UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Instituto de Matemáticas

Distribución de secciones cuspidales en la variedad modular de Hilbert

Tesis que para obtener el título de
Doctor en Ciencias
Presenta

Samuel Estala Arias.
Instituto de Matemáticas
UNAM - Unidad Cuernavaca

Dr. S. Alberto Verjovsky Solá	Director de Tesis
Dr. Carlos Castaño Bernard	Sinodal
Dr. Florian Luca	Sinodal
Dr. Timothy M. Gendron Thornton	Sinodal
Dr. Wilson A. Zuñiga Galindo	Sinodal

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción.

Sea $\mathscr{H} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0 \}$ el semiplano de Poincaré con la métrica hiperbólica $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$. Sea $SL(2, \mathbb{Z})$ el grupo formado por las matrices dos por dos con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y determinante uno. El grupo modular $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm id\}$ actúa en $\mathscr{H}$ mediante transformaciones de Möbius y preserva la métrica hiperbólica. El espacio cociente

$$X(\Gamma) := \mathscr{H}/\Gamma$$

se llama la *variedad modular*. El horociclo $\mathcal{C}_y := \{ x + iy \mid x \in \mathbb{R} \} \subset \mathscr{H}$ desciende a $X(\Gamma)$, mediante la proyección natural, en una curva cerrada de longitud $1/y$. Sea f una función compleja continua y de soporte compacto en $X(\Gamma)$, entonces

$$m_y(f) := \int_{-1/2}^{1/2} f(x + iy) dx$$

define una medida de probabilidad en $X(\Gamma)$, que está soportada uniformemente (c.r.a. longitud de arco hiperbólica) en el horociclo $\mathcal{C}_y$. Por otro lado, tenemos la medida de probabilidad en la orbidad modular inducida por el elemento de área hiperbólica:

$$m(f) := \frac{3}{\pi} \int_{X(\Gamma)} f(x + iy) \frac{dxdy}{y^2}.$$

El siguiente teorema sobre la distribución asintótica de los horociclos cerrados fue mostrado por D. Zagier en [Zag79]:

Teorema 1. *([Zag79]) Sea f un función diferenciable en la variedad modular y de soporte compacto. Entonces*

$$m_y(f) = m(f) + o(y^{1/2-\epsilon}) \qquad (y \to 0)$$

para todo $0 < \epsilon < 1/2$. En particular, las medidas m_y convergen débilmente a m cuando $y \to 0$.

En [Zag79] Don Zagier encontró una sorprendente conección entre la razón de convergencia de m_y a m y la hipótesis de Riemann

Teorema 2. *([Zag79]) La hipótesis de Riemann es verdadera si y sólo si para toda función f definida en $\Gamma\backslash\mathscr{H}$ diferenciable y de soporte compacto se tiene*

$$m_y(f) = m(f) + o(y^{3/4-\epsilon}) \qquad (y \to 0)$$

para todo $0 < \epsilon < 3/4$.

En [Sar80] P. Sarnak mostró algunos resultados análogos en el espacio tangente unitario de la variedad modular, el cual se puede identificar con la tres variedad $PSL(2,\mathbb{R})/\Gamma$. A.Verjosky en [Ver92] mostró que la estimación análoga del Teorema 1 en el resultado de Sarnak es óptima para algunas funciones características de $PSL(2,\mathbb{R})/\Gamma$.

El propósito de este trabajo es aplicar la teoría de Zagier y Sarnak a un campo de números algebraicos. Brevemente describiremos los resultados. Sea K un campo de números algebraicos de grado $n = r_1 + 2r_2$ y sea $\mathfrak{o}$ el anillo de enteros de K. Entonces, existe una variedad riemanianna $\mathbf{X} = (\mathscr{H}_2)^{r_1} \times (\mathscr{H}_3)^{r_2}$ donde actúa el grupo modular de Hilbert $\Gamma = PSL(2,\mathfrak{o})$ de manera propia y discontinua preservando la metrica riemanniana de $\mathbf{X}$. El espacio cociente de

$$\mathscr{M} = \mathbf{X}/\Gamma$$

una variedad de órbitas diferenciable llamada la variedad modular de Hilbert. Si el campo K tiene número de clase igual a h, entonces la variedad modular de Hilbert tiene h cúspides. Estas cúspides se pueden parametrizar por la c'1uspide canónica al infinito de $\mathbf{X}$. Para cada cúspide k_i y cada $q > 0$, existe una “horoesfera cerrada” $B(q,k_i)/\Gamma_{k_i}$ de volumen $q^{-1}C$, donde C es una constante que depende del campo K. Sea $m_i(\cdot,q)$ la medida de probabilidad en $\mathscr{M}$ que está uniformentente distribuida en $B(q,k_i)$ con respecto a la medida de volumen inducida $B(q,k_i)$ por la métrica riemaniana de $\mathbf{X}$ (ver definición 1). Sea $m_q = (m_1(q) + \cdots + m_h(q))/h$.

Teorema 3. *Sea f una función en la variedad modular de Hilbert de soporte compacto. Entonces,*

$$m(f,q) = m(f) + o(q^{1/2-\epsilon}),$$

cuando $q \to 0$, para todo $0 < \epsilon < 1/2$.

Asimismo generalizamos la equivalencia de Zagier para la hipótesis de Riemann y mostramos la siguiente aseveración.

Teorema 4. *La hipótesis de Riemann para la función zeta de Dedekind de* K *es cierta si y sólo si, para toda función f diferenciable y de soporte compacto en* $\mathscr{M}$*, tenemos*

$$m_q(f) = m(f) + o(q^{\frac{3}{4}-\epsilon}) \quad (\text{ cuando } q \to 0)$$

para todo $0 < \epsilon < 1/4$.

Para cada $f \in C_c^\infty(\mathscr{M})$ consideremos la *transformada de Mellin* de $m(f,q)$:

$$\mathcal{M}(f,s) := \int_0^\infty m(f,q) q^{s-1} \frac{dq}{q}.$$

Esto define una función holomorfa para $\Re(s) > 1$. Por el de teorema de desdoblamiento de Rankin-Selberg, para $\Re(s) > 1$ tenemos

$$C_2 \mathcal{M}(f,s) = \int_{\mathscr{M}} \mathrm{E}(\mathbf{z},s)\, f(\mathbf{z})\, dv(\mathbf{z})$$

donde C_2 es una constante que depende del campo y

$$\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$$

denota la series de Eisenstein.
Los coeficientes de Fourier de las series $\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$ se pueden obtener en cada cúspide ([Sor02]) y esto nos mucha información sobre las series the Eisenstein: $\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$ es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con únicos polos en $s = 0, s = 1$. El residuo en los polos se puede calcular usando la fórmula del número de clases.

Las propiedades análiticas de $\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$ se extienden a $\mathcal{M}(f,s)$. Esto es $\mathcal{M}(f,s)$ es una funcion meromorfa en $\mathbb{C}$ con únicos polos en $s = 0, s = 1$. El residuo en los polo es igual a $m(f)$. La idea de Zagier es integrar $\mathcal{M}(f,s)$ en la frontera de una banda vertical $\Omega = \{\delta \leq s \leq 2\}$. Por un lado, por el teorema del Residuo de Cauchy tenemos que

$$\int_{\partial\Omega} \mathcal{M}(f,s) = m(f)$$

Pero, por otro lado por la fórmula de inversión de Mellin

$$\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \mathcal{M}(f,s) = m(f) + \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \mathcal{M}(f,s).$$

Para estimar el lado izquierdo en la última identidad, necesitamos estimar las series $\mathrm{E}(\mathbf{z}, s)$. Esto se logra utilizando las fórmulas Maas-Selberg. En [Sar80] P. Sarnak explica como la estimación $o(q^{1/2})$ se obtiene como una consecuancia del estudio de la fórmula para la traza de Selberg. Asimismo, utilizando una consecuencia clásica par la hipótesis de Riemann podemos obtener una mejor estimación.

Esta tesis se encuentra organizada en tres partes. En el capítulo I introducimos la variedad modular Hilbert y algunos resultados de la teoría de números algebraicos. En el capítulo II exponemos las series de Eisenstein de la variedad modular de Hilbert y calculamos sus coeficientes de Fourier en las distintas cúspides. Finalmente en el capítulo III demostramos los resultados de esta investigación. Primero veremos el método de Rankin-Selberg y la relación de Maass-Selberg para las series de Eisenstein. Asimismo expondremos la función de Lindelöf de la función zeta de Dedekind. Para concluir mostraremos los Teoremas 1 y 2 extendiedo las pruebas de Zagier y Sarnak sobre la equidistribución asintótica de los horociclos cerrados.

Capítulo I
El grupo modular de Hilbert

En este capítulo introducimos el grupo modular de Hilbert y construimos una región fundamental para este grupo. Veremos que la variedad modular correspondiente no es compacta, mas sin embargo tiene un número finito de puntas.

1. Campos algebraicos de números

En esta sección presentaremos los conceptos básicos de la teoría de números algebraicos y las propiedades fundamentales de la función zeta de Dedekind. Como referencias generales se puede consultar los libros de J. Neukirch [Neu99] y S. Lang [Lan94].

Sea $\mathbb{Q}$ el campo formado por los números racionales y $\mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros (racionales). Denotamos por $\mathbb{Q}[x]$ el anillo de polinomios en la variable x con coeficientes en $\mathbb{Q}$ y por $\mathbb{Q}(x)$ el campo cociente de $\mathbb{Q}[x]$.

Un *número algebraico* es un número complejo θ que es raíz de un polinomio diferente de cero en $\mathbb{Q}[x]$. Esto es,

$$a_n\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

para algunos a_i en $\mathbb{Q}$ con a_n distinto de cero. Sea θ un número algebraico, entonces existe un único polinomio mónico p en $\mathbb{Q}[x]$ (i.e, con coeficiente líder igual a uno) de grado menor tal que θ es raíz de p. El polinomio p se llama el *polinomio mínimo* de θ. El *grado* de θ (c.r.a. $\mathbb{Q}$) se define como el grado de p. Las raíces $\theta^{(1)}, ..., \theta^{(n)}$ del polinomio mínimo de θ se llaman los *conjugados* de θ. Un *entero algebraico* es una raíz de un polinomio mónico distinto de cero en $\mathbb{Z}[x]$. Esto es, una solución de una ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

donde los valores a_j son números enteros racionales. Por el lema de Gauss se sigue que el polinomio mínimo de un entero algebraico pertenece a $\mathbb{Z}[x]$ y por lo tanto todos los conjugados de un entero algebraico son también enteros algebraicos.

Un *campo de números algebraico* K es una extensión de $\mathbb{Q}$ de dimensión finita. Esto es, un campo K que contiene a $\mathbb{Q}$ como un subcampo y la dimensión de K, como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, es finita. La dimensión de K se llama el grado de la extensión.

El anillo $\mathfrak{o}$ formado por los enteros algebraicos contenidos en K se llama el *anillo de enteros* del campo K. Este anillo es un *dominio de Dedekind*, esto es, un dominio entero, enteramente cerrado y tal que todos sus ideales primos no cero son máximos.

Sea K un campo de números algebraico, entonces, por el teorema del elemento primitivo, existe un número algebraico θ tal que $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(\theta)$. Sea p el polinomio mínimo de θ. Entonces

$$\mathrm{K} \cong \mathbb{Q}(\theta) \cong \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle p(x) \rangle}.$$

Luego, el grado n del polinomio mínino p asociado a θ es igual al grado de la extensión $\mathbb{Q}(\theta)$ sobre $\mathbb{Q}$ y cada α en $\mathbb{Q}(\theta)$ se escribe de manera única como

$$\alpha = g(\theta) = c_0 + c_i\theta + \cdots + c_{n-1}\theta^{n-1}$$

con c_j números racionales. Sean $\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(n)}$ los conjugados de θ, i.e., las raÍices del polinomio mínimo p de θ. Sea r_1 el número de raíces reales de p, $2r_2$ el número de raíces complejas de p. Luego, $n = r_1 + 2r_2$. Escribamos $r = r_1 + r_2$. Usualmente ordenamos los conjugados de θ de tal manera que los primeros r_1 conjuudados son las raíces reales del polinomio p y los siguientes r_2 conjugados son un conjunto de las raíces complejas de p tales que

$$\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(r_1)}, \theta^{(r_1+1)}, \overline{\theta^{(r_1+1)}}, \ldots, \theta^{(r)}\overline{\theta^{(r)}}$$

son todas las raíces del polinomio p. Para cada $i = 1, \ldots, n$ tenemos el encaje

$$\mathrm{K} \to \mathbb{C}, \qquad \alpha \mapsto \alpha^{(i)} = g(\theta^{(i)}).$$

Si consideramos $\alpha^{(i)}$, para $i = 1, \ldots, r$, obtenemos los *lugares o sitios* reales y complejos del campo K.

Para $\alpha \in \mathrm{K}$ la norma de α se define como el valor real

$$\begin{aligned}\mathbb{N}(\alpha) &= \alpha^{(1)} \cdots \alpha^{(n)}.\\ &= \prod_{l=1}^{r_1} \alpha^{(l)} \prod_{l=r_1+1}^{r} \left|\alpha^{(l)}\right|^2\end{aligned}$$

Una *unidad* del campo K se define como un elemento invertible de $\mathfrak{o}$. El conjunto $\mathfrak{o}^{\times}$ de las unidades de K esta descrito por

$$\mathfrak{o}^{\times} = \{\varepsilon \in \mathfrak{o} \mid \mathbb{N}(\varepsilon) = \pm 1\}.$$

Por ejemplo, un conjunto especial de unidades es el conjunto formado por las raíces de la unidad contenidas en K:

$$W = \left\{\varepsilon \in \mathrm{K} \mid \varepsilon^{l} = 1 \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\right\}.$$

El conjunto $\mathfrak{o}^{\times}$ es un grupo multiplicativo y W es un subgrupo finito de $\mathfrak{o}^{\times}$.

Por el teorema de unidades de Dirichlet, la aplicación $\log : \mathfrak{o}^{\times} \to \mathbb{R}^{r}$, dada por

$$\varepsilon \longmapsto (\ln\left|\varepsilon^{(1)}\right|, \ldots, \ln\left|\varepsilon^{(r_1)}\right|, 2\ln\left|\varepsilon^{(r_1+1)}\right|, \ldots, 2\ln\left|\varepsilon^{(r)}\right|)$$

es un homeomorfismo de grupos con núcleo W e imagen una retícula Λ en el espacio euclideano

$$U = \{\, (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^{r} \ \mid\ x_1 + \cdots + x_r = 0 \,\}.$$

Luego, existen *unidades fundamentales* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r-1}$, tales que el conjunto de vectores

$$\left\{(\ln\left|\varepsilon_i^{(1)}\right|, \ldots, \ln\left|\varepsilon_i^{(r_1)}\right|, 2\ln\left|\varepsilon^{(r_1+1)}\right|, \ldots, 2\ln\left|\varepsilon_i^{(r)}\right|)\right\}_{i=1}^{r-1} \subset \mathbb{R}^{r}$$

son una base para la retícula Λ vista como un módulo sobre $\mathbb{Z}$ y el grupo de las unidades está descrito como

$$\mathfrak{o}^{\times} = \{\varepsilon_1^{k_1} \cdots \varepsilon_{r-1}^{k_{r-1}} \ \mid\ k_1, \ldots, k_{r-1} \in \mathbb{Z}\ \} \times W.$$

Sea V el volumen de una región fundamental de Λ con respecto a la medida $r-1$ dimensional inducida en U por la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{r}$. El vector

$(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^r$ es perpendicular a V y su distancia al origen es $\sqrt{r}$ por lo que $V\sqrt{r}$ es igual al valor absoluto del determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} \ln\left|\varepsilon_1^{(1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(1)}\right| & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \ln\left|\varepsilon_1^{(r_1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r_1)}\right| & 1 \\ \\ 2\ln\left|\varepsilon_1^{(r_1+1)}\right| & \cdots & 2\ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r_1+1)}\right| & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\ln\left|\varepsilon_1^{(r)}\right| & \cdots & 2\ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r)}\right| & 1 \end{bmatrix}.$$

El regulador R de K se define como el valor absoluto del determinante que se obtiene al quitar cualquier renglón de la matriz [Neu99, pp. 43]

$$\begin{bmatrix} \ln\left|\varepsilon_1^{(1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(1)}\right| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln\left|\varepsilon_1^{(r_1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r_1)}\right| \\ \\ 2\ln\left|\varepsilon_1^{(r_1+1)}\right| & \cdots & 2\ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r_1+1)}\right| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2\ln\left|\varepsilon_1^{(r)}\right| & \cdots & 2\ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r)}\right| \end{bmatrix},$$

por lo que $V\sqrt{r} = r\,\mathrm{R}$ y $V = \sqrt{r}\,\mathrm{R}$.

Un *ideal fraccionario* $\mathfrak{a}$ es un $\mathfrak{o}$-submódulo de K distinto de cero y finitamente generado, esto es

$$\mathfrak{a} = \langle \alpha_1, ..., \alpha_r \rangle = \left\{ \sum_{\text{finita}} \zeta_i \alpha_i \mid (\zeta_i \in \mathfrak{o}) \right\}$$

para algunos $\alpha_j \in$ K. Si $\mathfrak{a} = \langle \alpha \rangle$ para algún $\alpha \in$ K, decimos que es un ideal (fraccionario) principal. Un resultado de teoría de números nos dice que cada ideal fraccionario $\mathfrak{a}$ se escribe como $\mathfrak{a} = \langle \alpha, \beta \rangle$, para algunos $\alpha, \beta \in$ K. Por otro lado un ideal fraccionario $\mathfrak{a}$ es entero si es generado por enteros algebraicos y en este caso $\mathfrak{a}$ es un ideal del anillo $\mathfrak{o}$ en el sentido usual.

Dados dos ideales fraccionarios $\mathfrak{a} = \langle \alpha_1, ...\alpha_r \rangle$ y $\mathfrak{a} = \langle \beta_1, ...\beta_s \rangle$ se define el producto

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \langle \alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, ..., \alpha_r\beta_s \rangle.$$

En particular, cuando nos restringimos a los ideales enteros, este producto coincide con la multiplicación usual de ideales en $\mathfrak{o}$. Más aún, con este producto, el conjunto $\mathcal{I}$ formado por los ideales fraccionarios de K, es un grupo abeliano, donde la identidad es el ideal $\mathfrak{o} = \langle 1 \rangle$ y el inverso de un ideal $\mathfrak{a}$ está dado por

$$\mathfrak{a}^{-1} = \{\alpha \in \mathrm{K} : \alpha\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}\}.$$

Un ideal entero $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}$ distinto de $\mathfrak{o}$ es un ideal primo si dados dos enteros algebraicos $\alpha, \beta \in \mathfrak{o}$ tales que $\alpha\beta \in \mathfrak{p}$, entonces $\alpha \in \mathfrak{p}$ o bien $\beta \in \mathfrak{p}$. Por el teorema de factorizacion única de ideales, los ideales fraccionarios se descomponen de manera única (salvo orden) como producto de ideales enteros primos

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{\alpha_k} \qquad (\alpha_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}).$$

Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ dos ideales de $\mathfrak{o}$ tales que

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{\alpha_k}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1^{\beta_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{\beta_k} \qquad (\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}).$$

De manera análoga a los números racionales, ponemos definir el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ como

$$mcd(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{p}_1^{\gamma_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{\gamma_k} \qquad mcm(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{p}_1^{\delta_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{\delta_k}$$

donde

$$\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i) \text{ y } \delta_i = \max(\alpha_i, \beta_i) \qquad (\text{para } i = 1, \dots, k).$$

Por un resultado de dominios de Dedekind tenemos

$$mcd(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \text{ y } mcm(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}.$$

Por otro lado, si consideramos el subgrupo de ideales fraccionarios principales $\mathcal{P}$ y tomamos el cociente $\mathcal{C} = \mathcal{I}/\mathcal{P}$ obtenemos un grupo abeliano llamado el *grupo de clases de ideales*. Por un teorema de Minkowski en cada clase $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ existe un ideal entero $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ de norma menor o igual que la constante de Minkowski

$$C_{\mathrm{K}} = \sqrt{\mathrm{D}} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \frac{n!}{n^n}.$$

Luego, como el número de ideales enteros tales que su norma está acotada por C_{K} es finito, el grupo de clases de ideales es un grupo finito. El orden de este grupo se conoce como el *número de clases* del campo K. El grupo de clases de ideales nos dice que tan diferente es $\mathfrak{o}$ de un anillo de factorización única.

Sea $\mathfrak{a}$ un ideal entero, la norma de $\mathfrak{a}$ se define como la cardinalidad del grupo (finito) aditivo $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$, esto es

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = |\mathfrak{o}/\mathfrak{a}|\,.$$

Podemos extender esta función al conjunto de ideales fraccionarios utilizando el teorema de factorización única. Si $\mathfrak{a}$ se escribe como

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1}\cdots\mathfrak{p}_k^{\alpha_k} \qquad (\alpha_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$$

definimos

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p}_1)^{\alpha_1}\cdots\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_k)^{\alpha_k}$$

En particular, si $\mathfrak{a} = (\alpha)$ es un ideal principal, entonces

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = |\mathbb{N}(\alpha)| = \left|\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}\cdots\alpha^{(n)}\right|,$$

independientemente del representante α.

Por la teoría de Minkowski sobre los números algebraicos, tenemos una descripción geométrica del anillo de enteros de K y de los ideales fraccionarios. Ordenemos los lugares de K de la forma usual y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{K} &\longrightarrow \mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2} \\ \alpha &\longmapsto (\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(r_1)},\ldots,\alpha^{(r_1+r_2)}) \end{aligned} \tag{I.1}$$

Luego, por un teorema de Minkowski, la imagen del anillo de enteros $\mathfrak{o}$ bajo la aplicación anterior es una retícula en $\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}$, i.e. un módulo discreto sobre $\mathbb{Z}$ de rango n. El espacio cociente $\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}/\mathfrak{o}$ se llama el *toro de Minkowski* del campo K.

Sea $\{\,\omega_1,\ldots,\omega_n\,\}$ una base de $\mathfrak{o}$ como módulo libre sobre $\mathbb{Z}$. Recordemos que por definición el discriminante de K se define como el cuadrado del determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} \omega_1^{(1)} & \cdots & \omega_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^{(n)} & \cdots & \omega_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

El área del toro de Minkowski con respecto a la medida de Lebegue n-dimensional en $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ es el igual al valor absoluto del determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} \omega_1^{(1)} & \cdots & \omega_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^{(r_1)} & \cdots & \omega_n^{(r_1)} \\ \\ \Re(\omega_1^{(r_1+1)}) & \cdots & \Re(\omega_n^{(r_1+1)}) \\ \Im(\omega_1^{(r_1+1)}) & \cdots & \Im(\omega_n^{(r_1+1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Re(\omega_1^{(r)}) & \cdots & \Re(\omega_n^{(r)}) \\ \Im(\omega_1^{(r)}) & \cdots & \Im(\omega_n^{(r)}) \end{bmatrix}$$

y este valor es igual a $2^{-r_2}\sqrt{\mathrm{D}}$, donde D es igual al valor absoluto del discriminante de K.

Sea $\mathfrak{a}$ un ideal fraccionario, entonces, su imagen bajo la aplicación I.11 es también una retícula en $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$. El área del espacio cociente $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}/\mathfrak{a}$, con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ se puede calcular, de manera similar al toro de Minkowski, utilizando una base de $\mathfrak{a}$ como $\mathbb{Z}$ módulo libre. Esta área también puede calcularse como

$$2^{-r_2}\sqrt{\mathrm{D}}\,\mathfrak{N}(\mathfrak{a}).$$

Para $\alpha \in \mathrm{K}$ la traza de α está definida por

$$Tr(\alpha) = \alpha^{(1)} + \cdots + \alpha^{(n)} = \sum_{l=1}^{r_1} \alpha^{(l)} + \sum_{l=r_1+1}^{r} 2\Re(\alpha^{(l)}).$$

Para un ideal fraccionario $\mathfrak{a}$ el módulo dual de $\mathfrak{a}$ se describe como el ideal

$$\mathfrak{a}^\star = \{\, \alpha^\star \in \mathrm{K} \mid Tr(\alpha\alpha^\star) \in \mathbb{Z} \text{ para todo } \alpha \in \mathfrak{a} \,\}\,.$$

El *ideal diferente* $\mathfrak{d}$ de K se define como el ideal inverso del módulo dual de $\mathfrak{o}$, esto es

$$\mathfrak{d}^{-1} = \{\, \alpha^\star \in \mathrm{K} \mid Tr(\alpha\alpha^\star) \in \mathbb{Z} \text{ para todo } \alpha \in \mathfrak{o} \,\}\,.$$

Un resultado de campos algebraicos de números nos dique que la norma del ideal $\mathfrak{d}$ es igual a D. Luego, para todo ideal fraccionario $\mathfrak{a}$ tenemos

$$\mathfrak{a}^\star = \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{a}^{-1} \;\text{ y }\; \mathfrak{N}(\mathfrak{a}^\star) = \frac{1}{\mathrm{D}\mathfrak{N}(\mathfrak{a})}.$$

De la definición de módulo dual se sigue que las aplicaciones

$$\left\{ \exp\left(2\pi i Tr(l(\cdot)\right) : \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2} \to \mathbb{C} \mid l \in \mathfrak{a}^\star \right\}$$

forman el grupo de caracteres del grupo aditivo compacto $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}/\mathfrak{a}$.

Ejemplo 1. Sea $d \in \mathbb{Z}$ un entero libre de cuadrados (i.e., d no es divisible por un primo p al cuadrado). Un *campo cuadrático* es un campo de la forma $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. El anillo de enteros de un campo cuadrático $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ está descrito por

$$\mathfrak{o} = \begin{cases} \mathbb{Z} + \frac{1+\sqrt{d}}{2}\mathbb{Z}, & \text{si } d \equiv 1 \mod 4, \\ \mathbb{Z} + \sqrt{d}\mathbb{Z}, & \text{si } d \equiv 2, 3 \mod 4. \end{cases}$$

1.1. La función zeta de Dedekind

En está sección introducimos la función zeta de Dedekind de un campo de números. Un estudio detallado se puede encontrar en los Capítulos VIII y XIII de libro de S. Lang [Lan94] y el Capítulo VII del libro de J. Neukirch [Neu99].

Sea K un campo de números algebraico. La *función zeta de Dedekind* del campo K está definida por la serie de Dirichlet

$$\zeta_{\mathrm{K}}(s) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s},$$

donde la suma se toma sobre los ideales enteros y s es un número complejo en el semiplano $\Re(s) > 1$. Esta serie converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos del hemiplano $\Re(s) > 1$, por lo que define una función holomorfa en esa región. Asimismo, por el teorema de factorización única de ideales fraccionarios, se sigue

$$\zeta_{\mathrm{K}}(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{1}{1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s}} \right) \quad (\Re(s) > 1),$$

donde el producto se toma sobre todos los ideales enteros primos. Luego, $\zeta_{\mathrm{K}}(s)$ no se anula en el hemiplano $\Re(s) > 1$.

Por un teorema clásico de Hecke, $\zeta_{\mathrm{K}}(s)$ es una función analítica en el plano complejo, excepto por un polo simple en $s=1$ con residuo

$$\mathcal{R}es_{s=1}\zeta_{\mathrm{K}}(s) = \frac{2^{r_1}\,(2\pi)^{r_2}\,h\,\mathrm{R}}{\omega\,\sqrt{\mathrm{D}}}, \tag{I.2}$$

donde R denota el *regulador* de K, ω el número de raíces de la unidad contenidas en K, D el valor absoluto del *discriminante* de K y h el número de clases de K. La ecuación I.2 se conoce como la *fórmula del número de clases*. Más aún, por los resultados de Hecke, la función zeta dada por (cf. [Lan94, pp. 259])

$$\zeta^{\star}_{\mathrm{K}}(s) = 2^{-r_2 s}\,\mathrm{D}^{\frac{s}{2}}\,\pi^{-\frac{ns}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\,\Gamma(s)^{r_2}\,\zeta_{\mathrm{K}}(s)$$

se extiende a una función meromorfa con únicos polos simples en $s=0,1$ y satisfase la ecuación funcional

$$\zeta^{\star}_{\mathrm{K}}(s) = \zeta^{\star}_{\mathrm{K}}(1-s).$$

El residuo de $\zeta^{\star}_{\mathrm{K}}(s)$ en $s=1$ está dada por

$$\mathcal{R}es_{s=1}\zeta^{\star}_{\mathrm{K}}(s) = \frac{2^{r_1}\,h\,\mathrm{R}}{\omega}.$$

Por otro lado, por el teorema de Landau sobre los ideales primos, la función zeta de Dedekind no se anula para $\Re(s)=1$ (cf. [Nar04, pp 341-343]). Los ceros de $\zeta_{\mathrm{K}}(s)$ que resultan de los polos de $\Gamma(\frac{s}{2})^{r_1}\,\Gamma(s)^{r_2}$ se llaman los *ceros triviales* de la función zeta de Dedekind. La *hipótesis de Riemann* para el campo K es análoga a la hipótesis de Riemann para los números racionales: todos los ceros no triviales de la función zeta de Dedekind tienen parte real igual a $1/2$.

2. El grupo modular de Hilbert

En esta sección introducimos la geometría de la variedad modular de Hilbert. En los libros clásicos de Siegel [Sie61], Freitag [Fre80], van der Geer [vdG88] se puede consultar una introducción detallada a la variedad modular de Hilbert cuando K es un campo totalmente real. Asimismo en el libro de Elstrodt & Grunewald & Mennicke [EGM97] podemos encontrar una exposición detallada de esta variedad cuando K es una extensión cuadrática y compleja. En el artículo de Weng [Wen06] se puede consultar la variedad modular de Hilbert para un campo de números K general.

2.1. El plano y el espacio hiperbólico

Primero veremos algunos resultados clásicos sobre el plano y el espacio hiperbólico. Para una exposición detallada sobre el plano y el espacio hiperbólico se puede consultar el libro de Beardon [Bea83].

Sea $\mathscr{H}_2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ el semiplano superior con la métrica hiperbólica $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$. Sea $SL(2, \mathbb{R})$ el grupo de Lie formado por las matrices 2 por 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$ y determinante uno. El grupo $SL(2, \mathbb{R})$ actúa en $\mathscr{H}_2$ por isometrías de la siguiente manera: sea $z \in \mathscr{H}_2$ y $g \in SL(2, \mathbb{R})$

$$z \mapsto g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \tag{I.3}$$

Luego, si escribimos

$$g(x + yj) = x^\star + y^\star j,$$

tenemos

$$(x^\star, y^\star) = \left(\frac{ac(x^2 + y^2) + bd + (ad + bc)x}{|cz + d|^2}, \frac{y}{|cz + d|^2} \right),$$

donde $|cz + d|$ denota el valor absoluto (o módulo) del punto $cz + d \in \mathbb{C}$.

La acción de $SL(2, \mathbb{R})$ en $\mathscr{H}_2$ tiene núcleo $\{\pm id\}$, por lo que el grupo

$$PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm id\}$$

actúa efectivamente en $\mathscr{H}_2$ y de esta forma el grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ se corresponde con el grupo de isometrías de $\mathscr{H}_2$ que preservan orientación. El grupo de isotropía de un punto $z \in \mathscr{H}_2$ está dado por el conjunto de todos los $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ que fijan z, i.e., $g(z) = z$. El grupo de isotropía del punto $i \in \mathscr{H}_2$ es igual al grupo especial ortogonal

$$\mathrm{PSO}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} /\{\pm id\}.$$

por lo que tenemos una identificación

$$PSL(2, \mathbb{R})/PSO(2, \mathbb{R}) \cong \mathscr{H}_2 \qquad (gPSO(2, \mathbb{R}) \mapsto g(i)).$$

De la métrica hiperbólica de $\mathscr{H}_2$ se obtiene una medida μ cuyo elemento de área está dado por

$$d\mu(z) = \frac{dxdy}{y^2}.$$

La medida μ es invariante por la acción de $PSL(2,\mathbb{R})$, i.e., para toda función f definida en $\mathscr{H}_2$ e integrable con respecto de μ tenemos

$$\int_{\mathscr{H}_2} f(z)d\mu(z) = \int_{\mathscr{H}_2} f(g(z))d\mu(z),$$

para todo $g \in PSL(2,\mathbb{R})$.

