



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**“HOMOGENIZACIÓN DE UN CRISTAL FOTÓNICO  
QUIRAL”**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**F Í S I C O**

**P R E S E N T A:**

**NÉSTOR JORGE MIGUEL COTZOMI GUERRERO**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES  
2012**

# Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombre(s) Teléfono Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Carrera Número de cuenta	1. Datos del alumno Cotzomi Guerrero Néstor Jorge Miguel 5518369990 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 099063580
2. Datos del tutor Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	2. Datos del tutor Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes
3. Datos del sinodal 1 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	3. Datos del sinodal 1 Dr. Carlos Ignacio Mendoza Ruiz
4. Datos del sinodal 2 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	4. Datos del sinodal 2 Dra. Karen Patricia Volke Sepúlveda
5. Datos del sinodal 3 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	5. Datos del sinodal 3 Dr. Jesús Flores Mijangos
6. Datos del sinodal 4 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	6. Datos del sinodal 4 M. en C. Mirna Villavicencio Torres
7. Datos del trabajo escrito Título Subtítulo  Número de páginas Año	7. Datos del trabajo escrito Homogenización de un Cristal Fotónico Quiral  62 páginas 2012

# Agradecimientos

*Agradezco de la manera más atenta a mi asesor, el Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes, por darme las atenciones necesarias para llevar a cabo este trabajo. Por su paciencia, comprensión, enseñanzas y, además, por la convivencia que tuvimos durante la elaboración de la tesis. Muchas Gracias.*

*Agradezco a los miembros del comité tutorial: Dr. Carlos Ignacio Mendoza Ruiz, Dra. Karen Patricia Volke Sepúlveda, Dr. Jesús Flores Mijangos y M. en C. Mirna Villavicencio Torres por las valiosas contribuciones que hicieron al trabajo final y por el tiempo que dedicaron para revisarlo, aún a pesar de tantas actividades que los ocupan. Gracias.*

*Al Instituto en Investigación de Materiales y a la DGAPA por el apoyo económico brindado para la realización de este trabajo a través del proyecto "Autoensamblado y reología de suspensiones coloidales y fotónica basada en cristales líquidos" PAPIIT IN115010, dirigido por el Dr. Carlos Ignacio Mendoza Ruiz.*

*A Dios por iluminarme y el guiarme durante este tiempo en la universidad, porque sin tu bondad y misericordia no hubiera podido salir de momentos difíciles, por darme el privilegio de tener a mis padres y hermanos a mi lado, se que siempre podré contar contigo en los proyectos futuros por lo cual nunca me apartaré de ti.*

*Quiero agradecer y dedicar este trabajo a mis padres, porque creyeron en mí y porque me sacaron adelante, porque en gran parte gracias a ustedes, hoy puedo ver alcanzada mi meta. Rocío y Silvano va por ustedes, por lo que valen, porque admiro su fortaleza y por lo que han hecho de mí, espero no defraudarlos y contar siempre con su valioso apoyo, sincero e incondicional. También le dedico este trabajo a mi sobrina, Ame tal vez no entiendas todavía muchas cosas pero has sido un motivación importante para dar mi último esfuerzo y terminar esta tesis.*

*Otra mención es para aquellas personas que durante mi camino me brindaron su amistad y apoyo, a mis amigos del CCH Oriente quienes fueron los primeros en aceptarme tal y como soy, siempre estarán en mí mente. A mis compañeros de la FES Cuautitlán por ese año tan especial que viví y a pesar de que fue poco el tiempo que convivimos valoro cada momento que pase allá.*

*A todos mis amigos y compañeros de la carrera: Ulises, Fernando, Adriana, Arturo, Guillermo, Delia, Iván, Gabriela, Jacqueline, Itzel, Kiyoshi, Romeo, Roxana, Zulema, Andrómeda con ustedes he disfrutado muchas experiencias, gracias por su amistad y por*

la ayuda cuando en ocasiones me he sentido perdido. Siempre los llevaré en mi mente y corazón.

Nohemí, eres una mujer muy especial, he disfrutado mucho los momentos felices que pasamos juntos durante la universidad, gracias por tu apoyo y consejos en todo momento, por los regaños que bien merecidos me das cuando me equivoco y por ser parte de mi sueños y alegrías. Me siento orgulloso de ti, te amo mucho.

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme brindado grandes oportunidades. Esta maravillosa Universidad me representa educación, orgullo, valores, pasión, entrega, disciplina y compromiso, la considero como la institución más seria y confiable del país. ¡Muchas gracias, querida UNAM!

!GOYA¡ !GOYA¡  
!CACHUN, CACHUN, RA, RA¡  
!CACHUN, CACHUN, RA, RA¡  
!GOYA¡  
!UNIVERSIDAD¡

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>II</b>
<b>1. Mesofases</b>	<b>1</b>
1.1. Nemáticos . . . . .	1
1.2. Colestéricos . . . . .	3
<b>2. Cristales</b>	<b>9</b>
2.1. Cristales Fotónicos . . . . .	9
2.1.1. Cristales Fotónicos en el límite de longitud de onda larga . . . . .	10
2.1.2. Metamateriales . . . . .	11
<b>3. Propagación de ondas en algunos medios materiales</b>	<b>17</b>
3.0.3. Ecuación de Continuidad . . . . .	18
3.1. Ecuaciones de Maxwell en el Vacío . . . . .	18
3.1.1. Ecuación de Onda del Vacío . . . . .	19
3.2. Ecuaciones de Maxwell en medios materiales . . . . .	19
3.2.1. Ecuación de Onda en un medio material homogéneo y conductor . . . . .	19
3.2.2. Solución de la Ecuación de Onda en un medio homogéneo e isotrópico . . . . .	21
3.2.3. Conservación de la energía . . . . .	22
3.3. Propagación de una onda en medios inhomogéneos y anisotrópicos . . . . .	25
3.3.1. Cristales Líquidos Colestéricos . . . . .	25
<b>4. Promediación de propiedades electromagnéticas</b>	<b>34</b>
4.1. Ecuaciones Básicas . . . . .	34
4.2. Medios dieléctrico y magnético . . . . .	39
4.2.1. Cristal líquido colestérico quiral . . . . .	41
<b>5. Discusión y Conclusiones</b>	<b>48</b>
<b>A. Medios dieléctrico y magnético</b>	<b>50</b>
<b>B. Cristal líquido colestérico quiral</b>	<b>56</b>
B.1. Tensor efectivo del material . . . . .	59
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

# Introducción

El estudio, propuesta y diseño de nuevos materiales en la última década con propiedades ópticas novedosas ha permitido crear o al menos proponer diversos dispositivos para controlar el flujo de la luz con el fin de utilizarlos en aplicaciones abocadas tanto en la industria de telecomunicaciones como en aplicaciones biomédicas. Desde 1954 Tellegen consideró una generalización de las ecuaciones constitutivas para describir medios con respuesta lineal, hoy en día conocidos como medios bianisotrópicos. Estos sistemas son tales que el vector de desplazamiento no sólo es generado por campos eléctricos sino también por campos de inducción magnética. Asimismo, los campos de intensidad magnética son producidos tanto por campos de inducción magnética como por campos eléctricos. De esta forma para caracterizar un medio bianisotrópico no sólo basta con conocer los tensores de permitividad dieléctrica y de permeabilidad magnética sino que además es necesario determinar dos tensores más conocidos como tensores electromagnéticos que establecen nuevas correlaciones entre campos eléctricos y magnéticos. Es conveniente mencionar que este tipo de relación constitutiva es equivalente, a orden lineal, a una relación constitutiva en la que por ejemplo el campo de desplazamiento no sólo dependa del valor del campo eléctrico sino que también de sus derivadas locales. Es decir, será indispensable conocer el valor del campo eléctrico en al menos dos puntos lo cual manifiesta la no localidad de esta relación constitutiva. Si en cambio, tomamos la transformada de Fourier de la relación constitutiva mencionada obtenemos una expresión que depende explícitamente del vector de onda lo cual exhibe directamente la dispersión espacial de este tipo de medio. Posteriormente, Van Vleck en 1965 utilizando argumentos de la mecánica cuántica mostró que es imposible tener medios bianisotrópicos, sin embargo la idea de crear artificialmente estos medios fue retomada a finales de los años 90 utilizando para ello sistemas compuestos y artificiales formados por estructuras periódicas de longitudes características espaciales mucho menores que la longitud de onda de la señal propagante en el medio. Volveremos a este punto más adelante.

A finales de los años 60's el científico ruso Victor Veselago fue el primero en suponer la existencia de un material con índice de refracción negativo. En particular, mostro que si la permitividad dieléctrica y la permeabilidad magnética son negativas esto implica un índice de refracción negativo y un velocidad de fase en dirección opuesta a la dirección de la velocidad de grupo y la densidad de energía[1]. Sin embargo, no consiguió encontrar nada que poseyera las propiedades electromagnéticas necesarias, haciendo que sus ideas fueran cayendo en el olvido.

En el año 2001 Pendry propuso la construcción de una lente perfecta basada en la unión de una capa de dieléctrico común con otra de un medio hoy conocido como metamaterial, cuya permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética son negativas simultáneamente. Dicha lente es perfecta en el sentido de que su resolución mínima no está limitada por el valor de la longitud de onda de la luz debido a que la imagen resulta formarse a través de la superposición de ondas electromagnéticas

evanescentes. Los metamateriales son también conocidos como materiales izquierdos ya que la simple refracción de una onda plana proveniente de un dieléctrico común a través de una frontera plana con un metamaterial da lugar a una refracción cuyo ángulo de refracción es el negativo del que se tendría en un dieléctrico ordinario. Otra propiedad peculiar de los metamateriales es el hecho de que la energía electromagnética en ellos, se propaga en dirección antiparalela al vector de onda dando lugar con ello a que al propagarse una señal, en estos medios, su fase y camino óptico disminuya en lugar de aumentar. Aprovechando esta propiedad ciertos autores han propuesto la construcción de un dispositivo completamente invisible en el que se combinan de forma adecuada un metamaterial con un medio ordinario. En base a estos medios se han propuesto en la última década muchos y muy diversos dispositivos con propiedades únicas con un gran potencial de aplicabilidad en variados ámbitos científicos y tecnológicos.

Entre la gran variedad de materiales considerados en la literatura científica actual es conveniente reseñar a los materiales cuyas propiedades ópticas pueden ser periódicas en una, dos o tres dimensiones, los cuales son denominados hoy en día, en general como cristales fotónicos que han sido el motivo de una ardua investigación reciente. Conceptualmente se conciben en analogía con los sólidos cristalinos en donde la luz (fotones) asume el lugar de los electrones de valencia al propagarse por la retícula de átomos ionizados estructurados en alguna de las redes de Bravais que formalmente constituye a un cristal. Esta conformación de los cristales sólidos genera la aparición de una estructura de bandas para cada electrón de valencia, en el límite en el que no interacciona con otros electrones, en la que los niveles energéticos individuales característicos de sistemas atómicos aislados se agrupan apretadamente para formar bandas de energía permitidas separadas por brechas o bandas prohibidas. Los cristales fotónicos exhiben también una estructura de bandas a pesar de que sus estructuras no necesariamente adquieren alguna de las redes de Bravais y de que su periodicidad se puede limitar a solo ser bidimensional o unidimensional. Evidentemente, en este caso las bandas de energía serán proporcionales a la frecuencia de los fotones por lo que la luz estará condicionada a propagarse, o no, en estos medios con base a su frecuencia. La investigación actual en materia de cristales fotónicos los señalan como una forma alternativa y más rápida de transmisión de información[2].

Un sistema particular de cristal fotónico unidimensional lo constituyen los cristales líquidos colestéricos, en los cuales el eje uniaxial del tensor dieléctrico local o director del material gira uniformemente en torno a una dirección fija mientras va avanzando a lo largo de esta misma dirección; formando un arreglo periódico que da lugar a una hélice que puede ser de lateralidad derecha o izquierda. Estos materiales existen en la naturaleza y un ejemplo de ellos es el muy mencionado colesterol benzoato que está presente en la sangre. Los colestéricos presentan una estructura de bandas sencilla en la que aparece una brecha parcial en un intervalo de frecuencias para cuando la lateralidad de la polarización circular de la luz coincide con la de la hélice. En tal intervalo, el cristal líquido se comporta como un filtro polarizador circular que sólo transmite luz de cierta polarización circular, digamos, derecha (izquierda) mientras que refleja totalmente la luz polarizada izquierda (derecha). Fuera de dicho intervalo y para longitudes de onda más cortas que el periodo espacial de la hélice, el vector de polarización lineal de luz que se propaga, gira siguiendo la helicidad del cristal líquido de tal forma que al emerger de una capa de este material, ha cambiado la dirección de su polarización. Este fenómeno, conocido como actividad óptica, es exhibido también por una solución de azúcar diluida pero para el caso del colestérico el poder rotatorio del sistema es gigantesco porque puede producir la rotación de algunos radianes en el vector de polarización de la luz en una capa de material de tan solo media micra de espesor.

Como mencionamos arriba, es posible construir metamateriales o medios bianisotrópicos tomando

ventaja del hecho de que la luz cuya longitud de onda es suficientemente larga no alcanza a discernir los detalles finos estructurales de arreglos cuyas dimensiones espaciales típicas son menores que la longitud de onda. Por tanto, en lugar de utilizar valores locales tanto para el tensor de permitividad dieléctrica como para el tensor de permeabilidad magnética será necesario definir valores únicos efectivos de los mismos, válidos para todo el material; a pesar de que internamente el medio es intrínsecamente inhomogéneo. Este procedimiento se efectúa utilizando una teoría de promediación u homogenización. En esta tesis revisaremos una teoría de promediación basada en un desarrollo en ondas de Bloch de la solución de las ecuaciones de Maxwell para un medio periódico general que satisface las ecuaciones constitutivas de Tellegen para posteriormente aplicar dicho formalismo a un cristal líquido colestérico y con ello obtener los valores efectivos de sus tensores dieléctrico y magnético.

El objetivo central de esta tesis es calcular los tensores efectivos de permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética de un cristal líquido colestérico en el límite de longitud de onda muy larga utilizando una teoría de promediación espectral (espacio de Fourier) a segundo orden basada en un desarrollo de ondas de Bloch de las ecuaciones de Maxwell e indagar la posibilidad de encontrar regiones de frecuencia en donde estas propiedades puedan ser simultáneamente negativas. Si esto se logra se habrá propuesto un metamaterial cuya estructura interna es la de un cristal líquido colestérico. La semblanza de este trabajo es la siguiente. En el capítulo dos daremos una revisión de lo que son los cristales, concretamente de los cristales fotónicos y sus posibles aplicaciones en la fabricación de metamateriales, discutiendo algunos aspectos de éstos. En el capítulo tres revisaremos la propagación de ondas electromagnéticas en diversos medios partiendo de sus ecuaciones constitutivas, comenzaremos con medios isotrópicos y homogéneos como el vacío. Finalmente estudiaremos un medio estratificado uniaxial particularizando para el caso de un cristal líquido colestérico y calcularemos su estructura de bandas para el caso de incidencia normal. En el capítulo cuatro construiremos una teoría de promediación para cristales fotónicos desarrollando la solución de las ecuaciones de Maxwell en series de Fourier y restringiremos nuestro modelo a una aproximación que tome en cuenta el esparcimiento de hasta dos fotones. Aplicaremos el formalismo de homogenización encontrado para calcular los elementos de los tensores efectivos dieléctrico y magnético de un cristal líquido colestérico como función de la frecuencia de la onda propagante. En el capítulo cinco discutiremos nuestros resultados y esgrimiremos nuestras conclusiones.



# Capítulo 1

## Mesofases

Sólidos, líquidos y gases son los estados más comunes de la materia, pero no son los únicos. Los científicos hacen uso de la palabra fase (Fig.(1.1)) para describir un estado de equilibrio específico de la materia. Existe un cambio de fase el cual se produce a una temperatura precisa, se dice que una transición de fase ocurre a esa temperatura. Algunos de los cambios importantes que tiene lugar en una transición de fase es la cantidad de orden entre las moléculas de la sustancia[3]

Las moléculas en la fase de cristal líquido son libres de moverse en la mayor parte de ésta, además tienden a permanecer orientadas en una dirección determinada. Esta característica es muy diferente a lo que sucede en un sólido o en un líquido, por lo tanto, se requiere denotar a esta condición como una nueva fase o estado de la materia.

### 1.1. Nemáticos

Los nemáticos<sup>1</sup>, denotados por  $N$ , son fases ópticamente uniaxiales[4]. Sus principales características se resumen en los siguientes puntos:

1. Una propiedad de la fase nemática es que realmente fluye y presenta la apariencia macroscópica de un líquido debido a que presenta un desorden posicional.
2. Existe un cierto orden en la dirección de las moléculas, pues tienden a estar dirigidas hacia un eje común, llamado vector director  $\hat{n} : R^3 \rightarrow R^3$ , (Fig.(1.2)). Ópticamente, un nemático es un medio uniaxial con el eje óptico a lo largo del director[5].
3. La dirección de  $\hat{n}$  es arbitraria en el espacio[5], además de ser un eje de simetría de rotación continua. Lo complicado consiste en definir inequívocamente una dirección adecuada en cada molécula. Sin embargo, el proceso tiene sentido, por la razón de que  $\hat{n}$  es definido experimentalmente. Los vectores  $\hat{n}$  y  $-\hat{n}$  son equivalentes.
4. Las fases nemáticas sólo se producen con materiales que no hacen distinción entre derecha e izquierda. Es decir, que son invariantes ante una reflexión especular, ya que se pueden superponer con su reflejo.

