UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS.

OPERADORES CERRADURA EN CATEGORÍAS

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A :

RAMIRO VÁZQUEZ VERA

DIRECTOR DE TESINA :
DR. JOSÉ RÍOS MONTES

México D.F.
Octubre de 2011

Índice general

Introducción **iii**

1. PRELIMINARES **1**
- 1.1. SUBOBJETOS 2
- 1.2. IMAGENES INVERSAS O FIBRACIONES. 2
- 1.3. APLICACIONES ADJUNTAS 3
- 1.4. $\mathcal{M}$-FACTORIZACIONES DERECHAS 6
- 1.5. EJEMPLOS 10

2. OPERADORES CERRADURA **13**
- 2.1. EJEMPLOS 14
- 2.2. PROPIEDADES DE CERRADURA 16

INTRODUCCIÓN

El concepto de *Operador Cerradura* en categorías generaliza, en muchos sentidos el concepto de cerradura topológica que se conoce en espacios topológicos, el cual es conocido como *Operador de Kuratowski*: dados un espacio topológico X y un subconjunto A de X, se denota

$$Cl_X(A) = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset, \text{ para cada vecindad abierta } U \text{ de } x\}$$

Desde la perspectiva de la Teoría de Categorías se puede interpretar a la cerradura topológica en la categoría de espacios topológicos (**Top**) como una clase de operadores

$$\{Cl_X : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)\}_{X \in \mathbf{Top}}$$

que cumplen las siguientes propiedades: sean X, Y espacios topológico, A, B subconjuntos de X, V un subconjunto de Y, y $f : X \to Y$ una función continua; entonces

1. (Extensión)$A \subseteq Cl_X(A)$.
2. (Monotonía) Si $A \subseteq B$, entonces $Cl_X(A) \subseteq Cl_X(B)$.
3. (Idempotencia) $Cl_X(Cl_X(A)) = Cl_X(A)$.
4. (Continuidad) $f(Cl_X(A))) \subseteq Cl_Y(f(A))$ o equivalentemente
$$Cl_X(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(Cl_Y(V)).$$

La generalización de Operador Cerradura en Categorías del cual se hablará en esta tesina, fue inroducido por D. Dikranjan y E. Giuli en [3]. Este operador se puede definir en Categorías con ciertas característcas. Los objetivos principales de esta tesina son, en primer lugar, dar las propiedades necesarias que una categoría debe tener, para definir en ella un operador cerradura como el de Kuratowski, y, en segundo lugar, dar ejemplos de operadores cerradura en distintas categorías.

Estudiando con detenimiento los aspectos categóricos del operador de Kuratowski se pueden deducir algunas de sus propiedades:

- El operador de Kuratowski se define en subconjuntos de Espacios topológicos. (**Por lo tanto las categorías deben tener subobjetos o, más precisamente, una clase fija de monomorfismos $\mathcal{M}$ que funcionan como los subobjetos de la categoría. De hecho será preferible que todos los isomorfismos sean parte de esta clase de monomorfismos**.)
- En el operador de Kuratowski se da la monotonía entre subobjetos; es decir existe un *orden parcial* entre subespacios que se preserva bajo el operador: la contención. (**Las categorías deben contar con un orden parcial adecuado entre los subobjetos de la categoría**.)
- El operador de Kuratowski tiene una relación importante con la continuidad. (**Para establecer esta relación de continuidad en categorías es necesario hablar de imágenes inversas o *fibraciones*[1] de subobjetos, y de imágenes directas**).
- Un subespacio de un subespacio de un espacio topológico X es un subespacio de X. (**La clase de monomorfismos debe ser cerrada bajo composición**).

En el primer capítulo se hablará de una condición menos evidente que se le debe pedir a una categoría para que se pueda definir un operador cerradura en ella: la categoría debe ser *finitamente $\mathcal{M}$-completa*. Esta condición nos garantiza la existencia del análogo a imágenes directas en la categoría de espacios topológicos.

Si se dan las condiciones que se acaban de mencionar en una categoría, entonces ésta es suceptible de poder definir algún operador cerradura en ella, el cual deberá cumplir las condiciones de extensión, monotonía y continuidad (no se pedirá que cumpla la idempotencia).

En el primer capítulo de la Tesina se explicarán con un poco más detalle todas las condiciones necesarias para que en una categoría se pueda definir un operador cerradura. En el segundo capítulo se dará la definición de operador cerradura y ejemplos en las categorías **Grp**, **Ab**, y **Mod**-R. Además se mencionan algunos aspectos generales de la teoría de operadores de cerradura usando ejemplos de operadores cerradura en la categoría **Top**.

[1] A veces llamados *productos fibrados* o *pullbacks*

Capítulo 1

PRELIMINARES

Este capítulo de preliminares está dedicado a dar las condiciones que se le deben pedir a una categoría, para que se pueda definir un operador de cerradura en ella, siguiendo el modelo del operador de Kuratowski. Se supondrá que el lector tiene conocimientos básicos de la teoría de categorías.

Se comenzará entonces describiendo el Operador de Kuratowski que se define en la categoría de espacios topológicos **Top**.

Dado un espacio topológico X, y un subconjunto A de X se define

$$Cl_X(A) = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \text{ para cada vecindad abiera } U \text{ de } x\}.$$

Al conjunto anterior se le conoce como la cerradura del subconjunto A en X. Entonces $Cl_X(\_) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un operador en el conjunto potencia de X que cumple las siguientes propiedades: sean X, Y espacios topológicos, A, B subconjuntos de X y $f : X \to Y$ una función continua (un morfismo de **Top**), entonces

(a) (*extensión*) $A \subseteq Cl_X(A)$,

(b) (*monotonía*) $Cl_X(A) \subseteq Cl_X(B)$,

(c) (idempotencia)$Cl_X(Cl_X(A)) = Cl_X(A)$,

(d) (continuidad) $f(Cl_X(A)) \subseteq Cl_Y(f(A))$.