Sea $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ el espacio proyectivo de $\mathbb{R}$, i.e., el espacio de líneas en $\mathbb{R}^2$ que pasan por el origen. El grupo $PSL(2,\mathbb{R})$ actúa en $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ mediante trasformaciones proyectivas

$$g(x/y) = \frac{ax+by}{cx+dy}.$$

El grupo de isotropía del punto $\infty \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ es igual al grupo parabólico

$$\left\{ \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & y^{-1} \end{bmatrix} \mid y > 0,\ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

El espacio hiperbólico

Sea

$$\mathcal{H} = \{\, a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \,\}$$

el álgebra formada por los cuaternios de Hamilton. Recordemos que en $\mathcal{H}$ tenemos las reglas de multiplicación

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Con la identificacion canónica de $\mathcal{H}$ con $\mathbb{R}^4$ podemos definir la norma euclideana: para un quaterio $p = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$ tenemos

$$\|p\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}.$$

De manera similar al plano hiperbólico el semiespacio superior

$$\mathscr{H}_3 := \{z = (x,y) : x \in \mathbb{C},\ y > 0\}$$

con la métrica $ds^2(z) = (d\,|x|^2 + dy^2)y^{-2}$ es isométrico al espacio hiperbólico de curvatura seccional constante igual a menos uno. Para describir el grupo de isometrías de $\mathscr{H}_3$ identificamos a $\mathscr{H}_3$ con un subconjunto de los cuaternios de la siguiente manera

$$z = (x, y) = x + yj \in \mathcal{H}, \qquad (x \in \mathbb{C},\ y > 0).$$

Sea $SL(2,\mathbb{C})$ el grupo de Lie formado por las matrices dos por dos con coeficientes en los complejos y determinante uno. El grupo $SL(2,\mathbb{C})$ actúa en $\mathscr{H}_3$ como sigue: sea $z = x + yj \in \mathscr{H}_3$ y $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ un elemento de $SL(2,\mathbb{C})$, definimos

$$z \mapsto g(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}.$$

Luego, por las propiedades de los cuaternios, si escribimos

$$g(x + yj) = x^\star + y^\star j,$$

tenemos

$$(x^\star, y^\star) = \left(\frac{(ax+b)\overline{(cx+d)} + a\bar{c}y^2}{\|cz+d\|^2}, \frac{y}{\|cz+d\|^2} \right)$$

donde $\|cz + d\|$ denota la norma euclideana del punto $cz + d \in \mathcal{H}$. Esta acción tiene núcleo $\{\pm id\}$, por lo que el grupo $PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\{\pm id\}$ actúa efectivamente en $\mathscr{H}_3$. La acción de $PSL(2,\mathbb{C})$ en $\mathscr{H}_3$ preserva la métrica hiperbólica y de esta manera $PSL(2,\mathbb{C})$ se identifica con el grupo de isometrías de $\mathscr{H}_3$ que preservan orientación. El estabilizador de $j \in \mathscr{H}_3$ respecto a la acción de $PSL(2,\mathbb{C})$ en $\mathscr{H}_3$ es igual al grupo cociente

$$PSU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ c & d \end{bmatrix} \ \middle|\ |c|^2 + \left|d^2\right| = 1, c, d \in \mathbb{C} \right\} / \{\pm id\}.$$

Luego, tenemos una identificación

$$\mathscr{H}_3 \cong PSL(2,\mathbb{C})/PSU(2) \qquad \big(gPSU(2) \mapsto g(j)\big).$$

Así mismo de la métrica hiperbólica de $\mathscr{H}_3$ se obtiene una medida v que es invariante por la acción de $PSL(2,\mathbb{C})$ y cuyo elemento de volumen está dado por

$$dv(z) = dxdy/y^3 \qquad (z = x + jy),$$

donde dx denota la medida de Lebesgue 2-dimensional en $\mathbb{C}$.

Sea $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ el espacio proyectivo de $\mathbb{C}$, i.e., el espacio de líneas complejas en $\mathbb{C}^2$ que pasan por el origen. El grupo $PSL(2,\mathbb{C})$ actúa en $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ por trasformaciones de Möbius

$$g(x/y) = \frac{ax + by}{cx + dy}.$$

El grupo de isotropía del punto $\infty \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$ es igual al grupo parabólico

$$\left\{ \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & y^{-1} \end{bmatrix} \mid 0 \neq y \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{C} \right\}.$$

2.2. La acción del grupo modular de Hilbert

Primero introducimos el espacio simétrico asociado a un campo de números algebraico. Para r_1, r_2 dos enteros no negativos, no ambos igual a cero, consideremos el espacio simétrico

$$\mathbf{X} = \mathscr{H}_2^{r_1} \times \mathscr{H}_3^{r_2}.$$

Denotamos un punto en $\mathbf{X}$ por $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_r)$, donde $r = r_1 + r_2$. Para $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_r) \in \mathbf{X}$ escribimos

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x} = (x_1, ..., x_r), \quad \mathbf{y} = (y_1, ..., y_r),$$

donde $z_l = x_l + iy_l$ para $l = 1, ..., r_1$ y $z_l = x_l + jy_l$ para $l = r_1 + 1, ..., r$.

Como producto de variedades riemannianas $\mathbf{X}$ tiene la métrica

$$ds^2(\mathbf{z}) = \frac{dx_1^2 + dy_1^2}{y_1^2} + \cdots + \frac{d\left|x_r\right|^2 + dy_r^2}{y_r^2}. \tag{I.4}$$

Esta métrica induce una medida υ con elemento de volumen

$$d\upsilon(\mathbf{z}) = \frac{d\mathbf{x}d\mathbf{y}}{\prod_{l=1}^{l=r_1} y_l^2 \prod_{l=r_1+1}^{l=r} y_r^3},$$

donde $d\mathbf{x}d\mathbf{y}$ denota la medida de Lebesgue en $(\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}) \times \mathbb{R}^r$. El grupo de Lie

$$G := PSL(2, \mathbb{R})^{r_1} \times PSL(2, \mathbb{C})^{r_2}$$

actúa transitivamente y por isometrías en $\mathbf{X}$: para $\mathbf{z} \in \mathscr{H}$ y $g = (g_1, \ldots, g_r) \in G$ definimos

$$g \cdot \mathbf{z} := (g_1 z_1, \ldots, g_r z_r).$$

Utilizamos la siguiente notación: si

$$g_j = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq r.$$

escribiremos

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} a &= (a_1, \ldots, a_r), \quad b = (b_1, \ldots, b_r), \\ c &= (c_1, \ldots, c_r), \quad a = (d_1, \ldots, d_r). \end{aligned}$$

Usualmente denotamos la acción de g en $\mathbf{X}$ por

$$g(\mathbf{z}) = (a\mathbf{z} + b)(c\mathbf{z} + d)^{-1} \qquad (\mathbf{z} \in \mathbf{X}).$$

Sea $\mathbf{z}_0 = (i, \ldots, j) \in \mathbf{X}$ el punto con las primeras r_1 coordenadas iguales a $i \in \mathbb{C}$ y las siguientes r_2 iguales al cuaternio $j \in \mathcal{H}$. El grupo de isotropía de $\mathbf{z}_0 \in \mathbf{X}$ es igual al subgrupo compacto $H = PSO(2, \mathbb{R})^{r_1} \times PSU(2)^{r_2}$ y por lo tanto tenemos una identificación natural

$$G/H = \mathbf{X} \qquad (gH \mapsto g(\mathbf{z}_0)).$$

Sea K un campo de números algebraico de grado n sobre $\mathbb{Q}$. Sea r_1 el número de lugares reales y r_2 el número de lugares complejos de K. Luego, el grado de K satisface

$$n = [K : \mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2.$$

Sea

$$PSL(2, \mathrm{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{K}, \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\} / \{\pm id\}$$

Ordenemos los sitios

$$\{\, \alpha^{(i)} : \mathrm{K} \to \mathbb{C} \,\}_{i=1}^{r}$$

de K de la forma usual y escribamos $\alpha = \alpha^{(1)}$. El grupo $PSL(2, \mathrm{K})$ puede incluirse en G de la siguiente manera:

$$\pm \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \longmapsto \left(\pm \begin{bmatrix} \alpha^{(1)} & \beta^{(1)} \\ \gamma^{(1)} & \delta^{(1)} \end{bmatrix}, \ldots, \pm \begin{bmatrix} \alpha^{(r)} & \beta^{(r)} \\ \gamma^{(r)} & \delta^{(r)} \end{bmatrix} \right).$$

Sea $\mathfrak{o}$ el anillo de enteros algebraicos de K. El *grupo modular de Hilbert* de K es el grupo $\Gamma = PSL(2, \mathfrak{o})$ contenido en $PSL(2, \mathrm{K}) \subset G$. Como $\mathfrak{o}$ es un retícula se sigue que el grupo modular de Hilbert es numerable y un subgrupo discreto de G. Luego, como el grupo de isotropía H del punto

$\mathbf{z}_0 \in \mathbf{X}$ es compacto, tenemos que Γ actúa propia y discontinuamente en $\mathbf{X}$. Esto es, para todo subconjunto compacto $S \subset \mathrm{K}$, el conjunto

$$\{ \mathrm{M} \in \Gamma \mid \mathrm{M}(S) \cap S \neq \emptyset \}$$

es finito. Luego, por un teorema clásico de Thurston (ver [Thu80], capítulo XIII), el espacio cociente

$$\mathscr{M} = \mathbf{X}/\Gamma$$

es una *variedad de órbitas* diferenciable. El espacio $\mathscr{M}$ se llama la *variedad modular de Hilbert* del campo K.

Observación 1. La acción de Γ y de $PSL(2,\mathrm{K})$ en $\mathbf{X}$ es *irreducible*. Esto es, si $g = (g_1, ..., g_r) \in PSL(2,\mathrm{K})$, entonces g_r actúa como la identidad en el correspondiente factor de $\mathbf{X}$ si y sólo si $g = id$.

Los puntos cuspidales de la variedad modular de Hilbert

La *frontera ideal* de $\mathbf{X}$ se define como el conjunto

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbb{R})^{r_1} \times \mathbb{P}(\mathbb{C})^{r_2}.$$

Para un punto en $\lambda \in \mathbb{P}$ escribimos $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r)$. El grupo G actúa en $\mathbb{P}$ extendiendo de manera natural las trasformaciones de Möbius: para $g \in G,\ \lambda \in \mathbb{P}$

$$g(\lambda) = \left((a_1\lambda_1 + b_1)(c_1\lambda_1 + d_1)^{-1}, \ldots, (a_r\lambda_r + b_r)(c_r\lambda_r + d_r)^{-1} \right).$$

Definición 1. *Un punto $\lambda \in \mathbb{P}$ es un punto cuspidal para Γ si es un punto fijo de un elemento parabólico de $\Gamma \subset G$. Esto es, existe un elemento $\mathrm{M} \in \Gamma$, distinto de la identidad y de traza igual a ± 2, tal que*

$$\mathrm{M}(\lambda) = \lambda.$$

Un punto parabólico está bien definido ya que los encajes de Galois preservan la inclución de $\mathbb{Q}$ en K.

El espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathrm{K})$ se define como el conjunto de líneas en K^2 que pasan por el origen. Esto es el conjunto de pares $(\rho, \sigma) \in \mathrm{K}^2 - \{(0,0)\}$ módulo la relación de equivalencia

$$(\rho, \sigma) \sim (\rho', \sigma') \text{ si existe } \lambda \in \mathrm{K}, \lambda \neq 0 \text{ tal que } (\rho, \sigma) = (\lambda\rho', \lambda\sigma').$$

El grupo Γ como subconjunto de las matrices dos por dos actúa en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathrm{K})$ mediante transformaciones proyectivas: para $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$ y $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ tenemos

$$\mathrm{M}(\lambda) = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \in \mathbb{P}(\mathrm{K}).$$

Por otro lado, podemos incluir el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathrm{K})$ en la frontera ideal de $\mathbf{X}$ mediante la siguiente aplicación: Si $\lambda = \rho/\sigma \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$, con $\rho, \sigma \in \mathrm{K}$, definimos

$$\lambda \longmapsto \xi(\lambda) = (\frac{\rho^{(1)}}{\sigma^{(1)}}, \dots, \frac{\rho^{(r)}}{\sigma^{(r)}}) \in \mathbb{P}.$$

La inclución de Γ en G define una acción en la inclución de $\mathbb{P}(\mathrm{K})$ en $\mathbb{P}$ y tenemos un diagrama conmutativo

$$\xi(\gamma(\lambda) = \gamma(\xi(\lambda)).$$

Usualmente identifamos estas acciones y escribimos

$$\mathrm{M}(\lambda) = \mathrm{M}((\lambda_1, \dots, \lambda_n))$$

sin distinción.

Lema 1. *El conjunto de puntos cúspidales de* Γ *es igual al conjunto* $\mathbb{P}(\mathrm{K}) \subset \mathbb{P}$.

Demostración. Primero veremos que un punto cuspidal pertenece a $\mathbb{P}(\mathrm{K})$. Sea $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ un elemento parabólico de Γ. Sea λ el punto fijo de M. Si $\mathrm{M} = 0$, entonces M fija el punto $\infty = \frac{1}{0} \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$. Por otro lado, si $\gamma \neq 0$, tenemos

$$\frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} = \lambda.$$

Luego,

$$\gamma\lambda^2 + (\delta - \alpha)\lambda - \beta = 0.$$

Por la fórmula para las raíces de una ecuación cuadrática y la relación $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\delta - \alpha}{-2\gamma} \pm \frac{\sqrt{(\delta - \alpha)^2 + 4\gamma\beta}}{-2\gamma} \\ &= \frac{\delta - \alpha}{-2\gamma} \pm \frac{\sqrt{(\delta + \alpha)^2 - 4}}{-2\gamma}. \end{aligned}$$

Como $\alpha + \delta = \pm 2$, ya que γ es un elemento parabólico, se sigue

$$\lambda = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma}.$$

Esto muestra que $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$.

Ahora mostraremos que si $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$, entonces λ es un punto cuspidal. Sea $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$ y ρ/σ un representante de λ. Sea $\mathfrak{a}$ el ideal generado por ρ y σ. Como $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{o} = \langle 1 \rangle$, entonces existen números algebraicos ξ, η en $\mathfrak{a}^{-1}$ tales que

$$\rho\eta - \sigma\xi = 1.$$

Luego, la matriz

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \rho & \xi \\ \sigma & \eta \end{bmatrix} \in SL(2, \mathrm{K})$$

satisface

$$\mathrm{A}^{-1}(\lambda) = \infty.$$

Por otro lado, como $\sigma, \rho \in \mathfrak{a}$ y $\xi, \eta \in \mathfrak{a}^{-1}$, si $\zeta \in \mathfrak{a}^{-2}$ es distinto de cero, entonces

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} \begin{bmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{A}^{-1} \in \Gamma$$

es un elemento parabólico que fija el punto λ. Luego λ es un punto cuspidal de Γ. Esto concluye la demostración. ■

Lema 2. *Sea $\mathfrak{a} = \langle \sigma, \rho \rangle$ un ideal fraccionario y $\mathrm{M} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right] \in \Gamma$ un elemento del grupo modular de Hilbert. Entonces*

$$\mathfrak{a} = \langle \alpha\rho + \beta\sigma, \gamma\rho + \delta\sigma \rangle.$$

Demostración. Primero, observemos que $\langle \alpha\rho+\beta\sigma, \gamma\rho+\delta\sigma \rangle$ es un subconjunto del ideal $\mathfrak{a} = \langle \sigma, \rho \rangle$. Por otro lado, como

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\rho + \beta\sigma \\ \gamma\rho + \delta\sigma \end{bmatrix}$$

y M es un elemento del grupo modular tenemos que

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\rho + \beta\sigma \\ \gamma\rho + \delta\sigma \end{bmatrix}.$$

Luego, obtenemos $\mathfrak{a} \subset \langle \alpha\rho + \beta\sigma, \gamma\rho + \delta\sigma \rangle$. Por lo tanto

$$\mathfrak{a} = \langle \alpha\rho + \beta\sigma, \gamma\rho + \delta\sigma \rangle.$$

■

Para $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$, sea $\Gamma_\lambda = \{\, \gamma \in \Gamma \mid \gamma\lambda = \lambda \,\}$ el grupo de isotropía de Γ en el punto λ. Consideremos una representación $\lambda = \frac{\rho}{\sigma} \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$ y sea $\mathfrak{a} = \langle \rho, \sigma \rangle$, Como ρ y σ generan el ideal $\mathfrak{a}$, existen números algebraicos ξ, η en $\mathfrak{a}^{-1}$ tales que

$$\rho\eta - \sigma\xi = 1.$$

La matriz

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \rho & \xi \\ \sigma & \eta \end{bmatrix} \in SL(2, \mathrm{K})$$

es unimodular y satisface

$$\mathrm{A}^{-1}(\lambda) = \infty.$$

Usualmente denominamos a A como una *matriz asociada* a λ.

Observación 2. Sea $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$ un punto cuspidal y A, A' dos matrices asociadas a λ. Como $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}'$ fija el punto cuspidal ∞, entonces $\mathrm{A}' = \mathrm{A} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$ para algunos $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$.

2.3. La distancia a una cúspide

En esta sección introducimos la distancia a una cúspide. En [vdG88] se encuentra está distancia para el caso de un campo K totalmente real. El caso en que K es un campo arbitrario se encuentra en el artículo de Weng [Wen06]. Una versión similar a está distancia se encuentra en Siegel [Sie61] para un campo totalmente real.

Primero introducimos la siguiente notación. Recordemos que $\mathcal{H}$ denota el álgebra de los cuaternios de Hamilton y que dado un cuaternio $z \in \mathcal{H}$ denotamos por $\|z\|$ la norma euclideana de z. Sea $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{r_1} \times \mathcal{H}^{r_2}$ con $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_r)$. La norma de $\mathbf{w}$ se define como

$$\mathbb{N}(\mathbf{w}) = \prod_{m=1}^{r} w_m^{N_m}$$

donde $N_i = 1$ para $i = 1, \ldots, r_1$ y $N_i = 2$ para $i = r_1 + 1, \ldots, r$. De manera similar definimos

$$|\mathbb{N}(\mathbf{w})| = \prod_{m=1}^{r_1} |w_m| \prod_{m=r_1+1}^{r} \|w_m\|^2$$

Sea $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$ y $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$. Denotamos

$$\alpha\mathbf{z} + \beta = (\alpha^{(1)} z_1 + \beta^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)} z_r + \beta^{(r)}) \in \mathbb{C}^{r_1} \times \mathcal{H}^{r_2}.$$

La siguiente función es de gran utilidad para la construcción de un dominio fundamental para el grupo modular de Hilbert.

Definición 2. *Sea* $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$ *un punto cuspidal y* $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$. *Escribamos* $\lambda = \rho/\sigma$ *con números algebraicos* $\rho, \sigma \in \mathrm{K}$ *y* $\mathfrak{a} = \langle \rho, \sigma \rangle$. *Para* $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$, *definimos la* altura de $\mathbf{z}$ con respecto de λ *como*

$$\begin{aligned}\mu(\lambda, \mathbf{z}) &= \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2 \, \mathbb{N}(\mathbf{y})}{|\mathbb{N}(-\sigma\mathbf{z} + \rho)|^2} \\ &= \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2 \, y_1 \cdots y_r^2}{|(-\sigma^{(1)} z_1 + \rho^{(1)})|^2 \cdots \|(-\sigma^{(r)} z_r + \rho^{(r)})\|^4}.\end{aligned}$$

Observación 3. Sea $\mathrm{A}_\lambda = \left[\begin{smallmatrix} \rho & \xi \\ \sigma & \eta \end{smallmatrix}\right]$ una matriz asociada a $\lambda = \rho/\sigma$ y $\mathbf{z}^\star = \mathrm{A}_\lambda^{-1}\mathbf{z}$. Escribamos $\mathbf{z}^\star = (\mathbf{x}^\star, \mathbf{y}^\star)$. Como

$$y_i^\star = \frac{y_i}{|(-\sigma^{(i)} z_i + \rho^{(i)})|^2}$$

para $i = 1, \ldots, r_1$ y

$$y_i^\star = \frac{y_i}{\|(-\sigma^{(i)} z_i + \rho^{(i)})\|^2}$$

para $i = r_1 + 1, \ldots, r$, obtenemos la identidad

$$\mu(\lambda, \mathbf{z}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2 \mathbb{N}(\mathbf{y}^\star).$$

Lema 3. *Para todo* $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ *el valor* $\mu(\lambda, \mathbf{z})$ *no depende de la representación de* λ *como cociente de los números algebraicos* σ *y* ρ. *Luego, tenemos una función*

$$\begin{aligned}\mu : \mathbb{P}(\mathrm{K}) \times \mathbf{X} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (\lambda, \mathbf{z}) &\longmapsto \mu(\lambda, \mathbf{z}).\end{aligned}$$

Demostración. Para $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ queremos ver que $\mu(\lambda, \mathbf{z})$ está bien definida. Sean $\rho, \sigma \in \mathrm{K}$ tales $\rho/\sigma = \lambda$. Por un lado, si $\sigma = 0$, entonces $\lambda = \infty$ y

$$\mu(\lambda, \mathbf{z}) = \mathbb{N}(\mathbf{y}).$$

Por otro lado, si $\sigma \neq 0$, tenemos $|\mathbb{N}(\sigma)| = \mathfrak{N}(\langle\sigma\rangle)$. Luego,

$$\begin{aligned}\mu(\lambda,\mathbf{z}) &= \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2\,\mathbb{N}(\mathbf{y})}{|\mathbb{N}(-\sigma\mathbf{z}+\rho)|^2}\\ &= \frac{\mathfrak{N}(\langle\rho,\sigma\rangle)^2\,\mathbb{N}(\mathbf{y})}{|\mathbb{N}(\sigma)|^2\,|\mathbb{N}(-\sigma\mathbf{z}+\rho)|^2}\\ &= \frac{\mathfrak{N}(\langle 1,\frac{\rho}{\sigma}\rangle)^2\,\mathbb{N}(\mathbf{y})}{\left|\mathbb{N}(\mathbf{z}-\frac{\rho}{\sigma})\right|^2}.\end{aligned}$$

Como la última expresión sólo depende de la fracción λ vemos que la aplicación $\mu(\lambda,\mathbf{z})$ está bien definida. ■

El grupo Γ actúa en $\mathbb{P}(\mathrm{K})\times\mathbf{X}$ de la siguiente manera: si $\mathrm{M}\in\Gamma$ y $(\lambda,\mathbf{z})\in\mathbb{P}(\mathrm{K})\times\mathbf{X}$, tenemos $\mathrm{M}(\lambda,\mathbf{z}) = (\mathrm{M}\lambda,\mathrm{M}\mathbf{z})$.

Lema 4. *La aplicación* $\mu : \mathbb{P}(\mathrm{K})\times\mathbf{X}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ *es invariante por el grupo modular de Hilbert. Esto es*

$$\mu(\mathrm{M}(\lambda),\mathrm{M}(\mathbf{z})) = \mu(\lambda,\mathbf{z}) \tag{I.5}$$

para todo $\mathrm{M}\in\Gamma$.

Demostración. Sea

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\in\Gamma$$

un elemento del grupo modular de Hilbert. Entonces,

$$\mathrm{M}(\lambda) = \frac{\alpha\rho+\beta\sigma}{\gamma\rho+\delta\sigma}\in\mathbb{P}(\mathrm{K}),$$

por lo que podemos considerar esta representación del punto $\mathrm{M}(\lambda)$ para calcular $\mu(\mathrm{M}(\lambda),\mathrm{M}(\mathbf{z}))$. Por el Lema 2 tenemos $\mathfrak{a} = \langle\alpha\rho+\beta\sigma,\gamma\rho+\delta\sigma\rangle$, por lo que es suficiente mostrar

$$\frac{\mu(\lambda,\mathbf{z})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2} = \frac{\mu(\mathrm{M}\lambda,\mathrm{M}\mathbf{z})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2}.$$

Por otro lado, sea $\mathrm{A}_\lambda = \left[\begin{smallmatrix} \rho & \xi \\ \sigma & \eta \end{smallmatrix}\right]$ una matriz asociada a $\lambda = \rho/\sigma$. Luego

$$\mathrm{MA}_\lambda = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & \xi \\ \sigma & \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\rho + \beta\sigma & \alpha\xi + \beta\eta \\ \gamma\rho + \delta\sigma & \gamma\xi + \delta\eta \end{bmatrix}.$$

Por lo que, MA_λ es una matriz asociada a $\mathrm{M}(\lambda)$ y podemos escribir

$$\mathrm{A}_{\mathrm{M}\lambda} = \mathrm{MA}_\lambda.$$

Luego,

$$\mathrm{A}_{\mathrm{M}\lambda}^{-1}\mathrm{M}\mathbf{z} = (\mathrm{MA}_\lambda)^{-1}\mathrm{M}\mathbf{z} = \mathrm{A}_\lambda^{-1}\mathbf{z}.$$

Por lo tanto, por la observación 3 y el hecho que $\mathfrak{a} = \langle \alpha\rho + \beta\sigma, \gamma\rho + \delta\sigma \rangle$ tenemos

$$\mu(\mathrm{M}(\lambda), \mathrm{M}(\mathbf{z})) = \mu(\lambda, \mathbf{z}).$$

Esto concluye la demostración. ■

Lema 5. *Existe una constante* c *que depende tan sólo del campo* K*, tal que para todo* $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_r) \in \mathbb{R}_+^r$*, existe una unidad* $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{y}) \in \mathfrak{o}^\times$ *con la propiedad*

$$\begin{cases} \left|y_i \varepsilon^{(i)}\right| \leq \mathrm{c}\sqrt[r]{\mathbb{N}(\mathbf{y})} & \forall i \in \{1, ..., r_1\} \\ \left|y_i\right|^2 \left|\varepsilon^{(i)}\right|^2 \leq \mathrm{c}\sqrt[r]{\mathbb{N}(\mathbf{y})} & \forall i \in \{r_1 + 1, ..., r\} \end{cases}$$

donde $\mathbb{N}(\mathbf{y}) = y_1^{N_1} \cdots y_r^{N_r}$.

Demostración. Primero, tomando logaritmos vemos que es equivalente mostrar una constante c, tal que

$$\begin{cases} \ln|y_i| + \ln\left|\varepsilon^{(i)}\right| \leq \ln \mathrm{c} + \frac{1}{r}\sum_{j=1}^r N_j \ln y_j & \forall i \in \{1, \ldots, r_1\} \\ 2\ln|y_i| + 2\ln\left|\varepsilon^{(i)}\right| \leq \ln \mathrm{c} + \frac{1}{r}\sum_{j=1}^r N_j \ln y_j & \forall i \in \{r_1 + 1, \ldots, r\}, \end{cases}$$

donde $N_l = 1$ para $l = 1, \ldots, r_1$ y $N_l = 2$ para $l = r_1 + 1, \ldots, r$.

Ahora, el grupo $\mathfrak{o}^\times$ actúa en el espacio vectorial $\mathbb{R}^r$ de la siguiente manera

$$\mathfrak{o}^\times \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r$$
$$\varepsilon \cdot (x_1, \ldots, x_r) \mapsto (x_1 + N_1 \ln\left|\varepsilon^{(1)}\right|, \ldots, x_r + N_r \ln\left|\varepsilon^{(r)}\right|).$$

Por el teorema de unidades de Dirichlet, se sigue que la órbita del punto $(0, ..., 0)$ es una retícula Λ en el subespacio vectorial

$$V = \{(x_1, \ldots, x_r) \mid x_1 + \cdots + x_r = 0\}.$$

Sea $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r-1}$ un conjunto fundamental de unidades. Sea

$$\Omega = \left\{ \sum_{l=1}^{r_1} t_l (N_1 \ln \left|\varepsilon_l^{(1)}\right|, \ldots, N_r \ln \left|\varepsilon_l^{(r)}\right|) \mid \frac{1}{2} \leq t_l < \frac{1}{2} \right\} \subset V.$$

El vector $v_1 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^r$ es perpendicular a V, por lo que una región fundamental para la acción de $\mathfrak{o}^\times$ en $\mathbb{R}^r$ es igual

$$\Delta = \{cv_1 + y \in \mathbb{R}^r \mid c \in \mathbb{R},\ y \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^r.$$

Observemos que para todo $y = (y_1, \ldots, y_r) \in \Omega$ la norma euclideana de y es menor que una constante C que depende sólo del campo K. Luego

$$|y_l| \leq \|y\| < C.$$

Sea

$$w = (w_1, \ldots, w_r) \in \Delta$$

tal que $w = s_1 v_1 + y$ y $y = (y_1, \ldots, y_r) \in \Omega$. Observemos que

$$\sum_{l=1}^{r} y_l = 0,$$

ya que $\Omega \subset V$. Luego, para todo $l = 1, \ldots, r$, tenemos

$$\begin{aligned} w_l &= s_1 + y_l \\ &\leq s_1 + C \\ &\leq s_1 + \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} y_k + C \\ &= C + \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} w_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $c = \exp(C)$, para todo vector $(\ln|y_1|, ..., 2\ln|y_r|) \in \mathbb{R}^r$ existe $\varepsilon \in \mathfrak{o}^\times$ tal que

$$\begin{cases} \ln|y_i| + \ln\left|\varepsilon^{(i)}\right| \leq \ln \mathrm{c} + \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} N_j \ln\left|\varepsilon^{(j)} y_j\right| & \forall i \in \{1, \ldots, r_1\} \\ 2\ln|y_i| + 2\ln\left|\varepsilon^{(i)}\right| \leq \ln \mathrm{c} + \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} N_j \ln\left|\varepsilon^{(j)} y_j\right| & \forall i \in \{r_1+1, \ldots, r\} \end{cases}$$

Como las unidades tienen norma igual a uno, se sigue

$$\begin{cases} \ln|y_i| + \ln\left|\varepsilon^{(i)}\right| \leq \ln \mathrm{c} + \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} N_j \ln|y_j| & \forall i \in \{1, \ldots, r_1\} \\ 2\ln|y_i| + 2\ln\left|\varepsilon^{(i)}\right| \leq \ln \mathrm{c} + \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} N_j \ln|y_j| & \forall i \in \{r_1+1, \ldots, r\} \end{cases}$$

■

Proposición 1. *([Wen06, pp 28]) Sean $\lambda, \tau \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$ dos puntos cuspidales. Entonces, existe un número positivo $l = l(K)$, que depende únicamente del campo* K*, tal que, para todo $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$, las desigualdades $\mu(\lambda, \mathbf{z}) > l$ y $\mu(\tau, \mathbf{z}) > l$ implican $\lambda = \tau$.*

Demostración. Sea $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ y l un número real positivo. Supongamos que

$$\mu(\lambda, \mathbf{z}) > l \quad \text{y} \quad \mu(\tau, \mathbf{z}) > l.$$

Primero, como el grupo de clases de ideales es finito, podemos escribir $\lambda = \frac{\rho}{\sigma}$ y $\tau = \frac{\rho_1}{\sigma_1}$ con enteros algebraicos $\rho, \sigma, \rho_1, \sigma_1$ tales que $\mathfrak{a} = \langle \rho, \sigma \rangle$ y $\mathfrak{b} = \langle \rho_1, \sigma_1 \rangle$ tienen norma menor que una constante C que depende solamente del campo K. De hecho podemos elegir C igual a la cota de Minkoswki

$$C = C(\mathrm{K}) = \sqrt{\mathrm{D}} \left(\frac{4}{\pi} \right)^{r_2} \frac{n!}{n^n}.$$

Luego, en particular tenemos

$$\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2}{\mu(\lambda, \mathbf{z})} = \frac{\left| \mathbb{N}(\sigma \mathbf{z} + \rho) \right|^2}{\mathbb{N}(\mathbf{y})} < \frac{\mathrm{C}^2}{l}. \tag{I.6}$$

Ahora, observemos que si multiplicamos a ρ y σ por una unidad del campo, el punto cuspidal $\frac{\rho}{\sigma}$ y el ideal $\mathfrak{a} = \langle \sigma, \rho \rangle$ permanecen invariantes. Así mismo tenemos que la expresión I.6 no cambia, puesto que las unidades tienen norma ± 1.

Por otro lado el vector

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\left| \sigma^{(1)} z_1 + \rho^{(1)} \right|^{2N_1}}{y_1^{N_1}}, ..., \frac{\left| \sigma^{(r)} z_r + \rho^{(r)} \right|^{2N_r}}{y_r^{N_r}} \right)$$

pertenece a $\mathbb{R}^r$ y satisface $\mathbb{N}(\mathbf{w}) < \mathrm{C}^2/l$. Luego, por el Lema 5 existe una constante c tal que, despues de multiplicar ρ, σ por una unidad $\varepsilon(\mathbf{w})$, obtenemos

$$\begin{cases} \frac{\left| \sigma^{(i)} z_i + \rho^{(i)} \right|^2}{y_i} < \mathrm{c} l^{-\frac{1}{r}} \mathrm{C}^{\frac{2}{r}} & \forall i \in \{1, ..., r_1\} \\ \frac{\left\| \sigma^{(i)} z_i + \rho^{(i)} \right\|^4}{y_i^2} < \mathrm{c} l^{-\frac{1}{r}} \mathrm{C}^{\frac{2}{r}} & \forall i \in \{r_1 + 1, ..., r\}. \end{cases}$$

Por lo tanto, para $i \in \{1, \ldots, r_1\}$,

$$\begin{aligned} \left| -\sigma^{(i)} x_i + \rho^{(i)} \right| y_i^{-1/2} &< \mathrm{c}^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2r}} \mathrm{C}^{\frac{1}{r}} \\ \left| \sigma^{(i)} \right| y_i^{1/2} &< \mathrm{c}^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2r}} \mathrm{C}^{\frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

ya que
$$\frac{\left|\sigma^{(i)}z_i+\rho^{(i)}\right|^2}{y_i}=\left|-\sigma^{(i)}x_i+\rho^{(i)}\right|^2y_i^{-1}+\left|\sigma^{(i)}\right|^2y_i$$
para todo $i=1,\ldots,r_1$. Así mismo, para $i\in\{r_1+1,\ldots,r\}$
$$\begin{aligned}\left|-\sigma^{(i)}x_i+\rho^{(i)}\right|^2y_i&<\mathrm{c}^{\frac{1}{2}}l^{-\frac{1}{2r}}\mathrm{C}^{\frac{1}{r}}\\ \left|\sigma^{(i)}\right|^2y_i&<\mathrm{c}^{\frac{1}{2}}l^{-\frac{1}{2r}}\mathrm{C}^{\frac{1}{r}},\end{aligned}$$
ya que
$$\frac{\left\|\sigma^{(i)}z_i+\rho^{(i)}\right\|^2}{y_i}=\left|-\sigma^{(i)}x_i+\rho^{(i)}\right|^2y_i^{-1}+\left|\sigma^{(i)}\right|^2y_i$$
para todo $i=r_1+1,\ldots,r$.