---

<sup>1</sup>La palabra "nematic" fue inventada por G. Friedel[5], haciendo referencia a la fase de un cristal líquido.

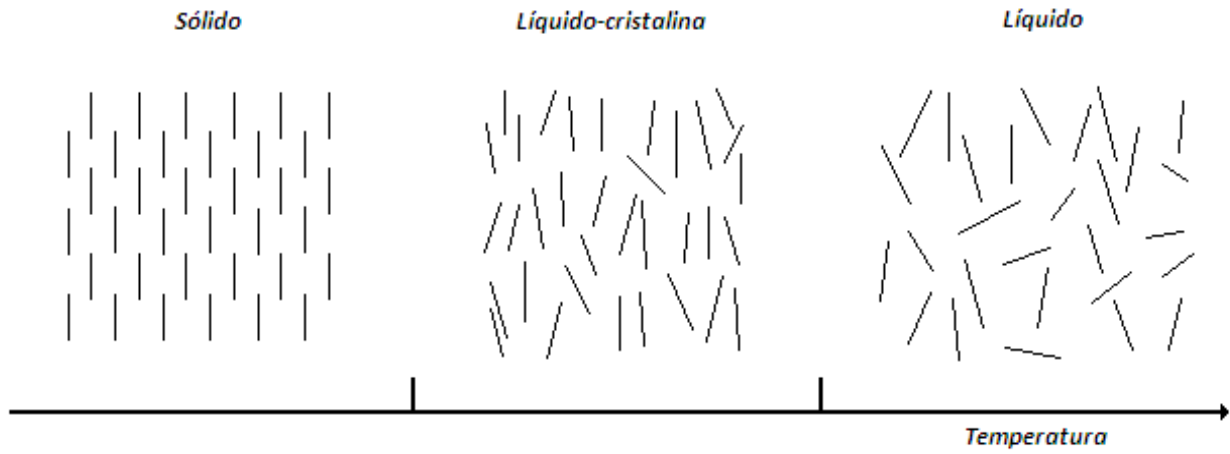


Figura 1.1: Ilustración esquemática de las fases sólida, líquido-cristalina y líquida[3].

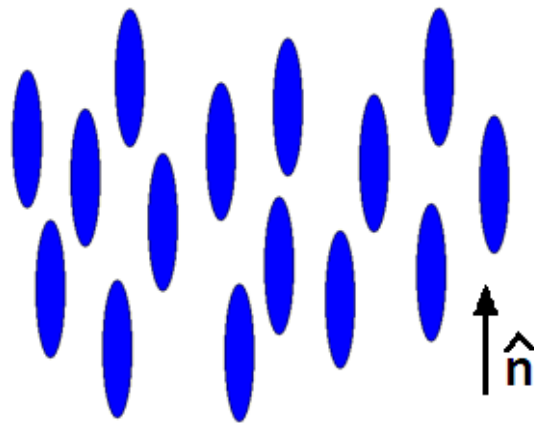


Figura 1.2: Capa Nemática. Arreglo de moléculas parecidas a una barra en la mesofase nemática.

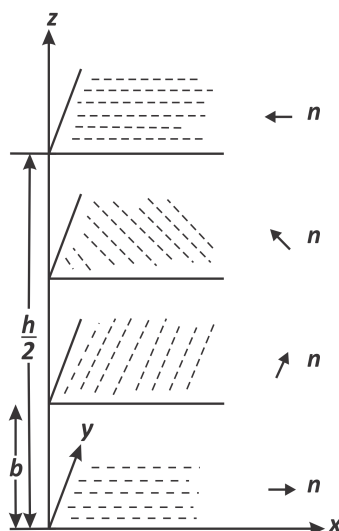


Figura 1.3: Mesofase colestérica. Se representa como una pila de capas nematicas[6].

## 1.2. Colestéricos

De los primeros cristales líquidos en estudiarse fueron los éteres de la colestestina. Su comportamiento al variar la temperatura no se parecía a nada de lo conocido, podría decirse que presentan una conducta combinada de sólidos y líquidos. Hoy en día se denominan colestéricos.

Por su estructura, los colestéricos constan de una cantidad grande de capas nematicas. La distancia entre las capas vecinas, que llamamos "b", es aproximadamente del orden de nanómetros. Otra característica de estos cristales es que los ejes ópticos de estas capas tienen un giro en cierto ángulo<sup>2</sup>.

Si nos movemos a lo largo del eje z, luego de un número de capas de  $\frac{180^\circ}{\alpha}$ , su orientación es la misma que en la primera capa. La magnitud  $h$  es una distancia denominada como paso de la espiral o de la hélice (Fig.(1.3)) que forman en el espacio los extremos de las moléculas que yacen en las capas sucesivas[6]. Donde  $h = \left(\frac{360^\circ}{\alpha}\right) b$  ( $b$  es la distancia entre capas vecinas y tiene dimensiones de nanómetros), dentro de la cual las moléculas se dan la vuelta en el espacio en  $360^\circ$ , es el doble del período de una red peculiar[6]. El ángulo  $\alpha$  constituye la centésima parte de una revolución completa ( $360^\circ$ ), o sea, cerca de  $1^\circ$ .

En la red periódica del colestérico (la espiral colestérica) existe una estricta alternación de la orientación de las moléculas. Sin embargo, en cada capa nematica las moléculas pueden cambiar de posición y desplazarse libremente a lo largo de los planos, sin destruir casi la espiral, las moléculas pueden saltar de capa en capa, pero esto no es tan fácil.

Las particularidades de la estructura de los colestéricos se observan con más intensidad al variar la temperatura de la sustancia y bajo influencias externas, ejemplo de ello podría ser la radiación

<sup>2</sup>entre dos capas vecinas dicho ángulo es una magnitud pequeña  $\alpha = 0,5^\circ$

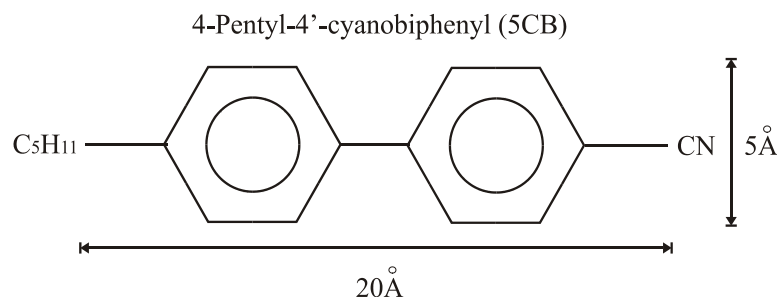


Figura 1.4: Molécula 4-Pentyl-4'-cyanobiphenyl. Este tipo de moléculas tienen un tamaño de 20 a  $\sim 30\text{Å}$

ultravioleta, neutrónica y otras que puedan modificar la estructura de las moléculas. La espiral colestérica demuestra toda la gama de colores sensibles a los más pequeños deterioros de esta red peculiar. Esto ejemplifica el permanente interés en el estudio y empleo de los cristales líquidos colestéricos.

En la naturaleza las moléculas pueden ser especularmente simétricas y asimétricas. Por ejemplo, las moléculas del nemático son especularmente simétricas[6]. La mayoría de los cristales sólidos no poseen simetría especular, es decir, existen bien en la forma derecha como en la forma izquierda, aún así existen excepciones.

La obtención de moléculas derechas e izquierdas en cantidades necesarias para la ciencia fue una de las aportaciones hechas por los químicos. Lo malo es que los cristales líquidos no se encuentran con tanta frecuencia en la naturaleza. De hecho, los cristales líquidos constan de moléculas orgánicas (compuestos de carbono, hidrógeno, oxígeno, nitrógeno y otros). Entre los compuestos inorgánicos no se han encontrado cristales líquidos, de todas formas, en principio, no se excluyen.

Con la ayuda de la síntesis química se obtiene el compuesto necesario para dar paso a la creación del cristal líquido. Pero esto dista de ser tan simple. Para llevar a cabo la sintetización de los cristales líquidos, con frecuencia hace falta realizar de 15 a 20 etapas químicas intermedias, sin contar la purificación y los posteriores análisis.

Al hablar de los cristales líquidos, podemos decir que las moléculas que los componen son bastante complejas. Por ejemplo la molécula 4-Metoxi-benciliden-4'-butilnilina (MBBA[6]), relativamente sencilla, hay 18 átomos de carbono, 21 átomos de hidrógeno y un átomo de oxígeno, otro ejemplo es la molécula 4-Pentyl-4'-cyanobiphenyl (5CB[6]) (Fig.(1.4)).

Si queremos un cristal líquido con estructura espiral, tenemos que examinar las peculiaridades de la síntesis de las moléculas especularmente asimétricas. Sucede que las moléculas derechas e izquierdas forman sus propios cristales con una geometría diferente, si sólo queremos una de las dos moléculas pueden emplearse tres métodos. La síntesis de las moléculas complejas que no poseen simetría especular se lleva a cabo más a menudo, partiendo de las simples moléculas-semiproductos derechas e izquierdas[6]. La relación que existe entre las moléculas de los colestéricos y nemáticos es que ambas tienen grandes sectores planos hacia una sola dirección pero la molécula del colestérico además tiene un sector en forma de espiral. He aquí la diferencia del colestérico con el nemático.

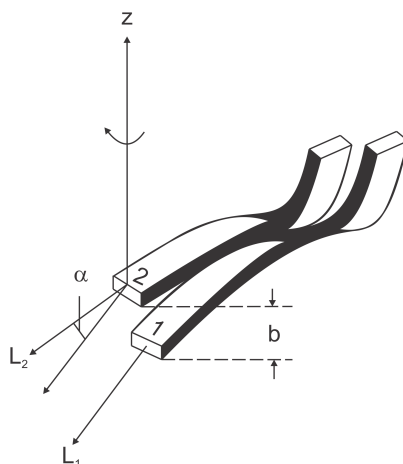


Figura 1.5: Colocación de las moléculas espirales en las capas nemáticas vecinas.

Tanto las moléculas derechas como las izquierdas, forman en el espacio, una espiral del colestérico, llamada "orientación twist"<sup>3</sup>. La estructura laminar<sup>4</sup> del colestérico surge en la sustancia misma sin necesidad de agentes externos. En otro tipo de cultivos de cristales sólidos, los defectos que pudieran caracterizarlos, ocurren por defectos de la misma red cristalina u otros factores.

La forma alargada de las moléculas permite agruparlas paralelamente, obteniendo una capa fina. Ajustando una molécula de la otra se tiene el balance de las fuerzas que actúan sobre ellas[6]. Es posible colocar otra capa nemática, teniendo cada capa su propio eje óptico ( $L_1$  y  $L_2$ ). Las moléculas de ambas capas están paralelas colocadas a una distancia, como se muestra en la Fig.(1.5), que es aproximadamente igual a la suma del grosor de la primera capa y la altura del saliente espiral de la otra. Concluyendo, los vectores  $L_1$  y  $L_2$  forman un ángulo pequeño  $\alpha$  (Fig.(1.5)), para lograr un equilibrio de las fuerzas y al mismo tiempo las moléculas obtienen una libertad determinada para sus giros. Otro parámetro importante del colestérico es el paso de la hélice (o paso de la espiral)  $h$ , entonces las magnitudes  $\alpha$  y  $h$ , son los parámetros de la sustancia que consta de moléculas concretas[6].

Si el cristal líquido colestérico se ve sometido a radiación intensa, las moléculas del colestérico pierden sus propiedades espirales. Por tal motivo, el ángulo  $\alpha$  se va haciendo menor y el paso de la hélice  $h$  más grande. La manera en como varía el paso de la espiral nos lo da la luz polarizada que pasa por una película colestérica. Una de las propiedades más impresionantes es el giro de la polarización de la luz a medida de su paso en el grosor de la película[6].

En el siglo XIX se descubrió el giro de la polarización de la luz en el cuarzo. Dicho fenómeno consiste en que la luz, al ser polarizada en una dirección, al atravesar el cristal a lo largo del eje del tornillo, es polarizada en otra dirección, formando un ángulo  $\varphi$  con respecto a la dirección original. El ángulo  $\varphi$  es directamente proporcional al grosor del cristal[6].

<sup>3</sup>Def. Torsión

<sup>4</sup>de capas

Se fabrican colestéricos con un gran paso de espiral para fines científicos y prácticos. Si la luz incide perpendicularmente, ésta se encontrará polarizada a lo largo del eje óptico del colestérico. La forma de propagación de la luz es el resultado de la interferencia entre la onda incidente y la onda emitida por los electrones de las moléculas bajo la acción del campo de la onda primaria[6]. En el caso de que la longitud de onda de la luz sea menor al tamaño del paso de la espiral del colestérico, la concordancia de la propagación de las ondas primarias y secundarias corresponde de hecho al giro del campo  $\vec{E}$  en el rayo que atraviesa la capa[6]. De este modo, la luz está polarizada linealmente en la misma dirección que el eje óptico en la superficie inferior de la película.

Si ahora la longitud de onda es mayor que el paso de la espiral, no es necesario descomponer al campo  $\vec{E}$  en dos componentes (paralela y perpendicular), ya que existen una cantidad inmensa de ejes ópticos, con diferente dirección, sin poder hacer una elección por alguno. La manera que se pueda emplear para polarizar los rayos serían los giros del vector del campo eléctrico alrededor del eje de la espiral colestérica bien de modo dextrógiro, o bien levógiro, correspondientes a un cuadro de la posición instantánea del vector  $\vec{E}$  en el eje de los rayos luminosos[6]. Solo semejantes movimientos del vector  $\vec{E}$  en el siguiente momento hacen que la luz llegue al nuevo punto con la dirección que  $\vec{E}$  ha tenido en el punto anterior[6]. El resultado de la interferencia de las ondas primaria y secundaria determina la velocidad de la luz en el medio.

La disparidad de las velocidades de las ondas con diferente polarización se hace más evidente si la diferencia entre el paso de la espiral y la longitud de la onda luminosa es poca. Lo antes mencionado hace ver la importancia del giro de la polarización lineal de la luz al salir de la película del colestérico[6]. Si tenemos que el paso de la espiral es pequeño (i.e., la diferencia entre las velocidades de los rayos que atraviesan la película), al salir de la película, los vectores del campo girarán a los rayos en sentido dextrógiro y levógiro en un ángulo aproximadamente igual[6].

Por eso, la suma vectorial de los campos que nos dará de nuevo una luz polarizada, estará girada con respecto de la polarización de entrada, en un ángulo pequeño  $\varphi$ . En el otro caso, si el paso de la espiral y la diferencia en la velocidad de los rayos resultan ser grandes, los campos a la salida del colestérico girarán en sentido dextrógiro y levógiro en ángulos diferentes. Por lo tanto, su suma vectorial<sup>5</sup> dará un giro con respecto de la polarización a la entrada de un ángulo notorio  $\varphi_2$ . Las longitudes de las ondas de la luz visible son comparables con el paso de los colestéricos.

El fenómeno del giro de la polarización de la luz (Fig.(1.6)) se denomina actividad óptica de la sustancia[6]. El fenómeno es extremadamente sensible a las mínimas modificaciones en la estructura de la sustancia y las interacciones de las moléculas, permitiendo obtener información de las posiciones de las moléculas. Y en los cristales líquidos colestéricos hay una gran actividad óptica, que sirve en varias ramas de la ciencia.

En el colestérico otra propiedad característica es la reflexión selectiva de la luz, muy relacionada con la actividad óptica de éste. Debido a que el colestérico refleja la luz con una longitud de onda escogida, del tamaño del paso  $h$  de la espiral colestérica. Por tal motivo es muy interesante su comprensión.

Sabemos que el rayo de luz no sólo atraviesa la película en dos rayos de distinta polarización circular, sino también es reflejado de la película a merced de la interferencia de las ondas secundarias. Por ejemplo, si un rayo incide sobre una espiral colestérica derecha, con una longitud de onda igual

---

<sup>5</sup>polarización a la salida

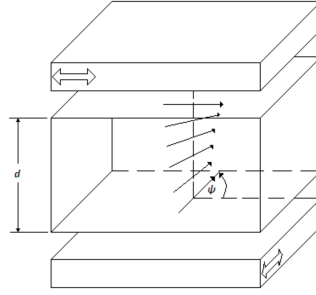


Figura 1.6: Giro de la polarización de la luz, al atravesar el rayo una capa del colestérico con un paso muy grande de la espiral[6].

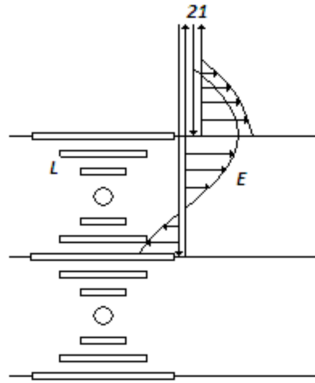


Figura 1.7: La reflexión selectiva surge al coincidir la longitud de la onda luminosa con el paso de la espiral del colestérico[6].

al tamaño del paso de la espiral, ¿qué pasaría cuando la onda de polarización es izquierda (i.e.,  $\vec{E}$  gira en sentido dextrógiro alrededor del eje del colestérico)? Podría suceder que el campo  $\vec{E}$  coincida con el eje óptico del colestérico en dirección, mientras más se adentra la onda en la película el vector  $\vec{E}$  en cada punto nuevo resultará girado en un mismo ángulo que el eje óptico del colestérico[6]. Esta similitud permite el paso libre de la luz en la película. Esta película tiene una pila de capas totalmente iguales, de grosor  $\frac{h}{2}$ . Y el eje óptico de la película gira  $180^\circ$  a una distancia  $\frac{h}{2}$  sobre la espiral del colestérico. Esto significa el regreso a su anterior orientación.

