UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

SUCESIONES ESPECTRALES Y HOMOLOGÍA DE INVARIANTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

ANGELINA LÓPEZ MADRIGAL

DIRECTOR DE TESIS: DR. ROLANDO JIMÉNEZ BENÍTEZ.

México, D.F. mayo de 2012.

Índice general

Agradecimientos

Quiero dedicar esta tesis en especial a mis padres Angelina y Rubén por su gran amor, comprensión y apoyo que me brindaron durante esta etapa de mi carrera, ya que gracias a ello la pude concluir. A mis hermanos Núrivan, Sinuhé y Beleguí por su amor y consejos que de alguna manera influyeron para la realización de esta tesis.

Quiero agradecer al Dr.Rolando Jiménez Benítez por haberme dado este tema del álgebra en la que a lo largo de este trabajo disfruté y me gustó mucho. Al Dr.Quitzeh Morales Meléndez quien me dió el problema de esta tesis y pude desarrollarlo y gracias a ello me dió más confianza.

Le agradezco al Instituto de Matemáticas de la UNAM Unidad Oaxaca por apoyarme en sus instalaciones durante todo este tiempo.

Capítulo 1

Introducción

Las sucesiones espectrales fueron inventadas en los $40^{'}$s independientemente por Jean Leray y R.C.Lyndon. Jean Leray las descubrió al calcular los grupos de cohomología de gavillas. Lyndon las inventó en su tesis para calcular los grupos de cohomología de un grupo abeliano finito. La importancia teórica de las sucesiones espectrales ha disminuido desde la introducción de categorías derivadas pero ellas son una herramienta muy efectiva. Esto es siempre y cuando los términos de la sucesión espectral son calculables. Desafortunadamente la gran cantidad de información llevada en una sucesión espectral es difícil de tratar, pero nos pueden dar mucha información. Las sucesiones espectrales que colapsan son los casos más fáciles de resolver.
Una sucesión espectral calcula los grupos de homología; en abstracto, es una sucesión E^1_{**}, $E^2_{**}, \cdots, E^\infty_{**}$ de cadenas de complejos tal que $H(E^n) \cong E^{n+1}_{**}$. Para trabajar con sucesiones espectrales es útil dibujar diagramas en el que para cada r, los grupos $E^r_{p,q}$ son asociados a la retícula entera de puntos (p,q) en el plano y los diferenciales son representados como flechas.

A continuación presentaremos el esquema de investigación planteado en este trabajo de tesis:

En el capítulo 2 definimos lo que es una sucesión espectral, ver la definición 2.4, damos una descripción de la sucesión espectral en términos del módulo E^2. También definimos cuándo una sucesión converge y cuándo colapsa, ver definiciones 2.5 y 2.6. Además, aportamos información sobre el concepto de relaciones aditivas, esto nos ayudó a demostrar el teorema 3.1.

Resulta que la filtración de un módulo diferencial graduado determina una sucesión espectral. Así que en el capítulo 3 demostramos este teorema (teorema 3.1) y damos las definiciones de la filtración de un módulo (definición 3.1) y de un complejo (definición 3.2), ésta última es lo que nosotros llamamos en esta tesis como filtración de un módulo diferencial graduado. Dado un complejo total le podemos asociar una filtración, así que en este capítulo también estudiamos la primera y segunda filtración; la sucesiones espectrales asociadas a la primera y segunda filtración se llaman primera y segunda sucesión espectral, respectivamente. Ejemplos de estas sucesiones son: el complejo total $F \otimes_G C$, la sucesión espectral de Hochschild- Serre y el complejo total $F \otimes_G C(X, M)$, que también estudiamos aquí. Anteriormente hablabamos de que las sucesiones espectrales son una herramienta para calcular la homología de un grupo así que en este capítulo proporcionamos algunos ejemplos utilizando el teorema de Hochschild-Serre.

En el último capítulo construimos una sucesión espectral apartir de la filtración de una cadena de complejos en la que están relacionados los invariantes de esta cadena de complejos. También damos una generalización de la proposición $2 \cdot 1$ del artículo de Kevin P. Knudson [1], en el que enuncia lo siguiente:

Supón que $Q = \mathbb{Z}/p$ donde p es un primo. Entonces para $n \geq 0$, $D_n = C_n(G^Q; \mathbb{Z}/p)$; consecuentemente hay un isomorfismo $h_n(D_\bullet) \cong H_n(G^Q; \mathbb{Z}/p)$.

Capítulo 2

Sucesiones Espectrales y Relaciones Aditivas

2.1. Sucesiones Espectrales.

Definición 2.1. *Sea R un anillo con unidad. Un R-módulo bigraduado es una familia $E = \{E_{p,q}\}$ de R-módulos tal que a cada pareja p, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, se le asocia un módulo.*

Definición 2.2. *Un diferencial $d^r : E^r \longrightarrow E^r$ de grado $(-r, r-1)$ es una familia de homomorfismos $\{d^r : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1}\}$, una para cada pareja p, q tal que $d^2 = 0$.*

Definición 2.3. *La homología $H(E) = H(E, d^r)$ del módulo E con respecto a esta diferencial es un módulo bigraduado $\{H_{p,q}(E)\}$ que se define de la manera usual*

$$H_{p,q}(E) = \ker[d^r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}]/d^r E^r_{p+r,q-r+1}$$

Definición 2.4. *Una sucesión espectral $E = \{E^r, d^r\}$ es una sucesión E^1, E^2,... de R-módulos bigraduados con diferenciales*

$$d^r : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1} \qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

de grado $(-r, r-1)$, además se tienen los isomorfismos $H(E^r, d^r) \cong E^{r+1}$, $r = 1, 2, 3 \ldots$. Es decir, cada módulo E^{r+1} es un módulo bigraduado de la homología del módulo anterior (E^r, d^r). De esta manera E^r y d^r definen a E^{r+1} pero no definen a d^{r+1}.

Si $E^{'}$ es una segunda sucesión espectral, entonces el homomorfismo $f : E \to E^{'}$ es una familia de homomorfismos $f^r : E^r \to E^{'r}$, $r = 1, 2, 3, \ldots$, de módulos bigraduados de grado $(0, 0)$ tal que $d^r f^r = f^r d^r$ y cada homomorfismo f^{r+1} es un homomorfismo inducido por f^r. Ahora describiremos a la sucesión espectral en términos de submódulos del módulo E^1.
Primero identificamos al módulo E^{r+1} con $H(E^r, d^r)$ dado por la definición de sucesión espectral.
Entonces $E^2 = H(E^1, d^1) = C^1/B^1$, subcociente de E^1, donde $C^1 = \ker d^1$ y $B^1 = im\, d^1$ y $0 = B^0 \subset B^1 \subset C^1 \subset C^0 = E^1$, $E^3 = H(E^2, d^2) = C^2/B^2$ subcociente de C^1/B^1 donde

$\ker d^2 = C^2/B^1$, $im\, d^2 = B^2/B^1$ y $0 = B^0 \subset B^1 \subset B^2 \subset C^2 \subset C^1 \subset C^0 = E^1$.
Luego la sucesión espectral se representa como:

$$0 = B^0 \subset B^1 \subset B^2 \subset \cdots \subset C^2 \subset C^1 \subset C^0 = E^1$$

de submódulos bigraduados del módulo E^1 y $E^{r+1} = C^r/B^r$ tal que el homomorfismo d^r : $C^{r-1}/B^{r-1} \longrightarrow C^{r-1}/B^{r-1}$, $r = 1, 2, 3 \ldots$ tiene núcleo C^r/B^{r-1} e imagen B^r/B^{r-1}.
Informalmente:
C^{r-1} es el módulo de elementos que quedan "vivos" hasta el paso r.
B^{r-1} es el módulo de elementos que restringen en el paso r.
El módulo de elementos que son "inmortales" es $C^\infty = \bigcap_{r=1}^{\infty} C^r$ y el módulo de elementos que pueda restringir es $B^\infty = \bigcup_{r=1}^{\infty} B^r$. Es claro que $B^\infty \subset C^\infty$.
Luego la sucesión espectral determina al módulo bigraduado

$$E^\infty_{p,q} = C^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q}, \qquad E^\infty = \{E^\infty_{p,q}\}$$

Estamos considerando a los miembros E^r de la sucesión espectral como aproximaciones sucesivas a E^∞.
Si tenemos la representación

$$0 = B^0 \subset B^1 \subset B^2 \subset \cdots \subset C^2 \subset C^1 \subset C^0 = E^1$$

entonces un homomorfismo $f : E \to E'$ de sucesiones espectrales es un homomorfismo f : $E^1 \to (E')^1$ de módulos bigraduados de grado $(0, 0)$ tal que $f(C^r) \subset (C')^r$, $f(B^r) \subset (B')^r$ y los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
C^{r-1}/B^{r-1} \arrow[r, "d^r"] \arrow[d, "f_*"'] & C^{r-1}/B^{r-1} \arrow[d, "f_*"'] \\
(C')^{r-1}/(B')^{r-1} \arrow[r, "d^r"] & (C')^{r-1}/(B')^{r-1}
\end{tikzcd}$$

son conmutativos. Luego $f : E \to E'$ induce un homomorfismo $f^\infty : E^\infty \to (E')^\infty$

Definición 2.5. *La sucesión espectral converge si para algún entero $k > 0$ tenemos que $d^n E^n = 0$ para todo $n \geq k$. En este caso $\ker d^n = E^n$ y $im\, d^n = 0$, luego $E^k = E^{k+1} = E^{k+2} = \cdots$.*

Por E^∞ denotaremos a estos grupos abelianos mutuamente idénticos.

Definición 2.6. *Decimos que la sucesión espectral $E = \{E^n, d^n\}$ colapsa cuando $d^n = 0$ para $n \geq 2$ y luego cuando $E^2 = E^3 = \cdots = E^\infty$.*

Definición 2.7. *Una sucesión espectral E se llama sucesión de primer cuadrante si $E^r_{p,q} = 0$ para $p < 0$ ó $q < 0$. (si se cumple esta condición para E^2 entonces se cumple para E^r con $r > 2$).*

Es útil imaginarse a los módulos $E^r_{p,q}$ como puntos con coordenadas enteras en el primer cuadrante del plano (p,q).
Entonces al diferencial d^r se le asocia una flecha. Todos los miembros de grado completo n están sobre la recta $p+q=n$. Los diferenciales sucesivos salen de un punto de esta recta y terminan en un punto de la siguiente recta que se encuentra debajo. En cada punto del complejo $E^r_{p,q}$ la siguiente aproximación $E^{r+1}_{p,q}$ se forma formando el cociente del núcleo del diferencial que sale de este punto módulo la imagen del diferencial que termina en este punto.
Estos homomorfismos se muestran en la sucesión:

$$E^r_{p+r,q-r+1} \xrightarrow{d^r} E^r_{p,q} \xrightarrow{d^r} E^r_{p-r,q+r-1}$$

Un diferencial d^r saliente termina fuera del primer cuadrante si $r>p$; un diferencial d^r que entra empieza fuera del primer cuadrante si $r>q+1$, luego

$$E^{r+1}_{p,q} = E^r_{p,q}; \qquad \infty > r > Max(p, q+1)$$

Es decir, para grados fijos p y q los módulos $E^r_{p,q}$ son constantes para todo r salvo un número finito.
A los miembros $E_{p,q}$ que están sobre el eje p se llaman miembros de la base. Cada flecha d^r que termina en la base viene de abajo, luego de 0, luego cada miembro $E^{r+1}_{p,0}$ es un submódulo del módulo $E^r_{p,0}$, es decir $E^{r+1}_{p,0} = ker\{d^r : E^r_{p,0} \longrightarrow E^r_{p-r,r-1}\}$. Obtenemos una sucesión de monomorfismos

$$E^\infty_{p,0} = E^{p+1}_{p,0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^4_{p,0} \longrightarrow E^3_{p,0} \longrightarrow E^2_{p,o}$$

Los miembros $E_{0,q}$ que están en el eje q se llaman miembros de la fibra. Cada flecha que sale de la fibra termina a la izquierda y luego en 0, por eso $E^r_{0,q}$ consiste de ciclos y $E^{r+1}_{0,q} = E^r_{0,q}/Im\, d^r$ es un cociente del módulo $E^r_{0,q}$.
Obtenemos una sucesión de epimorfismos:

$$E^2_{0,q} \longrightarrow E^3_{0,q} \longrightarrow E^4_{0,q} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{q+2}_{0,q} = E^\infty_{0,q}$$

A los homomorfismos anteriores se les conoce por homomorfismos límites.

Definición 2.8. *La sucesión espectral E está acotada inferiormente o por abajo si para cada grado n existe un número entero $s=s(n)$ tal que $E^2_{p,q}=0$ cuando $p<s$ y $p+q=n$. Esto es equivalente a que los miembros que están sobre la recta $p+q=n$ cuando p decrece se hacen 0.*
En particular, la sucesión espectral del primer cuadrante está acotada inferiormente.

Teorema 2.1. *Si $f : E \to E^{'}$ es un homomorfismo de sucesiones espectrales y si $f^t : E^t \cong E^{'t}$ es un isomorfismo para algún t, entonces $f^r : E^r \cong E^{'r}$ es un isomorfismo para $r \geq t$. Si, además, las sucesiones E y $E^{'}$ son acotadas inferiormente, entonces $f^\infty : E^\infty \cong E^{'\infty}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Por inducción sobre r.
Para $r=t$ se tiene que $E^t \cong E^{'t}$.
Supongamos que es cierto para $r-1$ y lo probamos para r.
Como f^{r-1} es un isomorfismo de cadenas, entonces induce un isomorfismo en homología

$f^r : H(E^{r-1}, d^{r-1}) \to H(E'^{r-1}, d'^{r-1})$. Pero $E^r \cong H(E^{r-1}, d^{r-1})$, $E'^r \cong H(E'^{r-1}, d'^{r-1})$, esto implica que $f^r : E^r \to E'^r$ es un isomorfismo, $E'^r \cong E^r$.
Si las sucesiones E y E' están acotadas inferiormente y (p, q) es fijo, entonces el diferencial $d^r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ tiene imagen 0 para r suficientemente grandes. Luego $C^r_{p,q} = C^\infty_{p,q}$ y $C'^r_{p,q} = C'^\infty_{p,q}$ para r grande.
Consideremos $f^\infty : E^\infty \to E'^\infty$ inducido por $f : E \to E'$.

1. f^∞ es sobre.
   Sea $a' \in C'^\infty_{p,q}$. Entonces $a' \in C'^r_{p,q}$, pero f^r es un isomorfismo, luego existe $a \in C^r_{p,q} = C^\infty_{p,q}$ tal que $f^\infty(a) = a'$.

2. f^∞ es $1-1$.
   Si $f^\infty(a) \in B'^\infty = \cup B'^r$ para $a \in C^\infty$, entonces $f^\infty(a) \in B'^r$ para algún r. Luego como f^r es un monomorfismo para todo r, entonces $a \in B^\infty$. Luego f^∞ es un monomorfismo.

■

2.2. Relaciones Aditivas.

Una relación aditiva $r : A \longrightarrow B$ se define como un submódulo de la suma directa $A \oplus B$. En otras palabras, r es un conjunto no vacío de parejas (a, b), cerrado bajo la suma y multiplicación por elementos de R.
El inverso de r es una relación aditiva $r^{-1} : B \longrightarrow A$ que consiste de parejas (b, a) tal que $(a, b) \in r$. Si $s : B \longrightarrow C$ es otra relación aditiva, entonces el producto $sr : A \longrightarrow C$ es el conjunto de las parejas (a, c) tal que $\exists\ b \in B$ con $(a, b) \in r$ y $(b, c) \in s$.
Si el producto está definido, entonces el producto es asociativo. El gráfico de un homomorfismo $\alpha : A \longrightarrow B$ es una relación aditiva que consiste de la pareja $(a, \alpha(a))$ con $a \in A$. Como el producto de dos gráficos es un gráfico del producto de dos homomorfismos, podemos identificar cada homomorfismo con un gráfico. Obtenemos una categoría:
Los objetos: La clase de todos los R-módulos.
Los morfismos: La clase de todas las relaciones aditivas.
NOTA: El producto rr^{-1} siempre nos da la relación identidad.
Para cada relación aditiva $r : A \longrightarrow B$ definimos los submódulos:

$$\begin{aligned} Def\ r &= \{a \mid \exists\ b \text{ y } (a, b) \in r\}; & Im\ r = Def\ \ r^{-1} \\ ker\ \ r &= \{a \mid (a, 0) \in r\}; & Ind\ r = ker\ r^{-1} \end{aligned}$$

$ker\ r \subset Def\ r \subset A$ y $Ind\ r \subset Im\ r \subset B$.
Al submódulo $Def\ r$ se llama el dominio de definición de r. $Ind\ r$ se llama la indeterminación de r, que consiste de todas las b tal que $(0, b) \in r$.
Luego r es un gráfico de un homomorfismo sí y sólo sí $Def\ r = A$ y $Ind\ r = 0$.
Ejemplo, el inverso para el homomorfismo $\beta : B \longrightarrow A$ es la relación aditiva β^{-1} donde $Def\ \beta^{-1} = Im\ \beta$, $Ind\ \beta^{-1} = ker\ \beta$.

