



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Acreción de campo fantasma a un
agujero negro

T E S I S

que para obtener el Título de:

FÍSICO

P R E S E N T A :

Darío Zubillaga Martín

Tutor:

Dr. Miguel Alcubierre Moya



Junio 2012

1. Datos del alumno

Darío Zubillaga Martín
zubijazz@gmail.com
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

2. Datos del tutor

Dr. Miguel Alcubierre Moya
malcubi@nucleares.unam.mx
Instituto de Ciencias Nucleares
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

3. Datos del sinodal 1

Dr. Darío Núñez Zúñiga
nunez@nucleares.unam.mx
Instituto de Ciencias Nucleares
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

4. Datos del sinodal 2

Dr. Jerónimo Alonso Cortez Quezada
jacq@ciencias.unam.mx
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

5. Datos del sinodal 3

Dr. Juan Manuel García Islas
jmgislas@leibniz.iimas.unam.mx
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas (IIMAS)

6. Datos del sinodal 4

Dr. Tonatiuh Matos Chassin
tmatos@fis.cinvestav.mx
Departamento de Física
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV)

7. Datos del trabajo escrito

Acreción de campo fantasma a un agujero negro
75 p
2012

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Antecedentes | 1 |
| 1.1. Ecuaciones de campo | 1 |
| 1.2. Agujeros negros | 2 |
| 1.3. Condiciones de energía | 9 |
| 1.4. Campos escalares | 11 |
| 2. Formalismo 3+1 | 15 |
| 2.1. Separación 3+1 del espacio-tiempo | 15 |
| 2.2. Curvatura extrínseca | 17 |
| 2.3. Constricciones de Einstein | 18 |
| 2.4. Las ecuaciones de evolución ADM | 20 |
| 2.5. Formulación BSSN | 22 |
| 2.6. Condiciones de norma | 25 |
| 2.6.1. Condiciones de foliación | 25 |
| 2.6.2. Condiciones de vector de corrimiento | 28 |
| 2.7. Sistemas bien planteados e hiperbolicidad | 28 |
| 2.8. Horizontes aparentes | 31 |
| 3. Simetría esférica | 33 |
| 3.1. BSSN generalizado | 33 |
| 3.2. BSSN en simetría esférica | 36 |
| 3.3. Regularización | 38 |
| 3.4. Campo escalar | 41 |
| 3.5. Horizontes aparentes en simetría esférica | 42 |
| 4. Condiciones iniciales y métodos numéricos | 45 |
| 4.1. Introducción | 45 |
| 4.2. Condiciones iniciales con valores simétricos en el tiempo | 46 |
| 4.3. Pulsos de campo escalar y campo fantasma | 47 |
| 4.4. Agujero negro como condición inicial | 48 |
| 4.5. Condiciones de estabilidad | 50 |
| 4.6. Método de líneas | 50 |

| | |
|---|-----------|
| 5. Resultados numéricos | 53 |
| 5.1. Agujero negro formado por colapso gravitacional de campo escalar | 54 |
| 5.1.1. Colapso gravitacional de campo escalar | 54 |
| 5.1.2. Acreción de campo fantasma a un agujero negro formado por colapso | 63 |
| 5.2. Agujero negro como condición inicial | 67 |
| 6. Conclusiones | 71 |

Resumen

El estudio del universo siempre ha sido motivo de curiosidad para los seres humanos. Desde los griegos la cosmología y el movimiento de los cuerpos celestes han llamado la atención de muchas de las grandes figuras de la historia. A partir de principios del siglo XX, el estudio del cosmos cambió revolucionariamente a partir de las nuevas tecnologías y el desarrollo de la Relatividad General por parte de Einstein. Por otro lado, el rápido desarrollo que se ha dado en la tecnología en los últimos años ha logrado bastantes avances en la rama numérica de la física. La Relatividad Numérica es una de las ramas que mayor beneficio ha obtenido debido a la gran cantidad de datos que requiere para sus simulaciones. Hoy en día es posible realizar simulaciones en una computadora personal que hace un par de décadas requerían de supercomputadoras.

La Relatividad General es una teoría de gravitación que nos ha permitido modelar muchos de los sistemas físicos que podemos ver hoy en día con la ayuda de la gran gama de telescopios con los que contamos. Un sistema en particular ha llamado mucho la atención desde su descubrimiento como solución a las ecuaciones de Einstein un año después de haber sido publicadas, lo que ahora conocemos como agujero negro. Hoy en día sabemos que sólo hay 3 parámetros que describen a un agujero negro: su masa, su carga y su momento angular. Este trabajo se basa en el agujero negro más sencillo, el agujero negro de Schwarzschild, que únicamente está determinado por su masa y no cuenta con carga ni momento angular.

Otro sistema físico que es bastante socorrido por su sencillez es el de los campos escalares. Un campo escalar es aquél que tiene un valor específico en cada punto del espacio. La naturaleza, sin embargo, parece que no se reduce a tanta simpleza, ya que hasta ahora no se ha probado la existencia de ningún campo escalar. Aún así, el estudio de estos campos nos permite saber más acerca de los sistemas en los que se trabaja y en ocasiones pueden servir como modelos sencillos de sistemas más complicados. Un ejemplo de ello es el campo escalar fantasma, que puede servir como un modelo sencillo para la energía oscura, es decir, aquella energía que produce un Universo en expansión acelerada como en el que vivimos.

Esta tesis tiene la finalidad de dar las herramientas necesarias para entender la teoría que hay detrás del desarrollo de un problema en Relatividad Numérica y con ello todos los problemas que se acarrea al resolver ecuaciones de manera numérica. El problema particular que se resuelve es el de la acreción de campo fantasma hacia un agujero negro. Existen varias maneras de abordar este problema. Aquí sólo se mencionan dos: la primera es aquella donde se forma un agujero negro a partir del colapso de un campo escalar y posteriormente se acreta campo fantasma; la segunda considera un agujero negro como condición inicial al cual se le acreta el campo fantasma.

El primer capítulo de este trabajo se dedica a explicar los antecedentes teóricos necesarios antes de entrar a la parte numérica. Para ello, se explica a fondo la solución de agujero negro de Schwarzschild a las ecuaciones de campo de Einstein. Además se da una descripción de lo que son los campos escalares y de cuales son las cualidades que nos interesan para este trabajo. También se habla de las condiciones de energía y de qué manera se pueden violar.

El segundo capítulo describe todo lo relacionado con el formalismo 3+1, que es el encargado en transformar las ecuaciones de Einstein en ecuaciones que se pueden resolver numéricamente. En este capítulo se especifica cuales son las ecuaciones por resolver y cómo se especifican los datos iniciales para los diferentes parámetros.

El tercer capítulo se encarga de especificar las ecuaciones del formalismo 3+1 para el caso en que el sistema cuenta con simetría esférica.

El cuarto capítulo menciona los diferentes métodos numéricos que se utilizaron en el código para resolver las ecuaciones y algunos métodos para poder afirmar que las soluciones obtenidas son de fiar.

Por último, el quinto capítulo muestra los resultados obtenidos para el sistema de acreción de campo a un agujero negro.

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Ecuaciones de campo

Desde que Einstein publicó el artículo que marcaría el inicio de una nueva rama de la física en 1915 [11], la Relatividad General, sus ecuaciones de campo han sido una muestra de la elegancia que puede tener una teoría física. Aún cuando las matemáticas necesarias para entenderlas pueden resultar complicadas, la aparente simpleza con que se esconde toda la teoría que se ha desarrollado hasta hoy en día es impresionante. Muestra de ello es el hecho de que las ecuaciones de campo de Einstein que, con la notación de hoy en día, se pueden escribir en una sola línea, esconden cientos de términos en su versión más extendida. Sin embargo, el concepto que hay de fondo es el que revolucionó la física e hizo de Einstein el arquetipo de genio.

La teoría de Einstein predice y explica más fenómenos que la de Newton. Sin embargo, la teoría de Einstein no es una simple mejora en la física newtoniana, es mucho más que eso. La Relatividad General es una teoría que engloba toda la teoría física antes realizada en un nuevo marco matemático forjado con elementos nuevos para los físicos (pero no para los matemáticos) en aquellos tiempos, los tensores. Una de las grandes diferencias que conlleva este nuevo concepto es la ausencia de un marco de referencia predilecto. La física newtoniana toma sistemas de referencia inerciales, es decir, aquellos donde el observador no está en un movimiento acelerado. En Relatividad General, este tipo de sistemas de referencia es sólo local, es decir, no existe un sistema coordenado absoluto que sea inercial en todos los puntos.

Las ecuaciones de campo no deben depender de un observador particular y deben ser invariantes para cualquier sistema de referencia ya que la física debe ser la misma para cualquier observador. Esta limitante se cumple al hacer las ecuaciones tensoriales.

El primer tensor en las ecuaciones de campo es el que representa a la geometría del espacio-tiempo del sistema. Para ello, Einstein definió el tensor que ahora lleva su nombre:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.1)$$

Los elementos que lo componen son: la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$, el tensor de curvatura de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el escalar de curvatura R . Como se puede apreciar, este tensor está compuesto por elementos geométricos que no tienen nada que ver con la física del problema.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Como convención, los índices griegos, en este caso μ y ν , van de 0 a 3, siendo 0 el valor que representa al tiempo y los valores 1 – 3 los correspondientes al espacio. Por otro lado, los índices latinos, como i ó j , van de 1 a 3. Esta convención está adoptada a lo largo de todo este trabajo.

El segundo tensor que compone a las ecuaciones de campo de Einstein es el que tiene que ver con la física del sistema. Las características de un problema definen a la energía y el momento del sistema a través del tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Como nos dice Schutz en su libro [27], el tensor de energía-momento está definido como el flujo del momento μ a través de una superficie de constante x^ν . Esto significa que la componente T^{00} corresponde a la densidad de energía; T^{0i} al flujo de energía a través de la superficie x^i ; T^{0i} a la densidad de momento i ; y T^{j0} al flujo de momento i a través de la superficie j . La importancia de este tensor recae en que dicho tensor en un marco de referencia dado define completamente al sistema.

El tensor de energía-momento cumple, naturalmente, con las leyes de conservación de la energía y de momento. Matemáticamente esto se expresa como:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.2)$$

donde ∇_μ es la derivada covariante. En otras palabras, podemos decir que el vector $T_{\mu\nu}$ tiene una divergencia nula. Además, el tensor de energía-momento es simétrico, es decir, cumple con que $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

La parte importante del trabajo de Einstein, además de todo el desarrollo matemático que hay de fondo, fue postular que existe una relación entre ambos tensores, tanto el de energía momento $T_{\mu\nu}$, como el que ahora lleva su nombre $G_{\mu\nu}$. Una de las razones que lo llevó a esa conclusión fue que ambos tensores son tensores simétricos que cumplen con que su divergencia es nula. La relación entre ambos tensores se resume en lo que hoy se denominan las ecuaciones de campo de Einstein ¹:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Cabe destacar que se están utilizando las unidades geométricas, es decir se considera que $G = c = 1$, donde G es la constante gravitacional y c es la velocidad de la luz. El uso de estas unidades es conveniente para no cargar con ambas constantes en todas las operaciones y es importante recalcar que es una convención que se utiliza en todo este texto. Esto implica que la masa se mida en metros, dejando, por ejemplo, la masa solar del orden de $10^3 m$ y la masa de la Tierra en $10^{-3} m$.

1.2. Agujeros negros

Una aplicación importante en Relatividad General es la relacionada con el campo gravitacional de un objeto estático con simetría esférica. Existen muchos objetos que parecieran ser casi una esfera, como lo son estrellas y planetas. Además, la simetría del problema reduce mucho el número de términos en las ecuaciones, lo que lo hace el sistema más sencillo de resolver en las ecuaciones de campo ².

¹Escritas en su versión moderna

²Una discusión más detallada se puede encontrar en [27]

Para encontrar el espacio-tiempo que define a un sistema con un objeto esférico empecemos por definir el elemento de línea de un espacio de Minkowski en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (1.4)$$

Cada superficie con r y t constante es una 2-esfera. Distancias a lo largo de curvas confinadas a dicha esfera están dadas por la ecuación anterior con $dt = dr = 0$:

$$dl^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \equiv r^2 d\Omega^2 , \quad (1.5)$$

donde se encuentra definido el elemento de ángulo sólido $d\Omega^2$.

Un espacio-tiempo es esféricamente simétrico cuando cualquier punto en el mismo se encuentra sobre una 2-superficie cuyo elemento de línea se define como:

$$dl^2 = R(r', t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (1.6)$$

donde $R(r', t)$ es una función desconocida de las dos otras coordenadas de la variedad, r' y t . El área de dicha esfera es $4\pi R(r', t)$. Definimos la coordenada radial r de nuestra geometría esférica de manera que $R(r', t) = r^2$. De esta manera cualquier superficie con $r = \text{cte.}$, $t = \text{cte.}$ es una 2-esfera con área $4\pi r^2$ y circunferencia $2\pi r$. Esta r es denominada la coordenada de área debido a que define el radio de curvatura y el área de las esferas. Esto no implica que deba haber un punto en el centro de coordenadas $r = 0$. Como ejemplo se puede considerar una parábola de revolución que no toque el origen. El radio de área en este caso mide la circunferencia de la superficie en un lugar determinado pero claramente no hay un punto en $r = 0$.

Otra simplificación que vamos a utilizar es la dependencia en el tiempo. En general los coeficientes métricos dependen de todas las coordenadas, entre ellas el tiempo. Sin embargo, en este caso consideraremos el caso estático, es decir, el caso donde no hay dependencia temporal. Si escogemos la coordenada de área r en el caso estático, la métrica general del espacio-tiempo con simetría esférica queda como:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (1.7)$$

En el caso general tenemos entonces sólo dos funciones por determinar, $f(r)$ y $h(r)$. Las coordenadas (r, θ, ϕ) son conocidas como las coordenadas de Schwarzschild.

El siguiente paso es sustituir la métrica en las ecuaciones de Einstein para encontrar f y h . Como estamos interesados en el campo exterior debemos usar las ecuaciones de vacío, es decir aquellos puntos donde el tensor de Ricci es nulo: $R_{\mu\nu} = 0$. Haciéndolo obtenemos:

$$0 = R_{tt} = \frac{1}{2} (fh)^{-1/2} \frac{d}{dr} \left[(fh)^{-1/2} \frac{df}{dr} \right] + \frac{1}{r fh} \frac{df}{dr} , \quad (1.8)$$

$$0 = R_{rr} = -\frac{1}{2} (fh)^{-1/2} \frac{d}{dr} \left[(fh)^{-1/2} \frac{df}{dr} \right] + \frac{1}{r fh} \frac{dh}{dr} , \quad (1.9)$$

$$0 = R_{\theta\theta} = R_{\phi\phi} = -\frac{1}{2r fh} \frac{df}{dr} + \frac{1}{2rh^2} \frac{dh}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{h} \right) . \quad (1.10)$$

Con todas las demás componentes de $R_{\mu\nu} \equiv 0$. Las primeras dos ecuaciones implican que:

$$\frac{d \ln f}{dr} + \frac{d \ln h}{dr} = 0, \quad (1.11)$$

que se pueden integrar para encontrar que $f = K/h$, donde K es una constante. Sin pérdida de generalidad podemos considerar a $K = 1$ ya que esto sólo reescala la coordenada temporal. Sustituyendo en la ecuación (1.10) se obtiene como solución que:

$$f = 1 + \frac{C}{r} \quad (1.12)$$

donde C es otra constante. La métrica $g_{\mu\nu}$, escrita como un elemento de línea, toma entonces la forma:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.13)$$

El valor de C se puede obtener comparando con el límite Newtoniano que debe de corresponder con $r \gg 1$. De esta manera se obtiene que $C = -2M$, donde M es la masa del objeto. De esta manera se obtiene:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.14)$$

Esta es conocida como la solución de Schwarzschild [28] en honor a su autor Karl Schwarzschild que la dedujo en 1916 unos meses después de que Einstein postulara las ecuaciones de campo de la Relatividad General. Una de las propiedades de esta solución es que es asintóticamente plana, es decir, se acerca a la métrica de Minkowski conforme $r \rightarrow \infty$. Se entiende que esto pase ya que el campo gravitacional se vuelve más débil conforme nos alejamos de la fuente. Otra propiedad interesante es que los coeficientes métricos se vuelven singulares en $r = 0$ y en $r = 2M$. El radio $r_s \equiv 2M$ se conoce como el radio de Schwarzschild u horizonte de eventos y para objetos astrofísicos convencionales (estrellas, planetas, etc.) es mucho más pequeño que el objeto mismo. Por ejemplo, para el Sol es de aproximadamente 3 km, mientras que para la Tierra es de 1 cm. Como la solución de Schwarzschild es una solución de vacío no es válida para r menores al radio del objeto por lo que en esos casos no hay que preocuparse por singularidades en la métrica.

Si en cambio consideramos una solución de Schwarzschild para una partícula puntual tenemos que lidiar con singularidades de la métrica en $r = 0$ y en $r = 2M$. Para estudiar la naturaleza de estas singularidades es conveniente calcular el tensor de Riemann para este espacio-tiempo. Haciéndolo se encuentra que las únicas componentes que no son cero del Riemann calculadas en la base esférica ortonormal $\{\hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ son:

$$R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = -\frac{2M}{r^3}, \quad (1.15)$$

$$R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = \frac{M}{r^3}, \quad (1.16)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{2M}{r^3}, \quad (1.17)$$

$$R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = -\frac{M}{r^3}. \quad (1.18)$$

Notamos que ninguna de estas componentes es singular en $r = 2M$, pero todas lo son en $r = 0$. Esto quiere decir que el campo gravitacional es singular en $r = 0$ pero que es regular en $r = 2M$. La única posibilidad entonces es que en $r = 2M$ algo está mal con las coordenadas de Schwarzschild.

Otra propiedad relevante de la solución de Schwarzschild es que para $r < 2M$ las coordenadas r y t cambian de rol ya que r se hace una coordenada temporal, es decir $g_{rr} < 0$, mientras que t se hace espacial, es decir $g_{tt} > 0$. Esto implica que una vez que un objeto cruza el horizonte en $r = 2M$, avanzar en el tiempo se hace equivalente a decrecer en r , esto es, el objeto debe de continuar cayendo a valores cada vez más chicos de r por la misma razón por la que el tiempo avanza hacia el futuro. Como nada puede detener el avance del tiempo, no hay fuerza en el Universo capaz de detener al objeto de alcanzar $r = 0$, donde se destruirá debido a la singularidad ahí presente. El radio de Schwarzschild representa entonces una superficie de no-retorno.

Para caracterizar el problema que existe en $r = 2M$ consideremos el tiempo propio de una partícula que cae a la superficie $r_s = 2M$ desde cualquier radio finito R . El tiempo que mide la partícula al caer es:

$$d\tau = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} dt. \quad (1.19)$$

Notamos que entre más cercano sea el valor de R a $2M$, mayor será la diferencia entre el tiempo propio del observador ($d\tau$) y el tiempo propio de un observador a una distancia infinita (dt), de modo tal que si $R = 2M$ la diferencia se hace infinita. Esto quiere decir que hay un mal comportamiento de las coordenadas en el horizonte.

Para no tener irregularidades en $r = 2M$ consideremos ahora geodésicas nulas radiales. Para ello tomamos $d\theta = d\phi = 0$ en la métrica de Schwarzschild y pedimos que el intervalo sea nulo, $ds^2 = 0$. Entonces:

$$ds^2 = 0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (1.20)$$

lo que implica que:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (1.21)$$

Si hacemos un diagrama $t - r$ (Figura 1.1) las líneas que se forman tienen una pendiente ± 1 lejos de la estrella, como un cono de luz. Pero, mientras $r \rightarrow 2M$ la pendiente se acerca a ∞ . Esto quiere decir que el cono se vuelve cada vez más vertical y por lo tanto las líneas-universo se hacen cada vez más verticales. Se llega a $r = 2M$ cuando $t = \infty$. Esto muestra geoméricamente la irregularidad que tiene el horizonte en las coordenadas de Schwarzschild.

Para remediar este problema se buscaron diferentes tipos de coordenadas que fueran regulares en $r = 2M$ y que no cerraran los conos de luz. Dichas coordenadas fueron encontradas independientemente por Martin D. Kruskal [18] y György Szekeres [31], por lo que hoy en

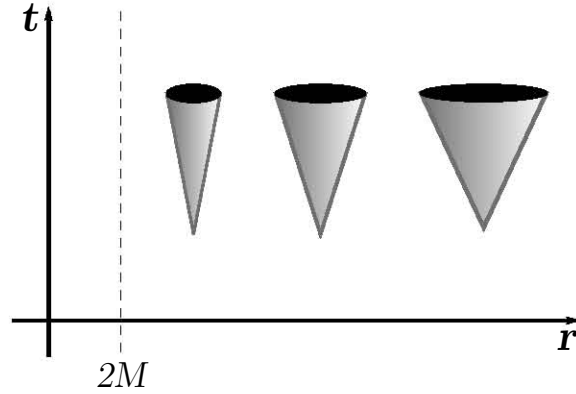


Figura 1.1: Conos de luz en un diagrama $t - r$ en coordenadas de Schwarzschild cerca de la superficie $r = 2M$

día se denominan las coordenadas de Kruskal-Szekeres y se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right), \\ v &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right), \end{aligned} \quad (1.22)$$

para $r \geq 2M$ y:

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right), \\ v &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right), \end{aligned} \quad (1.23)$$

Para $r \leq 2M$. La métrica en estas coordenadas queda de la siguiente manera:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (1.24)$$

Donde r ya no es una coordenada sino una función de u y v dada implícitamente por el inverso de las ecuaciones (1.22) y (1.23):

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = u^2 - v^2. \quad (1.25)$$

Vemos que no hay singularidad en la métrica (1.24) en $r = 2M$. Sin embargo si la hay en $r = 0$, como era de esperarse. Una línea radial nula ($d\theta = d\phi = ds^2 = 0$) es una línea con:

$$dv = \pm du. \quad (1.26)$$

Esto significa que en un diagrama (u, v) (Figura 1.2) los conos de luz están a 45 grados, como en el espacio plano. Este resultado hace que las coordenadas se hagan particularmente útiles para visualizar la geometría en el diagrama de coordenadas. Hay que recordar que

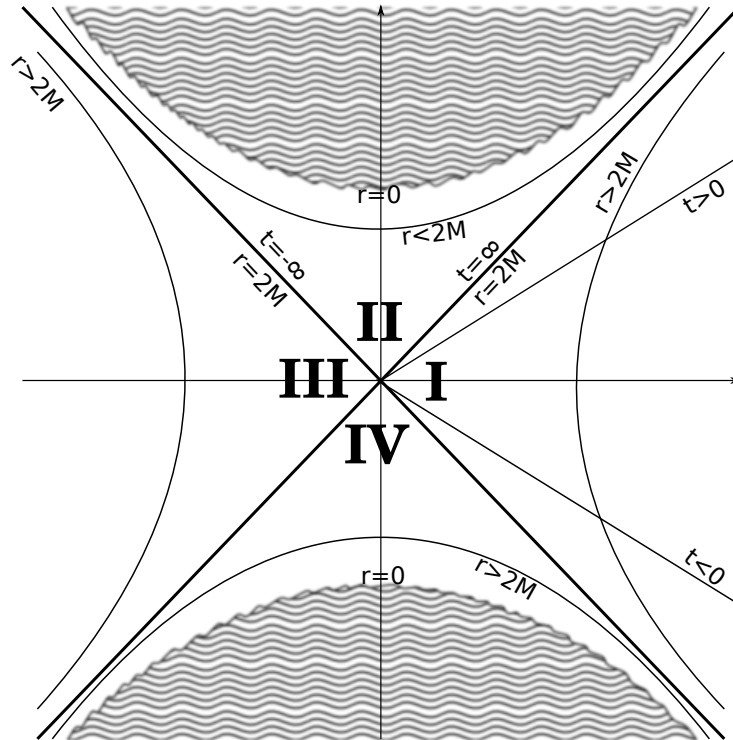


Figura 1.2: Diagrama de Kruskal-Szekeres

el diagrama muestra únicamente las coordenadas $\{u, v\}$, las coordenadas angulares no se encuentran, por lo que cada punto en el diagrama corresponde a una esfera.

Hay mucho que decir de este diagrama. Las líneas de r constante son hipérbolas, como se puede ver de (1.25), verticales para $r > 2M$ y horizontales para $r < 2M$. Podemos ver que las líneas $r = 2M$ separan el diagrama del espacio-tiempo en cuatro regiones:

- En la región I tenemos $r > 2M$ por lo que es la región exterior al horizonte. Una línea de r constante en esta región es temporaloide, por lo que cualquier trayectoria $r = \text{cte}$ es permitida en dicha zona.
- La región II tiene $r < 2M$ por lo que es el interior. Líneas con r constante en esta región son espacialoides por lo que ningún objeto puede mantenerse a r constante ahí. Un objeto que se mueva de la región I a la región II no puede salir jamás y debe llegar a la singularidad en $r = 0$ en algún momento de su futuro. Como nada puede salir de la región II, ni si quiera la luz, esta región es denominada agujero negro. La línea en $r = 2M$ que separa al agujero negro del exterior es una línea radial nula y se denomina horizonte del agujero negro.
- La región IV es equivalente a la región II pero con el tiempo invertido, la singularidad está en el pasado y nada puede entrar a la región IV desde afuera. Esta región es denominada agujero blanco.
- Finalmente, la región III es también una región exterior pero esta completamente desconectada de la región I, por lo que representa otro universo.