Cuando el paso de la espiral del colestérico es igual a la longitud de onda de la luz incidente, el grosor de semejante película es exactamente igual a la mitad de la longitud de onda, como se ve en la Fig.(1.7).

Es importante señalar que la interferencia de los rayos incidentes resulta en una amplificación de la luz reflejada, por ser la suma del campo  $\vec{E}$  de cada una de las ondas. Si la luz natural incide sobre

un colestérico, con cualquier polarización y cualquier longitud de onda, solo se verá reflejada por el colestérico aquella que cumpla todas las condiciones indispensables.

La mayor parte de los colestéricos reflejan la luz visible[6]. El tener un conjunto de colestéricos con diferentes pasos de las espirales nos ponen a disposición una gama de juego de colores.

Ahora es claro que en los colestéricos es posible dar orientación de los ejes ópticos a partir de un campo eléctrico, sin afectar a las moléculas, por tanto puede variar la espiral espacial del modo deseable, incluso desenrollarla, haciendo el paso tan grande como se desee. Aplicando el campo eléctrico  $\vec{E}$  perpendicularmente al eje del tornillo, obligaremos a las moléculas girar, con cierta polarización, a lo largo de los ejes, así que todas ellas, sin excepción alguna, se acomoden paralelamente al campo[6]. Transformando el colestérico a un nemático.

Otra característica del colestérico es la variación del color en función de la temperatura. El color de la película del colestérico depende de la temperatura en el mismo grado que el paso de la espiral es sensible al calentamiento o enfriamiento[6]. Al someter una película colestérica a temperatura alta, ésta se pondrá azul, y al bajar la temperatura comienza a adquirir un color rojo. Lo que nos sugiere que al enfriar el colestérico el paso de la espiral crece, y al calentarlo, disminuye. Entonces al variar la temperatura del colestérico, unos cuantos grados, surge una modificación, de varios centenares de nanómetros, del paso de la espiral, la cual haría que la película pueda adquirir todos los colores del arco iris.

En resumen, los estados comunes de la materia son: sólido, líquido y gaseoso, aunque no son los únicos. Se emplea la palabra fase para describir un estado de equilibrio, donde la estabilidad se refiere a una cierta temperatura y un estado diferente es el cristal líquido o líquido-cristalino que tiene propiedades de las fases líquida y sólida. Entre los cristales líquidos existen dos que van a ser parte de nuestro estudio; la fase nemática y la fase colestérica, la relación entre ambas fases es que un colestérico está formada de varias capas nemáticas y cada capa forma un ángulo con respecto a la otra, dando lugar a una espiral. Las particularidades de la estructura colestérica se observa al variar la temperatura de la sustancia y bajo agentes externos. El cristal líquido colestérico tiene la propiedad de la reflexión selectiva de la luz esto quiere decir que si la luz natural incide sobre éste con cualquier polarización y cualquier longitud de onda, sólo será reflejada aquella que sea del tamaño de la espiral. Pero veremos más adelante un análisis de esta propiedad. El siguiente capítulo abordaremos el tema de los cristales, más concretamente los cristales fotónicos, los cuales sirven para crear materiales con propiedades especiales.



## Capítulo 2

# Cristales

Los cristales son un sistema espacial de átomos, iones o moléculas, los cuales forman una *estructura cristalina*. Esta estructura posee una periodicidad. Entonces, en los cristales, los átomos, los iones o las moléculas se agrupan dando lugar a arreglos que se repiten, y a esa repetitividad, en tres dimensiones, se denomina red cristalina.

La red cristalina tiene la propiedad de tener simetría traslacional, esto significa que cualquier punto de la red se puede obtener de otro punto aplicando una traslación. Otro concepto muy importante para describir a un cristal es la celda unitaria, la cual es un paralelepípedo que al aplicarle una traslación genera toda la red cristalina.

Otra propiedad de los cristales, es que la energía potencial  $U$  que caracteriza a la estructura cristalina, es una función periódica en el espacio, donde su valor en cualquier punto es el resultado de la contribución de todos los átomos. Debido a la periodicidad atómica que origina bandas de energías prohibidas para los electrones, la banda prohibida es definida como la diferencia de energía entre la banda de valencia y la banda de conducción. La banda de valencia contienen aquellos electrones unidos en enlaces covalentes[7]. La banda de conducción contiene aquellos electrones que no están unidos y que están libres y pueden moverse en el cristal[7]. La estructura ordenada del cristal hace que los electrones en la órbita más externa de cualquier átomo queden influenciados por todos los átomos dentro del cristal.

En el caso de un cristal fotónico la distribución espacial de la constante dieléctrica origina bandas prohibidas[8], haciendo posible construir materiales que tenga dichas bandas, manipulando la propagación de los fotones con determinadas energías.

### 2.1. Cristales Fotónicos

Los cristales fotónicos (PCs, por sus siglas en inglés) son materiales artificiales que tienen la ventaja del control de la luz, con base en que su característica principal de su estructura periódica, desde el punto de vista óptico, puede estar en uno, dos o tres dimensiones[9] (Fig.(2.1)).

Otro motivo por el cual los PCs han recibido mucha atención, es que si se emplean ciertos materiales y la forma de la celda unitaria, es posible obtener una banda prohibida fotónica. En esta región las

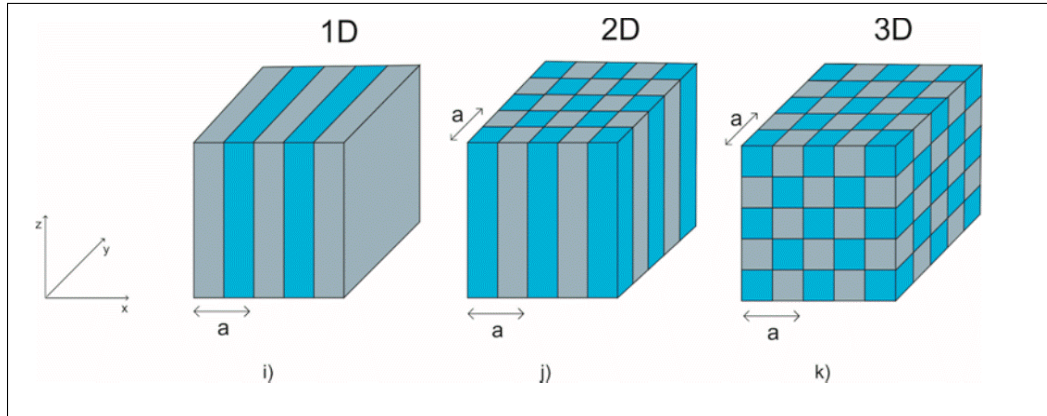


Figura 2.1: Formas simples de un cristal fotónico. Los arreglos muestran la celda unitaria de tamaño  $a$ . Cada color en la figura representa un material diferente[10]

EWs no atraviesan la estructura. Para el cálculo de esta banda es necesario resolver las Ecuaciones de Maxwell. En ausencia de fuentes, tanto la densidad de corriente y la densidad de carga son cero, además los campos son monocromáticos, es decir, son proporcionales a  $e^{-i\omega t}$ . Con todas estas suposiciones la resolución de las ecuaciones (3.3) y (3.4) para el campo  $\vec{E}$ , se deriva la siguiente ecuación de onda

$$\nabla \times \nabla \times E(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\vec{r}) E(\vec{r}). \quad (2.1)$$

Ecuaciones similares pueden ser derivadas para los demás campos. Debemos de tomar en cuenta que cada material en el PC se supone *que tiene* un valor escalar de la permitividad que lo caracteriza, a pesar de que podría incluirse materiales con propiedades magnéticas. Las soluciones de la Ec.(2.1) dan los modos con los que pueden propagarse las ondas electromagnéticas a través del PC. Una forma habitual de dar las soluciones de la Ec.(2.1) se llama la estructura de bandas[10]. Por mencionar otros ejemplos que se han desarrollado a partir de este tipo de estructuras, las cuales poseen una banda prohibida fotónica, son: guías de ondas, láseres, interruptores eléctricos y espejos mejorados[9-12]. Por último, la banda prohibida fotónica en estructuras dieléctricas aparece en una región de frecuencias donde la longitud de onda  $\lambda$  es del mismo orden que la red constante  $a$ [10]. En los cristales fotónicos dieléctricos la propagación de las ondas electromagnéticas es siempre admisible para la región de bajas frecuencias en  $\lambda \gg a$ [10].

### 2.1.1. Cristales Fotónicos en el límite de longitud de onda larga

La región de longitud de onda larga se caracteriza por  $\lambda \gg a$  (Fig.(2.1)) (donde  $a$  es el tamaño de una celda unitaria), lo importante de dicha característica son los fuertes alcances en la propagación de las ondas, ya que las ondas electromagnéticas, al cumplir la condición anterior, tienen nula observación de los pequeños detalles de la estructura que atraviesa, percibiendo a los cristales fotónicos como homogéneos. Lo cual lleva al entendimiento de que las propiedades ópticas del medio se pueden estudiar a través del uso de los parámetros efectivos del sistema, como la permitividad y permeabilidad promedio junto con las diádicas electro-magnéticas efectivas.

En el límite de longitud de onda larga, los cristales fotónicos pueden ser utilizados como medio de

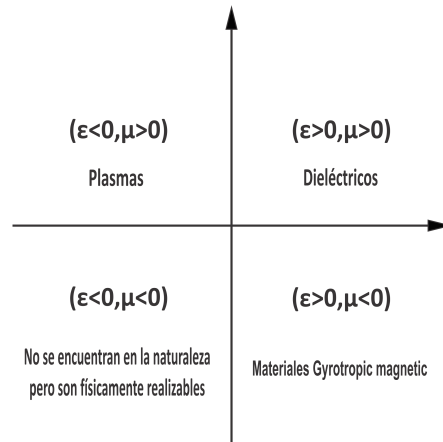


Figura 2.2: Clasificación de materiales de acuerdo con sus valores de  $\varepsilon$  y  $\mu$ .

dispositivos ópticos tales como lentes, prismas y polarizadores, pero con características diseñadas por la selección de la forma y los ingredientes en la celda unitaria[10].

El interés de la comunidad científica, en estos últimos años, sobre el límite de longitud de onda larga se origina de los experimentos que llevó a cabo Smith y sus colaboradores[10]. Estos refieren que es posible recrear materiales artificiales con características particulares, es decir, el mencionado compuesto artificial teniendo valores negativos de la permitividad y la permeabilidad y, en consecuencia, un material con un índice de refracción negativo, así como medios girotrópicos y bianisotrópicos. Con el estudio de estas propiedades, ha sido encontrado este intervalo de frecuencia en la región de longitud de onda larga.

Estos materiales artificiales son llamados "*metamateriales*" debido a que sus propiedades no se encuentran en la naturaleza. Pero ¿cómo es posible obtener los parámetros efectivos para estos nuevos materiales? En la literatura pueden ser encontrados varios métodos para este propósito. Por mencionar algunos de ellos serían la derivación experimental, métodos numéricos y teorías de campo medio. Cada una de ellas tienen sus pros y contras, sin embargo, brindan la posibilidad de un conocimiento sobre estos parámetros efectivos ( $\varepsilon$  y  $\mu$ ).

### 2.1.2. Metamateriales

Materiales con la propiedad de que  $\varepsilon$  y  $\mu$  sean, simultáneamente, negativos tienen muchos nombres y terminologías, tales como: "*doblemente negativos (DNG)*", "*materiales izquierdos*", "*medio backward-wave*"[15] o simplemente "*metamateriales*", por nombrar algunos. El último término hace referencia al hecho de que los materiales no se encuentran en la naturaleza. Una representación gráfica se muestra en la Fig.(2.2). La dificultad en la obtención de los valores negativos, al mismo tiempo, de  $\varepsilon$  y  $\mu$  se encuentra en el hecho de que las frecuencias de resonancia para que  $\varepsilon < 0$ , tienden a ser mucho más grandes que las frecuencias de resonancia para que  $\mu < 0$ [16]. Víctor Veselago fue de los primeros en mostrar que al tener una permitividad dieléctrica y una permeabilidad magnética negativas implica un índice de refracción negativo y presenta una velocidad de fase y una velocidad de grupo que se

propagan en dirección opuesta (esto permite el paso de determinado intervalo de frecuencias, de una señal, y atenúan el paso del resto). Además, los metamateriales presentan un efecto Doppler inverso, de modo que la frecuencia de las ondas disminuye en lugar de aumentar al acercarse la fuente[17].

### Parámetro de un medio Doblemente Negativo

El fenómeno de la refracción negativa se estudia teniendo en cuenta que la dispersión de una onda es incidente en forma oblicua entre un medio izquierdo y un medio común[15]. Ziolkowski y Heyman analizaron este concepto mostrando que en un medio DNG el índice de refracción puede ser negativo[15]. A continuación discutimos este punto, los valores  $\varepsilon$ ,  $\mu$  y  $n = \sqrt{\varepsilon\mu/\varepsilon_0\mu_0}$  son complejos, los cuales pueden ser escritos en su representación polar como

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = r_\varepsilon e^{i\theta}, \quad \frac{\mu}{\mu_0} = r_\mu e^{i\phi} \quad (2.2)$$

y

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu/\varepsilon_0\mu_0} = \sqrt{r_\varepsilon r_\mu} e^{i(\theta+\phi)/2}. \quad (2.3)$$

Es necesario que la parte imaginaria de  $n$  sea positiva para un medio pasivo ya que no aporta energía a la señal y por tanto la parte real de la exponencial debe ser decreciente implicando que

$$0 \leq \frac{1}{2}(\theta + \phi) < \pi. \quad (2.4)$$

Si las partes reales de  $\varepsilon$  y  $\mu$  son negativas, es decir,  $\cos \theta < 0$  y  $\cos \phi < 0$ , entonces

$$\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}(\theta + \phi) < \frac{3\pi}{2}. \quad (2.5)$$

Para satisfacer (2.4) y (2.5), debemos tener simultáneamente

$$\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}(\theta + \phi) < \pi \quad (2.6)$$

y, por tanto, un índice de refracción negativo

$$n_R = \text{Re}[n] = \sqrt{r_\varepsilon r_\mu} \cos \frac{1}{2}(\theta + \phi) < 0. \quad (2.7)$$

El requisito de que  $n$  tenga una parte imaginaria positiva, nos conduce a concluir que, si  $\varepsilon$  y  $\mu$  tienen partes reales negativas, la parte real de  $n$  debe ser negativa. En un sentido fundamental, esta conclusión se puede decir que se deriva de la causalidad, la cual exige que  $\varepsilon(\omega)$ ,  $\mu(\omega)$  y  $n(\omega)$  deban ser complejos[16]. Si una onda, desde el vacío, incide en un material doblemente negativo, de acuerdo a la ley de Snell tenemos

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2, \quad (2.8)$$

donde los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son de incidencia y transmisión, respectivamente, y como  $n < 0$  implica que  $\sin \theta_2 < 0$ . Los rayos refractados se curvan hacia el mismo lado de la normal, como los rayos incidentes (ver Fig.(2.3)). Una aplicación potencial es la posibilidad de hacer lentes planas con un metamaterial. Otro caso, es la propagación de una onda plana sobre dicho material, escrita como

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)}, \quad (2.9)$$

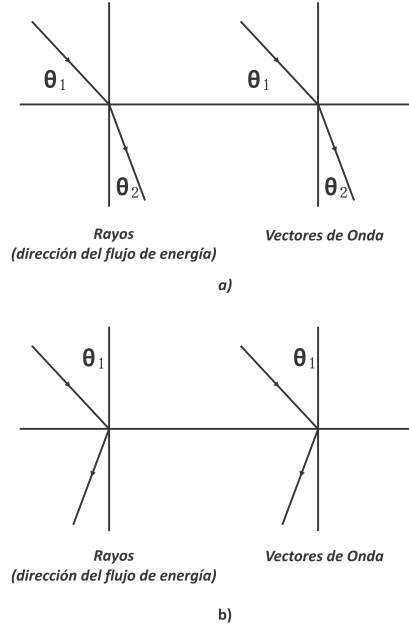


Figura 2.3: Rayos y vectores de onda cuando la luz incide desde el vacío sobre un medio con índice de refracción (a)  $n > 0$  y (b)  $n < 0$ . En este último caso, la dirección del vector de onda y, por tanto, la velocidad de fase es opuesta a la dirección del flujo de energía[16].