Teorema 2.2. *Cada relación aditiva $r : A \longrightarrow B$ determina a un homomorfismo r° : $Def\ r \longrightarrow B/Ind\ r$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} Def\ r \arrow[r, "r^\circ"] \arrow[d, "j"'] & B/Ind\ r \\ A \arrow[r, "r"] & B \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

$r^\circ = \pi \circ r \circ j$, donde $j : Def\ r \longrightarrow A$ es dado por la inclusión y $\pi : B \longrightarrow B/Ind\ r$ es la proyección.
Recíprocamente, sean dados el submódulo $S \subset A$ y el cociente B/L del módulo B y un homomorfismo $\beta : S \longrightarrow B/L$. Entonces existe una única relación aditiva $r : A \longrightarrow B$ tal que $r^\circ = \beta$.

Demostración. Si $a \in Def\ r$, entonces si $(a, b) \in r$ y $(a, b^{'}) \in r$ implica que $(0, b - b^{'}) \in r$, luego $b - b^{'} \in Ind\ r$. Entonces el mapeo $r^\circ(a) = b + Ind\ r$, determina un homomorfismo tal que $r^\circ = \pi \circ r \circ j$.
Si $\beta : S \longrightarrow B/L$ es un homomorfismo, entonces $r = \{(s, b) \mid b \in \beta(s)\}$ es una relación aditiva tal que $r^\circ = \beta$. ■

Análogamente se tiene que cada relación aditiva r induce un isomorfismo:

$$Def\ r/Ker\ r \cong Im\ r/Ind\ r$$

Recíprocamente, cada isomorfismo entre un subcociente del módulo A y un subcociente del módulo B se obtiene de esta manera de la unicidad de la relación aditiva r.
Sea S/K un subcociente del módulo A y sea $S^{'}/K^{'}$ un subcociente del módulo $A^{'}$. Cada homomorfismo $\alpha : A \longrightarrow A^{'}$ induce una relación aditiva:

$$\alpha_\sharp = \alpha(S/K, S^{'}/K^{'}) : S/K \longrightarrow S^{'}/K^{'}$$

definida como el conjunto de parejas $(s + K, s^{'} + K)$ de clases laterales donde $s \in S$, $s^{'} \in S^{'}$ y $s^{'} = \alpha(s)$.

Teorema 2.3. *Si $\theta : A \longrightarrow A^{'}$ es una equivalencia entonces*

$$(\theta_\sharp)^{-1} = (\theta^{-1})_\sharp : S^{'}/K^{'} \longrightarrow S/K$$

Teorema 2.4. *Si los homomorfismos $\alpha : A \longrightarrow A^{'}$ y $\beta : A^{'} \longrightarrow A^{''}$ inducen relaciones aditivas $\alpha_\sharp : S/K \longrightarrow S^{'}/K^{'}$ y $\beta_\sharp : S^{'}/K^{'} \longrightarrow S^{''}/K^{''}$ entonces $\beta_\sharp\alpha_\sharp = (\beta\alpha)_\sharp : S/K \longrightarrow S^{''}/K^{''}$ bajo las condiciones:*

1. *$\alpha(K) \supset K^{'}$ ó $\beta(K^{'}) \subset K^{''}$*
2. *$\alpha(S) \subset S^{'}$ o $\beta^{-1}(S^{''}) \subset S^{'}$*

Demostración. Probemos que $\beta_\sharp\alpha_\sharp \subset (\beta\alpha)_\sharp$.
Sea $(s + K, s^{''} + K^{''}) \in \beta_\sharp\alpha_\sharp$. Por definición de producto de dos relaciones existen elementos $s_1^{'}$ y $s_2^{'} \in S^{'}$ tal que $s_1^{'} + K^{'} = s_2^{'} + K^{'}$ y $\alpha(s) = s_1^{'}$, $\beta(s_2^{'}) = s^{''}$. Luego $s_1^{'} - s_2^{'} = k^{'} \in K^{'}$ y $\beta\alpha(s) = s^{''} + \beta k^{'}$. En el caso de que $\beta(K^{'}) \subset K^{''}$ ó $K^{'} \subset \alpha(K)$, se tiene que $(s + K, s^{''} + K^{''}) \in (\beta\alpha)_\sharp$. Luego de 1 se tiene que $\beta_\sharp\alpha_\sharp \subset (\beta\alpha)_\sharp$.
Análogamente 2 implica que $(\beta\alpha)_\sharp \subset \beta_\sharp\alpha_\sharp$. ■

Capítulo 3

Filtraciones

3.1. Filtración de un módulo.

Definición 3.1. *Sea R un anillo arbitrario. Una filtración ascendente de un R-módulo M es una familia de submódulos $F_pM (p \in \mathbb{Z})$ tal que $F_pM \subseteq F_{p+1}M$. La filtración se llama finita si* $0 = F_0M \subseteq \cdots \subseteq F_nM = M$.

Si en M está dada una filtración entonces el módulo graduado asociado GrM se define por la fórmula $Gr_pM = F_pM/F_{p-1}M$.

Lema 3.1. *Sean M y $M^{'}$ módulos con filtraciones finitas y $f : M \to M^{'}$ un homomorfismo que preserva la filtración. Si $Gr\ f : GrM \to GrM^{'}$ es un isomorfismo entonces f también es un isomorfismo.*

Demostración. Como f preserva la filtración y $Gr\ f$ es un isomorfismo, entonces $Gr_pM \cong Gr_pM^{'}$.
Consideremos la sucesión exacta corta:

$$\begin{tikzcd}
F_0M \arrow[r] \arrow[d] & F_1M \arrow[r] & F_1M/F_0M \arrow[d] \\
F_0M^{'} \arrow[r] & F_1M^{'} \arrow[r] & F_1M^{'}/F_0M^{'}
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis $F_1M/F_0M \cong F_1M^{'}/F_0M^{'}$ y como $F_0M \cong F_0M^{'} = 0$ entonces $F_1M \cong F_1M^{'}$.
Ahora supongamos que es cierta para p y lo probaremos para $p + 1$.

$$\begin{tikzcd}
F_pM \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & F_{p+1}M \arrow[r] & F_{p+1}M/F_pM \arrow[d, "\cong"'] \\
F_pM^{'} \arrow[r] & F_{p+1}M^{'} \arrow[r] & F_{p+1}M^{'}/F_pM^{'}
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis de inducción $F_pM \cong F_pM^{'}$. Por hipótesis del lema $\frac{F_{p+1}M}{F_pM} \cong \frac{F_{p+1}M^{'}}{F_pM^{'}}$, luego por el lema de los 5 tenemos que $F_{p+1}M \cong F_{p+1}M^{'}$. Entonces hemos probado que $M = F_nM \cong F_nM^{'} = M^{'}$. ■

Si de alguna manera podemos definir el concepto de rango para R-módulos tal que $rkM = rkM^{'} + rkM^{''}$ para cualquier sucesión exacta corta $0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0$ entonces el rango de un R-módulo filtrado finito se puede hallar mediante un módulo graduado asociado:

$$rkM = \sum_{p\in\mathbb{Z}} rkGr_pM$$

Demostración. Consideremos la sucesión exacta corta:

$$F_{p-1}M \to F_pM \to F_pM/F_{p-1}M$$

Entonces

$$rkF_pM/F_{p-1}M = rkF_pM - rkF_{p-1}M.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in\mathbb{Z}} rkGr_pM &= rkF_1M + rkF_2M - rkF_1M + rkF_3M \\
&\quad -rkF_2M + \cdots + rkF_{n-1}M + rkF_nM - rkF_{n-1}M \\
&= rkF_nM \\
&= rkM
\end{aligned}$$

■

Si el módulo filtrado M tiene una filtración graduada, es decir, F_pM es un submódulo graduado para cada p, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene una filtración $\{F_pM_n\}$ en M_n que nos da una manera de asociar a M como un módulo bigraduado, la notación es la siguiente:

$$Gr_{p,q}M = F_pM_{p+q}/F_{p-1}M_{p+q}$$

A los elementos del módulo $Gr_{p,q}M$ se les dice que tienen grado p, grado complementario q y grado total $p+q$ filtrado.

3.2. Filtración de un módulo diferencial graduado.

Definición 3.2. *Una filtración F de un R-módulo diferencial graduado A es una familia de DG_R-submódulos F_pA tal que $F_{p-1}A \subseteq F_pA$. Un homomorfismo entre R-módulos diferenciales graduados es un homomorfismo que preserva la filtración.*

Esta filtración induce una filtración sobre el $H(A)$ R-módulo graduado, con $F_p(H(A))$ definido como la imagen de $H(F_p(A))$ bajo la inclusión $F_pA \to A$. Como el módulo A es R-graduado en los grados n, la filtración F del módulo define una filtración F_pA_n para cada módulo A_n y el diferencial del módulo A induce homomorfismos $\partial : F_pA_n \longrightarrow F_pA_{n-1}$ para cada p y cada n. La familia $\{F_pA_n\}$ es un R-módulo bigraduado. Es usual usar los índices de la graduación con (p,q) donde p es el grado de la filtración y $q = n - p$ del grado complementario, entonces nuestro R-módulo es $\{F_pA_{p+q}\}$.
NOTACIÓN: FDG_R-módulo≡ R-módulo diferencial graduado filtrado.

Definición 3.3. *Se dice que la filtración de un FDG_R-módulo A es acotada si para cada grado n existen mínimos enteros $s = s(n) < t = t(n)$ tal que $F_sA_n = 0$ y $F_tA_n = A_n$. Esta condición es equivalente a que la filtración es finita para cada A_n.*

$$0 = F_sA_n \subset F_{s+1}A_n \subset \cdots \subset F_tA_n = A_n$$

Definición 3.4. *Decimos que la sucesión espectral $\{E^r_p, d^r\}$ converge al módulo graduado M ($E^2_p \Longrightarrow M$) si existe una filtración F del módulo M tal que para cada p se tiene el isomorfismo $E^\infty_p \cong F_pM/F_{p-1}M$, $E^r_p = \{E^r_{p,q}, q = 0, \pm 1, \cdots\}$.*

Para la demostracion del siguiente teorema haremos uso de los siguientes lemas:
Si S y T son submódulos de un módulo M, su intersección $S \cap T$ también es un submódulo, como lo es su unión $S \cup T$, consistiendo de todas las sumas $s + t$ tal que $s \in S$, $t \in T$. El teorema de isomorfismos de Noether asegura que la identidad $1_M : M \to M$ induce los siguientes isomorfismos:

Lema 3.2. *Si S y T son submódulos de un módulo M, entonces hay un isomorfismo*

$$S/(S \cap T) \cong (S \cup T)/T.$$

Lema 3.3. *Si S, T y U son submódulos de un módulo M tal que $U \subset S$, entonces:*

$$(S \cup T)/(U \cup T) \cong S/(U \cup (S \cap T)).$$

Teorema 3.1. *Cada filtración F de un R-módulo diferencial graduado determina una sucesión espectral (E^r, d^r), $r = 1, 2, \cdots$, que es un funtor covariante de la pareja (F, A) junto con sus isomorfismos naturales*

$$E^1_p \cong H(F_pA/F_{p-1}A)$$

es decir,

$$E^1_{p,q} \cong H_{p+q}(F_pA/F_{p-1}A)$$

Si la filtración F está acotada, entonces $E^2_p \Rightarrow H(A)$, más preciso, se tienen los isomorfismos naturales

$$E^\infty_p \cong F_p(H(A))/F_{p-1}(H(A)),$$

es decir,

$$E^\infty_{p,q} \cong F_p(H_{p+q}(A))/F_{p-1}(H_{p+q}(A)).$$

Demostración. Sea $Z^r_{p,q} = \{a \mid a \in F_pA_{p+q}, \partial a \in F_{p-r}A_{p+q-1}\}$ $r = 0, 1, \cdots$ submódulos de F_pA_{p+q}.
Sea $E^0_{p,q} = F_pA_{p+q}/F_{p-1}A_{p+q}$ y sea $\eta_p : F_pA_{p+q} \longrightarrow E^0_{p,q}$ la proyección canónica. Consideremos las relaciones aditivas:

$$E^0_{p+r,q-r+1} \overset{\partial_1}{\to} E^0_{p,q} \overset{\partial_2}{\to} E^0_{p-r,q+r-1}$$

inducidas por el diferencial $\partial : A \longrightarrow A$.
Probemos que $\partial Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2} \subset \partial Z^r_{p+r,q-r+1} \subset Z^{r+1}_{p,q} \subset Z^r_{p,q}$.
Para esto tenemos que probar lo siguiente:

1. $Im\ \partial_1 = \eta_p \partial Z^r_{p+r,q-r+1}$.
   Como
   $$\begin{aligned} \partial_1 &= \{(\eta_{p+r}a, \eta_p\partial a) \mid a\ \in F_{p+r}A_{p+q+1},\ \partial a\ \in F_pA_{p+q}\}, \\ \partial_1 &= \{(\eta_{p+r}a, \eta_p\partial a) \mid a\ \in Z^r_{p+r,q-r+1}\} \end{aligned}$$
   Así $Im\ \partial_1 = \eta_p \partial Z^r_{p+r,q-r+1}$

2. $Ind\ \partial_1 = \eta_p \partial Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}$.
   Como
   $$\begin{aligned} Ind\ \partial_1 &= \{b \mid\ (0,b)\ \in \partial_1\}, \\ Ind\ \partial_1 &= \{\eta_p\partial a \mid\ (0,\eta_p\partial a)\ \in \partial_1\} \end{aligned}$$
   Así $\eta_{p+r}a = 0$ sí y sólo sí $a \in ker\ \eta_{p+r} = F_{p+r-1}A_{p+q+1}$, pero como inicialmente $a \in Z^r_{p+r,q-r+1}$ se tiene que $\partial a \in F_pA_{p+q}$, así vamos a tener que $Ind\ \partial_1 = \eta_p\partial Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}$.

3. $Def\ \partial_2 = \eta_p Z^r_{p,q}$.
   Como
   $$\begin{aligned} \partial_2 &= \{(\eta_p a, \eta_{p-r}\partial a) \mid\ a\ \in F_pA_{p+q},\ \partial a\ \in F_{p-r}A_{p+q-1}\}, \\ \partial_2 &= \{(\eta_p a, \eta_{p-r}\partial a) \mid\ a \in Z^r_{p,q}\} \end{aligned}$$
   y por definición de $Def\ \partial_2$, inmediatamente se tiene el resultado.

4. $ker\ \partial_2 = \eta_p Z^{r+1}_{p,q}$.
   Como
   $$\begin{aligned} \partial_2 &= \{(\eta_p a, \eta_{p-r}\partial a) \mid\ a\ \in F_pA_{p+q},\ \partial a\ \in F_{p-r}A_{p+q-1}\}, \\ \partial_2 &= \{(\eta_p a, \eta_{p-r}\partial a) \mid\ a \in Z^r_{p,q}\}. \end{aligned}$$
   Ahora $\eta_p a\ \in ker\ \partial_2$ sí y sólo sí $\eta_{p-r}\partial a = 0$ sí y sólo sí $\partial a\ \in\ ker\ \eta_{p-r} = F_{p-r-1}A_{p+q-1}$.
   Pero como $a \in Z^r_{p,q}$ entonces $a \in F_pA_{p+q}$, por lo tanto se tiene que $ker\ \partial_2 = \eta_p Z^{r+1}_{p,q}$.