Las líneas de tiempo constante de Schwarzschild t en el diagrama corresponden a líneas rectas que pasan por el origen. Tiempo infinito $t = \pm\infty$ corresponde a líneas a 45 grados que coinciden con $r = 2M$. Como todas las líneas de t constante pasan por el origen, el origen se puede expandir en toda una línea en un diagrama de coordenadas (t, r) . Aquí es donde radica el problema con las coordenadas de Schwarzschild.

Hay una relación importante entre el área del horizonte y la masa del espacio-tiempo de Schwarzschild. Por la pura definición del radio de área, el radio de una esfera está dado por $A = 4\pi r^2$. En el horizonte tenemos que $r = 2M$, por lo que:

$$M = \sqrt{\frac{A_H}{16\pi}}, \quad (1.27)$$

donde A_H es el área del horizonte.

Una vez descrito el término de agujero negro hay que mencionar un sistema de coordenadas que es particularmente útil en Relatividad Numérica, las coordenadas isotrópicas. Resulta ser que es posible reescribir la métrica de manera que la parte espacial sea conformemente plana, es decir, que la métrica espacial sea el producto de la métrica de Minkowski por una función escalar. Para hacer esto definimos una nueva coordenada:

$$r = \bar{r} \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}} \right)^2. \quad (1.28)$$

La transformación entre las coordenadas de Schwarzschild $\{t, r\}$ y las coordenadas isotrópicas $\{t, \bar{r}\}$ resultan en la métrica:

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - M/2\bar{r}}{1 + M/2\bar{r}} \right)^2 dt^2 + \psi^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2), \quad (1.29)$$

donde ψ es un factor conforme dado por $\psi = 1 + M/2\bar{r}$.

En estas coordenadas la métrica espacial es regular en el horizonte, que ahora corresponde a $\bar{r} = M/2$. Notamos también que muy lejos r y \bar{r} se aproximan una a otra. A la coordenada \bar{r} se le suele denominar radio isotrópico debido a que la métrica espacial es el producto de la métrica plana por un factor conforme. La métrica (1.29) es claramente singular en $\bar{r} = 0$ pero una transformación de coordenadas nos muestra que $\bar{r} = 0$ corresponde a $r = \infty$, por lo que no es la singularidad física que se encuentra en $r = 0$. La región $\bar{r} \in [0, M/2]$ representa el otro universo (el de la región III en el diagrama de Kruskal-Szekeres) que se compacta en una región finita. La singularidad en $\bar{r} = 0$ es sólo un resultado asociado a esta compactificación. Notamos también que esta métrica tiene una isometría, es decir, es invariante con respecto a la transformación $\bar{r} \rightarrow M^2/4\bar{r}$. Esta isometría corresponde a cambiar un punto en nuestro universo con el correspondiente en el otro universo.

En resumen podemos decir entonces que un agujero negro es una región del espacio-tiempo que se encuentra incomunicada con el resto del Universo. La frontera de dicha región es una hipersuperficie 3-dimensional en el espacio-tiempo denominada horizonte de eventos. Nada puede escapar del interior de un agujero negro, ni siquiera la luz. Existen singularidades del espacio-tiempo que se forman inevitablemente dentro de dichos agujeros, sin embargo, dichas singularidades se encuentran casualmente desconectadas del exterior del Universo por lo que no pueden influenciarlo.

Penrose formuló en 1969 la conjetura de censura cósmica [23] que dice que no pueden formarse singularidades desnudas a partir de condiciones iniciales con espacio-tiempos asintóticamente planos. Dicha conjetura sigue siendo un debate hoy en día. Además, se cree que cualquier horizonte eventualmente se vuelve estacionario si no es perturbado por efectos exteriores como acreción [16]. Los horizontes estacionarios están completamente estudiados y están definidos únicamente por su masa total M , su momento angular total J y la carga Q . Un importante resultado que concierne a los horizontes no estacionarios es el teorema de área de Hawking [4] que dice que en cualquier proceso dinámico que involucre agujeros negros, el área total de los horizontes no puede decrecer en el tiempo. Este resultado utiliza la llamada condición dominante de energía propuesta por el mismo Hawking en 1970 [15], que será mencionada en la siguiente sección. Sin embargo, existen campos que no cumplen con dicha condición y que pueden hacer decrecer el área total de los horizontes.

1.3. Condiciones de energía

En el universo real el tensor de energía-momento está compuesto por contribuciones de muchos campos de materia. Sería entonces muy complicado describirlo aún cuando se supiera la contribución de cada campo y las ecuaciones de movimiento que los gobiernan. Aunque esto signifique que no podemos describir del todo a la realidad, existen algunas desigualdades que son físicamente razonables que podemos asumir³. En muchas circunstancias dichas igualdades son suficientes para probar la existencia de singularidades.

Para plantear las condiciones de energía de manera concreta es útil suponer que el tensor de energía-momento se puede descomponer en:

$$T^{\mu\nu} = \rho \hat{e}_0^\mu \hat{e}_0^\nu + p_i \hat{e}_i^\mu \hat{e}_i^\nu, \quad (1.30)$$

donde \hat{e}^μ son vectores unitarios y forman una base ortonormal. Esta ecuación implica que la densidad de energía ρ y las presiones principales p_i son eigenvalores del tensor de energía-momento y que los vectores \hat{e}^μ son los eigenvectores normalizados.

Algunas de las condiciones de energía están formuladas en términos de un vector temporal arbitrario v^μ . Dicho vector se puede descomponer como:

$$v^\mu = \gamma (\hat{e}_0^\mu + a \hat{e}_1^\mu + b \hat{e}_2^\mu + c \hat{e}_3^\mu), \quad (1.31)$$

donde $\gamma = \sqrt{1 - a^2 - b^2 - c^2}$ y a, b, c son funciones arbitrarias de las coordenadas, restringidas a que $a^2 + b^2 + c^2 < 1$.

También requerimos de un vector nulo k^μ expresado como:

$$k^\mu = \hat{e}_0^\mu + f \hat{e}_1^\mu + g \hat{e}_2^\mu + h \hat{e}_3^\mu, \quad (1.32)$$

donde f, g y h son funciones arbitrarias de las coordenadas restringidas a que $f^2 + g^2 + h^2 = 1$.

³La discusión sobre las condiciones de energía se puede consultar más a fondo en [24, 17].

Condición débil de energía

La condición débil de energía establece que la densidad de energía para cualquier observador es no-negativa. Matemáticamente, esto quiere decir que el tensor de energía-momento cumple con la desigualdad:

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0, \quad (1.33)$$

para cualquier vector temporaloide v^μ . Usando las ecuaciones (1.30) y (1.31) encontramos que:

$$\rho^2 + a^2 p_1 + b^2 p_2 + c^2 p_3 \geq 0. \quad (1.34)$$

Como a, b y c son arbitrarios podemos elegir $a = b = c = 0$, dando como resultado $\rho \geq 0$. Por otro lado, podemos elegir $b = c = 0$ lo que nos lleva a que $\rho + a^2 p_1 \geq 0$. Como $a^2 < 1$ obtenemos entonces que $0 \leq \rho + a^2 p_1 \leq \rho + p_1$. Por lo que $\rho + p_1 \geq 0$. Las mismas expresiones aplican para p_2 y p_3 por lo que la condición débil de energía implica que:

$$\rho \geq 0, \quad \rho + p_i \geq 0. \quad (1.35)$$

Condición nula de energía

Matemáticamente, la condición nula de energía tiene la misma afirmación que la condición débil pero en lugar del vector v^μ se toma un vector nulo k^μ de manera que:

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (1.36)$$

Si sustituimos (1.32) obtenemos:

$$\rho^2 + f^2 p_1 + g^2 p_2 + h^2 p_3 \geq 0. \quad (1.37)$$

Escogiendo $g = h = 0$ obligamos a que $f = 1$ y obtenemos $\rho + p_1 \geq 0$. Análogamente para p_2 y p_3 por lo que la condición de nula de energía implica que:

$$\rho + p_i \geq 0. \quad (1.38)$$

Notamos que la condición débil de energía implica la forma nula. Además, en el vacío $T_{\mu\nu} = 0$ por lo que ambas condiciones, la débil y la nula, se cumplen.

Condición fuerte de energía

Lo que afirma la condición fuerte de energía es que:

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) v^\mu v^\nu \geq 0, \quad (1.39)$$

donde v^μ es un vector temporaloide normalizado. Como $T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}/8\pi$, con ayuda de las ecuaciones de Einstein, la condición fuerte de energía es una afirmación sobre el tensor de Ricci. Sustituyendo las ecuaciones (1.30) y (1.31) obtenemos:

$$\gamma^2 (\rho + a^2 p_1 + b^2 p_2 + c^2 p_3) \geq \frac{1}{2} (\rho - p_1 - p_2 - p_3). \quad (1.40)$$

Eligiendo $a = b = c = 0$ obligamos a que $\gamma = 1$ y obtenemos que $\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq 0$. Por otro lado, si elegimos $b = c = 0$, obtenemos que $\gamma^2 = 1/(1 - a^2)$, por lo que:

$$\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq a^2(p_2 + p_3 - \rho - p_1) . \quad (1.41)$$

Como esto se debe de satisfacer para cualquier $a^2 < 1$ tenemos que $\rho + p_1 \geq 0$. Análogamente para p_2 y p_3 . La condición fuerte de energía implica entonces que:

$$\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq 0, \quad \rho + p_i \geq 0 . \quad (1.42)$$

Nótese que la condición fuerte de energía no implica la condición débil.

Condición dominante de energía

La condición dominante de energía se puede interpretar como que la densidad de energía local es no-negativa y el vector de flujo de energía no es espacialoide para cualquier observador. Matemáticamente esto quiere decir que si v^μ es un campo vectorial temporaloide arbitrario entonces:

$$-T_{\nu}^{\mu}v^{\nu} \text{ es un campo vectorial no-espacialoide que apunta hacia el futuro ,} \quad (1.43)$$

donde la cantidad $-T_{\nu}^{\mu}v^{\nu}$ es la densidad de momento medida por un observador con 4-velocidad v^μ . Sustituyendo (1.30) y (1.31) y usando la condición dominante de energía obtenemos que:

$$\rho^2 - a^2p_1 - b^2p_2 - c^2p_3 \geq 0 . \quad (1.44)$$

Eligiendo $a = b = c = 0$ obtenemos $\rho^2 \geq 0$ y pidiendo que $-T_{\nu}^{\mu}v^{\nu}$ se diriga hacia el futuro entonces nos quedamos sólo con la parte positiva $\rho \geq 0$. Si elegimos $b = c = 0$ obtenemos que $\rho^2 \geq a^2p_1^2$. Como esto debe valer para toda $a^2 < 1$, obtenemos que $\rho \geq |p_1|$. Lo mismo para p_2 y p_3 , de manera que la condición dominante de energía implica que:

$$\rho \geq 0 \quad \rho \geq |p_i| , \quad (1.45)$$

es decir, la energía domina sobre los otros componentes del tensor $T_{\mu\nu}$.

1.4. Campos escalares

Existen muchas observaciones que indican que vivimos en un Universo que se encuentra en expansión. La explicación más aceptada es la que habla de energía y materia oscuras. Al respecto se han desarrollado numerosos modelos cosmológicos de muy diversos tipos [19] : modelos de Quintaesencia, que utilizan un campo escalar canónico que evoluciona con un potencial; modelos de K-esencia, donde se utiliza un campo escalar con un término cinético no canónico; modelos de gravedad modificada; gases de Chaplygin que intentan unificar la materia oscura con la energía oscura; y muchos otros más. La mayoría de los modelos consideran que $\omega = p/\rho \geq -1$ [9], donde ρ es la densidad de energía y p es la presión, debido a que esto cumple con la condición dominante de energía, y la mayor parte de las observaciones son consistentes con los modelos donde $\omega = -1$, o el límite de la constante

cosmológica (Λ). Sin embargo, es natural preguntarse que sucede con el otro lado, donde $\omega < -1$. Uno de los modelos más sencillos que se pueden formular para emular este fenómeno está asociado a los campos escalares.

Un campo escalar es un campo que toma un valor específico en cada punto del espacio-tiempo. Estos campos son independientes de las coordenadas, es decir, dos observadores en distintos sistemas de referencia deben de coincidir con el valor del campo escalar en el mismo punto del espacio-tiempo. Hasta ahora, no se han observado experimentalmente dichos campos. Sin embargo, la facilidad con la que se pueden manejar a nivel teórico los hacen una buena herramienta para realizar simulaciones sencillas o como aproximaciones para campos más complicados. La sencillez de estos campos permite su amplio uso en diversas ramas de la física, como la distribución de temperaturas en el espacio a un tiempo dado, la distribución de presión de un fluido o algunos campos cuánticos, como el campo de Higgs.

El tensor de energía-momento para un campo escalar Φ es:

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{g_{\mu\nu}}{2} [\nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi + 2V(\Phi)] , \quad (1.46)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo y $V(\Phi)$ es el potencial de autointeracción. Para el caso en que sólo hay un término de masa $V(\Phi) = m^2 \Phi^2 / 2$ donde m es la constante que determina la masa. Para el caso sin masa $V(\Phi) = 0$.

A partir del tensor de energía-momento, se pueden obtener los términos asociados a la densidad ρ y la presión p . Entonces se obtiene:

$$\rho = \frac{1}{2} (\partial_t \Phi)^2 + V(\Phi) , \quad (1.47)$$

$$p = \frac{1}{2} (\partial_t \Phi)^2 - V(\Phi) . \quad (1.48)$$

Notamos que el campo escalar cumple con todas las condiciones de energía, a excepción de la condición fuerte donde también se debe de cumplir que $(\partial_t \Phi)^2 \geq V(\Phi)$.

A partir de la ley de conservación $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ podemos encontrar que la ecuación de evolución para el campo escalar está determinada por la ecuación de Klein-Gordon:

$$\square \Phi = \partial_\Phi V(\Phi) , \quad (1.49)$$

la cual se puede reescribir como:

$$\partial_\mu ((-g)^{1/2} \partial^\mu \Phi) = (-g)^{1/2} \partial_\Phi V(\Phi) , \quad (1.50)$$

donde g es el determinante de $g_{\mu\nu}$.

Existen otro tipo de campos escalares exóticos que difieren del original en el signo que toman sus componentes. El que se considera en este trabajo es el campo escalar fantasma, que cambia el signo total del tensor de energía momento del campo escalar (1.46). De esta manera, el tensor de energía momento del campo escalar fantasma es:

$$T_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi + \frac{g_{\mu\nu}}{2} [\nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi + 2V(\Phi)] , \quad (1.51)$$

por lo que su densidad de energía y su presión están dadas por:

$$\rho = -\frac{1}{2} (\partial_t \Phi)^2 - V(\Phi), \quad (1.52)$$

$$p = -\frac{1}{2} (\partial_t \Phi)^2 + V(\Phi). \quad (1.53)$$

De esta manera, el cociente $\omega = p/\rho \leq -1$ forma parte de un modelo poco usual que tiene la peculiaridad de que la densidad de energía y la presión, al menos para el caso sin masa, son negativas. Aunque pareciera que un campo con estas características no es viable en la naturaleza, hay estudios que indican que podrían serlo [9].

Se puede ver de (1.52) y (1.53) que el campo fantasma no cumple con las condiciones de energía. Esta propiedad caracteriza al campo escalar fantasma y gracias a ella se pueden obtener resultados fuera de lo común. Muestra de ello es el estudio realizado por Caldwell donde se observan las consecuencias cosmológicas de un campo de este estilo [8]. Además, se han realizado simulaciones donde la acreción de campo fantasma a un agujero negro alcanza a reducir su horizonte hasta un 50% [12]. Uno de los objetivos de esta tesis es reducir ese porcentaje y especificar los mecanismos que no permiten reducir más la masa del agujero negro.

Capítulo 2

Formalismo 3+1

Las ecuaciones de campo gravitacional de Einstein describen la geometría del espacio-tiempo del sistema en que se está trabajando. Dichas ecuaciones no marcan una diferencia explícita entre el tiempo y el espacio. Para poder analizar una evolución de las ecuaciones requerimos un enfoque en el que el tiempo juegue un rol distinto al del espacio para que se puedan realizar predicciones de la evolución en el tiempo del campo gravitacional.

Existen distintas formas de separar las ecuaciones de campo de Einstein de manera que se pueda obtener una evolución del campo gravitacional a partir de ciertos datos iniciales. El formalismo 3+1 que aquí se describirá es una manera de dividir el espacio-tiempo en el espacio 3-dimensional por un lado y el tiempo por el otro. Esta manera de abordar el problema es la más común en relatividad numérica, mas no es la única. Existen dos alternativas principales para 3+1 conocidas como formalismo característico y formalismo conforme. Cada formalismo cuenta con sus ventajas y desventajas dependiendo del sistema físico bajo consideración, pero en este trabajo únicamente se mencionarán las del formalismo 3+1.

2.1. Separación 3+1 del espacio-tiempo

Para poder evolucionar un sistema es necesario que esté formulado como un problema de valores iniciales o de Cauchy. En este caso, se busca hacer una evolución del espacio-tiempo de tal forma que al introducir algún tipo de condiciones iniciales y condiciones de frontera se pueda predecir de manera única el futuro o pasado del sistema ¹.

Consideremos un espacio-tiempo con métrica $g_{\mu\nu}$ globalmente hiperbólico, es decir, que cuenta con una superficie de Cauchy. Cualquier espacio-tiempo globalmente hiperbólico puede ser foliado, o se puede dividir en hojas temporales, de manera que cada hoja de la foliación sea espacialoide. A cada una de estas hojas, que no son más que hipersuperficies 3-dimensionales, las denotamos Σ . Podemos identificar cada hoja a través de un parámetro t , considerado como una función universal de tiempo, que no necesariamente coincide con el tiempo propio de algún observador en particular.

¹Una discusión más detallada se puede encontrar en [1, 6, 21]

Consideremos ahora un tipo de foliación específica y tomemos dos hipersuperficies adyacentes Σ_t y Σ_{t+dt} . Para describir la geometría entre ambas hipersuperficies requerimos de los siguientes elementos [3] :

- La métrica tridimensional γ_{ij} que mide las distancias propias dentro la hipersuperficie:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j . \quad (2.1)$$

- El lapso de tiempo propio que transcurre entre ambas hipersuperficies medido por los observadores que se mueven en la dirección normal a las hipersuperficies (denominados observadores de Euler):

$$d\tau = \alpha dt , \quad (2.2)$$

donde $\alpha = \alpha(t, x^i)$ es la función de lapso que fija la elección de la foliación. Por ejemplo, para un espacio-tiempo tipo Minkowsky $\alpha = 1$.

- La velocidad relativa β^i que hay entre los observadores de Euler y las líneas de coordenadas espaciales constantes:

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^j) dt . \quad (2.3)$$

A β^i se le denomina vector de corrimiento. Este vector no representa nada físico, por lo que se pueden tener velocidades coordenadas mayores que la velocidad de la luz. Esto no viola el postulado de Einstein porque lo que se mueven son las coordenadas.

La manera como el espacio-tiempo puede ser foliado y la forma en que las coordenadas espaciales van de una hipersuperficie a otra no son únicas. Es decir, tanto la función de lapso (α) como el vector de corrimiento (β^i) son arbitrarios. Ambos elementos son los que tienen información sobre la elección de coordenadas, razón por la que se les conoce como funciones de norma.

A partir de los elementos α , β^i y γ_{ij} , se puede ver que la métrica del espacio-tiempo en el formalismo 3+1 toma la siguiente forma:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j , \quad (2.4)$$

donde $\beta_i \equiv \gamma_{ij} \beta^j$. Esta ecuación, análogamente a lo que se hace en Relatividad Especial, determina el intervalo invariante entre puntos vecinos.

Ya que tenemos el elemento de línea, definimos la métrica 3-dimensional γ_{ij} como la métrica inducida por la métrica 4-dimensional $g_{\mu\nu}$ en cada hipersuperficie Σ :

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu , \quad (2.5)$$

donde n^μ es el vector normal a las hipersuperficies Σ , que corresponde por definición a la 4-velocidad de los observadores de Euler: $n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha)$. Notamos de (2.5) que por definición γ_{ij} es la proyección de $g_{\mu\nu}$ en cada hipersuperficie Σ .

Por otro lado, definimos el vector coordenado t^μ como:

$$t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu . \quad (2.6)$$

Esta ecuación nos muestra como evolucionan los puntos en las hipersuperficies, ya que t^μ es el vector que define la forma en que se conectan los puntos con las mismas coordenadas espaciales entre foliaciones. Notamos entonces que el vector de corrimiento mide como se desvían las líneas coordenadas de la dirección normal n^μ . Por otro lado, el lapso mide cuanto tiempo propio ha transcurrido entre foliaciones vecinas a lo largo del vector normal.

2.2. Curvatura extrínseca

Al realizar una foliación del espacio-tiempo, como la que se hizo en la sección anterior, debemos considerar que existe una curvatura intrínseca que corresponde a la geometría interna de cada una de las hipersuperficies, y una extrínseca que está asociada a la manera en que dichas hipersuperficies se encuentran inmersas dentro del espacio-tiempo. La curvatura intrínseca está descrita por el tensor de Ricci 3-dimensional R_{ij} . La curvatura extrínseca, por otro lado, está definida a partir del cambio del vector normal al ser transportado paralelamente a lo largo de la superficie.

Como se verá más adelante, la curvatura extrínseca se puede considerar como la “velocidad” de la métrica espacial vista por los observadores de Euler. Entonces, la métrica γ_{ij} y la curvatura extrínseca K_{ij} pueden verse como el equivalente a posiciones y velocidades en mecánica clásica, ya que miden el estado “instantáneo” del campo gravitacional y son las variables fundamentales para las condiciones iniciales dentro de esta formulación.

Para definir la curvatura extrínseca se introduce primero el operador de proyección P_β^α que nos asegura que el transporte paralelo solo se realice sobre la superficie:

$$P_\mu^\alpha \equiv \delta_\mu^\alpha + n_\mu n^\alpha \quad (2.7)$$

Notamos que dicho operador no es más que la métrica espacial inducida $P_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}$.

Usando el operador de proyección se define entonces el tensor de curvatura extrínseca como:

$$K_{\mu\nu} \equiv -P_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu \quad (2.8)$$

El tensor $K_{\mu\nu}$ es claramente un tensor espacial, ya que $n^\mu K_{\mu\nu} = n^\nu K_{\mu\nu} = 0$. Además, resulta ser que es simétrico, es decir, $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$.

También se puede expresar la curvatura extrínseca en términos de la aceleración del vector unitario normal $a_\nu \equiv n^\mu \nabla_\mu n_\nu$. Expandiendo el lado derecho de (2.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= -(\delta_\mu^\alpha + n_\mu n^\alpha) \nabla_\alpha n_\nu \\ &= -\nabla_\mu n_\nu - n_\mu a_\nu. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si por otro lado calculamos la derivada de Lie, que a grandes rasgos es una generalización de la derivada covariante, de la métrica 3-dimensional en dirección de n^μ , encontramos que está relacionada con la curvatura extrínseca:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{\mu\nu} &= \mathcal{L}_{\vec{n}} (g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu) = 2\nabla_{(\mu} n_{\nu)} + n_\mu \mathcal{L}_{\vec{n}} n_\nu + n_\nu \mathcal{L}_{\vec{n}} n_\mu \\ &= 2(\nabla_{(\mu} n_{\nu)} + n_{(\mu} a_{\nu)}) = -2K_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

En el desarrollo se utilizó utilizaron la derivada de Lie de la métrica, la de uno-formas y el hecho de que $n_\alpha \nabla_\mu n^\alpha = 0$. De esta manera, obtenemos una ecuación más elegante que nos describe la curvatura extrínseca:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Podemos ver que la curvatura extrínseca sólo depende de \vec{n} en la hipersuperficie Σ por lo que es una propiedad geométrica única para cada hoja de la foliación. Al ser \vec{n} normal a la hipersuperficie, para cualquier función ϕ tenemos que:

$$\mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} \mathcal{L}_{\phi \vec{n}} \gamma_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

En particular, si tomamos la función escalar ϕ como el lapso α , obtenemos que:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\alpha} \mathcal{L}_{\alpha \vec{n}} \gamma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\alpha} \left(\mathcal{L}_{\vec{t}} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \right) \gamma_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

donde se utilizó la definición del vector t^μ (2.6).

En un sistema de coordenadas adaptado $\mathcal{L}_{\vec{t}} = \partial_t$ y si únicamente vemos la parte espacial de la última expresión, la podemos reescribir como:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i, \quad (2.14)$$

donde D_i representa la derivada covariante 3-dimensional asociada a γ_{ij} , que a su vez es la proyección de la derivada covariante 4-dimensional $D_\mu \equiv P_\mu^\alpha \nabla_\alpha$. Hay que considerar que para llegar a este resultado se utilizó el hecho de que $D_m \gamma_{ij} = 0$.

Al final, encontramos lo que se mencionó en un principio: la curvatura extrínseca es algo así como la “velocidad” de la métrica 3-dimensional asociada a cada hoja de la foliación que se haya elegido.

