{A} = Fam(\mathbf{B}).$$

(ii) *Para cada $\mathbf{B}$ en **Cat**, definimos el funtor $d\mathbf{B}$ como $d\mathbf{B} = \mathbf{b^r} : \mathbf{B} \to D\mathbf{B}$.*

(iii) *Para cada funtor $F : \mathbf{B} \to D\mathbf{A}$ la transformación natural*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "d\mathbf{B}"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[dr, phantom, bend left, "\mathbb{D}_F = 1 \Uparrow"] & D\mathbf{B} \arrow[d, "F^{\mathbb{D}}"] \\ & D\mathbf{A} \end{tikzcd}$$

exhibe a $F^{\mathbb{D}} = F^r$ como extesión derecha de F a lo largo de $d\mathbf{B}$.

Finalizamos ésta sección con el siguiente comentario.

Sea $\mathbf{C}$ en $\mathbf{Cat}$. Es un simple ejercicio mostrar que los siguientes conjuntos de objetos y morfismos, así como la composición para tales morfismos definen para una categoría l-pequeña $\mathbf{C}$ una categoría en $\mathbf{Cat}$ a la que llamamos cofam* de $\mathbf{C}$ y denotamos por Cof*($\mathbf{C}$):

(i) Los objetos son familias $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ tal que A_i es un objeto de $\mathbf{C}$ $\forall i \in I$, donde I es conjunto.

(ii) Para $\langle A_i \rangle_{i \in I}$, $\langle B_j \rangle_{j \in J}$ objetos en Cof($\mathbf{C}$), el conjunto Cof($\mathbf{C}$)($\langle A_i \rangle_{i \in I}, \langle B_j \rangle_{j \in J}$) tiene como elementos $\langle \varphi, \langle f_j \rangle_{j \in J} \rangle$, donde $\varphi : J \to I$ es una función y $f_j : A_{\varphi(j)} \to B_j$ es un morfismo en $\mathbf{C}$ $\forall j \in J$.

(iii) Sean $\langle \varphi, \langle f_j \rangle_{j \in J} \rangle : \langle A_i \rangle_{i \in I} \to \langle B_j \rangle_{j \in J}$ y $\langle \psi, \langle g_l \rangle_{l \in L} \rangle : \langle B_j \rangle_{j \in J} \to \langle C_l \rangle_{l \in L}$ morfismos en Cof($\mathbf{C}$), se define la composición de la siguiente manera (la composición en Cof($\mathbf{C}$) la denotamos por yuxtaposición):

$\langle \psi, \langle g_l \rangle_{l \in L} \rangle \langle \varphi, \langle f_j \rangle_{j \in J} \rangle = \langle \varphi\psi, \langle g_l f_{\psi(l)} \rangle_{l \in L} \rangle$, donde $\varphi\psi : L \to I$ es la composición usual de funciones y $g_l f_{\psi(l)}$ es la composición usual de morfismos en $\mathbf{C}$.

(iv) Para cada $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ en Cof($\mathbf{C}$), tomamos $1_{\langle A_i \rangle_{i \in I}} = \langle 1_I, \langle 1_{A_i} \rangle_{i \in I} \rangle$.

La descripción de Fam$^*(\mathbf{C})$ para cada $\mathbf{C}$ en $\mathbf{Cat}$ es análoga.
En las demostraciones de el Teorema 4.8, el Teorema 4.10, el Corolario 4.9 y el Corolario 4.11 no se utilizó el hecho de que I sea finito para cada $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ en Cof($\mathbf{C}$). Por lo que tenemos los siguientes resultados para Fam* y Cofam*.

TEOREMA 4.12. *Sea $\mathbf{B}$ una categoría l-pequeña. La completación de $\mathbf{B}$ bajo productos en **Cat** es la categoría Cof*($\mathbf{B}$). En otras palabras, esto significa que Cof*($\mathbf{B}$) tiene productos y existe un funtor $b^* : \mathbf{B} \to$Cof*($\mathbf{B}$) que satisface la siguiente propiedad universal:*
Dado cualquier funtor $F : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, para $\mathbf{A}$ una categoría l-pequeña que tiene productos, existen un único funtor F^* que preserva productos y un isomorfismo natural ϵ_F, como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "b^*"] \arrow[dr, "F"'] & Cof^*(\mathbf{B}) \arrow[d, "F^*"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow \epsilon_F"] \\ & \mathbf{A}, \end{tikzcd}$$

tales que para cada funtor $G :$Cof*($\mathbf{B}$)$\to \mathbf{A}$ y cualquier transformación natural τ como en

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "b^*"] \arrow[dr, "F"'] & Cof^*(\mathbf{B}) \arrow[d, "G"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow \tau"] \\ & \mathbf{A}. \end{tikzcd}$$

existe una única transformación natural $\bar{\tau} : G \to F^*$ tal que $\tau = \epsilon_F \cdot \bar{\tau} b^*$.

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la demostración de el Teorema 4.8. □

COROLARIO 4.13. *Sea **Cat** la 2-categoría de categorías l-pequeñas. Las siguientes condiciones determinan una seudomónada de Kan derecha $\mathbb{U}$ sobre **Cat**.*

(i) *Sea la aplicación $U :$Ob(**Cat**) $\to$Ob(**Cat**) tal que*

$$\mathbf{B} \mapsto U\mathbf{B} = Cof^*(\mathbf{B}).$$

(ii) *Para cada $\mathbf{B}$ en **Cat**, definimos el funtor $u\mathbf{B}$ como $u\mathbf{B} = \mathbf{b}^* : \mathbf{B} \to U\mathbf{B}$.*

(iii) *Para cada funtor $F : \mathbf{B} \to U\mathbf{A}$ la transformación natural*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "u\mathbf{B}"] \arrow[dr, "F"'] & U\mathbf{B} \arrow[d, "F^{\mathbb{U}}"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow \mathbb{U}_F{=}1"] \\ & U\mathbf{A} \end{tikzcd}$$

exhibe a $F^{\mathbb{U}} = F^*$ como extesión derecha de F a lo largo de $u\mathbf{B}$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es semejante a la de el Cororolario 4.9. □

TEOREMA 4.14. *Sea $\mathbf{B}$ una categoría l-pequeña. La completación de $\mathbf{B}$ bajo coproductos en* $\boldsymbol{Cat}$ *es la categoría l-pequeña Fam***(*$\mathbf{B}$*). En otras palabras, esto significa que Fam***(*$\mathbf{B}$*) tiene coproductos y existe un funtor* $b_* : \mathbf{B} \to$*Fam***(*$\mathbf{B}$*) que satisface la siguiente propiedad universal: Dado cualquier funtor* $F : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ *, para* $\mathbf{A}$ *una categoría l-pequeña que tiene coproductos, existen un único funtor* F_* *que preserva coproductos y una transformación natural* δ_F*, como en el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "b_*"] \arrow[dr, "F"'] & Fam^*(\mathbf{B}) \arrow[d, "F_*"] \arrow[dl, phantom, "\Uparrow \delta_F"] \\ & \mathbf{A}, \end{tikzcd}$$

tales que para cada funtor G :Fam**(*$\mathbf{B}$*)*$\to \mathbf{A}$ *y cualquier transformación natural* τ *como en*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "b_*"] \arrow[dr, "F"'] & Fam^*(\mathbf{B}) \arrow[d, "G"] \arrow[dl, phantom, "\Uparrow \tau"] \\ & \mathbf{A}. \end{tikzcd}$$

existe una única transformación natural $\bar{\tau} : F_* \to G$ *tal que* $\tau = \bar{\tau} b_* \cdot \delta_F$*.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es esencialmente la misma que la de el Teorema 4.10. □

COROLARIO 4.15. *Sea* $\boldsymbol{Cat}$ *la 2-categoría de categorías l-pequeñas. Las siguientes condiciones determinan una seudomónada de Kan derecha* $\mathbb{D}$ *sobre* $\boldsymbol{Cat}$*.*

(i) *Sea la aplicación D :Ob(*$\boldsymbol{Cat}$*)* $\to$*Ob(*$\boldsymbol{Cat}$*) tal que*

$$\mathbf{B} \mapsto D\mathbf{A} = Fam^*(\mathbf{B}).$$

(ii) *Para cada* $\mathbf{B}$ *en* $\boldsymbol{Cat}$*, definimos el funtor* $d\mathbf{B}$ *como* $d\mathbf{B} = \mathbf{b}_* : \mathbf{B} \to D\mathbf{B}$*.*

(iii) *Para cada funtor* $F : \mathbf{B} \to D\mathbf{A}$ *la transformación natural*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "d\mathbf{B}"] \arrow[dr, "F"'] & D\mathbf{B} \arrow[d, "F^{\mathbb{D}}"] \arrow[dl, phantom, "\Uparrow \mathbb{D}_F = 1"] \\ & D\mathbf{A} \end{tikzcd}$$

exhibe a $F^{\mathbb{D}} = F_*$ *como extensión derecha de* F *a lo largo de* $d\mathbf{B}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la de el Corolario 4.11. □

2. Ejemplos de leyes distributivas entre Seudomónadas de Kan

Iniciamos esta sección con la siguiente observación en la que aclaramos lo que se entiende por una ley distributiva de una seudomónada de Kan derecha sobre una seudomónada de Kan izquierda en una 2-categoría $\mathcal{K}$.

OBSERVACIÓN 4.16. *Sean* $\mathbb{D}$ *una seudomónada de Kan izquierda y* $\mathbb{U}$ *una seudomónada de Kan derecha sobre* $\mathcal{K}$*. Se muestra en* **[18]** *que* $\mathbb{D}$ *y* $\mathbb{U}$ *inducen una KZ-doctrina y una co-KZ doctrina respectivamente, a las que también denotamos por* $\mathbb{D}$ *y* $\mathbb{U}$*. Además, como se muestra* *en* [**13**]*, ambas estructuras inducen seudomónadas a las que denotamos por* $\mathbb{D}'$ *y* $\mathbb{U}'$*. Si hay una ley distributiva de* $\mathbb{U}'$ *sobre* $\mathbb{D}'$ *decimos que hay una ley distributiva de* $\mathbb{U}$ *sobre* $\mathbb{D}$[**14**].

El siguiente teorema es la principal herramienta que usaremos en la demostración de algunos de nuestros resultados más importantes. Para su demostración, se remite al lector a [**18**].

Teorema 4.17. *Sean* $\mathbb{D}$ *una KZ-doctrina y* $\mathbb{U}$ *una co-KZ doctrina sobre* $\mathcal{K}$*. Una ley distributiva de* $\mathbb{U}$ *sobre* $\mathbb{D}$ *puede equivalentemente estar dada por los siguientes datos*

(a) *Para cada* $\mathbf{A}$ *en* $\mathcal{K}$*, una estructura de* $\mathbb{U}$*-álgebra* $(DU\mathbf{A}, (-)^{\lambda})$.
(b) *Para cada* $L : \mathbf{B} \to U\mathbf{A}$, $D(L^{\mathbb{U}}) : (DU\mathbf{B}, (\,)^{\lambda})) \to (DU\mathbf{B}, (\,)^{\lambda}))$ *es 1-celda de* $\mathbb{U}$*-álgebras.*
(c) *Para cada* $\mathbf{A}$, $d_{u\mathbf{A}}^{-1}$ *exhibe a* $dU\mathbf{A}$ *como extensión de Kan derecha de* $Du\mathbf{A}d\mathbf{A}$ *a lo largo de* $u\mathbf{A}$*.*
(d) *Para cada* $H : \mathbf{C} \to DU\mathbf{A}$, $(H^{\lambda})^{\mathbb{D}} : (DU\mathbf{C}, (\,)^{\lambda})) \to (DU\mathbf{A}, (\,)^{\lambda}))$ *es un morfismo de* $\mathbb{U}$*-álgebras.*
(e) *Para cada* $L : \mathbf{B} \to U\mathbf{A}$, $\mathbb{U}_L$ *exhibe a* $dU\mathbf{A} \circ \mathbf{L}^{\mathbb{U}}$ *como extensión de Kan derecha de* $dU\mathbf{A} \circ \mathbf{L}$ *a lo largo de* $u\mathbf{B}$*.*

A continuación se analizará, desde el contexto de extensiones de Kan, la ley distributiva ya conocida de $\mathfrak{U}$ sobre $\mathfrak{D}$ en la 2-categoría **ord**.

Proposición 4.18. *Sean* $\mathbb{U}$*,* $\mathbb{D}$ *como en el Teorema 4.4 y en el Corolario 4.6 respectivamente. Hay una ley distributiva de* $\mathbb{U}$ *sobre* $\mathbb{D}$*.*

Demostración. Utilizamos el Teorema 4.17.