De manera similar podemos obtener las mismas desigualdades para ρ_1,σ_1. Ahora, para $i=1,\ldots,r$, tenemos la identidad de valores complejos
$$\begin{aligned}(-\sigma^{(i)}x_i+\rho^{(i)})y_i^{-1/2}\sigma_1^{(i)}y_i^{1/2}-(-\sigma_1^{(i)}x_i+\rho_1^{(i)})y_i^{-1/2}\sigma^{(i)}y_i^{1/2}&\\ =\rho^{(i)}\sigma_1^{(i)}-\rho_1^{(i)}\sigma^{(i)}.&\end{aligned}$$
Luego,
$$|\mathbb{N}(\rho\sigma_1-\rho_1\sigma)|<2^n\mathrm{C}^2\mathrm{c}^rl^{-1}.$$
Por lo tanto, para l mayor que $2^n\mathrm{C}^2\mathrm{c}^r$, tenemos
$$|\mathbb{N}(\rho\sigma_1-\rho_1\sigma)|<1.$$
Se sigue $\rho\sigma_1-\rho_1\sigma=0$, es decir
$$\lambda=\frac{\rho}{\sigma}=\frac{\rho_1}{\sigma_1}=\tau.$$
■

Observación 4. La aplicación $\Lambda(\lambda,\mathbf{z})=\frac{1}{\mu(\lambda,\mathbf{z})^{1/2}}$ se puede pensar como la distancia de $\mathbf{z}$ al punto cuspidal λ. Para $\lambda=\infty$, esta función es igual a $\frac{1}{\mathbb{N}(\mathbf{y})^{1/2}}$.

Observación 5. Si $\mathrm{K}=\mathbb{Q}$ y $\lambda=a/b$, entonces para $z\in\mathscr{H}_2\subset\mathbb{C}$ tenemos
$$\mu(\lambda,z)=\frac{y}{|az+b|^2}.$$

Proposición 2. *([Wen06, pp. 30]) Existe un número positivo $l_2 = l_2(\mathrm{K})$ que depende únicamente de* K*, tal que para todo $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$, existe un punto cuspidal $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$ tal que $\mu(\lambda, \mathbf{z}) > l_2$.*

Demostración. Sea $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ y $\lambda = \rho/\sigma$ un punto cuspidal, entonces

$$\mu(\lambda, \mathbf{z})^{-1} = |\mathbb{N}(-\sigma\mathbf{z} + \rho)|^2 \, \mathbb{N}(\mathbf{y})^{-1} \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{-2} \qquad (\mathfrak{a} = \langle \rho, \sigma \rangle).$$

Luego, como $\mu(\lambda, \mathbf{z})$ se puede calcular utilizando cualquier representación del punto cuspidal $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$ como cociente $\lambda = \rho/\sigma$, es suficiente mostrar que la desigualdad

$$|\mathbb{N}(-\sigma\mathbf{z} + \rho)|^2 \, \mathbb{N}(\mathbf{y})^{-1} < l_2^{-1}$$

tiene una solución con ρ, σ en $\mathfrak{o}$, ya que en este caso $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \geq 1$.

Para mostrar esto recordemos la notación $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{X}$ donde

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_1}, \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_r) \in \mathbb{R}_+^r$$

Primero mostraremos que existe $\rho, \sigma \in \mathfrak{o}$ tal que safisfacen las desigualdades

$$\begin{aligned} \left|-\sigma^{(i)} x_i + \rho^{(i)}\right| y_i^{-1/2} &\leq e_i \quad i = 1, \ldots, r_1, \\ \left|\sigma^{(i)}\right| y_i^{1/2} &\leq f_i \quad i = 1, \ldots, r_1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left|\Re(-\sigma^{(i)} x_i + \rho^{(i)})\right| y_i^{-1/2} &\leq e_i \quad i = r_1 + 1, \ldots, r, \\ \left|\Im(-\sigma^{(i)} x_i + \rho^{(i)})\right| y_i^{-1/2} &\leq e_i' \quad i = r_1 + 1, \ldots, r, \\ \left|\Re(\sigma^{(i)})\right| y_i^{1/2} &\leq f_i \quad i = r_1 + 1, \ldots, r \\ \left|\Im(\sigma^{(i)})\right| y_i^{1/2} &\leq f_i' \quad i = r_1 + 1, \ldots, r, \end{aligned}$$

para algunas constantes $e_i 1, f_i$ apropidas.

Sea $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$ una base del anillo de enteros $\mathfrak{o}$ pensado como módulo libre sobre $\mathbb{Z}$. Escribamos

$$\rho = \sum_{j=1}^{n} a_j \omega_j, \qquad \sigma = \sum_{j=1}^{n} b_j \omega_j \tag{I.7}$$

y consideremos las formas lineales en las variables reales $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ que resultan al sustituir I.7 en las ecuaciones

$$\begin{aligned} (-\sigma^{(i)} x_i + \rho^{(i)}) y_i^{-1/2} &\qquad i = 1, \ldots, r_1, \\ \sigma^{(i)} y_i^{1/2} &\qquad i = 1, \ldots, r_1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\Re(-\sigma^{(i)}x_i+\rho^{(i)})y_i^{-1/2} &\qquad i=r_1+1,\dots,r,\\
\Im(-\sigma^{(i)}x_i+\rho^{(i)})y_i^{-1/2} &\qquad i=r_1+1,\dots,r,\\
\Re(\sigma^{(i)})y_i^{1/2} &\qquad i=r_1+1,\dots,r\\
\Im(\sigma^{(i)})y_i^{1/2} &\qquad i=r_1+1,\dots,r,
\end{aligned}$$

La matriz S asociada a este sistema se puede escribrir como una matriz de bloques n por n

$$S=\begin{bmatrix} A & B\\ O & C\end{bmatrix},$$

donde O es la matriz cero n por n y

$$A=\begin{bmatrix}
y_1^{-1/2}\omega_1^{(1)} & \cdots & y_1^{-1/2}\omega_n^{(1)}\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
y_{r_1}^{-1/2}\omega_1^{(r_1)} & \cdots & y_{r_1}^{-1/2}\omega_n^{(r_1)}\\
\\
y_{r_1+1}^{-1/2}\Re(\omega_1^{(r_1+1)}) & \cdots & y_{r_1+1}^{-1/2}\Re(\omega_n^{(r_1+1)})\\
y_{r_1+1}^{-1/2}\Im(\omega_1^{(r_1+1)}) & \cdots & y_{r_1+1}^{-1/2}\Im(\omega_n^{(r_1+1)})\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
y_r^{-1/2}\Re(\omega_1^{(r)}) & \cdots & y_r^{-1/2}\Re(\omega_n^{(r)})\\
y_r^{-1/2}\Im(\omega_1^{(r)}) & \cdots & y_r^{-1/2}\Im(\omega_n^{(r)})
\end{bmatrix}$$

$$B=-\begin{bmatrix}
x_1y_1^{-1/2}\omega_1^{(1)} & \cdots & x_1y_1^{-1/2}\omega_n^{(1)}\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
x_{r_1}y_{r_1}^{-1/2}\omega_1^{(r_1)} & \cdots & x_{r_1}y_{r_1}^{-1/2}\omega_n^{(r_1)}\\
\\
y_{r_1+1}^{-1/2}\Re(x_{r_1+1}\omega_1^{(r_1+1)}) & \cdots & y_{r_1+1}^{-1/2}\Re(x_{r_1+1}\omega_n^{(r_1+1)})\\
y_{r_1+1}^{-1/2}\Im(x_{r_1+1}\omega_1^{(r_1+1)}) & \cdots & y_{r_1+1}^{-1/2}\Im(x_{r_1+1}\omega_n^{(r_1+1)})\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
y_r^{-1/2}\Re(x_r\omega_1^{(r)}) & \cdots & y_r^{-1/2}\Re(x_r\omega_n^{(r)})\\
y_r^{-1/2}\Im(x_r\omega_1^{(r)}) & \cdots & y_r^{-1/2}\Im(x_r\omega_n^{(r)})
\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} y_1^{1/2}\omega_1^{(1)} & \cdots & y_1^{1/2}\omega_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{r_1}^{1/2}\omega_1^{(r_1)} & \cdots & y_{r_1}^{1/2}\omega_n^{(r_1)} \\ y_{r_1+1}^{1/2}\Re(\omega_1^{(r_1+1)}) & \cdots & y_{r_1+1}^{1/2}\Re(\omega_n^{(r_1+1)}) \\ y_{r_1+1}^{1/2}\Im(\omega_1^{(r_1+1)}) & \cdots & y_{r_1+1}^{1/2}\Im(\omega_n^{(r_1+1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_r^{1/2}\Re(\omega_1^{(r)}) & \cdots & y_r^{1/2}\Re(\omega_n^{(r)}) \\ y_r^{1/2}\Im(\omega_1^{(r)}) & \cdots & y_r^{1/2}\Im(\omega_n^{(r)}) \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \det(S) &= \det(A)\det(C) \\ &= \det{}^2 \begin{bmatrix} \omega_1^{(1)} & \cdots & \omega_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^{(r_1)} & \cdots & \omega_n^{(r_1)} \\ \Re(\omega_1^{(r_1+1)}) & \cdots & \Re(\omega_n^{(r_1+1)}) \\ \Im(\omega_1^{(r_1+1)}) & \cdots & \Im(\omega_n^{(r_1+1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Re(\omega_1^{(r)}) & \cdots & \Re(\omega_n^{(r)}) \\ \Im(\omega_1^{(r)}) & \cdots & \Im(\omega_n^{(r)}) \end{bmatrix} \\ &= 2^{-2r_2}\mathrm{D}. \end{aligned}$$

Por el teorema Minkowski sobre formas lineales [Neu99, p. 28], existe una solución

$$\rho = \sum a_i\omega_i, \quad \sigma = \sum b_i\omega_i$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, para el sistema inicial de desigualdades con valores absolutos, si el producto

$$\prod_{l=1}^{l=r_1} e_l f_l \prod_{l=r_1+1}^{r} e_l e_l' f_l f_l'$$

es mayor o igual que $2^{-2r_2}\mathrm{D}$. Por lo tanto, si $e_i = f_j = e_i' = f_j = (2^{-2r_2}\mathrm{D})^{1/2n}$, podemos encontrar una solución $\lambda = \rho/\sigma$ con ρ y σ enteros algebraicos de

K, tal que

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{N}(-\sigma\mathbf{z}+\rho)|^2\,\mathbb{N}(\mathbf{y})^{-1} &\leq \prod_{m=1}^{r_1} 2(2^{-2r_2}\mathrm{D})^{1/n} \prod_{m=r_1+1}^{r} 2^4(2^{-2r_2}\mathrm{D})^{2/n}\\
&= 2^{r_1+4r_2}(2^{-2r_2}\mathrm{D})\\
&= 2^n\mathrm{D}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto si $l_2 = 2^{-n}\mathrm{D}^{-1}$, para todo $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ existe un punto cuspidal $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$ tal que

$$\mu(\lambda, \mathbf{z}) > l_2.$$

■

Definición 3. *Sea* $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$*. Definimos la* esfera de influencia de λ *como*

$$F_\lambda = \{\mathbf{z} \in \mathbf{X} : \mu(\lambda, \mathbf{z}) \geq \mu(\tau, \mathbf{z})\ \forall \tau \in \mathbb{P}(\mathrm{K})\}.$$

Observación 6. Por la Proposición 1 existe $l_1 = l_1(\mathrm{K})$ tal que si $\lambda, \tau \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$ son distintos, entonces

$$\mu(\lambda, \mathbf{z}) > l_1 \text{ implica } \mu(\lambda, \mathbf{z}) < l_1$$

Luego, para todo $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$, tenemos

$$\{\mathbf{z} \in \mathbf{X} \mid \mu(\lambda, \mathbf{z}) > l_1\} \subset F_\lambda.$$

Por otro lado, como la distancia a los puntos cuspidales es invariante por el grupo modular de Hilbert, i.e., $\mu(\mathrm{M}\mathbf{z}, \mathrm{M}\lambda) = \mu(\mathbf{z}, \lambda)$ para todo $\mathrm{M} \in \Gamma$, se sigue

$$F_{\mathrm{M}(\lambda)} = \mathrm{M}(F_\lambda),$$

para todo $\mathrm{M} \in \Gamma$.

Lema 6. *([Wen06, pp. 30]) La acción de* Γ *en el conjunto interior* F_λ^0 *de* F_λ *es igual al grupo de isotropía* Γ_λ *de* λ*. Esto es si* $\mathbf{z}$ *y* $\mathrm{M}\mathbf{z}$ *pertenecen* F_λ^0 *para* $\mathrm{M} \in \Gamma$ *, entonces* $\mathrm{M}\lambda = \lambda$*.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{z}, \mathrm{M}\mathbf{z} \in F_\lambda^0$. Luego,

$$\begin{array}{ccc} \mu(\mathrm{M}^{-1}\lambda, \mathbf{z}) & \leq & \mu(\lambda, \mathbf{z}) \\ \| & & \| \\ \mu(\lambda, \mathrm{M}\mathbf{z}) & \geq & \mu(\mathrm{M}\lambda, \lambda\mathbf{z}) \end{array}$$

si $\mathrm{M}\lambda \neq \lambda$, entonces las desigualdades anteriores son estrictas, lo cual es una contradicción. Esto concluye nuestro resultado. ■

La frontera de F_λ está formada por subconjuntos de "círculos isométricos generalizados" determinados por las igualdades $\mu(\lambda, \mathbf{z}) = \mu(\tau, \mathbf{z})$ con $\lambda \neq \tau$.

Clasificación de cúspides

Recordemos que el grupo modular de Hilbert actúa en el conjunto de puntos cuspidales mediante transformaciones proyectivas: para $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \Gamma$ y $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$ tenemos

$$\mathrm{M}(\lambda) = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \in \mathbb{P}(\mathrm{K}).$$

Definición 4. *Una* cúspide *es una órbita de la acción de* Γ *en el conjunto de puntos cuspidales. Usualmente denotamos una cúspide utilizando un representante* $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$.

Proposición 3. *([Wen06, pp. 21]) El grupo modular de Hilbert tiene un número finito de cúspides y este número es igual al número de clase del campo* K.

Demostración. Para mostrar esta afirmación construiremos gradualmente una biyección natural entre las cúspides y el grupo de clases de ideales. Sea $\mathcal{I}$ el grupo de ideales fraccionarios de K y $\mathcal{P}$ el subgrupo de ideales fraccionarios principales. Recordemos que un ideal fraccinario se puede escribir como $\mathfrak{a} = \langle \alpha, \beta \rangle$, con $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$ no ambos iguales a cero.

Sea $\phi : \mathbb{P}(\mathrm{K}) \to \mathcal{I}/\mathcal{P}$ la aplicación dada por

$$\frac{\alpha}{\beta} \mapsto \text{ la clase de } \mathfrak{a} = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Observemos que por las definiciones de $\mathbb{P}(\mathrm{K})$ y $\mathcal{I}/\mathcal{P}$ se tiene que ϕ está bien definida. Por otro lado ϕ es suprayectiva, puesto que todo ideal fraccionario se puede generar por dos elementos.

Ahora mostraremos que ϕ deciende a una aplicación biyectiva

$$\hat{\phi} : \mathbb{P}(\mathrm{K})/\Gamma \to \mathcal{I}/\mathcal{P}$$

dada por

$$\Gamma(\sigma/\rho) \mapsto \text{ la clase de } \langle \sigma, \rho \rangle$$

Primero, veremos que $\hat{\phi}$ está bien definida. Sean ρ/σ y $\rho^\star/\sigma^\star$ dos puntos cuspidales representantes de la misma cúspide. Entonces, existe $\mathrm{M} \in \Gamma$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\rho^\star}{\sigma^\star} = \mathrm{M}(\frac{\rho}{\sigma}) &= \frac{\alpha(\rho/\sigma) + \beta}{\gamma(\rho/\sigma) + \delta} \\ &= \frac{\alpha\rho + \beta\sigma}{\gamma\rho + \delta\sigma}. \end{aligned}$$

Luego, existe $c \in \mathrm{K}$ distinto de cero tal que $c\rho^\star = \alpha\rho + \beta\sigma$ y $c\sigma^\star = \gamma\rho + \delta\sigma$. Por lo tanto, por el Lema 2, tenemos

$$\begin{aligned} \langle c \rangle \langle \rho^\star, \sigma^\star \rangle &= \langle \alpha\rho + \beta\sigma, \gamma\rho + \delta\sigma \rangle \\ &= \langle \rho, \sigma \rangle. \end{aligned}$$

Esto es $\phi(\rho/\sigma) = \phi(\rho^\star/\sigma^\star)$, por lo que $\hat{\phi}$ está bien definida.

Hemos visto que $\hat{\phi}$ es una función suprayectiva. Para ver que es inyectiva consideremos dos cúspides α/β y $\alpha^\star/\beta^\star$ tales que

$$\hat{\phi}(\alpha/\beta) = \hat{\phi}(\alpha^\star/\beta^\star).$$

Observemos que podemos escribir los representantes de las cúspides de tal manera que $\mathfrak{a} = \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha^\star, \beta^\star \rangle$. Luego, existen elementos $\gamma, \delta, \gamma^\star, \delta^\star$ en $\mathfrak{a}^{-1}$ tales que

$$\alpha\gamma - \beta\delta = 1 \quad \text{ y } \quad \alpha^\star\gamma^\star - \beta^\star\delta^\star = 1.$$

Si consideramos las matrices asociadas

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \text{ y } \mathrm{A}^\star = \begin{bmatrix} \alpha^\star & \delta^\star \\ \beta^\star & \gamma^\star \end{bmatrix}$$

entonces la tranformación

$$\mathrm{A}^\star\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha^\star & \delta^\star \\ \beta^\star & \gamma^\star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\delta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^\star\gamma - \delta^\star\beta & \delta^\star\alpha - \alpha^\star\delta \\ \beta^\star\gamma - \gamma^\star\beta & \gamma^\star\alpha - \beta^\star\delta \end{bmatrix}$$

tiene coeficientes en $\mathfrak{o}$, ya que los α's y β's pertenecen al ideal $\mathfrak{a}$, mientras que los γ's y δ's pertenecen a $\mathfrak{a}^{-1}$. Observemos que también tiene determinante uno. En otras palabras $\mathrm{A}^\star\mathrm{A}^{-1}$ es un elemento del grupo modular de Hilbert. Por otro lado, como $\mathrm{A}(\alpha/\beta)=\infty$ y $\mathrm{A}^\star(\alpha^\star/\beta^\star)=\infty$, tenemos que $\mathrm{A}^\star\mathrm{A}^{-1}(\alpha/\beta)=\alpha^\star/\beta^\star$. Por lo tanto α/β y $\alpha^\star\beta^\star$ representan la misma cúspide y $\hat{\phi}$ es inyectiva.

Luego, tenemos una biyección entre el conjunto de cúspides y el grupo de clases de ideales. Por lo tanto la cardinalidad del conjunto de cúspides es finito y este número es igual al número de clase del campo K.

■

Teorema 5. *([Wen06, pp. 31]) El espacio cociente $\mathbf{X}/\Gamma$ se descompone como la unión de h subconjuntos que se intersectan de alguna manera a largo de su frontera. Esto es, si $i_\lambda : F_\lambda/\Gamma_\lambda \to \mathbf{X}/\Gamma$ denota la aplicación cubriente, entonces*

$$\mathbf{X}/\Gamma = \cup_\lambda i_\lambda(F_\lambda/\Gamma_\lambda),$$

donde la unión se toma sobre un conjunto de representantes de las cúspides.

Demostración. Para un $q>0$ y un punto cuspidal $\lambda\in\mathbb{P}(\mathrm{K})$ definamos la horobola

$$B_\lambda(q)=\{\mathbf{z}\in\mathbf{X}\mid \mu(\lambda,\mathbf{z})\geq q\}$$

Por el Lema 1 se tiene que existe l_1, tal que los conjuntos

$$\{\, B_\lambda(l_2)\ \mid \lambda\in\mathbb{P}(\mathrm{K})\ \}$$

son disjuntos por parejas. Ahora por el Lema 2 existe l_2 tal que

$$\mathbf{X}=\bigcup_{\lambda\in\mathbb{P}(\mathrm{K})} B_\lambda(l_2)$$

Sea $\lambda_1,\ldots,\lambda_h$ un conjunto de representantes de las cúspides. Como $\Gamma_{\lambda_i}\subset\Gamma$ la aplicación i_λ

Por la clasificación de las cúspides tenemos que

$$\mathbf{X}/\Gamma = \cup_\lambda i_\lambda(F_\lambda/\Gamma_\lambda),$$

■

Observación 7. Si el grupo de raíces de la unidades de K es idéntico a ±1, entonces la acción de Γ_λ en $\mathbf{X}$ es libre, por lo que todos los puntos fijos de Γ en $\mathbf{X}$ se encuentran en la frontera de algún F_λ.

Construiremos una región fundamental para la acción de Γ en $\mathbf{X}$.

Proposición 4. *([Wen06, pp. 25]) Sea $\lambda = \sigma/\rho \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$ un punto cuspidal del grupo modular de Hilbert de* K*. Sea $\mathfrak{a} = \langle \sigma, \rho \rangle$ y sea*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \rho & \xi \\ \sigma & \eta \end{bmatrix}$$

una matriz asociada a la representación de λ como el cociente ρ/σ. Entonces, el grupo de isotropía de λ se describe como

$$\Gamma_\lambda = \left\{ \mathrm{A} \begin{bmatrix} \varepsilon & \zeta\varepsilon^{-1} \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \mathrm{A}^{-1} \;\middle|\; \varepsilon \in \mathfrak{o}^\times, \quad \zeta \in \mathfrak{a}^{-2} \right\}. \tag{I.8}$$

Demostración. Sea $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \Gamma_\lambda$, entonces

$$\frac{\alpha\rho + \beta\sigma}{\gamma\rho + \delta\sigma} = \frac{\rho}{\sigma}.$$

Esto implica

$$\sigma(\alpha\rho + \beta\sigma) = \rho(\gamma\rho + \delta\sigma). \tag{I.9}$$

Luego, considerando ideales y dividiendo por $\mathfrak{a}^2$, tenemos

$$\frac{\langle\sigma\rangle}{\mathfrak{a}} \frac{\langle\alpha\rho + \beta\sigma\rangle}{\mathfrak{a}} = \frac{\langle\rho\rangle}{\mathfrak{a}} \frac{\langle\gamma\rho + \delta\sigma\rangle}{\mathfrak{a}}.$$

Por el Lema 2 tenemos

$$\mathfrak{a} = \langle \rho, \sigma \rangle = \langle \alpha\rho + \beta\sigma, \gamma\rho + \delta\sigma \rangle$$

Luego, existe $\zeta \in \mathfrak{o}$ tal que $\zeta\mathfrak{a}$ es el máximo común divisor de $\langle\zeta\rho\rangle$ y $\langle\zeta\sigma\rangle$ asi como el máximo común divisor de $\zeta\langle\alpha\rho + \beta\sigma\rangle$ y $\zeta\langle\gamma\rho + \delta\sigma\rangle$. Por lo tanto $\langle\rho\rangle/\mathfrak{a}$ y $\langle\sigma\rangle/\mathfrak{a}$ son ideales enteros primos relativos. Asimismo $\frac{\langle\alpha\rho+\beta\sigma\rangle}{\mathfrak{a}}$ y $\frac{\langle\gamma\rho+\delta\sigma\rangle}{\mathfrak{a}}$ son ideales enteros primos relativos. Luego,

$$\frac{\langle\sigma\rangle}{\mathfrak{a}} = \frac{\langle\gamma\rho + \delta\sigma\rangle}{\mathfrak{a}} \text{ y } \frac{\langle\rho\rangle}{\mathfrak{a}} = \frac{\langle\alpha\rho + \beta\sigma\rangle}{\mathfrak{a}}$$

Por lo tanto, existen unidades $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tales que

$$\begin{cases} \alpha\rho + \beta\sigma = \varepsilon_1\rho \\ \gamma\rho + \delta\sigma = \varepsilon_2\sigma \end{cases}$$

Luego, de la identidad I.9, podemos escojer $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Por lo tanto

$$\mathrm{MA} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & \xi \\ \sigma & \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon\rho & \alpha\xi + \beta\eta \\ \varepsilon\sigma & \gamma\xi + \delta\eta \end{bmatrix}.$$

Ahora, si escribimos

$$\xi^\star = \varepsilon(\alpha\xi + \beta\eta) \in \mathfrak{a}^{-1} \text{ y } \eta^\star = \varepsilon(\gamma\xi + \beta\eta) \in \mathfrak{a}^{-1}$$

tenemos

$$\mathrm{MA} = \begin{bmatrix} \rho & \xi^\star \\ \sigma & \eta^\star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}.$$

Más aún, podemos ver que las matrices en la ecuación anterior tiene determinate uno. Luego, tenemos

$$\rho\eta^\star - \sigma\xi^\star = 1 \text{ y } \rho\eta - \sigma\xi = 1$$

Ahora, si consideramos la diferencia

$$\rho(\eta - \eta^\star) = \sigma(\xi - \xi^\star), \tag{I.10}$$

podemos obtener

$$\frac{\langle\rho\rangle}{\mathfrak{a}} \frac{\langle\eta - \eta^\star\rangle}{\mathfrak{a}^{-1}} = \frac{\langle\sigma\rangle}{\mathfrak{a}} \frac{(\xi - \xi^\star)}{\mathfrak{a}^{-1}}.$$

Luego, como $\langle\rho\rangle/\mathfrak{a}$ y $\langle\sigma\rangle/\mathfrak{a}$ son primos relativos, se tiene que $\langle\rho\rangle/\mathfrak{a}$ divide al ideal entero $\langle\xi - \xi^\star\rangle/\mathfrak{a}^{-1}$. Entonces, existe un ideal entero $\mathfrak{b}$ tal que

$$\mathfrak{b}(\rho)\mathfrak{a}^{-1} = \langle\xi - \xi^\star\rangle\mathfrak{a}.$$

Por lo tanto

$$\langle\xi - \xi^\star\rangle = \mathfrak{a}^{-2}\langle\rho\rangle\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}^{-2}\rho$$

Lo cual implica que existe número algebraico $\zeta \in \mathfrak{a}^{-2}$ tal que

$$\xi^\star = \xi + \zeta\rho.$$

Análogamente, como $\langle\sigma\rangle/\mathfrak{a}$ divide al ideal entero $\langle\eta - \eta^\star\rangle\mathfrak{a}^{-1}$, existe un número algebraico $\zeta_2 \in \mathfrak{a}^{-2}$ tal que

$$\eta^\star = \eta + \zeta_2\sigma.$$

Por la igualdad inicial tenemos que $\zeta = \zeta_2$ y por lo tanto

$$\mathrm{MA} = \begin{bmatrix} \rho & \xi \\ \sigma & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix},$$

esto es

$$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{MA} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \zeta\varepsilon^{-1} \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}.$$

■

2.4. Las coordenadas locales en punto cuspidal

Para describir un dominio fundamental de la acción de Γ_λ en $\mathbf{X}$ introducimos un nuevo sistema de coordenadas.

Primero consideremos la cúspide infinito de $\mathbf{X}$. Por la Proposición 4 el grupo de isotropía Γ_∞ se describe como

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon & \zeta\varepsilon^{-1} \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \;\middle|\; \varepsilon \in \mathfrak{o}^\times, \quad \zeta \in \mathfrak{o} \right\}.$$

Para $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{X}$, si

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \zeta\varepsilon^{-1} \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \in \Gamma_\infty$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\mathbf{z} &= \varepsilon^2 \mathbf{z} + \zeta \\ &= \left(\varepsilon^2 \mathbf{x} + \zeta, |\varepsilon|^2 \mathbf{y}\right) \end{aligned}$$

Ahora consideremos la acción de las unidades en la parte imaginaria de $\mathbf{X}$. Recordemos que $\mathbb{R}_+^r$ es un subgrupo multiplicativo isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{R}^r$. Para $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^r$ tenemos la norma

$$\mathbb{N}(\mathbf{y}) = y_1 \cdots y_{r_1}, y_{r_1+1}^2 \cdots y_r^2.$$

La norma $\mathbb{N} : \mathbb{R}_+^r \to \mathbb{R}_+$ es un homomorfismo diferenciable. Sea

$$Y_0 = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^r \mid \mathbb{N}(\mathbf{y}) = 1 \right\}$$

el núcleo de $\mathbb{N}$. Tenemos un homomorfismo de $\mathfrak{o}^\times \to \mathrm{Y}_0$ dado por

$$\varepsilon \mapsto (\left|\varepsilon^{(1)}\right|^2, \ldots, \left|\varepsilon^{(r)}\right|^2).$$

El núcleo de este homomorfismo es el grupo de raíces de la unidad W de K y su imagen es un subgrupo discreto Λ de Y_0 tal que Y_0/Λ es compacto. Para ver esto considermos la aplicación

$$\log : \mathbb{R}_+^r \to \mathbb{R}^r \quad \mathbf{y} \mapsto (\ln y_1, \ldots, \ln y_1).$$

Luego tenemos la composición de homomorfismos

$$\varepsilon \mapsto (2 \ln \left|\varepsilon^{(1)}\right|, \ldots, 2 \ln \left|\varepsilon^{(r)}\right|).$$

Observemos que $\mathbb{R}_+$ actúa en $\mathbb{R}_+^r$ ya que puede ser incluido como un subgrupo de $\mathbb{R}_+^r$, esto es para $a \in \mathbb{R}_+$ definimos

$$a\mathbf{y} = (a^{1/n}y_1, \ldots, a^{1/n}y_r)$$

y a esta incluido en $\mathbb{R}_+^r$ como $(a^{1/2}, \ldots, a^{1/n})$. Luego $\mathbb{N}(a) = a$. Esta inclusión esciende la secuencia

$$0 \to \mathrm{Y}_0 \to \mathbb{R}_+^r \to \mathbb{R}_+ \to 0,$$

por lo que un elemento $\mathbf{y}$ se escribe de manera única como

$$\mathbf{y} = t\mathbf{y}_0 \qquad (t \in \mathbb{R}^+, \mathbf{y}_0)$$

Así mismo para $x = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ consideremos la notación

$$\overline{x} = (x_1, \ldots, x_{r_1}, \Re(x_{r_1+1}), \Im(x_{r_1+1}), \ldots, \Re(x_{r_1+1}), \Im(x_{r_1+1}))$$

Usualmente utilizamos $\overline{x}$ como un vecotor columna.

Sea $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_r)$ un punto en $\mathbf{X}$. Primero escribamos $\mathbf{z}^\star$ por $\mathrm{A}^{-1}\mathbf{z}$ y

$$\mathbf{z}^\star = (z_1^\star, \ldots, z_r^\star), \quad \mathbf{x}^\star = (x_1^\star, \ldots, x_r^\star), \quad \mathbf{y}^\star = (y_1^\star, \ldots, y_r^\star).$$

Sea $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ una base del ideal fraccionario $\mathfrak{a}^{-2}$ como $\mathbb{Z}$-módulo libre. Luego, todo elemento $\zeta \in \mathfrak{a}^{-2}$ se escribe de manera única como

$$\zeta = m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n \in \mathfrak{a}^{-2},$$

con $m_1, ..., m_n$ enteros racionales. Así mismo, sea $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{r-1}\}$ un conjunto de *unidades fundamentales* de $\mathfrak{o}^\times$. Luego cada elemento de $\mathfrak{o}^\times$ se escribe de manera única de la siguiente manera

$$\varepsilon = w\varepsilon_1^{k_1} \cdots \varepsilon_{r-1}^{k_{r-1}} \quad k_1, ..., k_{r-1} \in \mathbb{Z},$$

con w un elemento del grupo de las raíces de la unidad de K.