2.3. Constricciones de Einstein

La métrica $\gamma_{\mu\nu}$ y la curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ no se pueden elegir de manera arbitraria, deben de satisfacer ciertas constricciones. Para ello, se necesita relacionar el tensor 4-dimensional de Riemann $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ con el tensor 3-dimensional de Riemann ${}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha$, asociado a la hipersuperficie Σ , y la curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$. Se requieren los dos tensores ya que el tensor de Riemann 4-dimensional involucra segundas derivadas temporales de la métrica, mientras que el tensor 3-dimensional sólo tiene elementos espaciales.

Para compararlos requerimos del operador proyector P_ν^μ . La proyección completa del tensor de Riemann 4-dimensional en las hipersuperficies espaciales queda dada por la ecuación de Gauss-Codazzi:

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu} + K_{\alpha\mu} K_{\beta\nu} - K_{\alpha\nu} K_{\beta\mu}. \quad (2.15)$$

Como se puede apreciar, estas ecuaciones relacionan el tensor 4-dimensional de Riemann con el tensor 3-dimensional de Riemann y términos cuadráticos de la curvatura extrínseca.

De manera similar, la proyección del tensor de Riemann contraído una vez con el vector normal resulta en las ecuaciones de Codazzi-Mainardi²:

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda n^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} = D_\beta K_{\alpha\mu} - D_\alpha K_{\beta\mu}. \quad (2.16)$$

Podemos notar que tanto la ecuación de Gauss-Codazzi (2.15) como la de Codazzi-Mainardi (2.16) dependen únicamente de la métrica espacial, la curvatura extrínseca y sus derivadas espaciales. Se pueden pensar como condiciones de integrabilidad que permiten fijar la hipersuperficie 3-dimensional Σ descrita por $\gamma_{\mu\nu}$ y $K_{\mu\nu}$ dentro de la variedad 4-dimensional descrita por $g_{\mu\nu}$.

Hasta ahora sólo se han usado argumentos geométricos para describir la base matemática sobre la que vamos a trabajar. Para que el formalismo matemático sirva como una herramienta para problemas físicos es necesario asociarlo con alguna ecuación relacionada con la física del sistema. Naturalmente, para este caso las ecuaciones que van a servir de puente entre la geometría del espacio y la física del sistema van a ser las ecuaciones de campo de Einstein. Entonces, lo único que requerimos para obtener un sistema de ecuaciones es establecer una relación entre las ecuaciones de Gauss-Codazzi y Codazzi-Mainardi con las ecuaciones de Einstein.

Primero, notamos que:

$$\begin{aligned} P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= (g^{\alpha\mu} + n^\alpha n^\mu) (g^{\beta\nu} + n^\beta n^\nu) R_{\alpha\beta\mu\nu} \\ &= R + 2n^\mu n^\nu R_{\mu\nu} \\ &= 2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein.

Por otro lado, la ecuación (2.15) implica que:

$$P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

donde $K \equiv K^\mu_\mu$ es la traza de la curvatura extrínseca. Usando (2.17) y (2.18) encontramos que:

$$2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

Usando las ecuaciones de Einstein (1.3) obtenemos por fin:

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi\rho, \quad (2.20)$$

donde se introdujo la definición $\rho \equiv n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$, que corresponde a la densidad de energía local medida por los observadores de Euler. Vemos que, como se mencionó antes, esta ecuación no involucra derivadas temporales por lo que no corresponde a una ecuación de evolución sino a una constricción que debe satisfacerse a todo tiempo. A (2.20) se le conoce como constricción Hamiltoniana de energía.

Consideremos ahora la contracción mixta del tensor de Einstein con el tensor de proyección y el vector normal:

$$P^{\alpha\mu} n^\nu G_{\mu\nu} = P^{\alpha\mu} n^\nu R_{\mu\nu}. \quad (2.21)$$

²La derivación completa de las ecuaciones se puede ver en [32]

La ecuación (2.16) implica que:

$$\gamma^{\alpha\mu} n^\nu G_{\mu\nu} = D^\alpha K - D_\mu K^{\alpha\mu}. \quad (2.22)$$

Usando las ecuaciones de Einstein obtenemos la ecuación:

$$D_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K) = 8\pi j^i. \quad (2.23)$$

Aquí definimos $j^\alpha \equiv -P^{\alpha\mu} n^\nu T_{\mu\nu}$ que corresponde a la densidad de momento medida por los observadores de Euler. En este caso, a diferencia de (2.20), hay un índice libre por lo que se trata de tres ecuaciones, ya que el caso temporal es trivial. Igual que en (2.20) vemos que en (2.23) no hay derivadas temporales por lo que también son constricciones. A éstas se les denomina constricción de momento.

Cabe destacar que ambas constricciones no dependen de las funciones de norma α y β^i , lo que nos indica que son ecuaciones que involucran únicamente a una hipersuperficie en particular de la foliación.

2.4. Las ecuaciones de evolución ADM

Las constricciones Hamiltoniana y de momento nos dan 4 de las 10 ecuaciones de campo de Einstein en esta nueva formulación. Las 6 ecuaciones faltantes son las que describen la evolución de la curvatura extrínseca.

Para encontrar las ecuaciones de evolución necesitamos proyectar el tensor de Riemann dos veces con el vector normal y dos veces con el proyector P_β^α . Dichas proyecciones quedan dadas por:

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa n^\lambda n^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} = \mathcal{L}_{\vec{n}} K_{\mu\nu} + K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda + \frac{1}{\alpha} D_\mu D_\nu \alpha. \quad (2.24)$$

Hay que destacar que esta ecuación sí involucra a la función de lapso α y tiene una derivada de Lie de la curvatura extrínseca a lo largo de la dirección normal, que corresponde a una evolución temporal.

Ahora, usando la ecuación (2.15) encontramos que:

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa (n^\lambda n^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} + R_{\delta\kappa}) = {}^{(3)}R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda. \quad (2.25)$$

Juntando las ecuaciones (2.24) y (2.25), se obtiene que:

$$\mathcal{L}_{\vec{t}} K_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{\mu\nu} = -D_\mu D_\nu \alpha + \alpha (-P_\mu^\delta P_\nu^\kappa R_{\delta\kappa} + {}^{(3)}R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda). \quad (2.26)$$

Podemos ver estas ecuaciones de otra forma si recordamos que las ecuaciones de Einstein pueden escribirse en términos del Riemann, es decir:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (2.27)$$

De esta manera, introduciendo (2.27) en (2.26) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{t}} K_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{\mu\nu} = & -D_\mu D_\nu \alpha + \alpha [{}^{(3)}R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda] \\ & + 4\pi\alpha [\gamma_{\mu\nu} (S - \rho) - 2S_{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde ρ se define igual que antes y se agrega la definición del tensor de esfuerzos espacial medido por los observadores de Euler $S_{\mu\nu} \equiv P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$ y su traza $S \equiv S_\mu^\mu$.

Podemos enfocarnos únicamente en las componentes espaciales, ya que se trata de tensores espaciales. Además, la derivada de Lie en un sistema adaptado queda como $\mathcal{L}_{\vec{t}} = \partial_t$. También, se puede expandir la derivada de Lie a lo largo del vector de corrimiento de modo que la expresión (2.28) queda como:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha \\ &+ \alpha \left[{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k \right] + 4\pi\alpha \left[\gamma_{ij} (S - \rho) - 2S_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Estas ecuaciones nos dan la evolución de las 6 componentes independientes de la curvatura extrínseca K_{ij} . En conjunto con las ecuaciones (2.14), (2.20) y (2.23), recapituladas a continuación, forman un conjunto de ecuaciones que describen las ecuaciones de campo de Relatividad General como un problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R + K^2 - K_{ij} K^{ij} &= 16\pi\rho, \\ D_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K) &= 8\pi j^i, \\ \partial_t \gamma_{ij} &= -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i, \\ \partial_t K_{ij} &= \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha \\ &+ \alpha \left[{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k \right] + 4\pi\alpha \left[\gamma_{ij} (S - \rho) - 2S_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

A las ecuaciones (2.30) se les conoce como las ecuaciones ADM, por sus autores Richard Arnowitt, Stanley Deser y Charles Misner [3]. Sin embargo, escritas de esta manera no son como las derivaron originalmente, sino que son una reformulación realizada por York [35]. La principal diferencia entre las ecuaciones originales y las aquí planteadas viene de usar las ecuaciones de campo de Einstein en términos del tensor de Riemann (2.27) en lugar de las ecuaciones de campo con el tensor de Einstein (1.3). También difieren en un término \mathcal{H} , asociado a la restricción Hamiltoniana, agregado a (2.29), donde:

$$\mathcal{H} \equiv {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - 16\pi\rho = 0. \quad (2.31)$$

Físicamente, las dos formulaciones son equivalentes, debido a que el término agregado es 0. Sin embargo, las propiedades matemáticas de ambas ecuaciones difieren en algunos sentidos ya que \mathcal{H} contiene segundas derivadas de la métrica dentro del escalar de Ricci ${}^{(3)}R$ que alteran la estructura diferencial de las ecuaciones. Esto quiere decir, que las ecuaciones en el formalismo 3+1 no son únicas, ya que siempre se pueden agregar múltiplos de las restricciones a las ecuaciones de evolución. Todos los sistemas de evolución que se puedan formular, van a tener las mismas soluciones físicas, pero sus propiedades matemáticas cambiarán entre sí.

Hasta aquí pareciera que con las ecuaciones ADM basta para poder hacer una evolución numérica de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, estas ecuaciones resultan ser muy inestables para una evolución numérica, de manera que los códigos con dichas ecuaciones fallan en tiempos relativamente cortos. Es por esta razón que se han creado varias reformulaciones de ADM en la literatura.

2.5. Formulación BSSN

Una reformulación de las ecuaciones ADM que probó ser muy útil en evoluciones numéricas por Baumgarte y Shapiro (BS) [5] es la que hoy se denomina BSSN. La reformulación fue realizada primero por Nakamura, Oohara y Kojima [22], pero la versión más común es la basada en el trabajo de Shibata y Nakamura (SN) [29].

Primero, consideremos un reescalamiento conforme de la métrica espacial de la forma:

$$\tilde{\gamma}_{ij} \equiv \psi^{-4} \gamma_{ij}, \quad (2.32)$$

donde ψ es un factor conforme que puede ser elegido de diferentes maneras. No pareciera que esto pueda hacer un cambio muy grande en el planteamiento del problema, sin embargo, a un nivel más profundo, la transformación conforme sirve para definir una clase de equivalencia de variedades y métricas.

En la formulación BSSN se escoge un factor conforme de manera que la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij}$ tenga un determinante unitario, es decir que:

$$\psi^4 = \gamma^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \psi = \gamma^{1/12}, \quad (2.33)$$

donde γ es el determinante de γ_{ij} . Además, pedimos que esta relación se mantenga durante toda la evolución.

A partir de la ecuación (2.14) podemos ver que la ecuación de evolución del determinante de la métrica es:

$$\partial_t \gamma = -2\gamma (\alpha K - \partial_i \beta^i) + \beta^i \partial_i \gamma, \quad (2.34)$$

lo que implica que:

$$\partial_t \psi = \frac{1}{6} \psi (\alpha K - \partial_i \beta^i) + \beta^i \partial_i \psi. \quad (2.35)$$

En la práctica se trabaja por conveniencia con $\phi = \ln \psi$. De esta forma, $\tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi} \gamma_{ij}$ y tenemos que:

$$\partial_t \phi = -\frac{1}{6} (\alpha K - \partial_i \beta^i) + \beta^i \partial_i \phi. \quad (2.36)$$

Otro cambio que se hace en esta formulación es separar la curvatura extrínseca K_{ij} en su traza, K , y la parte sin traza de K_{ij} :

$$A_{ij} = K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K. \quad (2.37)$$

Además, se hace un reescalamiento conforme a la parte sin traza de la curvatura extrínseca A_{ij} :

$$\tilde{A}_{ij} = \psi^{-4} A_{ij} = e^{-4\phi} A_{ij}. \quad (2.38)$$

Un elemento crucial en la formulación, es la introducción de tres variables auxiliares conocidas como las funciones de conexión conformes que son definidas como:

$$\tilde{\Gamma}^i \equiv \tilde{\gamma}^{jk} \tilde{\Gamma}_{jk}^i = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij}, \quad (2.39)$$

donde $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ son los símbolos de Christoffel de la métrica conforme. La segunda igualdad viene de la definición de los símbolos de Christoffel en el caso en el que el determinante $\tilde{\gamma} = 1$.

Como consideramos a las $\tilde{\Gamma}^i$ como variables independientes requerimos de una ecuación de evolución para ellas. Para obtener esta ecuación se utilizan las ecuaciones (2.39) y (2.14), dando como resultado:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\Gamma}^i &= \tilde{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k - 2 \left(\alpha \partial_j \tilde{A}^{ij} + \tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha \right) \\ &+ \beta^j \partial_j \tilde{\Gamma}^i - \tilde{\Gamma}^j \partial_j \beta^i + \frac{2}{3} \tilde{\Gamma}^i \partial_j \beta^j. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Esta ecuación se puede reducir aún más notando que los términos en el renglón inferior son la derivada de Lie para una densidad vectorial con peso 2/3, mientras que los primeros 2 términos se deben a que $\tilde{\Gamma}^i$ no son en realidad componentes de una densidad vectorial sino símbolos de Christoffel contraídos. Tomando esto en cuenta, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\Gamma}^i = \tilde{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k - 2 \left(\alpha \partial_j \tilde{A}^{ij} + \tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha \right). \quad (2.41)$$

Esta ecuación de evolución para las $\tilde{\Gamma}^i$ resulta ser inestable. Para poder corregir este problema hay que considerar la constricción de momento, que en términos de las nuevas variables presentadas queda como:

$$\partial_j \tilde{A}^{ij} = -\tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{A}^{jk} - 6\tilde{A}^{ij} \partial_j \phi + \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K + 8\pi \tilde{j}^i, \quad (2.42)$$

donde $\tilde{j}^i \equiv e^{4\phi} j^i$. Sustituyendo esta ecuación en (2.41) encontramos una ecuación de evolución para las $\tilde{\gamma}^i$ que no tiene problemas de inestabilidad:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\Gamma}^i &= \tilde{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k - 2\tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha \\ &+ 2\alpha \left(\tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{A}^{jk} + 6\tilde{A}^{ij} \partial_j \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K - 8\pi \tilde{j}^i \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Hasta este punto lo único que se ha hecho es redefinir las variables e introducir 3 variables auxiliares. De esta manera, en lugar de las 12 variables de ADM: γ_{ij}, K_{ij} , BSSN utiliza 17 variables: $\phi, K, \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{A}_{ij}, \tilde{\Gamma}^i$. Las ecuaciones de evolución para ϕ ya se vieron en (2.36) y las de $\tilde{\gamma}^i$ en (2.43), mientras que las de $K, \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{A}_{ij}$ se pueden obtener directamente de las ecuaciones ADM (2.30).

En particular, la ecuación de evolución para \tilde{A}_{ij} queda dada por:

$$\frac{d}{dt} \tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} \left\{ -D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij} + 4\pi \alpha [\gamma_{ij} (S - \rho) - 2S_{ij}] \right\}^{TF} \quad (2.44)$$

donde $d/dt \equiv \partial_t - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}}$, y TF denota la parte sin traza (TraceFree) de la expresión dentro de las llaves. Se usa la convención de que los índices de cantidades conformes son subidos y bajados con la ayuda de la métrica conforme, de modo que $\tilde{A}^{ij} = e^{4\phi} A^{ij}$. En esta ecuación se necesita calcular el tensor de Ricci asociado a la métrica física que se puede separar en dos contribuciones:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + R_{ij}^\phi. \quad (2.45)$$

El término \tilde{R}_{ij} es el tensor de Ricci asociado a la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij}$:

$$\tilde{R}_{ij} = -\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{lm}\partial_l\partial_m\tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{k(i}\partial_j)\tilde{\Gamma}^k + \tilde{\Gamma}^k\tilde{\Gamma}_{(ij)k} + \tilde{\gamma}^{lm}\left(2\tilde{\Gamma}_{l(i}\tilde{\Gamma}_{j)km} + \tilde{\Gamma}_{im}^k\tilde{\Gamma}_{klj}\right), \quad (2.46)$$

mientras que el término R_{ij}^ϕ representa los términos adicionales que dependen de ϕ :

$$R_{ij}^\phi = -2\tilde{D}_i\tilde{D}_j\phi - 2\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{D}^k\tilde{D}_k\phi + 4\tilde{D}_i\phi\tilde{D}_j\phi - 4\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{D}^k\phi\tilde{D}_k\phi, \quad (2.47)$$

donde \tilde{D}_i es la derivada covariante asociada con la métrica conforme.

Si recopilamos todas las ecuaciones de evolución, se obtiene el sistema de ecuaciones BSSN:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_{ij} &= -2\alpha\tilde{A}_{ij}, \\ \frac{d}{dt}\phi &= -\frac{1}{6}\alpha K, \\ \frac{d}{dt}\tilde{A}_{ij} &= e^{-4\phi}\left\{-D_iD_j\alpha + \alpha R_{ij} + 4\pi\alpha[\gamma_{ij}(S-\rho) - 2S_{ij}]\right\}^{TF} \\ &\quad + \alpha(K\tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{ik}\tilde{A}_j^k), \\ \frac{d}{dt}K &= -D_iD^i\alpha + \alpha\left(\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3}K^2\right) + 4\pi\alpha(\rho + S) \\ \frac{d}{dt}\tilde{\Gamma}^i &= \tilde{\gamma}^{jk}\partial_j\partial_k\beta^i + \frac{1}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_j\partial_k\beta^k - 2\tilde{A}^{ij}\partial_j\alpha \\ &\quad + 2\alpha\left(\tilde{\Gamma}_{jk}^i\tilde{A}^{jk} + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_jK - 8\pi\tilde{j}^i\right), \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde se tienen las mismas convenciones que en (2.44). En estas ecuaciones se usan derivadas de Lie con respecto a $\vec{\beta}$ de densidades tensoriales. El peso de $\psi = e^\phi = \gamma^{1/2}$ es $1/6$, por lo que el peso de $\tilde{\gamma}_{ij}$ y \tilde{A}_{ij} es $-2/3$ y el de $\tilde{\gamma}_{ij}$ es de $2/3$. Usando la expresión para derivadas de Lie de densidades tensoriales, tenemos que:

$$\mathcal{L}_{\vec{\beta}}\phi = \beta^k\partial_k\phi + \frac{1}{6}\partial_k\beta^k \quad (2.49)$$

$$\mathcal{L}_{\vec{\beta}}\tilde{\gamma}_{ij} = \beta^k\partial_k\tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik}\partial_j\beta^k + \tilde{\gamma}_{jk}\partial_i\beta^k - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}_{ij}\partial_k\beta^k \quad (2.50)$$

Cabe destacar que en la ecuación de evolución para K en (2.48) se utilizó la constricción Hamiltoniana para eliminar al escalar de Ricci:

$$R = K_{ij}K^{ij} - K^2 + 16\pi\rho = \tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} - \frac{2}{3}K^2 + 16\pi\rho. \quad (2.51)$$

Sabemos que la formulación BSSN es mucho más estable que la formulación original de las ecuaciones ADM, por lo que vemos que al agregar un cero con la constricción Hamiltoniana y definir nuevas variables se cambiaron por completo las propiedades matemáticas del sistema. Una manera de cuantificar que tan bueno o malo es un sistema de ecuaciones, es a través de los conceptos de buen planteamiento e hiperbolicidad de un sistema de ecuaciones parciales, que se discutirán más a fondo en la sección 2.7.

2.6. Condiciones de norma

En el formalismo 3+1 la elección libre del sistema de coordenadas está dada en términos de las funciones de norma: el lapso α y el vector de corrimiento β^i . Estas funciones son las que se necesitan para determinar la forma de avanzar entre cortes temporales u hojas. Aparecen en todas las ecuaciones de evolución por lo que su elección va a determinar la manera en que se comporte la solución. Las ecuaciones de Einstein no nos dan información sobre cómo se deben de comportar estas funciones, por lo que hay que buscar otros medios para obtener una “buena” elección. Para ello debemos de pedir que se cumplan algunas propiedades. Entre ellas se encuentran:

- Que no permitan la aparición de singularidades de coordenadas y eviten la singularidad física.
- Que se adapten a las simetrías del sistema.
- Que sean bien comportadas matemáticamente y, de ser posible, que se puedan implementar fácilmente numéricamente.
- Que se puedan expresar de manera covariante para garantizar la misma norma usando diferentes sistemas de coordenadas.

2.6.1. Condiciones de foliación

Para poder especificar el tipo de foliación del espacio-tiempo se necesita una forma de calcular el lapso α . Hay diferentes maneras de hacerlo como: preestablecer el lapso como una función del tiempo y del espacio, especificar el lapso mediante una función algebraica de las variables geométricas de cada hipersuperficie u obtener el lapso resolviendo ecuaciones elípticas en cada paso de tiempo que forcen condiciones geométricas en las hipersuperficies espaciales.

Para determinar mejor el significado de α consideremos el movimiento de los observadores de Euler. En general tienen una aceleración propia $a_\mu = n^\nu \nabla_\nu n_\mu$ que mide la fuerza que se requiere para mantenerlos en una trayectoria diferente a la caída libre. Si usamos ahora las expresiones de n^μ en términos de α y β^i usadas en la sección (2.1), se puede ver que:

$$a_0 = \beta^m \partial_m \ln \alpha, \quad (2.52)$$

$$a_i = \partial_i \ln \alpha, \quad (2.53)$$

por lo que las componentes espaciales de la aceleración propia están dadas por el gradiente del lapso.

Foliación geodésica

La manera más obvia de escoger la función del lapso sería pedir que la coordenada de tiempo t coincida en todos lados con el tiempo propio de los observadores de Euler, es decir tomar $\alpha = 1$. Esto se conoce como foliación geodésica. El nombre viene de que, a partir de la ecuación (2.53), la aceleración propia de los observadores de Euler desaparece para

α constante, lo que implica que en este caso los observadores de Euler siguen geodésicas temporaloides, es decir están en caída libre.

Esta foliación se utilizó en las primeras simulaciones de agujeros negros en los 1960's [14], pero pronto se descubrió que tenían defectos. El problema con estas coordenadas es que tienden a formar singularidades muy rápido. Esto se debe a que las geodésicas tienden a enfocarse en presencia de fuentes gravitacionales por lo que observadores en caída libre en un campo gravitacional no uniforme eventualmente terminan chocando unos con otros. Cuando esto sucede, el sistema de coordenadas, que está atado a dichos observadores, deja de ser uno a uno, de manera que un punto deja de tener un solo conjunto de coordenadas asociado a él, es decir, el sistema se vuelve singular.

De las ecuaciones (2.30) y (2.14) se puede ver que:

$$\partial_t K = \beta^i \partial_i K - D^2 \alpha + \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(\rho + S)] , \quad (2.54)$$

donde se usó la constricción Hamiltoniana (2.20) para eliminar el escalar de Ricci. Para la foliación geodésica esto se reduce a:

$$\partial_t K - \beta^i \partial_i K = K_{ij} K^{ij} + 4\pi(\rho + S) . \quad (2.55)$$

El primer término del lado derecho es siempre positivo y el segundo también, siempre y cuando se cumpla la condición fuerte de energía. Esto significa que a lo largo de la dirección normal, la traza de la curvatura extrínseca va a incrementar sin restricciones. Pero también sabemos que el cambio de los elementos de volumen asociados a los observadores de Euler viene dado por:

$$\nabla_\mu n^\mu = -K , \quad (2.56)$$

donde se utilizó la definición de K . Podemos ver que si K aumenta sin límite los elementos de volumen colapsan a cero. Esto resulta en una singularidad en las coordenadas. Es por esta razón que la foliación geodésica sólo funciona para probar los códigos ya que, por ejemplo, es bien sabido que el tiempo que tarda en caer un observador inicialmente en reposo a la singularidad en un horizonte de Schwarzschild es de $t = \pi M$. Entonces, se puede hacer un código con Schwarzschild en coordenadas isotrópicas como datos iniciales y evolucionar con foliación geodésica y esperamos se interrumpa en ese tiempo.

Foliación maximal

El principal problema de la foliación geodésica es que enfoca a los observadores de Euler. Una manera de mejorar esta situación es restringiendo a los elementos de volumen de dichos observadores a no cambiar con el tiempo. Esto significa, a partir de (2.56), que:

$$K = \partial_t K = 0 . \quad (2.57)$$

La segunda igualdad viene de que requerimos que K se mantenga nula durante toda la evolución, ya que no queremos que los elementos de volumen de los observadores de Euler cambien. Imponiendo esta condición, la ecuación (2.54) se reduce a:

$$D^2 \alpha = \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(\rho + S)] . \quad (2.58)$$

Esta condición es denominada foliación maximal, propuesta primero por Lichnerowicz en 1944 [20]. El nombre viene del hecho de que se puede probar que cuando $K = 0$ el volumen de las hipersuperficies espaciales es maximal con respecto a pequeñas variaciones sobre la superficie misma.

La foliación maximal tiene la ventaja de tener una solución suave, porque viene de una ecuación elíptica, y garantiza que los observadores de Euler no se enfoquen. Esta condición de foliación sólo se puede usar en espacio-tiempos asintóticamente planos ya que no hay cambio en los elementos de volumen. No puede ser usada en espacio-tiempos cosmológicos ya que los elementos de volumen siempre se expanden o se contraen.