(a) Demostramos que para cada $\mathbf{Y}$ tenemos una $\mathbb{U}$-álgebra estructura $(DU\mathbf{Y}, (\,)^{\lambda})$.

Notemos que para $\{X_i\}_{i\in I}$ tal que $X_i \in D\mathbf{X}$, $\mathbf{X}$ copo, entonces $\prod_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I} X_i$. i.e. $D\mathbf{X}$ es cerrado bajo productos.
Por la Proposición 4.2 para cada $F : \mathbf{X} \to DU\mathbf{Y}$, definimos F^{λ} y λ_F como

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[r, "u\mathbf{X}"] \arrow[dr, "F"'] & U\mathbf{X} \arrow[d, "F^{\lambda}=F^{l}"] \arrow[dl, phantom, "/\!/\ \lambda_F=1"] \\
& DU\mathbf{Y},
\end{tikzcd}$$

Como F^{λ} preserva productos, 1 exhibe a F^{λ} como extesión de Kan derecha de F a lo largo de $u\mathbf{X}$.
Resta mostrar que para cada $G : \mathbf{A} \to U\mathbf{X}$ en $\mathcal{K}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "u\mathbf{A}"] \arrow[dr, "G"'] & U\mathbf{A} \arrow[d, "G^{\mathbb{U}}"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow\mathbb{U}_G"] & \\
& U\mathbf{X} \arrow[r, "F^{\lambda}"] & DU\mathbf{Y},
\end{tikzcd}$$

exhibe a $F^{\lambda}G^{\mathbb{U}}$ como extesión de Kan derecha de $F^{\lambda}G$ a lo largo de $u\mathbf{A}$. Sean la 1-celda H y la 2-celda θ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "u\mathbf{A}"] \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\theta"] & U\mathbf{A} \arrow[d, "H"] \\ U\mathbf{X} \arrow[r, "F^{\lambda}"'] & DU\mathbf{Y}, \end{tikzcd}$$

Tenemos la 2-celda

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{A} \arrow[r, "u\mathbf{A}"] \arrow[dl, "u\mathbf{A}"'] \arrow[d, "G"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\theta"] & U\mathbf{A} \arrow[d, "H"] \\ U\mathbf{A} \arrow[r, "G^{\mathbb{U}}"'] \arrow[ur, phantom, "\swarrow 1"] & U\mathbf{X} \arrow[r, "F^{\lambda}"'] & DU\mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

i.e. $H(\uparrow a) \leq F^{\lambda}G(a)$, $\forall a \in \mathbf{A}$.
Sea $A \in U\mathbf{A}$, recordemos que $\prod_{a\in A} \uparrow a = A$. Así $A \leq \uparrow a$, $\forall a \in A \Rightarrow HA \leq H(\uparrow a)$, $\forall a \in A$, porque H es mónotona.

$$\begin{gathered} \Rightarrow HA \leq H(\uparrow a) \leq F^{\lambda}G(a), \forall a \in A \\ \Rightarrow H(A) \subseteq F^{\lambda}G(a) = \bigcap_{t\in G(a)} F(t) \subseteq F(t) \ \forall t \in G(a), \forall \in A \\ \Rightarrow HA \subseteq \bigcap_{t\in \bigcup_{a\in A} G(a)} F(t) = F^{\lambda}G^{\mathbb{U}}(A). \end{gathered}$$

$$\therefore \quad HA \leq F^{\lambda}G^{\mathbb{U}}(A) \Leftrightarrow \exists \quad \bar{\tau} : H \to F^{\lambda}G^{\mathbb{U}},$$

por la definición de **ord**.
Por otro lado, sea $a \in A \Rightarrow H(\uparrow a) \leq F^{\lambda}G^{\mathbb{U}}(\uparrow a)$ y $F^{\lambda}G^{\mathbb{U}}(\uparrow a) \leq F^{\lambda}G(a)$, pues $G^{\mathbb{U}}(\uparrow a) \leq Ga$ $\Rightarrow H(\uparrow a) \leq F^{\lambda}G(a)$.

$$\therefore \quad F^{\lambda}\mathbb{U}_G \cdot \bar{\tau}u\mathbf{A} = \tau.$$

Además, por la definición de **ord**, $\bar{\tau}$ es única.

$$\therefore \quad (DU\mathbf{Y}, (\ )^{\lambda}) \text{ es } \mathbb{U}\text{-álgebra estructura.}$$

(b) Para cada $L : \mathbf{X} \to U\mathbf{Y}$, $D(L^{\mathbb{U}}) : (DU\mathbf{X}, (\quad)^{\lambda}) \to (DU\mathbf{Y}, (\quad)^{\lambda})$ es 1-celda de $\mathbb{U}$-álgebras. En otras palabras es suficiente con mostrar que para cada $F : \mathbf{P} \to DU\mathbf{X}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P} \arrow[r, "u\mathbf{P}"] \arrow[dr, "F"'] & U\mathbf{P} \arrow[d, "F^{\lambda}"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\lambda_F"] & \\ & DU\mathbf{X} \arrow[r, "D(L^{\mathbb{U}})"] & DU\mathbf{Y}, \end{tikzcd}$$

exhibe a $D(L^{\mathbb{U}})F^{\lambda}$ como extensión de Kan derecha de $D(L^{\mathbb{U}})F$ a lo largo de $u\mathbf{P}$.

OBSERVACIÓN 4.19. *La 1-celda $D(L^{\mathbb{U}}) : DU\mathbf{X} \to \mathbf{DUY}$ preserva productos. Esto se sigue si consideramos que $U\mathbf{X}$ tiene productos,definición de $U\mathbf{X}$, $L^{\mathbb{U}}$ preserva productos y definición de $D(L^{\mathbb{U}})$ ($D(L^{\mathbb{U}}) = (dU\mathbf{Y} \circ \mathbf{L}^{\mathbb{U}})^{\mathbb{D}}$, consutar* [**18**]*).*

$$\therefore \quad D(L^{\mathbb{U}}) \textit{ preserva productos.}$$

Sean G y θ, 1-celda y 2-celda respectivamente, tales que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P} \arrow[r, "u\mathbf{P}"] \arrow[d, "F"'] & U\mathbf{P} \arrow[d, "G"] \arrow[dl, phantom, "\swArrow\theta"] \\
DU\mathbf{X} \arrow[r, "D(L^{\mathbb{U}})"'] & DU\mathbf{Y}
\end{tikzcd}$$

i.e. Para cada $R \in U\mathbf{P}$, como $R = \bigcup_{r\in R} \uparrow r$ y $R \leq \uparrow r$, $\forall r \in R \Rightarrow G(R) \leq G(\uparrow r)$, $\forall r \in R$. Ahora bien, $G(R) \leq G(\uparrow r) \leq D(L^{\mathbb{U}})F(r)$, $\forall r \in R$, θ 2-celda. Por otra parte $D(L^{\mathbb{U}})F^{\lambda}(R) = D(L^{\mathbb{U}})\bigcap_{r\in R} F(r) \leq D(L^{\mathbb{U}})F(r)$, $\forall r \in R$ y además $\prod_{r\in R} D(L^{\mathbb{U}})F(r) = D(L^{\mathbb{U}})\prod_{r\in R} F(r) = D(L^{\mathbb{U}})F^{\lambda}(R)$. Por lo tanto, por la propieded universal del producto, $G(R) \leq D(L^{\mathbb{U}})F^{\lambda}(R)$. Por la definición de **ord** se tiene que existe una 2-celda única
$\bar{\theta} : G \to D(L^{\mathbb{U}})F^{\lambda}$ tal que $D(L^{\mathbb{U}})\lambda_F.\bar{\theta}u\mathbf{P} = \theta$.
Por lo tanto, se prueba (b).
(c) Es un sencillo ejercicio.

(d) Para cada $H : \mathbf{X} \to DU\mathbf{Y}$, $(H^{\lambda})^{\mathbb{D}} : (DU\mathbf{X}, (\ \ )^{\lambda}) \to (DU\mathbf{Y}, (\ \ )^{\lambda})$ es 1-celda de $\mathbb{U}$-álgebras. Queremos probar que para cada $F : \mathbf{P} \to DU\mathbf{X}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P} \arrow[r, "u\mathbf{P}"] \arrow[dr, "F"'] & U\mathbf{P} \arrow[d, "F^{\lambda}"] \arrow[dl, phantom, "="] & \\
& DU\mathbf{X} \arrow[r, "(H^{\lambda})^{\mathbb{D}}"] & DU\mathbf{Y},
\end{tikzcd}$$

exhibe a $(H^{\lambda})^{\mathbb{D}}F^{\lambda}$ como extensión derecha de $(H^{\lambda})^{\mathbb{D}}F$ a lo largo de $u\mathbf{P}$.
Sean la 1-celda G y la 2-celda τ tales que:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P} \arrow[r, "u\mathbf{P}"] \arrow[d, "F"'] & U\mathbf{P} \arrow[d, "G"] \arrow[dl, phantom, "\swArrow\tau"] \\
DU\mathbf{X} \arrow[r, "(H^{\lambda})^{\mathbb{D}}"'] & DU\mathbf{Y}
\end{tikzcd}$$

De modo que $G(\uparrow p) \leq (H^{\lambda})^{\mathbb{D}}F(p)$, $\forall p \in \mathbf{P}$. Ahora bien, para cualquier $P \in U\mathbf{P}$ tenemos que $P = \prod_{p\in P} \uparrow p \Rightarrow G(P) \leq G(\uparrow p) \leq (H^{\lambda})^{\mathbb{D}}F(p)$, $\forall p \in P$.
Además $(H^{\lambda})^{\mathbb{D}}F^{\lambda}(P) = (H^{\lambda})^{\mathbb{D}}\prod_{p\in P} F(p) = \prod_{p\in P}(H^{\lambda})^{\mathbb{D}}F(p)$, dado que $(H^{\lambda})^{\mathbb{D}}$ preserva productos (para esto consideramos que el conjunto $U\mathbf{X}$ tiene productos, H^{λ} preserva productos y la definición de $U\mathbf{X}$).
De esta forma $\prod_{p\in P}(H^{\lambda})^{\mathbb{D}}F(p) \leq (H^{\lambda})^{\mathbb{D}}F(p)$, $\forall p \in P$. Entonces por la propiedad universal del producto $G(P) \leq \prod_{p\in P}(H^{\lambda})^{\mathbb{D}}F(p) = (H^{\lambda})^{\mathbb{D}}F^{\lambda}(P)$. Por la definición de **ord** existe una única 2-celda $\bar{\tau} : G \to (H^{\lambda})^{\mathbb{D}}F^{\lambda}$ tal que $(H^{\lambda})^{\mathbb{D}}1.\bar{\tau}u\mathbf{P} = \tau$.
Por lo tanto, se prueba (d).

(e) Para cada $L : \mathbf{X} \to U\mathbf{Y}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "u\mathbf{X}"] \arrow[dr, "L"'] & U\mathbf{X} \arrow[d, "L^{\mathbb{U}}"] \arrow[dl, phantom, "/\!/"] & \\ & U\mathbf{Y} \arrow[r, "dU\mathbf{Y}"] & DU\mathbf{Y}, \end{tikzcd}$$

exhibe a $dU\mathbf{Y} \circ \mathbf{L}^{\mathbb{U}}$ como extensión de Kan derecha de $dU\mathbf{Y} \circ \mathbf{L}$ a lo largo de $u\mathbf{X}$.
Es sencillo ver que $dU\mathbf{Y}$ preserva productos. (e) se satisface gracias a que $dU\mathbf{Y} \circ \mathbf{L}^{\mathbb{U}}$ preserva productos y porque $dU\mathbf{Y} \circ \mathbf{L} = \mathbf{dUY} \circ \mathbf{L}^{\mathbb{U}} \circ \mathbf{uX}$.
Por el Teorema 4.17 hay una ley distributiva de $\mathbb{U}$ sobre $\mathbb{D}$. $\square$

Para finalizar, en el contexto de extensiones de Kan, mostramos la ley distributiva de $\mathfrak{U}'$ sobre $\mathfrak{D}'$ en la 2-categoría **Cat**. Para ello son necesarias las siguientes observaciones, así como los siguientes lemas.