Ahora sabemos que la indeterminación de una relación aditiva está contenida en su imagen, por lo tanto de 1 y 2 se tiene que $\eta_p\partial Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2} \subset \eta_p\partial Z^r_{p+r,q-r+1}$ y como η_p es sobreyectiva tenemos que $\partial Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2} \subset \partial Z^r_{p+r,q-r+1}$. Por otro lado, el núcleo de una relación aditiva está contenida en el dominio de definición de ésta relación aditiva, entonces de 2 y 3 se tiene que $\eta_p Z^{r+1}_{p,q} \subset \eta_p Z^r_{p,q}$, pero como η_p es sobreyectiva se tiene que $Z^{r+1}_{p,q} \subset Z^r_{p,q}$.Por último probemos que $\partial Z^r_{p+r,q-r+1} \subset Z^{r+1}_{p,q}$.
Como
$$\begin{aligned} Z^r_{p+r,q-r+1} &= \{a \mid a \in F_{p+r}A_{p+q+1}, \partial a \in F_pA_{p+q}\} \text{ y} \\ Z^{r+1}_{p,q} &= \{a \mid a \in F_pA_{p+q}, \partial a \in F_{p-r-1}A_{p+q-1}\}. \end{aligned}$$
Entonces, si $a \in \partial Z^r_{p+r,q-r+1}$ se tiene que $\partial a \in F_pA_{p+q}$, así $\partial\partial a \in F_pA_{p+q-1}$ y $\partial\partial a = 0$, luego $\partial\partial a = 0$ en $F_{p-r-1}A_{p+q-1}$, por lo tanto $a \in Z^{r+1}_{p,q}$.
Sea
$$E^r_{p,q} = (\eta_p Z^r_{p,q})/(\eta_p\partial Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}), \quad r = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3.1}$$

Con estos bimódulos podemos construir los diferenciales de grado $(-r, r-1)$:

$$E^r_{p+r,q-(r-1)} \overset{d^r_1}{\to} E^r_{p,q} \overset{d^r_2}{\to} E^r_{p-r,q+r-1}$$

que son inducidos por el diferencial $\partial : A \to A$, donde se puede ver que $Im\ d^r_1 = \frac{\eta_p \partial Z^r_{p+r,q}}{\eta_p \partial Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}}$, $ker\ d^r_2 = \eta_p Z^{r+1}_{p,q}/\eta_p \partial Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}$ y que $Im\ d^r_1 \subset ker\ d^r_2$. Pero por definición de homología $H_{p,q}(E) = ker\ d^r_2/Im\ d^r_1$. Por lo tanto

$$H_{p,q}(E) = \eta_p Z^{r+1}_{p,q}/\eta_p \partial Z^r_{p+r,q} = E^{r+1}_{p,q}.$$

Luego hemos obtenido una sucesión espectral cuando $r = 0$, $Z^0_{p,q} = F_p A_{p+q}$ y $d^0 : E^0_{p,q} \to E^0_{p,q-1}$ es el diferencial del cociente $E^0_{p,q} = F_p A_{p+q}/F_{p-1}A_{p+q}$. Luego

$$E^1_{p,q} = H_{p,q}(F_p A_{p+q}/F_{p-1}A_{p+q}) \cong H_{p+q}(F_p A_{p+q}/F_{p-1}A_{p+q}).$$

Ahora probemos que $E^\infty_{p,q} \cong F_p(H_{p+q}(A))/F_{p-1}(H_{p+q}(A))$.
Introducimos las notaciones $C = ker\ \partial$ y $B = \partial\ A$ respectivamente para los módulos de los ciclos y fronteras del módulo A. Entonces F induce en C y en B las filtraciones:

$$F_p C = C \cap F_p A, \quad F_p B = B \cap F_p A.$$

Pero

$$\begin{aligned} F_p(H(A)) &= Im\{i_* : H(F_p A) \to H(A)\} \\ &\cong H(F_p A)/ker\ i_* \\ &= F_p A \cap C/F_p A \cap B. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de la definición de $F_p C$ y $F_p B$, obtenemos que:

$$F_p(H(A)) \cong F_p C/F_p B. \tag{3.2}$$

Sea $T = B$, $S = F_p A \cap C$, entonces por el lema 3.2:

$$\begin{aligned} F_p A \cap C/(F_p A \cap C) \cap B &\cong ((F_p A \cap C) \cup B)/B \\ F_p C/(F_p B \cap C) &\cong (F_p C \cup B)/B \\ F_p C/F_p B &\cong (F_p C \cup B)/B \end{aligned}$$

luego de este isomorfismo y la ecuación (3.2):

$$F_p(H(A)) \cong (F_p C \cup B)/B$$

por lo tanto,

$$F_p(H(A))/F_{p-1}(H(A)) \cong (F_p C \cup B)/(F_{p-1} C \cup B). \tag{3.3}$$

Sea $S = F_p C$, $U = F_{p-1}C$ y $T = B$ como en el lema 3.3, entonces:

$$(F_p C \cup B)/(F_{p-1} C \cup B) \cong F_p C/(F_{p-1} C \cup (F_p C \cap B))$$

pero $F_pC \cap B = (F_pA \cap C) \cap B = F_pA \cap B = F_pB$, así:

$$(F_pC \cup B)/(F_{p-1}C \cup B) \cong F_pC/(F_{p-1}C \cup F_pB),$$

por lo tanto la ecuación (3.3) nos queda de la siguiente manera:

$$F_p(H(A))/F_{p-1}(H(A)) \cong F_pC/(F_{p-1}C \cup F_pB). \tag{3.4}$$

Ahora ocupando nuevamente el último teorema con $U = F_pB$, $S = F_pC$ y $T = F_{p-1}A$, entonces:

$$(F_pC \cup F_{p-1}A)/(F_pB \cup F_{p-1}A) \cong F_pC/(F_pB \cup (F_pC \cap F_{p-1}A))$$

pero $F_pC \cap F_{p-1}A = (C \cap F_pA) \cap F_{p-1}A = C \cap F_{p-1}A = F_{p-1}C$, luego la ecuación (3.4) nos da lo siguiente:

$$F_p(H(A))/F_{p-1}(H(A)) \cong (F_pC \cup F_{p-1}A)/(F_pB \cup F_{p-1}A). \tag{3.5}$$

Por otro lado en la definición de $E^r_{p,q}$ de la ecuación (3.1),

$$\begin{aligned}
\eta_p Z^r_{p,q} &= Z^r_{p,q}/F_{p-1}A_{p+q} = (Z^r_{p,q} \cup F_{p-1}A_{p+q})/F_{p-1}A_{p+q} \\
\eta_p \partial Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2} &= \partial Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}/F_{p-1}A_{p+q} = (\partial Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2} \cup F_{p-1}A_{p+q})/F_{p-1}A_{p+q}
\end{aligned}$$

por lo tanto, sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en la ecuación (3.1) y haciendo el cociente, obtenemos:

$$E^r_{p,q} = (Z^r_{p,q} \cup F_{p-1}A_{p+q})/(\partial Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2} \cup F_{p-1}A_{p+q}). \tag{3.6}$$

Ahora supongamos que la filtración está acotada y consideremos p y q tal que $n = p + q$. Si $a \in Z^r_{p,q} \subset F_pA_{p+q}$ entonces por definición de $Z^r_{p,q}$, $\partial a \in F_{p-r}A_{p+q-1}$, ahora si r es muy grande como la filtración está acotada entonces $\partial a = 0$. Luego $a \in ker\ \partial \subset F_pA_{p+q}$, entonces $a \in F_pC_{p+q} = C_{p+q} \cap F_pA_{p+q}$.
Por lo tanto cuando r es muy grande el miembro superior de la ecuación (3.6) es igual a $F_pC_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q}$.
Con repecto al miembro inferior, cuando r es muy grande cada elemento de F_pB_{p+q} es frontera de un elemento de $F_{p+r-1}A_{p+q+1}$, es decir de un elemento de $Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}$. Así cuando r es muy grande el miembro inferior es igual a $F_pB_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q}$.
Pero E^∞ se define como el cociente de la intersección de los módulos superiores módulo la unión de los inferiores, luego

$$\begin{aligned}
E^\infty_{p,q} &= (F_pC_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q})/(F_pB_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q}) \\
&\cong F_p(H_{p+q}(A))/F_{p-1}(H_{p+q}(A)) \quad \text{por la ecuación (3.5)}
\end{aligned}$$

■

Definición 3.5. *Una filtración F de un FDG_R-módulo A se llama convergente superiormente si A es la unión de todos los submódulos F_pA y es acotada inferiormente si para cada grado n existe un número entero $s = s(n)$ tal que $F_sA_n = 0$.*

Teorema 3.2. *Si la filtración F es acotada inferiormente y converge superiormente, entonces se tiene el isomorfismo $E^{\infty}_{p,q} \cong F_p(H_{p+q}(A))/F_{p-1}(H_{p+q}(A))$ y la sucesión espectral de la filtración F es acotada inferiormente.*

Demostración. Como F es acotada inferiormente para r grande, el miembro superior de $E^r_{p,q}$ es igual a $F_pC_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q}$. Luego la intersección de los miembros superiores es igual a $F_pC_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q}$, cada elemento de F_pB_{p+q} es frontera ∂a de algún elemento $a \in A_{p+q} = \cup F_tA_{p+q}$; luego $a \in F_tA_{p+q}$ para algún t. Entonces $a \in Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}$ para $r = t-p+1$. Luego $F_pB_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q}$ es unión de los submódulos $\partial Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2} \cup F_{p-1}A_{p+q}$. Entonces

$$E^{\infty}_{p,q} \cong F_pC_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q}/F_pB_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q} \cong F_p(H_{p+q}(A))/F_{p-1}(H_{p+q}(A))$$

Es claro que la sucesión espectral de la filtración F es acotada inferiormente. ■

Definición 3.6. *La filtración F de un FDG_R-módulo A es canónicamente acotada si $F_{-1}A = 0$ y $F_nA_n = A_n$ para cada grado n.*

Teorema 3.3. *Si F es una filtración canónicamente acotada de un FDG_R-módulo A, entonces la sucesión espectral de la filtración F está en el primer cuadrante y la filtración inducida del módulo $H(A)$ es finita y tiene forma:*

$$0 = F_{-1}H_n(A) \subset F_0H_n(A) \subset F_1H_n(A) \subset \cdots \subset F_nH_n(A) = H_n(A)$$

además los factores sucesivos $F_pH_n(A)/F_{p-1}H_n(A) \cong E^{\infty}_{p,q}$, bajo isomorfismos inducidos por 1_A.

Demostración. Supongamos que $n = p+q$. Como $F_{-1}A_n = 0$, $E^1_{p,q} = H(F_pA_n/F_{p-1}A_n) = 0$ para $p < 0$. Como $F_nA_n = A_n$, entonces si $q < 0$, tenemos que $n < p$, luego $F_pA_n = F_{p-1}A_n$. Por lo tanto $E^1_{p,q} = 0$ para $q < 0$.
Luego los miembros $E^r_{p,q}$ no ceros están en el primer cuadrante. La filtración inducida a $H_n(A_n)$ es finita y como lo enuncia el teorema se sigue directamente de la definición para la filtración de homología. Ya que la filtración es canónicamente acotada entonces por definición está acotada, así siguiendo la demostración del teorema 3.1, el isomorfismo $F_p(H(A))/F_{p-1}(H(A)) \cong (F_pC \cup F_{p-1}A)/(F_pB \cup F_{p-1}A)$ (ecuación (3.5)) es inducido por la identidad $1_A : A \to A$ (esto se deduce de los isomorfismos de las ecuaciones (3.3), (3.4) de este mismo teorema), además se tiene el isomorfismo $E^{\infty}_{p,q} \cong F_pC_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q}/F_pB_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q} \cong F_p(H_{p+q}(A))/F_{p-1}(H_{p+q}(A))$.
■

NOTA: En general, la sucesión espectral de la filtración F la define no $H(A)$, sino los subcocientes $F_pH/F_{p-1}H$, afirmando al mismo tiempo que cada uno de ellos son subcocientes del módulo $E^1_p = H(F_pA/F_{p-1}A)$.

Teorema 3.4. *Sean A, $A^{'}$ DG_R-módulos con filtraciones F y $F^{'}$ que son acotadas inferiormente y que convergen superiormente. Si $\alpha : (F, A) \to (F^{'}, A^{'})$ es un homomorfismo tal que*

$$\alpha^t : E^t(F, A) \cong E^{'t}(F^{'}, A^{'})$$

es un isomorfismo, entonces los homomorfismos α^r son isomorfismos para $\infty \geq r \geq t$ y además $\alpha_* : H(A) \to H(A^{'})$ es un isomorfismo.

Demostración. Como las dos sucesiones espectrales son acotadas inferiormente, entonces por el teorema (2.1) α^r y $\alpha^\infty : E^\infty \to E^{'\infty}$ son isomorfismos.
Supongamos que $p+q=n$ y consideremos $\alpha_n : H_n(A) \to H_n(A^{'})$ para un grado fijo n y los correspondientes $\alpha_{p,n} : F_pH_n \to F_p^{'}H_n^{'}$. Como las dos filtraciones son acotadas inferiormente, existe un número entero $s = s(n)$ tal que $F_sH_n = 0 = F_s^{'}H_n^{'}$. Además por el teorema 3.2 se tiene el isomorfismo $E_{p,q}^\infty \cong F_pH_n(A)/F_{p-1}H_n(A)$. Obtenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_{p-1}H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{p-1,n}"] & F_pH_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{p,n}"] & E_{p,n-p}^\infty \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^\infty"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_{p-1}^{'}H_n(A^{'}) \arrow[r] & F_p^{'}H_n(A^{'}) \arrow[r] & (E_{p,n-p}^{'})^\infty \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Como α^∞ es un isomorfismo y por inducción sobre p y el lema de los 5 obtenemos que $\alpha_{p,n}$ es un isomorfismo. La filtración F converge superiormente, por eso $H_n(A) = \cup F_pH_n(A)$. Entonces α_n es un isomorfismo. ■

3.3. Primera y segunda sucesión espectral.

Definición 3.7. *Un bicomplejo K es una familia $\{K_{p,q}\}$ de módulos con dos familias*

$$\partial^{'} : K_{p,q} \to K_{p-1,q}, \quad \partial^{''} : K_{p,q} \to K_{p,q-1}$$

de homomorfismos de módulos definidos para todo p, q, tales que

$$\partial^{'}\partial^{'} = 0, \;\; \partial^{'}\partial^{''} + \partial^{''}\partial^{'} = 0, \;\; \partial^{''}\partial^{''} = 0$$

Luego K es un Z-módulo bigraduado y $\partial^{'}$ y $\partial^{''}$ son homomorfismos de bigrados $(-1,0)$ y $(0,-1)$ respectivamente.
Un bicomplejo es positivo si está en el primer cuadrante ($K_{p,q} = 0$ si $p < 0$ o $q < 0$).

Definición 3.8. *Un homomorfismo $f : K \to L$ de bicomplejos es un homomorfismo de módulos bigraduados de grado 0 que permuta con los diferenciales $f\partial^{'} = \partial^{'}f$ y $f\partial^{''} = \partial^{''}f$.*

Los objetos $K_{p,q}$ de un bicomplejo pueden ser R-módulos, Λ-módulos, módulos graduados y objetos de alguna categoría abeliana.

Definición 3.9. *La homología iterada $H^{'}H^{''}$ de un bicomplejo K es un objeto bigraduado que se define como*

$$H_p^{'}H_q^{''}(K) = ker(\partial^{'} : H_{p,q}^{''} \to H_{p-1,q}^{''})/\partial^{'}H_{p+1,q}^{''}$$

donde

$$H_{p,q}^{''} = ker(\partial^{''} : K_{p,q} \to K_{p,q-1})/\partial^{''}K_{p,q+1}$$

La homología iterada $H^{''}H^{'}K$ se define de forma análoga.

Definición 3.10. *Sea K un bicomplejo. Entonces K define un complejo $X = Tot(K)$, donde $X_n = \sum_{p+q=n} K_{p,q}$ y $\partial = \partial' + \partial'' : X_n \to X_{n-1}$.*

Definición 3.11. *La primera filtración F' del complejo $X = Tot(K)$ se define mediante los subcomplejos F'_p:*

$$(F'_pX)_n = \sum_{i\leq p} K_{i,n-i}$$

Definición 3.12. *La sucesión espectral asociada a esta filtración se llama la primera sucesión espectral E' de un bicomplejo.*

Teorema 3.5. *Para la primera sucesión espectral E' del bicomplejo K con complejo completo asociado X existen isomorfismos naturales*

$$E'^2_{p,q} \cong H'_pH''_q(K)$$

Si $K_{p,q} = 0$ cuando $p < 0$, entonces $E'^2_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(X)$. Si K es positivo, entonces E está en el primer cuadrante.