Una de las más importantes características de la foliación maximal es que evita singularidades, es decir, la condición evita que las hipersuperficies espaciales estén arbitrariamente cerca de la singularidad física. Para el caso particular de Schwarzschild se pueden construir las foliaciones maximales analíticamente y se puede ver que dentro del horizonte las foliaciones se acercan a una superficie límite dada por $r = 3M/2$, con r el radio de área de Schwarzschild, por lo que se evita la singularidad. Sabemos que el tiempo propio que toma a un observador en caer al agujero negro es finito y que el avance del tiempo propio de un observador normal está dado por $d\tau = \alpha dt$. De esta manera, es necesario que el lapso se vaya a cero en tiempos grandes para poder prevenir que el observador caiga en la singularidad conforme $t \rightarrow \infty$. Este comportamiento es lo que se denomina “colapso del lapso”.

Si usamos la constricción Hamiltoniana (2.20) para eliminar el término de curvatura extrínseca en (2.58) y nos concentramos en el caso de vacío, obtenemos:

$$D^2\alpha = \alpha R, \quad (2.59)$$

donde R es el escalar de Ricci de la hipersuperficie espacial, que debe ser positivo si $K = 0$ a partir de la constricción Hamiltoniana. En el trabajo de Smarr y York de 1978 [30], los autores construyeron un modelo analítico considerando el caso en que $R = R_0$ para un $r > r_0$ y $R = 0$ para $r < r_0$. Se imponen condiciones de frontera con $\alpha = 1$ en $r = \infty$ y $d\alpha/dr = 0$ en $r = 0$ y se iguala α y su primera derivada en r_0 . A partir de la solución se encuentra un mínimo en el origen y se demuestra que el lapso colapsa exponencialmente a cero en el centro como $\alpha \sim e^{-R_0 r}$. Este colapso exponencial del lapso también se observa numéricamente en muchas simulaciones de agujeros negros y es usada en la práctica como un indicador de la formación de un agujero negro en colapso gravitacional de campo escalar.

El colapso del lapso tiene como consecuencia que el tiempo sigue avanzando en las regiones exteriores al horizonte del agujero negro, pero se congela en el interior del horizonte. Esto permite cubrir una amplia región del espacio-tiempo exterior sin llegar a la singularidad, lo que es ideal para simulaciones numéricas. Sin embargo, conforme avanza el tiempo afuera y se congela adentro, las foliaciones espaciales se vuelven más distorsionadas, lo que lleva a un fenómeno de estiramiento de las hojas de la foliación. Este estiramiento resulta en un crecimiento acelerado de la componente métrica radial y el desarrollo de gradientes muy altos que eventualmente provocan que el código falle. Para foliación maximal en Schwarzschild, Reimann [26] encuentra que para tiempos largos el pico de la métrica radial crece como $\sim \tau^{4/3}$, con τ el tiempo propio en el infinito.

Una de las grandes desventajas de la foliación maximal es que se resuelve una ecuación elíptica en cada paso de tiempo lo cual requiere de mucho tiempo computacional ya que la

resolución de dichas ecuaciones en 3 dimensiones es un proceso muy lento numéricamente hablando. Sin embargo, para el caso en simetría esférica puede ser una buena opción ya que el tiempo computacional no es excesivo.

Para la condición de frontera en espacio-tiempos asintóticamente planos podemos asumir que lejos de las fuentes la solución se aproxima a la de Schwarzschild, por lo que el lapso se comporta asintóticamente como:

$$\alpha = 1 - \frac{c}{r}, \quad (2.60)$$

donde c es una constante. Podemos eliminar la constante desconocida tomando la derivada con respecto a r para tener:

$$\partial_r \alpha = \frac{(1 - \alpha)}{r}. \quad (2.61)$$

Esto es conocido como una condición de frontera de Robin y es la condición estándar usada en la foliación maximal.

2.6.2. Condiciones de vector de corrimiento

Se sabe mucho menos sobre las condiciones que se deben aplicar al vector de corrimiento que sobre las condiciones de foliación para el lapso. La principal razón es que tomar el vector de corrimiento $\beta^i = 0$ suele trabajar muy bien para la mayoría de las simulaciones. Sin embargo dicha imposición no es la mejor en algunos casos. En particular los espacio-tiempos con agujeros negros y vector de corrimiento cero provocan que el horizonte del agujero crezca rápidamente lo que ocasiona que eventualmente el dominio computacional termine adentro del agujero. Esto implica que para simulaciones con tiempos muy largos de agujeros negros se requiere de un vector de corrimiento que apunte hacia afuera para prevenir que las líneas de tiempo caigan en el agujero. También para sistemas con momento angular el arrastre de sistemas inerciales puede ser un problema para casos donde el vector de corrimiento es cero.

La simulación que se realiza en este trabajo no presenta problemas con el vector de corrimiento siendo cero por lo que no se tocará el tema. Sin embargo, es importante saber que sí existen condiciones para el vector de corrimiento para ciertos problemas que lo requieren.

2.7. Sistemas bien planteados e hiperbolicidad

En el desarrollo de las ecuaciones de ADM vimos que las ecuaciones de evolución no son únicas. Existe un número infinito de posibilidades en las que se pueden añadir múltiples arbitrarios de las constricciones de Einstein sin afectar a las soluciones físicas, pero estos cambios sí repercutirán en las propiedades matemáticas de las ecuaciones. El problema reside en encontrar propiedades matemáticas que nos permitan definir cuál es el esquema que se comportará de mejor manera numéricamente y por qué. Dos de estas propiedades son la hiperbolicidad y el buen planteamiento de un problema ³. Sin embargo, sabemos que únicamente estas propiedades no bastan para poder hacer una buena elección ya que existen formulaciones bien planteadas que son menos estables numéricamente que otras, por lo que el problema sigue abierto.

³Se puede ahondar en el tema con [1]

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de la forma:

$$\partial_t u = P(D)u, \quad (2.62)$$

donde u es una función vectorial n -dimensional evaluada en el tiempo y el espacio, y $P(D)$ es una matriz de $n \times n$ con componentes que dependen suavemente de operadores diferenciales espaciales. Se dice que el sistema es bien planteado si las soluciones del problema dependen continuamente de los datos iniciales, es decir, pequeños cambios en los datos iniciales corresponden a pequeños cambios en la solución.

Matemáticamente esto significa que un sistema de ecuaciones diferenciales parciales está bien planteado si se puede definir una norma que cumpla con que:

$$\|u(t, x)\| \leq k e^{\epsilon t} \|u(0, x)\|, \quad (2.63)$$

donde k y ϵ son constantes independientes de los datos iniciales. Esto quiere decir que para cualquier condición inicial, la norma de la solución puede ser acotada con una misma exponencial. De esta manera, las soluciones a problemas bien planteados no pueden incrementar más rápido que una exponencial.

La mayoría de los sistemas en física resultan ser sistemas bien planteados, por lo que los pioneros en Relatividad Numérica no se preocuparon por ello en las primeras simulaciones, lo que llevó a códigos infructuosos. Sin embargo, se pueden obtener sistemas de evolución bastante sencillos que no cumplen con la condición de buen planteamiento. Un ejemplo de ello es el inverso de la ecuación de calor:

$$\partial_t u = -\partial_x^2 u. \quad (2.64)$$

Si consideramos como condición inicial un modo de Fourier $u(0, x) = e^{ikx}$, la solución resulta ser:

$$u(x, t) = e^{k^2 t + ikx}. \quad (2.65)$$

Podemos ver que la solución crece exponencialmente con el tiempo pero además depende de la frecuencia del modo inicial de Fourier k . Esta dependencia permite que se pueda incrementar de manera arbitraria el valor de la solución, por lo que no puede ser acotado por el valor de una exponencial fija independiente de los valores iniciales, es decir, el sistema está mal planteado.

Por otro lado, el concepto de hiperbolicidad está asociado con sistemas de evolución que se comportan como generalizaciones de la ecuación de onda. Dichos sistemas están bien planteados y cuentan con una velocidad finita de propagación de señales. En otras palabras, tienen un pasado de dependencia finito.

En general no sabemos la solución de los problemas que estamos tratando por lo que hacer este tipo de análisis puede resultar bastante complicado. Una de las herramientas que podemos utilizar para resolver este problema es el concepto de hiperbolicidad, que se aplica a sistemas de ecuaciones diferenciales parciales que cumplen con ciertas condiciones.

Consideremos un sistema de ecuaciones de evolución de la forma:

$$\partial_t u + M^i \partial_i u = s(u), \quad (2.66)$$

donde M^i son matrices de $n \times n$ con i representando dimensiones espaciales y $s(u)$ es un vector de fuentes que puede depender de las u pero no de sus derivadas. Si el término de las fuentes es lineal en las u se puede demostrar que el sistema completo está bien planteado si el sistema sin fuentes lo está, por lo que se omitirá este término de ahora en adelante. Se asume también que los términos de las matrices M^i son constantes. A las matrices M^i se les conoce como matrices características. Si los eigenvalores de dichas matrices son reales, se dice que el sistema es hiperbólico.

Consideremos un vector unitario n_i . Definimos el símbolo principal del sistema de ecuaciones como $P(n_i) \equiv M^i n_i$. Decimos que el sistema (2.66) es simétrico hiperbólico si P se puede simetrizar de manera que sea independiente de n_i ; es fuertemente hiperbólico si el símbolo principal tiene eigenvalores reales y un conjunto completo de eigenvectores para todo n_i ; es débilmente hiperbólico si P tiene eigenvalores reales para todo n_i pero no tiene el conjunto completo de eigenvectores; y es estrictamente hiperbólico si los eigenvalores del símbolo principal P son reales y distintos de n_i .

Se puede mostrar que en los sistemas fuertemente hiperbólicos siempre se puede definir una matriz positiva definida Hermitiana H tal que:

$$HP - P^T H^T = HP - P^T H = 0, \quad (2.67)$$

donde T representa a la matriz transpuesta. A H también se le conoce como simetrizador y si es independiente de n_i el sistema es simétrico hiperbólico. Para este caso, se puede construir un producto interno y una norma de las soluciones a la ecuación diferencial de la siguiente manera:

$$\langle u, v \rangle \equiv u^\dagger H v, \quad (2.68)$$

$$\|u\|^2 \equiv \langle u, u \rangle = u^\dagger H u, \quad (2.69)$$

donde u^\dagger es la transpuesta compleja conjugada. Esta norma se conoce como norma de energía debido a que en casos simples es igual a la energía física.

A partir de las ecuaciones de evolución podemos encontrar un estimado del crecimiento de la norma de energía. Consideremos un modo de Fourier de la forma:

$$u(x, t) = \tilde{u}(t) e^{ik\vec{x} \cdot \vec{n}}, \quad (2.70)$$

por lo que obtenemos:

$$\partial_t \|u\|^2 = ik \tilde{u}^T (P^T H - HP) \tilde{u} = 0, \quad (2.71)$$

donde se utilizó la ecuación de evolución (2.66) asumiendo $s = 0$. Encontramos entonces que la norma de energía se mantiene constante en el tiempo lo que quiere decir que los sistemas simétrico hiperbólico y fuertemente hiperbólicos están bien planteados.

A diferencia de los sistemas fuertemente hiperbólicos, los sistemas débilmente hiperbólicos están mal planteados. Se puede demostrar que las ecuaciones ADM (2.30) forman un sistema débilmente hiperbólico, mientras que las ecuaciones BSSN (2.48) forman un sistema fuertemente hiperbólico. Esta diferencia es una de las razones por la cual las evoluciones numéricas en ADM fallan mucho antes que las evoluciones en BSSN. Sin embargo, ésta no es la única razón, ya que existen sistemas fuertemente hiperbólicos que resultan ser más estables otros.

Para el caso de sistemas fuertemente hiperbólicos tenemos un sistema completo de eigen-vectores por definición y podemos construir la matriz de eigenvectores R . Usamos esta matriz para definir las eigenfunciones ω_i como:

$$u = R\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = R^{-1}u. \quad (2.72)$$

Si tenemos una sola dimensión espacial x y multiplicamos la ecuación (2.66) por R^{-1} por la izquierda, encontramos que:

$$\partial_t \omega + \Lambda \partial_x \omega = 0, \quad (2.73)$$

donde $\Lambda \equiv \text{diag}(\lambda_i)$. De esta forma, las ecuaciones de evolución para las eigenfunciones se desacoplan. Obtenemos entonces un conjunto de ecuaciones independientes de advección, cada una con su velocidad de propagación dada por su correspondiente eigenvalor λ_i . Esta expresión asocia a los sistemas hiperbólicos con frentes de onda independientes propagándose a velocidades finitas. Para el caso de muchas dimensiones el sistema completo no se va a desacoplar en general aún para sistemas simétricos hiperbólicos ya que las eigenfunciones dependerán del vector n_i .

2.8. Horizontes aparentes

Una vez que se pueda realizar una evolución satisfactoria del espacio-tiempo de un agujero negro, es importante poder obtener información física sobre él. Localizar los horizontes de agujeros negros es parte de ello.

Hay dos tipos de horizontes asociados a los agujeros negros. Por un lado se puede definir el horizonte de eventos como el límite entre líneas nulas que escapan a infinito y aquellas que caen al agujero negro y tocan la singularidad. Como un horizonte de eventos es definido de manera global, necesitamos, en principio, saber toda la evolución del espacio-tiempo para poder localizarlo, por lo que no podemos utilizarlo como un indicador de la presencia del horizonte del agujero negro durante una evolución. En cambio, los horizontes aparentes se definen localmente como la mayor superficie marginalmente atrapada dentro de una hipersuperficie espacial y se pueden localizar durante la evolución de cada hipersuperficie espacial. Además de que se pueden usar para localizar agujeros negros también se usan para medir cantidades físicas asociadas con cada agujero negro, como la masa y el momento angular. Una importante propiedad de los horizontes aparentes es que si la conjetura de censura cósmica se mantiene y la condición de energía nula se satisface, entonces un horizonte aparente implica la existencia de un horizonte de eventos en su exterior o coincide con él en el caso estacionario.

Consideremos una superficie 2-dimensional S inmersa en nuestra hipersuperficie espacial 3-dimensional Σ . Sea \vec{s} el vector normal espacialoide unitario que apunta hacia afuera de S y \vec{n} el vector normal temporaloide unitario que apunta hacia el futuro de Σ . Podemos usar ahora estos vectores para construir el vector nulo \vec{l} que apunta hacia afuera:

$$\vec{l} = \vec{n} + \vec{s}. \quad (2.74)$$

La expansión de las líneas nulas es esencialmente el cambio en el área de los elementos de S a lo largo de \vec{l} . Si denotamos como $h_{\mu\nu}$ a la métrica 2-dimensional en S inducida por la

métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ tendremos que:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu - s_\mu s_\nu. \quad (2.75)$$

La expansión H de las geodésicas nulas salientes será entonces:

$$H = -\frac{1}{2}h^{\mu\nu} (\mathcal{L}_{\bar{s}}h_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\bar{n}}h_{\mu\nu}), \quad (2.76)$$

pero $\mathcal{L}_{\bar{s}}h_{\mu\nu} = -2X_{\mu\nu}$, donde $X_{\mu\nu}$ es la curvatura extrínseca de S , por lo que:

$$h^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\bar{s}}h_{\mu\nu} = -2h^{\mu\nu} X_{\mu\nu} = -2X = -2D_m s^m, \quad (2.77)$$

donde D_i es la derivada covariante 3-dimensional en Σ . Por otro lado:

$$h^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\bar{n}}h_{\mu\nu} = -2h^{\mu\nu} K_{\mu\nu} + h^{\mu\nu} [\mathcal{L}_{\bar{n}}n_\mu n_\nu - \mathcal{L}_{\bar{n}}s_\mu s_\nu], \quad (2.78)$$

donde $K_{\mu\nu}$ es la curvatura extrínseca de Σ . Como los vectores son unitarios y ortogonales entre sí obtenemos:

$$h^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\bar{n}}h_{\mu\nu} = h^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\bar{n}}s_\mu s_\nu = 0, \quad (2.79)$$

por lo que:

$$h^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\bar{n}}h_{\mu\nu} = -2h^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = -2K + 2K_{mn}s^m s^n, \quad (2.80)$$

donde K es la traza de $K_{\mu\nu}$. Recopilando todos los resultados obtenemos finalmente que:

$$H = D_m s^m - K + K_{mn}s^m s^n, \quad (2.81)$$

$$= (\gamma^{mn} - s^m s^n) (D_m s_n - K_{mn}), \quad (2.82)$$

donde se uso que s^m es unitario, lo que implica que $s^m D_n s_m = 0$.

La condición para tener un horizonte aparente es que $H = 0$ por lo que la ecuación final que caracteriza a un horizonte aparente es:

$$H = D_m s^m - K + K_{mn}s^m s^n = (\gamma^{mn} - s^m s^n) (D_m s_n - K_{mn}) = 0. \quad (2.83)$$

Usualmente es conveniente caracterizar un horizonte aparente asumiendo que la superficie se parametrizó como una superficie de nivel de una función escalar F :

$$F(x^i) = 0, \quad (2.84)$$

de esta manera podemos reescribir H en términos de la función F y sus derivadas. Primero escribimos el vector unitario s^i como:

$$s^i = \frac{D^i F}{u}, \quad (2.85)$$

donde $u \equiv |DF| = (\gamma^{mn} D_m F D_n F)^{1/2}$. Sustituyendo en la ecuación (2.83) resulta en:

$$H = \left(\gamma^{mn} - \frac{D^m F D^n F}{u^2} \right) \left(\frac{D_m D_n F}{u} - K_{mn} \right) = 0. \quad (2.86)$$

Capítulo 3

Simetría esférica

En Relatividad General existen muchos sistemas que cuentan con simetría esférica en una muy buena aproximación, como lo son estrellas y agujeros negros. Estos sistemas tienen la ventaja de que las variables dinámicas que los identifican dependen únicamente de la coordenada radial, por lo que los códigos numéricos que se requieren son unidimensionales. El hecho de que las ecuaciones se pueden simplificar enormemente para el caso de simetría esférica implica un menor tiempo computacional así como una mayor precisión en la resolución de problemas. Uno de los defectos de los sistemas con simetría esférica en Relatividad General es que no hay ondas gravitacionales, una parte muy importante de la teoría. Sin embargo, una de las mayores contribuciones a la Relatividad Numérica fue realizada en simetría esférica con el trabajo de Choptuik [10] sobre fenómenos críticos en colapso gravitacional.

En el capítulo anterior se dieron las ecuaciones generales del formalismo 3+1. Sin embargo, para este trabajo se utilizó el código OllinSphere2 ¹ que está escrito en la formulación BSSN en simetría esférica. Veremos que las ecuaciones de evolución las podemos dividir en una parte que depende únicamente de la geometría del espacio y otra que depende de las componentes de materia inherentes al sistema físico que se está modelando, lo cual facilita el análisis y el desarrollo del código.

3.1. BSSN generalizado

Existe un problema con la formulación BSSN en coordenadas curvilíneas debido a que involucra componentes que no son tensores verdaderos. Para arreglar este problema, Brown[7] introdujo una formulación generalizada de BSSN en la cual se agrega una métrica de fondo y una ecuación de evolución para el determinante de la métrica en coordenadas esféricas, como se muestra en el artículo de Alcubierre y Méndez [2] .

Uno de los problemas es que las $\tilde{\Gamma}^i$ tienen componentes que no son regulares en el origen, lo cual complica las evoluciones numéricas. Además, estos componentes no son vectores, por lo que la comparación con otras evoluciones con las mismas condiciones de foliación pero diferentes sistemas de coordenadas puede resultar más difícil. Para mejorar estos aspectos se definen dos nuevas variables: Δ^r (3.31) y λ (3.46).

¹Desarrollado por el grupo de Relatividad Numérica del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM

Otro problema que tienen estas coordenadas es que el determinante de la métrica plana es diferente de uno en general, por lo que pedir que $\tilde{\gamma} = 1$, como se hace en BSSN, no es una buena idea. Para ello se sugieren dos maneras de hacer la evolución del determinante: la Lagrangiana y la Euleriana.

Para hacer todos estos arreglos, comenzamos con la métrica conforme correspondiente a BSSN:

$$\tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi} \gamma_{ij}, \quad (3.1)$$

pero pedimos que el determinante de γ_{ij} sea $\tilde{\gamma}(t=0) = \hat{\gamma}$, donde $\hat{\gamma}$ es el determinante de la métrica plana de fondo.

Para evolucionar $\tilde{\gamma}$ existen dos posibilidades:

- La condición Lagrangiana: $\partial_t \tilde{\gamma} = 0$, denominada así debido a que el determinante de la métrica conforme no cambia en las líneas de tiempo.
- La condición Euleriana: $\partial_t \tilde{\gamma} - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \tilde{\gamma} = 0$, denominada de esta manera debido a que el determinante de la métrica conforme es constante a lo largo de las líneas normales a las hipersuperficies.

Como $\mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \tilde{\gamma} = 2\tilde{\gamma} \tilde{D}_i \beta^i$, donde \tilde{D}_i es la derivada covariante con respecto a la métrica conforme, se puede escribir una ecuación general para la evolución de $\tilde{\gamma}$:

$$\partial_t \tilde{\gamma} = s \left(2\tilde{\gamma} \tilde{D}_i \beta^i \right), \quad (3.2)$$

donde $s = 1$ corresponde al caso Euleriano y $s = 0$ corresponde al caso Lagrangiano.

Al ser $\tilde{\gamma} \neq 0$, encontramos que el factor conforme ahora se define como:

$$\phi = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \right), \quad (3.3)$$

por lo que su ecuación de evolución es:

$$\partial_t \phi = \frac{1}{12} \left(-2\alpha K + \frac{\mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \gamma}{\gamma} - s \frac{\mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} \right), \quad (3.4)$$

donde se utilizó la ecuación de evolución del determinante de la métrica física (2.34) y de la métrica conforme (3.2). Esta ecuación implica que:

$$\partial_t \phi - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \phi = -\frac{1}{6} \alpha K + \frac{1}{6} \sigma \tilde{D}_i \beta^i, \quad (3.5)$$

donde $\mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \phi \equiv \left(\mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \gamma / \gamma - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \tilde{\gamma} / \tilde{\gamma} \right)$ y $\sigma = (1 - s)$, de tal forma que $\sigma = 1$ representa el caso Lagrangiano y $\sigma = 0$ el caso Euleriano.

Por otro lado, si usamos la nueva definición de ϕ (3.3), podemos encontrar que:

$$\mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \phi = \beta^i \partial_i \phi. \quad (3.6)$$

Lo que hay que destacar aquí es que la derivada de Lie de ϕ ya no tiene un factor correspondiente al peso de una densidad tensorial, a diferencia de lo que se tenía antes en (2.49). De esta manera, ϕ ya es un verdadero escalar.

A partir de la definición de $\tilde{\gamma}_{ij}$ (3.1) y usando las ecuaciones de evolución de ϕ (3.5) y la ecuación de evolución ADM (2.30) para γ_{ij} , encontramos la nueva ecuación de evolución para $\tilde{\gamma}_{ij}$:

$$\partial_t \tilde{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3} \sigma \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}_m \beta^m, \quad (3.7)$$

donde \tilde{A}_{ij} sigue siendo la curvatura extrínseca conforme sin traza (2.38).

Al hacer estos cambios, las ecuaciones de evolución para \tilde{A}_{ij} y para K quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{A}_{ij} - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} \left\{ -D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij} + 4\pi \alpha [\gamma_{ij} (S - \rho) - 2S_{ij}] \right\}^{TF} \\ + \alpha \left(K \tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{ik} \tilde{A}_j^k \right) - \frac{2}{3} \sigma \tilde{A}_{ij} \tilde{D}_m \beta^m, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\partial_t K - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} K = -D_i D^i \alpha + \alpha \left(\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) + 4\pi \alpha (\rho + S). \quad (3.9)$$

Al comparar con las ecuaciones de BSSN estándar (2.48), observamos que se agregó un término dependiente a σ en la ecuación de evolución de \tilde{A}_{ij} . Este término, ocasionado por el cambio en la definición de ϕ , es el que nos permite decir que las derivadas de Lie del lado izquierdo de estas ecuaciones ya no son las de densidades tensoriales, sino las de tensores. A la ecuación de evolución de K no se le agrega nada debido a que es un escalar.

Al igual que en BSSN estándar, las contribuciones del tensor de Ricci en la ecuación de evolución de \tilde{A}_{ij} se separan en las correspondientes a la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij}$ (2.46) y las que tienen términos dependientes de la derivada de ϕ (2.47). Para que dichas contribuciones sean totalmente covariantes, se definen unas nuevas variables:

$$\tilde{\Delta}_{jk}^i \equiv \tilde{\Gamma}_{jk}^i - \mathring{\Gamma}_{jk}^i, \quad (3.10)$$

$$\tilde{\Delta}^i \equiv \tilde{\gamma}^{lm} \tilde{\Delta}_{lm}^i = \tilde{\Gamma}^i - \tilde{\gamma}^{lm} \mathring{\Gamma}_{lm}^i, \quad (3.11)$$

donde $\mathring{\Gamma}_{jk}^i$ son los símbolos de Christoffel correspondientes a la métrica plana de fondo. A partir de estas definiciones, el tensor de Ricci conforme se puede reescribir como:

$$\tilde{R}_{ij} = -\frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{lm} \mathring{D}_l \mathring{D}_m \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{k(i} \mathring{D}_{j)} \tilde{\Delta}^k + \tilde{\Delta}^k \tilde{\Delta}_{(ij)k} + 2\tilde{\Delta}_{(i}^{kl} \tilde{\Delta}_{j)kl} + \tilde{\Delta}_i^{kl} \tilde{\Delta}_{klj}, \quad (3.12)$$

donde las \mathring{D}_i son las derivadas covariantes asociadas a la métrica plana de fondo.