OBSERVACIÓN 4.20. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría l-pequeña que tiene productos finitos. Dado que* $\mathbf{C}$ *tiene productos finitos entonces tiene objeto terminal. Sea* X *el objeto terminal en* $\mathbf{C}$*. Así que* $\langle X = C_i \rangle_{i \in \{i\}}$ *es objeto terminal en Fam(*$\mathbf{C}$*).*
Ahora bien, veamos que el producto de cualesquiera dos objetos en Fam($\mathbf{C}$*) existe.*
Sean $\langle A_i \rangle_{i \in I}$, $\langle A_j \rangle_{j \in J}$ *objetos en Fam(*$\mathbf{C}$*) y,*

$$A_i \xleftarrow{p_i^j} A_i \times A_j \xrightarrow{p_j^i} A_j$$

el producto con sus correspondientes proyecciones para cada $i \in I$ *y para cada* $j \in J$*. No es difícil mostrar que*

$$\langle A_i \times A_j \rangle_{(i,j) \in I \times J} \xrightarrow{\langle P_I, \langle p_i^j \rangle_{(i,j) \in I \times J} \rangle} \langle A_i \rangle_{i \in I}$$
$$\langle A_i \times A_j \rangle_{(i,j) \in I \times J} \xrightarrow{\langle P_J, \langle p_j^i \rangle_{(i,j) \in I \times J} \rangle} \langle A_j \rangle_{j \in J}$$

son el producto y las correspondientes proyecciones de $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ *y* $\langle A_j \rangle_{j \in J}$*. En este último diagrama* P_I *y* P_J *son las proyecciones en*

$$I \xleftarrow{P_I} I \times J \xrightarrow{P_J} J.$$

De este modo concluimos que la categoría $D\mathbf{C}$ *=Fam(*$\mathbf{C}$*) en el Corolario 4.11, tiene productos finitos.*

Es un ejercicio de rutina la prueba del siguiente:

LEMA 4.21. *Sean* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *categorías l-pequeñas que tienen productos finitos. Sea* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *un funtor que preserva objeto terminal y el producto de cualesquiera dos objetos entonces,* F *preserva productos finitos.*

Consecuencia de nuestro anterior lema es la siguiente observación, cuya demostración no es más que un sencillo cálculo.

OBSERVACIÓN 4.22. *Sea* $\mathbf{A}$ *una categoría l-pequeña entonces, el funtor* $dU\mathbf{A} : U\mathbf{A} \to DU\mathbf{A}$ *preserva productos finitos. Aquí* $U\mathbf{A}$ *y* $DU\mathbf{A}$ *son como en el Corolario 4.9 y el Corolario 4.11 respectivamente.*

LEMA 4.23. *Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría l-pequeña que tiene productos finitos y* $H : \mathbf{C} \to D\mathbf{A}$ *un funtor que preserva productos finitos entonces* $H^{\mathbb{D}} : D\mathbf{C} \to D\mathbf{A}$ *preserva productos finitos.*

DEMOSTRACIÓN. Como $H^{\mathbb{D}} \circ d\mathbf{C} = \mathbf{H}$ y dado que H preserva objeto terminal entonces $H^{\mathbb{D}}$ preserva objeto terminal.
Además, es un ejercicio de rutina mostrar que para cada $\langle C_i \rangle_{i\in I}$ en $D\mathbf{C}$ se satisface $\langle C_i \rangle_{i\in I} \cong \coprod_{i\in I} \langle C_i \rangle_{i\in\{i\}}$.
Sean $\langle C_i \rangle_{i=1}^{k}$ $\langle D_j \rangle_{j=1}^{l}$ en $D\mathbf{C}$, tal que C_i, D_j son objetos en $\mathbf{C}$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots k\}$ y para cada $j \in \{1, 2, \cdots l\}$. Entonces

$$H^{\mathbb{D}}(\langle C_i \rangle_{i=1}^{k} \times \langle D_j \rangle_{j=1}^{l}) = H^{\mathbb{D}}\langle C_1 \rangle_{1\in\{1\}} \coprod H^{\mathbb{D}}(\langle C_i \rangle_{i=2}^{k} \times \langle D_j \rangle_{j=1}^{l}) =$$

$$H^{\mathbb{D}}(\langle C_i \rangle_{i=1}^{k-1}) \coprod H^{\mathbb{D}}\langle C_k \rangle_{k\in\{k\}} \times \langle D_j \rangle_{j=1}^{l}) =$$

$$H^{\mathbb{D}}(\langle C_i \rangle_{i=1}^{k-1}) \coprod H^{\mathbb{D}}(\langle C_k \rangle_{k\in\{k\}} \times \langle D_1 \rangle_{1\in\{1\}}) \coprod H^{\mathbb{D}}(\langle D_j \rangle_{j=2}^{l}) =$$

$$H^{\mathbb{D}}(\langle C_i \rangle_{i=1}^{k-1}) \coprod H^{\mathbb{D}}(\langle C_k \times D_1 \rangle_{(k,1)\in\{(k,1)\}}) \coprod H^{\mathbb{D}}(\langle D_j \rangle_{j=2}^{l}) =$$

$$H^{\mathbb{D}}(\langle C_i \rangle_{i=1}^{k-1}) \coprod H(C_k \times D_1) \coprod H^{\mathbb{D}}(\langle D_j \rangle_{j=2}^{l}) =$$

$$H^{\mathbb{D}}(\langle C_i \rangle_{i=1}^{k-1}) \coprod H(C_k) \times H(D_1) \coprod H^{\mathbb{D}}(\langle D_j \rangle_{j=2}^{l}) =$$

$$H^{\mathbb{D}}(\langle C_i \rangle_{i=1}^{k-1}) \coprod H^{\mathbb{D}}(\langle C_k \rangle_{k\in\{k\}}) \times H^{\mathbb{D}}(\langle D_1 \rangle_{1\in\{1\}}) \coprod H^{\mathbb{D}}(\langle D_j \rangle_{j=2}^{l}) =$$

$$H^{\mathbb{D}}(\langle C_i \rangle_{i=1}^{k}) \times H^{\mathbb{D}}(\langle D_j \rangle_{j=1}^{l}).$$

Hemos utilizado que H preserva productos y que $H^{\mathbb{D}} \circ d\mathbf{C} = H$. □

TEOREMA 4.24. *Sean* $\mathbb{U}$, $\mathbb{D}$ *como en el Corolario 4.9 y en el Corolario 4.11 respectivamente. Entonces existe una ley distributiva de* $\mathbb{U}$ *sobre* $\mathbb{D}$.

DEMOSTRACIÓN. Utilizamos el Teorema 4.17.
(a) Mostramos que para cada $\mathbf{A}$ tenemos una $\mathbb{U}$-álgebra estructura $(DU\mathbf{A}, (\ )^{\lambda})$.
Sabemos que $DU\mathbf{A}$ tiene productos finitos por la Observación 4.20. De este modo, para cada $H : \mathbf{B} \to \mathrm{DU}\mathbf{A}$ definimos $H^{\lambda} = H^{1}$ y $\lambda_H = \epsilon_H$ como en el Teorema 4.8.

Veamos que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "u\mathbf{C}"] \arrow[dr, "T"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\Swarrow \mathbb{U}_T"] & U\mathbf{C} \arrow[d, "T^{\mathbb{U}}"] & \\
 & U\mathbf{B} \arrow[r, "H^{\lambda}"] & DU\mathbf{A},
\end{tikzcd}$$

exhibe a $H^{\lambda}T^{\mathbb{U}}$ como extensión derecha de Kan de $H^{\lambda}T$ a lo largo de $u\mathbf{C}$.
Sean G, θ, un funtor y una transformación natural como en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "u\mathbf{C}"] \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \theta"] & U\mathbf{C} \arrow[d, "G"] \\
U\mathbf{B} \arrow[r, "H^{\lambda}"'] & DU\mathbf{A}.
\end{tikzcd}$$

Sea $\langle C_j\rangle_{j\in J}$ en $U\mathbf{C}$, sabemos que este es de la forma

$$\langle\langle C_j\rangle_{j\in J} \xrightarrow{\pi_j=\langle e_j,\langle 1_{C_j}\rangle\rangle} \langle C_j\rangle_{j\in\{j\}}\rangle_{j\in J},$$

analógo al cono en (16). Dado que $H^\lambda T^{\mathbb{U}}$ preserva productos finitos y por la propiedad universal del producto entonces existe un único morfismo $\theta'_{\langle C_j\rangle_{j\in J}}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
G\langle C_j\rangle_{j\in J} \arrow[r, "\theta'_{\langle C_j\rangle_{j\in J}}"] \arrow[d, "G\pi_j"'] & H^\lambda T^{\mathbb{U}}\langle C_j\rangle_{j\in J} \arrow[d, "H^\lambda T^{\mathbb{U}}\pi_j"] \\
G\langle C_j\rangle_{j\in\{j\}} \arrow[r, "\theta_{C_j}"'] & H^\lambda T^{\mathbb{U}}\langle C_j\rangle_{j\in\{j\}}.
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\bar{\theta} : G \Rightarrow H^\lambda T^{\mathbb{U}}$ definida como $\bar{\theta}_{\langle C_j\rangle_{j\in J}} = \theta'_{\langle C_j\rangle_{j\in J}}$, para cada $\langle C_j\rangle_{j\in J}$ es natural. Sea $x = \langle\varphi, \langle f_k\rangle_{k\in K}\rangle : \langle C_j\rangle_{j\in J} \to \langle C'_k\rangle_{k\in K}$. Por la definición de x tenemos que

$$\begin{tikzcd}
\langle C_j\rangle_{j\in J} \arrow[r, "x"] \arrow[d, "\pi_{\varphi(k)}"'] & \langle C'_k\rangle_{k\in K} \arrow[d, "\pi'_k"] \\
\langle C_{\varphi(k)}\rangle_{\varphi(k)\in\{\varphi(k)\}} \arrow[r, "x_k=\langle e,\langle f_k\rangle_{k\in\{k\}}\rangle"'] & \langle C'_k\rangle_{k\in\{k\}}.
\end{tikzcd} \tag{17}$$

conmuta.
Ahora bien, en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G\langle C_{\varphi(k)}\rangle_{\varphi(k)\in\{\varphi(k)\}} \arrow[d, "S(x_k)"'] \arrow[rrr, bend left, "\theta_{C_j}"] & G\langle C_j\rangle_{j\in J} \arrow[l, "S(\pi_{\varphi(k)})"] \arrow[r, "\theta'_{\langle C_j\rangle_{j\in J}}"'] \arrow[d, "S(x)"] & H^\lambda T^{\mathbb{U}}\langle C_j\rangle_{j\in J} \arrow[r, "H^\lambda T^{\mathbb{U}}\pi_{\varphi(k)}"'] \arrow[d, "H^\lambda T^{\mathbb{U}}(x)"'] & H^\lambda T^{\mathbb{U}}\langle C_{\varphi(k)}\rangle_{\varphi(k)\in\{\varphi(k)\}} \arrow[d, "H^\lambda T^{\mathbb{U}}(x_k)"] \\
G\langle C'_k\rangle_{k\in\{k\}} \arrow[rrr, bend right, "\theta'_{C'_k}"'] & G\langle C'_k\rangle_{k\in K} \arrow[l, "S\pi'_k"] \arrow[r, "\theta'_{\langle C'_k\rangle_{k\in K}}"'] & H^\lambda T^{\mathbb{U}}\langle C'_k\rangle_{k\in K} \arrow[r, "H^\lambda T^{\mathbb{U}}(\pi'_k)"'] & H^\lambda T^{\mathbb{U}}\langle C'_k\rangle_{k\in\{k\}}
\end{tikzcd}$$

las partes ¨superior¨ e ¨inferior¨ son conmutativas (definición de $\bar{\theta}$), el primer cuadrado (de izquierda a derecha) conmuta porque este es G evaluado en (17), el tercer cuadrado es conmutativo por ser $H^\lambda T^{\mathbb{U}}$ evaluado en (17) y también tenemos que el ¨contorno¨ de nuestro diagrama es conmutativo (naturalidad de θ). Así

$$H^\lambda T^{\mathbb{U}}(\pi'_k) \circ H^\lambda T^{\mathbb{U}}(x) \circ \theta'_{\langle C_j \rangle_{j\in J}} = H^\lambda T^{\mathbb{U}}(\pi'_k) \circ \theta'_{\langle C'_k \rangle_{k\in K}} \circ S(x)$$

para cada $k \in K$. Por tanto, por la propiedad universal del producto, se sigue que

$$H^\lambda T^{\mathbb{U}}(x) \circ \theta'_{\langle C_j \rangle_{j\in J}} = \theta'_{\langle C'_k \rangle_{k\in K}} \circ S(x).$$

Por lo tanto, concluimos que $\bar{\theta}$ es natural.
Es evidente que $H^\lambda U_T \cdot \bar{\theta} u\mathbf{C} = \theta$.
La unicidad de $\bar{\theta}$ se tiene gracias a su naturalidad, a su definición y a la propiedad universal del producto.
(b) Para cada $L : \mathbf{B} \to U\mathbf{A}$, $D(L^{\mathbb{U}}) : (DU\mathbf{B}, (\ )^\lambda) \to (\mathbf{DUA}, (\ )^\lambda)$ es una 1-celda de $\mathbb{U}$-álgebras. Por el Lema 4.23, se sigue que $D(L^{\mathbb{U}}) = (dU\mathbf{A} \circ \mathbf{L}^{\mathbb{U}})^{\mathbb{D}}$ preserva productos finitos porque $L^{\mathbb{U}}$ preserva productos finitos.
Así, la demostración de que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "u\mathbf{C}"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \lambda_F", shift left=3] & U\mathbf{C} \arrow[d, "F^\lambda"] & \\
& DU\mathbf{B} \arrow[r, "D(L^{\mathbb{U}})"] & DU\mathbf{A},
\end{tikzcd}$$

exhibe a $D(L^{\mathbb{U}}) \circ F^\lambda$ como extensión de Kan derecha de $D(L^{\mathbb{U}}) \circ F$ a lo largo de $u\mathbf{C}$ es análoga al (a) porque $D(L^{\mathbb{U}}) \circ F^\lambda$ preserva productos finitos y por la definición de $U\mathbf{C}$.
(c) Es un simple ejercicio de rutina.