Demostración. Sea $E = E'$ la primera sucesión espectral.
Entonces por el teorema 3.1, $E^1_{p,q} \cong H_{p+q}(F'_pX/F'_{p-1}X)$.
Probemos que $H_{p+q}(F'_pX/F'_{p-1}X) \cong H''_{p,q}(K)$.
Sabemos que:

$$H_{p+q}(F'_pX/F'_{p-1}X) = \frac{ker\{(\partial' + \partial'') : \frac{(F'_pX)_n}{(F'_{p-1}X)_n} \to \frac{(F'_pX)_{n-1}}{(F'_{p-1}X)_{n-1}}\}}{Im\{(\partial' + \partial'') : \frac{(F'_pX)_{n+1}}{(F'_{p-1}X)_{n+1}} \to \frac{(F'_pX)_n}{(F'_{p-1}X)_n}\}}$$

Pero:

$$\begin{aligned}
(F'_pX)_{n+1} &= K_{p,q+1} \oplus K_{p-1,q+2} \oplus K_{p-2,q+3} \oplus \cdots \\
(F'_{p-1}X)_{n+1} &= K_{p-1,q+2} \oplus K_{p-2,q+3} \oplus K_{p-3,q+4} \oplus \cdots \\
(F'_pX)_n &= K_{p,q} \oplus K_{p-1,q+1} \oplus K_{p-2,q+2} \oplus \cdots \\
(F'_{p-1}X)_n &= K_{p-1,q+1} \oplus K_{p-2,q+2} \oplus K_{p-3,q+3} \oplus \cdots \\
(F'_pX)_{n-1} &= K_{p,q-1} \oplus K_{p-1,q} \oplus K_{p-2,q+1} \oplus \cdots \\
(F'_{p-1}X)_{n-1} &= K_{p-1,q} \oplus K_{p-2,q+1} \oplus K_{p-3,q+2} \oplus \cdots
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{(F'_pX)_{n+1}}{(F'_{p-1}X)_{n+1}} \cong K_{p,q+1}, \quad \frac{(F'_pX)_n}{(F'_{p-1}X)_n} \cong K_{p,q}, \quad \frac{(F'_pX)_{n-1}}{(F'_{p-1}X)_{n-1}} \cong K_{p,q-1}$$

así,

$$\begin{aligned} H_{p+q}(F_p^{'}X/F_{p-1}^{'}X) &\cong \frac{ker\{\partial^{''}: K_{p,q} \to K_{p,q-1}\}}{Im\{\partial^{''}: K_{p,q+1} \to K_{p,q}\}} \\ &= H_{p,q}^{''}(K) \end{aligned}$$

por lo tanto $E_{p,q}^1 \cong H_{p,q}^{''}(K)$. Pero por definición de sucesión espectral tenemos que $E_{p,q}^2 \cong H(E_{p,q}^1, d^1)$ donde $d^1 : E_{p,q}^1 \to E_{p-1,q}^1$, pero como $E_{p,q}^1 \cong H_{p,q}^{''}(K)$ vamos a tener que $E_{p,q}^2 \cong H(H_{p,q}^{''}, \partial^{'}) = H_p^{'}H_q^{''}(K)$. Como cada módulo X_n es la unión de todos los $F_p^{'}X_n$, entonces por la definición 3.5, la primera filtración converge superiormente. Si $K_{p,q} = 0$ para $p < 0$, entonces $F_{-1}^{'}X = 0$, luego por la definición 3.5, la filtración está acotada inferiormente. Luego, por el teorema 3.2 se tiene que $E_{p,q}^{\infty} \cong F_p(H_{p+q}(X))/F_{p-1}(H_{p+q}(X))$; por lo tanto, por la definición 3.4 obtenemos que $E_{p,q}^2 \Rightarrow H_{p+q}(X)$.
Como el complejo K es positivo, el isomorfismo $E_{p,q}^2 \cong H_p^{'}H_q^{''}(X)$ muestra que E está en el primer cuadrante. ■

Definición 3.13. *Sea $K = \{K_{q,p}\}$ el bicomplejo con complejo total asociado $X = Tot(K)$. Entonces la segunda filtración $F^{''}$ se define mediante la fórmula*

$$(F_p^{''}X)_n = \sum_{j \leq p} K_{n-j,j}$$

Definición 3.14. *La sucesión espectral asociada a esta filtración se llama la segunda sucesión espectral $E^{''}$ de un bicomplejo.*

Similar a la primera sucesión espectral vamos a tener que $(E_{p,q}^{''})^2 \cong H_p^{''}H_q^{'}(\{K_{q,p}\})$.
Si $K_{q,p} = 0$ para $p < 0$, entonces esta sucesión converge a la filtración $F^{''}$ del complejo $H(X)$. Si el bicomplejo K es positivo, entonces ambas sucesiones espectrales están en el primer cuadrante y converge a diferentes filtraciones $F^{'}$ y $F^{''}$ del mismo módulo graduado $H(X)$.

3.3.1. El complejo total $F \otimes_G C$.

Definición 3.15. *Sea F una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$ y $C = (C_n)_{n\geq 0}$ un complejo de cadenas no negativa. Sea $F \otimes_G C$ el complejo total del bicomplejo $\{F_p \otimes_G C_q\}_{p,q\geq 0}$ con diferencial $\partial_n : \bigoplus_{p+q=n} F_p \otimes_G C_q \to \bigoplus_{p+q=n-1} F_p \otimes_G C_q$. Definimos la homología de grupos con coeficientes en una cadena de complejos como $H_*(G, C) = H_*(F \otimes_G C)$, donde:*

$$H_*(F \otimes_G C) = \frac{ker\ \partial_n}{Im\ \partial_{n+1}}$$

En el caso de que C consiste de un solo módulo M concentrado en dimensión 0, entonces $H_*(G, C) = H_*(G, M)$. Enunciemos el siguiente lema:

Lema 3.4. *Si F es un R-módulo derecho plano, entonces $F \otimes H_nC \cong H_n(F \otimes C)$.*

Proposición 3.1. *La primera sucesión espectral del bicomplejo* $\{F_p \otimes_G C_q\}_{p,q\geq 0}$ *con complejo total asociado* $F \otimes_G C$ *converge a* $H_{p+q}(G, C) = H_{p+q}(F \otimes_G C)$.

Demostración. De acuerdo con la demostración del teorema 3.5:

$$E^1_{p,q} \cong H^{''}_{p,q}(\{F_p \otimes_G C_q\}_{p,q\geq 0}) = H_q(F_p \otimes_G C_*, \partial^{''})$$

donde $\partial^{''} : F_p \otimes_G C_q \to F_p \otimes_G C_{q-1}$.
Entonces por el lema 3.4, sabiendo que F_p es proyectivo luego plano se tiene que:

$$E^1_{p,q} = H_q(F_p \otimes_G C_*) = F_p \otimes_G H_q(C_q).$$

y

$$E^2_{p,q} = H_p(F \otimes_G H_q(C_q)) = H_p(G, H_q(C_q))$$

Entonces por el teorema 3.5 la primera sucesión espectral tiene la siguiente forma

$$E^2_{p,q} = H_p(G, H_q(C_q)) \Rightarrow H_{p+q}(G, C)$$

■

Teorema 3.6. *Si* $\tau : C \to C^{'}$ *es una equivalencia débil de* G*-complejos de cadenas, entonces* $H_*(G, C) \cong H_*(G, C^{'})$.

Demostración. El mapeo τ induce un mapeo entre sucesiones espectrales y como τ es una equivalencia débil, entonces

$$E^2_{p,q} = H_p(G, H_qC) \cong H_p(G, H_qC^{'}) = E^{'2}_{p,q}$$

Entonces por el teorema 2.1, τ induce un isomorfismo entre $E^\infty_{p,q} \cong E^{'\infty}_{p,q}$, y de acuerdo a la demostración del teorema 3.5:

$$F_p(H_{p+q}(G, C))/F_{p-1}(H_{p+q}(G, C)) \cong F_p(H_{p+q}(G, C^{'}))/F_{p-1}(H_{p+q}(G, C^{'})),$$

luego por el lema 3.1 obtenemos que:

$$H_*(G, C) \cong H_*(G, C^{'})$$

■

Proposición 3.2. *La segunda sucesión espectral del bicomplejo* $\{F_q \otimes_G C_p\}_{p,q\geq 0}$ *con complejo total asociado* $F \otimes_G C$ *converge a* $H_{p+q}(G, C) = H_{p+q}(F \otimes_G C)$.

Demostración. La demostración es similar a la demostración de la primera sucesión espectral:

$$\begin{aligned} E^1_{p,q} &= H_q(F_* \otimes_G C_p) = H_q(G, C_p) \\ E^2_{p,q} &= H_pH_q(G, C_p) \end{aligned}$$

Luego $E^2_{p,q} = H_pH_q(G, C_p) \Rightarrow H_{p+q}(G, C)$. ■
De las dos sucesiones espectrales podemos decir que son aproximaciones de $H_*(G, C)$ en términos de grupos de homología $H_*(G, M)$.
Ahora veamos unos casos particulares:

1. Supongamos que G actúa trivialmente sobre C.
   Entonces $F \otimes_G C \cong F_G \otimes C$ y obtenemos la fórmula de Künneth:
   $$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_pG \otimes H_qC \to H_n(G,C) \to \bigoplus_{p+q=n-1} Tor(H_pG, H_qC) \to 0$$
   que describe a $H_*(G,C)$ en términos de H_*G y H_*C.
   Análogamente, si k es un campo y C es un complejo de espacios vectoriales sobre k con acción trivial de G, entonces
   $$H_*(G,C) \cong H_*(G,k) \otimes_k H_*C$$

2. Supongamos que cada $\mathbb{Z}[G]$-módulo C_p es libre o que al menos es H_*-acíclico.
   En este caso de la segunda sucesión espectral tenemos que:
   $$E^1_{p,q} = H_q(G, C_p) = \begin{cases} 0 & \text{para } q \neq 0 \\ (C_p)_G & \text{para } q = 0 \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que C_p es un módulo $\mathbb{Z}[G]$-libre.
Como C_p es un módulo libre entonces es un módulo proyectivo, por lo tanto, por definición de H_*-acíclico se tiene que $H_q(G, C_p) = 0$ para $q > 0$.
Calculemos $H_0(G, C_p)$:
Por definición de H_0 tenemos que:
$$H_0(G, C_p) = H_0(F_0 \otimes_G C_p)$$
pero como C_p es proyectivo luego entonces es plano, aplicando el lema 3.4 a C_p obtenemos que:
$$H_0(F_0 \otimes_G C_p) \cong H_0(F_0) \otimes_G C_p$$
pero $H_0(F_0) \cong \mathbb{Z}$, por lo tanto:
$$H_0(G, C_p) \cong (C_p)_G$$
Hagamos un análisis de esta sucesión espectral:

1. Para $q \neq 0$.
   Por el resultado anterior $E^1_{p,q} = 0$, así de esta manera por definición de sucesión espectral es claro que $0 = E^2_{p,q} = \cdots = E^\infty_{p,q}$.

2. Para $q = 0$.
   Como
   $$E^{r+1}_{p,0} = \frac{ker\{E^r_{p,0} \to E^r_{p-r,r-1}\}}{Im\{E^r_{p+r,-r+1} \to E^r_{p,0}\}}$$
   entonces para $r = 1$:
   $$E^2_{p,0} = \frac{ker\{E^1_{p,0} \to E^1_{p-1,0}\}}{Im\{E^1_{p+1,0} \to E^1_{p,0}\}}$$
   $$E^2_{p,0} = \frac{ker\{(C_p)_G \to (C_{p-1})_G\}}{Im\{(C_{p+1})_G \to (C_p)_G\}}$$

pero el último renglón es la homología de los coinvariantes, por lo tanto:

$$E^2_{p,0} = H_p((C_p)_G)$$

por otro lado, para $r \geq 2$; $E^r_{p-r,r-1} = E^r_{p+r,-r+1} = 0$, de esta manera $E^{r+1}_{p,0} = E^r_{p,0}$, luego $E^2_{p,0} = \cdots = E^\infty_{p,0}$. Por lo tanto $E^\infty_{p,0} = H_p((C_p)_G)$.

■

De lo anterior obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.7. *Sea C un complejo de cadenas no negativo de G-módulos tal que cada módulo C_n es H_*-acíclico. Entonces existe una sucesión espectral de la forma*

$$E^2_{p,q} = H_p(G, H_qC) \Rightarrow H_{p+q}(C_G)$$

3.3.2. La sucesión espectral de Hochschild-Serre.

Teorema 3.8 (**Hochschild-Serre**). *Para cualquier extensión de grupos $1 \to H \to G \to Q \to 1$ y cualquier G-módulo M existe una sucesión espectral de la forma*

$$E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(H, M)) \Rightarrow H_{p+q}(G, M)$$

NOTA: Se tiene una sucesión espectral análoga en cohomología, se construye fácilmente probando que $Hom_G(F, M) = (Hom_H(F, M))^Q$.

Demostración. Enunciaremos el siguiente lema que ocuparemos para la demostración del teorema:

Lema 3.5. *1. Para cualquier G-conjunto S se tiene que $(\mathbb{Z}[S])_G \cong \mathbb{Z}[S/G]$.*

2. Sea H un subgrupo normal de G y M un G-módulo.
La acción de G sobre M induce una acción de G/H sobre M_H.

a*)* $M_G \cong (M_H)_{G/H}$

b*)* $M_H \cong_{G/H} \mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$

Continuando con la demostración:
Sea F una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$ y M un G-módulo.
Sea $C_p = (F_p \otimes M)_H$. Entonces C_p es un G/H-módulo y es H_*-acíclico.
Demostración:
La acción que permite que C_p sea un G/H-módulo es la siguiente:

$$\begin{array}{rcl} G/H \times (F_p \otimes M)_H & \to & (F_p \otimes M)_H \\ (gH \quad, \overline{x \otimes m}) & \to & \overline{g(x \otimes m)} = \overline{gx \otimes gm} \end{array}$$

Ahora probemos que C_p es H_*-acíclico.
Como $F_p = \sqcup \mathbb{Z}[G]$, entonces:

$$C_p = (F_p \otimes M)_H = [(\sqcup \mathbb{Z}[G]) \otimes M]_H \cong [\sqcup(\mathbb{Z}[G] \otimes M)]_H$$

Entonces es suficiente probar que $(\mathbb{Z}[G] \otimes M)_H$ es H_*-acíclico.
Por el lema 3.5 tenemos que:

$$\begin{array}{rcl}(\mathbb{Z}[G] \otimes M)_H & \cong_{G/H} & \mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} M) \\ & \cong & (\mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G]) \otimes_{\mathbb{Z}} M \\ & \cong & \mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}} M\end{array}$$

pero por el lema de Shapiro, se tiene que $\mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}} M$ es H_*-acíclico, por lo tanto $(\mathbb{Z}[G] \otimes M)_H$ es H_*-acíclico.
Ya que $F \otimes_H M = (F \otimes M)_H$ es un complejo de cadenas de G/H-módulos y como cada $C_p = (F_p \otimes M)_H$ son H_*-acíclicos para cada p, entonces por el teorema 3.7:

$$E^2_{p,q} = H_p(G/H, H_q(F \otimes_H M)) \quad \Rightarrow \quad H_{p+q}((F \otimes_H M)_{G/H})$$

pero $F \otimes_G M = (F \otimes M)_G$, entonces por el lema 3.5 obtenemos:

$$F \otimes_G M = (F \otimes M)_G \cong ((F \otimes M)_H)_{G/H} = (F \otimes_H M)_{G/H}$$

por lo tanto

$$H_*(F \otimes_G M) \cong H_*((F \otimes_H M)_{G/H})$$

luego, la sucesión espectral tiende a $H_{p+q}(F \otimes_G M)$, es decir;

$$E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(H, M)) \quad \Rightarrow \quad H_{p+q}(G, M)$$

■

Corolario 3.1. *Sea $1 \to H \to G \to Q \to 1$ una extensión de grupos y M un G-módulo. Entonces se tiene la siguiente sucesión exacta:*

$$H_2(G, M) \to H_2(Q, M_H) \to H_1(H, M)_Q \to H_1(G, M) \to H_1(Q, M_H) \to 0$$

Demostración. Probemos que la filtración del DG_R-módulo $X = F \otimes_G M$ está canónicamente acotada:
NOTA:Trabajaremos con la primera filtración:
Como $M_i = M$ para toda i, entonces:

$$(F'_{-1}X)_n = (F_{-1} \otimes_G M) \oplus (F_{-2} \otimes_G M) \oplus \cdots = 0$$

Ahora veamos que $(F'_n X)_n = X_n$:

$$\begin{array}{rcl}(F'_n X)_n & = & \oplus_{i \le n} K_{i,n-i} \\ & = & (F_n \otimes_G M) \oplus (F_{n-1} \otimes_G M) \oplus \cdots \oplus (F_1 \otimes_G M) \oplus (F_0 \otimes_G M)\end{array}$$