De forma similar que en BSSN estándar, promovemos a las $\tilde{\Delta}^i$ como variables independientes, por lo que hay que encontrar su ecuación de evolución. Para ello hay que deducir primero las ecuaciones de evolución de $\tilde{\Gamma}^i$. Debido a que $\tilde{\gamma} \neq 1$, tenemos que:

$$\tilde{\Gamma}^i = \tilde{\gamma}^{lm} \tilde{\Gamma}_{lm}^i = -\partial_l \tilde{\gamma}^{il} - \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{il} \partial_l \ln \tilde{\gamma}. \quad (3.13)$$

Utilizando las ecuaciones de evolución para la métrica conforme (3.7) y su determinante (3.2), encontramos que la ecuación de evolución para $\tilde{\Gamma}^i$ es:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\Gamma}^i = \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \tilde{\Gamma}^i + \tilde{\gamma}^{lm} \partial_l \partial_m \beta^i - \frac{2}{\tilde{\gamma}^{1/2}} \partial_m \left(\alpha \tilde{A}^{im} \tilde{\gamma}^{1/2} \right) \\ + \frac{\sigma}{3} \left[\tilde{\gamma}^{il} \partial_l \left(\tilde{D}_m \beta^m \right) + 2\tilde{\Gamma}^i \tilde{D}_m \beta^m \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

La ecuación de evolución para $\tilde{\Delta}^i$ se puede obtener de la última ecuación si consideramos que :

$$\partial_t \tilde{\Delta}^i = \partial_t \tilde{\Gamma}^i - \overset{\circ}{\Gamma}_{lm}^i \partial_t \tilde{\gamma}^{lm}, \quad (3.15)$$

donde se asume que la métrica de fondo no evoluciona con el tiempo. Sin embargo, al obtener dicha ecuación, nos encontramos con términos que contienen símbolos de Christoffel de la métrica de fondo y derivadas parciales del vector de corrimiento, lo que implica que no es una ecuación totalmente covariante. Para remediarlo, se utiliza el hecho de que en una métrica plana de fondo se cumple que:

$$\tilde{\gamma}^{lm} \overset{\circ}{D}_l \overset{\circ}{D}_m \beta^i = \tilde{\gamma}^{lm} \partial_l \partial_m \beta^i + \tilde{\gamma}^{lm} \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \overset{\circ}{\Gamma}_{lm}^i. \quad (3.16)$$

Además, se agrega un múltiplo de las constricciones de momento. De esta manera, la ecuación de evolución de las $\tilde{\Delta}^i$ queda como:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\Delta}^i - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \tilde{\Delta}^i &= \tilde{\gamma}^{lm} \overset{\circ}{D}_l \overset{\circ}{D}_m \beta^i - 2\tilde{A}^{im} \partial_m \alpha + 2\alpha \tilde{A}^{lm} \tilde{\Delta}_{lm}^i \\ &+ 2\alpha \left(6\tilde{A}^{ij} \partial_j \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K - 8\pi \tilde{j}^i \right) \\ &+ \frac{\sigma}{3} \left[\tilde{D}^i \left(\tilde{D}_m \beta^m \right) + 2\tilde{\Delta}^i \tilde{D}_m \beta^m \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Todas las ecuaciones en este capítulo siguen formuladas de una manera general para el caso de coordenadas curvilíneas. Para llegar a las ecuaciones que se utilizan en el programa hace falta reducirlas al caso de simetría esférica.

3.2. BSSN en simetría esférica

Continuando con el análisis de Alcubierre y Méndez [2], realizamos los cálculos correspondientes a un sistema con simetría esférica. Comenzamos escribiendo la métrica del espacio-tiempo de dicho sistema:

$$dl^2 = e^{-4\phi} (A dr^2 + B r^2 d\Omega^2), \quad (3.18)$$

donde $A = A(r, t)$ y $B = B(r, t)$ son funciones positivas y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ es el elemento de ángulo sólido.

Los determinantes de la métrica conforme y de la métrica plana de fondo son:

$$\tilde{\gamma} = AB^2 (r^4 \sin^2 \theta), \quad (3.19)$$

$$\overset{\circ}{\gamma} = r^4 \sin^2 \theta. \quad (3.20)$$

De esta manera, la condición inicial $\tilde{\gamma}(t=0) = \overset{\circ}{\gamma}$, restringe a los coeficientes métricos A y B a que $AB^2 = 1$.

A partir de (3.7) podemos ver que la evolución de los coeficientes métricos en este caso es:

$$\partial_t A = \beta^r \partial_r A + 2A \partial_r \beta^r - \frac{2}{3} \sigma A \tilde{D}_m \beta^m - 2\alpha A A_a, \quad (3.21)$$

$$\partial_t B = \beta^r \partial_r B + 2B \frac{\beta^r}{r} - \frac{2}{3} \sigma B \tilde{D}_m \beta^m - 2\alpha B A_b, \quad (3.22)$$

donde $A_a \equiv \tilde{A}_r^r$ y $A_b \equiv \tilde{A}_\theta^\theta$ y la divergencia conforme del vector de corrimiento se reduce a:

$$\tilde{D}_m \beta^m = \partial_r \beta^r + \beta^r \left(\frac{\partial_r (AB^2)}{2AB^2} + \frac{2}{r} \right). \quad (3.23)$$

Cabe destacar que en simetría esférica el vector de corrimiento únicamente tiene la componente radial, es decir, $\beta^i = (\beta^r, 0, 0)$.

La evolución del factor conforme viene dada por la ecuación (3.5), que al final queda como:

$$\partial_t \phi = \beta^r \partial_r \phi + \sigma \tilde{D}_m \beta^m - \frac{1}{6} \alpha K. \quad (3.24)$$

Por otro lado, la evolución de la traza de la curvatura extrínseca (3.9) termina siendo:

$$\partial_t K = \beta^r \partial_r K - D_i D^i \alpha + \alpha \left(A_a^2 + 2A_b^2 + \frac{1}{3} K^2 \right) + 4\pi \alpha (\rho + S_a + 2S_b), \quad (3.25)$$

donde $S_a \equiv S_r^r$ y $S_b \equiv S_\theta^\theta$. El laplaciano de α en coordenadas esféricas en este caso es:

$$D_i D^i \alpha = \frac{1}{Ae^{4\phi}} \left[\partial_r^2 \alpha - \partial_r \alpha \left(\frac{\partial_r A}{2A} - \frac{\partial_r B}{B} - 2\partial_r \phi - \frac{2}{r} \right) \right]. \quad (3.26)$$

De la parte sin traza del tensor de curvatura extrínseca conforme \tilde{A}_{ij} solo necesitamos la ecuación de evolución de A_a debido a que el no tener traza implica que $A_a + 2A_b = 0$. De esta manera, a partir de (3.8) encontramos que en simetría esférica:

$$\begin{aligned} \partial_t A_a &= \beta^r \partial_r A_a - \left(D^r D_r \alpha - \frac{1}{3} D_i D^i \alpha \right) + \alpha \left(R_r^r - \frac{1}{3} R \right) \\ &\quad + \alpha K A_a - 16\pi \alpha (S_a - S_b), \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde $D^r D_r \alpha$ es:

$$D^r D_r \alpha = \frac{1}{Ae^{4\phi}} \left[\partial_r^2 \alpha - \partial_r \alpha \left(\frac{\partial_r A}{2A} + 2\partial_r \phi \right) \right]. \quad (3.28)$$

La componente mixta radial del tensor de Ricci R_r^r en este caso es:

$$\begin{aligned} R_r^r &= -\frac{1}{Ae^{4\phi}} \left[\frac{\partial_r^2 A}{2A} - A \partial_r \tilde{\Delta}^r - \frac{3}{4} \left(\frac{\partial_r A}{A} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r B}{B} \right)^2 - \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^r \partial_r A + \frac{\partial_r A}{rB} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{A}{B} \right) \left(1 + \frac{r \partial_r B}{B} \right) + 4\partial_r^2 \phi - 2\partial_r \phi \left(\frac{\partial_r A}{A} - \frac{\partial_r B}{B} - \frac{2}{r} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

y la traza del tensor de Ricci R se reduce a:

$$R = -\frac{1}{Ae^{4\phi}} \left[\frac{\partial_r^2 A}{2A} + \frac{\partial_r^2 B}{B} - A\partial_r \tilde{\Delta}^r - \left(\frac{\partial_r A}{A} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r B}{B} \right)^2 + \frac{2}{rB} \left(3 - \frac{A}{B} \right) \partial_r B \right. \\ \left. + \frac{4}{r^2} \left(1 - \frac{A}{B} \right) + 8(\partial_r^2 \phi + (\partial_r \phi)^2) - 8\partial_r \phi \left(\frac{\partial_r A}{2A} - \frac{\partial_r B}{B} - \frac{2}{r} \right) \right], \quad (3.30)$$

donde la componente radial de $\tilde{\Delta}^i$ está dada por:

$$\tilde{\Delta}^r = \frac{1}{A} \left[\frac{\partial_r A}{2A} - \frac{\partial_r B}{B} - \frac{2}{r} \left(1 - \frac{A}{B} \right) \right]. \quad (3.31)$$

El vector $\tilde{\Delta}^i$, al igual que el vector de corrimiento, tiene únicamente la componente radial: $\tilde{\Delta}^i = (\tilde{\Delta}^r, 0, 0)$, como se puede ver de (3.11). Como las $\tilde{\Delta}^i$ son consideradas variables independientes, la ecuación anterior se considera como una constricción. La ecuación de evolución para $\tilde{\Delta}^r$ se encuentra a partir de (3.17), que en simetría esférica se reduce a:

$$\partial_t \tilde{\Delta}^r = \beta^r \partial_r \tilde{\Delta}^r - \tilde{\Delta}^r \partial_r \beta^r + \frac{1}{A} \partial_r^2 \beta^r + \frac{2}{B} \partial_r \left(\frac{\beta^r}{r} \right) \\ + \frac{\sigma}{3} \left[\frac{1}{A} \partial_r (\tilde{D}_m \beta^m) + 2\tilde{\Delta}^r \tilde{D}_m \beta^m \right] \\ - \frac{2}{A} (A_a \partial_r \alpha + \alpha \partial_r A_a) + 2\alpha \left[A_a \tilde{\Delta}^r - \frac{2}{rB} (A_a - A_b) \right] \\ + \frac{2\alpha}{A} \left[\partial_r A_a - \frac{2}{3} \partial_r K + 6A_a \partial_r \phi + (A_a - A_b) \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r B}{B} \right) - 8\pi j_r \right], \quad (3.32)$$

Es importante también saber las constricciones de Einstein en simetría esférica. La constricción Hamiltoniana (2.20) se reduce a:

$$\mathcal{H} = R - (A_a^2 + 2A_b^2) + \frac{2}{3} K^2 - 16\pi\rho = 0, \quad (3.33)$$

mientras que la constricción de momentos queda como:

$$\mathcal{M}^r = \partial_r A_a - \frac{2}{3} \partial_r K + 6A_a \partial_r \phi + (A_a - A_b) \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r B}{B} \right) - 8\pi j_r = 0. \quad (3.34)$$

De esta manera, encontramos todas las ecuaciones de evolución correspondientes al caso en simetría esférica.

3.3. Regularización

En simetría esférica existe un problema con la singularidad que tienen las coordenadas en el origen ya que acarrea problemas de regularidad en las variables geométricas. Para un espacio-tiempo regular se puede comprobar de forma analítica que los términos que van como $1/r$ se cancelan entre sí en el origen, de manera que la solución es bien comportada. Sin embargo, al realizar simulaciones numéricas, los errores numéricos provocan que las soluciones no sean bien comportadas.

Existen dos condiciones de regularización que deben cumplir las variables geométricas en el origen:

1. Paridad en el origen. Todas las variables deben de tener una paridad bien definida en el origen que implica los siguientes comportamientos para r pequeñas:

$$\alpha \sim \alpha^0 + \mathcal{O}(r^2) , \quad (3.35)$$

$$\beta^r \sim \mathcal{O}(r) , \quad (3.36)$$

$$A \sim A^0 + \mathcal{O}(r^2) , \quad (3.37)$$

$$B \sim B^0 + \mathcal{O}(r^2) , \quad (3.38)$$

$$A_a \sim A_a^0 + \mathcal{O}(r^2) , \quad (3.39)$$

$$A_b \sim A_b^0 + \mathcal{O}(r^2) , \quad (3.40)$$

$$\tilde{\Delta}^r \sim \mathcal{O}(r) . \quad (3.41)$$

2. El espacio-tiempo debe ser localmente plano en el origen. En las ecuaciones de Δ^r (3.31), de la componente radial del Ricci R_r^r (3.29) y de su traza (3.30), y de la construcción de momentos (3.34), hay términos que van como $(A - B)/r^2$ ó $(A_a - A_b)/r^2$. Para hacer estos términos regulares pedimos que:

$$A - B \sim \mathcal{O}(r^2) , \quad (3.42)$$

$$A_a - A_b \sim \mathcal{O}(r^2) , \quad (3.43)$$

Esta condición viene de que el espacio es localmente plano en $r = 0$, por lo que la métrica se puede escribir como:

$$dl_{R_0}^2 = dR^2 + R^2 d\Omega^2 , \quad (3.44)$$

donde R es una coordenada radial que mide la distancia propia al origen. Un cambio local de coordenadas de R a r nos lleva a que:

$$dl_{r_0}^2 = \left(\frac{dR}{dr} \right)_{r=0}^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (3.45)$$

Esto implica que $A^0 = B^0$ y como esta condición se debe de cumplir en todo tiempo, también $A_a^0 = A_b^0$.

Para poder implementar ambas condiciones a la vez, Alcubierre y Méndez [2] introducen dos variables auxiliares λ y A_λ definidas como:

$$\lambda \equiv \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{A}{B} \right) , \quad (3.46)$$

$$A_\lambda \equiv \frac{1}{r^2} (A_a - A_b) . \quad (3.47)$$

La segunda condición de regularidad implica que cerca del origen:

$$A_\lambda \sim A_\lambda^0 + \mathcal{O}(r^2) , \quad (3.48)$$

$$\lambda \sim \lambda^0 + \mathcal{O}(r^2) . \quad (3.49)$$

Con estas dos nuevas variables podemos reescribir las ecuaciones de $\tilde{\Delta}^r$, R , R_r^r y \mathcal{M}^r que tienen términos que involucran a r ó r^2 como denominador que son irregulares. Para $\tilde{\Delta}^r$ tenemos:

$$\tilde{\Delta}^r = \frac{1}{A} \left[\frac{\partial_r^2 A}{2A} - \frac{\partial_r B}{B} - 2r\lambda \right]. \quad (3.50)$$

Para R_r^r :

$$\begin{aligned} R_r^r = & -\frac{1}{Ae^{4\phi}} \left[\frac{\partial_r^2 A}{2A} - A\partial_r \tilde{\Delta}^r - \frac{3}{4} \left(\frac{\partial_r A}{A} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r B}{B} \right)^2 - \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^r \partial_r A + \frac{\partial_r A}{rB} \right. \\ & \left. + 2\lambda \left(1 + \frac{r\partial_r B}{B} \right) + 4\partial_r^2 \phi - 2\partial_r \phi \left(\frac{\partial_r A}{A} - \frac{\partial_r B}{B} - \frac{2}{r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Para R :

$$\begin{aligned} R = & -\frac{1}{Ae^{4\phi}} \left[\frac{\partial_r^2 A}{2A} + \frac{\partial_r^2 B}{B} - A\partial_r \tilde{\Delta}^r - \left(\frac{\partial_r A}{A} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r B}{B} \right)^2 + \frac{2}{rB} \left(3 - \frac{A}{B} \right) \partial_r B \right. \\ & \left. + 4\lambda + 8 \left(\partial_r^2 \phi + (\partial_r \phi)^2 \right) - 8\partial_r \phi \left(\frac{\partial_r A}{2A} - \frac{\partial_r B}{B} - \frac{2}{r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Y por último, para \mathcal{M}^r :

$$\mathcal{M}^r = \partial_r A_a - \frac{2}{3} \partial_r K + 6A_a \partial_r \phi + A_\lambda \left(2r + r^2 \frac{\partial_r B}{B} \right) - 8\pi j_r = 0. \quad (3.53)$$

El resto de términos que tienen a r como denominador son regulares gracias a las condiciones de paridad cerca de $r = 0$.

Una vez reescritas las ecuaciones sólo faltan las ecuaciones de evolución para las nuevas dos variables. Para λ se obtiene a partir de las ecuaciones de evolución de A (3.21) y B (3.22):

$$\partial_t \lambda = \beta^r \partial_r \lambda + \frac{2}{r} \left[\beta^r \lambda - \frac{A}{B} \partial_r \left(\frac{\beta^r}{r} \right) \right] + \frac{2\alpha A}{B} A_\lambda. \quad (3.54)$$

Cabe destacar que esta ecuación es regular siempre y cuando $\beta^r \sim \mathcal{O}(r)$ para r pequeñas.

Debido a que $A_a + 2A_b = 0$, podemos encontrar la relación entre A_λ y A_a :

$$A_\lambda = \frac{3A_a}{2r^2}, \quad (3.55)$$

por lo que A_λ es regular siempre y cuando $A_a \sim \mathcal{O}(r^2)$. A partir de esta relación podemos deducir la ecuación de evolución de A_λ a partir de la ecuación de evolución de A_a (3.27). Al hacerlo se debe tener cuidado en juntar términos que sean bien portados por la paridad en

el origen con los que no. Al final se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\partial_t A_\lambda = & \beta^r \partial_r A_\lambda + 2A_\lambda \frac{\beta^r}{r} - \frac{1}{rAe^{4\phi}} \left[\partial_r \left(\frac{\partial_r \alpha}{r} \right) - \frac{\partial_r \alpha}{2r} \left(\frac{\partial_r A}{A} + \frac{\partial_r B}{B} + 8\partial_r \phi \right) \right] \\
& - \frac{\alpha}{rAe^{4\phi}} \left[2\partial_r \left(\frac{\partial_r \phi}{r} \right) - \frac{\partial_r \phi}{r} \left(\frac{\partial_r A}{A} + \frac{\partial_r B}{B} + 4\partial_r \phi \right) \right] \\
& + \frac{\alpha}{Ae^{4\phi}} \left[\frac{B}{2A} \partial_r^2 \lambda + \frac{A}{r} \partial_r \left(\frac{\tilde{\Delta}^r}{r} \right) + \frac{\partial_r \lambda}{r} \left(1 + \frac{2B}{A} - \frac{rB}{2} \tilde{\Delta}^r \right) \right] \\
& + \frac{\partial_r A}{Ar^2} \left(\frac{3}{4} \frac{\partial_r A}{A} - \frac{\partial_r B}{B} \right) - \frac{\lambda}{r} \left(B\tilde{\Delta}^r + 2\frac{\partial_r B}{B} \right) + \frac{B}{A} \lambda^2 \Big] + \alpha K A_\lambda - 8\pi \alpha S_\lambda,
\end{aligned} \tag{3.56}$$

donde $S_\lambda \equiv (S_a - S_b)/r^2$.

Como existe una relación entre A_λ y A_a , se puede evolucionar A_λ y después recuperar A_a a partir de (3.55). Esto es lo que se hace en la práctica al momento de hacer las simulaciones numéricas ya que pareciera reducir considerablemente el tamaño del error.

Es así como se obtienen todas las ecuaciones de evolución para los términos geométricos.

3.4. Campo escalar

Una vez que se han encontrado todas las ecuaciones de evolución de los diferentes componentes del formalismo, lo único que falta es encontrar las las componentes de energía en las ecuaciones de evolución y sus correspondientes ecuaciones de evolución, que en este caso corresponden a los del campo escalar Φ_s y a los del campo fantasma Φ_g .

A partir de la métrica en simetría esférica (3.18), podemos encontrar los valores que corresponden a las densidades de energía y de momento y los componentes del tensor de esfuerzos que aparecen en las ecuaciones del formalismo que dependen del campo escalar. Para ello definimos dos nuevas variables que son iguales para ambos campos por lo que se definen con respecto a cualquier Φ [2] :

$$\Pi = \frac{1}{\alpha} (\partial_t \Phi - \beta^r \partial_r \Phi), \tag{3.57}$$

$$\xi = \partial_r \Phi. \tag{3.58}$$

A partir de ellas obtenemos los valores de todos los elementos de materia para el campo escalar, caracterizados por el superíndice s , tomando en cuenta que el potencial es nulo, es decir $V = 0$:

$$\begin{aligned}
\rho^s &= n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\Pi^2 + \frac{\xi^2}{Ae^{4\phi}} \right), \\
j_r^s &= -n^\mu T_{\mu r} = -\Pi \xi, \\
S_a^s &= \gamma^{rr} T_{rr} = \frac{1}{2} \left(\Pi^2 + \frac{\xi^2}{Ae^{4\phi}} \right), \\
S_b^s &= \gamma^{\theta\theta} T_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left(\Pi^2 - \frac{\xi^2}{Ae^{4\phi}} \right).
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Para el caso del campo fantasma, caracterizado con el superíndice g , los elementos son los mismos pero con el signo cambiado:

$$\begin{aligned} \rho^g &= n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left(\Pi^2 + \frac{\xi^2}{Ae^{4\phi}} \right), \\ j_r^g &= -n^\mu T_{\mu r} = \Pi \xi, \\ S_a^g &= \gamma^{rr} T_{rr} = -\frac{1}{2} \left(\Pi^2 + \frac{\xi^2}{Ae^{4\phi}} \right), \\ S_b^g &= \gamma^{\theta\theta} T_{\theta\theta} = -\frac{1}{2} \left(\Pi^2 - \frac{\xi^2}{Ae^{4\phi}} \right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Como se vio en el primer capítulo, la evolución de un campo escalar Φ está dada por la ecuación de Klein-Gordon (1.49). Dicha ecuación se puede reescribir, con $V = 0$, como:

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} \partial^\mu \Phi] = 0. \quad (3.61)$$

Cabe destacar que las ecuaciones de evolución son las mismas para el campo escalar real y el campo escalar fantasma, lo que difiere entre ellos sólo es el tensor de energía momento.

A partir de la métrica del formalismo 3+1 (2.4) podemos reescribir esta ecuación de segundo orden en dos ecuaciones de primer orden:

$$(\partial_t - \beta^i \partial_i) \Phi = \alpha \Pi, \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} (\partial_t - \beta^i \partial_i) \Pi &= e^{-4\phi} \alpha \left[\tilde{\gamma}^{ij} \partial_i \partial_j \Phi - \left(\tilde{\Gamma}^i - 2\tilde{\gamma}^{ij} \partial_i \Phi \right) \partial_j \Phi \right] \\ &\quad + e^{-4\phi} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_i \alpha \partial_j \Phi + \alpha K \Pi. \end{aligned} \quad (3.63)$$

De esta forma, las ecuaciones de evolución para un campo escalar Φ y sus derivadas quedan como:

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi &= \beta^r \partial_r \Phi + \alpha \Pi, \\ \partial_t \xi &= \beta^r \partial_r \xi + \xi \partial_r \beta^r + \alpha \partial_r \Pi + \Pi \partial_r \alpha, \\ \partial_t \Pi &= \beta^r \partial_r \Pi + \frac{\alpha}{Ae^{4\phi}} \left[\partial_r \xi + \xi \left(\frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + 2\partial_r \phi \right) \right] \\ &\quad + \frac{\xi \partial_r \alpha}{Ae^{4\phi}} + \alpha K \Pi, \end{aligned}$$

donde la ecuación de evolución para ξ se obtiene a partir de la propiedad de permutación de las derivadas parciales.

3.5. Horizontes aparentes en simetría esférica

Para la expansión de geodésicas nulas salientes en simetría esférica, tomamos $\vec{s} = (1/\sqrt{A}, 0, 0)$ como el vector radial unitario. Introduciendo dichos valores en (2.83), la expansión H queda como:

$$H = \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r B}{B} \right) - 2K_\theta^\theta, \quad (3.64)$$

por lo que la condición para un horizonte aparente se reduce a:

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r B}{B} \right) - 2K_\theta^\theta = 0. \quad (3.65)$$

Esta ecuación no se debe de interpretar como una ecuación diferencial para B sino como una condición que indica la presencia de un horizonte aparente en algún valor de la coordenada radial r .

En la práctica se evalúa la ecuación (3.64) en todo el dominio computacional y se busca los puntos donde se hace cero. El punto más lejano donde esto pase indica el horizonte aparente, mientras que las regiones con $H < 0$ corresponden a superficies atrapadas. En algunos casos H se hace cero en más de un lugar, lo que implica la presencia de otras superficies marginalmente atrapadas denominadas horizontes interiores. Esta situación es típica de agujeros negros formados a través de colapso gravitacional, donde una única superficie marginalmente atrapada se forma primero y después se divide en un horizonte interior y uno exterior con una región atrapada en medio. El horizonte interior se acerca a un radio cada vez menor mientras uno se acerca a la singularidad física.