(d) Para cada $H : \mathbf{B} \to \mathbf{DUA}$, $(H^\lambda)^{\mathbb{D}} : (DU\mathbf{B}, (\ )^\lambda) \to (DU\mathbf{A}, (\ )^\lambda)$ es 1-celda de $\mathbb{U}$-álgebras.
Gracias al Lema 4.23, $(H^\lambda)^{\mathbb{D}}$ preserva productos finitos porque H^λ preserva productos finitos.
De igual modo que en (a), se muestra que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "u\mathbf{C}"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \lambda_F", shift left=3] & U\mathbf{C} \arrow[d, "F^\lambda"] & \\
& DU\mathbf{B} \arrow[r, "(H^\lambda)^{\mathbb{D}}"] & DU\mathbf{A},
\end{tikzcd}$$

exhibe a $(H^\lambda)^{\mathbb{D}} \circ F^\lambda$ como extensión de Kan derecha de $(H^\lambda)^{\mathbb{D}} \circ F$ a lo largo de $u\mathbf{C}$ porque $(H^\lambda)^{\mathbb{D}} \circ F^\lambda$ preserva productos finitos y por la definición de $U\mathbf{C}$.
(e) De manera semejante como en (a), se muestra que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, "u\mathbf{B}"] \arrow[dr, "L"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \mathbb{U}_L", shift left=3] & U\mathbf{B} \arrow[d, "L^{\mathbb{U}}"] & \\
& U\mathbf{A} \arrow[r, "dU\mathbf{A}"] & DU\mathbf{A},
\end{tikzcd}$$

exhibe a $dU\mathbf{A} \circ \mathbf{L}^{\mathbb{U}}$ como extensión de Kan derecha de $dU\mathbf{A} \circ \mathbf{L}$ a lo largo de $u\mathbf{B}$, para cada $L : \mathbf{B} \to U\mathbf{A}$. Para ello utilizamos que $dU\mathbf{A}$ preserva productos finitos (Observación 4.22) y por tanto que $dU\mathbf{A} \circ \mathbf{L}^{\mathbb{U}}$ también preserva productos finitos. $\square$

Capítulo 5

Cocompletación libre

El propósito de este capítulo es dar un panorama del uso y significado de leyes distributivas en computación, enfocado al estudio de sus propiedades para buscar modelar de manera unificada sustitución y variable imprecindible en diferentes contextos; en particular para modelar substitución en el contexto cartesiano como en el trabajo de Fiore et al [**24**]. Todo este análisis será en el contexto de extensiones de Kan [**18**].
Fiore et.al. toma la categoría cocartesiana libre sobre 1 como categoría de contexto y entonces considera su categoría de pregavillas para construir modelos abstractos para variable imprecindible y sustitución. En [**24**] un modelo para sustitución que unifique esta y otras variaciones es construido usando la categoría de pregavillas sobre una categoría pequeña con estructura que modela el contexto. Tales estructuras en diferentes contextos están dadas por seudomónadas $\mathbb{S}$ sobre **Cat**, y las categorías de pregavillas están dadas como la seudomónada cocompletación libre $\mathbb{T}$ sobre **Cat**, por lo tanto el análisis de leyes distributivas es aplicado a la combinación de una seudomónada con la seudomónada cocompletación $\mathbb{T}$ en algún contexto.

Iniciamos este capítulo con la demostración de que la completación $\overline{\mathbf{A}}$ de cada categoría l-pequeña $\mathbf{A}$ bajo colímites pequeños es la subcategoría plena de $\mathbf{Con}^{\mathbf{A}^{\mathbf{op}}}$ determinada por todos los colímites pequeños de representables. Para este próposito ha sido de gran ayuda [**6**]. Como consecuencia de tal hecho tenemos que existe una seudomónada derecha de Kan $\mathbb{D}$ sobre **Cat**, tal que en cada categoría l-pequeña $\mathbf{A}$ el valor del seudofuntor en cuestión es $\overline{\mathbf{A}}$. La 2-categoría de álgebras $\mathbb{D}$-$\overline{Alg}$ tiene como objetos a las categorías l-pequeñas con colímites pequeños, las 1-celdas son funtores que preservan colímites pequeños y las 2-celdas son transformaciones naturales.
Dualmente existe una seudomónada izquierda de Kan $\mathbb{U}$ sobre **Cat**, tal que en cada categoría $\mathbf{A}$ l-pequeña el valor del seudofuntor en cuestión es la subcategoría plena de $(\mathbf{Con}^{\mathbf{A}})^{op}$ determinada por todos los límites pequeños de representables. La 2-categoría de álgebras $\mathbb{U}$-$\overline{Alg}$ tiene como objetos a las categorías l-pequeñas con límites pequeños, las 1-celdas son funtores que preservan límites pequeños y las 2-celdas son transformaciones naturales.
También en este capítulo la conocida ley distributiva de $\mathbb{U}$ sobre $\mathbb{D}$ ([**2**] y [**16**]) es presentada en términos de extensiones de Kan. Para tal afirmación mostramos previamente si $\mathbf{A}$ es una categoría l-pequeña completa entonces $\mathbf{Luc}(\mathbf{A}^{\mathbf{op}})$ (la categotía de funtores lúcidos de $\mathbf{A}^{\mathbf{op}}$ en **Con**) es completa y $\mathbf{Luc}(\mathbf{A}^{\mathbf{op}}) = \mathbf{DA}$. Para la demostración del primer resultado ha sido de gran ayuda [**5**], para el segundo hemos utilizado [**21**]. Un resultado más general de este hecho se demuestra en [**2**].

Sean T_{fp} y T_{coc} como en el Ejemplo 8.1 y el Ejemplo 8.7 en [**24**]. En dicho trabajo Tanaka muestra que para las pseudomónadas T_{fp} y T_{coc} sobre **Cat** el modelo de substitución de Fiore et.al. es un ejemplo de estructura monoidal inducido por una ley distributiva T_{fp} sobre T_{coc}. Formalmente la ley distributiva T_{fp} sobre T_{coc} es inexistente dado que T_{coc} por razones de tamaño (en general la cocompletación libre de una categoría pequeña no es pequeña) no es una seudomónada. En este capítulo también mostramos que si $\mathbb{U}$ y $\mathbb{D}$ son como en el Corolario 4.9 y el Corolario 5.3 respectivamente entonces existe una ley distributiva de $\mathbb{U}$ sobre $\mathbb{D}$ en la 2-categoría **Cat**.

Iniciamos con el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 5.1. *Sea* $\mathbf{A}$ *en* ***Cat****. La completación de* $\mathbf{A}$ *bajo colimites pequeños es la subcategoría plena* $\overline{\mathbf{A}}$ *de*$\boldsymbol{Con}^{\mathbf{A}^{\mathbf{op}}}$ *determinada por todos los colimites pequeños de representables. En otras palabras, esto significa que* $\overline{\mathbf{A}}$ *es cerrada bajo colímites pequeños y existe un funtor* $d\mathbf{A} : \mathbf{A} \to \overline{\mathbf{A}}$ *que sarisface la siguiente propiedad universal:*
Dada cualquier funtor $L : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *, para* $\mathbf{B}$ *categoría cerrada bajo colímites pequeños, existen un único funtor* R_L *que preserva colímites pequeños y una transformación natural* δ_L *, como en el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "d\mathbf{A}"] \arrow[dr, "L"'] & \overline{\mathbf{A}} \arrow[d, "R_L"] \arrow[dl, phantom, "\Uparrow \delta_L" near start] \\ & \mathbf{B}, \end{tikzcd}$$

tal que δ_L *exhibe a* R_L *como extensión de Kan izquierda de* L *a lo largo de* $d\mathbf{A}$*.*

DEMOSTRACIÓN. El funtor $d\mathbf{A} : \mathbf{A} \to \overline{\mathbf{A}}$ está definido como sigue:

$$C \mapsto d\mathbf{A}(C) = \mathbf{A}(\ \ ,C) \text{ y } f : C \to D \mapsto d\mathbf{A}(f) = \mathbf{A}(\ \ ,f)$$

De modo que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "y"] \arrow[dr, "d\mathbf{A}"'] & \mathbf{Con}^{\mathbf{A}^{\mathbf{op}}} \\ & \overline{\mathbf{A}}, \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Aquí y es la inclusión usual de Yoneda, J es el funtor inclusión.

Veamos que $\overline{\mathbf{A}}$ es cerrada bajo colimites pequeños, para lo cual hacemos notar que $\overline{\mathbf{A}}$ tiene coproductos pequeños y coiguladores.
Sea $L : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ un funtor, donde $\mathbf{J}$ es un conjunto pequeño y para cada J en $\mathbf{J}$ tenemos $L(J) = F_J = colimyF'_J$, donde

$$\langle yF'_J(I) \longrightarrow colimyF'_J \rangle_{I \in \mathbf{I_J}},$$

con $y : \mathbf{A} \to \mathbf{Con}^{\mathbf{A}^{\mathbf{op}}}$ la inclusión de Yoneda y $F'_J : \mathbf{I}_J \to \mathbf{A}$ es tal que $\mathbf{I}_J$ es pequeña.

Damos la descripción de F_J en objetos y morfismos:
Para cada J en $\mathbf{J}$, $F_J(A) = colim(yF'_J)_A$ donde

$$\langle (yF'_J)_A(I) \xrightarrow{q_I^A} colim(yF'_J)_A \rangle_{I \in \mathbf{I_J}}, \tag{18}$$

con $(yF'_J)_A : \mathbf{I}_J \to \mathbf{Con}$ como el funtor definido como:

$$(yF'_J)_A(I) = \mathbf{A}(A,F'{}_J(I)) \ \forall I \in \mathbf{I}_J \ \text{ y}$$
$$(yF'_J)_A(w) = \mathbf{A}(A,F'{}_J(w)),\ \forall w : I \to I' \text{ en } \mathbf{I}_J.$$

Ahora bien, para cada $f : A \to B$ en $\mathbf{A^{op}}$, por la propiedad universal del colímite, $F_J(f)$ es el único morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
colim(yF'_J)_A = F_J(A) \arrow[r, "F_J(f)"] & F_J(B) = colim(yF'_J)_B \\
(yF'_J)_A(I) \arrow[u, "q_I^A"] \arrow[r, "\mathbf{A(f,\ )}"'] & (yF'_J)_B(I). \arrow[u, "q_I^B"']
\end{tikzcd} \tag{19}$$

Consideremos a la categoría $\mathbf{I}$ que consta de:

(i) Obj($\mathbf{I}$)$= \cup_{J\in\mathbf{J}}$Obj($\mathbf{I}_J$).
(ii) Mor($\mathbf{I}$)$= \cup_{J\in\mathbf{J}}$Mor($\mathbf{I}_J$).
(iii) La composisión en $\mathbf{I}$ es la ¨inducida¨ por la composición de las componentes $\mathbf{I}_J$.