Este operador se define en cada objeto de **Top**, y se dirá que el *operador cerradura de Kuratowski* en **Top** es la clase

$$\{Cl_X(\_)\}_{X \in \mathbf{Top}}.$$

1.1. SUBOBJETOS

Para hacer una generalización del operador de Kuratowski en categorías, lo primero que se tiene que pedir es la existencia de subobjetos que hagan el papel de subconjuntos de un conjunto. Es decir, dada una categoría $\mathcal{X}$, se pedirá que tenga una clase fija de monomorfismos $\mathcal{M}$, cuyos elementos serán los subobjetos de la categoría. A la clase de monomorfismos con codominio $X \in \mathcal{X}$ se les denotará por $\mathcal{M}/X$ (Está subclase hará el papel de el conjunto potencia en el operador de Kuratowski).

Ahora, si se observa la condición de monotonía, dos subconjuntos de un espacio topológico son comparados mediante la contención. Entonces en una categoría $\mathcal{X}$ con una clase fija de monomorfismos $\mathcal{M}$, se debe definir un forma de comparar subobjetos en $\mathcal{M}/X$, para cada objeto X de la categoría. Esto se puede hacer como se explica a continuación. Dados $m : M \to X$ y $n : N \to X$ elementos de $\mathcal{M}/X$, se dice que $m \leq n$ si y sólo si existe un morfismo de la categoría $j : M \to N$ que hace conmutativo el digrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "m"'] & & N \arrow[dl, "n"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Se puede observar que la relación anterior, hace que $\mathcal{M}/X$ sea una clase preordenada; es decir, la relación $\leq$ es reflexiva y transitiva. Se dice que m y n son isomorfos si $m \leq n$ y $n \leq m$. Esta condición se denota como $m \cong n$.

Además de las características antes mencionadas de la subclase de monomorfismos, se pide que

- La clase $\mathcal{M}$ es cerrada bajo composiciones con isomorfismos (Si en el digarama (1.1) j es un isomorfismo de la categoría y $n \in \mathcal{M}$, entonces $m \in \mathcal{M}$).

- todos los morfismos identidad están contenidos en $\mathcal{M}$.

1.2. IMAGENES INVERSAS O FIBRACIONES.

Toca ahora analizar cómo se puede llevar la condición de continuidad a una categoría. Para ello es necesario hablar de imágenes directas e inversas de subobjetos. En esta sección se hablará de las imágenes inversas de subobjetos.

Sea $f : X \to Y$ un morfismo de la categoría y $n : N \to Y$ tal que $n \in \mathcal{M}/Y$. Se dice que n tiene *imagen inversa en* $\mathcal{M}$, o tiene una $\mathcal{M}$ *-fibración*, si existen $m : M \to X$ en $\mathcal{M}/X$ y un morfismo $f' : M \to N$ que hacen conmutativo el digrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "m"'] & N \arrow[d, "n"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

es decir $f \circ m = n \circ f'$. Además este par de morfismos deben cumplir con la condición siguiente: si $g \in \mathcal{M}/X$ y h es un morfismo de X tales que $f \circ g = n \circ h$, entonces existe un único morfismo $t \in \mathcal{X}$ tal que

- $m \circ t = g$ y
- $f' \circ t = h$.

A la condición anterior se le conoce como *la propiedad universal de la fibración.* A $m \in \mathcal{M}/X$ del diagrama (1.2) se le denotará por $f^{-1}(m)$ y será la imagen inversa de m bajo f. Con la definición de la relación $\leq$ y de la imágen inversa se pueden hacer las observaciones siguientes:

- La imagen inversa de un subobjeto es único salvo isomorfismo.
- De la propiedad universal de la fibración, se sigue que $f(\_)$ preserva orden; es decir, si $n, n' \in \mathcal{M}/Y$ y $n \leq n'$, entonces $f^{-1}(n) \leq f^{-1}(n')$.

1.3. APLICACIONES ADJUNTAS

En esta sección se construirán y caracterizarán las imágenes directas de subobjetos con respecto a morfismos de la categoría. Será necesario hablar de aplicacionees adjuntas entre clases preordenadas. Dadas dos clasesa preordenadas (P, $\leq$) y (Q, $\leq$), diremos que dos aplicaciones $\varphi : P \to Q$ y $\psi : Q \to P$ son *aplicaciones adjuntas*, o *un par adjunto*, si se cumple la siguiente condición:

$$m \leq \psi(n) \iff \varphi(m) \leq n. \tag{1.3}$$

En estas condiciones se dice que φ es adjunta izquierda de ψ, o que ψ es adjunta derecha de φ y está condición se denota por $\varphi \dashv \psi$. En una clase preordenada $(P, \leq)$ se puede definir la siguiente relación de equivalencia: $x \cong y \iff x \leq y$ y $y \leq x$.

El siguiente teorema nos dice que las aplicaciones adjuntas determinan una a la otra salvo por la relación de equivalencia dada por ($x \cong y \iff x \leq y$ y $y \leq x$)

***Teorema* 1.1** *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier par de aplicaciones $\varphi : P \to Q$ y $Q : Q \to P$ entre clases preordenadas:*

(a) $\varphi \dashv \psi$

(b) *φ y ψ preservan orden, $\varphi(m) \cong$ mínQ_m donde $Q_m = \{n \in Q : m \leq \psi(n)\}$ para cada $m \in P$ y $\psi(n) \cong$ máxP_m donde $P_m = \{m \in P : \varphi(m) \leq n\}$ para cada $n \in Q$.*

(c) *φ y ψ preservan orden y $m \leq \psi(\varphi(m))$ y $\varphi(\psi(n)) \leq n$ para cada $m \in P$ y cada $n \in Q$.*

Demostración: $(a) \Longrightarrow (b)$. Defínase $n = \varphi(m)$. Como $\varphi(m) = \varphi(m)$, en particular $\varphi(m) \leq \varphi(m)$. Entonces, por (1.3), se sigue que $m \leq \psi(\varphi(m))$. De esta desigualdad se observa que $\varphi(m) \in Q_m$. Y si $n \in Q_m$, entonces $m \leq \psi(n)$. Nuevamente por (1.3) se sigue que $\varphi(m) \leq n$. Por lo tanto $\varphi(m) \cong \text{mín}Q_m$. Con esta caracterización de φ, es claro concluir que preserva el orden.