Capítulo 4

Condiciones iniciales y métodos numéricos

Para poder realizar un programa que resuelva las ecuaciones de evolución descritas en el capítulo anterior se requieren varias cosas. Por un lado se deben de especificar las condiciones iniciales del problema de acuerdo al sistema que se está simulando y se debe dar una condición para las fronteras. Además se deben de dar condiciones para las variables de norma α y β^i . Por último, el problema se resolverá numéricamente por lo que se requiere un método de resolución de las ecuaciones diferenciales parciales presentes en el formalismo. Este capítulo describe las condiciones iniciales que se tomaron en consideración para el problema así como el método numérico utilizado en el programa ¹.

El objetivo en este trabajo es el de generar una simulación que modele un sistema de acreción de campo fantasma a un agujero negro. Existen al menos dos formas de formular este problema. En la primera tenemos como condiciones iniciales un pulso de campo escalar y otro de campo fantasma. La idea es que el pulso de campo escalar genere un agujero negro por el efecto de colapso gravitacional de un campo escalar sin masa [10] y que posteriormente el pulso de campo fantasma penetre el horizonte de dicho agujero. La segunda opción es tener un agujero negro ya formado como condición inicial y un pulso de campo fantasma alejado del mismo, de tal forma que al evolucionar el pulso este se adentre en el horizonte del agujero negro.

4.1. Introducción

Las únicas ecuaciones que se deben de cumplir en todo momento de la evolución son aquellas que no dependen del tiempo, las constricciones hamiltoniana (3.33) y de momento (3.34):

$$\mathcal{H} = R - (A_a^2 + 2A_b^2) + \frac{2}{3}K^2 - 16\pi\rho = 0, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{M}^r = \partial_r A_a - \frac{2}{3}\partial_r K + 6A_a\partial_r\phi + A_\lambda \left(2r + r^2\frac{\partial_r B}{B} \right) - 8\pi j_r = 0. \quad (4.2)$$

¹Se pueden ver con mayor detalle en [1, 6]

Es a partir de estas ecuaciones que podemos determinar de manera consistente las condiciones iniciales del problema ya que son ellas las que restringen la elección de las 12 variables dinámicas que corresponden a $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$.

Las constricciones forman un sistema de 4 ecuaciones diferenciales parciales acopladas del tipo elíptico que en general son complicadas de resolver. Los procedimientos más comunes para resolver las condiciones iniciales son la descomposición conforme de York y Lichnerowicz [20, 33, 34] y la aproximación de sandwich delgado [36]. Una descripción más detallada del desarrollo de ambos procedimientos se encuentra en el libro de Alcubierre [1].

4.2. Condiciones iniciales con valores simétricos en el tiempo

Como ejemplo de los procedimientos de descomposición conforme y la aproximación de sandwich delgado se encuentra la solución de espacio-tiempo con uno o varios agujeros negros.

Consideremos el caso donde los datos iniciales toman valores simétricos en el tiempo, correspondientes al tiempo donde los agujeros negros son momentáneamente estáticos. Para este caso tenemos que $K_{ij} = 0$. De esta manera la constricción de momentos (2.23) se satisface de manera trivial y los métodos de descomposición conforme y de aproximación de sandwich delgado son equivalentes. Lo único que queda por resolver entonces es la constricción Hamiltoniana. Si utilizamos una solución de vacío $\rho = 0$, la constricción se reduce a:

$$8\tilde{D}^2\psi - \tilde{R}\psi = 0, \quad (4.3)$$

donde las tildes corresponden a la derivada covariante y el tensor de Ricci asociados a la métrica conforme como se vio en la sección 2.5.

Simplificamos aún más el problema asumiendo una métrica conformemente plana. De esta manera $\tilde{R} = 0$ y nos quedamos con la ecuación de Laplace:

$$D_{\text{plana}}^2\psi = 0. \quad (4.4)$$

Las condiciones de frontera para la ecuación corresponden a un espacio-tiempo asintóticamente plano por lo que en infinito $\psi = 1$. La solución más simple al problema es $\psi = 1$, que implica una métrica física $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, es decir, un espacio-tiempo de Minkowsky.

La siguiente solución interesante es:

$$\psi = 1 + \frac{k}{r}, \quad (4.5)$$

donde k es una constante arbitraria. La métrica física queda entonces como:

$$dl^2 = \left(1 + \frac{k}{r}\right)^4 [dr^2 + d\Omega^2], \quad (4.6)$$

que corresponde a la métrica espacial de un agujero negro de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas (1.29) con la masa del agujero negro $M = 2k$.

De esta forma, encontramos que para valores simétricos en el tiempo la solución para las condiciones iniciales está dada por un agujero negro de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas.

4.3. Pulsos de campo escalar y campo fantasma

En la sección anterior se encontró la solución correspondiente a un espacio-tiempo sin componentes de materia. Al agregar materia las ecuaciones se complican un poco. El primer caso que se utilizó en este trabajo es el de un campo escalar y un campo fantasma. La forma en que se implementaron en las simulaciones fue a partir de pulsos.

Los pulsos que se utilizaron en este trabajo son del tipo gaussianos. Los parámetros que definen a una curva gaussiana son su amplitud a , su ancho s y su centro r . Como se utilizan dos tipos de pulsos en el trabajo, el del campo escalar y el del campo fantasma, se utilizará la siguiente notación para diferenciarlos: a^s, r^s y s^s , serán los parámetros que definen al pulso escalar; mientras que a^g, r^g y s^g serán los que definen al pulso fantasma. De la misma manera, para diferenciar a los campos se les añade un subíndice, Φ_s para el campo escalar y Φ_g para el campo fantasma.

Hay que recordar que se está trabajando en un modelo con simetría esférica por lo que estos pulsos, aunque únicamente están definidos a lo largo de r , son pulsos tridimensionales.

Para asegurar que se cumpla con las condiciones de regularización, pedimos que el campo escalar sea una función par. Para ello, en la práctica tomamos la suma de dos gaussianas simétricas con respecto al origen como condición inicial. De esta manera, el pulso de campo escalar queda como:

$$\Phi_s = a^s \left[\exp \left(\frac{-(r - r^s)^2}{(s^s)^2} \right) + \exp \left(\frac{-(r + r^s)^2}{(s^s)^2} \right) \right]. \quad (4.7)$$

Análogamente para el caso del campo fantasma:

$$\Phi_g = a^g \left[\exp \left(\frac{-(r - r^g)^2}{(s^g)^2} \right) + \exp \left(\frac{-(r + r^g)^2}{(s^g)^2} \right) \right]. \quad (4.8)$$

Para simplificar los cálculos asumimos que los pulsos iniciales tienen simetría temporal. Esto implica que la derivada temporal Π (3.57) y la curvatura extrínseca K_{ij} son nulas a $t = 0$. De esta forma, la constricción de momentos se satisface idénticamente, por lo que no hay que resolverla para obtener las condiciones iniciales.

El problema se reduce entonces a resolver la constricción Hamiltoniana para el factor conforme $\psi = e^\phi$. Para ello, elegimos una métrica conformemente plana con los coeficientes métricos $A = B = 1$ y encontramos que:

$$\partial_r^2 \psi + \frac{2}{r} \partial_r \psi + 2\pi \rho \psi^5 = 0, \quad (4.9)$$

donde el valor de ρ está dado en la ecuación (3.59) y (3.60) por lo que la ecuación se reduce a:

$$\partial_r^2 \psi + \frac{2}{r} \partial_r \psi + \pi (\xi_s^2 - \xi_g^2) \psi = 0, \quad (4.10)$$

una ecuación lineal en ψ donde $\xi_s = \partial_r \Phi^s$ y $\xi_g = \partial_r \Phi^g$. Es importante destacar que es lineal debido a que $\Pi = 0$, de otra forma esto no se cumpliría.

Se puede traducir este problema a una representación matricial [13]:

$$A\Psi = 0, \quad (4.11)$$

donde A es la matriz que representa al operador diferencial y $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$ es la solución.

Para resolver el problema se debe de invertir la matriz A , que en este caso resulta ser una matriz tridiagonal si se resuelve el sistema a segundo orden o pentadiagonal si se resuelve el sistema a cuarto orden. En general podemos decir que la matriz que se obtiene es diagonal por bandas. Existen métodos numéricos optimizados para resolver este tipo de problemas que hacen una descomposición LU de la matriz formada para despues obtener la solución. En el caso del programa OllinSphere2, estas matrices se resuelven con rutinas adaptadas de Numerical Recipes [25].

4.4. Agujero negro como condición inicial

Para poder evolucionar un agujero negro como condición inicial debemos de tomar en cuenta los horizontes de eventos y las singularidades asociadas con ellos. El principal problema que surge es el de cantidades geométricas que se vuelven infinito. En general existen únicamente dos tipos de singularidades, las ocasionadas por la elección de coordenadas y que muestran malos comportamientos aún cuando el espacio-tiempo es regular, y las singularidades físicas donde el campo gravitacional se vuelve infinito.

Se pueden construir datos iniciales para múltiples agujeros negros para los cuales la singularidad física se encuentra en el futuro [1], lo que no implica problemas para las primeras etapas de la evolución. Sin embargo, este tipo de datos iniciales cuenta con una topología no trivial, con muchos universos conectados entre sí a través de agujeros negros. Por esta razón, en este caso únicamente habrá un agujero negro de Schwarzschild.

Al igual que en la sección pasada, el problema consiste en resolver la constricción Hamiltoniana para el factor conforme ψ . Como ya vimos, la ecuación que definirá las condiciones iniciales del problema es:

$$\partial_r^2 \psi + \frac{2}{r} \partial_r \psi + 2\pi \rho \psi^5 = 0. \quad (4.12)$$

Para resolver la ecuación en este caso, utilizaremos un término auxiliar v definido como:

$$v = r^2 \partial_r \psi, \quad (4.13)$$

de tal manera que podemos dividir la ecuación original en dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\partial_r \psi = \frac{v}{r^2}, \quad (4.14)$$

$$\partial_r v = -2\pi r^2 \rho \psi^5. \quad (4.15)$$

Para resolver las dos ecuaciones se utilizó un integrador tipo Runge Kutta de orden cuatro. De modo que lo único que se requiere es de las condiciones iniciales para ambas ecuaciones. Como buscamos que la solución represente a un agujero negro usamos una de sus principales características, su horizonte de eventos. Para ello, consideremos el agujero negro de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas como el que se describió en el Capítulo 1 en la ecuación (1.29):

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - M/2\bar{r}}{1 + M/2\bar{r}} \right)^2 dt^2 + \psi^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2), \quad (4.16)$$

donde el factor conforme en ese caso es $\psi = 1 + M/2r$ y donde la coordenada isotrópica radial (\bar{r}) está relacionada con el radio de área de Schwarzschild (r) a través de la transformación en la ecuación (1.28):

$$r = \bar{r} \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}} \right)^2. \quad (4.17)$$

El horizonte para este espacio-tiempo se encuentra ubicado en:

$$r_0 = \frac{M}{2}, \quad (4.18)$$

y existe una isometría con respecto a la transformación:

$$\bar{r} \rightarrow \frac{M^2}{4\bar{r}} = \frac{r_0^2}{\bar{r}}. \quad (4.19)$$

Sabiendo esto, dividimos la malla en dos partes: la exterior al agujero negro y la que se encuentra en el interior del mismo. De esta manera podemos encontrar la solución al problema integrando la parte exterior del agujero negro por un lado y la interior por el otro si sabemos las condiciones de frontera que se deben de cumplir ahí.

Para encontrar dichas condiciones consideramos la isometría que existe en el espacio-tiempo de Schwarzschild alrededor de la garganta $r = r_0$. Para que el factor conforme respete dicha isometría se debe de imponer como condición que:

$$\partial_r \psi|_{r_0} = -\frac{\psi(r_0)}{2r_0}. \quad (4.20)$$

Si en la frontera el factor conforme sea igual al del espacio-tiempo de Schwarzschild tenemos que:

$$\psi = 1 + \frac{M}{2r}, \quad (4.21)$$

y se cumple con la condición (4.20). Por lo tanto, las condiciones iniciales para la integración de las ecuaciones (4.14) y (4.15) quedan como:

$$\psi|_{r_0} = 2, \quad (4.22)$$

$$v|_{r_0} = -\frac{M}{2}. \quad (4.23)$$

Se puede conservar la isometría en presencia de campos escalares si estos cumplen con invariancia ante la isometría, es decir, $\phi(r) = \phi(r_0^2/r)$. A partir de esto podemos entonces definir las condiciones de frontera derivando y evaluando en el punto fijo de la isometría, que en este caso es la garganta (r_0). Como consideramos que los campos escalares utilizados son simétricos, el resultado de estas operaciones nos lleva a que:

$$\partial_r \phi|_{r_0} = 0. \quad (4.24)$$

Nótese que la imposición del factor conforme en esa forma también cumple con las condiciones de frontera para el campo escalar (4.24) ya que al considerar un agujero negro de Schwarzschild se están descartando contribuciones de materia en ese punto. Sin embargo, al realizar la integración sobre la malla se tiene en cuenta al campo escalar ya que contribuye a ρ en (4.9).

4.5. Condiciones de estabilidad

En un esquema descrito con diferencias finitas, como el que tiene el código OllinSphere2, hay que tener cuidado con los métodos a utilizar debido a que no todos son estables.

Cada método difiere de los demás a partir de la aproximación que se haga en la discretización de los operadores diferenciales espaciales. Se pueden hacer aproximaciones con diferencias centradas, promedios o, en general, se pueden obtener a partir de una expansión de Taylor de la forma:

$$u(t + \Delta t, x) = u(t, x) + \Delta t \partial_t u + \frac{(\Delta t)^2}{2} \partial_t^2 u + \dots \quad (4.25)$$

Por ejemplo, el método de Lax-Wendroff se obtiene usando la ecuación (4.25) con una aproximación con diferencias centradas en las derivadas espaciales y la ecuación de advección para intercambiar las derivadas temporales por espaciales:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{v\rho}{2} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{v^2\rho^2}{2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) . \quad (4.26)$$

donde $\rho \equiv \Delta t / \Delta x$ es el parámetro de Courant.

Para determinar que método se debe de utilizar hay que tomar en cuenta muchos factores. Sin embargo, una de las propiedades primordiales para el éxito de un método es que sea estable. Podemos definir la estabilidad de un método como el requisito de que la solución exacta a la ecuación en diferencias finitas permanezca limitada después de cualquier tiempo finito para cualquier paso de tiempo. Una forma para determinar la estabilidad de un método en particular es el análisis de estabilidad de von Neumann que viene descrito en el libro de Miguel Alcubierre [1]. A grandes rasgos, el método consiste en proponer una solución como una serie de Fourier para obtener una expresión que acote los parámetros involucrados. Realizando este análisis en muchos de los métodos, se encuentra que una condición que se debe de cumplir para que el método sea estable es la condición de Courant-Friedrich-Lewy (CFL):

$$c\rho \leq 1 \Rightarrow c\Delta t \leq \Delta x , \quad (4.27)$$

donde c es la velocidad de la luz. Esta condición tiene una interpretación geométrica que tiene que ver con el dominio de dependencia numérico. Si la malla en la que se está trabajando es más chica que el dominio de dependencia físico que se quiere estudiar el método es inestable. Esto se debe a que la solución numérica nunca podría converger a la solución física debido a que siempre existiría información física fuera del dominio de dependencia numérico.

El código implementado para este trabajo contiene métodos más difíciles de analizar pero se busca siempre que se cumpla la condición CFL procurando no estar cerca de la igualdad en (4.27) para así asegurar que la solución sea estable.

4.6. Método de líneas

Una manera de resolver los sistemas de ecuaciones sin tomar las ecuaciones directamente y sustituirlas con aproximaciones en diferencias finitas tanto en el espacio como en el tiempo, es el método de líneas ². El método de líneas consiste en primero discretizar únicamente las

²Se puede ver con detalle en [1]

dimensiones espaciales, dejando la dimensión temporal continua y posteriormente evolucionar la ecuación utilizando un método integrador.

Una de las ventajas de este método es que se desacopla la forma en que se discretizan el tiempo y el espacio, por lo que se puede cambiar el orden de la diferenciación espacial o del método de integración temporal. Por otro lado, este método puede generalizarse a sistemas de ecuaciones no lineales de manera directa, a diferencia de otros métodos que requieren un mayor análisis. Además, al desacoplarse las ecuaciones se pueden juntar diferentes códigos que resuelvan diferentes ecuaciones sin tener mucho problema. Es por todas estas razones que el método de líneas es cada vez más común en los códigos de relatividad numérica.

Como ejemplo consideremos el caso de la ecuación de advección tomando diferencias centradas en las aproximaciones a las derivadas espaciales:

$$\frac{du_m}{dt} = -\frac{v}{2\Delta r} (u_{m+1} - u_{m-1}) \equiv S(u) \quad (4.28)$$

Una vez que se tiene la ecuación discretizada se puede evolucionar la ecuación con diferentes métodos de integración. Uno de los más comunes es el integrador tipo Runge-Kutta. Se puede utilizar una integración a segundo o cuarto orden, sin embargo al realizar un análisis de estabilidad de von Neumann con el integrador Runge-Kutta a segundo orden se obtiene un método que es siempre inestable. Recurrimos entonces al integrador Runge-Kutta a cuarto orden, ya que éste si es estable. El método corresponde a calcular recursivamente primero las cantidades:

$$k_1 = S(u^n) , \quad (4.29)$$

$$k_2 = S\left(u^n + k_1 \frac{\Delta t}{2}\right) , \quad (4.30)$$

$$k_3 = S\left(u^n + k_2 \frac{\Delta t}{2}\right) , \quad (4.31)$$

$$k_4 = S(u^n + k_3 \Delta t) , \quad (4.32)$$

y después calcular:

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) . \quad (4.33)$$

donde $S(u)$ son las fuentes obtenidas a partir de la discretización espacial de la ecuación. Cabe destacar que el método requiere de cuatro evaluaciones de las fuentes para poder avanzar un paso de tiempo.

Capítulo 5

Resultados numéricos

Los agujeros negros son de gran interés para muchos científicos en gran parte por que tienen cualidades que los hacen bastante peculiares y únicos. La más particular sin duda es que cuentan con un horizonte de eventos que marca un límite entre el resto del universo y la inevitable caída a la singularidad. Este horizonte cuenta con muchas propiedades. Una de ellas es que tiende a crecer con el tiempo en cualquier proceso de acreción de materia [17]. Sin embargo existen excepciones a este proceso, como lo que ocurre al acretar materia exótica al agujero negro. La diferencia radica en que este tipo de materia no cumple con varias de las condiciones de energía establecidas en el Capítulo 1, lo que conduce a resultados atípicos.

En este trabajo se acretó campo escalar fantasma a un agujero negro con el propósito de estudiar los mecanismos que hacen que la reducción del área del horizonte de eventos sea posible y todo lo que esto implica. Uno de los mayores motivos para realizar este estudio es el caso extremo en que la reducción del horizonte de eventos se lleva al 100 % y sobre la posibilidad de que esto suceda. De poderse, habría que realizar un estudio sobre la singularidad física, ya que si no hay horizonte la singularidad quedaría desnuda, violando la conjetura de censura cósmica [23].

Como ya se mencionó antes, se desarrollan dos maneras de resolver el problema de acreción de campo fantasma a un agujero negro: con el agujero negro formado por colapso gravitacional de campo escalar y con el agujero negro como condición inicial. En ambos casos la acreción de campo fantasma es a través de un pulso gaussiano en el exterior del agujero negro que al evolucionar se adentra en el horizonte de eventos.

Los resultados se obtuvieron con el código OllinSphere2 escrito por el grupo de Relatividad Numérica del Instituto de Ciencias Nucleares de la Universidad Autónoma Nacional de México. El código está desarrollado en FORTRAN90 y resuelve las ecuaciones de la formulación BSSN en simetría esférica. Todas las simulaciones se realizaron con el método de líneas usando un integrador Runge-Kutta de orden 4 para las evoluciones temporales con una foliación maximal y un vector de corrimiento $\beta^i = 0$. Las condiciones iniciales se mostraron en el capítulo anterior y las condiciones de frontera se obtienen a partir de los eigencampos, pero no se entrará en detalle en ese tema.

En todos los casos las condiciones para establecer si se formó o no un agujero negro fueron dos: el colapso del lapso y la formación de un horizonte aparente. De la misma manera, en todos los casos se tomaron 3 ó 4 diferentes resoluciones, dependiendo del problema, para poder observar la convergencia de las soluciones. Los referentes para las pruebas de

convergencia de la solución fueron las constricciones Hamiltoniana y de momento.

Todas las simulaciones fueron realizadas en una computadora personal con tiempos por simulación que iban desde 1 hasta 8 horas según los parámetros.

5.1. Agujero negro formado por colapso gravitacional de campo escalar

Las condiciones iniciales para el caso de un agujero negro formado por colapso de campo escalar ya fueron presentadas en la sección 4.3. Antes de realizar una evolución con los dos pulsos, el escalar y el fantasma, se deben de escoger valores adecuados para el pulso inicial de campo escalar. Para ello hay que determinar un parámetro tal que el tiempo de formación del agujero negro sea suficiente para observar su formación por el colapso del campo escalar, pero que además su tamaño sea adecuado para observar los cambios provocados posteriormente por el campo fantasma. Además, hay que considerar que si los parámetros que determinan al campo escalar son muy grandes (en este caso mayores a 0.1 en la amplitud), pueden provocar problemas con el código debido a los errores numéricos.

Todos los pulsos que se utilizaron en este trabajo son como en la ecuación (4.7), es decir, son la suma de dos gaussianas. Dependiendo de los valores de los parámetros del pulso de campo escalar podemos obtener resultados muy distintos en la evolución. Para observar todos estos comportamientos se realizaron muchas simulaciones con diferentes parámetros.

En particular, se caracterizó el comportamiento del sistema debido al cambio de la amplitud de la gaussiana que conforma el pulso inicial. Para todos los casos los valores del centro r^s y el ancho s^s de las gaussianas iniciales son fijos con los valores $r^s = 0$ y $s^s = 1$ respectivamente. La amplitud a^s se va cambiando con un factor $\Delta a^s = 0.02$ comenzando con $a^s = 0$. Cabe destacar que al introducir un valor inicial a^s en los parámetros del programa, en los resultados se observará una amplitud $2a^s$ debido a que $r^s = 0$ y la amplitud de las gaussianas es la misma. Es decir, si uno introduce como parámetro $a^s = 0.1$, la gráfica resultante por el código tendrá una amplitud $a^s = 0.2$ debido a que el pulso es formado por la suma de dos gaussianas para asegurar que el campo escalar sea una función par. Otro parámetro clave en las evoluciones es el factor de Courant, que nos dice cómo es la relación entre la malla temporal y la espacial. En este caso dicho factor se mantuvo constante en $\rho = \Delta t / \Delta x = 0.5$ ya que no hay grandes cambios en la evolución que pudieran provocar problemas de estabilidad en el código.

5.1.1. Colapso gravitacional de campo escalar

Comencemos con el caso más sencillo para la evolución temporal de un pulso de campo escalar. Colocamos un pulso inicial con una amplitud pequeña en el origen y lo dejamos evolucionar con las ecuaciones obtenidas en capítulos anteriores. Al ver la evolución del pulso, lo único que podemos observar es que el pulso se propaga a lo largo del espacio (Figura 5.1). Esto es de esperarse debido a que se está resolviendo la ecuación de Klein-Gordon, que a grandes rasgos no es más que una ecuación de onda. No hay colapso gravitacional de campo escalar debido a que el pulso es muy pequeño y por lo tanto no se forma un agujero negro.

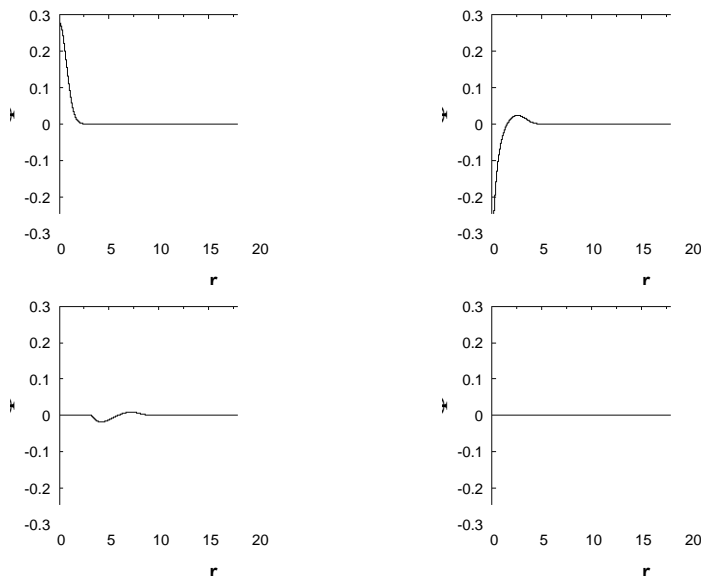


Figura 5.1: Evolución de un campo escalar con $a^s = 0.14$ en una malla con $\Delta r = 0.0025$. Los tiempos de cada gráfica en la evolución se muestran con la leyenda $t = tiempo$.