Definición 5. *Las* coordenadas locales *de* $\mathbf{z}$ *en* λ *se definen como los* $r + r_1$ *valores reales*

$$q, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_{r-1}, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{r_1}$$

y los r_2 *valores complejos*

$$\mathrm{X}_{r_1+1}, \ldots, \mathrm{X}_r$$

determinados mediante las siguientes relaciones:

- *q es igual a la altura de* $\mathbf{z}$ *en* λ

$$q = \mu(\lambda, \mathbf{z}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2 \mathbb{N}(\mathbf{y}^\star) \tag{I.11}$$

-

$$UY = \begin{bmatrix} \ln\left|\varepsilon_1^{(1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(1)}\right| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln\left|\varepsilon_1^{(r-1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r-1)}\right| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\ln \frac{y_1^\star}{\sqrt[n]{\mathbb{N}(\mathbf{y}^\star)}} \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\ln \frac{y_{r-1}^\star}{\sqrt[n]{\mathbb{N}(\mathbf{y}^\star)}} \end{bmatrix} \tag{I.12}$$

-

$$O\overline{X} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \cdots & \alpha_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{(r_1)} & \cdots & \alpha_n^{(r_1)} \\ \\ \Re(\alpha_1^{(r_1+1)}) & \cdots & \Re(\alpha_n^{(r_1+1)}) \\ \Im(\alpha_1^{(r_1+1)}) & \cdots & \Im(\alpha_n^{(r_1+1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Re(\alpha_1^{(r)}) & \cdots & \Re(\alpha_n^{(r)}) \\ \Im(\alpha_1^{(r)}) & \cdots & \Im(\alpha_n^{(r)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{r_1} \\ \\ \Re(X_{r_1+1}) \\ \Im(X_{r_1+1}) \\ \vdots \\ \Re(X_r) \\ \Im(X_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^\star \\ \vdots \\ x_{r_1}^\star \\ \\ \Re(x_{r_1+1}^\star) \\ \Im(x_{r_1+1}^\star) \\ \vdots \\ \Re(x_r^\star) \\ \Im(x_r^\star) \end{bmatrix} \tag{I.13}$$

Observación 8. La matriz U de la ecuación I.12 se obtiene de la matriz I.1 al cambiar el peso 2 por 1 en los últimos r_2 y suprimir el último renglon. La matriz U es invertible, ya que su determinante es $\mathrm{R}/2^{r_2-1}$ y por el teorema de unidades de Dirichlet $\mathrm{R} \neq 0$. Por otro lado, como $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ es una $\mathbb{Z}$-base de $\mathfrak{a}^{-2}$ la matriz O en la ecuación I.13 es invertible. Por lo tanto, los valores $q, Y_1, ..., Y_{r-1}, X_1, ..., X_r$ están bien definidos.

En adelante usaremos la notación

$$\hat{q} = \mathbb{N}(\mathbf{y}^\star) = \frac{q}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2}, \quad (\mathbf{y}^\star \in \mathbb{R}_+^r).$$

Lema 7. *Las coordenadas $y_1, \ldots, y_r$ en función de las variables q, Y's están dados por*

$$y_i^\star = \hat{q}^{\frac{1}{n}} \exp\Big(\sum_{k=1}^{r-1} 2Y_k \ln\left|\varepsilon_k^{(i)}\right|\Big),$$

para $i = 1, \ldots, r$.

Demostración. Sea $\hat{q} = \mathbb{N}(\mathbf{y}^\star)$, por la definición I.12, se tiene

$$\sum_{k=1}^{r-1} \mathrm{Y}_k \ln\left|\varepsilon_k^{(i)}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{y_i^\star}{\sqrt[n]{\mathbb{N}(\mathbf{y}^\star)}} = \frac{1}{2}\ln y_i^\star - \frac{1}{2n}\ln\hat{q},$$

para todo $i \in \{1,\dots,r-1\}$. Luego,

$$\ln y_i^\star = \frac{1}{n}\ln\hat{q} + \sum_{k=1}^{r-1} 2\mathrm{Y}_k \;\ln\left|\varepsilon_k^{(i)}\right| \quad (\forall i \in \{1,\dots,r-1\})$$

Por lo tanto

$$\ln y_i^\star = \frac{1}{n}\ln\hat{q} + \sum_{k=1}^{r-1} 2\mathrm{Y}_k \ln\left|\varepsilon_k^{(i)}\right| \quad (\forall i \in \{1,\dots,r_1\}). \tag{I.14}$$

Más aún

$$2\ln y_i^\star = \frac{2}{n}\ln\hat{q} + \sum_{k=1}^{r-1} 4\mathrm{Y}_k \ln\left|\varepsilon_k^{(i)}\right| \quad (\forall i \in \{r_1+1,\dots,r-1\}) \tag{I.15}$$

Luego, si sumamos las relaciones I.14 y I.15 desde $i=1$ hasta $i=r-1$, tenemos

$$\begin{aligned}\ln\left(y_1^\star\cdots y_{r_1}(y_{r_1+1})^2\cdots(y_{r-1}^\star)^2\right) &= \frac{n-2}{n}\ln\hat{q} + \sum_{k=1}^{r-1} 2\mathrm{Y}_k \sum_{i=1}^{r_1}\ln\left|\varepsilon_k^{(i)}\right| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{r-1} 2\mathrm{Y}_k \sum_{i=r_1+1}^{r-1} 2\ln\left|\varepsilon_k^{(i)}\right| \end{aligned} \tag{I.16}$$

Pero, por un lado

$$\frac{\hat{q}}{(y_r^\star)^2} = \frac{\mathbb{N}(\mathbf{y}^\star)}{(y_r^\star)^2} = y_1^\star\cdots y_{r_1}(y_{r_1+1})^2\cdots(y_{r-1}^\star)^2$$

y también para $k=1,\dots,r-1$ tenemos

$$-2\ln\left|\varepsilon_k^{(r)}\right| = \sum_{i=1}^{r_1}\ln\left|\varepsilon_k^{(i)}\right| + 2\sum_{i=r_1+1}^{r-1}\ln\left|\varepsilon_k^{(i)}\right|$$

ya que $\mathbb{N}(\varepsilon) = \prod_{i=1}^{n}\left|\varepsilon_k^{(i)}\right| = 1$.

Luego, sustituyendo esto en la ecuación I.16 tenemos

$$\ln \hat{q} - 2\ln y_r^\star = \frac{n-2}{n}\ln \hat{q} - \sum_{k=1}^{r-1} 4\mathrm{Y}_k \ln\left|\varepsilon_k^{(r)}\right|.$$

Luego

$$\begin{aligned}-2\ln y_r^\star &= \big(\frac{n-2}{n} - 1\big)\ln \hat{q} - \sum_{k=1}^{r-1} 4\mathrm{Y}_k \ln\left|\varepsilon_k^{(r)}\right| \\ &= -2\ln \hat{q} - \sum_{k=1}^{r-1} 4\mathrm{Y}_k \ln\left|\varepsilon_k^{(r)}\right|\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\ln y_r^\star = \frac{1}{n}\ln \hat{q} + \sum_{k=1}^{r-1} 2\mathrm{Y}_k \ln\left|\varepsilon_k^{(r)}\right|.$$

Entonces, los valores de las $y^\star$'s en función de las variables q, Y's están dados por

$$y_i^\star = \hat{q}^{\frac{1}{n}} \exp\big(\sum_{k=1}^{r-1} 2\mathrm{Y}_k \ln\left|\varepsilon_k^{(i)}\right|\big),$$

para $i = 1, \ldots, r$.

■

Observación 9. La correspondencia entre las coordenadas $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r$ de $\mathbf{z}$ y las coordenadas locales es biyectiva. Más aún, las coordenadas locales definen un difeomorfismo

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbf{X} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2} \\ \mathbf{z} &\longmapsto \Phi(\mathbf{z}) = (q, \mathrm{Y}, \mathrm{X}) = (q, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_r, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r).\end{aligned}$$

Lema 8. *Sea* $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$, $\varepsilon = w\varepsilon_1^{k_1} \cdots \varepsilon_{r-1}^{k_{r-1}} \in \mathfrak{o}^\times$ *y* $\zeta = m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n \in \mathfrak{a}^{-2}$. *Sean* q, X, Y *las coordenadas locales de* $\mathbf{z}$. *Entonces*

1. *Las coordenadas locales de* $\mathrm{A}\begin{bmatrix}1 & \zeta \\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathrm{A}^{-1}\mathbf{z}$ *están dadas por*

 - $$q,\ \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_{r-1}$$

▪

$$\mathrm{X}_1 + m_1, \ldots, \mathrm{X}_{r_1} + m_{r_1},$$
$$\mathrm{X}_{r_1+1} + (m_{r_1+1} + im_{r_1+2}), \ldots, \mathrm{X}_r + (m_{n-1} + im_n),$$

donde $i \in \mathbb{C}$ es el valor complejo imaginario.

En particular, las primeras r coordenadas locales son invariantes.

2. *Las coordenadas locales de $\mathbf{z}$ mediante la aplicación $\mathrm{A}\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{bmatrix}\mathrm{A}^{-1}$ cambian de la siguiente manera. Las primeras coordenadas están dadas por*

$$q, \mathrm{Y}_1 + k_1, \ldots, \mathrm{Y}_{r-1} + k_{r-1},$$

Sea

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{(1)} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & & \Re(\varepsilon^{(r)}) & -\Im(\varepsilon^{(r)}) \\ 0 & & \Im(\varepsilon^{(r)}) & \Re(\varepsilon^{(r)}) \end{bmatrix}$$

entonces las últimas coordenadas de $\mathbf{z}$ están dadas por

$$\mathrm{O}^{-1}\mathrm{E}^2\mathrm{O}\mathrm{X},$$

donde $\overline{\mathrm{X}}$ denota el vector columna $(\mathrm{X}_1, \ldots, \Re(\mathrm{X}_r), \Im(\mathrm{X}_r))$.

Estos es, la primera coordenada permanece invariante, las siguientes $r-1$ coordenadas se trasladan por el vector $(k_1, \ldots, k_{r-1})$ y las últimas coordenadas se trasforman por una matrix unimodular.

Demostración. Primero mostraremos nuestra primera aserción. Sea $\mathrm{M} = \mathrm{A}\begin{bmatrix}1 & \zeta\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathrm{A}^{-1}$, entonces $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{M}\mathbf{z} = \begin{bmatrix}1 & \zeta\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathrm{A}^{-1}\mathbf{z}$. Luego

$$(\mathrm{M}\mathbf{z})^\star = \begin{bmatrix}1 & \zeta\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{z}^\star = \mathbf{z}^\star + \zeta = \begin{bmatrix} x_1^\star + \zeta^{(1)} \\ \vdots \\ x_r^\star + \zeta^{(r)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} iy_1^\star \\ \vdots \\ jy_r^\star \end{bmatrix}$$

Sean $q', \mathrm{Y}'_1, \ldots, \mathrm{Y}'_{r-1}, \mathrm{X}'_1, \ldots, \mathrm{X}'_r$ las coordenadas locales de $\mathrm{M}\mathbf{z}$. Como $q', \mathrm{Y}'_1, \ldots, \mathrm{Y}'_{r-1}$ estan determidas por la "parte imaginaria" de $\mathrm{M}\mathbf{z}^\star$, la cual es igual a $y_1^\star, \ldots, y_r^\star$, se sigue

$$q' = q \quad \mathrm{Y}'_1 = \mathrm{Y}_1 \quad \ldots \quad \mathrm{Y}_{r-1} = \mathrm{Y}_{r-1}$$

Por otro lado, el vector $\mathrm{X}' = (\mathrm{X}'_1, \ldots, \Re(\mathrm{X}'_r), \Im(\mathrm{X}'_r))$ está determinado por la relación

$$O(\overline{\mathrm{X}}') = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \cdots & \alpha_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{(r_1)} & \cdots & \alpha_n^{(r_1)} \\ \\ \Re(\alpha_1^{(r_1+1)}) & \cdots & \Re(\alpha_n^{(r_1+1)}) \\ \Im(\alpha_1^{(r_1+1)}) & \cdots & \Im(\alpha_n^{(r_1+1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Re(\alpha_1^{(r)}) & \cdots & \Re(\alpha_n^{(r)}) \\ \Im(\alpha_1^{(r)}) & \cdots & \Im(\alpha_n^{(r)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{X}'_1 \\ \vdots \\ \mathrm{X}'_{r_1} \\ \\ \Re(\mathrm{X}'_{r_1+1}) \\ \Im(\mathrm{X}'_{r_1+1}) \\ \vdots \\ \Re(\mathrm{X}'_r) \\ \Im(\mathrm{X}'_r) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^\star \\ \vdots \\ x_{r_1}^\star \\ \\ \Re(x_{r_1+1}^\star) \\ \Im(x_{r_1+1}^\star) \\ \vdots \\ \Re(x_r^\star) \\ \Im(x_r^\star) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta^{(1)} \\ \vdots \\ \zeta^{(r_1)} \\ \Re(\zeta^{(r_1+1)}) \\ \Im(\zeta^{(r_1+1)}) \\ \vdots \\ \Re(\zeta^{(r)}) \\ \Im(\zeta^{(r)}) \end{bmatrix}$$

Luego,

$$O(\overline{\mathrm{X}}') = \begin{bmatrix} x_1^\star \\ \vdots \\ x_{r_1}^\star \\ \\ \Re(x_{r_1+1}^\star) \\ \Im(x_{r_1+1}^\star) \\ \vdots \\ \Re(x_r^\star) \\ \Im(x_r^\star) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \cdots & \alpha_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{(r_1)} & \cdots & \alpha_n^{(r_1)} \\ \\ \Re(\alpha_1^{(r_1+1)}) & \cdots & \Re(\alpha_n^{(r_1+1)}) \\ \Im(\alpha_1^{(r_1+1)}) & \cdots & \Im(\alpha_n^{(r_1+1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Re(\alpha_1^{(r)}) & \cdots & \Re(\alpha_n^{(r)}) \\ \Im(\alpha_1^{(r)}) & \cdots & \Im(\alpha_n^{(r)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \\ m_{r_1+1} \\ m_{r_1+1} \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix}$$

$$= O(\mathrm{X}) + O(m)$$

donde m es el vector columna $(m_1, \ldots, m_n)$. Luego

$$O(\mathrm{X}' - m) = \begin{bmatrix} x_1^\star \\ \vdots \\ x_{r_1}^\star \\ \\ \Re(x_{r_1+1}^\star) \\ \Im(x_{r_1+1}^\star) \\ \vdots \\ \Re(x_r^\star) \\ \Im(x_r^\star) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $\mathrm{X} = \mathrm{X}' - m$ y $\mathrm{X}' = \mathrm{X} + m$.

Ahora mostraremos la segunda aseveración. Sea $\mathrm{M} = \mathrm{A} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \mathrm{A}^{-1}$, entonces $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{M}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \mathrm{A}^{-1}\mathbf{z}$. Esto es

$$(\mathrm{M}\mathbf{z})^\star = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{z}^\star$$

Luego, si $(\mathrm{M}\mathbf{z})^\star = (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$, por las fórmulas para la acción de G en $\mathbf{X}$, para $i = 1, \ldots, r$ se tiene

$$x_i' = (\varepsilon^{(i)})^2 x_i^\star, \qquad y_i' = \left|\varepsilon^{(i)}\right|^2 y_i^\star. \tag{I.17}$$

Sean $q', \mathrm{Y}'_1, \ldots, \mathrm{Y}'_{r-1}, \mathrm{X}'_1, \ldots, \mathrm{X}'_r$ las coordenadas locales de $M\mathbf{z}$. Entonces, como

$$q' = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2 \mathbb{N}(\mathbf{y}') = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2 \left|\mathbb{N}(\varepsilon^2 \mathbf{y}^\star)\right|^2$$

y ε es una unidad, tenemos

$$q = q'.$$

Más aún, sean

$$\hat{q} = \mathbb{N}(\mathbf{y}^\star) \quad \hat{q}' = \mathbb{N}(\mathbf{y}')$$

, entonces $\hat{q}' = \hat{q}$. Ahora, los valores $\mathrm{Y}' = (\mathrm{Y}'_1, \ldots, \mathrm{Y}'_{r-1})$ están determinados por la relación

$$\begin{bmatrix} \ln\left|\varepsilon_1^{(1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(1)}\right| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln\left|\varepsilon_1^{(r-1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r-1)}\right| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Y}'_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Y}'_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\ln y'_1 - \frac{1}{2n}\ln \hat{q}' \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\ln y'_{r-1} - \frac{1}{2n}\ln \hat{q}' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \ln\left|\varepsilon^{(1)}\right| + \frac{1}{2}\ln y_1^\star - \frac{1}{2n}\ln \hat{q} \\ \vdots \\ \ln\left|\varepsilon^{(r-1)}\right| + \frac{1}{2}\ln y_{r-1}^\star - \frac{1}{2n}\ln \hat{q} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{r-1} k_j \ln\left|\varepsilon_j^{(1)}\right| \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{r-1} k_j \ln\left|\varepsilon_j^{(r-1)}\right| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\ln \frac{y_1^\star}{\sqrt[n]{\mathbb{N}(\mathbf{y}^\star)}} \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\ln \frac{y_{r-1}^\star}{\sqrt[n]{\mathbb{N}(\mathbf{y}^\star)}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \ln\left|\varepsilon_1^{(1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(1)}\right| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln\left|\varepsilon_1^{(r-1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r-1)}\right| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{r-1} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \ln\left|\varepsilon_1^{(1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(1)}\right| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln\left|\varepsilon_1^{(r-1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r-1)}\right| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Y}_{r-1} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, tenemos

$$(\mathrm{Y}'_1, \dots, \mathrm{Y}'_{r-1}) = (\mathrm{Y}_1 + k_1, \dots, \mathrm{Y}_{r-1} + k_{r-1})$$

Finalmente, el cambio en las últimas coordenadas en un replantación de la ecuación $x'_i = (\varepsilon^{(i)})^2 x_i^\star$ arriba. Esto concluye la demostración. ■

La siguiente proposición nos dice como actúa el grupo Γ_λ en el espacio $\mathbf{X}$. (c.f [Sie61])

Proposición 5. *Sea* $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$, $\varepsilon = w\varepsilon_1^{k_1} \cdots \varepsilon_{r-1}^{k_{r-1}} \in \mathfrak{o}^\times$ *y* $\zeta = m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n \in \mathfrak{a}^{-2}$. *Sean* q, X, Y *las coordenadas locales de* $\mathbf{z}$. *Sea*

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} \begin{bmatrix} \varepsilon & \zeta\varepsilon^{-1} \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \mathrm{A}^{-1} \in \Gamma_\lambda.$$

Entonces, las coordenadas locales de M$\mathbf{z}$ *están dadas por*

$$q,\ \mathrm{Y}_1 + k_1, ..., \mathrm{Y}_{r-1} + k_{r-1},\ \mathrm{X}_1^\star + m_1, ..., \Re(\mathrm{X}_r^\star) + m_{n-1}, \Im(\mathrm{X}_r^\star) + m_n,$$

donde el vector columna $\mathrm{X}^\star = \left(\mathrm{X}_1^\star, \dots, \Re(\mathrm{X}_r^\star), \Im(\mathrm{X}_r^\star)\right)$ *está descrito como sigue: si escribimos la definición de las coordenadas locales utilizando matrices como* $\mathrm{O}(\mathrm{X}) = \mathbf{x}^\star$ *con* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r)$ *y* $\mathbf{x}^\star$ *vectores columna, entonces*

$$\mathrm{X}^\star = \mathrm{O}^{-1}\mathrm{E}^2\mathrm{O}\mathrm{X},$$

donde

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{(1)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & & \Re(\varepsilon^{(r)}) & -\Im(\varepsilon^{(r)}) \\ 0 & & \Im(\varepsilon^{(r)}) & \Re(\varepsilon^{(r)}) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Sea $\mathrm{M} \in \Gamma_\lambda$. Por la Proposición 4 sabemos que M se escribe de la forma

$$\mathrm{A} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon^{-1}\zeta \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A} \begin{bmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \mathrm{A}^{-1},$$

por el Lema 8 la acción de M en $\mathbf{X}$ está descrita como en la proposición. ■

Observación 10. Si el grupo de raíces de la unidad W del campo K es distinto de ± 1, entonces todos los lugares de K son complejos, ya que las únicas raíces de la unidad que pertenecen a $\mathbb{R}$ son $\{\pm 1\}$. Sea $w \in W$ distinto de ± 1. La acción de $\mathrm{A}\begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{bmatrix}\mathrm{A}^{-1}$ en $\mathbf{X} = (\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+)^{r_2}$ puede escribirse en las coordenadas $(\mathbf{x}^\star, \mathbf{y}^\star) = \mathrm{A}^{-1}\mathbf{z}$ como la aplicación

$$(x_i^\star, y_i^\star) \mapsto \big(\big(w^{(i)}\big)^2 x_i^\star, y_i^\star\big),$$

donde cada $w^{(i)}$ es una raíz de la unidad. En otras palabras $\varepsilon \neq \pm 1$ actúa por rotaciones en cada componente.

Queremos definir una region fundamental para la acción de Γ_λ. Sea $\mathbb{A}$ el grupo de Lie

$$\left\{ \begin{bmatrix} w & z \\ 0 & w^{-1} \end{bmatrix} \mid w, z \in \mathbb{C} \text{ y } |w| = 1 \right\} \subset PSL(2, \mathbb{C})$$

El grupo $\mathbb{A}$ actúa en $\mathbb{C}$ mediante la aplicación

$$w^2 x + z \qquad x \in \mathbb{C}.$$

El subgrupo de isotropía del punto $0 \in \mathbb{C}$ es igual al subgrupo compacto

$$\left\{ \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{bmatrix} \mid w \in \mathbb{C} \text{ y } |w| = 1 \right\} \subset \mathbb{A}$$

Luego un subgrupo discreto de $\Lambda \subset \mathbb{A}$ actúa propiamente y discontinuamente en $\mathbb{C}$, por lo que $\mathbb{C}/\Lambda$ es una variedad de órbitas plana.

Sea Λ_T el subgrupo de las traslaciones. Entonces Λ_T es un subgrupo normal de Λ y tenemos una proyección cubriente

$$\mathbb{C}/\Lambda_T \to \mathbb{C}/\Lambda$$

Definición 6. *Un punto* $\mathbf{z}$ *de* $\mathbf{X}$ *se llama reducido con respecto de* λ *si y sólo si*

$$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_{r-1}, \mathrm{X}_1, \ldots, \Re(\mathrm{X}_r), \Im(\mathrm{X}_r) < \frac{1}{2}$$

y $\Re(\mathrm{X}_r), \Im(\mathrm{X}_r)$ *pertenece a un dominio fundamental de la acción de* W*, el grupo de las raíces de la unidad de* K*, en* $\mathbb{C}^{r_2}/\mathbb{Z}^{2r_2}$*.*

Proposición 6. *El conjunto* $\mathscr{F}_\lambda$ *de los puntos reducidos (c.r.a.* λ*) es un dominio fundametal de* Γ_λ*.*

Demostración. Primero veremos que para todo $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ existe $\mathbf{w} \in \mathscr{F}_\lambda$ y un elemento de $\mathrm{M} \in \Gamma_\lambda$ tal que

$$\mathbf{z} = \mathrm{M}\mathbf{w}$$

Sea $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ y $q, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_{r-1}, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r$. Primero podemos encontrar enteros $k_1, ..., k_{r-1}$ tal que

$$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Y}_l + k_l < \frac{1}{2}$$

para todo $l = 1, \ldots, r_1$. Sea

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{A} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \mathrm{A}^{-1}$$

donde $\varepsilon = \varepsilon_1^{k_1} \cdots \varepsilon_{r-1}^{k_{r-1}}$. Sea $q', \mathrm{Y}_1', \ldots, \mathrm{Y}_{r-1}', \mathrm{X}_1', \ldots, \mathrm{X}_r'$ las coordenadas locales de $\mathrm{M}_1\mathbf{z}$ por la proposición 5 tenemos

$$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Y}_l' = \mathrm{Y}_l + k_l < \frac{1}{2}$$

para todo $l = 1, \ldots, r-1$. Ahora, sean $m_1, \ldots, m_n$ tal que

$$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{X}_l' + m_l < \frac{1}{2}$$

para todo $l = 1, ..., r_1$ y

$$-\frac{1}{2} \leq \Re(\mathrm{X}_l') + k_{l+} < \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \mathrm{X}_l + k_{l+1} < \frac{1}{2}$$

para todo $l = r_1 + 1, \ldots, r$. Escribamos

$$\mathrm{M}_2 = \mathrm{A} \begin{bmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{A}^{-1}$$

donde $\zeta = m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n$ Sea $q'', \mathrm{Y}_1'', \ldots, \mathrm{Y}_{r-1}'', \mathrm{X}_1'', \ldots, \mathrm{X}_r''$ las coordenadas locales de $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_1\mathbf{z}$. Por la Proposición 5 tenemos que

$$\mathrm{Y}_l'' = \mathrm{Y}_l' \qquad (l = 1, \ldots, r-1).$$

Más aún

$$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{X}_1'', \ldots, \Re(\mathrm{X}_r''), \Im(\mathrm{X}_r'') < \frac{1}{2}$$

Por lo tanto las coordenadas locales de $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_1\mathbf{z}$ satisfacen

$$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Y}_1'', \ldots, \mathrm{Y}_{r-1}'', \mathrm{X}_1'', \ldots, \Re(\mathrm{X}_r''), \Im(\mathrm{X}_r'') < \frac{1}{2}.$$

Por otro lado $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_1 \in \Gamma_\lambda$ por lo que $\mathbf{z}$ es equivalente a $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_1\mathbf{z}$ mediante la acción de Γ_λ en $\mathbf{X}$. Por la observación 10 y la proposición 5 se sigue que $\mathbf{w} \in \mathscr{F}_\lambda$ contiene un punto Γ_λ equivalente con $\mathbf{z}$.

Ahora veremos que dados dos puntos $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathscr{F}_\lambda$, si existe $\mathrm{M} \in \mathbf{X}$ satisface $\mathbf{z} = \mathrm{M}\mathbf{w}$, entonces M es la identidad en $\mathbf{X}$. Sean $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathscr{F}_\lambda$ y $\mathrm{M} \in \mathbf{X}$ tal que $\mathbf{z} = \mathrm{M}\mathbf{w}$. Por la proposición 4 M se escribe como

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}\begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon^{-1}\zeta \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}\mathrm{A}^{-1}$$

para algún $\zeta \in \mathfrak{a}^{-2}$, $\varepsilon \in \mathfrak{o}^\times$. Sean $q, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_{r-1}, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r$ las coordenadas locales de $\mathbf{z}$. Sean $q', \mathrm{Y}_1', \ldots, \mathrm{Y}_{r-1}', \mathrm{X}_1', \ldots, \mathrm{X}_r'$ las coordenadas locales de $\mathbf{w}$. Escribamos $\varepsilon = w\varepsilon_1^{k_1} \cdots \varepsilon_{r-1}^{k_{r-1}}$. Por la proposición 5 tenemos que

$$\mathrm{Y}_l = \mathrm{Y}_l' + k_l$$

para $l = 1, \ldots, r-1$. Como los valores Y's y Y′'s pertenecen al intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, se sigue que todos los k's son iguales a cero. Luego

$$\varepsilon = w \quad \text{y} \quad \mathrm{M} = \begin{bmatrix} w & w^{-1}\zeta \\ 0 & w^{-1} \end{bmatrix}.$$

De manera similar si escribimos

$$\zeta = \sum_{k=1}^{n} m_k\alpha_k,$$

por 5 se sigue

$$\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{OEO}^{-1}\overline{\mathrm{X}}' + m, \quad (m = m_1, \ldots, m_n)$$

.

Como $\mathrm{OEO}^{-1}\overline{\mathrm{X}}'$ envia la retícula $\mathbb{Z}^n$ en si misma, tenemos que

$$-\frac{1}{2} \geq \mathrm{X}''$$

Sea M_2
entonces M es la identidad en $\mathbf{X}$. ∎

Definición 7. *Sea $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$. La* horoesfera *a altura $q > 0$ (o distancia a la cúspide $1/q$) en λ es la subvariedad de $\mathbf{X}$ de dimensión $2r_1 + 3r_2 - 1$ definida por*

$$B(\lambda, q) = \{\, \mathbf{z} \in \mathbf{X} \mid \mu(\lambda, \mathbf{z}) = q \,\}.$$

Sea $q_0 \in \mathbb{R}_+$ un número real positivo fijo. Para todo $\mathbf{z} \in B(\lambda, q_0)$, si las coordenadas locales de $\mathbf{z}$ en λ son iguales

$$q, \mathrm{Y}, \mathrm{X}$$

entonces $q = q_0$. Podemos parametrizar $B(\lambda, q_0)$ utilizando las coordenadas locales de λ:

$$(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) \longmapsto \mathrm{A}(\mathbf{z}^\star) \qquad (\mathbf{z}^\star = (\mathbf{x}^\star, \mathbf{y}^\star))$$

donde

$$O(\mathrm{X}) = \mathbf{x}^\star \text{ y } y_i^\star = \hat{q}^{1/n} \prod_{k=1}^{r-1} \left|\varepsilon^{(i)}\right|^{2\mathrm{Y}_k}$$

($\hat{q} = q/\mathbb{N}(\mathfrak{a})$). La acción de Γ_λ en $\mathscr{H}$ deja invariante $B(q,k)$, para todo $q > 0$, por lo que

$$\Gamma_\lambda$$

actúa propiamente y discontinuamente en $B(q,k)$.

Más precisamente cuando escribimos $\mathscr{H}$ en coordenadas locales $(q, \mathrm{Y}, \mathrm{X})$, entonces la acción de Γ_λ deja invariante q.

La intersección J_λ de la esfera de influencia S_λ con el conjunto de puntos reducidos en c.r.a. λ es un dominio fundamental de la acción de Γ_λ en F_λ. Como $\mathscr{M}$ es una variedad conexa existen representantes de las cúspides $\lambda_1, ..., \lambda_h$ tales que el conjunto $\cup_{i=1}^h J_{\lambda_i}$ es conexo y una región fundamental de Γ.

Sea $t > 0$ suficientemente grande tal que para todo $\tau \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$ el conjunto $\{\mathbf{z} \in \mathbf{X} : \mu(\tau, \mathbf{z}) > t\}$ está contenido en la esfera de influencia F_λ. Definimos la variedad compacta y con frontera:

$$\mathscr{M}_t = \{\mathbf{z} \in \mathbf{X} : \mu(\mathbf{z}, \lambda) \leq t \text{ para toda cúspide } \lambda\} / \Gamma.$$

La frontera $\partial\mathscr{M}_t$ esta formada por h variedades compactas de dimensión $2r_1 + 3r_2 - 1$, descritas por las incluciones $i_\lambda(\Gamma_\lambda \backslash B(\lambda, t))$. Luego

$$\mathscr{M} = \mathscr{M}_t \cup_{\partial\mathscr{M}_t} (\partial\mathscr{M}_t \times [0, \infty))$$

por lo que $\mathscr{M}$ es topológicamente una variedad de órbitas con h puntas.

Lema 9. *El cambio de variable entre las coordenadas locales en λ y las coordenadas canónicas está dado por*

$$q^{-2}\, dq d\mathrm{Y}_1 \cdots \mathrm{Y}_{r-1} d\mathrm{X}_1 \cdots d\mathrm{X}_r = \frac{2^{r_2}}{2^{r_1 - 1}\, \mathrm{R}\, \sqrt{\mathrm{D}}} d\upsilon(\mathbf{z})$$

Demostración. Mostraremos este lema en el caso en que $r_2 > 0$. La prueba de este lema es una adaptación de la dada por [Lec06, pp. 21] en el caso de un campo totalmente real. La incluimos aquí para conveniencia del lector.