Así nuestra filtración está canónicamente acotada, luego por el teorema 3.3 la sucesión espectral de la filtración F' está en el primer cuadrante,

$$0 = F'_{-1}H_n(G, M) \subset F'_0 H_n(G, M) \subset F'_1 H_n(G, M) \subset \cdots \subset F'_n H_n(G, M) = H_n(G, M) \tag{3.7}$$

y

$$E^{\infty}_{p,q} = F_pH_{p+q}(G,M)/F_{p-1}H_{p+q}(G,M) \tag{3.8}$$

Probemos que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to E^{\infty}_{0,1} \xrightarrow{i'} H_1(G,M) \xrightarrow{\pi} E^{\infty}_{1,0} \to 0 \tag{3.9}$$

por la ecuación (3.8) para $p = 1$ y $q = 0$, tenemos:

$$E^{\infty}_{1,0} = F_1H_1(G,M)/F_0H_1(G,M)$$

pero por la ecuación (3.7), para $n = 1$ $F_1H_1(G,M) = H_1(G,M)$,

$$E^{\infty}_{1,0} = H_1(G,M)/F_0H_1(G,M)$$

por otro lado, por la ecuación (3.8) para $p = 0$ y $q = 1$:

$$E^{\infty}_{0,1} = F_0H_1(G,M)/F_{-1}H_1(G,M)$$

pero por la ecuación (3.7) $F_{-1}H_1(G,M) = 0$, por lo tanto

$$E^{\infty}_{0,1} = F_0H_1(G,M)$$

de esta manera es claro que la sucesión dada es exacta, ya que i' es la inclusión y π es el homomorfismo canónico.
Probemos que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to E^{\infty}_{2,0} \xrightarrow{i} E^2_{2,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{0,1} \xrightarrow{j} E^{\infty}_{0,1} \to 0 \tag{3.10}$$

donde i y j son los homomorfismos límites.
Demostración:
Como $E^3_{2,0} = ker\{d^2 : E^2_{2,0} \to E^2_{0,1}\}$ y además $E^{r+1}_{2,0} = ker\{d^r : E^r_{2,0} \to E^r_{2-r,r-1}\}$, entonces ya que E está en el primer cuadrante, $E^r_{2-r,r-1} = 0$ para $r \geq 3$, así $E^{r+1}_{2,0} = E^r_{2,0}$.
Por lo tanto

$$ker\ d^2 = E^3_{2,0} = \cdots = E^r_{2,0} = E^{r+1}_{2,0} = E^{\infty}_{2,0}$$

luego $im\ i = ker\ d^2$.
Como $E^3_{0,1} = E^2_{0,1}/im\ d^2 = E^{\infty}_{0,1}$, entonces $j : E^2_{0,1} \to (E^2_{0,1}/im\ d^2)$, por lo tanto es claro que $ker\ j = im\ d^2$.
Entonces de las sucesiones exactas (3.9) y (3.10), obtenemos la exactitud de la siguiente sucesión:

$$0 \to E^{\infty}_{2,0} \xrightarrow{i} E^2_{2,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{0,1} \xrightarrow{i'\circ j} H_1(G,M) \xrightarrow{\pi} E^2_{1,0} \to 0 \tag{3.11}$$

pero por las ecuaciones (3.8) y (3.7), para $p = 2$ y $q = 0$:

$$E^{\infty}_{2,0} = F_2H_2(G,M)/F_1H_2(G,M) = H_2(G,M)/F_1H_2(G,M) \tag{3.12}$$

y por Hochschild-Serre:

$$E^2_{2,0} = H_2(Q, H_0(H, M))$$

pero $H_0(H, M) = M_H$, así:

$$E^2_{2,0} = H_2(Q, M_H) \tag{3.13}$$

nuevamente por Hochschild-Serre:

$$E^2_{0,1} = H_0(Q, H_1(H, M))$$

pero $H_0(Q, H_1(H, M)) = H_1(H, M)_Q$, por lo tanto;

$$E^2_{0,1} = H_1(H, M)_Q \tag{3.14}$$

finalmente

$$E^2_{1,0} = H_1(Q, H_0(H, M)) = H_1(Q, M_H) \tag{3.15}$$

por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones (3.12), (3.13), (3.14) y (3.15) en la ecuación (3.11), obtenemos:

$$0 \to \frac{H_2(G, M)}{F_1 H_2(G, M)} \to H_2(Q, M_H) \to H_1(H, M)_Q \to H_1(G, M) \to H_1(Q, M_H) \to 0$$

pero como $\pi : H_2(G, M) \to H_2(G, M)/F_1 H_2(G, M)$ es epimorfismo, entonces la siguiente sucesión tambien es exacta:

$$H_2(G, M) \to H_2(Q, M_H) \to H_1(H, M)_Q \to H_1(G, M) \to H_1(Q, M_H) \to 0$$

■

Cálculos de Homología con Sucesiones Espectrales.

Utilizando el teorema de Hochschild-Serre daremos aproximaciones de la homología con coeficientes en $\mathbb{Z}$ del producto semidirecto de $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$.
Sea $G = H \rtimes Q$ el producto semidirecto de H y Q. Para la acción de Q sobre H, se tiene

$$\begin{array}{rcl} Q \times H & \to & H \\ (q, h) & = & \varphi(q)(h) \end{array} \tag{3.16}$$

donde $\varphi : Q \to Aut(H)$.
Además, tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \to H \to H \rtimes Q \to Q \to 0$$

donde H es normal en $H \rtimes Q$ y $Q \cong \frac{H \rtimes Q}{H}$.
NOTA: La acción que se obtiene de conjugar H dentro del producto semidirecto con elementos de Q coincide con la acción que dio origen al mismo producto:

$$(1, q)(h, 1)(1, q)^{-1} = (\varphi(q)(h), 1)$$

Si M es un $H \rtimes Q$-módulo entonces el teorema de Hochschild-Serre nos dice que existe una sucesión espectral de la forma

$$E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(H, M)) \Rightarrow H_{p+q}(H \rtimes Q, M) \tag{3.17}$$

Para describir la sucesión espectral, observamos que el grupo cociente Q actúa sobre la homología de H. Averigüemos cómo lo hace.
A continuación estaremos hablando en la categoría $\mathcal{C}$ donde un objeto es un par (G, M) tal que G es un grupo y M es un G-módulo y un morfismo $(G, M) \to (G^{'}, M^{'})$ es un par compatible (α, f); es decir, $\alpha : G \to G^{'}$ es un homomorfismo de grupos y $f : M \to M^{'}$ es un homomorfismo de grupos abelianos tal que $f(gm) = \alpha(g)f(m)$.
Sea $g \in H \rtimes Q$.
Como M es un $H \rtimes Q$-módulo y $H \lhd H \rtimes Q$ entonces tenemos el isomorfismo $c(g) : (H, M) \to (gHg^{-1}, M)$ en $\mathcal{C}$ dado por

$$(h \overset{\alpha_g}{\longmapsto} ghg^{-1}; m \overset{f_g}{\longmapsto} gm)$$

donde M es un H-módulo con la acción dada en la ecuación (3.17), definida por

$$\begin{array}{rcl} \circ_1 : H \times M & \to & M \\ (h, m) & = & h \circ_1 m \end{array} \tag{3.18}$$

Sea $F_\bullet \overset{\varepsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$ una resolución proyectiva de H-módulos.
Sea $\tau : F_\bullet \to F_\bullet$ la aplicación identidad $\tau(x) = x$, como $c(g)$ es un isomorfismo entonces existe $\alpha_{g^{-1}}$, luego a la resolución $F_\bullet \overset{\varepsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$ le podemos dar estructura de gHg^{-1}-módulos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} gHg^{-1} \times F & \to & F \\ (ghg^{-1}, x) & = & \alpha_{g^{-1}}(ghg^{-1})x = hx \end{array}$$

Así $\tau(hx) = hx = ghg^{-1}x = \alpha_g(h)x$, de esta manera τ es una aplicación de cadenas compatible con α_g.
Además la aplicación $\tau \otimes f_g : F_\bullet \otimes_H M \to F_\bullet \otimes_{gHg^{-1}} M$ dada por $\tau \otimes f_g(x \otimes m) = x \otimes gm$ es una aplicación de cadenas que induce el isomorfismo bien definido $c(g)_* : H_*(H, M) \to H_*(gHg^{-1}, M)$; es decir, $c(g)_*([x \otimes m]) = [x \otimes gm]$.
Por lo tanto, la acción conjugación de $H \rtimes Q$ sobre (H, M) induce una acción del grupo cociente Q sobre $H_*(H, M)$ dada por

$$\begin{array}{rcl} \circ_2 : Q \times H_*(H, M) & \to & H_*(H, M) \\ (q, [x \otimes m]) & = & [x \otimes q \circ_3 m] \end{array} \tag{3.19}$$

donde denotaremos como $\circ_3$ a la acción de Q sobre M.

Lema 3.6. *Sea H un grupo cíclico infinito con generador t, entonces*

$$H_q(H, M) \cong \begin{cases} M_H & q = 0 \\ M^H & q = 1 \\ 0 & q > 1. \end{cases}$$

Demostración. Para un grupo cíclico infinito, tenemos la siguiente resolución proyectiva de H-módulos:

$$0 \to \mathbb{Z}[H] \overset{t-1}{\to} \mathbb{Z}[H] \overset{\varepsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

así, aplicando a esta resolución el funtor $- \otimes_H M$, obtenemos:

$$H_q(H,M) = \begin{cases} \frac{\mathbb{Z}[H]\otimes_H M}{Im\,(t-1\otimes 1_M)} & q=0 \\ ker(t-1\otimes 1_M) & q=1 \\ 0 & q>1. \end{cases}$$

Probemos que $H_0 \cong M_H$.
Como $- \otimes_H M$ es un funtor exacto derecho entonces $\frac{\mathbb{Z}[H]\otimes_H M}{Im\,(t-1\otimes 1_M)} \cong_H \frac{\mathbb{Z}[H]\otimes_H M}{ker\,(t-1\otimes 1_M)} \cong_H \mathbb{Z} \otimes_H M$, donde el último H-isomorfismo $\varphi : \frac{\mathbb{Z}[H]\otimes_H M}{ker\,(t-1\otimes 1_M)} \to \mathbb{Z} \otimes_H M$ es dado por $\varphi[x\otimes m] = \varepsilon(x) \otimes m$. Además, $\mathbb{Z} \otimes_H M$ y M_H son H-módulos bajo la acción:

$$\begin{array}{rcl} H \times \mathbb{Z} \otimes_H M & \to & \mathbb{Z} \otimes_H M \\ (h, n\otimes m) & = & n\otimes m = n \otimes hm \\ H \times M_H & \to & M_H \\ (h,[m]) & = & [hm] = [m] \end{array}$$

entonces $\mathbb{Z} \otimes_H M \cong_H M_H$ bajo el H-homomorfismo $\theta : \mathbb{Z}\otimes_H M \to M_H$ dado por $\theta(n\otimes m) = [nm]$.
Mostremos que $H_1 \cong M^H$.
$ker(t-1\otimes 1_M) = \{x\otimes m \in \mathbb{Z}[H]\otimes_H M \mid tx\otimes m = x\otimes m\}$, además $ker(t-1\otimes 1_M) \cong ker(t-1)M$ bajo el homomorfismo $\gamma : ker(t-1\otimes 1_M) \to ker(t-1)M$ dado por $\gamma(x\otimes m) = xm$, por lo tanto $ker(t-1)M = \{xm \in ker(t-1)M \mid txm = xm\} = \{m \in M \mid m \in M^H\}$. ■

Lema 3.7. *Supongamos que tenemos la sucesión espectral dada por la ecuación (3.17), donde H es un grupo cíclico infinito, entonces la acción de Q sobre $H_0(H,M) \cong M_H$ y $H_1(H,M) \cong M^H$ es dada por*

$$\begin{array}{rcl} \circ_2 : Q \times M_H & \to & M_H \\ q \circ_2 [m] & = & [q \circ_3 m] \end{array} \tag{3.20}$$

$$\begin{array}{rcl} \circ_2 : Q \times M^H & \to & M^H \\ q \circ_2 m & = & q \circ_3 m \end{array} \tag{3.21}$$

Demostración. Sabemos que $H_0 \cong M_H$ bajo la composición de isomorfismos $\theta \circ \varphi$ dados en la demostración del lema anterior, pero como $\frac{\mathbb{Z}[H]\otimes_H M}{ker(t-1\otimes 1_M)}$ es un Q-módulo (bajo la acción $\circ_2$ dada en la ecuación (3.19)) entonces M_H tiene una única estructura de Q-módulo tal que el isomorfismo $\theta \circ \varphi$ es equivariante, de esta manera se tiene que Q actúa sobre M_H como indica la ecuación (3.20).
Por otro lado, $H_1 \cong M^H$ bajo el homomorfismo γ (ver la demostración del lema anterior) y como γ tiene que ser Q-equivariante se tiene que $q \circ_2 m = q \circ_3 m$, $\forall\ q \in Q$, $m \in M^H$. ■

Lema 3.10. *Si $\mathbb{Z}$ es un H-módulo con la acción trivial, entonces*

$$\mathbb{Z}_H \cong_H \mathbb{Z}$$

y si $\mathbb{Z}_H$ es un $\mathbb{Z}_n$-módulo (n es número par) bajo la acción:

$$\begin{array}{rcl} \circ_2 : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_H & \to & \mathbb{Z}_H \\ \bar{r} \circ_2 [z] & = & [\bar{r} \circ_3 z] = [(-1)^r z] \end{array}$$

entonces $(\mathbb{Z}_H)_{\mathbb{Z}_n} \cong \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_n} \cong_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}_2$.

Demostración. Sabemos que $\mathbb{Z}_H$ se define como el módulo cociente del módulo $\mathbb{Z}$ por el subgrupo aditivo generado por los elementos de la forma $hm - m(h \in H,\, m \in M)$ y como H está actuando de forma trivial sobre M entonces es evidente que $\mathbb{Z}_H \cong_H \mathbb{Z}$. Cabe mencionar que para cualquier G-módulo M con acción trivial $M_G \cong_G M$.
Como $\mathbb{Z}_H \cong_H \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_H$ es un $\mathbb{Z}_n$-módulo entonces $\mathbb{Z}$ tiene una única estructura de $\mathbb{Z}_n$-módulo tal que el isomorfismo $\alpha : \mathbb{Z}_H \to \mathbb{Z}$ dado por $\alpha([z]) = z$ es $\mathbb{Z}_n$-equivariante, así

$$\begin{array}{rcl} \circ_2 : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ \bar{r} \circ_2 z & = & (-1)^r z \end{array}$$

luego, ya que $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_n}$ es el más grande cociente de $\mathbb{Z}$ en que $\mathbb{Z}_n$ actúa trivialmente:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_n} & \to & \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_n} \\ (\bar{r}, [z]) & = & [\bar{r} \circ_2 z] = [(-1)^r z] = [z] \end{array}$$

por otro lado, supongamos que $\mathbb{Z}_n$ actúa trivialmente sobre $\mathbb{Z}_2$, entonces el isomorfismo $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_n} \cong_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}_2$ es dado bajo el $\mathbb{Z}_n$-homomorfismo $f : \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_n} \to \mathbb{Z}_2$ dado por $f[z] = \bar{z}$, el cual no es difícil ver que está bien definido. ■

De aquí podemos ver que si $\mathbb{Z}$ actúa sobre sí mismo de forma no trivial (como se define en la ecuación (3.23)) entonces $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$.

1. Calculemos $H_*(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$.
   Por la ecuación (3.17):

   $$E^2_{p,q} = H_p(\mathbb{Z}_2, H_q(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})) \Rightarrow H_{p+q}(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$$

   Como $\mathbb{Z}$ es un grupo cíclico infinito entonces por el lema 3.6 obtenemos

   $$H_q(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} & q = 0 \\ \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} & q = 1 \\ 0 & q > 1. \end{cases} \tag{3.24}$$

   donde $\mathbb{Z}$ actúa sobre sí mismo como en la ecuación (3.23), además por los lemas 3.7 y 3.9, $\mathbb{Z}_2$ actúa de forma trivial y no trivial sobre los invariantes y coinvariantes de $\mathbb{Z}$; es decir

   $$\bar{r} \circ_2 [z] = \begin{cases} [z] \\ \\ (-1)^r [z]. \end{cases} \quad \bar{r} \in \mathbb{Z}_2,\ [z] \in \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$$

$$\bar{r} \circ_2 z = \begin{cases} z \\ & \bar{r} \in \mathbb{Z}_2,\ z \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \\ (-1)^r z. \end{cases}$$

Por lo tanto, $E^2_{p,q}$ depende de cómo definamos a $\circ_1$ y $\circ_2$, obteniendo los siguientes casos:
Caso **I.** Supongamos que $\circ_1$ y $\circ_2$ son triviales.
Como $\circ_1$ es trivial, ya vimos en el lema 3.10 que $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$, además es evidente que $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, por lo tanto

$$H_q(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z} & q = 1 \\ 0 & q > 1. \end{cases}$$

Así

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) & q = 0, 1 \\ 0 & q > 1. \end{cases}$$

Calculemos $H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$.
NOTA: Como $\mathbb{Z}_2$ está actuando de manera trivial tanto los coinvariantes como los invariantes, entonces $\circ_2$ es trivial sobre $\mathbb{Z}$.
Como $\mathbb{Z}_2$ es un grupo cíclico finito, por el lema 3.8:

$$H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_2} & p = 0 \\ coker\{\bar{N} : \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_2} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}_2}\} & p = \text{impar} \\ ker\{\bar{N} : \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_2} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}_2}\} & p = \text{par.} \end{cases} \tag{3.25}$$

como $\mathbb{Z}_2$ está actuando trivialmente sobre $\mathbb{Z}$ entonces $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_2}$ y $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}_2}$ son isomorfos a $\mathbb{Z}$. Por definición de $\bar{N}$, para cualquier $[n] \in \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_2}$, $\bar{N}([n]) = \bar{0} \circ_2 n + \bar{1} \circ_2 n$, pero como $\circ_2$ es trivial, entonces $\bar{N}([n]) = 2n$, luego $Im\,\bar{N} = 2\mathbb{Z}$ y $ker\,\bar{N} = \{[0]\}$; por lo tanto

$$H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & p = \text{impar} \\ 0 & p = \text{par.} \end{cases} \tag{3.26}$$

Así

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, & q = 0, 1 \\ \mathbb{Z}_2 & p = \text{impar}, & q = 0, 1 \\ 0 & p = \text{par}, & q = 0, 1 \\ 0 & q > 1. \end{cases} \tag{3.27}$$