Se tiene que el funtor $F : \mathbf{I} \to \mathbf{A}$ está definido como:

$$I \mapsto F(I) = F'_J(I) \text{ si } I \in \mathbf{I}_J \quad \text{y} \quad F(t) = F'_J(t) \text{ si } t \in \text{Mor}(\mathbf{I}_J).$$

Afirmamos que colim(yF)$= G$, donde

$$\langle L(J) \xrightarrow{Q^J} G\rangle_{J\in\mathbf{I}}.$$

Ahora describimos Q^J.
Sabemos que para cada A en $\mathbf{A}$, $G(A)$ =colim$(yF)_A$, donde $(yF)_A : \mathbf{I} \to$**Con** es el funtor definido como:

$$(yF)_A(I) = \mathbf{A}(A,F(I)) \ \text{ y } \ (yF)_A(w) = \mathbf{A}(\ \ ,F(w)) \text{ para } w : I \to J.$$

Se define G sobre morfismos como sigue:
Sea $f : A \to B$ en $\mathbf{A^{op}}$. Por la propiedad universal del colímite, $G(f)$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
G(A) = colim(yF)_A \arrow[r, "G(f)"] & GB = colim(yF)_B \\
(yF)_A(I) \arrow[u, "Q_I^A"] \arrow[r, "\mathbf{A(f,\ )}"'] & (yF)_B(I) \arrow[u, "Q_I^B"']
\end{tikzcd} \tag{20}$$

Ahora bien, para cada $J \in \mathbf{J}$ y para cada $t : I \to I'$ en $\mathbf{I}$ se tiene:

$$(yF'_J)_A(t) : (yF'_J)_A(I) \to (yF'_J)_A(I') = (yF)_A(t) : (yF)_A(I) \to (yF)_A(I').$$

Por lo que

$$\begin{tikzcd}
& G(A) = colim(yF)_A & \\
(yF'_J)_A(I) \arrow[ur, "Q_I^A"] \arrow[rr, "(yF'_J)_A(t)"] & & (yF'_J)_A(I') \arrow[ul, "Q_{I'}^A"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. i.e. tenemos un cocono de base $(yF'_J)_A$.
Por (18) para cada $J \in \mathbf{J}$ y para cada $A \in \mathbf{A}$ existe un Q_A^J único morfismo tal que

(21)
$$\begin{tikzcd} F_J(A) \arrow[rr, "Q_A^J"] & & G(A) \\ & (yF'_J)_A(I) = (yF)_A(I) \arrow[ul, "q_I^A"] \arrow[ur, "Q_I^A"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.
Así, para cada $J \in \mathbf{J}$ y cada $f : A \to B$ en $\mathbf{A^{op}}$

$$\begin{tikzcd} F_J(A) \arrow[r, "Q_A^J"] \arrow[d, "F_J(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F_J(B) \arrow[r, "Q_B^J"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

conmuta por (18), (19), (20) y (21).

$$\therefore Q^J \text{ es transformación natural para cada } J \in \mathbf{J}.$$

Por lo cual

$$\langle L(J) \xrightarrow{Q^J} G\rangle_{J\in\mathbf{I}}.$$

es un cocono. Veamos que dicho cocono es universal.
Sea $M \in \overline{\mathbf{A}}$ tal que

$$\langle L(J) \xrightarrow{\beta^J} M\rangle_{J\in\mathbf{I}}.$$

es un cocono. De manera que, por la definición de F y F_J, con $J \in \mathbf{J}$, para cada $A \in \mathbf{A^{op}}$

$$\langle (yF)_A I = (yF'_J)_A I \xrightarrow{\beta_A^J q_I^A} MA\rangle_{I\in\mathbf{I}}$$

es un cocono. Entonces por la propiedad universal del colímite existe una función β_A única tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} GA \arrow[r, "\beta_A"] & MA \\ (yF)_A I \arrow[u, "Q_I^A"] \arrow[r, "q_I^A"'] & F_J A, \arrow[u, "\beta_A^J"'] \end{tikzcd}$$

sin olvidar que $(yF)_A I = (yF'_J)_A I$.
Asimismo, para cada $J \in \mathbf{J}$ y cada $I \in \mathbf{I}$, β_A^J es la única función que hace conmutar el anterior

diagrama. Por otra parte, $\beta_A Q_A^J q_I^A = \beta_A Q_I^A$, de manera que

$$
\begin{tikzcd}
& MA & \\
F_J A \arrow[ur, "\beta_A^J"] \arrow[rr, "Q_A^J"'] & & GA \arrow[ul, "\beta_A"']
\end{tikzcd} \tag{22}
$$

conmuta (GA=lim$(yF)_A$). La unicidad y naturalidad de β son consecuencia de (19), (20), (21), (23), la naturalidad de Q^J, la naturalidad de β^J y la propiedad universal del colímite.

$$\therefore \overline{\mathbf{A}} \text{ tiene coproductos pequeños.}$$

A continuación se muestra que $\overline{\mathbf{A}}$ tiene coiguladores.
Sean

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & G
\end{tikzcd}
$$

en $\overline{\mathbf{A}}$. De manera que $F =$colimyF' y $G =$colimyG', donde $F' : \mathbf{P} \to \mathbf{A}$ y $G' : \mathbf{Q} \to \mathbf{A}$ con $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ categorías pequeñas. i.e.

$$\langle yF'(P) \xrightarrow{\rho_P} F\rangle_{P\in\mathbf{P}} \quad y \quad \langle yG'(Q) \xrightarrow{\sigma_Q} G\rangle_{Q\in\mathbf{Q}}. \tag{23}$$

Por lo anterior, para cada $P \in \mathbf{P}$ existen $u_P : F'(P) \to G'(P')$ y $v_P : F'(P) \to G'(P'')$ tales que los siguientes diagramas son conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\alpha"] & G & F \arrow[r, "\beta"] & G \\
yF'P \arrow[u, "\rho_P"] \arrow[r, "yu_P"'] & yG'P' \arrow[u, "\sigma_{P'}"'] & yF'P \arrow[u, "\rho_P"] \arrow[r, "yv_P"'] & yG'Q''. \arrow[u, "\sigma_{P''}"']
\end{tikzcd}
$$

Consideremos la categoría $\mathbf{X}$ que consta de:

(i) Obj($\mathbf{X}$)=Obj($\mathbf{P}$)$\cup$Obj($\mathbf{Q}$).
(ii) Mor($\mathbf{X}$)=Mor($\mathbf{Q}$)$\cup\{x_P\}_{P\in\mathbf{P}} \cup \{z_P\}_{P\in\mathbf{P}}$
(iii) Composición en $\mathbf{X}$ es la generada por la composición en la componente $\mathbf{Q}$ y los morfismos x_P, z_P que hemos agregado para cada $P \in \mathbf{P}$.

Claramente $\mathbf{X}$ es una categoría pequeña.
Se tiene el siguiente funtor $H' : \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ definido como:

$$P \mapsto H'(P) = F'(P) \ \forall P \in\text{Mor}(\mathbf{P}) \ \text{ y}$$
$$Q \mapsto H'(Q) = G'(Q) \text{ para cada } Q \in\text{Mor}(\mathbf{Q}),$$

en los objetos. Y en los morfismos

$$x_P \mapsto H'(x_P) = u_P \ , \ z_P \mapsto H'(z_P) = v_P \ \forall P \in \mathbf{P} \ \text{ y}$$
$$w \mapsto H'(w) = G'(w) \ \forall w \in\text{Mor}(\mathbf{Q}).$$

Sea $H =$colimyH' en $\overline{\mathbf{A}}$. i.e.

$$\langle yH'(X) \xrightarrow{\delta_X} H\rangle_{X\in\mathbf{X}}$$

Dado que Mor($\mathbf{Q}$) $\subseteq$Mor($\mathbf{X}$), para cada $w : Q \to Q'$ en Mor($\mathbf{Q}$) tenemos que

$$\begin{tikzcd} & H & \\ yH'(Q) \arrow[ur, "\delta_Q"] \arrow[rr, "yH'w"'] & & yH'(Q') \arrow[ul, "\delta_{Q'}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Asimismo, por la definición de H'

$$\begin{tikzcd} & H & \\ yG'(Q) \arrow[ur, "\delta_Q"] \arrow[rr, "yG'w"'] & & yG'(Q') \arrow[ul, "\delta_{Q'}"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Entoces por la propiedad universal del colímite existe una transformación natural única $\gamma : G \to H$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

(24)
$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\gamma"] & & H \\ & yG'Q = yH'Q. \arrow[ul, "\sigma_Q"] \arrow[ur, "\delta_Q"'] & \end{tikzcd}$$

Por otra parte, por definición de u_P, v_P y γ, se tiene que

(25)
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\alpha"] & G \arrow[r, "\gamma"] & H \\ yF'P \arrow[u, "\rho_P"] \arrow[r, "yu_P"'] & yG'P' \arrow[u, "\sigma_{P'}"] \arrow[r, "1"'] & yH'P' \arrow[u, "\delta_{P'}"'] \end{tikzcd}$$

(26)
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\beta"] & G \arrow[r, "\gamma"] & H \\ yF'P \arrow[u, "\rho_P"] \arrow[r, "yv_P"'] & yG'P'' \arrow[u, "\sigma_{P''}"] \arrow[r, "1"'] & yH'P'' \arrow[u, "\delta_{P''}"'] \end{tikzcd}$$

conmutan para cada $P \in \mathbf{P}$. Además

(27)
$$\begin{tikzcd} & H & \\ yH'P \arrow[ur, "\delta_P"] \arrow[rr, "yH'x_P"'] & & yH'P' \arrow[ul, "\delta_{P'}"'] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & H & \\ yH'P \arrow[ur, "\delta_P"] \arrow[rr, "yH'z_P"'] & & yH'P'' \arrow[ul, "\delta_{P''}"'] \end{tikzcd}$$

conmutan debido a que $H = colim yH'$. De modo que por todo lo anterior y la definición de H' $\delta_{P'} yu_P = \delta_{P''} yv_P$ para cada $P \in \mathbf{P}$. Entonces $\gamma\alpha\rho_P = \gamma\beta\rho_P$ para cada $P \in Pbf$. Por lo tanto $\gamma\alpha = \gamma\beta$.

No es difícil mostrar que γ tiene la propiedad universal del coigulador. Por lo tanto, $\overline{A}$ tiene coigualadores.

$$\therefore\ \ \overline{\mathbf{A}} \text{ es cocompleta.}$$

Para finalizar con la demostración de nuestra proposición observemos que $d\mathbf{A}$ tiene la propiedad universal deseada.
Sea $L : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor, con $\mathbf{B}$ categoría cocompleta. Sean $F, G \in \overline{\mathbf{A}}$. De esta manera

$$\langle yF'(I) \xrightarrow{\rho_I} F\rangle_{I\in\mathbf{I}} \quad y \quad \langle yG'(J) \xrightarrow{\sigma_J} G\rangle_{J\in\mathbf{J}}.$$

donde $F' : \mathbf{I} \to \mathbf{A}$ y $G' : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$, $\mathbf{I}$ y $\mathbf{J}$ categorías pequeñas, con $F = \text{colim}yF'$ y $G = \text{colim}yG'$.
Sea $\tau : F \to G$ en $\overline{\mathbf{A}}$. Ahora bien, $\mathbf{B}$ cocompleta, tenemos

$$\langle LF'(I) \xrightarrow{\rho'_I} R_L(F)\rangle_{I\in\mathbf{I}} \qquad y \qquad \langle LG'(J) \xrightarrow{\sigma'_J} R_L(G)\rangle_{J\in\mathbf{J}},$$

coconos universales correspondientes, con $R_L(F) = \text{colim}LF'$ y $R_L(G) = \text{colim}LG'$. Como F es un colímite, entonces τ está determinada por un cocono

$$\langle yF'I \xrightarrow{\tau_I} G\rangle_{I\in\mathbf{I}}. \tag{28}$$

Por Yoneda, cada τ_I corresponde a un elemento en $GF'(I)$. Esto es, un elemento en $GF'(I) = colim(yG')_{F'(I)}$, es decir, una clase de equivalencia de un morfismo $f_I : F'(I) \to G'(J_I)$. Debido a la definición de $colim(yG')_{F'(I)}$ y ya que

$$\langle LG'J \xrightarrow{\sigma'_J} R_L(G)\rangle_{J\in\mathbf{J}},$$

es universal, entonces

$$\langle LF'(I) \xrightarrow{L(f_I)} LG'(J_I) \xrightarrow{\sigma'_{J_I}} R_L(G)\rangle_{I\in\mathbf{I}} \tag{29}$$

es un cocono. Por la propiedad universal del colímite existe un morfismo único τ' que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} R_L(F) \arrow[r, "\tau'"] & R_L(G) \\ LF'(I) \arrow[u, "\rho'_I"] \arrow[r, "L(f_I)"'] & LG'(J_I). \arrow[u, "\sigma'_{J_I}"'] \end{tikzcd}$$

Definimos $R_L : \overline{\mathbf{A}} \to \mathbf{B}$ como:

$$F \mapsto R_L(F) = \text{colim}LF' \ \text{ y } \ \tau \mapsto R_L(\tau) = \tau'.$$

Es un ejercicio sencillo mostrar que R_L es un funtor. También, es fácil mostrar que $L = R_L \circ d\mathbf{A}$.
Por lo cual, definimos $\delta_L = 1_L$.
Se tiene además que

$$R_L(\langle yF'(I) \xrightarrow{\rho_I} F\rangle_{I\in\mathbf{I}}) \ = \ \langle LF'(I) \xrightarrow{\rho'_I} R_L(F)\rangle_{I\in\mathbf{I}}. \tag{30}$$

Afirmamos que R_L preserva colímites pequeños. Para ello mostramos que R_L preserva coproductos pequeños y coiguladores.
Primero demostramos que R_L preserva coiguladores.