Primero, como $\mathbf{z}^\star = \mathrm{A}^{-1}\mathbf{z}$ y A es una isometría, tenemos que

$$d\upsilon(\mathbf{z}) = d\upsilon(\mathbf{z}^\star).$$

Para encontrar el cambio de variable entre $dqd\mathrm{Y}_1 \cdots d\mathrm{Y}_{r-1}d\mathrm{X}_1 \cdots d\mathrm{X}_n$ y $d\upsilon(\mathbf{z}^\star)$ procedemos de la siguiente manera. Como I.13 es una relación lineal entre $\mathbf{x}^\star$ y X's, se sigue

$$d\mathrm{X}_1 \cdots d\mathrm{X}_r = \frac{2^{r_2}\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2}{\sqrt{\mathrm{D}}} d\mathbf{x}^\star. \tag{I.18}$$

Por el Lema 7 los valores de las $y^\star$'s en función de las variables q, Y's están dados por

$$y_i^\star = \hat{q}^{\frac{1}{n}} \exp\big(\sum_{k=1}^{r-1} 2\mathrm{Y}_k \ln\left|\varepsilon_k^{(i)}\right|\big),$$

para $i = 1, \ldots, r$. Por lo tanto, para $i = 1, \ldots, r$,

$$\begin{cases} \frac{\partial y_i^\star}{\partial \hat{q}} = \frac{1}{n}\hat{q}^{\frac{1}{n}-1} \exp\big(\sum_{k=1}^{r-1} 2\mathrm{Y}_k \ln\left|\varepsilon_k^{(i)}\right|\big) = \frac{y_i^\star}{n\hat{q}} \\ \\ \frac{\partial y_i^\star}{\partial \mathrm{Y}_j} = 2\ln\left|\varepsilon_j^{(i)}\right| \hat{q}^{\frac{1}{n}} \exp\big(\sum_{k=1}^{r-1} 2\mathrm{Y}_k \ln\left|\varepsilon_k^{(i)}\right|\big) = 2\ln\left|\varepsilon_j^{(i)}\right| y_i^\star. \end{cases}$$

Luego, tenemos

$$d\mathbf{y}^\star = \det\begin{bmatrix} \frac{y_1^\star}{n\hat{q}} & 2y_1^\star \ln\left|\varepsilon_1^{(1)}\right| & \cdots & 2y_1^\star \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(1)}\right| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{y_r^\star}{n\hat{q}} & 2y_r^\star \ln\left|\varepsilon_1^{(r)}\right| & \cdots & 2y_r^\star \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r)}\right| \end{bmatrix} d\hat{q}d\mathrm{Y}_1 \cdots d\mathrm{Y}_{r-1},$$

Factorizando las $y_i's$ de los renglones y el número dos de las columnas del determinante, tenemos

$$d\mathbf{y}^\star = \hat{q}^{-1}\, 2^{r-1}\, y_1^\star \cdots y_r^\star \det\begin{bmatrix} 1/n & \ln\left|\varepsilon_1^{(1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(1)}\right| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/n & \ln\left|\varepsilon_1^{(r)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r)}\right| \end{bmatrix} d\hat{q}d\mathrm{Y}_1 \cdots d\mathrm{Y}_{r-1}$$

Luego, multiplicando por dos en los últimos r_2 renglones del determinante, se tiene

$$d\mathbf{y}^{\star} = \hat{q}^{-1}\,2^{r_1-1}\,y_1^{\star}\cdots y_r^{\star}\det\begin{bmatrix} 1/n & \ln\left|\varepsilon_1^{(1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(1)}\right| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/n & \ln\left|\varepsilon_1^{(r_1)}\right| & \cdots & \ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r_1 1)}\right| \\ \\ \frac{2}{n} & 2\ln\left|\varepsilon_1^{(r_1+1)}\right| & \cdots & 2\ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r_1+1)}\right| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{2}{n} & 2\ln\left|\varepsilon_1^{(r)}\right| & \cdots & 2\ln\left|\varepsilon_{r-1}^{(r)}\right| \end{bmatrix} d\hat{q}d\mathrm{Y}_1\cdots d\mathrm{Y}_{r-1}$$

$$= \hat{q}^{-1}\,2^{r_1-1}\,y_1^{\star}\cdots y_r^{\star}\,\mathrm{R}\,d\hat{q}d\mathrm{Y}_1\cdots d\mathrm{Y}_{r-1},$$

donde R denota el regulador de K. Por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{y}^{\star}}{\prod_{l=1}^{l=r_1} y_l^2\,\prod_{l=r_1+1}^{l=r} y_r^3} = \hat{q}^{-2}2^{r_1-1}\,\mathrm{R}\,d\hat{q}d\mathrm{Y}_1\cdots d\mathrm{Y}_{r-1}, \tag{I.19}$$

Por las fórmulas I.18 y I.19 se sigue

$$\hat{q}^{-2}d\hat{q}d\mathrm{Y}_1\cdots d\mathrm{Y}_{r-1}d\mathrm{X}_1\cdots d\mathrm{X}_r = \frac{2^{r_2}\,\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2}{2^{r_1-1}\,\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{D}}}\,d\upsilon(\mathbf{z}).$$

Por lo tanto, como $q = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2\hat{q}$, concluimos

$$q^{-2}\,dqd\mathrm{Y}_1\cdots d\mathrm{Y}_{r-1}\,d\mathrm{X}_1\cdots d\mathrm{X}_r = \frac{2^{r_2}}{2^{r_1-1}\,\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{D}}}d\upsilon(\mathbf{z}).$$

■

2.5. La superficie de Hilbert asociada a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Como el polinomio mínimo de $\sqrt{2}$ es igual a $p(x) = x^2 - 2$ tenemos

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cong \frac{\mathbb{Q}(x)}{\langle x^2 - 2\rangle}.$$

Luego, cada $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ se escribe de manera única como

$$\alpha = a + b\sqrt{2} \qquad (a, b \in \mathbb{Q}).$$

Las raíces del polinomio $p(x) = x^2 - 2$ son los valores reales $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, por lo que los lugares de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ son

$$\alpha = a + b\sqrt{a} \quad \alpha' = a - b\sqrt{2}.$$

Asimismo $\mathbb{N}(\alpha) = a^2 - 2b^2$
El anillo de enteros de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ está descrito como

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \Big\{ a + b\sqrt{2} \ \mid \ a, b \in \mathbb{Z} \Big\}$$

El conjunto $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es un subcojunto denso de $\mathbb{R}$. Sin embargo tenemos la inclución en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\sqrt{2}] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a + b\sqrt{2} &\longmapsto (a + b\sqrt{2}, a - b\sqrt{2}) \end{aligned}$$

El anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ con la función norma

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\sqrt{2}] &\to \mathbb{Z} \\ a + b\sqrt{2} &\mapsto a^2 - 2b^2 \end{aligned}$$

es un dominio euclideano.

Por otro lado el grupo de unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ está descrito como

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \Big\{ \pm(1 + \sqrt{2})^k \ \mid \ k \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Tenemos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (1 + \sqrt{2})^k &\longmapsto k(\ln \left|1 + \sqrt{2}\right|, \ln \left|1 - \sqrt{2}\right|) \end{aligned}$$

Luego, como $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es un dominio euclideano, el grupo modular asociado a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ está descrito como

$$\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}[\sqrt{2}]) = \langle S, T_1, T_2, U \rangle$$

donde

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}-1 \end{bmatrix}$$

Para describir la variedad modular

$$\mathscr{M} = \mathscr{H}_2^2/\Gamma$$

consideremos el sistema de coordenadas locales en $\lambda = (\infty, \infty) \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$. Recordemos que una base para $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ esta dada por

$$w_1 = 1, \qquad w_1 = \sqrt{2}$$

. Por otro lado $\varepsilon = 1 + \sqrt{2}$ es el generador del grupo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^{\times}$.

Sea $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathscr{H}_2^2$ y $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces las coordenadas locales de $\mathbf{z}$ e λ están dadas por los valores reales

$$q, \mathrm{Y}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2$$

determinados por las relaciones

$$q = \mathbb{N}(\mathbf{y}) = y_1 y_2$$
$$\ln \left|1+\sqrt{2}\right| \mathrm{Y} = \frac{1}{2}\ln y_1 - \frac{1}{2}\ln\sqrt{q}$$

$$O(\mathrm{X}) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Observemos que la transformacion lineal O envía la retícula $\mathbb{Z}^2$ en la retícula $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}^2$. Por otro lado, por las definiciones de q, Y tenemos

$$\left|1+\sqrt{2}\right|^{2\mathrm{Y}} = \frac{y_1}{\sqrt{q}} = \frac{\sqrt{q}}{y_2}.$$

Luego

$$y_1 = \sqrt{q}\left|1+\sqrt{2}\right|^{2\mathrm{Y}}, \qquad y_2 = \sqrt{q}\left|1-\sqrt{2}\right|^{2\mathrm{Y}}.$$

Capítulo II
Series de Eisenstein.

En esta capítulo introducimos las series de Eisenstein de la variedad modular de Hilbert. Estudiamos su región de convergencia y calculamos los coeficientes de Fourier en las distintas cúspides.

1. Definiciones y propiedades fundamentales

En esta sección definiremos las series de Eisenstein y presentaremos algunas de sus propiedades aritméticas. Una referencia clásica para las series de Eisenstein en superficies hiperbólicas es el libro de T. Kubota [Kub73]. Para una exposición sobre las series Eisenstein en la variedad modular de Hilbert se puede consultar [Efr87], [Hej], [Sie61], [JL99] y [Wen06].

Primero, recordemos que una métrica riemaniana

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$$

tiene asociado un operador de Laplace-Beltrami

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

donde $g = \det(g_{ij})$ y (g^{ij}) es la matriz $(g_{ij})^{-1}$; por lo que el operador de Laplace-Beltrami correspondiente a la métrica (I.4) está dado por

$$\Delta = \sum_{k=1}^{r_1} y_k^2 (\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}) + \sum_{k=r_1+1}^{r} y_k^2 (\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial \overline{x_k}} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}) - y_k \frac{\partial}{\partial y_k} \qquad \text{(II.1)}$$

Como la métrica riemaniana de $\mathbf{X}$ es invariante por la acción de una isometría, Δ es un operador invariante por isometrías. Luego, para toda función diferenciable f definida en $\mathbf{X}$ y todo $g \in PSL(2, \mathbb{R})^{r_1} \times PSL(2, \mathbb{C})^{r_2}$, se tiene

$$\Delta(f \circ g) = \Delta(f) \circ g.$$

En particular, como

$$\Delta(\mathbb{N}(\mathbf{y})^s) = (r_1 + 4r_2)s(s-1)\mathbb{N}(\mathbf{y})^s \qquad (s \in \mathbb{C})$$

tenemos que

$$\Delta(\mu(\lambda, \mathbf{z})^s) = (r_1 + 4r_2)s(s-1)\mu(\lambda, \mathbf{z})^s.$$

Sea k una cúspide del grupo modular de Hilbert. Por la P1roposición 5, para todo $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ tenemos

$$\mu(\lambda, \mathbf{z}) = \mu(\lambda, \mathrm{M}(\mathbf{z}))$$

si $\mathrm{M} \in \Gamma_\lambda$.

Definición 8. *Sea k una cúspide de* K*. La serie de Eisenstein de k está dada por*

$$\mathrm{E}_k(\mathbf{z}, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\lambda \backslash \Gamma} \mu(\lambda, \gamma\mathbf{z})^s, \tag{II.2}$$

donde $\lambda \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$ es cualquier punto cuspidal que representa a k y la suma se toma sobre un conjunto de representantes de las clases de $\Gamma_\lambda \backslash \Gamma$.

Lema 10. *Sea $B \subset \mathbf{X}$ un subconjunto compacto. Entonces, existen constantes C, C' mayores que cero, que dependen de B, tales que para todo $c, d \in \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ y $\mathbf{z} \in B$ se tiene*

$$|\mathbb{N}(c\mathbf{z}_0 + d)|^2 C \leq |\mathbb{N}(c\mathbf{z} + d)|^2 \leq C' |\mathbb{N}(c\mathbf{z}_0 + d)|^2,$$

donde $\mathbf{z}_0 = (i, \ldots, j) \in \mathbf{X}$ es el vector con las primeras r_1 coordenadas iguales a $i \in \mathbb{C}$ y las siguientes r_2 coordenadas iguales al quaternio j.

Demostración. Primero mostremos esta afirmación para el caso $r_1 = 0, r_2 = 1$. Sea

$$S = \left\{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \|u\|^2 + \|v\|^2 = 1\right\}.$$

la esfera unitaria en $\mathbb{C}^2$ con respecto a la norma euclideana. Para $\mathbf{z} \in B$ y $(u, v) \in S$, la aplicación

$$(\mathbf{z}, u, v) \longmapsto \|u\mathbf{z} + v\|^2.$$

es continua. Luego, como $B \times S$ es un conjunto compacto, esta función alcanza su valor mínimo c_1 y su valor máximo c_2. Ahora veremos que c_1 es mayor que cero. Como el valor c_1 se alcanza, existe $\mathbf{z}_1 \in B, (u, v) \in S$ tal que

$$c_1 = \|u\mathbf{z}_1 + v\|^2.$$

Luego, si $c_1 = 0$, entonces $u\mathbf{z}_1 + v = 0$. Entonces, si escribimos $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 + j\mathbf{y}_1$, tenemos que

$$u\mathbf{x}_1 + v = 0 \text{ y } u\mathbf{y}_1 = 0$$

Ahora, como $\mathbf{y}_1 > 0$, tenemos que $u = 0$ y $v = 0$. Lo cual contradice el hecho que $(u, v) \in S$. Por lo tanto c_1 es mayor que cero y también c_2. Ahora, sea $(u, v) \neq 0$. Entonces $(u, v)/\sqrt{\|(u, v)\|}$ pertence a S y por lo tanto

$$c_1 \leq \frac{\|u\mathbf{z} + v\|^2}{\|(u, v)\|^2} \leq c_2$$

El caso $r_1 = 1, r_2 = 0$ puede demostrarse de manera similar

Finalmente mostraremos el caso general de lema. Sea B un subconjunto compacto de $\mathbf{X}$. Para $i = 1, \ldots, r$ sea $p_i : \mathbf{X} \to \mathscr{H}_2$ la proyección dada por

$$p_i(z_1, \ldots, z_r) = z_r.$$

Luego $p_i(B)$ es un sunconjunto compato de $\mathscr{H}_2$ para $i = 1, \ldots, r_1$. Asimismo $p_i(B)$ es un subconjunto compacto de $\mathscr{H}_3$ para $r = r_1 + 1, \ldots, r$. Sea $c, d \in \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ y escribamos $c = (c_1, \ldots, c_r)$, $d = (d_1, \ldots, d_r)$ Luego, por el argumento anterior, para todo $\mathbf{z} \in B$ y cada $l = (1, \ldots, r)$ existen constantes C_l, C_l' tales queremos

$$|c_l i + d_l|^2 C_l \leq |c_l z_l + d_l|^2 \leq C_l' |c_l i + d_l|^2$$

para $i = 1, \ldots, r_1$ y

$$\|c_l i + d_l\|^2 C_l \leq \|c_l z_l + d_l\|^2 \leq C_l' \|c_l i + d_l\|^2$$

para $l = 1, \ldots, r$. Por lo tanto si

$$C = \prod_C$$

$$|\mathbb{N}(c\mathbf{z}_0 + d)|^2 C \leq |\mathbb{N}(c\mathbf{z} + d)|^2 \leq C' |\mathbb{N}(c\mathbf{z}_0 + d)|^2,$$

■

Proposición 7. *Sea k una cúspide. Entonces, para todo $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$, la serie que define a $\mathrm{E}_k(\mathbf{z}, s)$ converge absolutamente en el hemiplano $\Re(s) > 1$. Más aún, $\mathrm{E}_k(\mathbf{z}, s)$ converge uniformemente en bandas verticales $\{\sigma_0 < \Re(s) < \sigma_1\}$ y uniformemente en $\mathbf{z}$ en cada subconjunto compacto de $\mathbf{X}$. Por lo tanto, $\mathrm{E}_k(\mathbf{z}, s)$ es una función continua en las variable $(\mathbf{z}, s)$ y además define una función holomorfa en el hemiplano $\Re(s) > 1$ para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$.*

Demostración. La prueba este lema es una adaptación de la dada en [Sie61, pp. 194-196] para un campo K totalmete real. La incuimos a aquí para conveniencia del lector. Primero, si $\sigma = \Re(s) > 1$, tenemos

$$\sum_{\Gamma_\lambda \backslash \Gamma} |\mu(\lambda, \gamma \mathbf{z})^s| \leq \sum_{\Gamma_\lambda \backslash \Gamma} \mu(\lambda, \gamma \mathbf{z})^\sigma,$$

por lo que es suficiente mostrar la convergencia de la última serie. Primero mostraremos que converge en el punto $\mathbf{z}_0 = (i, ...j) \in \mathbf{X}$ utilizando el criterio de la integral. Por la proposición 1, existe un número positivo l_1 tal que, para todo $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ y cada par de puntos cuspidales $\lambda, \lambda' \in \mathbb{P}(\mathrm{K})$, si $\mu(\mathbf{z}, \lambda) > l_1$ y $\mu(\mathbf{z}, \lambda') > l_1$, entonces $\lambda = \lambda'$.

Sean q, Y, X las coordenadas locales de $\mathbf{z}$ en λ, dadas por alguna matriz asociada a λ. Por el lema **??** la acción del grupo Γ en la esfera de influencia S_λ se reduce a la acción del grupo de isotropía Γ_λ, existe $\mathbf{z}_1$ en la vecindad

$$V = \{\mathbf{z} \in \mathbf{X} \, : \, q = \mu(\mathbf{z}, \lambda) > l_1\} \cap \mathbf{X}/\Gamma_\lambda$$

que es un punto fijo sólo para la transformación identidad Luego, como el grupo modular actúa propia y discontinuamente en $\mathbf{X}$, existe una vecindad $U \subset V$ de $\mathbf{z}_1$, tal que

$$\mathrm{M}(U) \cap U = \emptyset \tag{II.3}$$

para todo $\mathrm{M} \in \Gamma$ distinto de la identidad. Luego, si escojemos a U más pequeño, podemos suponer que es relativamente compacto y que su cerradura también satisface II.3. Observemos que existe un número positivo l_0 tal que

$$l_1 < \mu(\lambda, \mathbf{z}) \leq l_0$$

para todo $\mathbf{z}$ en U, ya que U es relativamente compacto. Sea $\{\mathrm{M}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un conjunto de representantes de $\Gamma_\lambda \backslash \Gamma$ y sea $U_j = \mathrm{M}_j(U)$. Por la relación II.3 la familia $\{U_j\}$ está formada por conjuntos disjuntos por parejas.
Ahora, por la propiedad que define a $l_1 < l_0$, tenemos

$$\mu(\lambda, \mathrm{M}_j \mathbf{z}) = \mu(\mathrm{M}_j^{-1} \lambda, \mathbf{z}) < l_0 \qquad (\forall \mathbf{z} \in U)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Para s un número real consideremos la integral

$$J_s = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{U_j} \mu(\lambda, \mathbf{z})^s d\upsilon(\mathbf{z}).$$

Como los conjuntos U_j son disjuntos por parejas

$$J_s = \int_{\cup U_j} \mu(\lambda, \mathbf{z})^s d\upsilon(\mathbf{z}).$$

Luego, como podemos escojer cada U_j dentro de una región fundamental de $\mathscr{H}/\Gamma_\lambda$ y $q = \mu(\lambda, \mathbf{z}) \leq l_0$, tenemos

$$J_s \leq M \int_0^{l_0} \int_{-1/2}^{1/2} \cdots \int_{-1/2}^{1/2} q^{s-2} dq d\mathrm{Y} d\mathrm{X} = M \int_0^{l_0} q^{s-2} dq = \frac{M l_0^{s-1}}{s-1} < \infty$$

si s es un número real mayor que 1.

Sean (γ_j, δ_j) el renglon inferior de la matriz $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{M}_j$. Sea $\mathbf{y}_j^\star$ la "parte imaginaria" del punto

$$\mathbf{z}_j^\star = (\mathbf{x}_j^\star, \mathbf{y}_j^\star) = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{M}_j \mathbf{z} \in \mathbf{X}.$$

Por el Lema 10, para todo $\mathbf{z} \in U$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbb{N}(\gamma_k \mathbf{z}_0 + \delta_k)|^{2s}} &\leq \frac{\mathbb{N}(\mathbf{y})^s}{|\mathbb{N}(\gamma_j \mathbf{z} + \delta_j)|^{2s}} c_2^s l_1^{-s} \\ &= c_2^s l_1^{-s} \mathbb{N}(\mathbf{y}_j^\star)^s. \end{aligned}$$

Ahora, si integramos esta desigualdad sobre U tenemos

$$\frac{1}{|\mathbb{N}(\gamma_j \mathbf{z}_0 + \delta_j)|^{2s}} \int_U d\upsilon(\mathbf{z}) \leq c_2^s l_1^{-s} \int_U \mathbb{N}(\mathbf{y}_j^\star) d\upsilon(\mathbf{z})$$

Luego, por la invarianza de la medida $d\upsilon$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{vol(U)}{|\mathbb{N}(\gamma_j \mathbf{z}_0 + \delta_j)|^{2s}} &\leq c_2^s l_1^{-s} \int_{U_j} \mathbb{N}(\mathbf{y}^\star)^s d\upsilon(\mathbf{z}) \\ &\leq c_2^s l_1^{-s} C^s \int_{U_j} q^{s-2}\, dq d\mathrm{Y} d\mathrm{X} \end{aligned} \tag{II.4}$$

donde C es una constante que depende de la cúspide k. Ahora, si sumamos sobre todos los j's, obtenememos

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathbf{z}_0, s) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\mathbb{N}(\gamma_j \mathbf{z}_0 + \delta_j)|^{2s}} \\ &\leq \frac{C^s c_2^s l_1^{-s}}{vol(U)} J_s = \frac{M C^s c_2^s l_1^{-s} l_0^{s-1}}{vol(U)(s-1)} \end{aligned} \tag{II.5}$$

para todo $s > 1$. Por lo tanto $\mathrm{E}(\mathbf{z}_0, s)$ converge uniformemente en la región $\Re(s) \geq 1 + \delta$ para todo $\delta > 0$.

Finalmente, para mostrar la afirmación consideremos un conjunto compacto $B \subset \mathscr{H}$. Por el Lema 10 tenemos que existe una constate c_1 tal que

$$\mathrm{E}(\mathbf{z}, s) \leq c_1 \mathrm{E}(\mathbf{z}_0, s)$$

para todo $\mathbf{z} \in B$. Esto concluye la demostración.

$\blacksquare$

Recordenados que dos pares ordenados (γ, δ), $(\gamma', \delta') \in \mathrm{K}^2$ están asociados si

$$\gamma' = \varepsilon\gamma \text{ y } \delta' = \varepsilon\delta,$$

para algún ε en $\mathfrak{o}^\times$.

Lema 11. *Sea k una cúspide, $\mathcal{A}$ la clase de ideales asociada a k y $\mathfrak{a}$ un ideal en $\mathcal{A}$. Entonces, para $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ y s en el hemiplano $\Re(s) > 1$, la serie de Eisenstein asociada a k satisface*

$$\mathrm{E}_k(\mathbf{z}, s) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{2s} \sum_{\substack{(\gamma,\delta)\in\mathfrak{a}^2/\mathfrak{o}^\times \\ \langle\gamma,\delta\rangle=\mathfrak{a}}} \frac{\mathbb{N}(\mathbf{y})^s}{|\mathbb{N}(\gamma z + \delta)|^{2s}}.$$

donde la suma se toma sobre un conjunto máximo de pares no asociados $(\gamma, \delta) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ que generan el ideal $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal entero la suma es sobre pares no asociados con máximo común divisor $\mathfrak{a}$.

Demostración. Sea k un cúspide. Por definición, las serie de Eisenstein asociada a k está dada por

$$\mathrm{E}_k(\mathbf{z}, s) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\lambda\backslash\Gamma} \mu(\lambda, \gamma\mathbf{z})^s,$$

donde $\lambda = \rho/\sigma$ es un punto cuspidal que representa a k. Sea

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \rho & \xi \\ \sigma & \eta \end{bmatrix}$$

una matriz asociada a λ y sea $\mathfrak{a} = \langle\sigma, \rho\rangle$. Sea $\{\mathrm{M}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un conjunto de representantes del cociente $\Gamma_\lambda\backslash\Gamma$. Definamos

$$\mathrm{P}_j = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{M}_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{bmatrix} \qquad (\forall j \in \mathbb{N})$$

Luego, por la definición de $\mu(\lambda, \mathbf{z})$, tenemos que mostrar que el conjunto $\mathcal{P} = \{(\gamma_j, \delta_j) : j \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de representantes de pares no asociados, tales que generan el ideal $\mathfrak{a}$.

Primero veremos que cada par en $\mathcal{P}$ genera el ideal $\mathfrak{a}$. Sea $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ una elemento de Γ. Entonces

$$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \eta & -\xi \\ -\sigma & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta\alpha - \xi\gamma & \eta\beta - \xi\delta \\ \rho\gamma - \alpha\sigma & \rho\delta - \beta\sigma \end{bmatrix}$$

Luego, por el lema 2, si $u = \rho\gamma - \alpha\sigma$ y $v = \rho\delta - \beta\sigma$, entonces $\mathfrak{a} = \langle u, v \rangle$. Más aún, el mismo lema implica que el conjunto

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathrm{A}^{-1}\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \ \mid \ \mathrm{M} \in \Gamma \right\} \tag{II.6}$$

es igual al conjunto de soluciones de la ecuación

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

con $\mathfrak{a} = \langle \gamma, \delta \rangle$ y $\mathfrak{a}^{-1} = \langle \alpha, \beta \rangle$. En efecto, dadas dos matrices B, C con coeficientes que satisfacen la propiedad anterior, entonces BC^{-1} tiene determinante uno y coeficientes en el anillo de enteros.

Ahora, por la proposición 4, tenemos que

$$\mathrm{A}^{-1}\Gamma_\lambda \mathrm{A} = \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon & \zeta\varepsilon^{-1} \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \ \mid \ \varepsilon \in \mathfrak{o}^\times, \quad \zeta \in \mathfrak{a}^{-2} \right\}$$

actúa en el conjunto $\mathcal{F} = \mathrm{A}^{-1}\Gamma$ y un conjunto de representantes para esta acción esta dado por $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{M}_j$. Sea

$$\mathbb{T} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ \mid, \quad \zeta \in \mathfrak{a}^{-2} \right\} \subset \mathrm{A}^{-1}\Gamma_\lambda \mathrm{A}$$

entonces, la aplicación $\phi : \mathbb{T}\backslash\mathcal{F} \to \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$, definida por

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \mapsto (\gamma, \delta)$$

define una biyección sobre el conjunto de pares $(\gamma, \delta) \in \mathfrak{a}^2$, tales que $\mathfrak{a} = \langle \gamma, \delta \rangle$. En efecto si $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{F}$ son tales que $\phi(\mathrm{B}) = \phi(\mathrm{C})$, entonces BC^{-1} pertenece a $\mathrm{A}^{-1}\Gamma_\lambda \mathrm{A}$. Por otro lado, el grupo

$$\left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \ \mid \ \varepsilon \in \mathfrak{o}^\times \right\}$$

actúa en el cociente $\mathbb{T}\backslash\mathcal{F}$ y la aplicación (II.7) define una biyección sobre un conjunto máximo de pares no asociados (γ, δ) tales que $\mathfrak{a} = \langle\gamma, \delta\rangle$.

■

1.1. La serie de Eisenstein completa.

Para definir la serie de Eisenstein completa, necesitamos la función zeta asociada a una clase de ideales. Sea $\mathcal{A}$ una clase de ideales de K, entonces la aplicación

$$\zeta_{\mathrm{K}}(s, \mathcal{A}) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathcal{A} \\ \text{entero}}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}$$

converge absolutamente en el hemiplano $\Re(s) > 0$ y uniformemente en hemiplanos $\Re(s) > 1 + \epsilon$, por lo que define una función holomorfa para $\Re(s) > 0$.

La función zeta completa de $\mathcal{A}$ está dada por

$$\zeta_{\mathrm{K}}^{\star}(s, \mathcal{A}) = 2^{-r_2 s}\mathrm{D}^{\frac{s}{2}}\pi^{-\frac{ns}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}\zeta_{\mathrm{K}}(s, \mathcal{A}).$$

Luego,

$$\zeta_{\mathrm{K}}(s) = \sum_{\mathcal{A}\in\mathcal{C}} \zeta_{\mathrm{K}}(s, \mathcal{A}).$$

Por un teorema de Hecke sobre extensión analítica de series de Dirichlet, tenemos que $\zeta_{\mathrm{K}}^{\star}(s, \mathcal{A})$ se extiende a una función meromorfa en el plano complejo y satisface la ecuación funcional

$$\zeta_{\mathrm{K}}^{\star}(s, \mathcal{A}) = \zeta_{\mathrm{K}}^{\star}(1 - s, \mathcal{A}'),$$

donde $\mathcal{A}\mathcal{B}' = [\mathfrak{d}]$ es la clase de ideales del diferente de K. Recordemos que

$$\mathfrak{d}^{-1} = \{\xi \in \mathrm{K} \mid Tr(\xi\mathfrak{o}) \subset \mathbb{Z}\}.$$

Definición 9. *Sea k una cúspide del grupo modular de Hilbert y $\mathcal{A}_\lambda$ la clase de ideales correspondiente a k. Para $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ y $s \in \mathbb{C}$ en el hemiplano $\Re(s) > 1$, la* serie de Eisenstein normalizada en la cúspide k *se define por*

$$\mathrm{E}_k^{\star}(\mathbf{z}, s) = \sum_{\lambda' \text{ cúspide}} \zeta_{\mathrm{K}}^{\star}(2s, \mathcal{A}_\lambda^{-1}\mathcal{A}_{\lambda'})\mathrm{E}_{\lambda'}(\mathbf{z}, s).$$

Sumando las series de Eisenstein en cada cúspide obtenemos

$$\mathrm{E}^{\star}(\mathbf{z}, s) = \sum_{k \text{ cúspide}} \mathrm{E}_k^{\star}(\mathbf{z}, s).$$

Las series $\mathrm{E}(\mathbf{z}, s)$ y $\mathrm{E}^{\star}(\mathbf{z}, s)$ y la función zeta de Dedekind están relacionadas por la ecuación

$$\mathrm{E}^{\star}(\mathbf{z}, s) = \zeta_{\mathrm{K}}^{\star}(2s)\mathrm{E}(\mathbf{z}, s).$$

Lema 12. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de ideales de K y $\mathfrak{a}$ un ideal fraccionario en $\mathcal{A}^{-1}$. Entonces,*

$$\zeta_{\mathrm{K}}(\mathcal{A}, s) = \sum_{\xi \in \mathfrak{a}/\mathfrak{o}^{\times}} \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}{|\mathbb{N}(\xi)|^s}.$$

Demostración. Sea una $\mathfrak{a}$ un ideal fraccionario en $\mathcal{A}^{-1}$. Por definición,

$$\mathcal{A} = \left\{ \xi \mathfrak{a}^{-1} \mid \xi \in \mathrm{K}/\mathfrak{o}^{\times} \right\}.$$

Ahora, un ideal fraccionario en $\mathcal{A}$ es un ideal entero si y sólo si

$$\xi \mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{o} \text{ sii } (\xi \subset \mathfrak{a}).$$

Luego, el conjunto de los ideales enteros en $\mathcal{A}$ esta dado por

$$\left\{ \xi \mathfrak{a}^{-1} \mid \xi \in \mathfrak{a}/\mathfrak{o}^{\times} \right\}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \zeta(\mathcal{A}, s) &= \sum_{\xi \in \mathfrak{a}/\mathfrak{o}^{\times}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\xi \mathfrak{a}^{-1})^s} \\ &= \sum_{\xi \in \mathfrak{a}/\mathfrak{o}^{\times}} \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}{|\mathbb{N}(\xi)|^s}. \end{aligned}$$

■

Lema 13. *Sea $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de ideales de K y sean $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ideales fraccionarios en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente. Entonces, la aplicación*

$$\phi : (\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} - \{0\})/\mathfrak{o}^{\times} \times \left\{ (\gamma, \delta) \in \mathfrak{b}^2/\mathfrak{o}^{\times} \mid \mathfrak{b} = \langle \gamma, \delta \rangle \right\} \longrightarrow \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$$

dada por

$$(\xi, \gamma, \delta) \longmapsto (\xi\gamma, \xi\delta)$$

es biyectiva sobre un conjunto de representantes de $\mathfrak{a}^2/\mathfrak{o}^{\times}$ que generan un ideal en $\mathcal{B}$.

Demostración. La prueba del lema es una adaptación de la dada en [?] para un camo K totalmente real. La incluimos aqui para conveniencia del lector Primero observemos que, si $\xi \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ y $\langle \gamma, \delta \rangle = \mathfrak{b}$, entonces

$$\xi\gamma, \xi\delta \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$$

Más aún, $\langle \xi\gamma, \xi\delta \rangle = \xi\langle \gamma, \delta \rangle = \xi\mathfrak{b}$ pertenece a $\mathcal{B}$.

Ahora mostraremos que ϕ es una función suprayectiva sobre un conjunto de representantes de $\mathfrak{a}^2/\mathfrak{o}^\times$ tales que generan un ideal en $\mathcal{B}$. Sea $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{a}^2/\mathfrak{o}^\times$, tal que $\langle \alpha, \beta \rangle$ es un ideal en la clase $\mathcal{B}$. Entonces, $\langle \alpha, \beta \rangle = \xi\mathfrak{b}$ para algún $\xi \in$ K distinto de cero. Como $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathfrak{a}$ tenemos

$$\xi \in \langle \alpha, \beta \rangle \mathfrak{b}^{-1} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} \ \text{ y } \ \xi^{-1} \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$$

Se sigue que $\gamma = \alpha/\xi$ y $\delta = \beta/\xi$ pertenecen a $\mathfrak{b}$ y satisfacen

$$\langle \gamma, \delta \rangle = \langle \xi^{-1} \rangle \langle \alpha, \beta \rangle = \xi^{-1}\xi\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$$

Esto es, $\phi(\xi, \gamma, \delta) = (\alpha, \beta)$, por lo que ϕ es una función suprayectiva.