De forma dual se prueba que ψ preserva orden y $\psi(n) \cong \text{máx}P_n$.

$(b) \Longrightarrow (c)$. Para esta implicación, solamente basta observar que que $\varphi(m) \in Q_m$ y $\psi(n) \in P_n$.

$(c) \Longrightarrow (a)$. Si se supone que $m \leq \psi(n)$, entonces como φ preserva orden y dada la hipótesis, se sigue que

$$\varphi(m) \leq \varphi(\psi(n)) \leq n.$$

Ahora, si se supone que $\varphi(m) \leq n$, entonces como ψ preserva orden y por hipótesis, se sigue que

$$m \leq \psi(\varphi(m)) \leq \psi(n).$$

Por lo tanto $\varphi \dashv \psi$. ♦

Los pares adjuntos tienen la propiedad de que preservan supremos e ínfimos, como se explica en la siguiente proposición.

***Proposición* 1.2** *Si $\varphi \dashv \psi$, entonces φ y ψ preservan supremos e ínfimos cuando estos existen. Aún más, $\varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi$ y $\psi \circ \varphi \circ \psi = \psi$, así φ y ψ hacen una correspondencia biyectiva entre $\psi(Q)$ y $\varphi(P)$.*

Demostración: Sea $\{m_i\}_{i\in I}$ una subclase de $\mathcal{M}$ que tiene un supremo, al que se le denotará por m. Como $m_i \leq m$ para cada $i \in I$ (por se m supremo), y φ preserva el orden, por el teorema anterior, entonces $\varphi(m)$ es una cota superior de $\{\varphi(m_i)\}_{i\in I}$. Ahora, si n es cualquier otra cota superior de $\{\varphi(m_i)\}_{i\in I}$, entonces para cada $i \in I$ se tiene que $\varphi(m_i) \leq n$; entonces por (1.3) se sigue que para cada $i \in I$ $m_i \leq \psi(n)$; es decir, $\psi(n)$ es una cota superior de $\{m_i\}_{i\in I}$. Por lo tanto $m \leq \psi(n)$. Y, por último, se aplica nuevamente (1.3) para concluir que $\varphi(m)$ es supremo de $\{\varphi(m_i)\}_{i\in I}$. Por lo tanto φ preserva supremos, y la prueba de que ψ preserva ínfimos es dual a la que se acaba de hacer.

Por otro lado, por la primera desigualdad del teorema (1.1) y el hecho de que φ preserva orden, se sigue que para cada $m \in P$,

$$\varphi(m) \leq \varphi(\psi(\varphi(m))).$$

Además, de la segunda desigualdad del teorema (1.1) aplicada al $n = \varphi(m)$, nos da

$$\varphi(\psi(\varphi(m))) \leq \varphi(m).$$

Por lo tanto $\varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi$.

De forma dual al la anterior, se prueba que $\psi \circ \varphi \circ \psi = \psi$. ♦

El siguiente teorema nos da el recíproco de la proposición anterior.

***Teorema* 1.3** *(a) Sea Q una clase preordenada tal que cualquier subclase I de Q tiene ínfimo, entonces una aplicación $\psi : Q \to P$ entre clases preordenadas tiene adjunta izquierda si y sólo si ψ preserva ínfimos.*

(b) Sea P una clase preordenada tal que cualquier subclase I de Q tiene spremo, entonces una aplicación $\varphi : P \to Q$ entre clases preordenadas tiene adjunta derecha si y sólo si φ preserva supremos.

Demostración: Es suficiente probar (a), ya que (b) se sigue de dualizar la prueba de (a). Obsérvese que, por la proposición anterior, basta probar que si ψ preserva todos los ínfimos, entonces ψ tiene una adjunta izquierda φ. Defínase

$$\varphi(m) \cong \text{ínf}\{n \in Q : m \leq \psi(n)\}.$$

Entonces, como ψ preserva ínfimos, se sigue que

$$\psi(\varphi(m)) \cong \text{ínf}\{\psi(n) : m \leq \psi(n)\} \geq m.$$

Obsérvese que la desigualdad anterior implica que $\varphi(m) \in \{n \in Q : m \leq \psi(n)\} = Q_m$ y por lo tanto, $\varphi(m) \cong \text{mín} Q_m$. Además φ y ψ preservan orden. Por lo tanto por el teorema (1.1), $\varphi \dashv \psi$. ♦

Las categorías que se considerarán a partir de este momento son categorías $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ con $\mathcal{M}$ una clase de monomorfismos que es cerrada bajo composición con isomorfismos; que tienen $\mathcal{M}$- fibraciones (y por tanto imágenes inversas), como se dijo en las secciones anteriores, y se les pide además que para cada morfismo de la categoría $f : X \to Y$, la aplicación $f^{-1}(\_) : \mathcal{M}/Y \to \mathcal{M}/X$ tenga una aplicación adjunta izquierda

$$f(\_) : \mathcal{M}/X \to \mathcal{M}/Y.$$

Está adjunta izquierda, nos dará la noción de imágen directa de subobjetos, la cual es muy natural cuando se habla de imágenes directas de subespacios topológicos.

1.4. $\mathcal{M}$-FACTORIZACIONES DERECHAS

En el el teorema (1.1) se hace evidente que las imágenes directas están dadas de manera explícita por la las imágenes inversas. Existe otra manera de construir y caracterizar las imágenes directas sin utilizar las imágenes inversas o $\mathcal{M}$-fibraciones. Esta forma es a través de las $\mathcal{M}$-factorizaciones derechas. Esta herramienta es muy usada en la teoría de operadores cerradura, y está motivada por la siguiente proposición.