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)}, \quad (2.10)$$

al sustituir las ecuaciones (2.9) y (2.10) en las ecuaciones de Maxwell (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4)<sup>1</sup> obtendremos

$$k \cdot \vec{E} = 0, \quad (2.11)$$

$$k \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.12)$$

$$k \times \vec{E} = \omega \mu(\omega) \vec{H}, \quad (2.13)$$

$$k \times \vec{H} = -\omega \varepsilon(\omega) \vec{E}. \quad (2.14)$$

Haremos la sustitución de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  para obtener el vector de Poynting  $\vec{S}$ . Entonces de la Ec.(2.13) y de la Ec.(2.14) se tiene los campos

$$\vec{E} = -\frac{1}{\omega \varepsilon(\omega)} k \times \vec{H}, \quad (2.15)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega \mu(\omega)} k \times \vec{E}, \quad (2.16)$$

<sup>1</sup>Usamos esta ecuación sin tomar en cuenta la densidad de corriente.

por lo tanto

$$\vec{S} = \frac{1}{\omega\mu(\omega)} \vec{E} \times (k \times \vec{E}), \quad (2.17)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\omega\mu(\omega)} \left[ k(\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(k \cdot \vec{E}) \right], \quad (2.18)$$

$$\vec{S} = \frac{kE^2}{\omega\mu(\omega)} \quad (2.19)$$

si ahora hacemos la misma sustitución del vector  $\vec{H}$ , el vector  $\vec{S}$  es

$$\vec{S} = \frac{kH^2}{\omega\varepsilon(\omega)}. \quad (2.20)$$

Si  $\varepsilon(\omega) > 0$  y  $\mu(\omega) > 0$  el vector de Poynting apunta hacia la dirección del vector de onda  $k$ . En el caso contrario ( $\varepsilon(\omega) < 0$  y  $\mu(\omega) < 0$ ), el vector de Poynting apunta en dirección opuesta a la dirección del vector de onda  $k$ . En este caso, la velocidad de fase está en dirección opuesta a la dirección del flujo de energía[16].

### Medio doblemente negativo con índice de refracción igual a cero

Los metamateriales, donde la permitividad y/o la permeabilidad son cercanas a cero, el índice de refracción es mucho menor que uno, ofrecen interesantes aplicaciones. Dichas aplicaciones son, por ejemplo, desfases, acopladores y resonadores compactos, por mencionar algunos. El estudio realizado por Ziolkowski<sup>2</sup> detalla las propiedades de propagación y dispersión de un metamaterial que corresponde al espacio libre y tiene un índice de refracción igual a cero.

Se ha demostrado que los campos electromagnéticos en un medio con índice cero pueden adquirir un carácter estático en el espacio, sin embargo, se mantienen dinámicos en el tiempo, de tal manera que la física subyacente sigue estando asociada con los campos propagantes[15]. En la Fig.(2.4), el punto rojo es el lugar en el que se localizarían los materiales con índice cero.

### Aplicaciones

Los metamateriales prometen cambios verdaderamente revolucionarios en sectores de los campos de la electrónica y de la opto-electrónica, además de ser ya utilizados con éxito en teléfonos móviles. En la actualidad, la actividad investigadora en el campo de la invisibilidad u ocultamiento con metamateriales está dando grandes pasos, debido al interés de las Fuerzas Armadas de distintos países que dedican importantes esfuerzos de investigación y recursos económicos para conseguir una ventaja sobre los sensores utilizados por el oponente[17].

Una de las aplicaciones potenciales que más a llamado la atención de la comunidad científica es el concepto de *lente perfecta*<sup>3</sup> (introducido por Sir John B. Pendry, en el artículo "*Negative Refraction Makes a Perfect Lens*" publicado en el año 2000), donde sugiere la construcción de dicha lente a partir de metamateriales que, teóricamente, no estaría limitada por la longitud de onda utilizada[17]. La

<sup>2</sup>Para más detalle de este estudio ver [15]

<sup>3</sup>Pendry comenzó con la observación de que la resolución de una lente convencional está limitado por el hecho de que las ondas evanescentes no contribuyen a la imagen.

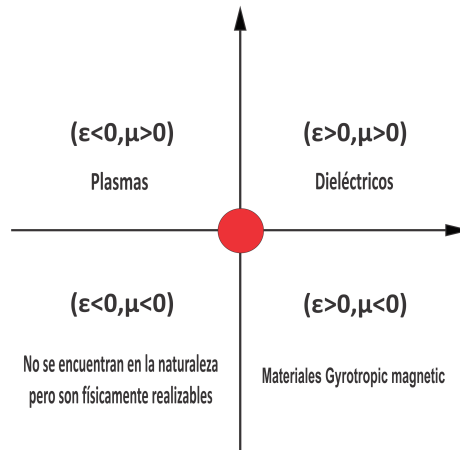


Figura 2.4: Los medios con índice cero se encuentran en la intersección de los diferentes tipos de materiales[15].

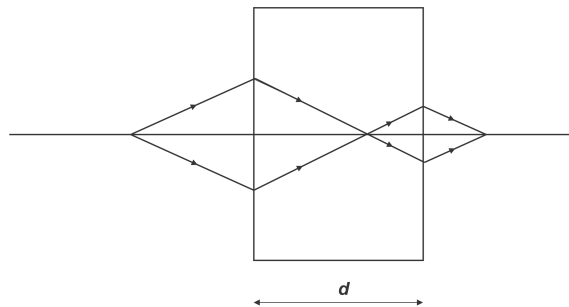


Figura 2.5: En una losa plana de un material con índice negativo, de ancho  $d$ , se producen dos focos, uno en el interior del material y el otro fuera, cuando el punto de origen está a una distancia  $l < d$  de este. Con  $\epsilon = -\epsilon_0$  y  $\mu = -\mu_0$ , no hay ondas reflejadas cuando el objetivo está en el vacío y la imagen real aparece a una distancia  $2d$  del objeto[16].

Fig.(2.5) es un ejemplo de una lente de Pendry. El desafío en este caso es diseñar un metamaterial con muy baja absorción, ya que, un grado de absorción pequeño del material puede limitar básicamente la resolución que teóricamente es posible con una lente plana NIM<sup>4</sup> [16]. Incluso, si no hay absorción, se necesitaría tener un objeto muy cercano a la superficie de la lente. Por lo tanto la realización de la lente no sería posible con cualquier metamaterial realista. Ziolkowski y Heyman, a partir de un estudio, concluyeron que el efecto de lentes perfectos es sólo posible cuando  $\epsilon/\epsilon_0 = \mu/\mu_0 = -1$  y cuando no existe ninguna absorción o dispersión en el medio. El concepto de superlente también puede extenderse al ámbito de las ondas acústicas.

Otras disciplinas científicas que podrían beneficiarse con este tipo de lentes son la medicina y la microbiología. Construir microscopios ópticos con estos "superlentes" se obtendría una resolución tan elevada que se alcanzaría a ver el movimiento de virus o moléculas de ADN en una célula humana.

<sup>4</sup> *Negative Index Medium*

Podemos resumir que los cristales son un sistema espacial de átomos, iones o moléculas los cuales forman una estructura que posee una periodicidad (la energía potencial  $U$  es una función periódica) que debido a ésta genera bandas de energías prohibidas para los electrones. En el caso de los cristales fotónicos la distribución espacial de la constante dieléctrica origina, de igual forma, pero para fotones, bandas prohibidas, pudiendo controlar la propagación de la luz en el cristal. Se han podido desarrollar estructuras, a partir de cristales fotónicos, con valores de  $\varepsilon, \mu < 0$ , mejor conocidas como "metamateriales" o "materiales izquierdos". Victor Veselago mostró que al tener la permitividad dieléctrica y la permeabilidad magnética negativas implicaba un índice de refracción negativo. El hecho de que el sistema tenga un índice refracción negativo significa que el campo generado ( $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ ) cambia de dirección al atravesar el cristal fotónico, propiamente el índice de refracción es mayor a cero, y tiene que serlo porque sino no habría propagación de la onda. Lo que sigue es observar como una onda electromagnética se propaga en diferentes medios, mostrando una relación matemática a partir de las Ecuaciones de Maxwell.



## Capítulo 3

# Propagación de ondas en algunos medios materiales

La comprensión de cómo las ondas electromagnéticas (EWs, por sus siglas en inglés) se propagan en la materia ha tenido un papel importante en el avance científico. Existen una gama de aplicaciones (medicina, aeronáutica, telecomunicaciones, la óptica y electrónica, etc.) donde se ha desarrollado o mejorado el conocimiento de la interacción entre las EWs y la materia, además su amplio intervalo espectral permite un vasto número de aplicaciones.

El estudio de la propagación de las EWs está basado en la solución de las Ecuaciones de Maxwell[18]. Además, dichas ecuaciones describen a un medio macroscópico, y son de la siguiente forma en el Sistema Internacional de unidades:

Ley de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (3.1)$$

Ley de Gauss para el campo magnético:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.2)$$

Ley de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

Ley de Ampère:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.4)$$

donde  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$  y  $\vec{H}$  son el campo eléctrico, la inducción magnética, el vector desplazamiento y el campo magnético, respectivamente,  $\rho$  es la densidad de carga libre y  $\vec{J}$  es la densidad de corriente. Para dar solución a las Ecuaciones de Maxwell debemos conocer las relaciones constitutivas (estas definen las relaciones entre los campos macroscópicos) y para el caso de medios bianisotrópicos lineales tienen la forma [10]

$$\vec{D} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E} + \vec{\chi} \cdot \vec{H}, \quad (3.5)$$

$$\vec{B} = \vec{\zeta} \cdot \vec{E} + \vec{\mu} \cdot \vec{H}, \quad (3.6)$$

donde  $\vec{\varepsilon}$  es la diádica de permitividad dieléctrica,  $\vec{\mu}$  es la diádica de permeabilidad magnética, y,  $\vec{\chi}$  y  $\vec{\zeta}$  son las diádicas electro-magnéticas. Estos cuatro parámetros definen completamente las propiedades electromagnéticas del medio y dependen, en general, del vector de onda y la frecuencia de la EW que se propaga[10]. Cabe señalar que los parámetros antes mencionados pueden obtenerse a través de experimentos, numéricamente o en algunos casos analíticamente. Se han desarrollado materiales artificiales con parámetros específicos,  $\varepsilon$  o  $\mu$ , o ambas, que son una función periódica en el espacio conocidos como *cristales fotónicos* (véase la sección 2.1).

### 3.0.3. Ecuación de Continuidad

De la Ec(3.4) se obtiene una relación muy sencilla entre la densidad de corriente  $\vec{J}$  y la densidad de carga eléctrica  $\rho$ , entonces al aplicar la divergencia en ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), \quad (3.7)$$

si la divergencia del rotacional es cero entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = 0, \quad (3.8)$$

sustituimos la Ec(3.1) en esta última tenemos por resultado

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.9)$$

Esta es la ecuación de conservación de carga en medios homogéneos e isotrópicos.

## 3.1. Ecuaciones de Maxwell en el Vacío

Al estar en el vacío entonces no existen cargas ni corrientes, por tanto las ecuaciones de Maxwell (ecuaciones 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4), en el Sistema Internacional de unidades, se reducen a:

Ley de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.10)$$

Ley de Gauss para el campo magnético:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.11)$$

Ley de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.12)$$

Ley de Ampère:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.13)$$

### 3.1.1. Ecuación de Onda del Vacío

Entonces partimos de la Ley de Faraday, Ec(3.12). Aplicamos el rotacional en ambos lados de la ecuación

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (3.14)$$

Aquí utilizamos la propiedad del doble rotacional siguiente:  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{M}) - \nabla^2 \vec{M}$  que nos lleva a

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}). \quad (3.15)$$

Al sustituir las Ec(3.10) y Ec(3.13) en la relación anterior nos da como resultado

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.16)$$

por lo tanto

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.17)$$

Ahora usamos la Ley de Ampère para obtener la ecuación de onda para el campo magnético aplicando el rotacional

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (3.18)$$

empleamos la propiedad del doble rotacional, anteriormente mencionada, para obtener el siguiente resultado

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{E}), \quad (3.19)$$

con la sustitución de las Ec(3.11) y Ec(3.12) en la ecuación anterior tenemos

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.20)$$

Por tanto la ecuación de onda para el campo eléctrico y para el campo magnético es

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.21)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.22)$$

## 3.2. Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

### 3.2.1. Ecuación de Onda en un medio material homogéneo y conductor

En el caso para el cual las ondas electromagnéticas se mueven a través de un medio material, tomamos la Ley de Faraday (Ec.(3.3)) y le aplicamos el rotacional de la siguiente manera

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right), \quad (3.23)$$

por la propiedad del doble rotacional  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$  la ecuación tiene la forma de

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (3.24)$$

si  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  con  $\mu = \mu_r \mu_0 I$ ,  $\mu_r$  es la permeabilidad magnética relativa,  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío e  $I$  es la matriz identidad, entonces

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{H}), \quad (3.25)$$

sustituimos la Ec(3.4) dando

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), \quad (3.26)$$

esto implica que

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}, \quad (3.27)$$

sustituimos  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  con  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 I$  ( $\epsilon_r$  es la permitividad relativa) y  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (3.28)$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (3.29)$$

por tanto la ecuación de onda es de la forma

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.30)$$

Ya tenemos una ecuación cerrada para el campo eléctrico en un medio, solo nos falta obtener una ecuación similar para el campo magnético. Realizamos los mismos pasos con la Ley de Ampère (Ec.(3.4))

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \times \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), \quad (3.31)$$

utilizamos la propiedad del doble rotacional

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{D}), \quad (3.32)$$

si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ ,  $\vec{J}$  y  $\vec{D}$ , al sustituirlas en la ecuación anterior nos da como resultado

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{E}), \quad (3.33)$$

sustituyendo la Ec.(3.3)

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{H} = -\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (3.34)$$

sólo falta poner todo en términos de  $\vec{H}$ , sabemos que  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , entonces obtenemos como resultado

$$-\nabla^2 \vec{H} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (3.35)$$

por tanto la ecuación de onda es de la forma

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.36)$$

El estudio de las soluciones de estas ecuaciones diferenciales nos permitirá determinar de qué forma se propaga el campo.

### 3.2.2. Solución de la Ecuación de Onda en un medio homogéneo e isotrópico

Las ondas electromagnéticas más simples son las ondas planas uniformes que se propagan a lo largo de una dirección fija en un medio sin pérdida. Para el campo eléctrico tenemos que la ecuación de onda es la Ec(3.30). El caso más simple para dar solución a la ecuación de onda, se trata cuando el medio es lineal, homogéneo e isotrópico, es decir, el *vacío* ( $\sigma = 0$ ). La forma de la Ec(3.30) es ahora

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.37)$$

ponemos el *laplaciano* en forma cartesiana

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.38)$$

supongamos como solución la siguiente relación para el campo eléctrico

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i\omega t}, \quad (3.39)$$

donde  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  y  $\vec{r} = (x, y, z)$  entonces derivamos el campo

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k_x^2 \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i\omega t}, \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} = -k_y^2 \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i\omega t}, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k_z^2 \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i\omega t} \quad (3.42)$$

y la segunda derivada para el campo eléctrico con respecto al tiempo

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i\omega t}, \quad (3.43)$$

sustituimos las ecuaciones (3.40), (3.41), (3.42) y (3.43) en la Ec(3.37) con lo cual obtenemos

$$-k_x^2 \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i\omega t} - k_y^2 \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i\omega t} - k_z^2 \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i\omega t} + \omega^2 \mu\epsilon \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i\omega t} = 0, \quad (3.44)$$

factorizando a  $\vec{E}$  nos da

$$-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i\omega t} = 0, \quad (3.45)$$

para que se cumpla la condición debe pasar que

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad (3.46)$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2, \quad (3.47)$$

esta última ecuación es la *relación de dispersión del vacío*.

De forma análoga se puede calcular la solución de la ecuación de onda para el campo magnético, luego entonces, de la Ec(3.36) tenemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{B} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.48)$$

Lo siguiente es suponer como solución a

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}) - i\omega t}, \quad (3.49)$$

y al calcular las segundas derivadas, tenemos

$$-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \omega^2\mu\varepsilon)\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}) - i\omega t} = 0. \quad (3.50)$$

Podemos ver que la relación de dispersión (3.47) es la misma para el campo magnético. Por otro lado, sustituyendo las ecuaciones (3.39) y (3.49) en las ecuaciones (3.10) y (3.11) se obtiene

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad (3.51)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad (3.52)$$

lo que significa que  $\vec{k}$  es perpendicular tanto a  $\vec{E}_0$  como a  $\vec{B}_0$ . En definitiva, afirmamos que el campo eléctrico y magnético se propagan en un dirección, oscilando en planos diferentes.

En el espacio libre  $\varepsilon_r = \mu_r = 1$  y  $\sigma = 0$ , no existe atenuación, y por lo tanto  $k = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$  (número de onda). Los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , en el espacio libre, se encuentran en fase debido a que su impedancia característica es real. Una onda plana electromagnética se propaga en la dirección del vector  $\vec{E} \times \vec{B}$  (Fig.(3.1)). Además, las densidades de energía eléctrica y magnética[19] son iguales, (véase Fig.(3.2))

$$\frac{\varepsilon_0 E^2/2}{\mu_0 H^2/2} = \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right) = 1. \quad (3.53)$$

### 3.2.3. Conservación de la energía

Otro punto importante es establecer cuantitativamente la conservación de la energía para el campo electromagnético. La conservación de la energía se expresa a través del denominado teorema de Poynting. Ahora bien, la energía total de la materia es la suma de las energías de las partículas y el flujo de esta energía, a través de la superficie, o bien, es la suma de la energía transportada por cada partícula que atraviesa la superficie[21]. Para mostrar la forma explícita de la conservación de la energía usamos la Ley de Ampère (Ec(3.4)) para expresar todo en términos de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , esto implica

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} d^3x = \int_V \left[ E \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - E \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] d^3x, \quad (3.54)$$

donde  $\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} d^3x$  es la tasa de trabajo total realizado por los campos en un volumen. La Ec.(3.54) representa una conversión de la energía electromagnética a energía mecánica o térmica.