Ahora mostraremos que ϕ es inyectiva. Por contradicción, supongamos que existen elementos (ξ, γ, δ) y (ξ', γ', δ') del conjunto

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} - \{0\})/\mathfrak{o}^\times \times \left\{ (\gamma, \delta) \in \mathfrak{b}^2/\mathfrak{o}^\times \mid \langle \gamma, \delta \rangle = \mathfrak{b} \right\}$$

tales que los pares $(\xi\gamma, \xi\delta)$ y $(\xi'\gamma', \xi'\delta')$ son asociados. Entonces, existe una unidad ε tal que

$$\xi\gamma = \varepsilon\xi'\gamma' \text{ y } \xi\delta = \varepsilon\xi'\delta'. \tag{II.7}$$

Supongamos que $\mathfrak{b}$ no es un ideal fraccionario principal. Entonces los γ's y δ's son distintos de cero y por la identidad anterior satisfacen

$$\gamma\delta' = \gamma'\delta,$$

ya que ξ es diferente de cero. Considerando ideales y dividiendo por $\mathfrak{b}^2$ en la última identidad se sigue

$$\frac{\langle \gamma \rangle}{\mathfrak{b}} \frac{\langle \delta' \rangle}{\mathfrak{b}} = \frac{\langle \gamma' \rangle}{\mathfrak{b}} \frac{\langle \delta \rangle}{\mathfrak{b}}.$$

Como $\langle \gamma, \delta \rangle = \mathfrak{b}$, entonces los ideales $\frac{\langle \gamma \rangle}{\mathfrak{b}}$ y $\frac{\langle \delta \rangle}{\mathfrak{b}}$ son ideales enteros y también ideales primos relativos. Así mismo $\frac{\langle \gamma' \rangle}{\mathfrak{b}}$ y $\frac{\langle \delta' \rangle}{\mathfrak{b}}$ son ideales enteros y primos relativos. Luego,

$$\frac{\langle \gamma \rangle}{\mathfrak{b}} = \frac{\langle \gamma' \rangle}{\mathfrak{b}} \ \text{ y } \ \frac{\langle \delta' \rangle}{\mathfrak{b}} = \frac{\langle \delta \rangle}{\mathfrak{b}}.$$

Por lo tanto, existen unidades ε_1 y ε_2 tales que

$$\gamma' = \varepsilon_1\gamma \quad \text{y} \quad \delta' = \varepsilon_2\delta.$$

Luego, por la identidad $\gamma\delta' = \gamma'\delta$, obtenemos $\varepsilon_2\gamma\delta = \varepsilon_1\gamma\delta$. Se sigue $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ y

$$(\gamma', \delta') = \varepsilon_1(\gamma, \delta).$$

Por otro lado, la última identidad y la ecuación II.7 implican que también ξ y ξ' son asociados. Luego $(\xi, \gamma, \delta) = (\xi, \gamma, \delta)$ y ϕ es inyectiva. El caso en que $\mathfrak{b}$ no es un ideal principal puede tratarse de manera similar. ■

En adelante escribiremos el "factor al infinito" de $\zeta_{\mathrm{K}}(2s)$ como

$$\Lambda(2s) = 2^{-2r_2 s}\mathrm{D}^s\pi^{-ns}\Gamma(s)^{r_1}\Gamma(2s)^{r_2}.$$

Proposición 8. *Sea k una cúspide, $\mathcal{A}$ la clase de ideales correspondiente a k y $\mathfrak{a}$ un ideal en $\mathcal{A}$. Entonces,*

$$\mathrm{E}_k^{\star}(\mathbf{z}, s) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{2s}\Lambda(2s) \sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{a}^2/\mathfrak{o}^\times \\ \langle\alpha,\beta\rangle\neq 0}} \frac{\mathbb{N}(\mathbf{y})^s}{|\mathbb{N}(\alpha\mathbf{z}+\beta)|^{2s}}.$$

Demostración. Para cada cúspide k, sea $\mathcal{A}_k$ su correspondiente clase de ideales y $\mathfrak{a}_k$ un ideal en $\mathcal{A}_k$. Sea $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ y s en el hemiplano $\Re(s) > 1$. Por los lemas 11 y 12, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_k^{\star}(\mathbf{z}, s) &= \sum_{k' \text{cúspide}} \zeta_{\mathrm{K}}^{\star}(2s, \mathcal{A}_k^{-1}\mathcal{A}_{k'})\mathrm{E}_{k'}(\mathbf{z}, s) \\
&= \Lambda(2s)\sum_{k'}\sum_{\xi\in\mathfrak{a}_k\mathfrak{a}_{k'}^{-1}/\mathfrak{o}^\times} \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k'})^{2s}}{|\mathbb{N}(\xi)|^{2s}} \sum_{\substack{(\gamma,\delta)\in\mathfrak{a}_{k'}^2/\mathfrak{o}^\times \\ \langle\gamma,\delta\rangle=\mathfrak{a}_{k'}}} \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_{k'})^{2s}\mathbb{N}(\mathbf{y})^s}{|\mathbb{N}(\gamma\mathbf{z}+\delta)|^{2s}} \\
&= \mathfrak{N}(\mathfrak{a}_k)^{2s}\Lambda(2s)\sum_{k'}\sum_{\xi\in\mathfrak{a}_k\mathfrak{a}_{k'}^{-1}/\mathfrak{o}^\times}\sum_{\substack{(\gamma,\delta)\in\mathfrak{a}_{k'}^2/\mathfrak{o}^\times \\ \langle\gamma,\delta\rangle=\mathfrak{a}_{k'}}} \frac{\mathbb{N}(\mathbf{y})^s}{|\mathbb{N}(\xi\gamma\mathbf{z}+\xi\delta)|^{2s}}.
\end{aligned}$$

Luego, por el lema 13, tenemos

$$\mathrm{E}_k^{\star}(\mathbf{z}, s) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a}_k)^{2s}\Lambda(2s)\sum_{k'}\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{a}_k^2/\mathfrak{o}^\times \\ \langle\alpha,\beta\rangle\in\mathcal{A}_{k'}}} \frac{\mathbb{N}(\mathbf{y})^s}{|\mathbb{N}(\alpha\mathbf{z}+\beta)|^{2s}}.$$

Como las unión de las clases de ideales es igual al conjunto de ideales fraccionarios, tenemos

$$\mathrm{E}_k^\star(\mathbf{z},s)=\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_k)^{2s}\Lambda(2s)\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{a}_k^2/\mathfrak{o}^\times\\ \langle\alpha,\beta\rangle\neq 0}}\frac{\mathbb{N}(\mathbf{y})^s}{|\mathbb{N}(\alpha\mathbf{z}+\beta)|^{2s}}.$$

■

2. Coeficientes de Fourier

En esta sección calculamos los coeficientes de Fourier de las series de Eisenstein. El cálculo de estos coeficientes ha sido desarrollado por varios autores. El artículo de ([Sor02]) C. M. Sorensen está dedicado principalmente a una exposición detallada de este cálculo y también contiene la bibliografía sobre el desarrollo de éste.

Sea k una cúspide y $\mathrm{E}_k(\mathbf{z},s)$ la serie de Eisenstein asociada a k. Sea $\lambda=\rho/\sigma$ un punto cuspidal que representa a k, $\mathfrak{a}=\langle\rho,\sigma\rangle$ y $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}^{-2}$. De manera similar, consideremos otra cúspide k', $\lambda'=\rho'/\sigma'$ un punto cuspidal que representa a k' y $\mathfrak{a}'=\langle\rho',\sigma'\rangle$. Sea

$$\mathrm{A}'=\begin{bmatrix}\rho' & \xi'\\ \sigma' & \eta'\end{bmatrix}$$

una matriz asociada a k'.

Como la series de Eisenstein son Γ-invariantes, $\mathrm{E}_k(\mathrm{A}'\mathbf{z},s)$ es invariante por el grupo

$$(\mathrm{A}')^{-1}\Gamma_{k'}\mathrm{A}'=\left\{\begin{bmatrix}\varepsilon & \zeta\varepsilon^{-1}\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{bmatrix}\ \mid\ \varepsilon\in\mathfrak{o}^\times,\quad \zeta\in\mathfrak{a}^{-2}\right\}.$$

En particular, $\mathrm{E}_k(\mathrm{A}'\mathbf{z},s)$ es una función invariante por la acción de la retícula

$$\mathfrak{b}'=(\mathfrak{a}')^{-2}\subset\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}.$$

Por lo tanto $\mathrm{E}_k(\mathrm{A}'\mathbf{z},s)$ tiene una expansión en serie de Fourier (en la cúspide k')

$$\mathrm{E}_k(\mathrm{A}'\mathbf{z},s)=\sum_{l\in\mathfrak{b}'^\star}a_l^{k,k'}(\mathbf{y},s)e^{2\pi i Tr(l\mathbf{x})},\tag{II.8}$$

donde $\mathfrak{b}'^\star=\{\xi\in\mathrm{K}\,|\,Tr(\xi\mathfrak{o})\subset\mathbb{Z}\}$ es el módulo dual de $\mathfrak{b}'$ y

$$Tr(\mathbf{x})=\sum_{i\leq r_1}x_i+\sum_{i>r_1}2\Re(x_i),$$

para $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$.

El volumen de $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}/\mathfrak{b}'$, con respecto a la medida de Lebesgue, es igual a $2^{-r_2}\sqrt{\mathrm{D}}\,\mathbb{N}(\mathfrak{b}')$. Luego, para cada $l \in \mathfrak{b}'^{\star}$, el correspondiente coeficiente de Fourier está dado por

$$a_l^{k,k'}(\mathbf{y}, s) = \frac{2^{r_2}}{\mathbb{N}(\mathfrak{b}')\sqrt{\mathrm{D}}} \int_{F_{\mathfrak{b}'}} \mathrm{E}_k(\mathrm{A}'\mathbf{z}, s) e^{-2\pi i Tr(lx)} d\mathbf{x},$$

donde $F_{\mathfrak{b}'}$ es una región fundamental de la retícula $\mathfrak{b}'$, D el discriminante de K y $d\mathbf{x}$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$.

Calcularemos los valores $a_l^{k,k'}(\mathbf{y}, s)$ recordando que dependen de los coeficientes de la matriz A'. Para expresar estos coeficientes necesitaremos la función de Macdonald-Bessel: para $s \in \mathbb{C},\ \ y > 0$

$$K_s(y) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y(t+t^{-1})/2} t^s \frac{dt}{t}.$$

La función de Bessel tiene muchas propiedades (cf. [Bum96]).

- $K_s(y)$ es invariante por la transformación $s \mapsto -s$.
- $K_s(y)$ y todas sus derivadas con repecto de y decaen rápidamente cuando y tiende a $+\infty$:
$$\left|K_s^{(l)}(y)\right| \leq K_{\Re(s)}^{(l)}(2) e^{-\frac{y}{2}} \quad \forall y > 2, \quad (l = 0, 1, 2).$$
- Satisface la ecuación diferencial
$$\left\{y^2 \frac{d^2}{dy^2} + y\frac{d}{dy} - (y^2 + s^2)\right\} K_s(y) = 0.$$

Para $l = (l_1, \ldots, l_r) \in \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ con $\mathbb{N}(l) \neq 0$ definimos la función de Bessel

$$K_s(\mathbf{y}, l) = K_s(2\pi\,|l_1|\,y_1) \cdots K_{2s}(4\pi\,|l_r|\,y_r).$$

Lema 14. *Sea $y_1, ..., y_r > 0$, $l \in \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ y N_i el grado del i-ésimo encaje de Galois del campo* K. *Entonces*

$$\mathbb{N}(\mathbf{y})^s \pi^{-ns} \Gamma(s)^{r_1} \Gamma(2s)^{r_2} \int_{\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}} \frac{e^{-2\pi i Tr(l\mathbf{x})}}{\prod_{i=1}^r (|x_i|^2 + y_i^2)^{N_i s}} d\mathbf{x}$$

es igual a

$$\begin{cases} \pi^{-n(s-\frac{1}{2})}\Gamma(s-\frac{1}{2})^{r_1}\Gamma(2s-1)^{r_2}\mathbb{N}(\mathbf{y})^{1-s} & \textit{si } l=0 \\ 2^r 2^{r_2(2s-1)}\mathbb{N}(l)^{s-\frac{1}{2}}\mathbb{N}(\mathbf{y})^{\frac{1}{2}}K_{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{y},l) & \textit{si } \mathbb{N}(l)\neq 0. \end{cases}$$

Demostración. Primero calcularemos la parte de la integral que corresponde a los valores menores o iguales que r_1. Por una fórmula de integración conocida (ver [Bum96] pp 67) para $y>0$, $\Re(s)>1/2$ y l un número real tenemos

$$y^s\pi^{-s}\Gamma(s)\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2\pi i l x}}{(x^2+y^2)^s}dx = \begin{cases} \pi^{-s+\frac{1}{2}}\Gamma(s-\frac{1}{2})y^{1-s} & \text{si } l=0 \\ 2\left|l\right|^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{y}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi\left|l\right|y) & \text{si } l\neq 0. \end{cases}$$

Ahora calcularemos la parte de la integral que corresponde a los valores mayores que r_1. Sea $y>0$, $\Re(s)>1$ y $l=(l_1,l_2)$ un par de números enteros racionales. Si $l=(0,0)$ tenemos

$$\begin{aligned} y^{2s}\pi^{-2s}\Gamma(2s)\int_{\mathbb{C}}\frac{dx}{(\left|x\right|^2+y^2)^{2s}} &= \pi^{-2s}\Gamma(2s)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}\frac{y^{2s}r}{(r^2+y^2)^{2s}}dr \\ &= \pi^{-2s+1}\Gamma(2s)\int_0^{\infty}\frac{y^{-2s}2r}{\left((r/y)^2+1\right)^{2s}}dr \\ &= \pi^{-2s+1}\Gamma(2s)\int_1^{\infty}\frac{y^{-2s+2}}{r^{2s}}dr \\ &= \pi^{-2s+1}\Gamma(2s)\frac{1}{2s-1}y^{2-2s} \\ &= \pi^{-2s+1}\Gamma(2s-1)y^{2(1-s)}. \end{aligned}$$

Por otro lado si $l\neq(0,0)$ queremos calcular

$$b(l,y,s)=y^{2s}\pi^{-2s}\Gamma(2s)\int_{\mathbb{C}}\frac{e^{-4\pi i\Re(lx)}}{(\left|x\right|^2+y^2)^{2s}}dx.$$

Para evaluar la integral escribimos $l=\left|l\right|e^{i\theta}$ y consideramos la rotación

$x \mapsto xe^{-i\theta}$. Luego,

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{e^{-4\pi i \Re(lx)}}{(|x|^2+y^2)^{2s}}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-4\pi i|l|x_1}}{(x_1^2+x_2^2+y^2)^{2s}}dx_1dx_2$$

$$= y^{-4s+2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_2}{(x_1^2+x_2^2+1)^{2s}}e^{-4\pi i|l|x_1y}dx_1$$

$$= y^{-4s+2}\int_{-\infty}^{+\infty}(t^2+1)^{-2s}dt\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-4\pi i|l|x_1y}}{(x_1^2+1)^{2s-1/2}}x_1.$$

Ahora, utilizando las fórmulas obtenidas en el caso anterior, tenemos

$$\begin{aligned} b(l,y,s) &= y^{-2s+2}\pi^{-(2s-1/2)}\Gamma(2s-\frac{1}{2})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-4\pi i|l|x_1y}}{(x_1^2+1)^{2s-1/2}}x_1 \\ &= y^{-2s+2}2\,|2ly|^{2s-1}\,K_{2s-1}(4\pi\,|l|\,y) \\ &= 2^{2s}\,|l|^{2s-1}\,yK_{2s-1}(4\pi\,|l|\,y). \end{aligned}$$

Utilizando las relaciones anteriores en cada lugar real y complejo, respectivamente, obtenemos el lema. ■

Lema 15. *Se tiene una biyección entre el conjunto*

$$\left\{(\alpha,\beta)\in \mathrm{K}^2 \mid \langle \alpha\eta'-\beta\sigma', \alpha\xi'-\beta\rho'\rangle \subset \mathfrak{a},\ \alpha\neq 0\right\}/\mathfrak{o}^\times$$

y el conjunto

$$\left\{(\mathfrak{q},\eta) \mid 0\neq \mathfrak{q}\subset \mathfrak{a}\mathfrak{a}' \textit{ principal },\ \eta\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1}\mathfrak{q}^{-1}\right\}$$

definida por la aplicación ϕ que asigna a un par no equivalente (α,β) el par $(\langle\alpha\rangle,\beta/\alpha)$.

Demostración. Primero observemos que ϕ está bien definida, ya que β/α y $\langle\alpha\rangle$ no dependen de la clase de equivalencia de (α,β). Por otro lado, observemos que la aplicación ψ que asigna a un par $(\langle\alpha\rangle,\tau)$, con $0\neq\alpha\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ y $\tau\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1}\langle\alpha\rangle^{-1}$, el par $(\alpha,\alpha\tau)$ está bien definida módulo pares asociados. Además, si

$$\begin{bmatrix}\gamma & \delta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \alpha\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta' & -\xi' \\ -\sigma' & \rho'\end{bmatrix}$$

entonces $\langle\gamma,\delta\rangle\subset\mathfrak{a}$, ya que $\rho',\sigma'\in\mathfrak{a}'$ y $\xi',\eta'\in\mathfrak{a}'^{-1}$. Como $\phi\circ\psi=\psi\circ\phi=id$, ϕ es una función biyectiva.

■

El siguiente teorema sobre los coeficientes de Fourier de las series de Eisenstein se puede encontar en [Sor02][pp 4561-48641].

Teorema 6. *([Sor02]) Sea $\mathfrak{b}^\star$ el módulo dual de $\mathfrak{b}'$. La función $\mathrm{E}^\star_\lambda(\mathrm{A}'\mathbf{z}, s)$ tiene la expansión de Fourier (en la cúspide λ')*

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^\star_k(\mathrm{A}'\mathbf{z}, s) &= \mathfrak{N}(\mathfrak{a}')^{2s}\zeta^\star_{\mathrm{K}}(2s, \mathcal{A}_k^{-1}\mathcal{A}_{k'})\mathbb{N}(\mathbf{y})^s \\ &+ \mathfrak{N}(\mathfrak{a}')^{2(1-s)}\zeta^\star_{\mathrm{K}}(2s-1, \mathcal{A}_k^{-1}\mathcal{A}_{k'}^{-1})\mathbb{N}(\mathbf{y})^{1-s} \\ &+ 2^r\mathfrak{N}(\mathfrak{a}')\mathbb{N}(\mathbf{y})^{1/2}\sum_{\substack{l\in\mathfrak{b}^\star \\ l\neq 0}}\tau^{k,k'}_{1-2s}(l)K_{s-1/2}(\mathbf{y}, l)e^{2\pi i Tr(xl)},\end{aligned}$$

donde

$$\tau^{k,k'}_s(l) = \mathfrak{N}(\mathfrak{b}'\mathfrak{d}l)^{-s/2}\sum_{\substack{\mathfrak{q}\in\mathcal{A}_k^{-1}\mathcal{A}_{k'}^{-1} \\ \mathfrak{q}|\mathfrak{b}'\mathfrak{d}l}}\mathfrak{N}(\mathfrak{q})^{2s}$$

Demostración. Sea k una cúspide, $\mathcal{A}$ su clase de ideales correspondiente y $\mathfrak{a}$ un ideal en $\mathcal{A}$. Entonces, por el Lema 8 tenemos

$$\mathrm{E}^\star_k(\mathbf{z}, s) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{2s}\Lambda(2s)\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{a}^2/\mathfrak{o}^\times \\ \langle\alpha,\beta\rangle\neq 0}}\frac{\mathbb{N}(\mathbf{y})^s}{|\mathbb{N}(\alpha\mathbf{z}+\beta)|^{2s}}$$

Luego, por la fórmula para la acción de G en la "parte imaginaria" de $\mathbf{X}$, tenemos

$$\mathrm{E}^\star_k(\mathrm{A}'\mathbf{z}, s) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{2s}\Lambda(2s)\sum_{\substack{(\alpha,\beta)/\mathfrak{o}^\times \\ 0\neq\langle\alpha\eta'-\beta\sigma', \alpha\xi'-\beta\rho'\rangle\subset\mathfrak{a}}}\frac{\mathbb{N}(\mathbf{y})^s}{|\mathbb{N}(\alpha\mathbf{z}+\beta)|^{2s}}.$$

Sea l un elemento del modulo dual de $\mathfrak{b}'$. Entonces, el coeficiente de Fourier correspondiente a l está dado por

$$a^{k,k'}_l(\mathbf{y}, s) = \frac{2^{r_2}}{\mathfrak{N}(\mathfrak{b}')\sqrt{|\mathrm{D}|}}\int_{F_{\mathfrak{b}'}}\mathrm{E}^\star_\lambda(\mathrm{A}'\mathbf{z}, s)e^{-2\pi i Tr(\xi\mathbf{x})}d\mathbf{x}.$$

Consideremos el término independiente de $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{\Lambda(2s)}{vol(F_{\mathfrak{b}'})}\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{2s}\mathbb{N}(\mathbf{y})^s \\ &= \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{2s}2^{-r_2(2s-1)}\mathrm{D}^s\mathbb{N}(\mathbf{y})^s\pi^{-ns}\Gamma(s)^{r_1}\Gamma(2s)^{r_2}}{\mathfrak{N}(\mathfrak{b}')\sqrt{\mathrm{D}}} \\ &= \frac{2^{-r_2(2s-1)}\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{2s}\mathfrak{N}(\mathfrak{d})^{s-\frac{1}{2}}\mathbb{N}(\mathbf{y})^s\pi^{-ns}\Gamma(s)^{r_1}\Gamma(2s)^{r_2}}{\mathfrak{N}(\mathfrak{b}')}.\end{aligned}$$

Entonces,

$$a_l^{k,k'}(\mathbf{y},s) = G(s) \sum_{\substack{(\alpha,\beta)/\mathfrak{o}^\times \\ 0\neq\langle\alpha\eta'-\beta\sigma',\alpha\xi'-\beta\rho'\rangle\subset\mathfrak{a}}} \int_{F_{\mathfrak{b}'}} \frac{e^{-2\pi i Tr(l\mathbf{x})}}{|\mathbb{N}(\alpha\mathbf{z}+\beta)|^{2s}} d\mathbf{x},$$

Para calcular esta serie dividimos los términos en dos conjuntos. Primero, para los términos donde $\alpha = 0$, tenemos que

$$\sum_{\substack{(\beta)/\mathfrak{o}^\times \\ 0\neq\beta\langle\sigma',\rho'\rangle\subset\mathfrak{a}}} \frac{1}{|\mathbb{N}(\beta)|^{2s}} \int_{F_{\mathfrak{b}'}} e^{-2\pi i Tr(l\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \sum_{\substack{(\beta)/\mathfrak{o}^\times \\ 0\neq\langle\beta\rangle\subset\mathfrak{a}(\mathfrak{a}')^{-1}}} \frac{1}{|\mathbb{N}(\beta)|^{2s}} \int_{F_{\mathfrak{b}'}} e^{-2\pi i Tr(l\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

$$= \begin{cases} \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{b}')\sqrt{\mathrm{D}}}{2^{r_2}} \mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1})^{-2s} \zeta_{\mathrm{K}}(2s, \mathcal{A}_k^{-1}\mathcal{A}_{k'}) \\ 0 \end{cases}$$

si $l = 0$, $l \neq 0$ respectivamente. Luego,

$$G(s) \sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1}/\mathfrak{o}^\times \\ \beta\neq 0}} \frac{1}{|\mathbb{N}(\beta)|^{2s}} \int_{F_{\mathfrak{b}'}} e^{-2\pi i Tr(\xi\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \begin{cases} \mathfrak{N}(\mathfrak{a}')^{2s}\mathbb{N}(\mathbf{y})^s \zeta_{\mathrm{K}}^\star(2s, \mathcal{A}_k^{-1}\mathcal{A}_{k'}) \\ 0 \end{cases}$$

si $l = 0$, $l \neq 0$ respectivamente.

Ahora consideremos los términos donde α es diferente de cero. Sea

$$b(l) := G(s) \sum_{\substack{\langle\alpha,\beta\rangle/\mathfrak{o}^\times \\ 0\neq\langle\alpha\eta'-\beta\sigma',\alpha\xi'-\beta\rho'\rangle\subset\mathfrak{a} \\ \alpha\neq 0}} \int_{F_{\mathfrak{b}'}} \frac{e^{-2\pi i Tr(l\mathbf{x})}}{|\mathbb{N}(\alpha\mathbf{z}+\beta)|^{2s}} d\mathbf{x},$$

Por el lema 15 tenemos

$$b(l) = G(s) \sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'/\mathfrak{o}^\times \\ \alpha\neq 0}} \sum_{\beta\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1}(\alpha)^{-1}} \int_{F_{\mathfrak{b}'}} \frac{e^{-2\pi i Tr(l\mathbf{x})}}{|\mathbb{N}(\alpha\mathbf{z}+\alpha\beta)|^{2s}} d\mathbf{x}$$

$$= G(s) \sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'/\mathfrak{o}^\times \\ \alpha\neq 0}} |\mathbb{N}(\alpha)|^{-2s} \sum_{\beta\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1}(\alpha)^{-1}} \int_{F_{\mathfrak{b}'}} \frac{e^{-2\pi i Tr(l\mathbf{x})}}{|\mathbb{N}(\mathbf{z}+\beta)|^{2s}} d\mathbf{x}$$

Como $\alpha \in \mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, tenemos $\mathfrak{b}' \subset \mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1}(\alpha)^{-1}$. Luego, si tomamos el cociente del grupo aditivo $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1}(\alpha)^{-1}$ módulo $\mathfrak{b}'$ obtenemos

$$b(l) = G(s) \sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'/\mathfrak{o}^\times \\ \alpha\neq 0}} |\mathbb{N}(\alpha)|^{-2s} \sum_{\beta\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1}(\alpha)^{-1}/\mathfrak{b}'} \sum_{\zeta\in\mathfrak{b}'} \int_{F_{\mathfrak{b}'}} \frac{e^{-2\pi i Tr(l\mathbf{x})}}{|\mathbb{N}(\mathbf{z}+\beta+\zeta)|^{2s}} d\mathbf{x},$$

Ahora, utilizando el cambio de variable $\mathbf{x}$ por $\mathbf{x}-\zeta$ y la relación $Tr(\zeta l)\in\mathbb{Z}$ para $\zeta\in\mathfrak{b}'$ y l en el módulo dual de $\mathfrak{b}'$, se sigue

$$b(l)=G(s)\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'/\mathfrak{o}^\times\\ \alpha\neq 0}}|\mathbb{N}(\alpha)|^{-2s}\sum_{\beta\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1}(\alpha)^{-1}/\mathfrak{b}'}\sum_{\zeta\in\mathfrak{b}'}\int_{F_{\mathfrak{b}'}-\zeta}\frac{e^{-2\pi i Tr(l\mathbf{x})}}{|\mathbb{N}(\mathbf{z}+\beta)|^{2s}}d\mathbf{x}$$

$$=G(s)\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'/\mathfrak{o}^\times\\ \alpha\neq 0}}|\mathbb{N}(\alpha)|^{-2s}\sum_{\beta\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1}(\alpha)^{-1}/\mathfrak{b}'}\int_{\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}}\frac{e^{-2\pi i Tr(l\mathbf{x})}}{|\mathbb{N}(\mathbf{z}+\beta)|^{2s}}d\mathbf{x}$$

Luego, si utilizamos el cambio de variable $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}-\beta$, tenemos

$$b(l)=G(s)\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'/\mathfrak{o}^\times\\ \alpha\neq 0}}\frac{1}{|\mathbb{N}(\alpha)|^{2s}}\int_{\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}}\frac{e^{-2\pi i Tr(l\mathbf{x})}}{|\mathbb{N}(\mathbf{z})|^{2s}}d\mathbf{x}\sum_{\beta\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1}(\alpha)^{-1}/\mathfrak{b}'}e^{2\pi i Tr\beta l}$$

Ahora, observemos que la aplicación $\beta\mapsto e^{2\pi i Tr\beta l}$ es un caracter del grupo aditivo $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1}(\alpha)^{-1}/\mathfrak{b}'$ y representa el caracter trivial si y sólo si

$$Tr(l\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1}(\alpha)^{-1})\subset\mathbb{Z}\text{ sii }\frac{l}{\alpha}\in\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}'\mathfrak{d}^{-1}$$

sii

$$l\mathfrak{d}\subset\alpha\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}'\text{ sii }\alpha\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}'^{-1}\text{ divide a }l\mathfrak{d}\mathfrak{b}'.$$

Por lo tanto

$$\sum_{\beta\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1}(\alpha)^{-1}/\mathfrak{b}'}e^{2\pi i Tr\beta\xi}=\begin{cases}\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{b}')}{\mathfrak{N}(\alpha^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{a}'^{-1})} & \text{si }(\alpha)\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}'^{-1}:l\mathfrak{d}\mathfrak{b}'\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Se sigue

$$b(l)=\frac{G(s)}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}')}\int_{\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}}\frac{e^{-2\pi i Tr(\mathbf{x}l)}}{|\mathbb{N}(\mathbf{z})|^{2s}}d\mathbf{x}\times\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'/\mathfrak{o}^\times\\ 0\neq\alpha\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}'^{-1}:l\mathfrak{d}\mathfrak{b}'}}\frac{1}{|\mathbb{N}(\alpha)|^{2s-1}}$$

$$=\frac{G(s)}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}')^{2s}}\int_{\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}}\frac{e^{-2\pi i Tr(\mathbf{x}l)}}{|\mathbb{N}(\mathbf{z})|^{2s}}d\mathbf{x}\times\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{a}\mathfrak{a}'/\mathfrak{o}^\times\\ 0\neq\alpha\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}'^{-1}:l\mathfrak{d}\mathfrak{b}'}}\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}')^{2s-1}}{|\mathbb{N}(\alpha)|^{2s-1}}.$$

Por lo tanto, si $l=0$, entonces

$$b(l)=\frac{G(s)}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}')^{2s}}\zeta(2s-1,\mathcal{A}_k^{-1}\mathcal{A}_{k'}^{-1})\int_{\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}}\frac{1}{|\mathbb{N}(\mathbf{z})|^{2s}}d\mathbf{x}$$

Asimismo, si $l \neq 0$,

$$b(l) = \frac{G(s)}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}')^{2s}} d_{1-2s}^{k,k'}(l) \int_{\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}} \frac{e^{-2\pi i Tr(\mathbf{x}l)}}{|\mathbb{N}(\mathbf{z})|^{2s}} d\mathbf{x}$$

donde

$$d_s^{k,k'}(l) = \sum_{\substack{\mathfrak{q}\in\mathcal{A}_k^{-1}\mathcal{A}_{k'}^{-1} \\ \textit{entero} \\ \mathfrak{q}:\mathfrak{b}'\mathfrak{d}l}} \mathbb{N}(\mathfrak{q})^s$$

Ahora, por el Lema 14 y la definición de $G(s)$ tenemos que

$$b(l) = \frac{\zeta_{\mathrm{K}}^{\star}(2s-1, \mathcal{A}_k^{-1}\mathcal{A}_{k'}^{-1})\, \mathbb{N}(\mathbf{y})^{1-s}}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}')^{2s-2}},$$

si $l = 0$ y también

$$b(l) = 2^r\, \mathfrak{N}(\mathfrak{b}'\mathfrak{d}l)^{s-1/2}\, d_{1-2s}^{k,k'}(l)\, \mathfrak{N}(\mathfrak{a}')\, \sqrt{\mathbb{N}(\mathbf{y})}\, K_{s-1/2}(\mathbf{y}, l),$$

si $l \neq 0$. ■

Corolario 2.1. *Sea $k = \rho/\sigma$ una cúspide, sea $\mathfrak{a}$ el ideal asociado a k y $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{-2}$. sea $q_k = \mu(\mathbf{z}, k)$ y $\mathbf{z}^{\star} = \mathrm{A}^{-1}(\mathbf{z})$. Entonces $\mathrm{E}^{\star}(\mathbf{z}, s)$ tiene la siguiente expansión de Fourier en k*

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^{\star}(\mathbf{z}, s) &= \zeta_{\mathrm{K}}^{\star}(2s)\, q_k^s + \zeta_{\mathrm{K}}^{\star}(2s-1)\, q_k^{1-s} \\ &\quad + 2^r\, q_k^{1/2} \sum_{\substack{l\in\mathfrak{b}^{\star} \\ l\neq 0}} \tau_{1-2s}(l)\, K_{s-1/2}(\mathbf{y}^{\star}, l)\, e^{2\pi i Tr(l\mathbf{x}^{\star})},\end{aligned}$$

donde

$$\tau_s(l) = \mathfrak{N}(\mathfrak{b}\mathfrak{d}l)^{-s/2} \sum_{\substack{\mathfrak{q}\ \textit{entero} \\ \mathfrak{q}:\mathfrak{b}\mathfrak{d}l}} \mathfrak{N}(\mathfrak{q})^s.$$

Más aún, satisface la ecuación diferencial

$$\Delta\mathrm{E}^{\star}(\mathbf{z}, s) = (r_1 + 4r_2)s(s-1)\mathrm{E}^{\star}(\mathbf{z}, s)$$

Demostración. La expansión de Fourier de $\mathrm{E}^{\star}(\mathbf{z}, s)$ se sigue al sumar la expansión de Fourier de cada $\mathrm{E}_k^{\star}(\mathbf{z}, s)$. Asimismo, de la ecuación

$$\Delta(\mathbb{N}(\mathbf{y})^s) = (r_1 + 4r_2)s(s-1)\mathbb{N}(\mathbf{y})^s$$

y la ecuación diferencial de la función de Bessel (junto con la propiedad de decrecimiento de sus derivadas) se sigue la ecuación diferencial de la serie de Eisenstein. ■

Corolario 2.2. *La serie de Eisenstein* $\mathrm{E}^\star(\mathbf{z},s)$ *posee una continuación analítica en* $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ *y satisface la ecuación funcional*

$$\mathrm{E}^\star(\mathbf{z},s)=\mathrm{E}^\star(\mathbf{z},1-s),$$

para todo $\mathbf{z}\in\mathbf{X}$ *y* $s\in\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. *Más aún, posee un polo simple en* $s=1$ *con residuo*

$$\mathcal{R}es_{s=1}\mathrm{E}^\star(\mathbf{z},s)=\frac{2^{r_1-1}\,\mathrm{R}\,h}{\omega}$$

Demostración. Consideremos la expansion de Fourier en la cúspide $k'=\infty$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^\star(\mathbf{z},s)&=\zeta^\star_{\mathrm{K}}(2s)\mathbb{N}(\mathbf{y})^s+\zeta^\star_{\mathrm{K}}(2s-1)\mathbb{N}(\mathbf{y})^{1-s}\\&\quad+2^r\,\mathbb{N}(\mathbf{y})^{1/2}\sum_{\substack{l\in\mathfrak{d}^{-1}\\ l\neq 0}}\tau_{1-2s}(l)\,K_{s-1/2}(\mathbf{y},l)\,e^{2\pi i Tr(xl)}.\end{aligned}$$

Luego, por las propiedades analíticas de $\zeta^\star_{\mathrm{K}}(s)$ y el rápido decrecimiento de las funciones de Bessel se siguen las propiedades analíticas de $\mathrm{E}^\star(\mathbf{z},s)$.