***Proposición* 1.4** *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ una categoría con $\mathcal{M}$-fibraciones, y para cada $f : X \to Y$ en $\mathcal{X}$ sea $f(\_)$ una adjunta izquierda para $f^{-1}(\_)$. Entonces existen morfismos e y m en $\mathcal{X}$ tales que*

(a) $f = m \circ e$ con $m : M \to Y$ en $\mathcal{M}$ y

(b) cada vez que se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e"'] & N \arrow[dd, "n"] \\ M \arrow[d, "m"'] & \\ Y \arrow[r, "v"'] & Z \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

en $\mathcal{X}$ con $n \in \mathcal{M}$, entonces existe un único morfismo $w : M \to N$ con $n \circ w = v \circ m$ y $w \circ e = u$.

Demostración: (a) Sea $f : X \to Y$ un morfismo de la categoría y considérese el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "1_X"'] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

Defínase $m \cong f(1_X)$ (la imágen de 1_X bajo la adjunta izquierda de $f^{-1}(\_)$). Obsérvese que, en particular $f(1_X) \leq m$; entonces, por adjunción, se sigue que $1_X \leq f^{-1}(m)$. Con estas observaciones el diagrama 1.5, se completa como sigue

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "1_X"'] & f^{-1}(M) \arrow[r] \arrow[dl, "f^{-1}(m)"] & M \arrow[d, "m"] \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

Del diagrama anterior se observa que las dos flechas superiores nos dan el morfismo e, así $f = m \circ e$.

(b) Considérese ahora el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e"] \arrow[dd, bend right, "f"'] & N \arrow[dd, "n"] \\ M \arrow[d, "m"'] & \\ Y \arrow[r, "v"'] & Z \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

donde $f = m \circ e$ y $n \in \mathcal{M}$. Como $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ tiene $\mathcal{M}$-fibraciones, entonces se puede completar al diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dd, bend right, "f"'] \arrow[dr, "t"] & & N \arrow[dd, "n"] \\ M \arrow[d, "m"'] & v^{-1}(N) \arrow[ur] \arrow[dl, "v^{-1}(n)"] & \\ Y \arrow[rr, "v"'] & & Z \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

Del diagrama anterior se extrae el siguiente:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "s"'] \arrow[dd, "1_X"'] & & v^{-1}(N) \arrow[dd, "v^{-1}(n)"] \\
& f^{-1}(v^{-1}(N)) \arrow[ur] \arrow[dl, "f^{-1}(v^{-1}(n))"] & \\
X \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd} \tag{1.9}$$

y por la misma propiedad universal de la fibración, se tiene que

$$s : X \to f^{-1}(v^{-1}(n))$$

y por adjunción

$$m \cong f(1_X) \leq v^{-1}(n).$$

Como m es un factor de f, entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d] & v^{-1}(N) \arrow[r] \arrow[dl, "v^{-1}(n)"] & N \arrow[d, "n"] \\
X \arrow[rr, "v"'] & & Y
\end{tikzcd} \tag{1.10}$$

Por lo tanto, el morfismo w que queremos encontrar es el dado por las dos flechas superiores del diagrama anterior. ♦

No es difícil darse cuenta que, bajo las condiciones (a) y (b), los morfismos e y m son únicos salvo isomorfismos. A una factorización $f = m \circ e$ que cumpla las dos propiedades de la proposición anterior se le llama una *$\mathcal{M}$-factorización derecha de f*, y a la propiedad (b) se le conoce como *propiedad de diagonalización de la factorización.*

Ahora considérese una categoría $\mathcal{X}$, para la cual cada morfismo tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha. Sea $f : X \to Y$ un morfismo de la categoría y $m \in \mathcal{M}$. Entonces se puede definir la imagen directa de $f(m)$ como la $\mathcal{M}$-parte de la $\mathcal{M}$ factorización derecha del morfismo $f \circ m$. Lo anterior se expresa en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & f(M) \arrow[d, "f(m)"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd} \tag{1.11}$$

Obsérvese que la propiedad (b) de la proposición anterior implica que la aplicación

$$f(\_) : \mathcal{M}/X \to \mathcal{M}/Y$$

preserva el orden. Además, se puede hacer la siguiente observación:

OBSERVACIÓN: en el caso de que $\mathcal{X}$ tenga $\mathcal{M}$-fibraciones, entonces $f(\_)$ es adjunta izquierda de $f^{-1}(\_)$.

***Teorema* 1.5** *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathcal{X}$ tiene $\mathcal{M}$-fibraciones, y cada morfismo tiene $\mathcal{M}$-factorizaciones derechas.

(b) $\mathcal{X}$ tiene $\mathcal{M}$-fibraciones, y para cada morfismo f de la categoría $f^{-1}(\_)$ tiene una adjunta izquierda.

(c) Cada morfismo f de la categoría tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha y $f(\_)$ tiene una adjunta derecha.

Demostración: $(a) \implies (b)$. Para esta implicación hay que probar que $f(\_)$, como se definió en el diagrama (1.11), es una adjunta izquierda de $f^{-1}(\_)$. Para esto se usará (c) del teorema 1.1. Que $m \leq f^{-1}(f(m))$ se sigue fácilmente de la propiedad universal de la fibración. Y que $f(f^{-1}(n)) \leq n$, se sigue de la propiedad de diagonalización. Además f y f^{-1} preservan orden.

$(a) \implies (c)$. Es la observación anterior a este teorema.

$(b) \implies (a)$. Se sigue directamente de la proposición (1.4).