Sean

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & G \end{tikzcd}$$

en $\overline{\mathbf{A}}$, con F y G como en (23). También, sean H y γ como en (24). i.e. γ es el coigulador de α y β. Ahora bien, de (25), (26) y (30), los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd} R_L(F) \arrow[r, "R_L(\alpha)"] & R_L(G) \arrow[r, "R_L(\gamma)"] & R_L(H) \\ LF'P \arrow[u, "\rho'_P"] \arrow[r, "Lu_P"'] & LG'P' \arrow[u, "\sigma'_{P'}"'] \arrow[ur, "\delta'_{P'}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R_L(F) \arrow[r, "R_L(\beta)"] & R_L(G) \arrow[r, "R_L(\gamma)"] & R_L(H) \\ LF'P \arrow[u, "\rho'_P"] \arrow[r, "Lv_P"'] & LG'P'' \arrow[u, "\sigma'_{P''}"'] \arrow[ur, "\delta'_{P''}"'] & \end{tikzcd}$$

Además se tiene que por (27) y por (30) los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} & R_L(H) & \\ LF'P \arrow[ur, "\delta'_P"] \arrow[rr, "Lu_P"'] & & LG'P' \arrow[ul, "\delta'_{P'}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & R_L(H) & \\ LF'P \arrow[ur, "\delta'_P"] \arrow[rr, "Lv_P"'] & & LG'P'' \arrow[ul, "\delta'_{P''}"'] \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Por todo lo anterior, concluimos que $R_L(\gamma)\circ R_L(\alpha)\circ\rho'_P = R_L(\gamma)\circ R_L(\beta)\circ\rho'_P$ para cada $P \in \mathbf{P}$.

$$\therefore \quad R_L(\gamma) \circ R_L(\alpha) = R_L(\gamma) \circ R_L(\beta).$$

Sea $k : R_L(H) \to B$ un morfismo en $\mathbf{B}$ tal que $kR_L(\alpha) = kR_L(\beta)$. Entonces la unión de las siguients familias

$$\langle LF'P \xrightarrow{k\circ R_L(\alpha)\circ\rho'_P} B\rangle_{P\in\mathbf{P}} \quad y \quad \langle LG'Q \xrightarrow{k\circ\sigma'_Q} B\rangle_{Q\in\mathbf{Q}}.$$

es un cocono sobre LH'. De manera que por la propiedad universal del colímite existe un morfismo único k' que hace conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} R_L(H) \arrow[rr, "k'"] & & B \\ & LF'P \arrow[ul, "\delta'_P"] \arrow[ur, "k\circ R_L(\alpha)\circ\rho'_P"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R_L(H) \arrow[rr, "k'"] & & B \\ & LG'Q. \arrow[ul, "\delta'_Q"] \arrow[ur, "k\sigma'_Q"'] & \end{tikzcd}$$

Debido a que k está completamente determinado por la familia de morfismos

$$\langle LG'(Q) \xrightarrow{k\sigma'_Q} B\rangle_{Q\in\mathbf{Q}}$$

por la conmutatividad de los diagramas triangulares previos y la definición de $R_L(\gamma)$ se tiene que

$$\begin{tikzcd} R_L(G) \arrow[rr, "R_L(\gamma)"] \arrow[dr, "k"'] & & R_L(H) \arrow[dl, "k'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

conmuta.

$$\therefore \; R_L \text{ preserva coiguladores.}$$

De manera semejante se demuestra que R_L preserva coproductos pequeños.

$$\therefore \; R_L \text{ preserva colímites pequeños.}$$

La unicidad de R_L se tiene porque R_L preserva colímites pequeños y por la defición de $\overline{\mathbf{A}}$.

Para finalizar, mostramos que 1_L exhibe a R_L como extensión de Kan izquierda de L a lo largo de $d\mathbf{A}$.
Sea $\tau : F \Rightarrow G$ como en (28). Sean T, θ, funtor y transformación natural respectivamente como en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "d\mathbf{A}"] \arrow[dr, "L"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\overset{\theta}{\Rightarrow}"] & \overline{\mathbf{A}} \arrow[d, "T"] \\ & \mathbf{B}. \end{tikzcd}$$

Dado que F es colímite pequeño de representantes, T es funtor y θ transformación natural entonces,

$$\langle LF'(I) \xrightarrow{\theta_I} TyF'(I) \xrightarrow{T\rho_I} TF\rangle_{I\in\mathbf{I}}$$

es un cocono. Por la propiedad universal del colímite existe una transformación natural única $\bar{\theta}_F$ tal que

$$\begin{tikzcd} R_L(F) \arrow[r, "\bar{\theta}_F"] & T(F) \\ LF'(I) \arrow[u, "\rho'_I"] \arrow[r, "\theta_{F'I}"'] & TyF'I \arrow[u, "T\rho_I"'] \end{tikzcd}$$

conmuta para cada $I \in \mathbf{I}$. Afirmamos que $\bar{\theta} : R_L \Rightarrow T$ definida como

$$\bar{\theta}(F) = \bar{\theta}_F$$

es transformación natural. Para esto mostramos que

$$\begin{tikzcd} R_L(F) \arrow[r, "\bar{\theta}_F"] \arrow[d, "R_L(\tau)"'] & T(F) \arrow[d, "T(\tau)"] \\ R_L(G) \arrow[r, "\bar{\theta}_G"'] & T(G) \end{tikzcd}$$

conmuta. Si consideramos que en (29) tenemos un cocono, θ es transformación natural, G es colímite pequeño de representables y T funtor. Se sigue que

$$\langle LF'(I) \xrightarrow{L(f_I)} LG'(J_I) \xrightarrow{\theta_{G'(J_I)}} TyG'(J_I) \xrightarrow{T\sigma_{J_I}} T(G)\rangle_{I\in\mathbf{I}}$$

es un cocono. De modo que, por la propiedad universal del colímite, existe una transformación natural única μ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} R_L(F) \arrow[r, "\mu"] & T(G) \\ LF'(I) \arrow[u, "\rho'_I"] \arrow[r, "\theta_{G'(J_I)}\circ L(f_I)"'] & TyG'(J_I), \arrow[u, "T\sigma_{J_I}"'] \end{tikzcd}$$

para cada $I \in \mathbf{I}$.
Ahora bien, $\mu\rho'_I = \bar{\theta}_G \circ R_L(\tau) \circ \rho'_I$ para cada $I \in \mathbf{I}$, por definición de $R_L(\tau)$ y $\bar{\theta}_G$. Pero, para cada $I \in \mathbf{I}$, $T(\tau) \circ \bar{\theta}_F \circ \rho'_I = \bar{\theta}_G \circ R_L(\tau) \circ \rho'_I$, por definición de $\bar{\theta}_F$, $\bar{\theta}_G$, $R_L(\tau)$, por ser T funtor y θ transformación natural. Así, tenemos $T(\tau) \circ \bar{\theta}_F = \mu = \bar{\theta}_G \circ R_L(\tau)$.

$$\therefore \quad \bar{\theta} \text{ es natural.}$$

La unicidad de $\bar{\theta}$ se sigue de su naturalalidad y la propiedad universal del colímite. Es inmediato que $\bar{\theta} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \theta$.
Por lo tanto 1_L exhibe a R_L como extensión de Kan izquierda de L a lo largo de $d\mathbf{A}$. □

La siguiente observación será de gran utilidad para nuestro próximo corolario.

Observación 5.2. *Para cada categoría l-pequeña* $\mathbf{A}$ *la categoría* $\overline{\mathbf{A}}$ *es l-pequeña. Esto es consecuencia del Lema de Yoneda, la definición de* $\overline{\mathbf{A}}$ *y porque* $\mathbf{A}$ *es l-pequeña.*

Corolario 5.3. *Sea* ***Cat*** *la 2-categoría de categorias localmente pequeñas. Las siguientes condiciones determinan una seudomónada de Kan izquierda* $\mathbb{D}$ *sobre* ***Cat****.*

(i) *La aplicación* $D : Ob(\boldsymbol{Cat}) \to Ob(\boldsymbol{Cat})$ *tal que:*
$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{D}(\mathbf{A}) = \overline{\mathbf{A}}$$
(ii) *Para cada* $\mathbf{A}$ *en* ***Cat*** *la 1-celda* $d\mathbf{A} : \mathbf{A} \to \overline{\mathbf{A}}$.
(iii) *Para cada 1-celda* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{DB}$, $\mathbb{D}_F = 1_F$ *exhibe a* $F^{\mathbb{D}} = R_F$ *como extensión de Kan izquierda de* F *a lo largo de* $d\mathbf{A}$.

Tenemos la versión dual de la Proposición 5.1.

Proposición 5.4. *Sea* $\mathbf{A}$ *en* ***Cat****. La completación de* $\mathbf{A}$ *bajo límites pequeños es la subcategoría plena* $\mathbf{A}^{\mathbf{l}}$ *de* $(\boldsymbol{Con}^{\mathbf{A}})^{op}$ *determinada por todos los límites pequeños de representables. En otras palabras, esto significa que* $\mathbf{A}^{\mathbf{l}}$ *es cerrada bajo límites pequeños y existe un funtor*

$u\mathbf{A} : \mathbf{A} \to \mathbf{A^l}$ que sarisface la siguiente propiedad universal:
Dado cualquier funtor $N : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, para $\mathbf{B}$ categoría cerrada bajo límites pequeños, existen un único funtor N^l que preserva límites pequeños y una transformación natural ϵ^l , como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "u\mathbf{A}"] \arrow[dr, "N"'] & \mathbf{A^l} \arrow[d, "N^l"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow \epsilon^l"] \\ & \mathbf{B}, \end{tikzcd}$$

tal que ϵ^l exhibe a N^l como extensión de Kan derecha de N a lo largo de $u\mathbf{A}$.

El funtor $u\mathbf{A} : \mathbf{A} \to \mathbf{A^l}$ es tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "y"] \arrow[dr, "u\mathbf{A}"'] & (\mathbf{Con^A})^{op} \\ & \mathbf{A^l} \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Aquí y es la inclusión usual de Yoneda, J es el funtor inclusión.

También hay una versión dual del Corolario 5.3.

COROLARIO 5.5. *Sea **Cat** la 2-categoría de categorias localmente pequeñas. Las siguientes condiciones determinan una seudomónada de Kan derecha $\mathbb{U}$ sobre **Cat**.*

(i) *La aplicación U :Ob(**Cat**)→Ob(**Cat**) tal que:*
$$\mathbf{A} \mapsto U(\mathbf{A}) = \mathbf{A^l}$$
(ii) *Para cada $\mathbf{A}$ en **Cat** la 1-celda $u\mathbf{A} : \mathbf{A} \to \mathbf{A^l}$.*
(iii) *Para cada 1-celda $F : \mathbf{A} \to U\mathbf{B}$, $\mathbb{U}_F = 1_F$ exhibe a $F^{\mathbb{U}} = F^l$ como extensión de Kan derecha de F a lo largo de $u\mathbf{A}$.*

Desde luego para $\mathbb{D}$, $\mathbb{U}$ como en el Corolario 5.3 y el Corolario 5.5 respectivamente, existe una ley distributiva de $\mathbb{U}$ sobre $\mathbb{D}$. Para la demostración de tal hecho mostramos que para cada categoría l-pequeña y completa $\mathbf{A}$ se tiene que $D\mathbf{A}$ es completa. Todo esto en el contexto de [**5**], una prueba más general de esto se encuentra en [**2**].