Por otro lado, por la fórmula del número de clases, el residuo de $\mathrm{E}^\star(\mathbf{z},s)$ en $s=1$ es igual

$$\begin{aligned}\mathcal{R}es_{s=1}\mathrm{E}^\star(\mathbf{z},s)&=\Lambda(1)\,\mathcal{R}es_{s=1}\zeta_{\mathrm{K}}(2s-1)\\&=\frac{1}{2}\,\Lambda(1)\,\mathcal{R}es_{s=1}\zeta_{\mathrm{K}}(s)\\&=\omega^{-1}\,2^{r_1-1}\,\mathrm{R}\,h\end{aligned}$$

■

Corolario 2.3. *Sea* k *una cúspide, y sea* $\mathfrak{a}$ *el ideal asociado a* k *y* $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}^{-2}$. *sea* $q_k=\mu(\mathbf{z},k)$ *y* $\mathbf{z}^\star=\mathrm{A}^{-1}(\mathbf{z})$. *Entonces* $\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$ *tiene la siguiente expansión de Fourier en* k

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathbf{z},s)&=q_k^s+\frac{\zeta^\star_{\mathrm{K}}(2s-1)}{\zeta^\star_{\mathrm{K}}(2s)}q_k^{1-s}\\&\quad+\frac{2^r q_k^{1/2}}{\zeta^\star_{\mathrm{K}}(2s)}\sum_{\substack{l\in\mathfrak{b}^\star\\ l\neq 0}}\tau_{1-2s}(l)K_{s-1/2}(\mathbf{y}^\star,l)e^{2\pi i Tr(l\mathbf{x}^\star)},\end{aligned}$$

donde

$$\tau_s(l)=\mathfrak{N}(\mathfrak{b}\mathfrak{d}l)^{-s/2}\sum_{\substack{\mathfrak{q}\ \textit{entero}\\ \mathfrak{q}:\mathfrak{b}\mathfrak{d}l}}\mathfrak{N}(\mathfrak{q})^s.$$

Más aún, satisface la ecuación diferencial

$$\Delta\mathrm{E}(\mathbf{z},s)=(r_1+4r_2)s(s-1)\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$$

Demostración. La expansión de Fourier de $\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$ se sigue de dividir la expansión de $\mathrm{E}^\star(\mathbf{z},s)$ por $\zeta_{\mathrm{K}}^\star(2s)$. Asimismo, de la ecuación

$$\Delta(\mathbb{N}(\mathbf{y})^s) = (r_1+4r_2)s(s-1)\mathbb{N}(\mathbf{y})^s$$

y la ecuación diferencial de la función de Bessel (junto con la propiedad de decrecimiento de sus derivadas) se sigue la ecuación diferencial de la serie de Eisenstein. ■

Corolario 2.4. *Para todo* $\mathbf{z}\in\mathbf{X}$ *la serie de Eisenstein* $\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$ *tiene una continuación meromorfa a todo el plano complejo. Es holomorfa en el hemiplano* $\Re(s)\geq 1/2$, *excepto por un polo en* $s=1$ *con residuo:*

$$\mathcal{R}es_{s=1}(\mathrm{E}(\mathbf{z},s)) = \frac{2^{r-1}\,\mathrm{R}\,h}{\pi^{-n}\,\omega\,\mathrm{D}\,\zeta_{\mathrm{K}}(2)} \qquad (\forall\mathbf{z}\in\mathbf{X}). \tag{II.9}$$

Más aún la hipótesis de Riemann para el campo de números K *es cierta si y sólo si para todo* $\mathbf{z}\in\mathbf{X}$ *la función* $\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$ *es holomorfa en el hemiplano* $\Re(s)>1/4$, *excepto por un polo en* $s=1$.

Demostración. 1Recordemos la ecuación $\zeta_{\mathrm{K}}^\star(2s)\,\mathrm{E}(\mathbf{z},s) = \mathrm{E}^\star(\mathbf{z},s)$. Como la función gamma de Euler no se anula en el plano complejo los polos de $\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$ se encuentran en los ceros de la función $\zeta_{\mathrm{K}}(2s)$ (contando los ceros de $\mathrm{E}^\star(\mathbf{z},s)$). Luego, por las propiedades de la función zeta de Dedekind, se sigue que $\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$ es holomorfa para $\Re(s)\geq\frac{1}{2}$ excepto por un polo en $s=1$ con residuo:

$$\mathcal{R}es_{s=1}(\mathrm{E}(\mathbf{z},s)) = \frac{2^{r-1}\,\mathrm{R}\,h}{\pi^{-n}\,\omega\,\mathrm{D}\,\zeta_{\mathrm{K}}(2)} \qquad (\forall\mathbf{z}\in\mathbf{X}).$$

Por otro lado, si la hipótesis de Riemann para $\zeta_{\mathrm{K}}(s)$ is cierta. Entonce, para todo $\mathbf{z}\in\mathbf{X}$, $\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$ es holomorfa en la región $\Re(s)>\frac{1}{4}$ excepto posiblemente por un polo simple en $s=1$. Ahora, supongamos que $\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$ es holomorfa en el hemiplano $\Re(s)>\frac{1}{4}$ para todo $\mathbf{z}\in\mathbf{X}$. Sea $s=\sigma+it$ tal que $0<\sigma<1/2$ y $\zeta(2s)=0$, Luego

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^\star(\mathbf{z},s) &= \zeta_{\mathrm{K}}^\star(2s-1)\mathbb{N}(\mathbf{y})^{1-s}\\ &\quad + 2^r\mathbb{N}(\mathbf{y})^{1/2}\sum_{\substack{l\in\mathfrak{d}^{-1}\\ l\neq 0}}\tau_{1-2s}(l)K_{s-1/2}(\mathbf{y},l)e^{2\pi i Tr(lx)}.\end{aligned}$$

Como $\zeta^\star(2s-1)\neq 0$, existe $\mathbf{z}\in\mathbf{X}$ tal que $\mathrm{E}^\star(\mathbf{z},s)\neq 0$. Luego, $\sigma=1/4$. ■

Capítulo III
Equidistribución de secciones cuspidales

En este capítulo presentaremos los resultados originales de este trabajo. Primero, expondremos el método de Rankin-Selberg para la variedad modular de Hilbert y la función de Phragmén–Lindelöf asociada a la función zeta de Dedekind.

1. La transformada de Mellin y el método de Rankin-Selberg

Sea $a \geq 0$ un entero o infinito. Denotamos por $C_c^a(\mathscr{M})$ el conjunto funciones con valores en los complejos definidas en $\mathscr{M}$ de clase C^a y con soporte compacto. Asimismo, $C(\mathscr{M})$ denota el conjunto de funciones complejo valuadas y continuas definidas en $\mathscr{M}$. En adelante fijaremos un conjunto $\lambda_1, ..., \lambda_h$ de representantes de las cúspides de $\mathscr{M}$. Para $i = \{1, ..., h\}$ definimos la medida soportada uniformemente en la sección cruzada de las cúspide λ_i como sigue.

Lema 16. *Sea $d\upsilon'_\lambda$ la medida en $B(q,k)$ inducida por la métrica Riemanniana de $\mathbf{X}$. Entonces, en coordenadas locales de k, tenemos que*

$$d\upsilon' = (r_1 + 4r_2)^{1/2}\, 2^{r_1 - r_2 - 1} \sqrt{\mathrm{D}}\, \mathrm{R}\, d\mathrm{X} d\mathrm{Y},$$

donde $d\mathrm{X}d\mathrm{Y}$ es la medida de Lebesgue en $(\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}) \times \mathbb{R}^{r-1}$.

Demostración. Como A is una isometría, objetos métricos en las coordenadas $\mathbf{z}$ se pueden describir en los coordenadas $\mathbf{z}^\star$. Por un lado, como el cambio de variables entre las X's y las $\mathbf{x}^\star$'s es mediante una transformación lineal, tenemos $d\mathrm{X}_1 \cdots d\mathrm{X}_r = (2^{r_2}\, \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2/\sqrt{\mathrm{D}})\, d\mathbf{x}^\star$. Luego, el elemento de volumen inducido por la métrica Riemaniana de $\mathscr{H}$ en la subvariedad $(\mathbf{x}^\star, \mathbf{y}^\star)$, para un $\mathbf{y}^\star$ fijo, está dada por

$$\frac{d\mathbf{x}^\star}{\mathbb{N}(\mathbf{y}^\star)} = q^{-1}\, 2^{-r_2} \sqrt{\mathrm{D}}\; d\mathrm{X}_1 \cdots d\mathrm{X}_r.$$

Por otro lado, por la definición de las coordenadas locales, si $\hat{q} = \mathbb{N}(\mathbf{y}^\star)$, tenemos

$$y_i^\star = \hat{q}^{\frac{1}{n}} \exp\Big(\sum_{k=1}^{r-1} 2\mathrm{Y}_k \ln\left|\varepsilon_k^{(i)}\right|\Big) = \hat{q}^{1/n} \prod_{k=1}^{r-1} \left|\varepsilon_k^{(i)}\right|^{2\mathrm{Y}_k}$$

para todo $i = 1, ..., r$. La aplicación $(y_i^\star) \mapsto (\log y_i^\star)$ es una isometría entre $(\mathbb{R}_+^r, \prod_{i=1}^r dy_i^\star / y_i^\star)$ y $(\mathbb{R}^r, \sum_{i=1}^r dt_i)$. Las coordenadas locales de $\mathbf{y}^\star$ se factorizan mediante el diagrama conmutativo... donde f denota la transformación lineal

$$f(\mathrm{Y}_1, ..., \mathrm{Y}_{r-1}, \log\hat{q})$$

$$\begin{bmatrix} 2\log\left|\varepsilon_1^{(1)}\right| & ... & 2\log\left|\varepsilon_{r-1}^{(1)}\right| & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\log\left|\varepsilon_1^{(r)}\right| & ... & 2\log\left|\varepsilon_{r-1}^{(r)}\right| & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Y}_{r-1} \\ \log\hat{q} \end{bmatrix}$$

Luego, la medida inducida en la subvariedad $\mathbb{N}(\mathbf{y}^\star) = \hat{q}$ por la medida $\prod_{i=1}^r dy_i^\star / y_i^\star$ es igual a

$$(r_1 + 4r_2)^{1/2}\, 2^{r_1 - 1}\, \mathrm{R}\, d\mathrm{Y}_1 \cdots d\mathrm{Y}_{r-1},$$

donde $d\mathrm{Y}_1 \cdots d\mathrm{Y}_{r-1}$ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{r-1}$.

■

Definición 1. Sea λ una cúspide. Sea $q, \mathrm{Y}, \mathrm{X}$ las coordenadas locales de $\mathbf{z}$ en la cúspide λ. Para $f \in C(\mathscr{M})$ sea $\widetilde{f}$ la función en las variables $q, \mathrm{Y}, \mathrm{X}$ tal que $\tilde{f}(q, \mathrm{Y}, \mathrm{X}) = f(\mathbf{z})$. Para q definimos

$$m_i(f, q) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{f}(q, \mathrm{Y}, \mathrm{X})\, d\mathrm{X} d\mathrm{Y},$$

donde $d\mathrm{X}d\mathrm{Y}$ denota la medida de Lebesgue en $(\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}) \times \mathbb{R}^{r-1}$.

Observación 11. La medida m_i es independiente de la elección de λ. Por el lema 16, m_i es la medida inducida por la métrica riemaniana de $\mathscr{M}$ en la sección cruzada de la cúspide λ a altura q.

Observación 12. Por la topología de la variedad modular de Hilbert una función continua f pertenece a $C_c^a(\mathscr{M})$ si y sólo si le corresponde una función en $\mathbf{X}$, de clase C^a e invariante por Γ, tal que existe una costante $T > 0$ tal que para todo $i = \{1, ..., h\}$ si $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ satisface $\mu(\mathbf{z}, \lambda_i) > T$, entonces $f(\mathbf{z}) = 0$.

Definición 10. *Para cada $f \in C_c^a(\mathscr{M})$ y $i \in \{1, ..., h\}$ consideremos la* transformada de Mellin *de $m_i(f, q)$:*

$$\mathcal{M}_i(f, s) := \int_0^\infty m_i(f, q) q^{s-1} \frac{dq}{q}. \tag{III.1}$$

Proposición 9. *Para $i \in \{1, ..., h\}$, la integral que define a $\mathcal{M}_i(f, s)$ converge absolutamente en el hemiplano $\Re(s) > 1$ y uniformemente en bandas $\sigma_1 > \Re(s) > \sigma_0 > 1$. Por lo tanto define una función holomorfa en $\Re(s) > 1$.*

Demostración. Sea $f \in C_c^0(\mathscr{M})$ una función continua y de soporte compacto. Por la observación (12) existe $T > 1$, que depende sólo de f, tal que si $\mu(\mathbf{z}, \lambda_i) > T$ entonces $m_i(f, q) = 0$. Sea $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbf{z} \in \mathscr{M}}\{|f(\mathbf{z})|\}$. Como $m_i(f, q) \leq \|f\|_\infty$, entonces, para $\Re(s) > 1$ tenemos

$$|\mathcal{M}_f(s)| \leq \|f\|_\infty \left(\frac{T^{\sigma - 1}}{\sigma - 1} \right), \qquad \text{donde } \sigma = \Re(s)$$

Por lo tanto, la integral $\mathcal{M}(f, s)$ converge absolutamente en el hemiplano $\Re(s) > 1$ y uniformemente un bandas de la forma $\sigma_1 > \Re(s) > \sigma_0 > 1$. Luego define una función holomorfa en esa región. ∎

Observación 13. La trasformada de Mellin definida por III.1, es extrictamente hablando la trasformada de Mellin clásica de la función $m_i(f, q) q^{-1}$. Sin embargo nosotros la llamaremos la transformada de Mellin de $m_i(f, q)$.

Observación 14. Sea $[C_c^a(\mathscr{M})]^\star$ el espacio dual de $C_c^a(\mathscr{M})$ con la topología débil-estrella. Entonces, la aplicación

$$\mathcal{M} : \{\Re(s) > 1\} \to [C_c^r(\mathscr{M})]^\star,$$

dada por

$$s \mapsto \mathcal{M}_i(\cdot, s) := \int_0^\infty m_i(\cdot, q) q^{s-1} \frac{dq}{q}, \quad \Re(s) > 1$$

define una función holomorfa débil.

El siguiente teorema se conoce como el método de Rankin-Selberg para la variedad modular de Hilbert.

Teorema 7. *Sea $f \in C_c^0(\mathscr{M})$ una función continua y de soporte compacto. Entonces, para $\Re(s) > 1$, tenemos*

$$\omega^{-1}\, 2^{r_1 - r_2}\, \mathrm{R}\, \sqrt{\mathrm{D}}\, \mathcal{M}_i(f,s) = \int_{\mathscr{M}} \mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathbf{z},s)\, f(\mathbf{z})\, d\upsilon(\mathbf{z}). \tag{III.2}$$

Demostración. Sea s en el hemiplano $\Re(s) > 1$. Entonces,

$$\int_{\mathscr{M}} \mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathbf{z},s)\, f(\mathbf{z})\, d\upsilon(\mathbf{z}) = \int_{\mathscr{M}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\lambda_i}\backslash\Gamma} \mu(\gamma\mathbf{z},\lambda_i)^s\, f(\mathbf{z})\, d\upsilon(\mathbf{z}).$$

Como f tiene soporte compacto la doble integral de la ecuación anterior es convergente [1]. Entonces, por el teorema de Fubini, tenemos

$$\int_{\mathscr{M}} \mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathbf{z},s) f(\mathbf{z}) d\upsilon(\mathbf{z}) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\lambda_i}\backslash\Gamma} \int_{\mathscr{M}} \mu(\gamma\mathbf{z},\lambda_i)^s f(\mathbf{z}) d\upsilon(\mathbf{z}). \tag{III.3}$$

Para evaluar la última serie seleccionamos un conjunto $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ de representantes de $\Gamma_{\lambda_i}\backslash\Gamma$ y remplazamos la variedad modular $\mathscr{M}$ por un domino fundamental F. Luego, para cada $\gamma_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{bmatrix}$, por la propiedad de invarianza de la medida de volumen, se tiene

$$\int_F \mu(\gamma(\mathbf{z}),\lambda_i)^s\, f(\mathbf{z})\, d\upsilon(\mathbf{z}) = \int_{\gamma(F)} \mu(\mathbf{z},\lambda_i)^s\, f(\mathbf{z})\, d\upsilon(\mathbf{z}).$$

Si sumamos en j se obtiene que la serie (III.3) es igual a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\gamma_j(F)} \mu(\mathbf{z},\lambda_i)^s\, f(\mathbf{z})\, d\upsilon(\mathbf{z}).$$

Como $\bigcup_{j=1}^{\infty} \gamma_j(F)$ es un dominio fundamental para la acción de Γ_{λ_i} en $\mathbf{X}$, tenemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\gamma_j(F)} \mu(\mathbf{z},\lambda_i)^s\, f(\mathbf{z})\, d\upsilon(\mathbf{z}) = \int_{\Gamma_{\lambda_i}\backslash\mathbf{X}} \mu(\mathbf{z},\lambda_i)^s\, f(\mathbf{z})\, d\upsilon(\mathbf{z}).$$

[1] De hecho como el volumen de la variedad modular es finito es suficiente que f decresca rápidamente en las cúspides.

Luego, podemos evaluar esta integral sobre cualquier dominio fundamental de Γ_{λ_i}. Por lo tanto, si escribimos a $\mathbf{z}$ en coordendas locales respecto de λ_i, se tiene

$$\int_{X(\Gamma_{\lambda_i})} \mu(z,\lambda_i)^s f(\mathbf{z}) d\upsilon(\mathbf{z}) = \frac{2^{r_1}\,\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{D}}}{2^{r_2}\,\omega} \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} q^s \widetilde{f}(\mathrm{X},\mathrm{Y},q) \frac{d\mathrm{X} d\mathrm{Y} dq}{q^2}$$
$$= \omega^{-1}\, 2^{r_1-r_2}\,\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{D}}\,\mathcal{M}_i(f,s)$$

■

Definición 11. *Para $q>0$ definimos la medida de probabilidad*

$$m(f,q) = \frac{m_1(f,q)+\cdots+m_h(f,q)}{h} \qquad (f \in C_c^0(\mathscr{M})).$$

Luego, si consideramos la trasformada de Mellin de m:

$$\mathcal{M}(f,s) := \int_0^\infty m(f,q) q^{s-1} \frac{dq}{q} = \frac{1}{h}\sum_i^h \mathcal{M}_i(f,s), \tag{III.4}$$

tenemos el siguiente corolario del teorema de Rankin-Selberg.

Corolario 1.1. *Sea $f \in C_c^0(\mathscr{M})$. Para $\Re(s)>1$, tenemos*

$$\omega^{-1}\, 2^{r_1-r_2}\,\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{D}}\,\mathcal{M}(f,s) = \frac{1}{h}\int_{\mathscr{M}} \mathrm{E}(\mathbf{z},s)\, f(\mathbf{z}) d\upsilon(\mathbf{z})$$

por lo que la trasformada de Mellin $\mathcal{M}(f,s)$ tiene las mismas propiedades que $\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$*. Esto es, $\mathcal{M}_f(s)$ se extiende a una función meromorfa en s, regular en $\Re(s) \geq \frac{1}{2}$ excepto posiblemente por un polo en $s=1$, con residuo*

$$\mathcal{R}es_{s=1}\mathcal{M}_f(s) = \frac{1}{vol(\mathscr{M})}\int_{\mathscr{M}} f(\mathbf{z}) d\upsilon(\mathbf{z}). \tag{III.5}$$

Más aún, la hipótesis de Riemann para el campo de números K *se satisface si y sólo si para toda $f \in C_c^0(\mathscr{M})$, la aplicación $\mathcal{M}_f(s)$ es regular para $\Re(s) > \frac{1}{4}$, excepto posiblemente por un polo simple en $s=1$.*

Demostración. Sea f de soporte compacto y sea s_0 un cero de $\zeta_{\mathrm{K}}(s)$. Si para toda f se tiene $\mathcal{M}_f^\star(s_0)=0$, entonces $\mathrm{E}(\mathbf{z},s_0)=0$ para todo $\mathbf{z}\in\mathbf{X}$, lo cual es una contradicción. Luego, existe f con la propiedad $\mathcal{M}_f^\star(s_0)\neq 0$.

Bajo esta hipótesis, se tiene que

$$\mathcal{M}(f,s) = \frac{1}{h}\int_{\mathscr{M}} \mathrm{E}(\mathbf{z},s) f(\mathbf{z}) d\omega(\mathbf{z}) \qquad (s \in \mathbb{C}),$$

es holomorfa y podemos escojer f tal que $\mathcal{M}_f(s)$ no es cero para un cero fijo de $\zeta_{\mathrm{K}}(2s)$. Por lo tanto $\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$ es holomorfa en la región $\Re(s) > \frac{1}{4}$ y se satisface la hipótesis de Riemann para el campo K. ■

Observación 15. La función

$$\mathcal{M}^{\star}_f(s) = \zeta^{\star}_{\mathrm{K}}(2s)\mathcal{M}_f(s).$$

tiene una continuación holomorfa excepto posiblemente con dos polos simples en $s = 0$ y $s = 1$. Más aún satisface la ecuación funcional

$$\mathcal{M}^{\star}_f(s) = \mathcal{M}^{\star}_f(1-s).$$

Necesitamos estimar las series de Eisenstein. Para esto, definimos las series de Eisenstein truncadas: para $\mathrm{T} > 0$ una contante fija,

$$\mathrm{E}^{\mathrm{T}}_{\lambda}(\mathbf{z},s) = \begin{cases} \mathrm{E}_{\lambda}(\mathbf{z},s) & \text{si } q_j \leq T \\ \mathrm{E}_{\lambda}(\mathbf{z},s) - q_j^s - \phi(s) q_j^{1-s} & \text{si } q_j > \mathrm{T} \end{cases}$$

La siguiente proposición se conoce como la relación de Maass Selberg. Daremos una demostraci'1on utilizando el método de Rankin-Selberg (cf. [Sel])

Proposición 10. *Para $s \neq s'$ y $s + s' \neq 1$, se satisface*

$$\int \mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z},s)\,\mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z},s')\,dv(\mathbf{z}) = C\left(\frac{\mathrm{T}^{s+s'-1} - \phi(s)\phi(s')\mathrm{T}^{1-s-s'}}{s+s'-1}\right) + C\left(\frac{\mathrm{T}^{s-s'}\phi(s') - \mathrm{T}^{s'-s}\phi(s)}{s-s'}\right)$$

donde $C = \omega^{-1}\, 2^{r_1 - r_2}\sqrt{\mathrm{D}}\,\mathrm{R}\,h$

Demostración. Primero, por la expansión de Fourier de $\mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z},s)$ en las distintas cúspides, $\mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z},s)$ decae rápidamente cuando $q_k \to \infty$ y uniformemente en s, si s permanece en un conjunto compacto dentro de la región regular. Por lo tanto, el lado izquierdo de la ecuación anterior es una función meromorfa en s y s' que es regular en la región regular de la series de Eisenstein.

Ahora, supongamos que $\Re(s') > \Re(s) + 1 > 2$. Para $q > 0$ definimos

$$\delta_{\mathrm{T}}(q) = \begin{cases} 1 \text{ si } q > \mathrm{T} \\ 0 \text{ si } q \leq \mathrm{T} \end{cases}$$

Sea F un dominio fundamental para la acción del grupo modular de Hilbert. Para $i = 1, ..., h$ tenemos las *puntas* de F definidas por

$$F_{\mathrm{T}}^{i} = \{\mathbf{z} \in F \ : \ q_i \geq \mathrm{T}\}$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{M}} \mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}, s)\, \mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}, s')\, d\upsilon(\mathbf{z}) &= \int_{F} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s)\, \mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}, s')\, d\upsilon(\mathbf{z}) \\ &= \int_{F} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s)\, (\mathrm{E}(\mathbf{z}, s') - \sum_{i=1}^{h} \delta_{\mathrm{T}}(q_i) q_i^{s'})\, d\upsilon(\mathbf{z}) \\ &- \phi(s') \sum_{k=1}^{h} \int_{F_{\mathrm{T}}^{i}} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s)(q_i)^{1-s'}\, d\upsilon(\mathbf{z}),\end{aligned}$$

Los últimos términos se pueden calcular independientemente. Primero, recordemos que para $\Re(s) > 1$ se tiene $|\mathrm{E}(\mathbf{z}, s)| \leq \mathrm{E}(\mathbf{z}, \Re(s))$. Luego

$$\int_{F} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s)(\mathrm{E}(\mathbf{z}, s') - \sum_{i=1}^{h} \delta_{\mathrm{T}}(q_i) q_i^{s'}) d\upsilon(\mathbf{z}) =$$

$$\int_{F} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s)(\mathrm{E}(\mathbf{z}, s') - \sum_{i=1}^{h} q_i^{s'}) d\upsilon(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{h} \int_{F - F_{\mathrm{T}}^{j}} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s) q_i^{s'}\, d\upsilon(\mathbf{z}) =$$

$$\sum_{i=1}^{h} \int_{F} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s) \sum_{\gamma \in \Gamma_{\lambda_i} \backslash (\Gamma - \Gamma_{\lambda_i})} \mu(\lambda_j, \gamma\mathbf{z})^{s'} d\upsilon(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{h} \int_{F - F_{\mathrm{T}}^{i}} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s) q_i^{s'}\, d\upsilon(\mathbf{z}) =$$

$$\sum_{i=1}^{h} \int_{F_{\lambda_i} - F} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s) q_i^{s'} d\upsilon(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{h} \int_{F - F_{\mathrm{T}}^{i}} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s) q_i^{s'}\, d\upsilon(\mathbf{z}),$$

donde F_{λ_i} es un dominio fundamental para la acción de Γ_{λ_i} en $\mathbf{X}$. Como la unión disjunta de $F_{\lambda_i} - F$ y $F - F_T^i$ es igual al conjunto

$$F_{\lambda_i}^{\mathrm{T}} = \{\mathbf{z} : q_i < \mathrm{T}\} \cap F_{\lambda_i},$$

la última ecuación es igual a

$$\sum_{i=1}^{h} \int_{F_{\lambda_i}^{\mathrm{T}}} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s) q_i^{s'} d\upsilon(\mathbf{z})$$

Luego, si consideramos la coordenadas locales en λ_i, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{h} \int_{F^{\mathrm{T}}_{\lambda_i}} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s) q_i^{s'}\, dv(\mathbf{z}) &= \frac{C}{h} \sum_{i=1}^{h} \int_0^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{\mathrm{E}}(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i, q_i) q_i^{s'} \frac{d\mathrm{X}_i d\mathrm{Y}_i dq_i}{q_i^2} \\
&= \frac{C}{h} \sum_{i=1}^{h} \int_0^{T} (q_i^s + \phi(s) q_i^{1-s}) q_i^{s'} \frac{dq_i}{q_i^2} \\
&= C \left(\frac{T^{s+s'-1}}{s+s'-1} + \frac{\phi(s) T^{s'-s}}{s'-s} \right)
\end{aligned}
$$

donde $C = 2^{r_1 - r_2} \sqrt{\mathrm{D}}\, \mathrm{R}\, h\, \omega^{-1}$. Por otro lado, el segundo término es igual a

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{h} \phi(s') \int_{F^i_T} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s) q_i^{1-s'}\, dv(\mathbf{z}) &= -\frac{C}{h} \sum_{i=1}^{h} \phi(s') \int_T^{\infty} (q_i^s + \phi(s) q_i^{1-s}) q_i^{1-s'} \frac{dq_i}{q_k^2} \\
&= C \left(\frac{\phi(s') T^{s-s'}}{s-s'} + \phi(s)\phi(s') \frac{T^{1-s-s'}}{1-s-s'} \right)
\end{aligned}
$$

Esto muestra la identidad de Maass-Selberg para $\Re(s') > \Re(s) + 1 > 2$. Como ambos lados de la identidad son funciones holomorfas, se tiene la identidad para todo s y s' en la región regular de ambos lados de la ecuación. ■

El volumen de la variedad modular

En esta sección aplicaremos el procedimiento de Maas-Selberg para calcular el volumen de la variedad modular de Hilbert.

Sea $f : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ una función invariante por el grupo modular Γ. De manera similar a las series de Eisenstein, tenemos los coeficientes de Fourier de f en las distintas cúspides. Asimismo, podemos definir la funciones truncadas f^T, para un T suficientemente grande.

Podemos ver que, si sustituimos $\mathrm{E}(\mathbf{z}, s)$ en la prueba del teorema de Maass-Selberg, por la función $f(\mathbf{z}) = 1$, y su correspondiente función truncada,

Proposición 11. *(ver [Wen06]) Para* $\Re(s') > 1$

$$
\int_{\mathscr{M}_{\mathrm{T}}} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s') dv(\mathbf{z}) = C \left(\frac{\mathrm{T}^{s'-1}}{s'-1} - \frac{\phi(s') \mathrm{T}^{-s'}}{s'} \right)
$$

con $C = 2^{r_1 - r_2} \sqrt{\mathrm{D}}\, \mathrm{R}\, h\, \omega^{-1}$. *Luego esta identidad se satisface en la región donde ambos lados de la ecuación es regular*

Demostración. Primero, por la expansión de Fourier de $\mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}, s)$ en las distintas cúspides, $\mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}, s)$ decae rápidamente cuando $q_k \to \infty$ y uniformemente en s, si s permanece en un conjunto compacto dentro de la región regular. Por lo tanto, el lado izquierdo de la ecuación anterior es una función meromorfa en s y s' que es regular en la región regular de la series de Eisenstein.