$(c) \implies (a)$. Sea $f : X \to Y$ un morfismo de la categoría y sea $f^{-1}(\_)$ la adjunta derecha de $f(\_)$. Entonces para $f^{-1}(n)$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(N) \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}(n)"'] & f(f^{-1}(N)) \arrow[d, "f(f^{-1}n)"] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \tag{1.12}$$

Y por la segunda desigualdad del inciso (c) del teorema 1.1 se puede completar el diagrama anterior como sigue

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(N) \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}(n)"'] & f(f^{-1}(N)) \arrow[r] \arrow[dr, "f(f^{-1}(n))"] & N \arrow[d, "n"] \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd} \tag{1.13}$$

Ahora se verá que la composición de los dos morfismos f' del renglón superior y $f^{-1}(n)$ forman el diagrama de una fibración. Sean $g : Z \to X$ y $h : Z \to N$ tales que $f \circ g = n \circ h$. Por las $\mathcal{M}$-factorizaciones derechas $g = k \circ e$ con $k : K \to X$ en $\mathcal{M}$ y se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"'] & N \arrow[dd, "n"] \\
K \arrow[ur, "w"] \arrow[d, "k"'] & \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd} \tag{1.14}$$

Aplicando $f(\_)$ al monomorfismo k, el diagrama anterior se completa a

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"'] & N \arrow[dd, bend left, "n"] \\
K \arrow[ur, "w"] \arrow[r] \arrow[d, "k"'] & f(K) \arrow[u] \arrow[d, "f(k)"'] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd} \tag{1.15}$$

De este diagrama se observa que $f(k) \leq n$. Como $f(\_)$ y $f^{-1}(\_)$ son adjuntas se sigue $k \leq f^{-1}(n)$. Por lo tanto existe $j : K \to f^{-1}(N)$ con $f^{-1}(n) \circ j = k$. Ahora se define $t = j \circ e : Z \to f^{-1}(N)$. De lo anterior se sigue que $f^{-1}(n) \circ t = k \circ e = g$. Como n y $f^{-1}(n)$ son monomorfismos, entonces t está determinado de manera única y satisface $f' \circ t = h$. Esto termina la prueba de la existencia de $\mathcal{M}$-fibraciones. ♦

Las categorías que cumplen con alguna de las condiciones del teorema anterior, se llaman *finitamente $\mathcal{M}$-completas*

1.5. EJEMPLOS

(1) Cualquier categoría es finitamente $\mathcal{M}$-completa si $\mathcal{M}$ es la clase de los isomorfismos.

(2) Las categorías **Top** con la clase $\mathcal{M}$ de todos los encajes es finitamente $\mathcal{M}$-completa. Lo mismo sucede con la categoría **Set** con la clase $\mathcal{M}$ de todas las funciones inyectivas.

(3) Este ejemplo nos muestra $\mathcal{M}$-factorizaciones derechas que no están dadas por la imágen conjuntista: considérese en la categoría **Top**, la clase $\mathcal{M}$ de todos los encajes cerrados. Entonces **Top** es finitamente $\mathcal{M}$-completa, y la $\mathcal{M}$-factorizaciones derecha de un morfismo $f : X \to Y$ están dadas por la cerradura de $f(X) \subseteq Y$.

(4) En este ejemplo se verá que la existencia de $\mathcal{M}$-fibraciones no implica la existencia de $\mathcal{M}$-factorizaciones derechas. Defína a $\mathcal{M}$ como la clase de los encajes abiertos en **Top**. Es claro que los $\mathcal{M}$-pullbacks existen. Sin embargo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ no tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha. Si tuviera una $\mathcal{M}$-factorización derecha $f = m \circ e$, entonces como m es un encaje y es único salvo isomorfismo, se puede suponer que m es la inclusión del intervalo $[0, \infty)$ en $\mathbb{R}$; sin embargo, este encaje no es abierto.

(5) En este último ejemplo se ve que la existencia de $\mathcal{M}$-factorizaciones derechas no implica la existencia de $\mathcal{M}$-fibraciones. Considérese la categoría **CTop** de espacios topológicos conexos, con la clase $\mathcal{M}$ de los encajes. Es fácil notar que tiene $\mathcal{M}$-factorizaciones derechas, sin embargo, no siempre existen $\mathcal{M}$-fibraciones. Considérese nuevamente la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Esta función no tiene $\mathcal{M}$-fibraciones para los monormorfismos $i : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $0 < a < b$.

Capítulo 2

OPERADORES CERRADURA

Ahora se está en condiciones de decir cuál es la estructura apropiada de subobjetos en una categoría $\mathcal{X}$ para definir un operador cerradura en ella:

(a) $\mathcal{X}$ tiene una clase fija de monomorfismos $\mathcal{M}$ la cual tiene a todos los morfismos identidad y es cerrada bajo composición con isomorfismos.

(b) $\mathcal{X}$ tiene $\mathcal{M}$-fibraciones.

(c) $\mathcal{X}$ es finitamente $\mathcal{M}$-completa.

En [5, secciones 1.8 - 1.11], se prueba que la condición (b) se puede obviar siempre y cuando la clase $\mathcal{M}$ sea cerrada bajo composición.

Desde ahora, todas las categorías que se considerarán en este capítulo cumplen las tres condiciones que seacaban de mencionar. A estas categorías se les denotará por $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$. Ahora se verá la definición de operador cerradura en categorías.

Definición 2.1 *Un operador cerradura en una categoría $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ es una clase de aplicaciones $C = \{c_X\}_{X\in\mathcal{X}}$ tales que para cada $X \in \mathcal{X}$ se tiene que $c_X : \mathcal{X}/X \to \mathcal{X}/X$ se cumplen las propiedades siguientes:*

(a) (Extensión) para cada $m \in \mathcal{X}/X$ se tiene que $m \leq c_X(m)$,

(b) (Monotonía) si $m, n \in \mathcal{X}/X$ con $m \leq n$, entonces $c_X(m) \leq c_X(n)$

(c) (Continuidad) para cada morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{X}$, $f(c_X(m)) \leq c_Y(f(n))$.

Este tipo de operadores son muy frecuentes en muchas categorías además de **Top**. Ahora se verán ejemplos en las categorías **Grp**, **Ab** y **Mod-R**.