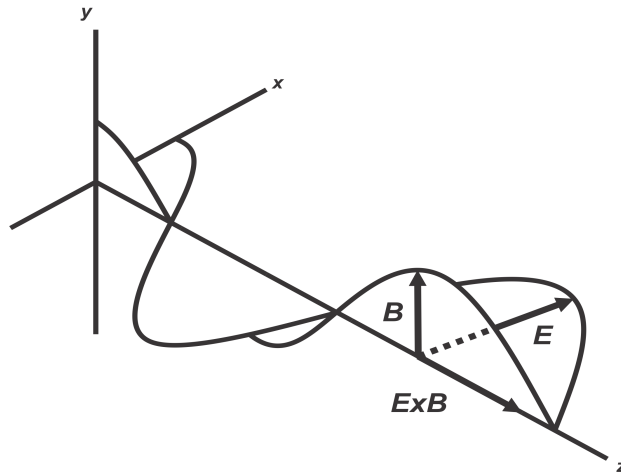


Figura 3.1: Los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  viajando en el espacio libre en la dirección positiva a lo largo del eje  $z$ , de una onda plana. Los vectores son ortogonales y están en fase.

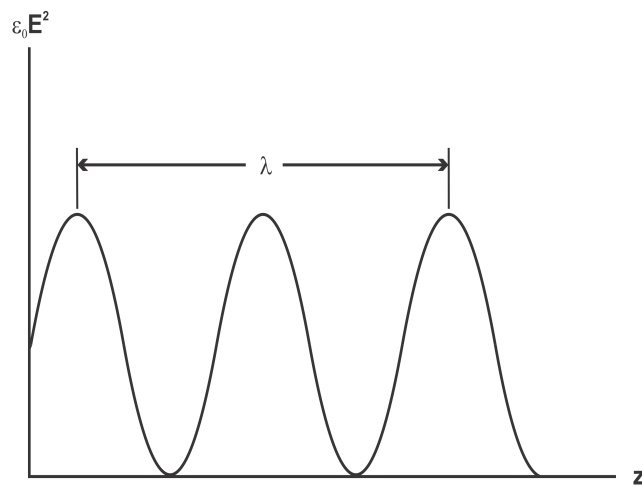


Figura 3.2: Densidad de energía como una función de  $z$  para una onda plana electromagnética viajando a lo largo del eje  $z$  en el espacio libre[20].  $\epsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2$ .

Empleamos la siguiente identidad vectorial  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})$  además de la Ley de Faraday (Ec.(3.3)), obteniendo

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} d^3x = - \int_V \left[ \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - E \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] d^3x, \quad (3.55)$$

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} d^3x = - \int_V \left[ \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + E \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] d^3x, \quad (3.56)$$

en electrostática la densidad de energía puede ser escrita como  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ , también es posible tener una expresión para el campo magnético<sup>1</sup>, entonces

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} d^3x = - \int_V \left[ \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \right] d^3x, \quad (3.57)$$

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} d^3x = - \int_V \left[ \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu_0 H^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) \right] d^3x. \quad (3.58)$$

Dado que el volumen  $V$  es arbitrario, podemos escribir la Ec.(3.58) de la forma

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} d^3x = - \int_V \left[ \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{\partial u}{\partial t} \right] d^3x, \quad (3.59)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{S} - \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3.60)$$

donde el vector  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ , representa el flujo de energía, llamado *vector de Poynting* y la constante  $u = \frac{1}{2}(\mu_0 H^2 + \epsilon_0 E^2)$  es la densidad de energía total. El significado físico de la forma integral (Ec.(3.59)) o diferencial (Ec.(3.60)) es que el negativo del tipo de variación de la energía electromagnética dentro de un cierto volumen es igual al trabajo total realizado por los campos sobre la superficie dentro del volumen[22]. El *teorema de Poynting* es una declaración de la conservación de la energía en un campo electromagnético[19].

El vector de Poynting puede ser utilizado para ver cómo trabaja en casos especiales (en un cubo, en un capacitor, un alambre que lleva corriente, una carga y un imán, etcétera). En el caso de la luz, tenemos que la onda tiene dos vectores,  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , ortogonales entre sí y a la dirección de propagación de la onda (Fig.(3.3)). En una onda electromagnética, la magnitud de  $\vec{B}$  es  $1/c$  veces la magnitud de  $\vec{E}$  [21], y al ser ortogonales, entonces

$$|S| = \left| \vec{E} \times \vec{H} \right|, \quad (3.61)$$

$$|S| = \frac{\mu_0}{\mu_0} \left| \vec{E} \times \vec{H} \right|, \quad (3.62)$$

$$|S| = \frac{1}{\mu_0} \left| \vec{E} \times \vec{B} \right|, \quad (3.63)$$

además  $\left| \vec{E} \times \vec{B} \right| = \frac{E^2}{c}$ , entonces sustituyendo tenemos

$$|S| = \frac{E^2}{\mu_0 c}, \quad (3.64)$$

<sup>1</sup>lo cual significa que se puede tener un término extra que es derivado del tiempo.



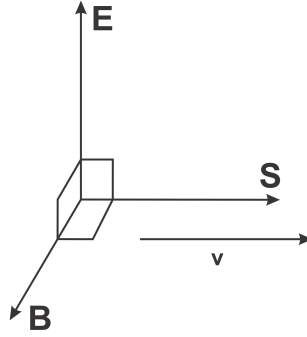


Figura 3.3: Los vectores  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$  para una onda de luz.  $v$  es la dirección de la propagación de la onda.

$$|S| = \frac{cE^2}{\mu_0 c^2}, \quad (3.65)$$

si  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ , por tanto, el flujo de energía por unidad de área por segundo es

$$S = \epsilon_0 c E^2. \quad (3.66)$$

Si la onda de luz, donde  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)$ , la intensidad de luz  $\langle S \rangle_{avg}$  es

$$\langle S \rangle_{avg} = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle_{avg}, \quad (3.67)$$

porque  $\vec{E}$  esta variando en el espacio. Y la densidad de energía es dada por el valor de  $u$ . Usamos el hecho de que  $\vec{E} = \vec{B}c$ , por lo tanto, el promedio de densidad de energía es

$$\langle u \rangle_{avg} = \frac{1}{2} \left( \mu_0 \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)^2 + \epsilon_0 \langle E^2 \rangle_{avg} \right), \quad (3.68)$$

$$\langle u \rangle_{avg} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{\langle E^2 \rangle_{avg}}{c^2} + \epsilon_0 \langle E^2 \rangle_{avg} \right), \quad (3.69)$$

$$\langle u \rangle_{avg} = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle_{avg} \quad (3.70)$$

### 3.3. Propagación de una onda en medios inhomogéneos y anisotrópicos

#### 3.3.1. Cristales Líquidos Colestéricos

Los cristales líquidos son medios inhomogéneos y anisotrópicos caracterizados por las siguientes ecuaciones constitutivas

$$\vec{D} = \overleftarrow{\varepsilon} \cdot \vec{E}, \quad (3.71)$$

$$\vec{B} = \overleftarrow{\mu} \cdot \vec{H}, \quad (3.72)$$

donde

$$\overleftarrow{\varepsilon} = \varepsilon_{\perp} I + \varepsilon_a \hat{n} \hat{n}, \quad (3.73)$$

$$\overleftarrow{\mu} = \mu_{\perp} I + \mu_a \hat{n} \hat{n}, \quad (3.74)$$

en donde  $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$  y  $\mu_a = \mu_{\parallel} - \mu_{\perp}$  son las anisotropías dieléctrica y magnética. Los valores  $\varepsilon_{\parallel}$  y  $\mu_{\parallel}$  son las permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética paralelas al eje donde se propaga la onda en el medio, y por tanto,  $\varepsilon_{\perp}$  y  $\mu_{\perp}$  son los valores transversales de la permitividad y la permeabilidad. El producto  $\hat{n} \hat{n}$  es conocido como *producto diádico* (o tensorial).

La construcción del tensor dieléctrico es posible, ya que en cualquier punto un colestérico tiene un comportamiento como un material uniaxial, a partir de una representación en términos de diadas, entonces la Ec(3.73) es de la siguiente forma

$$\overleftarrow{\varepsilon} = \varepsilon_{\perp} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_a \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y^2 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.75)$$

donde  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a n_x^2$ , además si  $|\hat{n}| = 1$  tenemos que  $\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$ , con  $\theta = qx$ ,  $q = \frac{2\pi}{L}$ .

Finalmente si sustituimos las ecuaciones (3.39) y (3.49) en la Ec.(3.3) se llega a que  $\vec{k} \times \vec{E} = \vec{B}$ , lo cual muestra que  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{k}$  son una triada de vectores ortogonales.

Hemos propuesto una solución de tipo de onda plana para las coordenadas transversales  $y$  y  $z$  debido a que  $\overleftarrow{\varepsilon}$  y  $\overleftarrow{\mu}$  solo dependen de  $x$ . Por tanto, los campos electromagnéticos que describen una onda electromagnética cuasi-plana en medios materiales, estratificados a lo largo del eje  $x$ , es decir,  $\overleftarrow{\varepsilon} = \varepsilon(x)$  y  $\overleftarrow{\mu} = \mu(x)$ , son

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}(x) e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)}, \quad (3.76)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{b}(x) e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)}, \quad (3.77)$$

donde  $\vec{e}(x) = e_x(x) \hat{i} + e_y(x) \hat{j} + e_z(x) \hat{k}$ ,  $\vec{b}(x) = b_x(x) \hat{i} + b_y(x) \hat{j} + b_z(x) \hat{k}$ . De la Ec(3.12), de la cual tenemos una relación entre el campo eléctrico y magnético, haremos el cálculo del rotacional de  $\vec{E}$  y la derivada de  $\vec{B}$  con lo que obtendremos un sistema de ecuaciones, para esto definimos la fase  $\varphi = i(k_y y + k_z z - \omega t)$  con el objetivo de simplificar la notación.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e_x e^{\varphi} & e_y e^{\varphi} & e_z e^{\varphi} \end{vmatrix}, \quad (3.78)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left( ik_y e^\varphi e_z - ik_z e^\varphi e_y, -e^\varphi \frac{\partial e_z}{\partial x} + ik_z e^\varphi e_x, e^\varphi \frac{\partial e_y}{\partial x} - ik_y e^\varphi e_x \right). \quad (3.79)$$

A continuación derivamos temporalmente el campo magnético tomando en cuenta su dependencia monocromática

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial b_x e^\varphi}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial b_y e^\varphi}{\partial t} \hat{j} + \frac{\partial b_z e^\varphi}{\partial t} \hat{k}, \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega e^\varphi b_x \hat{i} - i\omega e^\varphi b_y \hat{j} - i\omega e^\varphi b_z \hat{k}. \quad (3.81)$$

Esto conlleva a obtener tres ecuaciones escalares para las amplitudes

$$ik_y e^\varphi e_z - ik_z e^\varphi e_y = i\omega e^\varphi b_x \Rightarrow b_x = \frac{1}{\omega} k_y e_z - \frac{1}{\omega} k_z e_y, \quad (3.82)$$

$$-e^\varphi \frac{\partial e_z}{\partial x} + ik_z e^\varphi e_x = i\omega e^\varphi b_y \Rightarrow \frac{\partial e_z}{\partial x} = ik_z e_x - i\omega b_y, \quad (3.83)$$

$$e^\varphi \frac{\partial e_y}{\partial x} - ik_y e^\varphi e_x = i\omega e^\varphi b_z \Rightarrow \frac{\partial e_y}{\partial x} = ik_y e_x + i\omega b_z. \quad (3.84)$$

De las tres ecuaciones resultantes sólo una es algebraica, esta será de gran ayuda para el siguiente sistema de ecuaciones. Si hacemos las operaciones de la Ec(3.13) tenemos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_x e^\varphi & b_y e^\varphi & b_z e^\varphi \end{vmatrix}, \quad (3.85)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left( ik_y e^\varphi b_z - ik_z e^\varphi b_y, -e^\varphi \frac{\partial b_z}{\partial x} + ik_z e^\varphi b_x, e^\varphi \frac{\partial b_y}{\partial x} - ik_y e^\varphi b_x \right), \quad (3.86)$$

luego entonces

$$\left( ik_y e^\varphi b_z - ik_z e^\varphi b_y, -e^\varphi \frac{\partial b_z}{\partial x} + ik_z e^\varphi b_x, e^\varphi \frac{\partial b_y}{\partial x} - ik_y e^\varphi b_x \right) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.87)$$

Para obtener el vector de desplazamiento  $\vec{D}$ , sustituimos las ecuaciones (3.75) y (3.76) en la Ec.(3.71), de tal forma que

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x e^\varphi \\ e_y e^\varphi \\ e_z e^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} e_x e^\varphi + \varepsilon_{xy} e_y e^\varphi + \varepsilon_{xz} e_z e^\varphi \\ \varepsilon_{yx} e_x e^\varphi + \varepsilon_{yy} e_y e^\varphi + \varepsilon_{yz} e_z e^\varphi \\ \varepsilon_{zx} e_x e^\varphi + \varepsilon_{zy} e_y e^\varphi + \varepsilon_{zz} e_z e^\varphi \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Derivando esta expresión con respecto al tiempo nos da como resultado

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \hat{i} \left( \varepsilon_{xx} e_x \frac{\partial e^\varphi}{\partial t} + \varepsilon_{xy} e_y \frac{\partial e^\varphi}{\partial t} + \varepsilon_{xz} e_z \frac{\partial e^\varphi}{\partial t} \right) \\ &\quad + \hat{j} \left( \varepsilon_{yx} e_x \frac{\partial e^\varphi}{\partial t} + \varepsilon_{yy} e_y \frac{\partial e^\varphi}{\partial t} + \varepsilon_{yz} e_z \frac{\partial e^\varphi}{\partial t} \right) \\ &\quad + \hat{k} \left( \varepsilon_{zx} e_x \frac{\partial e^\varphi}{\partial t} + \varepsilon_{zy} e_y \frac{\partial e^\varphi}{\partial t} + \varepsilon_{zz} e_z \frac{\partial e^\varphi}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Luego igualamos nuestros resultados, con lo que obtuvimos en la Ec.(3.87)

$$ik_y e^\varphi b_z - ik_z e^\varphi b_y = -\varepsilon_0 \mu_0 i\omega \varepsilon_{xx} e_x e^\varphi - \varepsilon_0 \mu_0 i\omega \varepsilon_{xy} e_y e^\varphi - \varepsilon_0 \mu_0 i\omega \varepsilon_{xz} e_z e^\varphi,$$

y despejando la componente longitudinal del campo eléctrico da como resultado

$$e_x = \frac{k_z b_y}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \varepsilon_{xx}} - \frac{k_y b_z}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \varepsilon_{xx}} - \frac{\varepsilon_{xy} e_y}{\varepsilon_{xx}} - \frac{\varepsilon_{xz} e_z}{\varepsilon_{xx}}, \quad (3.90)$$

así como las derivadas de las componentes transversales de los campo magnéticos

$$\begin{aligned} -e^\varphi \frac{\partial b_z}{\partial x} + ik_z e^\varphi b_x &= -\varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{yx} e_x e^\varphi - \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{yy} e_y e^\varphi - \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{yz} e_z e^\varphi \\ \Rightarrow \frac{\partial b_z}{\partial x} &= ik_z b_x + \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{yx} e_x + \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{yy} e_y + \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{yz} e_z, \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} e^\varphi \frac{\partial b_y}{\partial x} - ik_y e^\varphi b_x &= -\varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{zx} e_x e^\varphi - \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{zy} e_y e^\varphi - \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{zz} e_z e^\varphi \\ \Rightarrow \frac{\partial b_y}{\partial x} &= ik_y b_x - \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{zx} e_x - \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{zy} e_y - \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{zz} e_z. \end{aligned} \quad (3.92)$$

De nueva cuenta hemos obtenido una ecuación algebraica y dos diferenciales. Las dos ecuaciones algebraicas (3.82) y (3.90) las sustituimos en las ecuaciones (3.83), (3.84), (3.91) y (3.92), ya que estas ecuaciones dependen de  $e_x$  y  $b_x$ , para tener un sistema de ecuaciones que emplearemos más adelante, que sólo dependa de componentes  $y$  y  $z$ , comenzando con las relacionadas al campo eléctrico

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_z}{\partial x} &= ik_z \left( \frac{k_z b_y}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \varepsilon_{xx}} - \frac{k_y b_z}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \varepsilon_{xx}} - \frac{\varepsilon_{xy} e_y}{\varepsilon_{xx}} - \frac{\varepsilon_{xz} e_z}{\varepsilon_{xx}} \right) - i \omega b_y \\ \Rightarrow \frac{\partial e_z}{\partial x} &= -\frac{ik_z \varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{xx}} e_z - \frac{ik_z \varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} e_y - \frac{ik_z k_y}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \varepsilon_{xx}} b_z - \left( i \omega - \frac{ik_z^2}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \varepsilon_{xx}} \right) b_y, \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_y}{\partial x} &= ik_y \left( \frac{k_z b_y}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \varepsilon_{xx}} - \frac{k_y b_z}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \varepsilon_{xx}} - \frac{\varepsilon_{xy} e_y}{\varepsilon_{xx}} - \frac{\varepsilon_{xz} e_z}{\varepsilon_{xx}} \right) + i \omega b_z \\ \Rightarrow \frac{\partial e_y}{\partial x} &= -\frac{ik_y \varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{xx}} e_z - \frac{ik_y \varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} e_y + \left( i \omega - \frac{ik_y^2}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \varepsilon_{xx}} \right) b_z + \frac{ik_y k_z}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \varepsilon_{xx}} b_y. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Y, por último, haremos la sustitución para las ecuaciones relacionadas al campo magnético