Ahora, supongamos que $\Re(s') > \Re(s) + 1 > 2$. Para $q > 0$ definimos

$$\delta_{\mathrm{T}}(q) = \begin{cases} 1 \text{ si } q > \mathrm{T} \\ 0 \text{ si } q \leq \mathrm{T} \end{cases}$$

Sea F un dominio fundamental para la acción del grupo modular de Hilbert. Para $i = 1, ..., h$ tenemos las *puntas* de F definidas por

$$F_{\mathrm{T}}^{i} = \{\mathbf{z} \in F \ : \ q_i \geq \mathrm{T}\}$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{M}} f_T(\mathbf{z})\, \mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}, s')\, d\upsilon(\mathbf{z}) &= \int_F f(\mathbf{z})\, \mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}, s')\, d\upsilon(\mathbf{z}) \\ &= \int_F f(\mathbf{z})\, (\mathrm{E}(\mathbf{z}, s') - \sum_{i=1}^{h} \delta_{\mathrm{T}}(q_i) q_i^{s'})\, d\upsilon(\mathbf{z}) \\ &- \phi(s') \sum_{k=1}^{h} \int_{F_{\mathrm{T}}^{i}} f(\mathbf{z})(q_i)^{1-s'}\, d\upsilon(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

Los últimos términos se pueden calcular independientemente. Primero, recordemos que para $\Re(s) > 1$ se tiene $|\mathrm{E}(\mathbf{z}, s)| \leq \mathrm{E}(\mathbf{z}, \Re(s))$. Luego

$$\int_F f(\mathbf{z})(\mathrm{E}(\mathbf{z}, s') - \sum_{i=1}^{h} \delta_{\mathrm{T}}(q_i) q_i^{s'}) d\upsilon(\mathbf{z}) =$$

$$\int_F f(\mathbf{z})(\mathrm{E}(\mathbf{z}, s') - \sum_{i=1}^{h} q_i^{s'}) d\upsilon(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{h} \int_{F - F_{\mathrm{T}}^{j}} f(\mathbf{z}) q_i^{s'}\, d\upsilon(\mathbf{z}) =$$

$$\sum_{i=1}^{h} \int_F f(\mathbf{z}) \sum_{\gamma \in \Gamma_{\lambda_i} \backslash (\Gamma - \Gamma_{\lambda_i})} \mu(\lambda_j, \gamma\mathbf{z})^{s'} d\upsilon(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{h} \int_{F - F_{\mathrm{T}}^{i}} f(\mathbf{z}) q_i^{s'}\, d\upsilon(\mathbf{z}) =$$

$$\sum_{i=1}^{h} \int_{F_{\lambda_i} - F} f(\mathbf{z}) q_i^{s'}\, d\upsilon(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{h} \int_{F - F_{\mathrm{T}}^{i}} f(\mathbf{z}) q_i^{s'}\, d\upsilon(\mathbf{z}),$$

donde F_{λ_i} es un dominio fundamental para la acción de Γ_{λ_i} en $\mathbf{X}$. Como la unión disjunta de $F_{\lambda_i} - F$ y $F - F_T^i$ es igual al conjunto

$$F_{\lambda_i}^{\mathrm{T}} = \{\mathbf{z} : q_i < \mathrm{T}\} \cap F_{\lambda_i},$$

la última ecuación es igual a

$$\sum_{i=1}^{h} \int_{F_{\lambda_i}^{\mathrm{T}}} f(\mathbf{z}) q_i^{s'} d\upsilon(\mathbf{z})$$

Luego, si consideramos la coordenadas locales en λ_i, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{h} \int_{F_{\lambda_i}^{\mathrm{T}}} f(\mathbf{z}) q_i^{s'} \, d\upsilon(\mathbf{z}) &= \frac{C}{h} \sum_{i=1}^{h} \int_0^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{f}(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i, q_i) q_i^{s'} \frac{d\mathrm{X}_i d\mathrm{Y}_i dq_i}{q_i^2} \\
&= \frac{C}{h} \sum_{i=1}^{h} \int_0^{T} q_i^{s'} \frac{dq_i}{q_i^2} \\
&= C \left(\frac{T^{s'-1}}{s'-1} \right)
\end{aligned}$$

donde $C = 2^{r_1 - r_2} \sqrt{\mathrm{D}}\, \mathrm{R}\, h\, \omega^{-1}$. Por otro lado, el segundo término es igual a

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{h} \phi(s') \int_{F_T^i} f(\mathbf{z}) q_i^{1-s'} \, d\upsilon(\mathbf{z}) &= -\frac{C}{h} \sum_{i=1}^{h} \phi(s') \int_T^{\infty} q_i^{1-s'} \frac{dq_i}{q_k^2} \\
&= C \left(-\phi(s') \frac{T^{-s'}}{s'} \right)
\end{aligned}$$

Esto muestra la identidad de Maass-Selberg para $\Re(s') > \Re(s) + 1 > 2$. Como ambos lados de la identidad son funciones holomorfas, se tiene la identidad para todo s y s' en la región regular de ambos lados de la ecuación. ■

Como ambos lados de la ecuación son funciones meromorfas, la identidad se satisface en la región donde ambos lados de la ecuación es regular.

Proposición 12. *El volumen de la variedad modular de Hilbert es igual a*

$$2^{-3r_2+1} \pi^{-n} \mathrm{D}^{3/2} \zeta_{\mathrm{K}}(2).$$

En particular tenemos el resultado de Siegel para K totalmente real

$$\pi^{-n} \mathrm{D}^{3/2} \zeta_{\mathrm{K}}(2).$$

. Asimismo tenemos, para K cuadrático complejo

$$(2\pi)^{-2} \mathrm{D}^{3/2} \zeta_{\mathrm{K}}(2).$$

Demostración. Por la proposición 11 tenenemos Para $\Re(s') > 1$

$$\int_{\mathscr{M}_{\mathrm{T}}} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s') dv(\mathbf{z}) = C \left(\frac{\mathrm{T}^{s'-1}}{s'-1} - \frac{\phi(s')\mathrm{T}^{-s'}}{s'} \right)$$

con $C = 2^{r_1 - r_2} \sqrt{\mathrm{D}}\, \mathrm{R}\, h\, \omega^{-1}$. Considerando el resido en $s' = 1$ se sigue

$$vol(\mathscr{M}_T) \mathcal{R}es_{s'=1} \mathrm{E}(\mathbf{z}, s') = C(-1+) \tag{III.6}$$

tomando el límite cuando $\mathrm{T} \to \infty$ obtenemos la siguiente proposición.

■

2. La función de Phragmén–Lindelöf y el teorema de Littlewood

En está seción describiremos el comportamiento asintótico en bandas verticales de la función zeta de Dedekind.

Recordemos que dadas dos funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$ y con valores en los complejos escribimos

$$f(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big) \text{ cuando } x \to \infty,$$

si existe $M > 0$ y $x_0 > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M\,|g(x)|$$

para todo $x > x_0$.

Sea σ un número real y $\mu_{\mathrm{K}}(\sigma)$ la cota inferior de los números $l \geq 0$ tales que

$$\zeta_{\mathrm{K}}(\sigma + it) = \mathcal{O}(|t|^l) \text{ cuando } |t| \to \infty.$$

Como la función zeta de Dedekind está acotada uniformemente para $\sigma > \sigma_0 > 1$ por $\zeta_{\mathrm{K}}(\sigma_0)$ se sigue $\mu_{\mathrm{K}}(\sigma) = 0$ para todo $\sigma > 1$.

Por la fórmula de Stirling tenemos

$$\Gamma(\sigma + it) \sim \sqrt{2\pi}\, |t|^{\sigma - 1/2}\, e^{-\pi|t|/2}$$

cuando $t \to \pm\infty$, uniformemente en bandas $\sigma_0 < \sigma < \sigma_1$. Esto es

$$\text{lím} \frac{\sqrt{2\pi}\,|t|^{\sigma-1/2}\,e^{-\pi|t|/2}}{\Gamma(\sigma+it)} = 1 \quad \text{cuando } |t| \to \infty$$

uniformemente en bandas de ancho finito. Luego, por la ecuación funcional:

$$\zeta_{\mathrm{K}}^{\star}(s) = \zeta_{\mathrm{K}}^{\star}(1-s)$$

tenemos

$$\mu_{\mathrm{K}}(\sigma) = n(\frac{1}{2} - \sigma)$$

para $\sigma < 0$. Por lo tanto, por la teoría de funciones de Phragmén–Lindelöf, μ_{K} satisface las propiedades (ver Lang [Lan94, pp. 266] y Titchmarsh [Tit88, pp. 95] para una exposición detallada):

- μ_{K} es continua no creciente y no negativa

- μ_{K} es convexa, i.e., la curva $y = \mu_{\mathrm{K}}(\sigma)$ no tiene puntos sobre la recta que uno cualesquira dos de sus puntos.

- $\mu_{\mathrm{K}}(\sigma) = 0$ si $\sigma \geq 1$ y $\mu_{\mathrm{K}}(\sigma) = n(\frac{1}{2} - \sigma)$ si $\sigma \leq 0$.

Más aún, por el principio Phragmén–Lindelöf tenemos que

$$\zeta_{\mathrm{K}}(\sigma + it) = \mathcal{O}(t^l)$$

uniformemente en bandas $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ para $l = l(\sigma_0, \sigma_1)$.

La hipótesis Lindelöf para el campo K nos dice

$$\begin{cases} \mu_{\mathrm{K}}(\sigma) = n(\frac{1}{2} - \sigma) & \text{if } \sigma < \frac{1}{2} \\ \mu_{\mathrm{K}}(\sigma) = 0 & \text{if } \sigma \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{III.7}$$

Lo cual es equivalente a:

$$\zeta_{\mathrm{K}}(\frac{1}{2} + it) = \mathcal{O}(t^{\epsilon}) \text{ para todo } \epsilon > 0. \tag{III.8}$$

Teorema de Littlewood

En esta sección mostraremos una consecuencia clásica de la hipótesis de Riemann para la función zeta de Dedekind. Nuestra demostración es una traducción del libro de [Tit88], en el cual se encuentra expuesto el caso $\mathrm{K} = \mathbb{Q}$.

Necesitaremos dos lemas preliminares.

Lema 17. *(Borel-Caratheodory) Sea f una función holomorfa en un disco cerrado de radio R y centro en el origen. Sea $\|f\|_r = \text{máx}\,|f(z)|$ para $|z| = r < R$. Entonces*

$$\|f\|_r \leq \frac{2r}{R-r} \sup_{|z|=R} \Re(f) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)| \,.$$

Lema 18. *(Tres círculos) Sea $f(z)$ una función holomorfa definida en el anillo. $r_1 \leq |z| \leq r_3$. Sea $M(r)$ el máximo de $|f(z)|$ en el círculo $|z| = r$. Entonces, $\log M(r)$ es una función convexa del logaritmo $\log(r)$. Esto es*

$$\log\left(\frac{r_3}{r_1}\right) \log M(r_2) \leq \log\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \log M(r_1) + \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \log M(r_3)$$

para cualquier terna de círculos de radios $r_1 < r_2 < r_3$.

Supongamos la hipótesis de Riemann para $\zeta_{\mathrm{K}}(s)$. Entonces, si definimos

$$\log \zeta_{\mathrm{K}}(s)$$

en el conjunto conexo es regular para $\sigma > 1/2$ (excepto en $s = 1$)

Teorema 8. *(Littlewood) Si la hipótesis de Riemann para $\zeta_{\mathrm{K}}(s)$ es cierta, entonces*

$$\log \zeta_{\mathrm{K}}(s) = \mathcal{O}\{(\log t)^{2-2\sigma+\epsilon}\}$$

uniformemente en la región $1/2 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$.

Demostración. Primero aplicamos el teorema de Borel-Carathéodory a la función $\log \zeta_{\mathrm{K}}(s)$ y los círculos de centro $2 + it$ y radios $r = 3/2 - \delta/2$ y $3/2 - \delta$ ($\delta > 0$). Por las propiedades de la función $\mu_K(\sigma)$, en el círculo mayor tenemos

$$\Re(\log \zeta_{\mathrm{K}}(s)) = \log |\zeta_{\mathrm{K}}(s)| < A \log t.$$

Además $\log \zeta_{\mathrm{K}}(2 + it)$ es un función acotada. Por lo tanto, en el círculo de radio menor

$$\text{máx}\,|\log \zeta_{\mathrm{K}}(s)| \leq \frac{2(3/2 - \delta/2)}{\delta/2} \{\mathcal{O}(\log t) + \mathcal{O}(1)\}.$$

Por lo tanto

$$\log \zeta_{\mathrm{K}}(s) = \mathcal{O}(\log t) \tag{III.9}$$

uniformemente para $\sigma \geq 1/2 + \delta$ y cualquier $\delta > 0$.

Ahora para encontrar una mejor aproximación aplicamos el teorema de los tres círculos a los círculos con centro $\sigma_1 + it$ y radios

$$r_1 = \sigma_1 - 1 - \delta,\ r_2 = \sigma_1 - \sigma,\ r_3 = \sigma_1 - 1/2 - \delta,$$

donde $1/2 + \delta < \sigma_0 \leq \sigma$. La aplicación $\zeta_{\mathrm{K}}(s)$ está acotada en el círculo de radio menor y satisface III.9 en el círculo de radio mayor. Sea M el módulo máximo en el círculo central. Entonces

$$M \leq A(\delta)(\log t)^{\log(r_2/r_1)/\log(r_3/r_1)}$$

ahora

$$\begin{aligned}\log(r_2/r_1)/\log(r_3/r_1) &= \log(1 + \frac{1+\delta-\sigma}{\sigma_1 - 1 - \delta})/\log(1 + \frac{1/2}{\sigma_1 - 1 - \delta}) \\ &< 2(1+\delta-\sigma) + \epsilon\end{aligned}$$

si $\sigma_1 = \sigma_1(\delta, \epsilon)$ es suficientemente grande. Por lo tanto

$$\log \zeta_{\mathrm{K}}(s) = \mathcal{O}\{(\log t)^{2(1+\delta-\sigma)+\epsilon}\}$$

Como δ y ϵ se pueden escojer suficiente pequeños se sigue el resultado. ■

Corolario 2.1. *Si la hipótesis de Riemann para* K *es verdadera, entonces*

$$\textit{Para } \epsilon > 0 \textit{ y } \sigma \geq \frac{1}{2}:$$
$$-\epsilon \log t < \log|\zeta_K(s)| < \epsilon \log t;\ s = \sigma + it,\ t \geq t_0(\epsilon),$$

Esto es

$$\begin{cases} \zeta_{\mathrm{K}}(s) = \mathcal{O}(t^{\epsilon}) \\ \frac{1}{\zeta_{\mathrm{K}}(s)} = \mathcal{O}(t^{\epsilon}) \end{cases} \quad \textit{para todo } \epsilon > 0,\ s = \sigma + it, \sigma > \tfrac{1}{2} \textit{ cuando } |t| \to \infty.$$

Demostración. Por el teorema de Littlewood tenemos

$$|\log \zeta_{\mathrm{K}}(s)| \leq M(\log t)^{\alpha},$$

para α menor que uno. Luego, 11para todo $\epsilon > 0$, existe $t_0(\epsilon)$ tal que

$$-\epsilon \log t < \log|\zeta_{\mathrm{K}}(s)| < \epsilon \log t \qquad (t > t_0(\epsilon))$$

■

En particular, la hipótesis de LindelÏof es una cosencuencia la hipótesis de Riemann. Estas estimaciones puede encontrarse en [Tit88] (Capítulo XIV, p. 337, fórmulas (14.2.5) y (14.2.6) y Lang [Lan94] (Capítulo XIII, p. 267).

3. El método de Zagier para un campo de números.

En está sección mostraremos nuestros resultados. Comenzaremos acotando la transformada de Mellin mediante el siguiente lema (ver [Sar80, pp. 735] lemma 3.2 un versión similar para superficies hiperbólicas).

Lema 19. *Sea $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Entonces existe t_0 tal que*

$$|\mathcal{M}_f(s)| \leq \frac{\beta_f(\sigma)}{s(s-1)} t^{\epsilon}, \qquad (t \geq t_0, \epsilon > 0)$$

para $\sigma < \Re(s) < 2$; donde $\beta_f(\sigma)$ es una constante que depende de σ y un número finito de derivadas de f.

Demostración. Consideremos la representación 7. Primero estimaremos

$$\mathcal{M}(f,s) = \int_{\mathscr{M}} \mathrm{E}(\mathbf{z},s)\, f(\mathbf{z})\, d\upsilon(\mathbf{z}).$$

Sea Δ el operador de Laplace-Beltrami de $\mathbf{X}$. Como

$$\Delta \mathrm{E}(\mathbf{z},s) = (r_1 + 4r_2)s(s-1)\mathrm{E}(\mathbf{z},s)$$

tenemos que

$$(r_1 + 4r_2)\mathcal{M}(f,s) = \frac{1}{s(s-1)} \int_{\mathscr{M}} \Delta \mathrm{E}(\mathbf{z},s)\, f(\mathbf{z})\, d\upsilon(\mathbf{z})$$

Integrando por partes, se tiene que

$$\frac{1}{s(s-1)} \int_{\mathscr{M}} \Delta \mathrm{E}(\mathbf{z},s) f(\mathbf{z}) d\upsilon(\mathbf{z}) = \frac{1}{s(s-1)} \int_{\mathscr{M}} \mathrm{E}(\mathbf{z},s) \Delta\, f(\mathbf{z})\, d\upsilon(\mathbf{z})$$

Luego si $T > 0$ es suficientemente grande y tal que el soporte de f está contenido en $\{q_i \leq T\}$ entonces

$$(r_1 + 4r_2)\mathcal{M}(f,s) = \frac{1}{s(s-1)} \int_{\mathscr{M}} \mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z},s) \Delta f(\mathbf{z}) d\upsilon(\mathbf{z})$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$(r_1 + 4r_2)\,|\mathcal{M}(f,s)| \le \frac{1}{s(s-1)}\,\|\Delta f\|_2^2\,\left\|\mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\cdot,s)\right\|_2^2.$$

Supongamos que $\Re(s) > \frac{1}{2}$. Luego, por la proposición 10 la norma L^2 de las series de Eisenstein truncadas esta dado por

$$\int_{\mathscr{M}} \left|\mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{z},s)\right|^2 d\omega(\mathbf{z}) = C\left(\frac{\mathrm{T}^{2\sigma-1} - |\phi(s)|^2\,\mathrm{T}^{1-2\sigma}}{2\sigma-1}\right) + C\left(\frac{\mathrm{T}^{2it}\overline{\phi(s)} - \mathrm{T}^{-2it}\phi(s)}{2it}\right)$$

donde $s = \sigma + it, t \neq 0, \sigma \neq \frac{1}{2}$ y $C = 2^{r_1 - r_2}\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{D}}h\omega^{-1}$. Por lo tanto podemos acotar $\left\|\mathrm{E}^{\mathrm{T}}(\cdot,s)\right\|_2^2$ esencialmente por $\phi(s)$ en bandas verticales de ancho finito (excepto para $\sigma = \frac{1}{2}$ y $t = 0$). Para estimar $\phi(s)$, recordemos

$$\phi(s) = \frac{2^{r_2}\,\pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})^{r_1}\,\Gamma(2s-1)^{r_2}\,\zeta_{\mathrm{K}}(2s-1)}{\sqrt{\mathrm{D}}\,\Gamma(s)^{r_1}\,\Gamma(2s)^{r_2}\,\zeta_{\mathrm{K}}(2s)}$$

Por la formula de Stirling tenemos

$$\Gamma(\sigma+it) \sim \sqrt{2\pi}\ |t|^{\sigma-1/2}\ e^{-\pi|t|/2}$$

cuando $t \to \pm\infty$, uniformemente en bandas $\sigma_0 < \sigma < \sigma_1$. Luego

$$\frac{2^{r_2}\,\pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})^{r_1}\,\Gamma(2s-1)^{r_2}}{\sqrt{\mathrm{D}}\,\Gamma(s)^{r_1}\,\Gamma(2s)^{r_2}} \sim 2^{r_2}\,\pi^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{D}^{-\frac{1}{2}}\,|t|^{-\frac{r_1}{2}}\,|2t|^{-r_2}$$

cuando $t \to \pm\infty$

Por otro lado, como $\sigma = \Re(s) > \frac{1}{2}$, tenemos

$$\zeta_{\mathrm{K}}(2s-1) = \mathcal{O}(t^l)$$

para $l > \frac{n}{2} > \mu_{\mathrm{K}}(2\sigma - 1)$. Más a ún,

$$\frac{1}{\zeta_{\mathrm{K}}(2s)} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{\mathbb{N}(\mathfrak{a})^{2s}}$$

donde $\mu(\mathfrak{a})$ es la función de Moebius:

$$\begin{cases} 1 \text{ si } \mathfrak{a} \text{ se descompone como un producto par de primos distintos} \\ -1 \text{ si } \mathfrak{a} \text{ se descompone como un producto impar de primos distintos} \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto, existe $t_0 > 1$ tal que

$$|\phi(s)| < \frac{|t|^l}{|t|^{r_1/2}\,|2t|^{r_2}\,\zeta(2\sigma-1)} \tag{III.10}$$

Por lo tanto,

$$|\mathcal{M}(f,s)| \leq \frac{\beta_f(\sigma)}{s(s-1)}t^\epsilon$$

para alguna constante $b_f(\sigma)$ independiente de f. ■

Recordemos que dadas dos funciones f, g definidas en $\mathbb{R}$ y $g > 0$, escribimos

$$f(s) = o(g(x))$$

cuando x tiende a cero, si

$$\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0.$$

Teorema 9. *Sea* K *un campo de números algebraicos. Sea f una función en $\mathscr{M}$ de soporte compacto. Entonces*

$$m_q(f) = m(f) + o(q^{1/2-\epsilon}) \qquad (q \to 0)$$

para todo $0 < \epsilon < 1/2$.

Demostración. Sea $f \in C_c^\infty(\mathscr{M})$ una función diferenciable y de soporte compacto en $\mathscr{M}$. Entonces, la trasformada de Mellin

$$\mathcal{M}(f,s) = \int_{\mathscr{M}} \mathrm{E}(\mathbf{z},s)f(\mathbf{z})d\omega(\mathbf{z})$$

es holomorfa en la región

$$\Re(s) > \Theta := \frac{1}{2}\sup\{\Re(s) \mid \zeta_{\mathrm{K}}(s) = 0\}$$

excepto (posiblemente) por un polo simple en $s = 1$ con residuo

$$m(f) = \frac{1}{vol(\mathscr{M})}\int_{\mathscr{M}} f(\mathbf{z})dw(\mathbf{z}).$$

Como

$$\mathcal{M}(f,s) = \int_0^\infty m_q(f)q^{s-2}dq,$$

para $\Re(s) > 1$, por el teorema de inversión de Mellin tenemos

$$m_q(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \mathcal{M}_f(s)q^{1-s}ds. \tag{III.11}$$

Por la estimación del Lema 19 se sigue que la integral de la función $\mathcal{M}_f(s)q^{1-s}$, sobre la frontera de la banda vertical $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq \sigma \leq 2$, existe y por el teorema del residuo de Cauchy es igual a $m(f) = \mathcal{R}es_{s=1}(\mathcal{M}_f(s)q^{1-2})$. Esto es

$$m(f) = m_q(f) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f(\frac{1}{2}+\sigma_0+it)q^{\frac{1}{2}-\sigma_0}q^{-it}dt.$$

Ahora, la función $\mathcal{M}_f(\frac{1}{2}+\sigma_0+it)$ es integrable con respecto de la medida de Lebesgue unidimensional dt. Luego, por el teorema de Riemann-Lebesgue

$$\lim_{q\to 0}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f(\frac{1}{2}+\sigma_0+it)q^{it}dt\right| = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f(\frac{1}{2}+\sigma_0+it)q^{\frac{1}{2}-\sigma_0}q^{it}dt\right| &= q^{\frac{1}{2}-\sigma_0}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f(\frac{1}{2}+\sigma_0+it)q^{it}dt\right| \\ &= o(q^{\frac{1}{2}-\sigma_0}).\end{aligned}$$

Esto es

$$m_q(f) = m(f) + o(q^{1/2-\sigma_0}).$$

■

Lema 20. *Si la hipótesis de Riemann para la función zeta de Dedekind es cierta. Entonces para todo* $\frac{1}{4} < \sigma_0 < \frac{1}{2}$, *existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$|\mathcal{M}_f(s)| \leq \frac{\beta_f(\sigma)}{s(s-1)}, \quad |t| \geq t_0$$

para todo s *con* $\sigma_0 \leq \Re(s) \leq 2$ *y* $\Re(s) \neq 1/2$. *Donde* $\beta_f(\sigma)$ *es una constante que depende principalmente de* σ_0 *y de un número finito de derivadas de* f.

Demostración. Primero estimaremos

$$\phi(s) = \zeta_{\mathrm{K}}^{\star}(2s-1)/\zeta_{\mathrm{K}}^{\star}(2s)$$

en la región $\sigma_0 \leq \Re(s) \leq 2$, bajo la hipóteis de Riemann para la función zeta de Dedekind $\zeta_{\mathrm{K}}(s)$. Por la proposición 8, para todo $\epsilon > 0$,

$$\zeta_{\mathrm{K}}(2s)^{-1} = \mathcal{O}(t^{\epsilon}),$$

uniformemente en $\sigma_0 \leq \Re(s) \leq 2$. Por otro lado, para $l \geq n = \mu(-1/2)$, tenemos $\zeta(2s-1) = \mathcal{O}(t^l)$ uniformemente en la región $\sigma_0 \leq \Re(s) \leq 2$. Por lo tanto, por la fórmula de Stirling, se sigue

$$\phi(s) = \mathcal{O}(t^{n/2+\epsilon}),$$

para todo $\epsilon > 0$, uniformemente en $\sigma_0 \leq \Re(s) \leq 2$.

Luego, de manera análoga al Lema 19, se tiene que un número suficiente de derivadas de f, nos aseguran

$$|\mathcal{M}_f(s)| = \mathcal{O}\big(\,|s(s-1)|^{-1}\,\big) \qquad (|s| \to \infty)$$

para $\Re(s) \neq 1/2$ y uniformemente en $\sigma_0 \leq \Re(s) \leq 2$. ■

Teorema 10. *La hipótesis de Riemann para la función zeta de Dedekind* K *es cierta si y sólo si para toda función diferenciable f en $\mathscr{M}$ y de soporte compacto, tenemos*

$$m_q(f) = m(f) + o(q^{\frac{3}{4}-\epsilon}) \qquad (q \to 0)$$

para todo $0 < \epsilon < 1/4$.

Demostración. Si $m_q(f) = m(f) + \mathcal{O}(q^{\frac{3}{4}-\epsilon})$ para todo $\epsilon > 0$ y todas las funciones $f \in C_c^\infty(\mathscr{M})$, entonces $\mathcal{M}_f(s)$ es una función holomorfa (excepto por un polo en $s = 1$) en el hemiplano $\Re(s) > \frac{1}{4} + \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, por lo que la hipótesis de Riemann para1 el campo K es cierta. Para mostrar esta afirmación supongamos que $m_q(f) = m(f) + k(q)$, donde $k(q) = \mathcal{O}(q^{\frac{3}{4}-\epsilon})$ cuando $q \to 0$. Como existe A suficientemente grande tal que $m_q(f) = 0$ si $q > A$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f(s) &= \int_0^A m_q(f) q^{s-2} dq \\ &= \int_0^A (m(f) + k(q)) q^{s-2} dq \\ &= \frac{m(f)A^{s-1}}{s-1} + \int_0^A k(q) q^{s-2} dq \end{aligned} \qquad \text{(III.12)}$$

Luego, como $k(q) = \mathcal{O}(q^{\frac{3}{4}-\epsilon})$ la integral en el lado derecho de la ecuación III.12 converge absolutamente y uniformente en el hemiplano $\Re(s) > \frac{1}{4} + \epsilon$. Por el teorema de convergencia uniforme de Weistrass, tenemos que define una función holomorfa en esa región.

Sea $f \in C_c^\infty(\mathscr{M})$ una función diferenciable y de soporte compacto en $\mathscr{M}$. Supongamos que la función zeta de Dedekind K satisface la hipótesis de Riemann. Entonces, la trasformada de Mellin

$$\mathcal{M}(f,s) = \int_{\mathscr{M}} \mathrm{E}(\mathbf{z},s) f(\mathbf{z}) d\upsilon(\mathbf{z})$$

es holomorfa en la región

$$\Re(s) > \frac{1}{4}$$

excepto (posiblemente) por un polo $s = 1$ de residuo

$$m(f) = \frac{1}{vol(\mathscr{M})} \int_{\mathscr{M}} f(\mathbf{z}) d\upsilon(\mathbf{z}).$$

Por el teorema de inversión de Mellin tenemos

$$m_q(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \mathcal{M}_f(s) q^{1-s} ds. \tag{III.13}$$

Por las estimación del Lema 19, para todo $0 < \epsilon < 3/4$, la integral de la función $\mathcal{M}_f(s)q^{1-s}$, sobre la frontera de la banda vertical $\frac{1}{4} + \epsilon \leq \sigma \leq 2$, existe. Por el teorema del residuo esta integral es igual a $m(f) = \mathcal{R}es_{s=1}(\mathcal{M}_f(s))$ y

$$m_q(f) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f(\frac{1}{2} + it) q^{\frac{1}{2}} q^{-it} dt.$$

Luego,

$$m_q(f) = \mathcal{R}es_{s=1}(\mathcal{M}_f(s)) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f(\frac{1}{4} + \epsilon + it) q^{-it} q^{\frac{3}{4}-\epsilon} dt.$$

Nuevamente por el teorema de Riemann-Lebesgue :

$$m_y(f) = m(f) + o(q^{\frac{3}{4}-\epsilon}).$$

∎

Referencias

[Ahl81] L. Ahlfors. *Complex Variable*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981.

[Apo76] Tom. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag New York Inc., 1976.

[Bea83] Alan F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*. Springer Verlag, 1983.

[Bum96] Daniel Bump. *Automorphic Forms and Representations*. Cambridge University Press, Cambridge studies in advanced mathematics 55, 1996.

[Edw75] H.M Edwards. *Riemann's Zeta Funtion*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 1975.

[Efr87] I.Y. Efrat. *The Selberg trace formula for* $PSL(2,\mathbb{R})^n$. Memoirs of the America Mathematical Society ,Providence Rhode Island USA, 1987.

[EGM97] J. Elstrodt, F. Grunewald, and J. Mennicke. *Groups Acting on Hyperbolic Space*. Springer-Verlag, 1997.

[Fre80] Eberhard Freitag. *Hilbert Modular Forms*. Springer-Verlag, 1980.

[Hej] D. A. Hejhal. *The Selberg Trace Formula for* $PSL(2,\mathbb{R})$. Lectures Notes in Mathematics Springer- Verlag. Volume II, ?

[JL99] Jay Jorgenson and Serge Lang. Hilbert-Asai Eisenstein series, regularized products, and heat kernels. *Nagoya Math. J.*, 153:155–188, 1999.

[Kat04] Y. Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge Mathematical Library, Tercera Edición, 2004.

[Kub73] T. Kubota. *Elementary Theory of Eisenstein Series*. Kodansha LTD Japan Tokyo Halsted press USA, 1973.

[Lan94] Serge Lang. *Algebraic Number Theory.* Springer-Verlang. Segunda Edición, 1994.

[Lec06] David Lecomte. *Hidden funtional equations for Rankin-Selberg Integrals associated to real quaddratic fields.* Stanford university, 2006.

[MBB00] Matthias Mayer M. Bachir Bekka. *Ergodic Theory and Topological Dyanamics of Group Actions on Homogeneous Spaces.* London Mathematical Society, Lecture Note Series 269, 2000.

[Mon03] J. M. Montesinos. *Calidoscopios y 3-Variedades.* Universidad Nacional de Colombia, 2003.

[Nar04] Wladylaw Narkiewicz. *Elementary ana Analytic Theory of algebraic Numbers.* Springer-Verlag, 2004.

[Neu99] Jürgen Neukirch. *Algebraic Number Theory.* A series of comprensive studies in Mathematics. Vol. 322. Springer, 1999.

[Rie59] B. Riemann. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer Gegebenen Grösse. *Monastber. der Preuss. Acad. Wiss.*, November 1859.

[Sar80] P. Sarnak. Asymptotic behaviour of periodic orbits of the horocycle flow and Eisenstein series. *Comm. in Pure and App. Math. 34*, 1980. 719-739.

[Sel] A. Selberg. *Collected papers.* Springer- Verlag, Volume I.

[Sie61] C. Siegel. *Lectures notes on Advanced Analytic Number Theory.* Tata Institute, Bombay, 1961.

[Sor02] C. M. Sorensen. Fourier expansion of eisenstein series on the hilbert modular group and hilbert class fields. *Transactions of the American Mathematical Society*, 354, 2002. 4847-4869.

[Thu80] W. P. Thurston. *Geometry and Topology of Three-Manifolds.* Lectures Notes. Princeton University, 1980.

[Tit88] E.C. Titchmarsh. *The theory of Riemann Zeta-Funtion.* Oxford Univ. Press, London, 1988.

[vdG88] G. van der Geer. *Hilbert Modular Surfaces.* Springer-Verlag, 1988.

[Ver92] A. Verjovsky. Arithmetic, geometry and dynamics in the modular orbifold. *Dynamical Systems (Santiago de Chile 1990)(Pitman Series 285) ,R Bamon, R. Labarca,J. Lewowicz, J.Palis,Longman, Essex, UK*, 1992. 263-298.

[Ver94] A. Verjovsky. Discrete measures and the Riemann hypothesis. *Kodai Math J., 17*, 1994. 596-608.

[Wen06] Lin Weng. A rank two zetas and its zeroes. *Ramanujan Juornal*, I, 2006. 1-62.

[Zag79] D. Zagier. Eisenstein series and the Riemann zeta function. *Automorphic Forms, Representation theory and Arithmetic, Tata Institute of Fundamental Reserch, Bombay*, 1979. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,1981, 275-301.

[Zag92] D. Zagier. Introduction to modular forms. *From number theory to physics, Eds M.Waldshmidt, P.Moussa, J.-M. Luck and C.Itzykson. Springer*, 1992. 238-291.