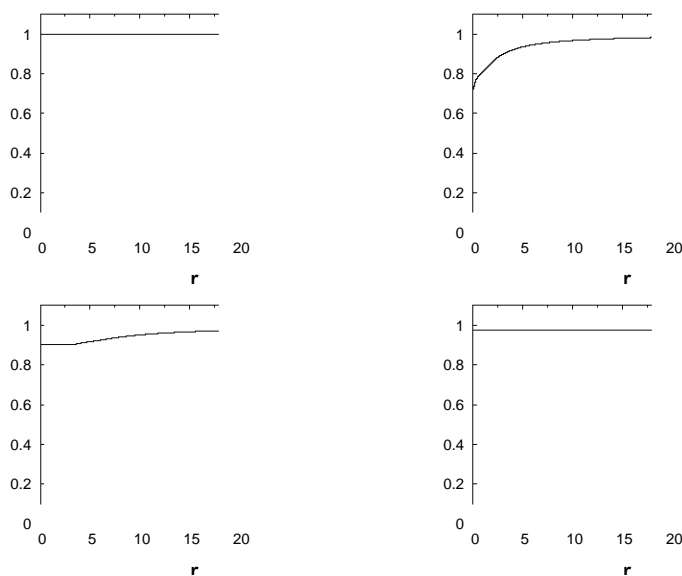


Figura 5.2: Evolución del lapso α con $a^s = 0.14$ en una malla con $\Delta r = 0.0025$ y una evolución con factor de Courant $\rho = 0.5$. Los tiempos de cada gráfica en la evolución se muestran con la leyenda $t = tiempo$.

Los valores iniciales de la amplitud del pulso escalar para los que no hay formación de agujero negro, son aquellos en los que $a^s \leq 0.14$. Para todos estos valores la evolución es similar a la que se presenta en la Figura 5.1, salvo un factor de escala dependiente de la amplitud del pulso. En la evolución lo que se puede apreciar es como el pulso se va propagando

en el espacio alejándose del origen, su ubicación original. A $t = 3$ pareciera que se forma un pico en la parte inferior del pulso, sin embargo al ver la figura más detalladamente el pulso sigue siendo suave, no hay derivadas que tiendan a infinito. La amplitud del pulso disminuye conforme pasa el tiempo debido a que se distribuye uniformemente en un área cada vez mayor (la r es una representación unidimensional de la esfera tridimensional que representa). Cuando el pulso llega al final de la malla, cerca de $t = 31$, su amplitud se redujo de $a^s = 0.28$ a $a^s = 0.0024$ en el caso que se muestra en la Figura 5.1, es decir se reduce dos órdenes de magnitud.

Para comprobar que no se forma ningún agujero negro se grafica la evolución del lapso en la Figura 5.2. La condición de lapso utilizada fue la foliación maximal, especificada en la sección 2.6. Para todos los valores de $a^s \leq 0.14$, la gráfica es similar pero el lapso no disminuye tanto en los valores cercanos al origen, de donde inicia el pulso escalar fantasma. En la evolución del lapso se puede observar la influencia del campo escalar en tiempos cercanos a cero. Se alcanza a apreciar como en $t = 3$ el lapso está a punto de colapsar, pero al no ser la energía del pulso escalar suficiente para ello, vuelve poco a poco a su valor original en $\alpha = 1$. Como sucede con el campo escalar, el lapso también pareciera formar un pico a este tiempo, sin embargo al agrandar la figura se podría observar que la función también es suave.

Comparando las gráficas de las figuras 5.1 y 5.2 podemos ver que el pulso de campo escalar influye directamente en el comportamiento del lapso ya que a tiempos iguales la perturbación ocasionada por el pulso de campo escalar se ve reflejada en la gráfica del lapso. Esto era de esperarse debido a que la ecuación de la foliación maximal cuenta con elementos de materia directamente asociados con el pulso de campo escalar.

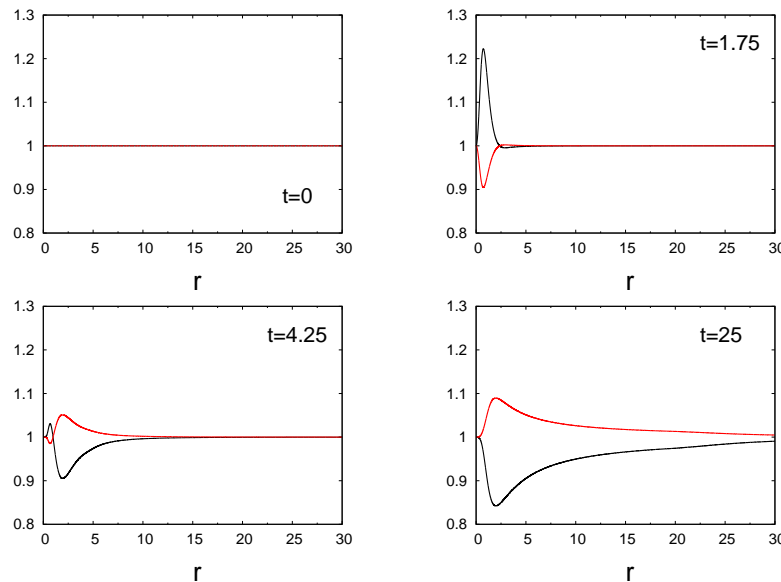


Figura 5.3: Evolución de los coeficientes métricos A (negro) y B (rojo) con $a^s = 0.14$ en una malla con $\Delta r = 0.0025$ y una evolución con factor de Courant $\rho = 0.5$. Los tiempos de cada gráfica en la evolución se muestran con la leyenda $t = tiempo$.

El efecto que tiene el lapso en los coeficientes métricos se puede apreciar en la Figura 5.3.

Notamos que A y B tienen un comportamiento similar durante la evolución: es simétrico con respecto al valor constante 1 (la condición inicial para ambos coeficientes). Estas similitudes son ocasionadas por la condición que se pidió en la sección 3.2 de pedir que $AB^2 = 1$. Es por esta razón que en las figuras posteriores únicamente se mostrará el valor de A . Podemos ver que se forma un pequeño pico (que es suave) en el momento en que el lapso decrece hasta casi colapsar en $t = 1.75$. Este es un indicio del estiramiento de la foliación que se produce al haber un colapso del lapso, efecto que se podrá apreciar mejor con los parámetros donde sí se forma un agujero negro.

Para comprobar que estos resultados son confiables debemos de realizar una prueba de convergencia. Para ello se realizaron 3 ó 4 simulaciones con diferentes resoluciones:

$\Delta r = 0.01, \Delta r/2, \Delta r/4$ y $\Delta r/8$. El número de simulaciones dependía de cómo se comportaba la solución a resoluciones bajas, ya que si la solución era muy distinta a las de resoluciones más altas significaría que puede haber problemas ocasionados por la falta de precisión. Las simulaciones se realizaron con un aproximación de diferencias finitas de orden 4 por lo que esperamos que el factor de convergencia sea $f = (\Delta r_1/\Delta r_2)^4 = 16$.

Una manera sencilla de comprobar que la solución converge con el factor f adecuado es graficando la evolución de la norma de la constricción hamiltoniana a diferentes resoluciones. En este caso la norma está definida por la raíz cuadrada media o RMS, por sus siglas en inglés. Al realizar una comparación con diferentes resoluciones, una con Δr y otra con $\Delta r/2$, esperamos que la gráfica con resolución $\Delta r/2$ empate con la gráfica de Δr si se multiplica por un factor f . En una gráfica logarítmica de la norma esto se ve como una diferencia constante en cada tiempo para diferentes resoluciones. La Figura 5.4 es un ejemplo de una solución que es convergente ya que las líneas que representan la norma de la constricción Hamiltoniana en diferentes resoluciones son paralelas y la distancia entre ellas es constante casi todo el tiempo. Al principio las gráficas coinciden en un punto debido a que todas parten de lo mismo, de que $\mathcal{H} = 0$. En esta Figura también se puede apreciar el límite que tiene la computadora al trabajar con una resolución muy alta. Para el caso $dr/4$ se alcanzan a apreciar pequeñas fluctuaciones del orden de 10^{-7} ocasionadas por el error numérico que se acumula con todas las operaciones realizadas. Éstas fluctuaciones son ocasionadas por el valor establecido que tiene la computadora para representar números muy pequeños, que al ser finito presenta problemas en órdenes muy bajos y se le conoce como "error de redondeo".

Se puede apreciar un pequeño pico cerca del valor $t_p = 31$. Este pico es ocasionado por un efecto de frontera que se propaga desde $r = 30$ y que afecta de manera notable hasta t_p debido a que hasta ese momento llega al origen, donde se encuentra la mayor perturbación a \mathcal{H} provocada por el pulso escalar inicial.

Si $a^s \geq 0.16$ ocurre un colapso del campo escalar y se forma un agujero negro. La Figura 5.5 muestra la evolución del lapso para un valor de $a^s = 0.30$. Como se está utilizando una foliación maximal, el lapso tiende a irse a cero en las zonas cercanas al agujero negro ($r = 0$). Este efecto es el ya nombrado colapso del lapso y ocurre debido a que la foliación maximal no permite que los elementos de volumen cambien, por lo que cerca de la singularidad se debe de detener la evolución temporal para poder lograrlo.

Como α es por definición el lapso de tiempo propio, el efecto que produce el colapso del lapso es que pareciera que el tiempo se detuvo ahí. Esto no significa que el sistema no siga evolucionando, porque el lapso no se hace completamente cero, pero en esa zona la evolución es muy lenta en comparación con el resto de la malla. Ejemplo de ello es la imagen a $t = 30$

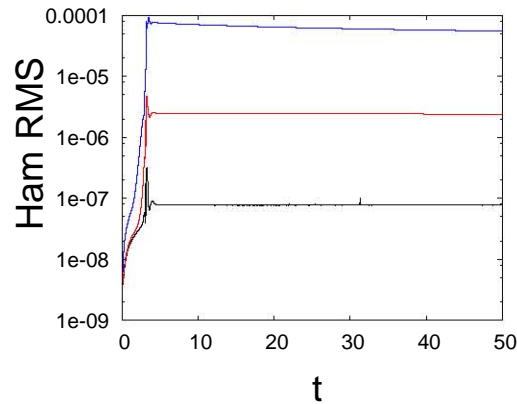


Figura 5.4: Raíz cuadrada media de la constricción Hamiltoniana para los valores $\Delta r = 0.01$ (azul), $\Delta r/2$ (rojo) y $\Delta r/4$ (negro), con $a^s = 0.14$.

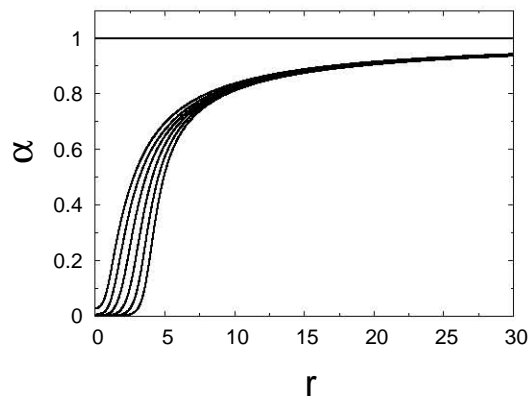


Figura 5.5: Colapso del lapso para una simulación con $a^s = 0.30$ y $\Delta r = 0.0025$. Las diferencias de tiempo son de $\Delta t = 5$

que tiene el campo escalar que se ve en la Figura 5.6. En comparación con 5.1 se puede apreciar como la evolución del pulso está estancada en $0 < r < 5$.

Otro efecto interesante que podemos apreciar una vez que se forma el agujero negro es la evolución de la métrica radial A . Podemos observar en la figura 5.7 que la métrica comienza a crecer en la región cercana al horizonte del agujero negro. Esto se conoce como estiramiento de la hoja y es provocado por el colapso del lapso. Al haber colapsado el lapso en las regiones centrales, el tiempo de evolución se congela en esa zona, mientras que sigue en la zona exterior, provocando que las hipersuperficies se estiren. Además, los observadores locales cercanos al agujero negro van cayendo hacia él con diferentes aceleraciones. De esta manera, la distancia entre ellos aumenta, produciendo también un incremento de A .

Para determinar el tamaño del agujero negro y confirmar su existencia se utilizó un buscador de horizontes aparentes. La Figura 5.8 muestra el radio r_{HA} y la masa del horizonte aparente M_{HA} del agujero negro durante la evolución. La masa del horizonte aparente se

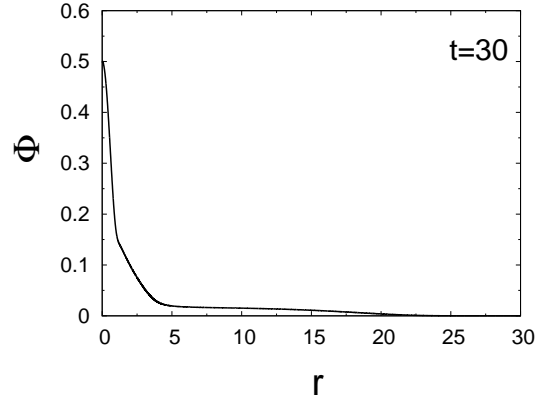


Figura 5.6: Solución de un campo escalar con $a^s = 0.30$ en una malla con $\Delta r = 0.0025$ a $t = 30$.

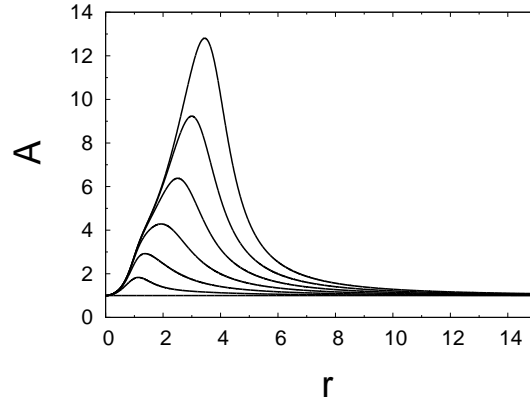


Figura 5.7: Evolución de la métrica radial A con $a^s = 0.30$ en una malla con $\Delta r = 0.0025$ y una evolución con factor de Courant $\rho = 0.5$. Las diferencias de tiempos son de $\Delta t = 5$.

define a partir del área del horizonte A_{HA} como:

$$M_{HA} = \sqrt{\frac{A_{HA}}{16\pi}}, \quad (5.1)$$

en analogía a lo que se hace en el caso de un agujero negro de Schwarzschild (1.27). A su vez, el área del horizonte se define como:

$$A_{HA} = 4\pi\psi^4 r_{HA}^2 B_{HA}, \quad (5.2)$$

donde B_{HA} es la función métrica B en el horizonte.

El radio del horizonte aparente r_{HA} toma un valor determinado en el momento en que se forma el agujero negro. Cabe destacar que la aparición de dicho horizonte aparente es instantánea y el radio r_{HA} va creciendo con el tiempo. Este aparente crecimiento del agujero negro se debe a que el agujero “traga” observadores con coordenada radial constante. Este

es un efecto coordinado, en realidad el agujero negro no crece ya que el área no cambia. Por otro lado, la masa del horizonte aparente M_{HA} crece un poco y después se estabiliza cerca de un valor constante. La masa del horizonte aparente no es constante desde que se forma el agujero negro ya que el pulso tiene un ancho distinto de cero, por lo que una parte del pulso forma el agujero negro mientras que otra contribuye a su crecimiento. El agujero negro no se forma en un solo instante de tiempo, sino en un intervalo. Sin embargo, si observamos la gráfica más detalladamente observamos que la masa del agujero pareciera seguir creciendo linealmente después de cierto tiempo. Este comportamiento es provocado por un error numérico asociado al estiramiento de la hoja.

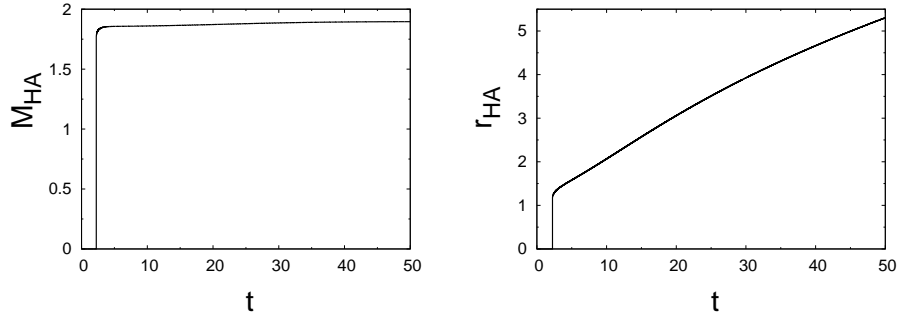


Figura 5.8: Radio r_{HA} y masa M_{HA} del horizonte aparente para un pulso escalar de amplitud $a^s = 0.30$. El HA se forma a $t = 2.23$

Existen otras maneras de definir la masa del sistema además de la masa del horizonte aparente. Una es reconociendo que el espacio-tiempo se aproxima al de Schwarzschild para r muy grandes ya que en una zona muy lejana al agujero negro es como si se estuviera en el vacío. La masa de Schwarzschild se definió a partir de:

$$g_{RR} = \frac{1}{1 - 2M/R}, \quad (5.3)$$

donde R es el radio de área de Schwarzschild. Despejando M de esta ecuación obtenemos una forma de la masa del sistema que denominaremos como $M(r)$.

Para el caso de BSSN en simetría esférica $R = r\psi^2\sqrt{B}$. Además, para este caso sabemos que:

$$g_{RR} = \frac{A\psi^4}{(dR/dr)^2}, \quad (5.4)$$

donde:

$$\frac{dR}{dr} = \sqrt{B}\psi^2 \left(1 + r \frac{\partial_r B}{2B} + 2r \frac{\partial_r \psi}{\psi} \right). \quad (5.5)$$

Entonces, la masa del sistema $M(r)$ queda dada por:

$$M(r) = \frac{r\psi^2\sqrt{B}}{2} \left[1 - \frac{B}{A} \left(1 + r \left(\frac{\partial_r B}{2B} + 2\partial_r \phi \right)^2 \right) \right]. \quad (5.6)$$

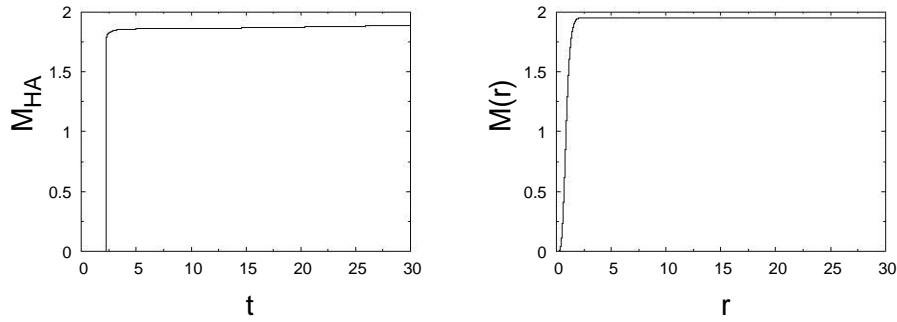


Figura 5.9: Diferencia entre $M(r)$ a $t = 0$ y la evolución temporal de M_{HA} para un pulso escalar con amplitud $a^s = 0.30$.

En la Figura 5.9 podemos observar que $M(r)$ a $t = 0$ es mayor en $r = 30$ que la masa calculada a partir del horizonte aparente M_{HA} . Esto se debe a que $M(r)$ representa la masa total del sistema hasta ese punto mientras que M_{HA} es una aproximación a la masa únicamente del agujero negro. En la evolución del pulso escalar (Figura 5.6) se puede apreciar que no todo el campo escalar colapsa, sino que una pequeña parte logra escapar y sigue evolucionando hacia afuera del agujero. Esta parte que escapó del agujero es la que hace la diferencia entre $M(r)$ y M_{HA} .

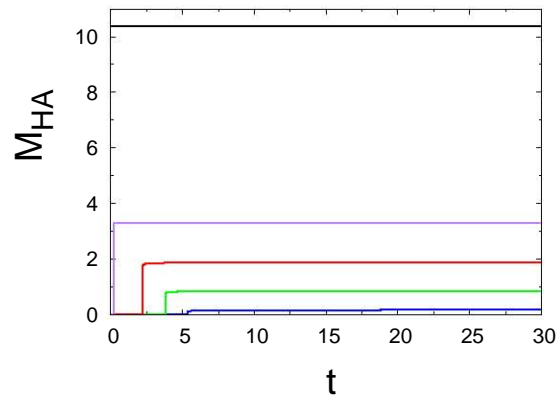


Figura 5.10: Gráfica de la evolución de la masa del horizonte aparente M_{HA} para diferentes valores de la amplitud del pulso escalar a^s : 0.16 en azul, 0.24 en verde, 0.30 en rojo, 0.34 en morado y 0.40 en negro.

Una vez que se definió la masa, se compararon los diferentes casos dependiendo de la amplitud del pulso escalar a^s , como se ve en la Figura 5.10. Observamos que dependiendo del valor de la amplitud, el tiempo en que se crea el agujero negro y la masa del mismo varían. Cuando $a^s = 0.34$ el agujero negro se forma en $t = 0.25$, mientras que para el caso de $a^s = 0.16$ el agujero negro se formó en $t = 5.34$. Si $a^s \geq 0.36$ el agujero negro aparece desde un principio, es decir, se forma como condición inicial. El tiempo de formación del agujero negro es importante porque al introducir un pulso de campo fantasma debemos de saber que

el agujero negro se formó antes de que el pulso fantasma llegue a él. Además, queremos que la gráfica muestre el colapso gravitacional de campo escalar, por lo que se eligió el valor de $a^s = 0.30$ como un valor adecuado para realizar las posteriores simulaciones.

Nótese que aún cuando el agujero negro se forme como condición inicial en este caso, sus orígenes son a partir de un pulso de campo escalar por lo que no se estaría resolviendo el mismo sistema que el que se presentará en la sección 5.2. También hay que destacar que en este caso todavía no se está agregando ningún componente de campo fantasma, es decir $a^g = 0$, por lo que los efectos que conlleva todavía no se observan sino hasta la siguiente sección.

5.1.2. Acreción de campo fantasma a un agujero negro formado por colapso

Una vez formado el agujero negro por colapso de campo escalar introducimos un pulso de campo fantasma. Lo que queremos es acretar el pulso de campo fantasma al agujero negro, por lo que el pulso fantasma debe colocarse inicialmente alejado del origen, donde se encuentra el pulso de campo escalar. Para determinar que tan lejos debe de estar el pulso se realizaron varias simulaciones cambiando el centro de la gaussiana r^g que forma el pulso fantasma. Se determinó que para un pulso escalar con las características descritas en la sección anterior, la distancia a la cual se debe de ubicar el pulso fantasma es $r^g \geq 5$. Es importante que el pulso no se encuentre muy alejado del origen porque, al tratarse de pulsos tridimensionales, mientras más grande es r^g mayor es la energía que representa, ya que el volumen de la esfera que forma el pulso es mayor.

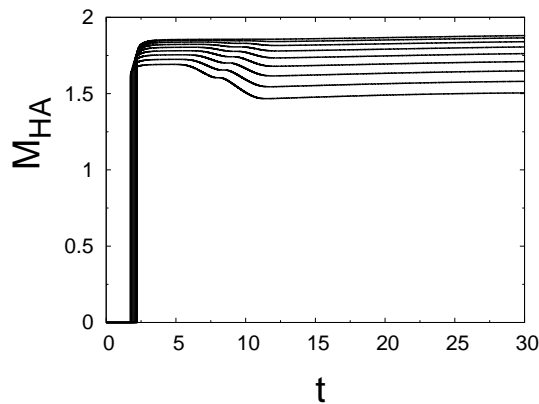


Figura 5.11: Gráfica de la evolución de la masa del horizonte aparente M_{HA} para valores de la amplitud del pulso fantasma desde $a^g = 0.005$ hasta $a^g = 0.045$ con diferencias entre valores de $a^g = 0.005$.

El centro de la gaussiana se mantuvo constante en $r^g = 5$, al igual que el ancho del pulso en $s^g = 1$, para todos los pulsos de campo fantasma. El parámetro que se utilizó como variable fue la amplitud del pulso a^g con una variación $\Delta a^g = 0.005$. Como se verá más adelante, es a esta escala que se pueden apreciar diferentes comportamientos del sistema. Se mantuvo el factor de Courant constante $\rho = 0.5$ únicamente hasta el caso en que $a^g = 0.05$ por razones que se mencionarán más adelante.

Para cada valor de a^g se obtuvo la gráfica de evolución de la masa del horizonte aparente M_{HA} . Para valores de a^g muy pequeños el cambio de la masa del horizonte ocasionado por el pulso de campo fantasma es casi imperceptible. En la Figura 5.11 el valor correspondiente a la masa producida por el colapso de campo escalar es el primer máximo local de M_{HA} . Posteriormente, la masa muestra un decremento debido a que el pulso fantasma entra en contacto con el agujero negro. Para valores de $a^g \leq 0.02$ el máximo se encuentra al final de la simulación, es decir, la masa pareciera incrementar en lugar de decrecer. Este comportamiento debe ser provocado por un error numérico como se mencionó anteriormente.

Cuando el valor de la amplitud del pulso de campo fantasma es $a^g = 0.05$ el lapso toma valores mayores a 1. Podría parecer que esto no tiene consecuencias en las demás variables, ya que no hay cambios significativos en las gráficas que se obtienen. Sin embargo, el comportamiento del lapso afecta a la velocidad coordenada de la luz, lo cual puede llevar a problemas con la estabilidad del método numérico. Para verlo consideramos una línea universo nula y encontramos que la velocidad de la luz a lo largo de la dirección x^i queda dada por $c = \alpha\sqrt{\gamma^{ii}}$, que en la formulación BSSN se traduce en:

$$c = \frac{\alpha}{\sqrt{A}\psi^2}. \quad (5.7)$$

Vemos entonces como la velocidad coordenada de la luz en el sistema es dependiente directamente del lapso α e inversamente de la raíz de la métrica radial A . Esto podría afectar a la simulación si tomamos en cuenta que se debe de cumplir la condición CFL (4.27), que depende directamente de la velocidad coordenada de la luz en el sistema, para que el sistema sea estable.