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_z}{\partial x} &= ik_z \left( \frac{1}{\omega} k_y e_z - \frac{1}{\omega} k_z e_y \right) + \mu_0 i \omega \varepsilon_{yx} \left( \frac{k_z b_y}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \varepsilon_{xx}} - \frac{k_y b_z}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \varepsilon_{xx}} - \frac{\varepsilon_{xy} e_y}{\varepsilon_{xx}} - \frac{\varepsilon_{xz} e_z}{\varepsilon_{xx}} \right) \\ &\quad + \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{yy} e_y + \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{yz} e_z \\ &= \left( \frac{ik_z k_y}{\omega} + \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{yz} - \frac{\varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{yx} \varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{xx}} \right) e_z + \left( -\frac{ik_z^2}{\omega} + \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{yy} - \frac{\varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{yx} \varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} \right) e_y \\ &\quad - \frac{ik_y \varepsilon_{yx} b_z}{\varepsilon_{xx}} + \frac{ik_z \varepsilon_{yx} b_y}{\varepsilon_{xx}}, \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_y}{\partial x} &= ik_y \left( \frac{1}{\omega} k_y e_z - \frac{1}{\omega} k_z e_y \right) - \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{zx} \left( \frac{k_z b_y}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \varepsilon_{xx}} - \frac{k_y b_z}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \varepsilon_{xx}} - \frac{\varepsilon_{xy} e_y}{\varepsilon_{xx}} - \frac{\varepsilon_{xz} e_z}{\varepsilon_{xx}} \right) \\ &\quad - \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{zy} e_y - \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{zz} e_z \\ &= \left( \frac{ik_y^2}{\omega} - \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{zz} + \frac{\varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{zx} \varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{xx}} \right) e_z + \left( -\frac{ik_y k_z}{\omega} - \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{zy} + \frac{\varepsilon_0 \mu_0 i \omega \varepsilon_{zx} \varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} \right) e_y \\ &\quad + \frac{ik_y \varepsilon_{zx} b_z}{\varepsilon_{xx}} - \frac{ik_z \varepsilon_{zx} b_y}{\varepsilon_{xx}}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Podemos expresar todo en forma matricial con  $\kappa_0 = \left( \frac{k_z k_y}{\omega} + \delta \varepsilon_{yz} - \frac{\delta \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{xx}} \right)$  y  $\delta = \varepsilon_0 \mu_0 \omega$ , y como el tensor dieléctrico es simétrico tenemos que  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$ ,  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$ ,  $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} e_z \\ e_y \\ b_z \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\kappa_0 & -\frac{ik_z^2}{\omega} + i\delta\varepsilon_{yy} - \frac{i\delta\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}} & 0 & 0 \\ i\frac{k_y^2}{\omega} - i\delta\varepsilon_{zz} + i\frac{\delta\varepsilon_{xz}^2}{\varepsilon_{xx}} & -i\kappa_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_z \\ e_y \\ b_z \\ b_y \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{ik_z\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{xx}} & \frac{ik_z\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} & \frac{ik_zk_y}{\delta\varepsilon_{xx}} & i\omega - \frac{ik_z^2}{\delta\varepsilon_{xx}} \\ \frac{ik_y\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{xx}} & \frac{ik_y\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} & -i\omega + \frac{ik_y^2}{\delta\varepsilon_{xx}} & \frac{ik_yk_z}{\delta\varepsilon_{xx}} \\ 0 & 0 & -\frac{ik_y\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_{xx}} & \frac{ik_z\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_{xx}} \\ 0 & 0 & -\frac{ik_y\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{xx}} & \frac{ik_z\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{xx}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_z \\ e_y \\ b_z \\ b_y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto es conveniente introducir el vector de 4 componentes, donde  ${}^2\Psi$  es un campo representado por componentes del campo  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , transversales a la dirección de propagación de la onda electromagnética cuasi-plana

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} = M \vec{\Psi}. \quad (3.98)$$

Esta es la ecuación de propagación de la luz en un cristal líquido colestérico. Aún cuando es una ecuación de primer grado es todavía complicada su solución. Cuando la luz incide sobre el eje de la hélice, podemos definir los valores de las componentes de esta forma:  $k_y, k_z \rightarrow 0$ ;  $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz} \rightarrow 0$ ;  $\varepsilon_{zz} \rightarrow \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \theta$ ;  $\varepsilon_{yy} \rightarrow \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \theta$ ;  $\varepsilon_{yz} \rightarrow \varepsilon_a \sin \theta \cos \theta$ . De esta manera, la matriz queda de la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} e_z \\ e_y \\ b_z \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\omega \\ 0 & 0 & i\omega & 0 \\ i\varepsilon_0\mu_0\omega\varepsilon_a \sin \theta \cos \theta & i\varepsilon_0\mu_0\omega (\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \theta) & 0 & 0 \\ -i\varepsilon_0\mu_0\omega (\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \theta) & -i\varepsilon_0\mu_0\omega\varepsilon_a \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_z \\ e_y \\ b_z \\ b_y \end{pmatrix}, \quad (3.99)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} e_z \\ e_y \\ b_z \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i\omega \\ 0 & 0 & -i\omega & 0 \\ -i\omega\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_a \sin \theta \cos \theta & -i\omega\varepsilon_0\mu_0 (\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \theta) & 0 & 0 \\ i\omega\varepsilon_0\mu_0 (\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \theta) & i\omega\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_a \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_z \\ e_y \\ b_z \\ b_y \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

Lo que haremos es aplicar la Transformación de Oseen[23] al campo  $\Psi$ , esto implica una rotación  $\vec{\Phi} = R \vec{\Psi}$  donde  $R$  es una matriz de rotación de  $4 \times 4$ , obteniendo una matriz de entradas constantes

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

Nótese que esta rotación por un ángulo  $\theta$  se hace en los planos de los campos eléctricos y magnéticos simultáneamente.

---

${}^2\Psi = ( e_z \ e_y \ b_z \ b_y )$

Despejamos a  $\vec{\Psi} \Rightarrow \vec{\Psi} = R^{-1}\vec{\Phi}$ , y la sustituimos en la Ec.(3.100)

$$\frac{d\vec{\Psi}}{dx} = \frac{dR^{-1}}{dx}\vec{\Phi} + R^{-1}\frac{d\vec{\Phi}}{dx} = MR^{-1}\vec{\Phi}, \quad (3.102)$$

todo esto con el fin de poder simplificar la ecuación  $\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial x} = M\vec{\Psi}$ , ya que sólo se puede calcular la solución analíticamente cuando  $M$  es una matriz constante. Entonces

$$R^{-1}\frac{d\vec{\Phi}}{dx} = MR^{-1}\vec{\Phi} - \frac{dR^{-1}}{dx}\vec{\Phi} \quad (3.103)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\Phi}}{dx} = \left( RMR^{-1} - R\frac{dR^{-1}}{dx} \right) \vec{\Phi} \quad (3.104)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\Phi}}{dx} = \left( R^{-1}MR + R^{-1}\frac{dR}{dx} \right) \vec{\Phi}. \quad (3.105)$$

Por tanto, después de efectuar estas operaciones se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{d\vec{\Phi}}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & -q & 0 & i\omega \\ q & 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_{\perp} & 0 & -q \\ i\omega\varepsilon_0\mu_0(\varepsilon_a + \varepsilon_{\perp}) & 0 & q & 0 \end{pmatrix} \vec{\Phi}, \quad (3.106)$$

o bien

$$\frac{d\vec{\Phi}}{dx} = i \begin{pmatrix} 0 & iq & 0 & \omega \\ -iq & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & -\omega\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_{\perp} & 0 & iq \\ \omega\varepsilon_0\mu_0(\varepsilon_a + \varepsilon_{\perp}) & 0 & -iq & 0 \end{pmatrix} \vec{\Phi}. \quad (3.107)$$

Como se mencionó anteriormente, la Ec.(3.107) contiene una matriz de elementos constantes. A partir de esta matriz obtendremos una relación, por medio del cálculo de sus eigenvalores. Entonces, para calcular los eigenvalores tenemos que resolver  $\det(H - lI) = 0$ , donde  $I$  es la matriz de identidad de  $4 \times 4$  y  $l$  es el llamado eigenvalor correspondiente, luego

$$H - lI = \begin{pmatrix} -l & iq & 0 & \omega \\ -iq & -l & -\omega & 0 \\ 0 & -\omega\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_{\perp} & -l & iq \\ \omega\varepsilon_0\mu_0(\varepsilon_a + \varepsilon_{\perp}) & 0 & -iq & -l \end{pmatrix}, \quad (3.108)$$

calculamos el determinante

$$\det(H - lI) = l^4 - (2q^2 + \omega^2\varepsilon_0\mu_0(\varepsilon_a + 2\varepsilon_{\perp}))l^2 + q^4 - \omega^2\varepsilon_0\mu_0(\varepsilon_a + 2\varepsilon_{\perp})q^2 + \omega^4\varepsilon_0^2\mu_0^2\varepsilon_{\perp}(\varepsilon_a + \varepsilon_{\perp}), \quad (3.109)$$

si definimos las variables adimensionales  $\Lambda$  y  $\Omega$  a través de la siguientes expresiones  $l = \Lambda q$ ,  $\omega^2\varepsilon_0\mu_0 = \Omega^2 q^2$  entonces transformamos esta ecuación de cuarto grado en

$$\Lambda^4 - (2 + \Omega^2(\varepsilon_a + 2\varepsilon_{\perp}))\Lambda^2 + 1 - \Omega^2(\varepsilon_a + 2\varepsilon_{\perp}) + \Omega^4\varepsilon_{\perp}(\varepsilon_a + \varepsilon_{\perp}) = 0. \quad (3.110)$$

Resolviendo la Ec.(3.110), que es una ecuación algebraica, a partir de  $\Omega = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , obtenemos

$$\Omega = \mp \sqrt{\frac{(\varepsilon_a + 2\varepsilon_\perp)(1 + \Lambda^2) \mp \sqrt{\varepsilon_a^2(1 + \Lambda^2)^2 + 16\Lambda^2\varepsilon_\perp(\varepsilon_a + \varepsilon_\perp)}}{2\varepsilon_\perp(\varepsilon_a + \varepsilon_\perp)}}. \quad (3.111)$$

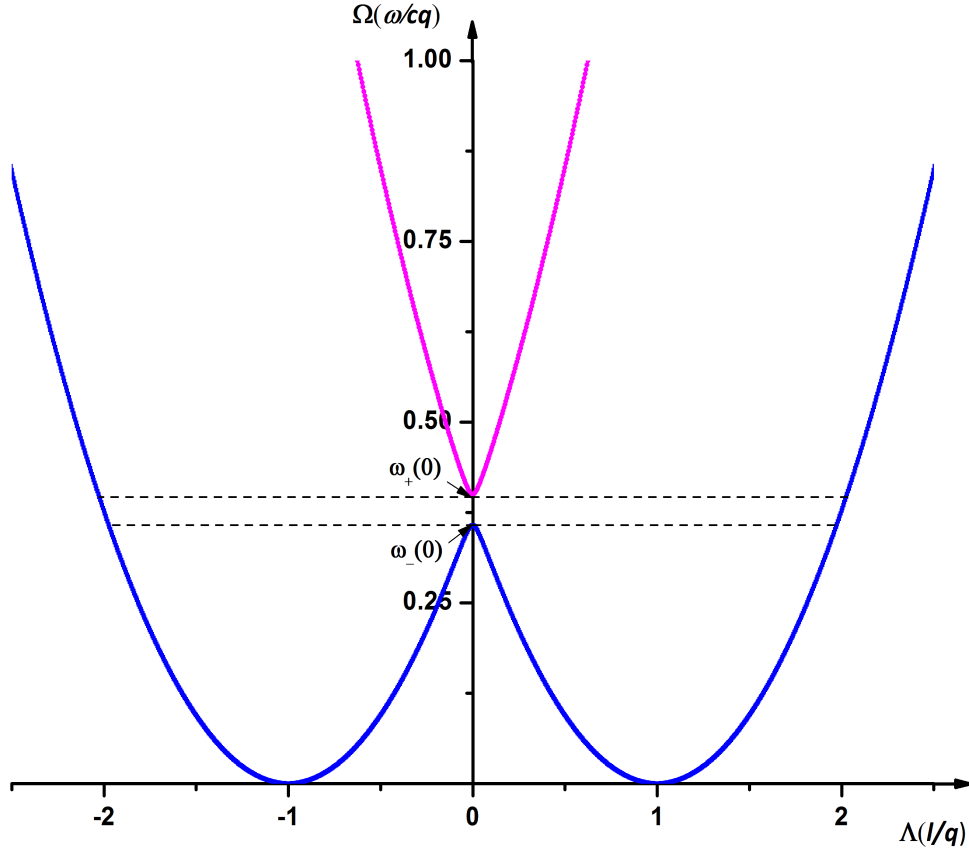


Figura 3.4: Relación de dispersión para la propagación de modos electromagnéticos en una espiral colestérica.

Esta relación entre  $\Omega$  y  $\Lambda$ , para el valor real de  $\Lambda$ , es llamada la relación de dispersión, la cual nos determina cuatro modos. Al graficar la relación de dispersión, donde los valores  $\varepsilon_a = 0,3$  y  $\varepsilon_\perp = 2,5$  [5], es posible ver dichos modos (Fig.(3.4)).

Al haber graficado la Ec.(3.111), se muestra varias características que determinan a un cristal líquido colestérico. Para hablar de estas características, es útil considerar el caso  $\Lambda = 0$  (es decir,  $l = 0$ ). Entonces la Ec.(3.111) queda

$$\frac{\omega^2}{c^2 q^2} - \frac{\varepsilon_a + 2\varepsilon_\perp \mp \varepsilon_a^2}{2\varepsilon_\perp(\varepsilon_a + \varepsilon_\perp)} = 0, \quad (3.112)$$

donde  $\Omega = \frac{\omega}{cq}$ , despejamos  $\omega$  para conocer los valores donde se forma la brecha en la Fig.(3.4), entonces

$$\omega(0) = \mp cq \sqrt{\frac{\varepsilon_a + 2\varepsilon_\perp \mp \varepsilon_a^2}{2\varepsilon_\perp(\varepsilon_a + \varepsilon_\perp)}}, \quad (3.113)$$

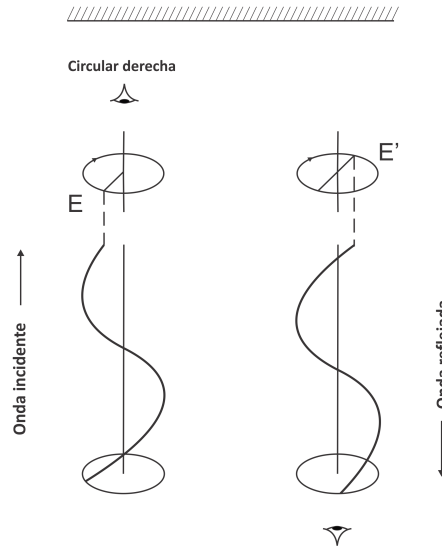


Figura 3.5: Reflexión de una onda circular sobre un espejo convencional. En la superficie del espejo el campo reflejado  $E'$  es opuesto al campo incidente  $E$ [5].

denotaremos esas dos partes con el signo (-) y (+), respectivamente,

$$\begin{aligned}\omega_-(0) &= \frac{cq}{m_{\parallel}}, \\ \omega_+(0) &= \frac{cq}{m_{\perp}},\end{aligned}\tag{3.114}$$

donde  $m_{\parallel} = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$  y  $m_{\perp} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ . Tanto  $\omega_-(0)$  como  $\omega_+(0)$  describen una onda polarizada lineal.

Las características de polarización de las ondas en un colestérico son:

1. La luz reflejada es circularmente polarizada.
2. Si tomamos a la onda incidente en dos componentes de polarizaciones circulares opuestas, una de las componentes es fuertemente reflejada en forma de la espiral colestérica y la otra componente se transmite sin reflexión selectiva[24]. Véase Fig.(3.5).

Al intervalo  $\omega_-(0) < \omega < \omega_+(0)$  se le llama *brecha parcial de frecuencia*[5]. Esta "banda" visible significa que un colestérico se comporta como un filtro de ondas electromagnéticas, ya que en dicho intervalo sólo permite el paso de la luz polarizada circularmente contraria a la dirección de la hélice. Otra característica de un colestérico es la reflexión de Bragg que da lugar al fenómeno de Bragg circular[24]. Por lo tanto, esta brecha  $[\omega_-(0), \omega_+(0)]$  corresponde al rango de frecuencias para posibles reflexiones de Bragg[5].