DEFINICIÓN 5.6. *Un funtor $T : \mathbf{A} \to$ **Con** es llamado propio si existen un conjunto I, una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ y un epimorfismo $\sum_{i\in I} \mathbf{A}(\mathbf{A_i}, \ \ ) \twoheadrightarrow \mathbf{T}$.*

Sea $\mathbf{Prop}(\mathbf{A})$ la categoría de funtores propios de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{Con}$.

PROPOSICIÓN 5.7. *La categoría **Prop**$(\mathbf{A})$ es localmente pequeña.*

DEMOSTRACIÓN. Dados cualesquiera funtores $T, G : \mathbf{A} \to \mathbf{Con}$ con T propio, tenemos que una transformación natural $T \Rightarrow G$ está determinada por la composición

$$\textstyle\sum_{i\in I} \mathbf{A}(\mathbf{A_i}, \ \ ) \twoheadrightarrow \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{G},$$

que a su vez por Yoneda, está determinada por un elemento de $\prod_{i\in I} GA_i$, el cual es un producto. □

DEFINICIÓN 5.8. *Decimos que un funtor $T : \mathbf{A} \to$ **Con** es lúcido si*

- *1. T es propio y*
- *2. Para todo funtor propio $P : \mathbf{A} \to$ **Con** y cualquier par de transformaciones $\alpha, \beta : P \Rightarrow T$ se tiene que el igualador de α y β es propio.*

Definimos la categoría de funtores lúcidos $\mathbf{A} \to \mathbf{Con}$ como la subcategoría plena $\mathbf{Luc}(\mathbf{A})$ de $\mathbf{Prop}(\mathbf{A})$ que consiste de los funtores lúcidos. Resulta claro entonces que $\mathbf{Luc}(\mathbf{A})$ es localmente pequeña.

PROPOSICIÓN 5.9. *Un funtor $T : \mathbf{A} \to$ **Con** es lúcido si y sólo si es propio y para todo funtor representable $\mathbf{A}(\mathbf{A},\ \ )$ y cualesquiera transformaciones naturales $\mu, \rho : \mathbf{A}(\mathbf{A},\ \ ) \Rightarrow \mathbf{T}$ se tiene que el igualador de μ y ρ es propio.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad es clara porque todo funtor representable es propio. Mostramos que se tiene la sufiencia. Sea $P : \mathbf{A} \to \mathbf{Con}$ propio y $\alpha, \beta : P \Rightarrow T$, donde estamos suponiendo que T es propio. Sea $E \hookrightarrow P$ el igualador de α y β. Tenemos que demostrar que E es propio. Como P es propio, existe un epimorfismo de la forma

$$\gamma : \textstyle\sum_{i \in I} \mathbf{A}(\mathbf{A_i},\ \ ) \twoheadrightarrow \mathbf{P}.$$

Tomemos el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\theta"'] & \sum_{i \in I} \mathbf{A}(\mathbf{A_i},\ \ ) \arrow[d, "\gamma"] \\
E \arrow[r] & P.
\end{tikzcd}$$

Como γ es epi, entonces θ es epi, con lo que basta demostrar que K' es propio. Observamos que K' es el igualador de $\alpha \cdot \gamma$ y $\beta \cdot \gamma$ (esto es un resultado general de igualadores y productos fibrados). Por la misma razón, si denotamos por $\sigma_i : \mathbf{A}(\mathbf{A_i},\ \ ) \to \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \mathbf{A}(\mathbf{A_i},\ \ )$ a la coproyección canónica y tomamos el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
K'_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d] & \mathbf{A}(\mathbf{A_i},\ \ ) \arrow[d, "\sigma_i"] \\
K' \arrow[r, "\phi"'] & \sum_{i \in I} \mathbf{A}(\mathbf{A_i},\ \ )
\end{tikzcd}$$

resulta que ϕ_i es el igulador de $\alpha \cdot \gamma \cdot \sigma_i$ y $\beta \cdot \gamma \cdot \sigma_i$, con lo que la hipótesis sobre T nos dice que K'_i es propio. Como $K = \sum_{i \in I} K_i$, debido a que consideramos pregavillas, se obtiene el resultado. $\square$

PROPOSICIÓN 5.10. *El igulador de un par de flechas entre funtores lúcidos es un funtor lúcido. Se sigue que **Luc**$(\mathbf{A})$ tiene iguladores.*

La demostración de la Proposición 1.3 en [**5**] es bastante clara.

DEFINICIÓN 5.11. $\mathbf{A}$ *es pre-cocompleta si satisface la condición conjunto solución para los colímites: para cualquier categoría pequeña $\mathbf{I}$ y cualquier funtor $\Gamma : \mathbf{I} \to \mathbf{A}$ existen un conjunto J y para cada $j \in J$ un cono $\langle g_{j,I} : \Gamma I \to A_j \rangle_{I \in \mathbf{I}}$ sobre Γ, tales que para cualquier otro cono $\langle f_I : \Gamma I \to A \rangle_{I \in \mathbf{I}}$ sobre Γ existen $j \in J$ y $f : A_j \to A$ tal que para todo $I \in \mathbf{I}$ se tiene que $f g_{j,I} = f_I$.*

Observación 5.12.

1. $\mathbf{A}$ es pre-cocompleta si y sólo si el límite pequeño de funtores representables es propio. Basta escribir lo que esto quiere decir y compararlo con la definición.
2. Esta notación se extiende la propiedad de que $\mathbf{A}$ tenga pre-coproductos, pre-coigualadores, etc. Por ejemplo, si uno escribe la condición para $\mathbf{I}$ discreta, entonces uno obtiene algo muy parecido a la demostración de la Proposición 1.5 de [**5**].
3. Cuando $\mathbf{A}$ es cocompleta, entonces $\mathbf{A}$ es pre-cocompleta. Basta con tomar el funtor representado por el colímite en $\mathbf{A}$.

Proposición 5.13. $\mathbf{A}$ *tiene pre-coproductos si y sólo si los productos de funtores propios son funtores propios.*

Demostración. Sea I un conjunto y sea $T_i : \mathbf{A} \to \mathbf{Con}$ un funtor propio para cada $i \in I$. Entonces para cada $i \in I$ tenemos un epi de la forma

$$\gamma_i : \textstyle\sum_{j\in J_i} \mathbf{A}(\mathbf{A_{i,j}}, -) \twoheadrightarrow \mathbf{T_i}$$

Esto nos da un epi

$$\textstyle\prod_{i\in I} \sum_{j\in J_i} \mathbf{A}(\mathbf{A_{i,j}}, -) \twoheadrightarrow \prod_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{T_i}.$$

Y como hay un epi

$$\textstyle\sum_{f\in\prod_{J_i}} \prod_{i\in I} \mathbf{A}(\mathbf{A_{i,f(i)}}, -) \twoheadrightarrow \prod_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J_i}} \mathbf{A}(\mathbf{A_{i,j}}, -)$$

y el producto de funtores representables es propio, entonces $\prod_{i\in I} T_i$ es propio.
El regreso es trivial. □

Proposición 5.14. *Si los productos de funtores representables son propios y las potencias de funtores representables son lúcidas, entonces el producto de funtores lúcidos es un funtor lúcido.*

Demostración. Sea I un conjunto y sea $T_i : \mathbf{A} \to \mathbf{Con}$ un funtor lúcido para cada $i \in I$. Por la proposición anterior tenemos que $\prod_{i\in I} T_i$ es un funtor propio. Sean $A \in \mathbf{A}$ y $x, y : \mathbf{A}(\mathbf{A}, -) \to \prod_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{T_i}$ transformacioes naturales. Queremos ver que el igualador de x, y es propio. El igualador se puede construir como sigue. Para cada i tomamos $\mu_i : K_i \hookrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A}, -)$ el igualador de $\pi_i \cdot x$ y $\pi_i \cdot y$, donde $\pi_i : \prod_i T_i \to T_i$ es la proyección del producto. Entonces el igualador es $\mu : K = \bigcap_{i\in I} K_i \hookrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A}, -)$. Observamos que como T_i es lúcido y $\mathbf{A}(\mathbf{A}, -)$ es propio, entonces K_i es propio. Definimos $P = \prod_{i\in I} K_i$ (que resulta propio) y para cada $i \in I$ sea $\rho_i : P \to \mathbf{A}(\mathbf{A}, -)$ el compuesto

$$P = \textstyle\prod_{i\in I} K_i \xrightarrow{\ p_i\ } K_i \xrightarrow{\ \mu_i\ } \mathbf{A}(\mathbf{A}, -).$$

Inducimos $\lambda : \bigcap_i K_i \to P$ tal que para cada i el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bigcap_i K_i \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr] & P \arrow[d, "p_i"] \\
& K_i,
\end{tikzcd}$$

conmuta. Veamos que λ es el igualador múltiple de $\langle \rho_i \rangle_i$. Es fácil ver que obtenemos a μ al componer λ con cualquiera de las ρ_i. Además, si $\langle \omega_i \rangle_i : W \to P$ es tal que al componer con cualquier ρ_i nos da lo mismo, entonces es fácil ver que se factoriza a través de $\bigcap_i K_i$. Por lo tanto, λ es el igualador múltiple de la familia de las ρ_i. Inducimos ahora $\delta, \epsilon : P \to \prod_{(i,j)\in I\times I} \mathbf{A}(\mathbf{A}, -)$ tales que para todo $(i,j) \in I \times I$ los diagramas

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "p_i"'] & \prod_{(i,j)\in I\times I} \mathbf{A}(\mathbf{A}, -) \arrow[d, "\pi_{i,j}"] \\ K_i \arrow[r, "\mu_i"'] & \mathbf{A}(\mathbf{A}, -) \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} P \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "p_j"'] & \prod_{(i,j)\in I\times I} \mathbf{A}(\mathbf{A}, -) \arrow[d, "\pi_{i,j}"] \\ K_j \arrow[r, "\mu_j"'] & \mathbf{A}(\mathbf{A}, -) \end{tikzcd}$$

conmutan. No es difícil ver ahora que $\lambda : \bigcap_i K_i \to P$ es el igualador de δ, ϵ. Como P es propio y, por hipótesis, $\prod_{(i,j)\in I\times I} \mathbf{A}(\mathbf{A}, -)$ es lúcido, concluimos que $\bigcap_i K_i$ es propio. Entonces $\prod_{i\in I} T_i$ es un funtor lúcido. $\square$

Si $\mathbf{A}$ es cocompleta, entonces para demostrar que $\mathbf{Luc}(\mathbf{A})$ es completa sabemos que nos basta con demostrar que las potencias de representables son lúcidas (porque para una tal $\mathbf{A}$, los productos de funtores propios son propios y que el igualador de funtores lúcidos es un funtor lúcido). Para hacer esto considere I un conjunto y $A \in \mathbf{A}$. Queremos demostrar que $\prod_{i\in I} \mathbf{A}(\mathbf{A}, -)$ es lúcido. Como $\mathbf{A}$ es completa, sabemos que es propio. Tomemos entonces $B \in \mathbf{A}$ y $\alpha, \beta : \mathbf{A}(\mathbf{B}, -) \to \prod_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{A}(\mathbf{A}, -)$. Debemos ver que que el igualador de α y β es propio. Por Yoneda, α está determinado por una familia $\langle f_i : A \to B\rangle_{i\in I}$ y β por una familia $\langle g_i : A \to B\rangle_{i\in I}$. Entonces tomamos $q : B \to Q$ el coigulador del diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[drr, shift left, "f_i"] \arrow[drr, shift right, "g_i"'] & & \\ \vdots & & B \\ A \arrow[urr, shift left, "f_{i'}"] \arrow[urr, shift right, "g_{i'}"'] & & \end{tikzcd}$$

y tenemos que $\mathbf{A}(\mathbf{q}, -) : \mathbf{A}(\mathbf{Q}, -) \to \mathbf{A}(\mathbf{B}, -)$ es el igualador de α y β.
Con esto hemos demostrado:

Teorema 5.15. *Si $\mathcal{K}$ es completa, entonces $\boldsymbol{Luc}(\mathcal{K}^{op})$ es completa.*

Proposición 5.16. *Coproductos de funtores lúcidos son funtores lúcidos*

Demostración. Ver Proposición 1.2 de [**5**]. $\square$

Proposición 5.17. *Si $\mathbf{A}$ tiene pre-coproductos finitos, entonces los coiguladores de funtores lúcidos son funtores lúcidos.*

Demostración. Ver Proposición 1.9 de [**5**]. $\square$

Lema 5.18. *Si $\mathcal{K}$ es completa, entonces $\boldsymbol{Luc}(\mathcal{K}^{op}) = D\mathcal{K}$.*