Caso **II.** Supongamos que $\circ_1$ es trivial y $\circ_2$ es no trivial.
Como $\circ_1$ es trivial, ya vimos que:

$$H_p(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \\ \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \\ 0 \end{cases} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z} & q = 1 \\ 0 & q > 1. \end{cases} \tag{3.28}$$

y que para calcular $E^2_{p,q}$ es suficiente que calculemos $H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$, pero sabemos que $H_q(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ es un $\mathbb{Z}_2$-módulo entonces $\mathbb{Z}$ tiene una única estructura de $\mathbb{Z}_2$-módulo, de esta manera:

$$\begin{aligned} \circ_2 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ \bar{r} \circ_2 n &= (-1)^r n \end{aligned}$$

entonces por el lema 3.10 tenemos que $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_2} \cong_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2$, además es claro que $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}_2} = \{0\}$. Por lo tanto, siguiendo la ecuación (3.25):

$$H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & p = 0 \\ 0 & p = \text{impar} \\ \mathbb{Z}_2 & p = \text{par}. \end{cases} \tag{3.29}$$

por lo tanto,

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & p = 0, \quad q = 0,1 \\ 0 & p = \text{impar}, \quad q = 0,1 \\ \mathbb{Z}_2 & p = \text{par}, \quad q = 0,1 \\ 0 & q > 1. \end{cases}$$

Caso **III.** Supongamos que $\circ_1$ es no tivial y $\circ_2$ es trivial.
Como $\circ_1$ es la no trivial, ya vimos anteriormente que $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$, además es evidente que $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{0\}$, así siguiendo el isomorfismo de la ecuación (3.24) obtenemos:

$$H_q(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & q = 0 \\ 0 & q \geq 1. \end{cases}$$

luego

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) & q = 0 \\ 0 & q \geq 1. \end{cases}$$

Solo falta calcular $H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$.
Nota: Como $\circ_2$ es trivial entonces $\mathbb{Z}_2$ está actuando trivialmente sobre los coinvariantes de $\mathbb{Z}$ el cual ya probamos que es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.
Como $\mathbb{Z}_2$ es un grupo cíclico finito, por el lema 3.8:

$$H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}_2)_{\mathbb{Z}_2} & p = 0 \\ coker\{\bar{N} : (\mathbb{Z}_2)_{\mathbb{Z}_2} \to (\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}_2}\} & p = \text{impar} \\ ker\{\bar{N} : (\mathbb{Z}_2)_{\mathbb{Z}_2} \to (\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}_2}\} & p = \text{par}. \end{cases}$$

Sea $[\bar{n}] \in (\mathbb{Z}_2)_{\mathbb{Z}_2}$, como $\mathbb{Z}_2$ está actuando trivialmente entonces $\bar{N}([\bar{n}]) = \bar{0} \circ_2 \bar{n} + \bar{1} \circ_2 \bar{n} = 2\bar{n} = \bar{0}$, así $Im\, \bar{N} = \{\bar{0}\}$ y $ker\, \bar{N} = (\mathbb{Z}_2)_{\mathbb{Z}_2}$.
Como $\mathbb{Z}_2$ está actuando de manera trivial sobre sí mismo entonces $(\mathbb{Z}_2)_{\mathbb{Z}_2} \cong_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2$ y $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{Z}_2$, de esta manera:

$$H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & p = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & p = \text{impar} \\ \mathbb{Z}_2 & p = \text{par}. \end{cases} \tag{3.30}$$

por lo tanto

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & q = 0 \\ 0 & q \geq 1. \end{cases} \tag{3.31}$$

Caso **IV.** Supongamos que $\circ_1$ y $\circ_2$ son ambas no triviales.
Es claro que $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{0\}$. Por otro lado $\mathbb{Z}_2$ actúa sobre $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \circ_2 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} & \to & \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \\ (\bar{r}, [z]) & = & [(-1)^r z] \end{array}$$

pero $\mathbb{Z}$ actúa sobre $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ de la misma manera como lo hace $\mathbb{Z}_2$ ($r[z] = [r \circ_1 z] = [(-1)^r z] = [z]$, $\forall\, r \in \mathbb{Z}$, $[z] \in \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$); por lo tanto $\circ_2$ es trivial. Luego, este caso es el mismo que el caso III salvo isomorfismo.

2. Calculemos $H_*(\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$.
Por la ecuación (3.17) tenemos que:

$$E^2_{p,q} = H_p(\mathbb{Z}_2, H_q(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z})) \Rightarrow H_{p+q}(\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$$

donde las acciones $\circ_1$ y $\circ_2$ actuarán de dos únicas maneras (ver los lemas 3.9, 3.7 y la ecuación (3.22)), la trivial y no trivial. Por lo tanto, $E^2_{p,q}$ depende de cómo definamos a $\circ_1$ y $\circ_2$, obteniendo los siguientes casos:
Caso **I.** Supongamos que $\circ_1$ y $\circ_2$ son triviales.
Como $\mathbb{Z}_4$ es un grupo cíclico finito por el lema 3.8 se tiene que

$$H_q(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} (\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}_4} & q = 0 \\ coker\{\bar{N} : (\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}_4} \to (\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}_4}\} & q = \text{impar} \\ ker\{\bar{N} : (\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}_4} \to (\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}_4}\} & q = \text{par}. \end{cases} \tag{3.32}$$

Como $\mathbb{Z}_4$ actúa trivialmente sobre $\mathbb{Z}$ entonces es evidente que $(\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}_4} = \mathbb{Z}$, además $(\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}_4} \cong_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}$ (ver el lema 3.10).
Por otro lado, sea $[n] \in (\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}_4}$ entonces por definición de $\bar{N}$ se tiene que $\bar{N}([n]) = \bar{0} \circ_1 n + \bar{1} \circ_1 n + \bar{2} \circ_1 n + \bar{3} \circ_1 n = 4n$, así $Im\, \bar{N} = 4\mathbb{Z}$ y $ker\, \bar{N} = 0$, luego $coker\, \bar{N} \cong \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_4$.
Luego por la ecuación (3.32):

$$H_q(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}_4 & q = \text{impar} \\ 0 & q = \text{par}. \end{cases}$$

así

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) & q = 0 \\ H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) & q = \text{impar} \\ 0 & q = \text{par}. \end{cases} \tag{3.33}$$

NOTA: $\mathbb{Z}_2$ actúa trivialmente sobre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_4$ ya que $\circ_2$ es trivial sobre $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_4}$ y $coker\, \bar{N}$.
Resolvamos $H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$.
Como $\mathbb{Z}_2$ está acuando trivialmente, este caso ya lo resolvimos en la ecuación (3.26).
Calculemos $H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4)$.
Como $\mathbb{Z}_2$ es un grupo cíclico finito, por el lema 3.8 tenemos que:

$$H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}_4)_{\mathbb{Z}_2} & p = 0 \\ coker\{\bar{N} : (\mathbb{Z}_4)_{\mathbb{Z}_2} \to (\mathbb{Z}_4)^{\mathbb{Z}_2}\} & p = \text{impar} \\ ker\{\bar{N} : (\mathbb{Z}_4)_{\mathbb{Z}_2} \to (\mathbb{Z}_4)^{\mathbb{Z}_2}\} & p = \text{par}. \end{cases}$$

pero $(\mathbb{Z}_4)_{\mathbb{Z}_2} \cong_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_4$ y $(\mathbb{Z}_4)^{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{Z}_4$, por otro lado, sea $[\bar{n}] \in (\mathbb{Z}_4)_{\mathbb{Z}_2}$ entonces $\bar{N}([\bar{n}]) = \bar{0} \circ_2 \bar{n} + \bar{1} \circ_2 \bar{n} = 2\bar{n}$, por lo tanto $Im\, \bar{N} = \{2\bar{n} \mid \bar{n} \in \mathbb{Z}_4\} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$. Ahora

$$\begin{aligned} ker\, \bar{N} &= \{[\bar{n}] \in (\mathbb{Z}_4)_{\mathbb{Z}_2} \mid \bar{N}([\bar{n}]) = \bar{0}\} \\ ker\, \bar{N} &= \{[\bar{n}] \in (\mathbb{Z}_4)_{\mathbb{Z}_2} \mid 2n = 4q,\ q \in \mathbb{Z}\} \\ ker\, \bar{N} &= (\{\bar{0}, \bar{2}\})_{\mathbb{Z}_2}. \end{aligned}$$

por lo tanto

$$H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_4 & p = 0 \\ \mathbb{Z}_4/\{\bar{0}, \bar{2}\} & p = \text{impar} \\ (\{\bar{0}, \bar{2}\})_{\mathbb{Z}_2} & p = \text{par.} \end{cases} \tag{3.34}$$

finalmente según la ecuación (3.33), $E^2_{p,q}$ es isomorfo a:

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, & q = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & p = \text{impar}, & q = 0 \\ 0 & p = \text{par}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}_4 & p = 0, & q = \text{impar} \\ \mathbb{Z}_4/\{\bar{0}, \bar{2}\} & p = \text{impar}, & q = \text{impar} \\ (\{\bar{0}, \bar{2}\})_{\mathbb{Z}_2} & p = \text{par}, & q = \text{impar} \\ 0 & q = \text{par.} \end{cases} \tag{3.35}$$

Caso **II.** Supongamos que $\circ_1$ es trivial y $\circ_2$ es no trivial.
Como $\circ_1$ es trivial ya vimos en el caso anterior que:

$$H_q(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_4} \\ coker\{\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_4} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}_4}\} \\ ker\{\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_4} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}_4}\} \end{cases} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}_4 & q = \text{impar} \\ 0 & q = \text{par.} \end{cases} \tag{3.36}$$

y

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) & q = 0 \\ H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) & q = \text{impar} \\ 0 & q = \text{par.} \end{cases} \tag{3.37}$$

Resolvamos $H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$.
Hechando un vistazo al ejercicio 1, ya calculamos $H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$ en la ecuación (3.29).
Resolvamos $H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4)$.
Pero

$$\begin{aligned} \circ_2 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 &\to \mathbb{Z}_4 \\ \bar{r} \circ_2 \bar{n} &= \overline{(-1)^r n} \end{aligned}$$

pero en $\mathbb{Z}_4$ se cumple que $\overline{(-1)^r n} = \bar{n}$, por lo tanto $\mathbb{Z}_2$ actúa trivialmente sobre $\mathbb{Z}_4$.
Así regresando al caso anterior, ya calculamos $H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4)$ (ver la ecuación (3.34)).
Por lo tanto

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & p = 0, & q = 0 \\ 0 & p = 1, & q = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & p > 1, & q = 0 \\ \mathbb{Z}_4 & p = 0, & q = \text{impar} \\ \mathbb{Z}_4/\{\bar{0}, \bar{2}\} & p = \text{impar}, & q = \text{impar} \\ (\{\bar{0}, \bar{2}\})_{\mathbb{Z}_2} & p = \text{par}, & q = \text{impar} \\ 0 & q = \text{par.} \end{cases}$$

Caso **III.** Supongamos que $\circ_1$ es no trivial y $\circ_2$ es trivial.
Calculemos $H_q(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z})$ (ver la ecuación (3.32)):
Ya que $\mathbb{Z}_4$ actúa no trivial sobre $\mathbb{Z}$, ya vimos en el lema 3.10 que $(\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}_4} \cong_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2$,

además $(\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}_4} = \{0\}$, por lo tanto $coker\,\bar{N} \cong 0$, por otro lado, dado cualquier elemento $[m] \in (\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}_4}$ se tiene que $\bar{N}([m]) = \bar{0}\circ_1 m + \bar{1}\circ_1 m + \bar{2}\circ_1 m + \bar{3}\circ_1 m = m - m + m - m = 2m$; por lo tanto rapidamente tenemos que $ker\bar{N} = \{0\}$, así el isomorfismo de la ecuación (3.32) es el siguiente:

$$H_p(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & q = 0 \\ 0 & q \geq 1. \end{cases}$$

de esta manera

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) & q = 0 \\ 0 & q \geq 1. \end{cases}$$

pero el cálculo de la homología $H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ ya lo resolvimos en la ecuación (3.30) ya que $\circ_2$ es trivial, así:

$$H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2, \ \ \forall\, p$$

por lo tanto

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & q = 0 \\ 0 & q \geq 1. \end{cases}$$

Caso **IV.** Supongamos que $\circ_1$ y $\circ_2$ son no triviales.
Como $\circ_1$ es no trivial, en el caso anterior ya vimos que:

$$H_p(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_4} & q = 0 \\ 0 & q \geq 1. \end{cases}$$

De esta manera solo falta calcular $H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_4})$.
Como $\circ_2$ es no trivial entonces:

$$\begin{array}{rcl} \circ_2 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_4} & \to & \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_4} \\ \bar{r} \circ_2 [z] & = & [(-1)^r z] \end{array}$$

Veamos que esta acción es trivial.
Es suficiente que probemos que para r impar se tiene que $[(-1)^r z] = [z]$, pero $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_4}$ es el más grande cociente de $\mathbb{Z}$ en que $\mathbb{Z}_4$ actúa trivialmente; es decir,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_4} & \to & \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_4} \\ \bar{n} \circ_2 [z] & = & [\bar{n} \circ_1 z] = [(-1)^n z] = [z] \end{array}$$

pero esta acción nos está diciendo que para números pares y en particular números impares $[(-1)^n z] = [z]$, luego se tiene lo que queríamos.
Por lo tanto $H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_4}) \cong H_p(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$, el cual es igual al caso anterior salvo isomorfismo. ■

3.3.3. Homología Equivariante.

Definición 3.16. *Sea X un G-CW-complejo.*
Sea $C = C(X)$ el complejo de cadenas celular del G-CW-complejo X, es decir, el grupo abeliano libre generado por las células de X.

$$\begin{array}{rcl} G \times C(X) & \to & C(X) \\ (g, \sum n_\sigma \sigma) & \to & \sum n_\sigma g\sigma \end{array}$$

Definimos

$$H_*^G(X) \equiv H_*(G, C(X)) = H_*(F \otimes_G C(X))$$

y se llama el grupo de homología equivariante de la pareja (G, X).

Definición 3.17. *Sea M un G-módulo arbitrario, y sea la acción diagonal del grupo G sobre $C(X, M) = C(X) \otimes M$. Entonces definimos*

$$H_*^G(X, M) = H_*(G, C(X, M)).$$

Definición 3.18. *En forma análoga se definen los grupos de cohomología equivariante*

$$H_G^*(X, M) = H^*(G, C^*(X, M)).$$

Definición 3.19. *Sea X un espacio topológico finito y G un grupo finito, definimos los grupos de cohomología de Tate equivariantes*

$$\widehat{H_G^*}(X, M) = \widehat{H}^*(G, C^*(X, M)).$$

Si $Y \subseteq X$ es un subespacio G-invariante, entonces se pueden definir los grupos de homología y cohomología relativos equivariantes con ayuda del factor cociente $C(X, Y) = C(X)/C(Y)$.
En este consideraremos solamente a los grupos de homología equivariante $H_*^G(X, M)$.
Todos los resultados obtenidos tendrán lugar también para la cohomología y homología relativa. Es claro que $H_*^G(pt, M) = H_*(G, M)$.