En conclusión hemos visto como se propaga una onda cuasi-plana en un medio, llegando a la solución que representa una superposición de ondas planas donde su solución es analítica si su



incidencia es normal, sino es así, entonces la solución tendría que ser por medio de métodos numéricos y el comportamiento es cualitativamente igual. Esto pasa debido a la forma en como construimos el tensor dieléctrico. Pudimos mostrar el comportamiento de un cristal líquido colestérico como un filtro de ondas electromagnéticas, esto porque presenta una brecha parcial de frecuencias. Entonces por último construiremos una teoría de promediación para cristales fotónicos, con la estructura de un cristal líquido colestérico, desarrollando la solución de las ecuaciones de Maxwell en series de Fourier y tomando solo en cuenta el esparcimiento de hasta dos fotones.

## Capítulo 4

# Promediación de propiedades electromagnéticas

### 4.1. Ecuaciones Básicas

Es directo comprobar que las ecuaciones de Maxwell (3.3) y (3.4) pueden ser representadas en forma matricial, para el caso de campos monocromáticos y en ausencia de fuentes, de la siguiente manera

$$R\vec{\psi} = i\frac{\omega}{c}M\vec{\phi}, \quad (4.1)$$

donde

$$R = \begin{pmatrix} rot & 0 \\ 0 & rot \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$rot = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

en donde los vectores  $\vec{\psi}$  y  $\vec{\phi}$  están definidos como

$$\vec{\psi} \equiv \begin{pmatrix} \Xi_0^{1/2} \vec{e} \\ \Xi_0^{-1/2} \vec{h} \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi} \equiv \begin{pmatrix} \Xi_0^{1/2} \frac{\vec{e}}{\epsilon_0} \\ \Xi_0^{-1/2} \frac{\vec{h}}{\mu_0} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

el valor  $\Xi \equiv \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$  es la impedancia del vacío y  $M$  es un tensor de intercambio de  $6 \times 6$

$$M \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

donde  $I$  es el tensor de identidad de  $3 \times 3$ . Las relaciones constitutivas (3.5) y (3.6), para medios bianisotrópicos se pueden expresar como  $A$ [25]

$$\vec{\phi} = \gamma \vec{\psi}[A], \quad (4.6)$$

$$\gamma \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon \left( \vec{r} \right) & \chi \left( \vec{r} \right) \\ \zeta \left( \vec{r} \right) & \mu \left( \vec{r} \right) \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

en donde  $\varepsilon$  y  $\mu$  son los tensores de permitividad dieléctrica y de permeabilidad magnética, respectivamente. Y  $\zeta$  y  $\chi$  son pseudotensores generados por el campo eléctrico y el campo magnético, respectivamente. Para medios sin pérdidas, el tensor material  $\gamma$  debe ser Hermitiano[25].

Usando el método de desarrollo en ondas de Bloch se consigue definir el modelo homogéneo para medios bianisotrópicos. Según este procedimiento, el tensor  $\gamma$  que define las propiedades materiales del sistema, que para un cristal satisface la condición de periodicidad  $\gamma(\vec{r} + \vec{p}) = \gamma(\vec{r})$ , es desarrollado en una serie de Fourier[25], como

$$\gamma(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} \gamma(\vec{p}) \exp \left[ ik_0 \vec{p} \cdot \vec{r} \right], \quad (4.8)$$

donde  $k_0 \vec{p}$  son los vectores red del espacio recíproco. Debido al teorema de Bloch el campo electromagnético se puede representar en términos de modos normales definidos como

$$\vec{\psi}(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}'} \vec{\psi}(\vec{p}') \exp \left[ ik_0 (\vec{n} + \vec{p}') \cdot \vec{r} \right], \quad (4.9)$$

donde  $k_0 \vec{n}$  es el vector de Bloch y  $\vec{\psi}(\vec{p}')$  son las amplitudes de Fourier de las ondas de Bloch[25]. Si sustituimos las ecuaciones (4.8) y (4.9) en la Ec.(4.6) tenemos el siguiente resultado

$$\vec{\phi} = \left( \sum_{\vec{p}} \gamma(\vec{p}) \exp \left[ ik_0 \vec{p} \cdot \vec{r} \right] \right) \left( \sum_{\vec{p}'} \vec{\psi}(\vec{p}') \exp \left[ ik_0 (\vec{n} + \vec{p}') \cdot \vec{r} \right] \right), \quad (4.10)$$

expresándola en una forma más compacta como

$$\vec{\phi} = \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'} \gamma(\vec{p}) \vec{\psi}(\vec{p}') \exp \left[ ik_0 (\vec{p} + (\vec{n} + \vec{p}')) \cdot \vec{r} \right]. \quad (4.11)$$

Sea

$$\vec{\phi}(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} \vec{\phi}(\vec{p}) \exp \left[ ik_0 (\vec{n} + \vec{p}) \cdot \vec{r} \right], \quad (4.12)$$

sustituyendo  $\vec{\phi}(\vec{r})$  en (4.11) obtenemos

$$\sum_{\vec{p}} \vec{\phi}(\vec{p}) \exp \left[ ik_0 (\vec{n} + \vec{p}) \cdot \vec{r} \right] = \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'} \gamma(\vec{p}) \vec{\psi}(\vec{p}') \exp \left[ ik_0 (\vec{p} + (\vec{n} + \vec{p}')) \cdot \vec{r} \right], \quad (4.13)$$

multiplicamos a la ecuación anterior por  $\frac{1}{2\pi} \exp \left[ -ik_0 (\vec{n} + \vec{p}'') \cdot \vec{r} \right]$

$$\sum_{\vec{p}} \frac{1}{2\pi} \vec{\phi}(\vec{p}) \exp \left[ ik_0(\vec{p} - \vec{p}'') \cdot \vec{r} \right] = \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'} \frac{1}{2\pi} \gamma(\vec{p}) \vec{\psi}(\vec{p}') \exp \left[ ik_0(\vec{p} + \vec{p}' - \vec{p}'') \cdot \vec{r} \right]. \quad (4.14)$$

Integramos en ambos lados de la igualdad

$$\sum_{\vec{p}} \vec{\phi}(\vec{p}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ ik_0(\vec{p} - \vec{p}'') \cdot \vec{r} \right] d\vec{r} = \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'} \gamma(\vec{p}) \vec{\psi}(\vec{p}') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ ik_0(\vec{p} + \vec{p}' - \vec{p}'') \cdot \vec{r} \right] d\vec{r}, \quad (4.15)$$

se puede ver que en las integrales anteriores está definida una "Delta de Kronecker" expresada en la base de Fourier, es decir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vec{a}_i - \vec{a}_n) \cdot \vec{r}} d\vec{r} = \delta_{i,n}, \quad (4.16)$$

donde

$$\delta_{i,n} = \begin{cases} 0 & \vec{a}_i \neq \vec{a}_n \\ 1 & \vec{a}_i = \vec{a}_n \end{cases}, \quad (4.17)$$

entonces podemos expresar a la Ec.(4.15) como

$$\sum_{\vec{p}} \vec{\phi}(\vec{p}) \delta_{\vec{p}, \vec{p}''} = \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'} \gamma(\vec{p}) \vec{\psi}(\vec{p}') \delta_{\vec{p} + \vec{p}', \vec{p}''}, \quad (4.18)$$

teniendo una función dependiente del vector  $\vec{p}''$

$$\vec{\phi}(\vec{p}'') = \sum_{\vec{p}'} \gamma(\vec{p}'' - \vec{p}') \vec{\psi}(\vec{p}'). \quad (4.19)$$

Partiendo ahora de la Ec.(4.1) tenemos lo siguiente

$$R\vec{\psi}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \text{rot} \left( \vec{\psi}(\vec{r}) \right) & 0 \\ 0 & \text{rot} \left( \vec{\psi}(\vec{r}) \right) \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

que explícitamente significa

$$\text{rot} \left( \vec{\psi}(\vec{r}) \right) = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z \vec{\psi}(\vec{r}) & \partial_y \vec{\psi}(\vec{r}) \\ \partial_z \vec{\psi}(\vec{r}) & 0 & -\partial_x \vec{\psi}(\vec{r}) \\ -\partial_y \vec{\psi}(\vec{r}) & \partial_x \vec{\psi}(\vec{r}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Efectuando las operaciones para cada entrada de la matriz anterior, obtenemos

$$\partial_x \vec{\psi}(\vec{r}) = \frac{\partial \vec{\psi}(\vec{r})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{\vec{p}'} \vec{\psi}(\vec{p}') \exp \left[ ik_0(\vec{n} + \vec{p}') \cdot \vec{r} \right] \right), \quad (4.22)$$

donde  $\vec{r} = (x, y, z)$ ,  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  y  $\vec{p}' = (p'_x, p'_y, p'_z)$

$$\partial_x \vec{\psi}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{\vec{p}'} \vec{\psi}(\vec{p}') \exp [ik_0 ((n_x + p'_x) + (n_y + p'_y) + (n_z + p'_z)) \cdot (x, y, z)] \right), \quad (4.23)$$

realizando el producto escalar y derivando con respecto al eje  $x$ , determinamos que

$$\partial_x \vec{\psi}(\vec{r}) = ik_0 (n_x + p'_x) \sum_{\vec{p}'} \vec{\psi}(\vec{p}') \exp [ik_0 ((n_x + p'_x)x + (n_y + p'_y)y + (n_z + p'_z)z)], \quad (4.24)$$

de manera análoga se realizan las mismas operaciones para  $\partial_y \vec{\psi}(\vec{r})$  y  $\partial_z \vec{\psi}(\vec{r})$ , por tanto

$$\partial_y \vec{\psi}(\vec{r}) = ik_0 (n_y + p'_y) \sum_{\vec{p}'} \vec{\psi}(\vec{p}') \exp [ik_0 ((n_x + p'_x)x + (n_y + p'_y)y + (n_z + p'_z)z)], \quad (4.25)$$

$$\partial_z \vec{\psi}(\vec{r}) = ik_0 (n_z + p'_z) \sum_{\vec{p}'} \vec{\psi}(\vec{p}') \exp [ik_0 ((n_x + p'_x)x + (n_y + p'_y)y + (n_z + p'_z)z)]. \quad (4.26)$$

Entonces la forma de la matriz de rotación es

$$\text{rot} \left( \vec{\psi}(\vec{r}) \right) = ik_0 \begin{pmatrix} 0 & -(n_z + p'_z) & (n_y + p'_y) \\ (n_z + p'_z) & 0 & -(n_x + p'_x) \\ -(n_y + p'_y) & (n_x + p'_x) & 0 \end{pmatrix} \sum_{\vec{p}'} \vec{\psi}(\vec{p}') \exp [ik_0 (\vec{n} + \vec{p}') \cdot \vec{r}], \quad (4.27)$$

definimos una constante  $\alpha$  como

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -(n_z + p'_z) & (n_y + p'_y) \\ (n_z + p'_z) & 0 & -(n_x + p'_x) \\ -(n_y + p'_y) & (n_x + p'_x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

por tanto

$$R\vec{\psi}(\vec{r}) = ik_0 \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \sum_{\vec{p}'} \vec{\psi}(\vec{p}') \exp [ik_0 (\vec{n} + \vec{p}') \cdot \vec{r}]. \quad (4.29)$$

En la otra parte de la Ec.(4.1) se tiene que  $i\frac{\omega}{c}M\vec{\phi}$ , sustituimos (4.19) dando el siguiente resultado

$$i\frac{\omega}{c}M\vec{\phi}(\vec{p}'') = i\frac{\omega}{c}M \sum_{\vec{p}'} \gamma(\vec{p}'' - \vec{p}') \vec{\psi}(\vec{p}'), \quad (4.30)$$

juntamos las dos partes de la Ec.(4.1) llegando a

$$ik_0 \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \sum_{\vec{p}'} \vec{\psi}(\vec{p}') \exp [ik_0 (\vec{n} + \vec{p}') \cdot \vec{r}] = i\frac{\omega}{c}M \sum_{\vec{p}'} \gamma(\vec{p}'' - \vec{p}') \vec{\psi}(\vec{p}'), \quad (4.31)$$

si definimos

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

entonces

$$ik_0 S \sum_{\vec{p}'} \vec{\psi}(\vec{p}') \exp \left[ ik_0 (\vec{n} + \vec{p}') \cdot \vec{r} \right] = i \frac{\omega}{c} M \sum_{\vec{p}'} \gamma(\vec{p}'' - \vec{p}') \vec{\psi}(\vec{p}'), \quad (4.33)$$

con lo que

$$S \sum_{\vec{p}'} \vec{\psi}(\vec{p}') \exp \left[ ik_0 (\vec{n} + \vec{p}') \cdot \vec{r} \right] = M \sum_{\vec{p}'} \gamma(\vec{p}'' - \vec{p}') \vec{\psi}(\vec{p}'). \quad (4.34)$$

Si separamos de la suma los términos  $\vec{p}' = \vec{p}'', \vec{0}$  de la Ec.(4.34) se obtiene

$$S \vec{\psi}(\vec{p}'') = M \gamma(\vec{0}) \vec{\psi}(\vec{p}'') + M \gamma(\vec{p}'') \vec{\psi}(\vec{0}) + M \sum_{\vec{p}' \neq \vec{p}'', \vec{0}} \gamma(\vec{p}'' - \vec{p}') \vec{\psi}(\vec{p}'), \quad (4.35)$$

que después de agrupar términos comunes tenemos

$$\left( S - M \gamma(\vec{0}) \right) \vec{\psi}(\vec{p}'') = M \gamma(\vec{p}'') \vec{\psi}(\vec{0}) + M \sum_{\vec{p}' \neq \vec{p}'', \vec{0}} \gamma(\vec{p}'' - \vec{p}') \vec{\psi}(\vec{p}'), \quad (4.36)$$

luego multiplicamos por el tensor inverso de intercambio ( $M^{-1}$ ), definido en la Ec.(4.5), con lo cual llegamos a

$$-\left( \gamma(\vec{0}) - M^{-1} \cdot S \right) \vec{\psi}(\vec{p}'') = \gamma(\vec{p}'') \vec{\psi}(\vec{0}) + \sum_{\vec{p}' \neq \vec{p}'', \vec{0}} \gamma(\vec{p}'' - \vec{p}') \vec{\psi}(\vec{p}'), \quad (4.37)$$

al efectuar el producto  $M^{-1} \cdot S$  nos queda la expresión como

$$-\left( \gamma(\vec{0}) - \begin{pmatrix} 0 & -I\alpha \\ I\alpha & 0 \end{pmatrix} \right) \vec{\psi}(\vec{p}'') = \gamma(\vec{p}'') \vec{\psi}(\vec{0}) + \sum_{\vec{p}' \neq \vec{p}'', \vec{0}} \gamma(\vec{p}'' - \vec{p}') \vec{\psi}(\vec{p}'), \quad (4.38)$$

si introducimos la notación

$$\gamma(\vec{0}) = \begin{pmatrix} \varepsilon(\vec{0}) & \chi(\vec{0}) \\ \zeta(\vec{0}) & \mu(\vec{0}) \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Por lo tanto todo queda de la siguiente forma

$$-\left( \begin{pmatrix} \varepsilon(\vec{0}) & \chi(\vec{0}) + \alpha \\ \zeta(\vec{0}) - \alpha & \mu(\vec{0}) \end{pmatrix} \right) \vec{\psi}(\vec{p}'') = \gamma(\vec{p}'') \vec{\psi}(\vec{0}) + \sum_{\vec{p}' \neq \vec{p}'', \vec{0}} \gamma(\vec{p}'' - \vec{p}') \vec{\psi}(\vec{p}'), \quad (4.40)$$

o bien, como

$$\vec{\psi}(\vec{p}'') = G(\vec{p}'') \gamma(\vec{p}'') \vec{\psi}(\vec{0}) + G(\vec{p}'') \sum_{\vec{p}' \neq \vec{p}'', \vec{0}} \gamma(\vec{p}'' - \vec{p}') \vec{\psi}(\vec{p}'), \quad (4.41)$$

donde hemos definido al operador  $G$  como

$$G(\vec{q}'') = - \begin{pmatrix} \varepsilon(\vec{0}) & \chi(\vec{0}) + \alpha \\ \zeta(\vec{0}) - \alpha & \mu(\vec{0}) \end{pmatrix}^{-1}. \quad (4.42)$$

El modelo macroscópico efectivo está definido implícitamente de la componente de la longitud de onda larga de la onda de Bloch (Born and Huang 1954)[25]. El tensor efectivo del material  $\langle \gamma \rangle$ , de orden cero, está definido por la relación  $\vec{\phi}(\vec{0}) = \langle \gamma \rangle \vec{\psi}(\vec{0})$ . Así, tomando en cuenta la Ec.(4.19), y  $\vec{p}'' = \vec{0}$ , uno obtiene

$$\vec{\phi}(\vec{0}) = \sum_{\vec{p}} \gamma(-\vec{p}') \vec{\psi}(\vec{p}'), \quad (4.43)$$

$$\langle \gamma \rangle \vec{\psi}(\vec{0}) = \sum_{\vec{p}''} \gamma(-\vec{p}'') \vec{\psi}(\vec{p}''). \quad (4.44)$$

A continuación obtenemos la aproximación, que proviene del primer término de la Ec.(4.44), la cual se relaciona con el esparcimiento de dos fotones.

$$\langle \gamma \rangle \vec{\psi}(\vec{0}) \equiv \gamma(\vec{0}) \vec{\psi}(\vec{0}) + \gamma(-\vec{p}'') \vec{\psi}(\vec{p}''). \quad (4.45)$$

El porqué de sólo tomar en cuenta el esparcimiento hasta dos fotones se debe que está representa la primera corrección en donde se usa la estructura, después de solo considerar una simple promediación del medio. Este orden de aproximación, también es consistente con el espíritu general de la aproximación basada en el límite de longitud de onda larga pues permite toma en cuenta solo una desviación de la luz por la red periódica.