2.1. EJEMPLOS

Los ejemplos que se verán a continuación están en la categoría **Grp** con la clase fija $\mathcal{M}$ de todos los monomorfismos. Aquí X denotará un Grupo con una operación " $\cdot$ " y M denotará un subgrupo de X. Cada operador cerradura se describe con el subgrupo de X que se asocia a M.

(a) *La cerradura normal:* considérese la intersección de todos los subgrupos normales de X que contienen a M.

(b) La intersección de todos los subgrupos normales de X que contienen a M tales que X/M es abeliano. Este operador se puede expresar como $M \cdot X'$, donde X' es el subgrupo de generado por los conmutadores de X.

(c) *La cerradura normal libre de torsión:* La intersección de todos los subgrupos normales K de X, tales que contienen a M y X/K es libre de torsión.

(d) Para cualquier subcategoría $\mathcal{A}$, cerrada bajo subobjetos, se define la $\mathcal{A}$-cerradura normal de M, como la intersección de todos los subgrupos normales K de X tales que $X/K \in \mathcal{A}$.

(e) Se dice que un subgrupo K de X es *perfecto*, si coincide con el subgrupo generado por sus conmutadores. Entonces se define la cerradura de M como el subgrupo generado por M y todos los subgrupos perfectos de X.

(f) Se define la cerradura de M como el subgrupo generado por M y por todos los subgrupos simples de X.

(g) Se dice que un subgrupo K de X es *aislado* si para cada $x \in X$, $x^n \in K$ implica que $x \in K$. Entonces se define la cerradura de M como la intersección de todos los subgrupos aislados de X que contienen a M.

Los siguientes ejemplos de operadores cerradura se dan en la categoría de grupos abelianos **Ab**, con la calse fija de todos los monomorfismos $\mathcal{M}$. Sea M un subgrupo de un grupo abeliano X.

(a) El operedor cerradura definido por $c_X(M) = M + t(X)$, donde $t(X)$ es el subgrupo de torsión de X.

(b) El operador cerradura definido por $c_X(M) = M + d(X)$, donde $d(X)$ es el subgrupo divisible de X.

(c) Como en la categoría **Grp**, se define en grupos abelianos la $\mathcal{A}$-cerradura, para cualquier subcategoría $\mathcal{A}$ de **Ab**, cerrada bajo subobjetos.

(d) Para cualquier subcategoría epireflectiva $\mathcal{A}$ de **Ab** se define $c_X(M) = M + Nuc(r_X)$, donde $r_X : X \to X$ es la $\mathcal{A}$-reflección de X.

(e) El operador que a M le asocia la intersección de todos los subgrupos K que contienen a M y tales que X/K es libre de torsión.

Para definir el siguiente ejemplo de operador cerradura se utilizará la categoría R-módulos derechos **Mod**-R, con la clase fija $\mathcal{M}$ de todos los monomorfismos.

Un *prerradical* r en la categoría **Mod**-R es un subfuntor del funtor identidad; es decir, para cada $M \in$ **Mod** $- R$ se tiene que

(a) $r(M) \leq M$, y

(b) para cada homomorfismo de R-módulos derechos $f : M \to N$,
$r(f) : r(M) \to r(N)$ es el morfismo f restringido a $r(M)$.

En [7] se puede consultar más a fondo la teoría de prerradicales en categorías de Módulos.

Los operadores cerradura que son de mayor interés en categoría de módulos, son aquellos para los cuales $c_M(\{0\}) = r(M)$ para cada R-módulo M y donde r es un prerradical. Se dirá que el operador cerradura *es inducido por el prerradical* r.

Dado un prerradical r, se definen dos operadores cerradura c_r y c^r de la manera siguiente:

$$(c_r)_M(N) = N + r(M) \quad \text{y}$$
$$(c^r)_M(N) = \pi^{-1}(r(M/N))$$

donde $\pi : M \to M/N$ es la proyección canónica.

Si se tienen dos operadores cerradura c y d en **Mod**-R, se dice que $c \leq d$ si y sólo si $c_M(N) \subseteq c_M(N)$ para cada $M \in$ **Mod**-R y cada $N \subseteq M$.

Dado un prerradical r, obsérvese lo siguiente: si d es un operador cerradura inducido por r, entonces por la monotonía de d se sigue que

$$(c_r)_M(N) = N + r(M) \leq d_M(N),$$

y por la continuidad de d se sigue que

$$d_M(N) \leq d_M(\pi^{-1}(\{0\})) \leq \pi^{-1}(r(M/N)) = (c^r)_M(N)$$

donde $\pi : M \to M/N$ es la proyección canónica.

De las dos desiguialdades anteriores se sigue que para cada prerradical r y cada operador cerradura d inducido por r

$$c_r \leq d \leq c^r;$$

es decir, todos los operadores cerradura inducidos por un prerradical r tienen un máximo y un mínimo: c_r y c^r respectivamente.

Los operadores cerradura aparecen de forma natural en diversas categorías, para ver más ejemplos se recomienda ver [5, secciones 3.5, 3.6 y 3.7].

2.2. PROPIEDADES DE CERRADURA

La propiedad de Extensión en la definición 2.1, nos dice que para cada subobjeto de m, existe un digrama conmuntativo como el siguiente:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "j_m"] \arrow[dr, "m"'] & & c_X(M) \arrow[dl, "c_X(m)"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Este diagrama será importante para definir los subobjetos cerrados con respecto a un operador cerradura (nótese que se ha definido una cerradura de un subobjeto, que no subobjetos cerrados) y los subobjetos densos.