Demostración. La demostración del Lema 1 en [**21**] es bastante clara. $\square$

Ahora estamos en condiciones de dar la demostración del siguiente:

Teorema 5.19. *Sean $\mathbb{D}$, $\mathbb{U}$ como en el Corolario 5.3 y el Corolario 5.5 respectivamente. Hay una ley distributiva de $\mathbb{U}$ sobre $\mathbb{D}$*

Demostración. Utilizamos el Teorema 4.17.
(a) Mostramos que para cada $\mathbf{A}$ tenemos una $\mathbb{U}$-álgebra estructura $(DU\mathbf{A}, (\ )^{\lambda})$.
Ahora sabemos que $DU\mathbf{A}$ es completa, Teorema 5.15 y Lema 5.18. Por lo que, para cada $H : \mathbf{B} \rightarrow DU\mathbf{A}$ definimos $H^{\lambda} = H^{l}$ y $\lambda_H = \epsilon^{l}$ como en la Proposición 5.4.
La prueba de que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "u\mathbf{C}"] \arrow[dr, "T"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\Swarrow \mathbb{U}_T"] & U\mathbf{C} \arrow[d, "T^{\mathbb{U}}"] & \\
 & U\mathbf{B} \arrow[r, "H^{\lambda}"] & DU\mathbf{A},
\end{tikzcd}$$

exhibe a $H^{\lambda}T^{\mathbb{U}}$ como extensión derecha de Kan de $H^{\lambda}T$ a lo largo de $u\mathbf{C}$ es análoga a la última parte en la demostración de la Proposición 5.1 donde se muestra

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "d\mathbf{A}"] \arrow[dr, "L"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\delta_L = 1\ \Nearrow"] & \overline{\mathbf{A}} \arrow[d, "R_L"] \\
 & \mathbf{B},
\end{tikzcd}$$

que R_L exhibe a L como extensión de Kan izquierda a lo largo de $d\mathbf{A}$. Se utilizó el hecho de que el funtor $H^{\lambda}T^{\mathbb{U}}$ preserva límites.
(b) Para cada $L : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{UA}$, $D(L^{\mathbb{U}}) : (DU\mathbf{B}, (\ )^{\lambda}) \rightarrow (DU\mathbf{A}, (\ )^{\lambda})$ es una 1-celda de $\mathbb{U}$-álgebras.
Por el Teorema 6.4 de [**2**], se sigue que $D(L^{\mathbb{U}})$ es continúo, ya que $L^{\mathbb{U}}$ es continúo.
La demostración de que para cada $F : \mathbf{C} \rightarrow DU\mathbf{A}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "u\mathbf{C}"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\Swarrow \lambda_F"] & U\mathbf{C} \arrow[d, "F^{\mathbb{U}}"] & \\
 & DU\mathbf{B} \arrow[r, "D(L^{\mathbb{U}})"] & DU\mathbf{A},
\end{tikzcd}$$

exhibe a $D(L^{\mathbb{U}}) \circ F^{\lambda}$ como extensión de Kan derecha de $D(L^{\mathbb{U}}) \circ F$ a lo largo de $u\mathbf{C}$, para cada $F : \mathbf{C} \rightarrow DU\mathbf{A}$, es análoga a la última parte en la demostración de la Proposición 5.1 donde se muestra

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "d\mathbf{A}"] \arrow[dr, "L"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\delta_L = 1\ \Nearrow"] & \overline{\mathbf{A}} \arrow[d, "R_L"] \\
 & \mathbf{B},
\end{tikzcd}$$

que R_L exhibe a L como extensión de Kan izquierda a lo largo de $d\mathbf{A}$. Para lo cual se utilizó el hecho de que el funtor $D(L^{\mathbb{U}}) \circ F^{\lambda}$ es continúo.

(c) Para cada $\mathbf{A} \in \mathbf{Cat}$, sección 4 de [**18**], se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "d\mathbf{A}"] \arrow[d, "u\mathbf{A}"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow d_{u\mathbf{A}}"] & D\mathbf{A} \arrow[d, "Du\mathbf{A}"] \\
U\mathbf{A} \arrow[r, "dU\mathbf{A}"'] & DU\mathbf{A},
\end{tikzcd}$$

con $Du\mathbf{A} = (dU\mathbf{A} \circ \mathbf{uA})^{\mathbb{D}}$ y $d_{u\mathbf{A}} = D_{dU\mathbf{A} \circ \mathbf{uA}} = 1$. Como además $dU\mathbf{A}$ es continúo (observese (e)). Entonces para cada $\mathbf{A}$, $d_{u\mathbf{A}}^{-1}$ exhibe a $dU\mathbf{A}$ como extensión de Kan derecha de $Du\mathbf{A} \circ d\mathbf{A}$ a lo largo de $u\mathbf{A}$, por un razonamiento semejante al que se dio en (b).
La demostración de (d) es semejante a (b).
(e) De manera semejante, como en (b), se muestra que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, "u\mathbf{B}"] \arrow[dr, "L"'] \arrow[dr, phantom, bend left, "\swarrow \mathbb{U}_L"] & U\mathbf{B} \arrow[d, "L^{\mathbb{U}}"] & \\
& U\mathbf{A} \arrow[r, "dU\mathbf{A}"] & DU\mathbf{A},
\end{tikzcd}$$

exhibe a $dU\mathbf{A} \circ \mathbf{L}^{\mathbb{U}}$ como extensión de Kan derecha de $dU\mathbf{A} \circ \mathbf{L}$ a lo largo de $u\mathbf{B}$, para cada $L : \mathbf{B} \rightarrow U\mathbf{A}$. Para ello utilizamos que $dU\mathbf{A}$ es continúo. Esto último es consecuencia de que Yoneda preserva límites pequeños y la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
U\mathbf{A} \arrow[r, "y"] \arrow[dr, "dU\mathbf{A}"'] & \mathbf{Con}^{U\mathbf{A}^{\mathbf{op}}} \\
& DU\mathbf{A}. \arrow[u, "J"']
\end{tikzcd}$$

$\square$

Por último mostramos que la ley distributiva de T_{fp} sobre T_{coc} en el Ejemplo 8.10 es incorrecta [**24**]. Aquí T_{fp}, T_{coc} son respectivamente como en el Ejemplo 8.1 y el Ejemplo 8.7 en [**24**].

Las siguientes observaciones son el Ejemplo 8.1, el Ejemplo 8.7 y el Ejemplo 8.10 de [**24**].

Observación 5.20. *T_{fp} denota la seudomónada sobre la 2-categoría de categorías pequeñas **cat**. La 2-categoría Ps-T_{fp}-Alg tiene como objetos a las categorías pequeñas con productos finitos, las 1-celdas son los funtores que preservan productos finitos y las 2-celdas son las transformaciones naturales. Esta es la conocida 2-categoría FP de categorías pequeñas con productos finitos. Para cualquier categoría pequeña $\mathbf{C}$, $T_{fp}(\mathbf{C})$ está dada por el objeto libre de FP, i.e., la categoría libre con productos finitos sobre $\mathbf{C}$.*

Observación 5.21. *Hay una seudomónada T_{coc} sobre **cat**. Ps-T_{coc}-Alg es la 2-categoría de categorías cocompletas, funtores que preservan colímites, y transformaciones naturales entre ellos. Por el Teorema 8.6 en [**24**], tenemos que para cualquier categoría pequeña, la categoría $T_{coc}(\mathbf{C})$ está dada por la categoría de pregavillas $[\mathbf{C}^{\mathbf{op}}, \boldsymbol{Con}]$.*

Observación 5.22. *Es un ejercicio de rutina verificar que el Corolario 8.9 en [**24**] se puede restringir de categorías simétricas monoidales a categorías con productos finitos, i.e., de T_{sm} a T_{fp}. Por el Corolario 7.7 en [**24**], hay una ley distributiva de T_{fp} sobre T_{coc}.*

Estrictamente hablando en la Observación 5.21 T_{coc} no es una seudomónada dado que en general la cocompletación libre de una categoría pequeña $\mathbf{C}$ no es pequeña. Así que la Observación 5.22 no se cumple.

Ahora bien, si $\mathbb{U}$ y $\mathbb{D}$ son como en el Corolario 4.9 y el Corolario 5.3 respectivamente entonces tenemos:

TEOREMA 5.23. *Existe una ley distributiva de* $\mathbb{U}$ *sobre* $\mathbb{D}$ *en la* 2*-categoría* $\boldsymbol{Cat}$.

DEMOSTRACIÓN. La prueba es esencialmente la misma que la de la situación más general que es el Teorema 5.19. $\square$

Bibliografía

[1] Jon Beck. Distributive laws. Lecture Notes in Mathematics 80, (1969), 119-140.

[2] B. Day, Stephen Lack. Limites of small functors. Journal of Pure and Applied Algebra 210 (2007) 651-663.

[3] S. Eilenberg and J. Moore, Adjoint functors and triples. Illinois J. Math. 9 (1965), 381-398.

[4] B. Fawcett and R.J. Wood. Constructive complete distributivity I. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 107, 1990, pp. 81-89.

[5] P. Freyd, Several new concepts: lucid and concordant funtors, precompleteness, the continuos and concordant completions of categories in: Category Theory, Homology Theory and their Applications III, Lectures Notes in Math. vol 99, Springer, Berlín, 1969, pp. 196-241.

[6] G.M. Kelly, Basic concepts of enriched category theory, Repr. Theory Appl. Categ. (10) (2005) vi+137. Electronic. Originally published as LMS Lecture Notes 64, 1982.

[7] G.M. Kelly. Coherence theorems for lax algebras and for distributive laws. Lecture Notes in Mathematics 420, Springer-Verlag, 1974.

[8] A. Kock. Monads for which structures are adjoint to units. JPAA2 104(1), 1995, pp. 41-59.

[9] S. Lack and Ross Street, The formal theory of monads II. Journal of pure and applied algebra 175 (2002) 234-265.

[10] S. Mac Lane. Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, New York, 1971.

[11] E. G. Manes. Algebraic Theories. Springer-Verlag, 1976.

[12] M. Makkai, Robert Paré: Accessible categories: the foundations of categorical model theory. Contemporary Mathematics, 104. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989. viii+176 pp. ISBN 0-8218-5111-X.

[13] F.Marmolejo. Doctrines whose structure forms a fully faithful adjoint string. Theory and Applications of Categories, Vol. 3, No. 2, 1997, pp. 24-44.

[14] F. Marmolejo. Distributive laws for Pseudomonads. Theory and Applications of Categories, Vol. 5, 1999, pp. 91-147.

[15] F. Marmolejo, R. D. Rosebrugh and R. J. Wood, A basic distributive law. J. Pure and Appl. Algebra 168 (2002) 209-226.

[16] F. Marmolejo, R. D. Rosebrugh and R.J Wood. Completely and totally distributive categories I,J. Pure Applications, Algebra, to appear 2010.

[17] F. Marmolejo and R.J Wood. Monads as extension systems. No iteration is necessary. Theory and Applications of Categories, Vol. 24, No. 4, 2010, pp. 84-113.

[18] F.Marmolejo and R.J. Wood. Kan extensions and lax idempotent pseudomonads. Comunicación personal.

[19] G.D. Plotkin. A powerdomain construction. SIAM Journal on Computing, 5(3):452-487, 1976.

[20] J. Power. A unified category-theoretic approach to variable binding. In Proceedings of the 2003 workshop on Mechanized reasoning about languages with variable binding, MERLIN 03, pages 1-9. ACM Press, 2003.

[21] J. Rosický. Cartesian closed exact completions. Journal of Pure and Applied Algebra 142 (1999) 261-270.

[22] M.B. Smyth. Powerdomains. Journal of Computer and Systems Sciences, 16(1):23-36, February 1978.

[23] R.H. Street, The formal theory of monads. J. Pure and Appl. Algebra 2(1972) 149-168.

[24] M.Tanaka. Pseudo-Distributive Laws and Unified Framework for Variable Binding. Doctor of Philosophy. Laboratory for Foundations of Computer Science School of Informatics University of Edinburgh 2005.

[25] D.Varacca. Probability, nondeterminism and concurrency: two denotational models for probabilistic computation. PhDdissertation, BRICS PhD School, 2003.

[26] R.F.C. Walters. A categorical approach to universal algebra. PhD Thesis. Australian National University, 1970.

[27] G. Winskel. A note on powerdomains and modality. In FCT, volume 158 of LNCS, pages 505-514, 1983.

[28] V.Zöberlein. Doctrines on 2-categories, Math. Zeitschrift 148 (1976), 267-279.