Proposición 3.3. *Para la primera sucesión espectral del bicomplejo $\{F_p \otimes_G C_q(X, M)\}_{p,q \geq 0}$ con complejo total asociado $F \otimes_G C(X, M)$ converge a $H_{p+q}^G(X, M)$. Es decir;*

$$E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q((C(X) \otimes M)_q) \Longrightarrow H_{p+q}^G(X, M) \tag{3.38}$$

Demostración. Habíamos visto que

$$E_{p,q}^2 = H_p(G, H_q((C(X) \otimes M)_q) \Longrightarrow H_{p+q}(G, C(X) \otimes M)$$

pero por la definición 3.17 $H_{p+q}(G, C(X) \otimes M) = H_{p+q}^G(X, M)$. Así se tiene el resultado. ■

Teorema 3.9. *Si $f : X \to Y$ es un G-mapeo celular de un G-CW-complejo en otro tal que $f_* : H_*X \to H_*Y$ es un isomorfismo, entonces f induce un isomorfismo $H_*^G(X, M) \overset{\approx}{\to} H_*^G(Y, M)$ para cualquier G-módulo M. En particular, si el espacio X es acíclico entonces $H_*^G(X, M) \overset{\approx}{\to} H_*(G, M)$.*

Demostración. Ya que f_* es un isomorfismo, por el teorema 3.6 se tiene rápidamente el isomorfismo $H_*^G(X, M) \overset{\approx}{\to} H_*^G(Y, M)$. Ahora si X es acíclico esto implica que $H_*(X) \cong H_*(punto)$, entonce por este mismo teorema $H_*^G(X, M) \cong H_*^G(punto, M) = H_*(G, M)$. ■

A un G-CW-complejo X, el G-módulo $C_n(X)$ lo podemos ver como:

$$C_n(X) \cong \bigoplus_{\sigma \in \sum_n} Ind_{G_\sigma}^G \mathbb{Z}_\sigma$$

Lema 3.8. *Sea H un grupo cíclico finito con generador t, entonces*

$$H_q(H,M) \cong \begin{cases} M_H & q=0 \\ coker\{\bar{N} : M_H \to M^H\} & q = impar \\ ker\{\bar{N} : M_H \to N^H\} & q = par. \end{cases}$$

Demostración. Para un grupo cíclico finito tenemos la siguiente resolución proyectiva de H-módulos:

$$\xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[H] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[H] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[H] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

donde $N(x) = \sum_{i=0}^{k-1} t^i x$.
Luego aplicando a esta resolución el funtor $- \otimes_H M$, obtenemos:

$$H_q(H,M) = \begin{cases} \frac{\mathbb{Z}[H]\otimes_H M}{Im\,(t-1\otimes 1_M)} & q=0 \\ \\ \frac{ker(t-1\otimes 1_M)}{Im(N\otimes 1_M)} & q = \text{impar} \\ \\ \frac{ker(N\otimes 1_M)}{Im(t-1\otimes 1_M)} & q = \text{par.} \end{cases}$$

Igualmente como en el lema 3.6 vimos que, $\frac{\mathbb{Z}[H]\otimes_H M}{Im\,(t-1\otimes 1_M)} \cong M_H$ y $ker(t-1\otimes 1_M) \cong M^H$, además $Im(t-1\otimes 1_M) \cong ker\varepsilon \otimes_H M \cong ker\varepsilon M$; por otro lado, dado que $\mathbb{Z}[H] \otimes_H M \cong M$ entonces a $N \otimes 1_M$ la podemos escribir como $N : M \to M$ (sin pérdida de generalidad pongamos $N = N \otimes 1_M$) y además satisface que $N(hm) = N(m)$ $(h \in H,\ m \in M)$ y que $N(M) \subseteq M^H$; de esta manera N induce la aplicación norma $\bar{N} : M_H \to M^H$; por lo tanto para q impar, $H_q \cong \frac{M^H}{Im\bar{N}} = coker\bar{N}$ y para q par, $H_q \cong ker\bar{N}$. ■

Por lo tanto, si la sucesión espectral es dada como en la ecuación (3.17), donde H es un grupo finito la manera de cómo actúa Q sobre los invariantes M_H es definida como en el lema 3.7, y dado que $ker\bar{N}$ es un submódulo de M_H, entonces Q actúa sobre $ker\bar{N}$ de la misma manera como la hace sobre M_H, además:

$$q \circ_2 [m] \quad = \quad [q \circ_3 m] \qquad q \in Q,\ m \in \frac{M^H}{Im\bar{N}}\,. \tag{3.22}$$

Lema 3.9. *Si n es par, entonces hay dos diferentes y únicas acciones de $\mathbb{Z}_n$ sobre $\mathbb{Z}$, dadas por:*

$$\bar{r} \circ z = \begin{cases} z \\ (-1)^r z. \end{cases}$$

si n es impar, entonces solo hay una única acción de $\mathbb{Z}_n$ sobre $\mathbb{Z}$, que es la trivial.

Demostración. Como $Aut(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ entonces se tiene que hay dos posibles acciones de $\mathbb{Z}_n$ sobre $\mathbb{Z}$ dadas como lo enuncia el teorema, pero la acción dada por $\bar{r} \circ_3 z = (-1)^r z$ está bien definida sí y sólo sí n es par. ■

Cabe mencionar que el grupo $\mathbb{Z}$ actúa sobre sí mismo de la misma manera como lo hace $\mathbb{Z}_n$, es decir;

$$r \circ_1 z = \begin{cases} z \\ \\ (-1)^r z. \end{cases} \quad r, z \in \mathbb{Z} \tag{3.23}$$

donde

$$\begin{aligned}
\sum_n &= \text{conjunto de representantes de las } G\text{-órbitas de } n\text{-celdas,}\\
G_\sigma &= \{g \in G | g\sigma = \sigma\}\\
\mathbb{Z}_\sigma &= <-1, 1> \text{ donde } \sigma = \begin{cases} 1 & \text{si la orientación de } \sigma \text{ es positiva,}\\ -1 & \text{si la orientación de } \sigma \text{ es negativa.}\end{cases}
\end{aligned}$$

y donde $\mathbb{Z}_\sigma$ es un G_σ-módulo con la acción dada por

$$\begin{aligned}
G_\sigma \times \mathbb{Z}_\sigma &\longrightarrow \mathbb{Z}_\sigma\\
(g, i) &\longrightarrow g.i = \begin{cases} 1 & \text{si } g \text{ preserva la orientación de } \sigma,\\ -1 & \text{si } g \text{ cambia la orientación de } \sigma.\end{cases}
\end{aligned}$$

Afirmación 3.1. *Sea $M_\sigma = \mathbb{Z}_\sigma \otimes M$. Entonces M_σ es un G_σ-módulo.*

Demostración. La acción es dada por

$$\begin{aligned}
G_\sigma \times M_\sigma &\longrightarrow M_\sigma\\
(g, i \otimes m) &\longrightarrow g.i \otimes m
\end{aligned}$$

■

Afirmación 3.2. $C_p(X, M) \cong \bigoplus_{\sigma \in \sum_p} Ind_{G_\sigma}^G M_\sigma$.

Demostración. Por definición de módulo inducido:

$$\begin{aligned}
C_p(X) \otimes M &\cong (\bigoplus_{\sigma \in \sum_p} \mathbb{Z}[G] \otimes_{G_\sigma} \mathbb{Z}_\sigma) \otimes M\\
&\cong \bigoplus_{\sigma \in \sum_p} ((\mathbb{Z}[G] \otimes_{G_\sigma} \mathbb{Z}_\sigma) \otimes M)\\
&\cong \bigoplus_{\sigma \in \sum_p} (\mathbb{Z}[G] \otimes_{G_\sigma} M_\sigma)\\
&\cong \bigoplus_{\sigma \in \sum_p} Ind_{G_\sigma}^G M_\sigma
\end{aligned}$$

■

Proposición 3.4. *Para la segunda sucesión espectral del bicomplejo $\{F_q \otimes_G C_p(X, M)\}$ con complejo total asociado $F \otimes_G C(X, M)$ se tiene que*

$$E^1_{p,q} = \bigoplus_{\sigma \in \sum_p} H_q(G_\sigma, M_\sigma) \Longrightarrow H^G_{p+q}(X, M) \tag{3.39}$$

Demostración. Habíamos visto que

$$E^1_{p,q} = H_q(G, C_p(X) \otimes M) \Longrightarrow H_{p+q}(G, C(X) \otimes M) = H^G_{p+q}(X, M)$$

pero por la afirmación anterior $C_p(X) \otimes M \cong \bigoplus_{\sigma \in \sum_p} Ind^G_{G_\sigma} M_\sigma$, entonces:

$$\begin{aligned} E^1_{p,q} &= H_q(G, C_p(X) \otimes M) \\ &\cong H_q(G, \bigoplus_{\sigma \in \sum_p} Ind^G_{G_\sigma} M_\sigma) \\ &\cong H_q(\bigoplus_{\sigma \in \sum_p} (F \otimes_G Ind^G_{G_\sigma} M_\sigma)) \\ &\cong \bigoplus_{\sigma \in \sum_p} H_q(F \otimes_G Ind^G_{G_\sigma} M_\sigma) \end{aligned}$$

ya que $G_\sigma \subseteq G$ y M_σ es un G_σ-módulo, por el lema de Shapiro [2]:

$$\bigoplus_{\sigma \in \sum_p} H_q(F \otimes_G Ind^G_{G_\sigma} M_\sigma) \cong \bigoplus_{\sigma \in \sum_p} H_q(G_\sigma, M_\sigma)$$

por lo tanto $E^1_{p,q} \cong \bigoplus_{\sigma \in \sum_p} H_q(G_\sigma, M_\sigma)$. ■

Teorema 3.10. *Si X es un G-CW libre entonces existe una sucesión espectral de la forma*

$$E^2_{p,q} = H_p(G, H_q X) \Rightarrow H_*(X/G)$$

NOTA:Esta sucesión espectral se llama la sucesión espectral de CARTAN-LERAY asociada al cubriente regular $X \to X/G$.
El teorema 3.10. sigue siendo cierto para cualquier módulo M como coeficiente, pero los grupos de homología $H_*(X/G, M)$ se deben de interpretar como grupos de homología con coeficientes locales y la acción de G sobre M no es trivial.
Ahora consideremos el caso cuando X es acíclico y la acción de G no es necesariamente libre.
Entonces por el teorema 3.9. $H^G_*(X, M) \cong H_*(G, M)$.
De esta manera la sucesión espectral (3.39) se puede escribir de la forma:

$$E^1_{p,q} = \bigoplus_{\sigma \in \sum_p} H_q(G_\sigma, M_\sigma) \Rightarrow H_{p+q}(G, M)$$

Esta sucesión espectral es una importante forma de cálculo de la teoría homológica de grupos.
Es claro que para utilizarlo es necesario encontrar un espacio acíclico X interesante sobre el cual actúa el grupo G.

Capítulo 4

La sucesión espectral de los invariantes.

Sea Q un grupo finito que actúa sobre un grupo G como un grupo de automorfismos. Esta acción induce una acción de Q sobre el complejo barra estándar $C_\bullet(G)$ que se usa para el cálculo de la homología de G. Si A es un grupo abeliano tal que G y Q actúan trivialmente sobre A, entonces podemos definir los grupos de homología con coeficientes $H_*^Q(G, A)$. La inclusión de los complejos $(C_\bullet(G) \otimes_G A)^Q \hookrightarrow C_\bullet(G) \otimes_G A$ induce un homomorfismo $H_\bullet^Q(G, A) \to H_\bullet(G, A)$ cuya imagen está contenida en el subgrupo $H_\bullet(G, A)^Q$ de clases de homología de Q-invariantes. La aportación de esta tesis fue dar una sucesión espectral en donde estań relacionados los grupos de homología $H_*^Q(G, A)$ y $H_*(G, A)^Q$ (teoremas 4.1 y 4.3). Además, dimos una generalización de la proposición 2·1 del artículo de Kevin P.Knudson [1] el cual enuncia lo siguiente:

Supón que $Q = \mathbb{Z}/p$ donde p es un primo. Entonces para $n \geq 0$, $D_n = C_n(G^Q; \mathbb{Z}/p)$; consecuentemente hay un isomorfismo $h_n(D_\bullet) \cong H_n(G^Q; \mathbb{Z}/p)$.

A continuación proporcionamos las definiciones en el cual se sustentan nuestros resultados.

Definición 4.1. *Sea G un grupo y sea $[g_1 \mid \cdots \mid g_n] = (1, g_1, g_1g_2, \cdots, g_1 \cdots g_n)$ tal que $g_i \in G$ $\forall i$, definimos el grupo libre $B_n(G) = \mathbb{Z}\{[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \mid g_i \in G\}$, $B_n(G)$ es un G-módulo bajo la acción:*

$$g[g_1 \mid \cdots \mid g_n] = (g, gg_1, gg_1g_2, \cdots, gg_1 \cdots g_n)$$

Definición 4.2. *Definimos el complejo barra $C_\bullet(G) = B_\bullet(G) \otimes_G \mathbb{Z}$:*

$$C_\bullet(G) := \cdots \longrightarrow C_2(G) \overset{\partial_2 \otimes 1_\mathbb{Z}}{\longrightarrow} C_1(G) \overset{\partial_1 \otimes 1_\mathbb{Z}}{\longrightarrow} C_0(G)$$

donde el diferencial $\partial_n : B_n(G) \to B_{n-1}(G)$ es dado por:

$$\partial_n([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = g_1[g_2 \mid \cdots \mid g_n] + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k [g_1 \mid \cdots \mid g_k g_{k+1} \mid \cdots \mid g_n] + (-1)^n [g_1 \mid \cdots \mid g_{n-1}]$$

Definición 4.3. *Sea A un grupo abeliano, definimos el complejo de cadenas $C_\bullet(G) \otimes_G A$ donde G actúa de forma trivial sobre A y el diferencial es dado por $\partial \otimes 1_{\mathbb{Z}} \otimes 1_A$. Denotaremos su homología como $H_\bullet(G, A)$.*

Definición 4.4. *Sea Q un grupo finito actuando como un grupo de automorfismos de G. La acción de Q sobre G induce una acción sobre $C_\bullet(G) \otimes_G A$ por*

$$q([g_1 \mid \cdots \mid g_i] \otimes_G a) = [q(g_1) \mid \cdots \mid q(g_i)] \otimes_G a$$

Sea el subcomplejo de invariantes de $C_\bullet(G) \otimes_G A$ por $(C_\bullet(G) \otimes_G A)^Q$, denotaremos la homología de este subcomplejo como $H_\bullet^Q(G, A)$. Además la homología del subcomplejo $C_\bullet(G)_Q \otimes_G A$ será denotada como $H_\bullet(C_\bullet(G)_Q, A)$.

Cabe mencionar que si Q actúa trivialmente sobre A entonces se tiene el isomorfismo $(C_\bullet(G) \otimes_G A)^Q \cong (C_\bullet(G))^Q \otimes_G A$, por lo tanto sus grupos de homología son isomorfas.

Lema 4.1. *Sea $Q = \mathbb{Z}/p^k = \langle t \rangle$, donde p es primo. Entonces*

$$C_n(G)^Q = \bigoplus_{i=0}^{k} X_i$$

donde:

$$\begin{aligned} X_0 &= \mathbb{Z}\{[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \mid g_j \in G^Q\}, \\ X_i &= \mathbb{Z}\{\sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \mid \ g_j \in G^{\mathbb{Z}/p^{k-i}} \ \text{ y } \exists\ i_0 \in \{1, \cdots, n\} \text{ tal que} \\ & \qquad g_{i_0} \notin G^{\mathbb{Z}/p^{k-(i-1)}}\}, \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq k$.

Demostración. Probemos primero que efectivamente $X_0, \cdots, X_k$ son submódulos de $C_n(G)^{\mathbb{Z}/p^k}$. Para esto es suficiente probar que cada suma $\sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]$, con las respectivas hipótesis, es un punto fijo de Q. Demostremos que

$$t^m \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n] = \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n], \quad 0 \leq m \leq p^k - 1$$

Si p^i divide a m, entonces $m = p^i q$ y así:

$$t^m \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n] = \sum_{s=0}^{p^i-1} t^{p^i q+s}[g_1 \mid \cdots \mid g_n]$$

pero como $\mathbb{Z}/p^k = \langle t \rangle$ entonces $\mathbb{Z}/p^{k-i} = \langle t^{p^i} \rangle$ $\forall\ i = 1, \cdots, k-1$, luego por hipótesis $g_j \in G^{\langle t^{p^i} \rangle}$ para $1 \leq j \leq n$ entonces $t^{p^i q+s}[g_1 \mid \cdots g_n] = t^{p^i q} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n] = t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]$,

$0 \leq s \leq p^i - 1$; por lo tanto

$$t^m \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n] = \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]$$

Si p^i no divide a m entonces $m = p^i q + r$, $0 < r < p^i$. Así:

$$\begin{aligned} t^m \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n] &= \sum_{s=0}^{p^i-1} t^{p^i q+r+s}[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \\ &= \sum_{s=0}^{p^i-1} t^{r+s}[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \end{aligned}$$

como $0 < r < p^i$, entonces la suma anterior la podemos ver de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} t^m \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n] &= t^r[g_1 \mid \cdots \mid g_n] + t^{p^i+r-(p^i-1)}[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \\ &+ \cdots + t^{p^i+r-(r+1)}[g_1 \mid \cdots \mid g_n] + t^{p^i+r-(r)}[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \\ &+ t^{p^i+r-(r-1)}[g_1 \mid \cdots \mid g_n] + \cdots + t^{p^i+r-(2)}[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \\ &+ t^{p^i+r-(1)}[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \end{aligned}$$

pero esto es lo mismo que:

$$\begin{aligned} t^m \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n] &= t^r[g_1 \mid \cdots \mid g_n] + t^{r+1}[g_1 \mid \cdots \mid g_n] + \cdots + \\ & t^{p^i-1}[g_1 \mid \cdots \mid g_n] + t^{p^i}[g_1 \mid \cdots \mid g_n] + t^{p^{i+1}}[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \\ &+ \cdots + t^{p^i+(r-2)}[g_1 \mid \cdots \mid g_n] + t^{p^i+(r-1)}[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \\ &= \sum_{s=r}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n] + \sum_{s=0}^{r-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \\ &= \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \end{aligned}$$

Ahora mostremos que cada $x \in C_n(G)^{\mathbb{Z}/p^k}$ tiene una expresión de la forma $x = \sum_{i=0}^{k} x_i$ donde $x_i \in X_i$ para toda $i = 0, \cdots, k$.
Sea $x \in C_n(G)^{\mathbb{Z}/p^k}$, entonces $x = \sum_{r \in R} n_r[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$ y $t^s x = x \ \forall\ 0 \leq s \leq p^k - 1$.
Como p es primo, la órbita $O([g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r)$ de cualquier generador puede tener orden p^i donde i puede variar desde $i = 0, \cdots, k$. Así a x la podemos expresar de la siguiente manera:

$$x = \sum_{i=0}^{k} \sum_{r \in R_i} n_r[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$$

donde $R_i = \{[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r \mid \ \mid O([g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r) \mid = p^i\}$, $i = 0, \cdots, k$.