Definición 2.2 *Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ una categoría y $C = \{c_X\}_{X\in\mathcal{X}}$ un operador cerradura sobre esta categoría.*

- *Un subobjeto m se dice C-*cerrado *o* cerrado con respecto a C*, si m es isomorfo a su cerradura; es decir, en el diagrama (2.1), j_m es un isomorfismo.*
- *Un subobojeto m es C-*denso*, o* denso con respecto a C*, si $c_X(m)$ es isomorfo a 1_X; es decir, en el diagram (2.1), $c_X(m)$ es un isomorfismo.*

La definición 2.1 de operador cerradura no comparte con la definición de del operador cerradura de Kuratowski la propiedad de idempotencia. De hecho, muchos operadores cerradura en categorías no comparten propiedades que en el operador de Kuratowski son muy fáciles de verificar. El estudio de estas propiedades es extenso y en este texto sólo se darán las definiciones de tales propiedades y se verán algunos ejemplos.

Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ una categoría y $C = \{c_X\}_{X\in\mathcal{X}}$ un operador cerradura sobre esta categoría. Las siguientes propiedades las puede tener o no un operador cerradura.

(ID) (Idempotente). La C-cerradura de un $\mathcal{M}$ subobjeto de X es C-cerrado; es decir, para cads $m : X \to X$ en $\mathcal{M}$, $c_X(c_X(m)) \cong c_X(m)$.

(DH) (Débilmente hereditario) Cada $\mathcal{M}$-subobjeto de la categoría es C-denso, en su cerradura; es decir, para cada $m : M \to Y$ en $\mathcal{M}$ se tiene que $c_Y(j_m) \cong 1_Y$.

(EC) (Estable con objetos cerrados). La composición de subobjetos C-cerrados son C-cerrados; si $m : M \to N$ y $n : N \to X$ en $\mathcal{M}$, entonces $n \circ m$ es C-cerrado.

(ED) (Estable con objetos densos). La composición de C-densos es C-denso; es decir si $f : M \to N$ y $n : N \to X$ en $\mathcal{M}$ son C-densos, entonces $n \circ m$ es C-denso.

(HE) (Hereditario) para cada $m \leq y \in \mathcal{M}/X$, $c_Y(m_Y) \cong y^{-1}(c_X(m))$.

No es difícil verificar que el operador de Kuratowski tiene todas las propiedades anteriores. Sin embargo no todos los operadores cerradura las tienen.

Para finalizar con esta muy breve introducción a los operadores cerradura en categorías, se verán algunos ejemplos de operadores cerradura que ejemplifican las propiedades anteriores. Estos ejemplos se dan en la categoría (**Top**, $\mathcal{M}$) donde $\mathcal{M}$ es la categoría de encajes topológicos. Para definir varios de ellos será necesario hacer uso del operador de Kuratowski, el cual se denotará por $K = \{k_X(\_)\}_{X \in Top}$. M denotará a un subconjunto de un espacio topológico.

EJEMPLOS

(a) La cerradura por sucesiones: dado $M \subseteq X$, $\sigma_X(M)$ es el conjunto de puntos $x \in X$ tales que existe una sucesión (x_n) en M que converge a x

(b) la b-cerradura: $b_X(M)$ contiene al conjunto de puntos $x \in X$ tales que

$$k_X(\{x\}) \cap M \cap U \neq \emptyset$$

(c) la θ-cerradura: $\theta(M)$ denota el conjunto de puntos $x \in X$ tales que

$$M \cap k_X(U) \neq \emptyset$$

para cada abierto U que contenga a x.

(d) La t-cerradura: $t_X(M)$ denota al conjunto de puntos $x \in X$ tales que

$$x \in k_X(M \cap B)$$

donde B es un subconjunto compacto de X.

La siguiente Proposición es parte de una más extensa en la cual se caracterizan los operadores cerradura anteriores. Esta Proposición se puede consultar en [5, página 48].

***Proposición* 2.3** *Sea X un espacio topológico y M un subespacio de X. Entonces*

(a) $(\sigma_X(M) \subseteq t_X(M))$.

(b) $t_X = k_X$ *si y sólo si* X *es cumple la siguiente propiedad:* M *es un subconjunto cerrado de* X *si y sólo si* $M \cap B$ *es cerrado en* B *par cualquier subespacio compacto* B *de* X*.*

***Teorema* 2.4** *Los operadores definidos anteriormente tienene las siguientes propiedades:*

(a) b *es un operador idempotente, pero* σ*,* θ *y* t *no lo son.*

(b) b *y* σ *son hereditarios, mientras que* t *es débilmente hereditario pero no hereditario.* θ *no es débilmente hereditario.*

Demostración: (a) Se verá primero que b es un operador idempotente. Sea M un subespacio de un espacio topológico. Se probará que $b_X(M) = b_X(b_X(M))$. Obsérvese que, por monotonía, $b_X(M) \subseteq b_X(b_X(M))$. Para la otra contención se verá que $X \setminus b_X(M) \subseteq X \setminus b_X(b_X(M))$. Sea $x \in X \setminus b_X(M)$; entonces existe una vecinda abierta U de x tal que

$$k_X(\{x\}) \cap M \cap U = \emptyset.$$

Obsérvese entonces que para cada $y \in k_X(\{x\}) \cap U$, se tiene $k_X(\{y\}) \subseteq k_X(\{x\})$ y U es una vecindad abierta de y. Por lo tanto $y \notin b_X(M)$. Por lo tanto

$$k_X(\{x\}) \cap U \cap b_X(M) = \emptyset.$$

Por lo tanto $x \in X \setminus b_X(b_X(M))$. Así b es idempotente.

Para ver que θ no es idempotente, considérese el conjunto $X = \{x, a, b\}$ de tres elementos con la siguiente topología $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$. Obsérvese que $\theta_X(\{a\}) = \{a, x\}$ y $\theta_X(\theta_X(\{a\})) = X$. Por lo tanto θ no es idempotente.

Para probar que σ y t no son idempotentes considérese el subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$X = \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

donde $X_n = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : m \in \mathbb{N}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. A X se le da la topología generada por la unión de A, B, C donde

- $A = \{\{(x,y)\} \in X : xy > 0\}$,
- $B = \{X_n \setminus \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})\} : m \leq k,\ k \in \mathbb{N}\}$.
- $C = \{\{(0,0)\} \cup \left[\bigcup_{n \geq k} X_n \setminus F_n\right] : F_n \subseteq X_n \text{ es finito y, } k \in \mathbb{N}\}$.