Cabe destacar que los cambios que pueden ocasionar el lapso o la métrica radial son en la velocidad *coordenada* de la luz, no en la velocidad *física* de la luz, que desde un principio al plantear las ecuaciones de Einstein se estableció en 1.

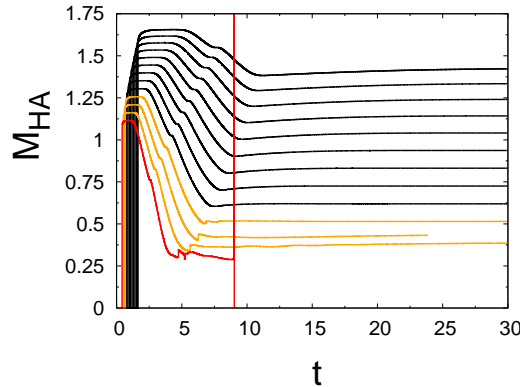


Figura 5.12: Gráfica de la evolución de la masa del horizonte aparente M_{HA} para diferentes valores de la amplitud del pulso escalar $a^s > 0.050$. En naranja se muestran los valores en el rango $0.095 \leq a^s \leq 0.105$. En rojo el valor de $a^g = 0.11$. El intervalo entre gráficas es de $a^g = 0.005$.

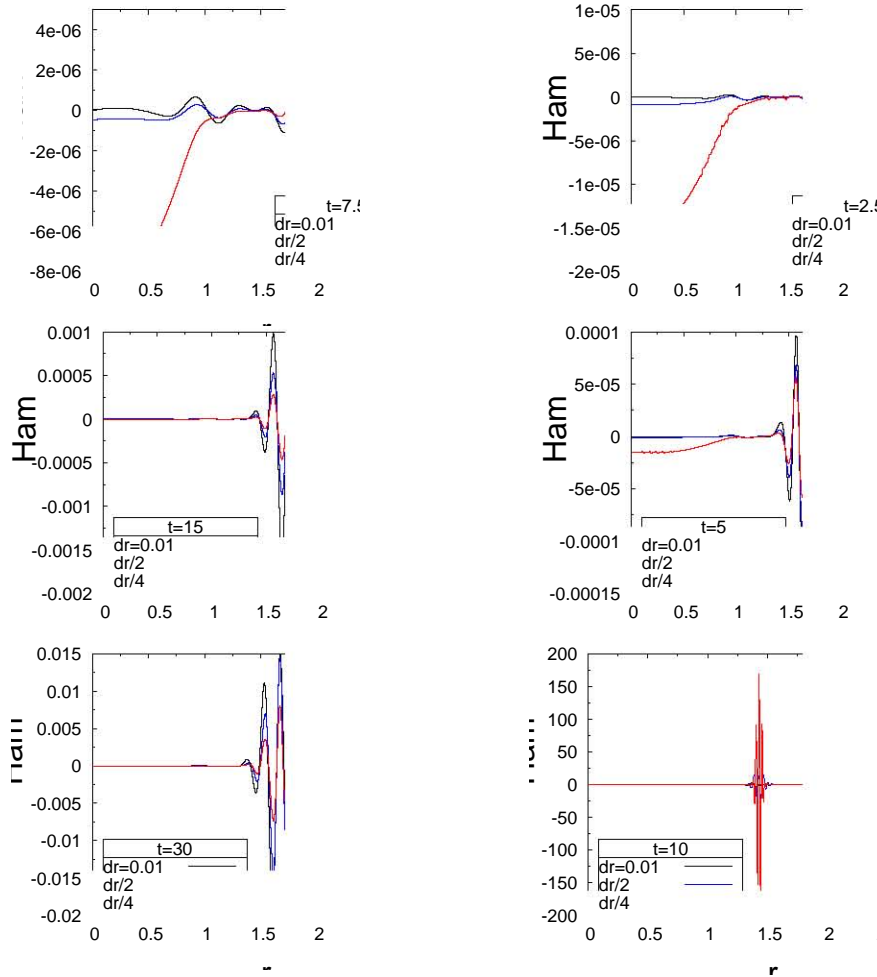


Figura 5.13: Convergencia de la constricción Hamiltoniana para $a^g = 0.045$ (izquierda) y $a^g = 0.095$ (derecha). Las gráficas ya están reescaladas con el factor de escala f .

Para solucionar el problema de la velocidad coordenada de la luz se agrega una variable que ajusta el paso de tiempo. El ajuste se da en términos del valor máximo de la velocidad de la luz en la malla y se realiza en cada paso de tiempo:

$$\Delta t = \frac{\rho \Delta r}{c_{max}}, \quad (5.8)$$

de tal forma que la condición CFL siempre se cumple.

Una vez que se realizó este ajuste encontramos que la masa del agujero negro, Figura 5.12, sigue decreciendo conforme se aumenta la amplitud del pulso fantasma a^g . Si observamos únicamente las gráficas de la masa M_{HA} podemos obtener simulaciones que parecieran estables hasta $a^g \leq 0.105$. Sin embargo, al observar el comportamiento de la constricción hamiltoniana a diferentes resoluciones, Figura 5.13, encontramos que no hay una convergencia con el factor f esperado para todos los tiempos. En particular, a $t = 0$ pareciera que la constricción hamiltoniana no converge en absoluto, sin embargo, si observamos la figura 5.14

vemos que el aparente problema en el origen está maximizado por el factor de reescalamiento ya que las soluciones cerca del origen se encuentran en el rango del error de redondeo.

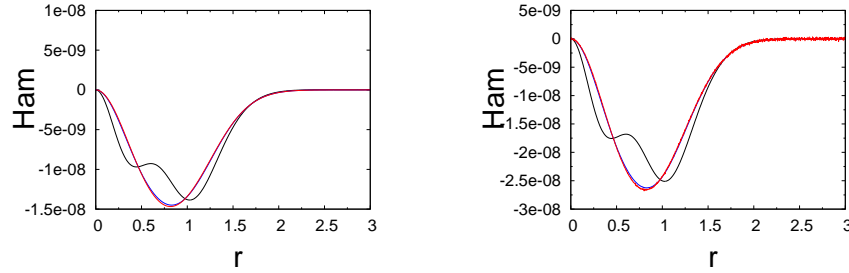


Figura 5.14: Convergencia de la constricción Hamiltoniana para los casos con $a^g = 0.045$ (izquierda) y $a^g = 0.095$ (derecha) a $t = 0$.

El problema se presenta a partir de valores de $a^g \geq 0.08$ y se encuentra bien localizado, no es global en la malla. El punto donde se encuentran mayores complicaciones es, como era de esperarse, el horizonte del agujero negro. El problema reside principalmente en que la derivada del lapso α en ese punto crece conforme crece la amplitud del pulso fantasma a^g , lo que conlleva a problemas en las ecuaciones de evolución debido a la aproximación numérica. Sin embargo, cabe mencionar que las soluciones son convergentes hasta cierto tiempo. En la Figura 5.13 se puede ver como para el valor de $a^g = 0.095$ las soluciones parecieran converger al tiempo $t = 5$ pero claramente no lo hacen al tiempo $t = 10$. Entre mayor es el valor de a^g menor es el tiempo de convergencia de la solución.

Observando las dos gráficas de las masas M_{HA} (Figuras 5.11 y 5.12) encontramos que el tiempo de formación del agujero negro es dependiente de la amplitud del pulso fantasma a^g , aún cuando el valor del pulso escalar a^s se quedó fijo. Así mismo el valor de la masa inicial M_{HA}^i y la masa final M_{HA}^f dependen también del valor de la amplitud del pulso fantasma. Para determinar M_{HA}^i se utilizó el máximo local de la gráfica hasta antes de que el pulso fantasma entrara en el horizonte del agujero negro. Para determinar M_{HA}^f se utilizó el valor de la gráfica al tiempo $t = 15$ ya que para ese momento el pulso de campo fantasma ya realizó su mayor contribución a la acreción de masa.

A partir de estos datos se realizó una gráfica (Figura 5.15) donde se muestra la relación M_{HA}^f/M_{HA}^i contra a^g , donde M_{HA}^f es la masa del horizonte aparente final y M_{HA}^i es la masa del horizonte aparente inicial. Esta figura nos muestra como el decremento de la masa no tiene una dependencia lineal con la amplitud del pulso fantasma. El porcentaje mínimo al que se pudo decrecer la masa del agujero negro inicial con resultados convergentes fue de 65 %, sin embargo se obtuvieron simulaciones estables que mostraron un decremento de hasta el 35 %

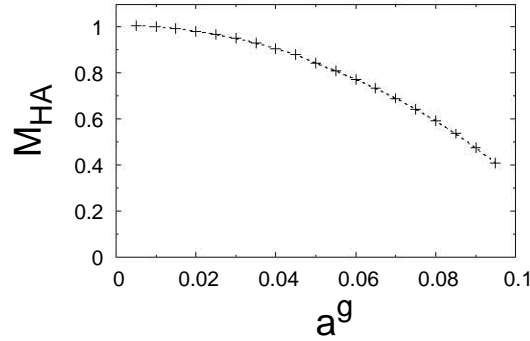


Figura 5.15: Relación entre la masa inicial y la final M_{HA}^f/M_{HA}^i con respecto a la amplitud del pulso de campo fantasma a^g .

Otro indicador de cambio en el sistema es la masa $M(r)$ a $t = 0$. Esto se puede ver en la Figura 5.16. Notamos que para los casos en que $a^g \geq 0.9$, hay partes donde $M(r) < 0$. Esto lo único que quiere decir es que inicialmente la masa medida desde muy lejos $M(r)$ tiene una contribución por parte del pulso de campo fantasma mayor que la que tiene el pulso escalar. Esto es de esperarse debido a las condiciones iniciales de ambos pulsos.

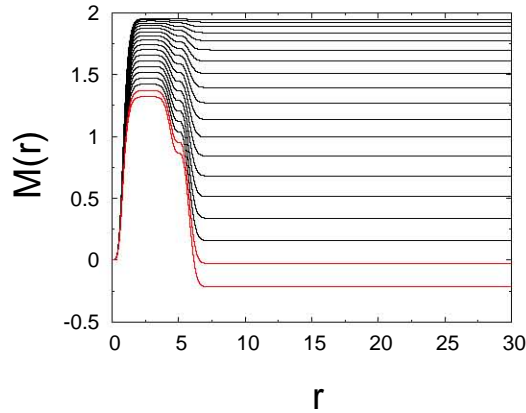


Figura 5.16: M_{ADM} a $t = 0$ para valores de a^g en el rango $(0.005, 0.095)$. En rojo se muestran los valores de a^g 0.09 y 0.095.

5.2. Agujero negro como condición inicial

Como ya se mencionó en la sección 4.3 también se realizaron simulaciones con un agujero negro como condición inicial. A diferencia del caso anterior, el único parámetro a cambiar fue el de la amplitud del pulso fantasma a^g , ya que el agujero negro está formado desde un principio. El cambio en a^g fue el mismo $\Delta a^g = 0.005$.

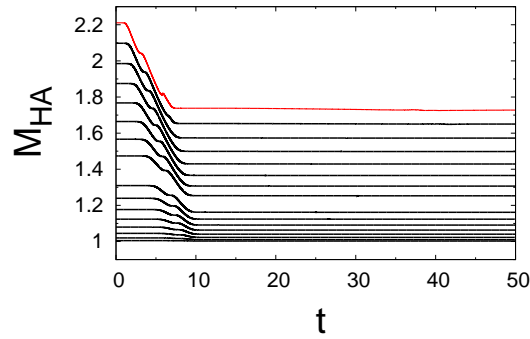


Figura 5.17: M_{HA} para valores de a^g en el rango $(0.005, 0.085)$. En rojo se encuentra el valor correspondiente a $a^g = 0.085$

Los cambios en M_{HA} al variar a^g se observan en la Figura 5.17. Las gráficas para todos los casos son similares pero en diferentes escalas. En todas decrece la masa inicial del agujero negro, que depende de la amplitud del pulso fantasma a^g , y después se estabiliza en un valor menor. En la transición hay un escalón correspondiente al momento en que el valor máximo de la derivada del pulso fantasma cruza el horizonte del agujero negro.

En comparación con el caso anterior, Figuras 5.11 y 5.12, observamos que nunca se tiene $M_{HA} < 1$. Además, a diferencia del caso anterior, la masa del agujero siempre decrece con el tiempo, no aumenta. Por otro lado, la masa inicial del agujero negro aumentó conforme se aumentó el valor de a^g , al igual que en el caso anterior.

En este caso los problemas de convergencia no se encontraron en el horizonte del agujero negro, sino en el origen. Este problema que se presenta en el origen es de esperarse debido a que el factor conforme ψ es singular ahí lo que conlleva a errores numéricos en la resolución. En la Figura 5.18 se muestra el problema que tuvieron todas las simulaciones, independientemente del valor de a^g . Además, para valores de $a^g > 0.080$ se presenta una perturbación en la constricción Hamiltoniana relacionada con el pulso fantasma como se muestra en la Figura 5.18.

Si omitimos el error de convergencia que se presenta en el origen, que no pareciera afectar en gran medida a las simulaciones, podemos realizar una gráfica como la presentada en la sección anterior de M_{HA}^f / M_{HA}^i contra a^g , que se muestra en la Figura 5.19. En la gráfica no se presentan los valores con $a^g \geq 0.85$ debido a que los problemas de convergencia en la constricción hamiltoniana hacen que estas simulaciones no resulten confiables. Como en este caso no se presentan las mismas dificultades que en la sección anterior, donde la masa varía mucho, la definición de M_{HA}^i y M_{HA}^f es clara, M_{HA}^i es el valor de la masa al tiempo inicial, y M_{HA}^f en el tiempo final.

A diferencia de la Figura 5.15, en la gráfica de la Figura 5.19 la curva formada no pareciera ser la misma incluso la convexidad pareciera ser distinta. Además, el porcentaje mínimo alcanzado fue mayor, 78% de la masa inicial. Las diferencias de masa para los mismos valores de a^g son evidentes, son menores para el caso en que el agujero negro es formado por colapso de campo escalar.

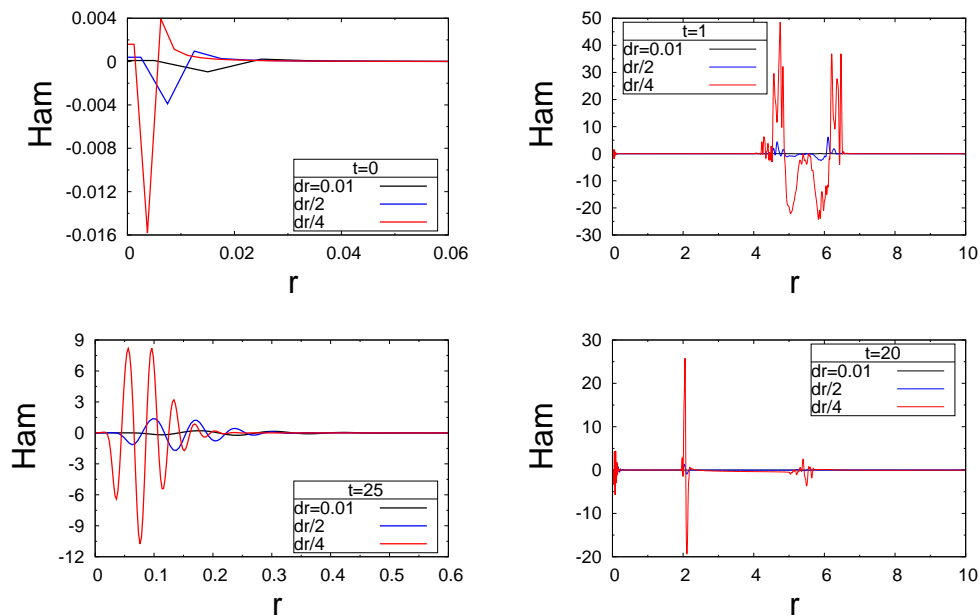


Figura 5.18: Convergencia de la constricción Hamiltoniana cerca del origen para una simulación con $a^g = 0.075$ (izquierda) y $a^g = 0.085$ (derecha). Los valores ya están reescalados con el factor de convergencia f .

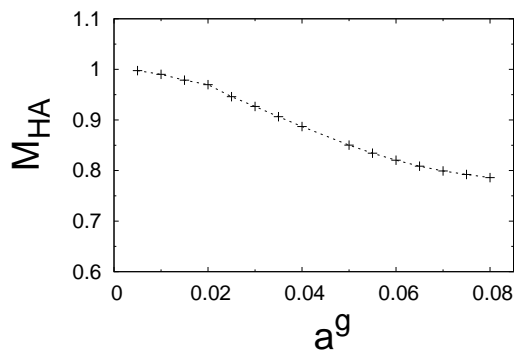


Figura 5.19: Relación entre la masa inicial y la final M_{HA}^f / M_{HA}^i con respecto a la amplitud del pulso de campo fantasma a^g .

Capítulo 6

Conclusiones

Se estudió el formalismo BSSN, en particular en su versión en simetría esférica, para comprender a fondo el código OllinSphere2 y poder estudiar de manera sistemática el problema de un agujero negro al que se acreta campo escalar fantasma. Se solucionó el problema de dos maneras que difirieron en la forma en que se generó el agujero negro. En la primera se formó el agujero negro a partir de un efecto conocido como colapso de campo escalar. La segunda manera fue imponiéndolo como parte de las condiciones iniciales del problema. En ambos casos la acreción de campo fantasma se realizó a partir de un pulso inicial gaussiano colocado de tal manera que, al evolucionar el sistema, el agujero negro tomaba paulatinamente contribuciones del pulso de campo escalar fantasma.

El indicador de cambio del sistema fue principalmente la masa del agujero negro que fue determinada de dos maneras, a partir del horizonte aparente y asumiendo que el espacio-tiempo se aproxima al de Schwarzschild para r grande. En las dos soluciones del problema la masa del agujero negro decreció conforme la amplitud del pulso inicial de campo escalar fantasma aumentaba. En el caso en el que el agujero negro se formó a partir del colapso de campo escalar, la masa medida a partir del horizonte aparente se logró reducir hasta un 35 % en comparación con la masa inicial. Sin embargo, las soluciones numéricas no convergen con el factor de escala esperado, por lo que dichas soluciones no son de fiar sino hasta que la masa del agujero negro se reduce hasta un 65 % de la masa inicial. Para el caso en que el agujero negro se impone como condición inicial los resultados son confiables hasta que la masa del agujero negro se reduce un 78 %. De esta manera, podemos ver que dependiendo de cómo se formule el problema se obtienen resultados similares pero no iguales.

Con las dos soluciones se realizó con éxito la finalidad de reducir la masa de un agujero negro, sin embargo, el objetivo de reducir la masa al 100 % permanece sin alcanzar en ambos casos. Una de las mayores dificultades que se tuvieron fue el aumento de la derivada del lapso cerca del agujero negro ya que es uno de los factores que aparece en muchas de las ecuaciones. Se logró reducir dicho problema al realizar un ajuste al paso del tiempo a partir del valor máximo de la velocidad coordenada de la luz de tal forma que siempre se cumpla con la condición CFL. Sin embargo, una posible solución sería el uso de otro tipo de foliación que permitiera adentrarse en el horizonte del agujero negro sin deformar tanto las hojas espaciales cerca de la singularidad.

Los problemas de convergencia que se tuvieron en los dos casos fueron distintos pero los dos estuvieron bien localizados. Para el caso del agujero negro formado por colapso el

problema se encontró en el horizonte del agujero negro, mientras que para el agujero negro como condición inicial el problema se encontró principalmente en el origen.

Como muchos de los trabajos en Relatividad Numérica existen muchas maneras de abordar este problema. Aquí se presentó una en la que se utiliza el formalismo 3+1 con las ecuaciones BSSN pero existen muchas variables que pueden ser cambiadas sin que el problema lo haga. Se puede hacer un cambio completo en el formalismo para llegar otras ecuaciones de evolución así como se pueden hacer cambios en las condiciones de norma y de frontera. Sin embargo, al ser todos estos cambios derivados de las ecuaciones de Einstein el resultado debiera ser el mismo.

Bibliografía

- [1] ALCUBIERRE, M. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 2008.
- [2] ALCUBIERRE, M., AND MENDEZ, M. Formulations of the 3+1 evolution equations in curvilinear coordinates. *General Relativity and Gravitation*, 1–38.
- [3] ARNOWITT, R., DESER, S., AND MISNER, C. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation* 40 (2008), 1997–2027.
- [4] BARDEEN, J. M., CARTER, B., AND HAWKING, S. W. The four laws of black hole mechanics. *Communications in Mathematical Physics* 31, 2 (1973), 161–170.
- [5] BAUMGARTE, T. W., AND SHAPIRO, S. L. Numerical integration of einstein’s field equations. *Phys. Rev. D* 59, 2 (Dec 1998), 024007.
- [6] BAUMGARTE, T. W., AND SHAPIRO, S. L. *Numerical Relativity. Solving Einstein’s Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010.
- [7] BROWN, J. D. Covariant formulations of baumgarte, shapiro, shibata, and nakamura and the standard gauge. *Phys. Rev. D* 79, 10 (May 2009), 104029.
- [8] CALDWELL, R. R. A phantom menace? cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state. *Physics Letters B* 545, 1-2 (2002), 23 – 29.
- [9] CARROLL, S. M., HOFFMAN, M., AND TRODDEN, M. Can the dark energy equation-of-state parameter w be less than -1 ?. *Phys. Rev. D* 68 (Jul 2003), 023509.
- [10] CHOPTUIK, M. W. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. *Phys. Rev. Lett.* 70, 1 (Jan 1993), 9.
- [11] EINSTEIN, A. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1915), 844–847.
- [12] GONZÁLEZ, J. A., AND GUZMÁN, F. S. Accretion of phantom scalar field into a black hole. *Phys. Rev. D* 79 (Jun 2009), 121501.
- [13] HABERMAN, R. *Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno*. Prentice Hall, 2003.

- [14] HAHN, S. G., AND LINDQUIST, R. W. The two-body problem in geometrodynamics. *Annals of Physics* 29, 2 (1964), 304 – 331.
- [15] HAWKING, S. W. The conservation of matter in general relativity. *Communications in Mathematical Physics* 18, 4 (1970), 301–306.
- [16] HAWKING, S. W. Black holes in general relativity. *Communications in Mathematical Physics* 25, 2 (1972), 152–166.
- [17] HAWKING, S. W., AND ELLIS, G. F. R. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1973.
- [18] KRUSKAL, M. D. Maximal extension of schwarzschild metric. *Phys. Rev.* 119, 5 (Sep 1960), 1743–1745.
- [19] LI, M., LI, X.-D., WANG, S., AND WANG, Y. Dark energy. *arXiv:1103.5870v1* (2011).
- [20] LICHNEROWICZ, A. L'intégration des équations de la gravitation relativiste et el problème des n corps. *J. Math. Pures et Appl.*, 23:37 (1944).
- [21] MISNER, C. W., THORNE, K. S., AND WHEELER, J. A. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973.
- [22] NAKAMURA, T., OOHARA, K., AND KOJIMA, Y. General Relativistic Collapse to Black Holes and Gravitational Waves from Black Holes. *Progress of Theoretical Physics Supplement* 90 (1987), 1–218.
- [23] PENROSE, R. *Revistas del Nuevo Cimento* 1 252 (1969).
- [24] POISSON, E. *A Relativist's Toolkit*. Cambridge University Press, 2004.
- [25] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., AND FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes: The Art Of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007.
- [26] REIMANN, B. Slice stretching effects for maximal slicing of a schwarzschild black hole. *Classical and Quantum Gravity* 22, 21 (2005), 4563.
- [27] SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*, 2 ed. Cambridge University Press, 2009.
- [28] SCHWARZSCHILD, K. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinchen theorie. *Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik, und Technik* (1916), 189–196.
- [29] SHIBATA, M., AND NAKAMURA, T. Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case. *Phys. Rev. D* 52, 10 (Nov 1995), 5428–5444.
- [30] SMARR, L., AND YORK, J. W. Kinematical conditions in the construction of spacetime. *Phys. Rev. D* 17, 10 (May 1978), 2529–2551.

-
- [31] SZEKERES, G. On the singularities of a riemannian manifold. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 7 (1960), 285–301.
- [32] WALD, R. M. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [33] YORK, J. W. Gravitational degrees of freedom and the initial-value problem. *Phys. Rev. Lett.* 26 (Jun 1971), 1656–1658.
- [34] YORK, J. W. Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation. *Phys. Rev. Lett.* 28 (Apr 1972), 1082–1085.
- [35] YORK, J. W. Kinematics and dynamics of general relativity. In *Sources of Gravitational Radiation: Proceeding of the Battelle Seattle Workshop, July 24-August 4, 1978* (1979), C. U. Press, Ed., pp. 83–126.
- [36] YORK, J. W. Conformal “thin-sandwich” data for the initial-value problem of general relativity. *Phys. Rev. Lett.* 82 (Feb 1999), 1350–1353.