Lema 4.2. *Si $[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$ tiene órbita de orden p^i entonces $g_j \in G^{\mathbb{Z}/p^{k-i}}$ $\forall\ j = 1, \cdots, n$ y además existe $i_0 \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $g_{i_0} \notin G^{\mathbb{Z}/p^{k-(i-1)}}$*

Demostración. Como $\mid O([g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r) \mid = \frac{|Q|}{|Q_{[g_1|\cdots|g_n]_r}|}$, donde $Q_{[g_1|\cdots|g_n]_r}$ denota el grupo de isotropía del elemento $[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$, además $\mid O([g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r) \mid = p^i$, $\mid Q \mid = p^k$ entonces $\mid Q_{[g_1|\cdots|g_n]_r} \mid = p^{k-i}$; por lo tanto $Q_{[g_1|\cdots|g_n]} = \mathbb{Z}/p^{k-i}$, luego $g_j \in G^{\mathbb{Z}/p^{k-i}}$ $\forall\ j = 1, \cdots, n$.
Ahora si no existe $i_0 \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $g_{i_0} \notin G^{\mathbb{Z}/p^{k-(i-1)}}$, como $G^{\mathbb{Z}/p^{k-(i-1)}} \subset G^{\mathbb{Z}/p^{k-i}}$, entonces $g_j \in G^{\mathbb{Z}/p^{k-(i-1)}}$ $\forall\ 1 \leq j \leq n$; luego $\mid Q_{[g_1|\cdots|g_n]_r} \mid > i$, obteniendo que el orden de la órbita de $[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$ es mayor estricto que p^i, llegando a la contradicción de que $\mid O([g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r) \mid = p^i$.
Por otro lado, sea $x_i = \sum_{r \in R_i} n_r [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$ para cada $0 \leq i \leq k$, entonces $t^s x_i = x_i$ para $0 \leq s \leq p^k - 1$; así para cada $r \in R_i$ existe $j(t^s) \in R_i$ tal que $t^s n_{j(t^s)} [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_{j(t^s)} = n_r [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$ para algún $0 \leq s \leq p^k - 1$. Entonces

$$x_i = \sum_{s=0}^{p^k-1} \sum_i t^s n_{j_i(t^s)} [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_{j_i(t^s)}$$

como los elementos de cada n-ada están en $G^{\langle t^{p^i} \rangle}$, reordenando los términos de la suma, nos va a quedar una suma de la siguiente forma:

$$x_i = \sum_{s=0}^{p^i-1} \sum_l t^s n_l [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_l$$

por lo tanto $x_i \in X_i$ para todo $i = 0, \cdots, k$. ■

Por la forma de como definimos los submódulos X_i, vamos a tener que $X_i \cap (X_0 + \cdots + \widehat{X_i} + \cdots + X_k) = \{0\}$. Por lo tanto $C_n(G)^Q = \bigoplus_{i=0}^{k} X_i$. ■

Definición 4.5. *Sea $Q = \mathbb{Z}/p^k$, donde p es primo. Definimos la aplicación norma $\overline{N} : C_n(G)_Q \to C_n(G)^Q$ inducida por la aplicación*

$$[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \xrightarrow{N} \sum_{s=0}^{p^k-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]$$

Lema 4.3. *Sea $Q = \mathbb{Z}/p^k$ donde p es primo y sea $\overline{N} : C_n(G)_Q \to C_n(G)^Q$ la aplicación norma. Entonces $Im\ \overline{N} = \bigoplus_{i=0}^{k} p^{k-i} X_i$.*

Demostración. Supongamos que $\overline{\langle \{[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r\}_{r \in R} \rangle} = C_n(G)$, entonces dado $x \in C_n(G)_Q$ se tiene que $x = \sum_{r \in R} n_r \overline{[g_1 \mid \cdots \mid g_n]}$. Por lo tanto

$$\overline{N}\left(\sum_{r \in R} n_r \overline{[g_1 \mid \cdots \mid g_n]}\right) = \sum_{r \in R} n_r \left(\sum_{s=0}^{p^k-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r\right)$$

similarmente como hicimos en el lema 4.1, separemos a los generadores por el orden de su órbita:

$$x = \sum_{i=0}^{k} \sum_{r \in R_i} n_r \sum_{s=0}^{p^k-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$$

donde $R_i = \{[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r \mid \ \mid O([g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r) \mid = p^i\}$, $i = 0, \cdots, k$. Sea $x_i = \sum_{r \in R_i} n_r \sum_{s=0}^{p^k-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$, probemos que $x_i \in p^{k-i} X_i \ \forall i$.
Probemos que si $[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$ tiene órbita de orden p^i, entonces:

$$\sum_{s=0}^{p^k-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r = p^{k-i} \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$$

Pero esto es lo mismo que probemos que:

$$\sum_{s=0}^{p^{i+m}-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r = p^m \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r, \qquad m \geq 0$$

Probémoslo por inducción sobre m:
Es claro que se cumple para $m = 0$.
1. $m = 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{p^{i+1}-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r &= \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r + \sum_{s=p^i}^{2p^i-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r \\ &\quad + \cdots + \sum_{s=(p-1)p^i}^{pp^i-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r \end{aligned}$$

como

$$t^{qp^i+j} [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r = t^{qp^i} t^j [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r = t^j [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r, \quad 1 \leq q \leq p-1, \ 0 \leq j \leq p^i - 1$$

entonces:

$$\sum_{s=0}^{p^{i+1}-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r = \underbrace{\sum_{s=0}^{p^i-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r + \cdots + \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r}_{p-veces}$$

así:

$$\sum_{s=0}^{p^{i+1}-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r = p \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$$

2. Supongamos que se cumple para toda $m \leq q$.
3. Probemos que

$$\sum_{s=0}^{p^{i+q+1}-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r = p^{q+1} \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$$

como

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{p^{i+q+1}-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r &= \sum_{s=0}^{p^{i+q}-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r + \sum_{s=p^{i+q}}^{2p^{i+q}-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r \\ &\quad + \cdots + \sum_{s=(p-1)p^{i+q}}^{pp^{i+q}-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r\end{aligned}$$

pero

$t^{qp^{i+q}+j}[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r = t^{qp^{i+q}} t^j[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r = t^j[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r,\ 1 \le q \le p-1,\ 0 \le j \le p^{i+q}-1$

por lo tanto;

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{p^{i+q+1}-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r &= \underbrace{\sum_{s=0}^{p^{i+q}-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r + \cdots + \sum_{s=0}^{p^{i+q}-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r}_{p-veces} \\ &= p \sum_{s=0}^{p^{i+q}-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r\end{aligned}$$

luego, por hipótesis de inducción:

$$\sum_{s=0}^{p^{i+q+1}-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r = pp^q \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r = p^{q+1} \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$$

Por lo tanto $x_i = p^{k-i} \sum_{r \in R_i} \sum_{s=0} t^s n_r[g_1 \mid \cdots \mid g_n]_r$, luego por la afirmación del lema 4.1 se tiene que $x_i \in p^{k-i}X_i\ \forall\ i$. Por lo tanto $Im\ \overline{N} = \bigoplus_{i=0}^{k} p^{k-i}X_i$. ∎

A continuación les presentamos una generalización de la proposición $2 \cdot 1$ de [1]:

Corolario 4.1. *Coker* $\overline{N} = \bigoplus_{i=0}^{k-1} X_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^{k-i}$.

Demostración. Por los lemas 4.1 y 4.3 tenemos que:

$$\begin{aligned}Coker\ \overline{N} &= \frac{\bigoplus_{i=0}^{k} X_i}{\bigoplus_{i=0}^{k} p^{k-i}X_i} \\ &= \bigoplus_{i=0}^{k-1} X_i/p^{k-i}X_i \\ &\cong \bigoplus_{i=0}^{k-1} (X_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^{k-i})\end{aligned}$$

■

Lema 4.4. *Si $Q = \mathbb{Z}/p^k$ y A es un G-módulo plano, entonces hay una sucesión exacta larga* $\cdots \to H_n(C_\bullet(G)_Q, A) \to H_n^Q(G, A) \to H_n(Coker\ \overline{N}, A) \to H_{n-1}(C_\bullet(G)_Q, A) \to \cdots$

Demostración. Como el dominio de N es libre abeliano entonces $\overline{N}$ es inyectiva y como A es plano entonces es claro que la siguiente sucesión de complejos es exacta:

$$0 \to C_\bullet(G)_Q \otimes_G A \xrightarrow{\overline{N}\otimes id} C_\bullet(G)^Q \otimes_G A \xrightarrow{\pi\otimes id} Coker\ \overline{N} \otimes_G A \to 0$$

luego por el homomorfismo conector [3] existe la sucesión exacta larga que queríamos. ■

Definición 4.6. *Sea $Q = \mathbb{Z}/p^k$. Definamos para el Q-módulo diferencial graduado $C_\bullet(G) \otimes_G A$ una filtración $F^\bullet$.*
Sea $F_s^i = C_i(G)^{Q_{k-s}} \otimes_G A$, $Q_{k-s} = \mathbb{Z}/p^{k-s}$, $0 \le s \le k$; es decir tenemos la familia de subcomplejos

$$F_0^\bullet \subset F_1^\bullet \subset \cdots \subset F_{k-1}^\bullet \subset C_\bullet(G) \otimes_G A$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_{n+1}(G) \otimes_G A \arrow[r] & C_n(G) \otimes_G A \arrow[r] & C_{n-1}(G) \otimes_G A \arrow[r] & {} \\
{} \arrow[r] & F_{k-1}^{n+1} \arrow[r] \arrow[u, "j_{k-1}^{n+1}"] & F_{k-1}^{n} \arrow[r] \arrow[u, "j_{k-1}^{n}"] & F_{k-1}^{n-1} \arrow[r] \arrow[u, "j_{k-1}^{n-1}"] & {} \\
{} \arrow[r] & F_{k-2}^{n+1} \arrow[r] \arrow[u, "j_{k-2}^{n+1}"] & F_{k-2}^{n} \arrow[r] \arrow[u, "j_{k-2}^{n}"] & F_{k-2}^{n-1} \arrow[r] \arrow[u, "j_{k-2}^{n-1}"] & {} \\
& {} \arrow[u] & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

donde los homomorfismos j_s^i son dados por la inclución.

Dada la filtración $F^\bullet$ del complejo $C_\bullet(G) \otimes_G A$ entonces los homomorfismos j_s^i inducen los homomorfismos $(j_s^i)_* : H_i(F_s^i) \to H_i(G, A)$. Ya que $F_{s-1}^i \subset F_s^i$ entonces $Im\ (j_{s-1}^i)_* \subset Im\ (j_s^i)_*$, así $(j^\bullet)_*$ es una filtración de $H_\bullet(G, A)$.
Pero $F_s^i = C_i(G)^{Q_{k-s}} \otimes_G A \cong (C_i(G) \otimes_G A)^{Q_{k-s}}$ $\forall\ 0 \le s \le k$; por lo tanto $H_\bullet(F_s^\bullet) \cong H_\bullet^{Q_{k-s}}(G, A)$ $\forall\ 0 \le s \le k$.
Por lo tanto, vamos a tener una familia de subcomplejos

$$(j_0^\bullet)_*(H_\bullet^{Q_k}(G, A)) \subset (j_1^\bullet)_*(H_\bullet^{Q_{k-1}}(G, A)) \subset \cdots \subset (j_{k-1}^\bullet)_*(H_\bullet^{Q_1}(G, A)) \subset H_\bullet(G, A)$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H_n(G,A) \arrow[r] & H_{n-1}(G,A) \arrow[r] & {} \\
{} \arrow[r] & (j^n_{k-1})_*(H^{Q_1}_n(G,A)) \arrow[r] \arrow[u] & (j^{n-1}_{k-1})_*(H^{Q_1}_{n-1}(G,A)) \arrow[r] \arrow[u] & {} \\
{} \arrow[r] & (j^n_{k-2})_*(H_n(H^{Q_2}_n(G,A)) \arrow[r] \arrow[u] & (j^{n-1}_{k-2})_*(H^{Q_2}_{n-1}(G,A)) \arrow[r] \arrow[u] & {} \\
& {} \arrow[u] & {} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Es decir, $H_\bullet(G,A)$ es un Q-módulo diferencial graduado con la filtración $(j^\bullet)_*$, de esta manera por el teorema 3.1 se tiene inmediatamente el siguiente resultado:

Teorema 4.1. *Existe una sucesión espectral* (E^r, d^r) *determinada por* $H_\bullet(G,A)$ *que converge a la homología del complejo* $H_\bullet(G,A)$*, tal que*

$$E^1_{s,q} \cong H_{s+q}\left(\frac{(j^{s+q}_s)_*(H^{Q_{k-s}}_{s+q}(G,A))}{(j^{s+q}_{s-1})_*(H^{Q_{k-s+1}}_{s+q}(G,A))}\right) \quad s = 0, \cdots, k, \quad q \in \mathbb{Z}$$

Demostración. Falta probar que la sucesión espectral converge.
Sabemos que el diferencial es dado por:

$$E^r_{s+r,q-r+1} \to E^r_{s,q} \xrightarrow{d^r} E^r_{s-r,q+r-1}$$

y además $0 \leq s \leq k$, entonces tendremos tres casos:

1. Si $s = 0$.
$$E^r_{r,q-r+1} \to E^r_{0,q} \xrightarrow{d^r} E^r_{-r,q+r-1}$$
Como $E^r_{p,q} = 0$ si $p < 0$ entonces $E^r_{-r,q+r-1} = 0$, así $E^{r+1}_{0,q} = \frac{E^r_{0,q}}{Im\ \{E^r_{r,q-r+1} \to E^r_{0,q}\}}$. Pero $E^r_{p,q} = 0$ si $p > k$ entonces $E^r_{r,q-r+1} = 0$ si $r \geq k+1$, así $E^{k+1}_{0,q} = E^{k+2}_{0,q} = \cdots = E^\infty_{0,q}$.

2. Si $s = k$.
$$E^r_{k+r,q-r+1} \to E^r_{k,q} \xrightarrow{d^r} E^r_{k-r,q+r-1}$$
Como $E^r_{p,k} = 0$ si $p > k$ y como $k, r > 0$ entonces $E^r_{k+r,q-r+1} = 0$, así $E^{r+1}_{k,q} = ker\ d^r$, pero $E^r_{p,q} = 0$ si $p < 0$ entonces $E^r_{k-r,q+r-1} = 0$ si $r \geq k+1$, por lo tanto $E^{k+1}_{k,q} = E^{k+2}_{k,q} = \cdots = E^\infty_{k,q}$.

3. Si $0 < s < k$.
   Si $r = k$, entonces
   $$E^k_{s+k,q-k+1} \to E^k_{s,q} \xrightarrow{d^r} E^k_{s-k,q+k-1}$$
   pero como $s < k$ entonces $E^k_{s-k,q+k-1} = 0$, por otro lado $E^r_{s+k,q-r+1} = 0$, así $E^k_{s,q} = E^{k+1}_{s,q} = \cdots = E^{\infty}_{s,q}$.

La sucesión espectral converge al complejo $H_\bullet(G, A)$ debido que la filtración está acotada. ■

Proposición 4.1. *Si $\mid Q \mid$ es invertible en A, entonces la aplicación natural*

$$H^Q_\bullet(G, A) \to H_\bullet(C_\bullet(G) \otimes_G A)^Q$$

es un isomorfismo.

Demostración. Ver demostración en [1]. ■

Con esta proposición tenemos otra forma de ver el lema 4.4 y el teorema 4.1:

Teorema 4.2. *Si $Q = \mathbb{Z}/p^k$ y A es un G-módulo plano tal $\mid Q \mid$ es invertible en A, entonces hay una sucesión exacta larga*
$\cdots \to H_n(C_\bullet(G)_Q, A) \to H_n(G, A)^Q \to H_n(Coker\ \overline{N}, A) \to H_{n-1}(C_\bullet(G)_Q, A) \to \cdots$

Teorema 4.3. *Sea A un G-módulo plano, sea $Q = \mathbb{Z}/p^k$ tal que $\mid Q \mid$ es invertible en A, entonces hay una sucesión espectral (E^r, d^r) que converge a la homología del complejo $H_\bullet(G, A)$, tal que*
$$E^1_{s,q} \cong H_{s+q}\left(\frac{H_{s+q}(G, A)^{Q_{k-s}}}{H_{s+q}(G, A)^{Q_{k-s+1}}}\right)$$

Demostración. Por definición de $Im\ i_*$ y como $H_\bullet(G, A)^Q$ está incluido en $H_\bullet(G, A)$ entonces rápidamente se obtiene el teorema de la proposición 4.1 y el teorema 4.1. ■

Bibliografía

[1] Kevin P.Knudson., *The homology of invariant group chain*, Journal of Algebra., 298 (2006) 15–33.

[2] Kenneth S.Brown., *Cohomology of Groups*, Springer-Verlang, New York, 1982.

[3] Joseph J.Rotman., *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, 2nd Printing (2003).

[4] Joseph J.Rotman., *An Introduction to Homological Algebra*, Second Edition.

[5] Emilio Lluis Puebla., *Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-teoría algebraica clásica*, Sociedad Matemática Mexicana, 2005.

[6] Mac Lane, Saunders., *Homology*, Springer-Verlag, 1963.