(Obsérvese que éste espacio es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual al que se le añaden los abiertos de C).

En este espacio topológico considérese el subconjunto $M = \{(x, y) \in X : xy > 0\}$. Nótese que $\sigma_X(M) = X \setminus \{(0, 0)\}$ y $\sigma_X(\sigma_X(M)) = X$ Por lo tanto σ no es idempotente.

Para concluir con la prueba del inciso (a), obsérvese que por (2.3) inciso (a), $\sigma_X(M) \subseteq t_X(M)$ para cada subconjunto M de un espacio topológico X. De esto se sigue que $X \subseteq \sigma_X(\sigma_X(M)) \subseteq t_X(t_X(M))$. Por lo tanto $X = t_X(t_X(M))$. Sin embargo, por la definición de la topología de X, cualquier subconjunto $\{(\frac{1}{n_k}, \frac{1}{m_k}) : k \in \mathbb{N}\}$ con $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ es cerrado y discreto en X. Entonces no puede estar contenido en algún subespacio compacto de X. Por lo tanto un subespacio compacto de X intersecta a X_n para un número finito de subíndices. Esto prueba que $(0, 0) \notin t_X(M \cap B)$ para cualquier compacto B. Por lo tanto t no es idempotente.

(b) Para el inciso (b) se verá primero que b es un operador hereditario. Lo que hay que probar es que si $M \subseteq Y \subseteq X$, entonces $b_Y(M) = b_X(M) \cap Y$. Sea $x \in b_Y(M)$, entonces para cada vecindad abierta U_Y de x en Y, se tiene que

$$k_Y(\{x\}) \cap U_Y \cap M \neq \emptyset. \tag{2.2}$$

Obsérvese que $x \in b_Y(M) \subseteq Y$, y para ver que $x \in k_X(M)$, tómese una vecindad abierta U_X de x en X. Entonces,

$$\begin{aligned} k_X(\{x\}) \cap U_X \cap M &\supseteq k_X(\{x\}) \cap Y \cap U_X \cap M \\ &= k_Y(\{x\}) \cap U_X \cap M. \end{aligned}$$

La última igualdad se da porque el operador de Kuratowski es hereditario. Además, por (2.2), la última expresión es no vacía. Por lo tanto $k_X(\{x\}) \cap U_X \cap M \neq \emptyset$; es decir $x \in b_X(M)$, y así $b_Y(M) \subseteq b_X(M) \cap Y$.

Para probar la otra contención, tómese $x \in b_X(M) \cap Y$. Basta probar que $x \in b_Y(M)$. Sea U_Y una vecindad de x en Y. Entonces $U_Y = U_X \cap Y$, para alguna vecindad abierta U_X de x en X. Entonces

$$\begin{aligned} k_Y(\{x\}) \cap U_Y \cap M &= k_X(\{x\}) \cap Y \cap U_X \cap U_X \cap Y \cap M \\ &= k_X(\{x\}) \cap U_X \cap M \cap Y. \end{aligned}$$

Como $x \in b_X(M)$ y $M \subseteq Y$ por hipótesis, entonces la última igualdad es no vacía. Por lo tanto $x \in b_Y(M)$. Esto concluye la preba de que b es hereditario.

Ahora, para ver que σ es hereditario obsérvese solamente que

$$\begin{aligned} x \in \sigma_Y(M) &\Longleftrightarrow \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M \text{ tal que } x_n \to x \in Y \\ &\Longleftrightarrow x \in Y \cap \sigma_X(M) \end{aligned}$$

Ahora se probará que θ no es débilmente hereditario. Considere el conjunto $X = [0, 1]$ con la topología τ, en la cual la base de vecindades de un punto $x \neq 0$ son las usuales, y las vecindades de 0 son de la forma $[0, \epsilon) \setminus F$, donde $0 < \epsilon < 1$ y $F = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Para probar que θ no es débilmente hereditario, basta mostrar que $\theta_X(F) \neq \theta_{\theta_X(F)}(F)$. En efecto, es fácil notar que $\theta_X(F) = F \cup \{0\}$. Además $F \cup \{0\}$ es un espacio discreto de (X, τ). Esto nos asegura que $0 \notin \theta_{\theta_X(F)}(F)$.

Finalmente se verá que t no es hereditario. Considérese el espacio topológico $X = \beta\mathbb{N}$ (la compactación de Stone Cech de $\mathbb{N}$), y tómese $x \in X \setminus \mathbb{N}$. Por el lema (2.3), $t_X = k_X$. Por lo tanto $x \in t_X(\mathbb{N})$. Por otro lado, si $Y = \mathbb{N} \cup \{x\}$, entonces $x \notin t_Y(F)$, pues $\mathbb{N}$ no contiene conjuntos infinitos compactos. Por lo tanto t no es hereditario. ♦

Bibliografía

[1] J. Adámek, H. Herrlich, and G. E. Strecker. Abstract and Concrete Categories, Wiley, New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, 1990.

[2] G. Castellini, *Categorical Closure Operators*, Birkhäuser, 2003.

[3] D. Dikranjan and E. Giuli. *Closure Operators I*, Topology Appl 27 (1987), 129-143.

[4] D. Dikranjan, E. Giuli and W. Tholen. *Categorical Topology and its Relations to Analysis, Algebra and Combinatorics*, Proc. Int. Conf. Prague, World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong-Kong, 1988, 297-335.

[5] D. Dikranjan and W. Tholen, *Categorical Structure of Closure Operators*, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[6] E. Giuli, *Categorical Topology, Proccedings of the L'Aquila Conference 1994,* Kluwer Academic Publishers, 1996.

[7] B. Stenström, Ring of quotients. Introduction to the methods of ring theory. Springer, 1975.