Asimismo,  $\tilde{\gamma}$  está definida tomando  $\vec{p}'' = \vec{0}$  en la Ec.(4.45) y dada por la componente de Fourier de orden cero de  $\gamma(\vec{r})$ , la cual nos dice  $\gamma(\vec{0}) = \bar{\gamma}$  (correspondiendo a una promedio espacial). Si además sustituimos el factor de orden cero de la Ec.(4.41), entonces

$$\langle \gamma \rangle \vec{\psi}(\vec{0}) = \bar{\gamma} \vec{\psi}(\vec{0}) + \gamma(-\vec{p}'') G(\vec{p}'') \gamma(\vec{p}'') \vec{\psi}(\vec{0}). \quad (4.46)$$

Por lo tanto, el tensor efectivo del material al siguiente orden está dado por

$$\langle \gamma \rangle = \bar{\gamma} + \gamma(-\vec{p}'') G(\vec{p}'') \gamma(\vec{p}''). \quad (4.47)$$

## 4.2. Medios dieléctrico y magnético

Al estar en un medio anisotrópico simple, que no presenta una bianisotropía implícita ( $\zeta = \chi = 0$ ), los tensores dieléctrico y magnético son periódicos a lo largo del eje x, entonces supondremos que sus promedios espaciales tienen simetría uniaxial como

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp} \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\perp} \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Dada la simetría uniaxial del medio, es posible expresar al vector de Bloch, sin pérdida de generalidad, como  $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k_0} = (n_x, 0, n_z)$ . Por lo cual  $G$ , tomando periodicidad uniaxial a lo largo de  $x$ , es de la forma

$$G(\vec{q}') = - \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon} & \alpha \\ -\alpha & \bar{\mu} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (4.50)$$

Entonces si sustituimos los valores  $\bar{\varepsilon}$ ,  $\bar{\mu}$  y  $\alpha$ , en la ecuación anterior se obtiene

$$G(\vec{q}') = - \begin{pmatrix} \varepsilon_{\parallel} & 0 & 0 & 0 & -n_z & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 & n_z & 0 & -(n_x + p') \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 & n_x + p' & 0 \\ 0 & n_z & 0 & \mu_{\parallel} & 0 & 0 \\ -n_z & 0 & n_x + p' & 0 & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & -(n_x + p') & 0 & 0 & 0 & \mu_{\perp} \end{pmatrix}^{-1}, \quad (4.51)$$

o también podemos expresar a  $G$ , la cual se puede invertir explícitamente y reescribir como una matriz a bloques, como<sup>1</sup>

$$G = - \begin{pmatrix} G_{ee} & G_{em} \\ G_{me} & G_{mm} \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

en donde cada uno de los bloques está definido por

$$G_{ee} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp} - (n_x + p')^2}{g_1} & 0 & \frac{-n_z(n_x + p')}{g_1} \\ 0 & \frac{\mu_{\parallel}\mu_{\perp}}{g_2} & 0 \\ \frac{-n_z(n_x + p')}{g_1} & 0 & \frac{\varepsilon_{\parallel}\mu_{\perp} - n_z^2}{g_1} \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

$$G_{mm} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp} - (n_x + p')^2}{g_2} & 0 & \frac{-n_z(n_x + p')}{g_2} \\ 0 & \frac{\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}}{g_1} & 0 \\ \frac{-n_z(n_x + p')}{g_2} & 0 & \frac{\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel} - n_z^2}{g_2} \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

$$G_{em} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\varepsilon_{\perp}n_z}{g_1} & 0 \\ \frac{-\mu_{\perp}n_z}{g_2} & 0 & \frac{\mu_{\parallel}(n_x + p')}{g_2} \\ 0 & \frac{-\varepsilon_{\parallel}(n_x + p')}{g_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

$$G_{me} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\mu_{\perp}n_z}{g_2} & 0 \\ \frac{\varepsilon_{\perp}n_z}{g_1} & 0 & \frac{-\varepsilon_{\parallel}(n_x + p')}{g_1} \\ 0 & \frac{\mu_{\parallel}(n_x + p')}{g_2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

<sup>1</sup> véase apéndice A donde se encuentran los cálculos realizados



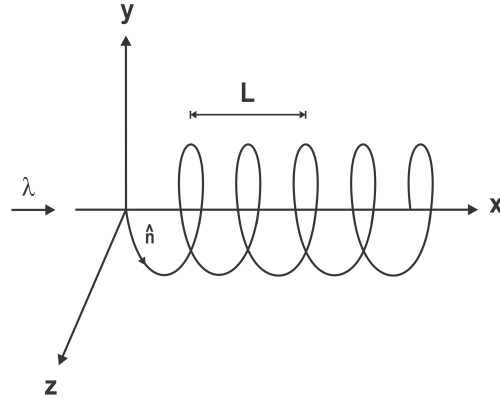


Figura 4.1: Incidencia de la luz sobre un colestérico. Al pasar la luz por el colestérico, ésta será polarizada circularmente en dirección contraria a la hélice.

Se observa que, aún cuando estamos en un medio anisotrópico simple (i.e.  $\chi=\zeta=0$ ), el tensor  $G$  contiene elementos no nulos los cuales podrían acoplar los campos eléctricos y magnéticos, ya que los subtensores  $G_{em}$  y  $G_{me}$  son no nulos. Las cantidades,  $g_1$  y  $g_2$ , dependen del parámetro  $p = \frac{\lambda}{L}$ , donde  $L$  es el periodo del medio y  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz como se muestra en la Figura (4.1). Si  $\lambda \rightarrow \infty$ , entonces las matrices  $G_{em}$  y  $G_{me}$  tienden a cero.

#### 4.2.1. Cristal líquido colestérico quiral

A continuación se analizará el caso simple de un medio periódico unidimensional, que tiene la misma estructura de un cristal líquido colestérico quiral, el cual analizamos en la sección (2.4.1). Anteriormente se definió el tensor dieléctrico en la Ec(3.73), a partir de esta expresión construiremos los tensores dieléctrico y magnético, girando a lo largo del eje  $x$ , para el cristal. El resultado de las operaciones nos ofrece el desarrollo en serie de Fourier del tensor dieléctrico<sup>2</sup>  $\varepsilon(x)$  como

$$\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} + \frac{\varepsilon_a}{2} \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp} + \frac{\varepsilon_a}{2} \sin^2 \alpha \end{pmatrix} + \xi_{-1} e^{-iqx} + \xi_1 e^{iqx} + \xi_{-2} e^{-2iqx} + \xi_2 e^{2iqx}, \quad (4.57)$$

donde

$$\xi_{\pm 1} = \frac{\varepsilon_a}{4} \sin 2\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mp i \\ 1 & 0 & 0 \\ \mp i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

$$\xi_{\pm 2} = \frac{\varepsilon_a}{4} \sin^2 \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mp i \\ 0 & \mp i & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

<sup>2</sup> véase apéndice B donde se encuentran los cálculos realizados

De manera análoga, se construye el tensor magnético  $\mu(x)$ , por tanto

$$\mu(x) = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} + \mu_a \cos^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\perp} + \frac{\mu_a}{2} \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\perp} + \frac{\mu_a}{2} \sin^2 \alpha \end{pmatrix} + v_{-1} e^{-iqx} + v_1 e^{iqx} + v_{-2} e^{-2iqx} + v_2 e^{2iqx}, \quad (4.60)$$

donde

$$v_{\pm 1} = \frac{\mu_a}{4} \sin 2\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mp i \\ 1 & 0 & 0 \\ \mp i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

$$v_{\pm 2} = \frac{\mu_a}{4} \sin^2 \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mp i \\ 0 & \mp i & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

La luz que incide sobre el medio, tiene una longitud de onda larga ( $\lambda \gg L$ ), por lo cual sólo es posible hablar de un valor efectivo de los tensores dieléctrico y magnético. Por tanto, al usar los coeficientes de la serie de Fourier (Ec.(4.58), Ec.(4.59), Ec.(4.61) y Ec.(4.62)) de los tensores dieléctrico y magnético, construidos, podremos obtener el tensor efectivo del material utilizando el formalismo  $\langle \gamma \rangle$ .

Comenzamos evaluando  $G$  sobre  $\pm p'$  y  $\pm 2p'$ , donde  $p'$  es la periodicidad del medio que hemos discutido arriba, en la Ec.(4.47), lo cual se puede escribir de la siguiente forma

$$\langle \gamma \rangle = \bar{\gamma} + \gamma_1 G(p') \gamma_{-1} + \gamma_{-1} G(-p') \gamma_1 + \gamma_2 G(2p') \gamma_{-2} + \gamma_{-2} G(-2p') \gamma_2, \quad (4.63)$$

$\gamma_i$  esta relacionado con los coeficientes  $\xi_i$  y  $v_i$  con  $i = \pm 1, \pm 2$ . El resultado final<sup>3</sup> para el tensor efectivo total del material se puede expresar como

$$\langle \gamma \rangle = \begin{pmatrix} \langle \varepsilon \rangle & \langle \chi \rangle \\ \langle \zeta \rangle & \langle \mu \rangle \end{pmatrix}, \quad (4.64)$$

en donde  $\langle \varepsilon \rangle$  está dado por

$$\langle \varepsilon \rangle = \bar{\varepsilon} - \varepsilon_a^2 \mu_{\perp} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon''_{22} & \varepsilon''_{23} \\ 0 & \varepsilon''_{32} & \varepsilon''_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.65)$$

y

$$\varepsilon''_{22} = \varepsilon''_{33} = \frac{-n_x^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} - 4p'^2}{4(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp}) + (-4p'^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp})^2)}, \quad (4.66)$$

$$\varepsilon''_{23} = \varepsilon''_{32} = \frac{ip' n_x}{n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp}) + (-4p'^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp})^2}, \quad (4.67)$$

el tensor magnético es obtenido similarmente de la Ec.(4.65), de tal forma que el resultado final se obtiene intercambiando  $\varepsilon''_{ij}$  por  $\mu''_{ij}$ , y además,  $\varepsilon_a^2 \mu_{\perp}$  por  $\mu_a^2 \varepsilon_{\perp}$ .

<sup>3</sup> véase sección B.1

$$\langle \mu \rangle = \bar{\mu} - \mu_a^2 \varepsilon_{\perp} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}'' & \varepsilon_{23}'' \\ 0 & \varepsilon_{32}'' & \varepsilon_{33}'' \end{pmatrix}, \quad (4.68)$$

$$\mu_{22}'' = \mu_{33}'' = \frac{-n_x^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} - 4p'^2}{4(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp}) + (-4p'^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp})^2)}, \quad (4.69)$$

$$\mu_{23}'' = \mu_{32}'' = \frac{ip' n_x}{n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp}) + (-4p'^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp})^2}. \quad (4.70)$$

Los pseudotensores  $\langle \zeta \rangle$  y  $\langle \chi \rangle$  son de la siguiente forma

$$\langle \zeta \rangle = \langle \chi \rangle^{\dagger} = -\varepsilon_a \mu_a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{22}'' & \zeta_{23}'' \\ 0 & \zeta_{32}'' & \zeta_{33}'' \end{pmatrix}, \quad (4.71)$$

$$\zeta_{22}'' = \zeta_{33}'' = \frac{-ip'(-n_x^2 - \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} + 4p'^2)}{2(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp}) + (-4p'^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp})^2)}, \quad (4.72)$$

$$\zeta_{23}'' = \zeta_{32}'' = \frac{n_x(-n_x^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} + 4p'^2)}{4(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp}) + (-4p'^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp})^2)}, \quad (4.73)$$

donde el superíndice  $\dagger$  significa conjugación compleja y transposición.

Consideremos como ejemplo específico valores de  $\varepsilon_a = 0,3$ ,  $\varepsilon_{\perp} = 2$ ,  $\mu_a = 0,1$ ,  $\mu_{\perp} = 1$  y  $n_x = 1$ , podemos graficar cada una de las entradas del tensor efectivo del material (4.64). A partir de esto se verán los posibles valores negativos que toman la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética, al incidir una longitud de onda mayor en comparación con la periodicidad del medio (que en este caso es el período o paso de la hélice). A continuación se presentan las gráficas de los valores efectivos, obtenidos con la teoría descrita aquí, de  $\langle \varepsilon \rangle$ ,  $\langle \mu \rangle$ ,  $\langle \zeta \rangle$  y  $\langle \chi \rangle$  como función del parámetro adimensional  $p = \lambda/L$ , donde sólo se muestran dos intervalos para los cuales aparecen las zonas negativas de dichas funciones.

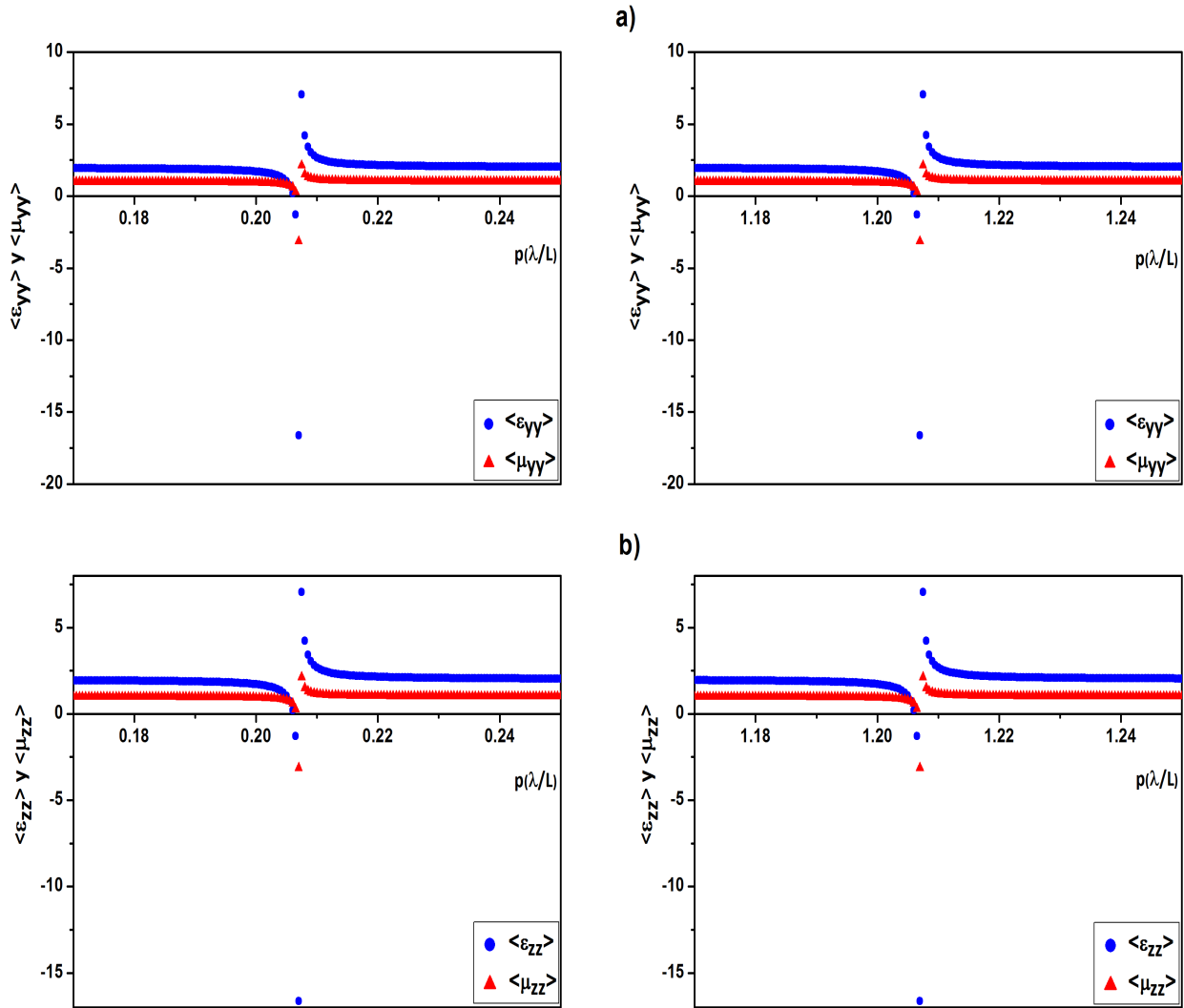


Figura 4.2: Valor efectivo de los tensores dieléctrico y magnético. Se muestran dos intervalos donde se observa la divergencia de: a)  $\langle \epsilon_{yy} \rangle$  y  $\langle \mu_{yy} \rangle$ ; b)  $\langle \epsilon_{zz} \rangle$  y  $\langle \mu_{zz} \rangle$ .

La Fig.(4.2) muestran los resultados de graficar las ecuaciones (4.65) y (4.68) donde podemos ver intervalos en los cuales los valores efectivos de los tensores dieléctrico y magnético divergen hacia valores negativos esto debido a la resonancia entre la periodicidad de la onda electromagnética y le estructura periódica del colestérico, esta resonancia se manifiesta de forma divergente porque en nuestro modelo hemos ignorado completamente la posible absorción ocasionada por el medio, si no hubiéramos tomado esta consideración del material las divergencias que aparecen serían sustituidas por máximos locales y habrían contribuciones imaginarias en los elementos diagonales de los tensores efectivos  $\langle \epsilon \rangle$  y  $\langle \mu \rangle$ .

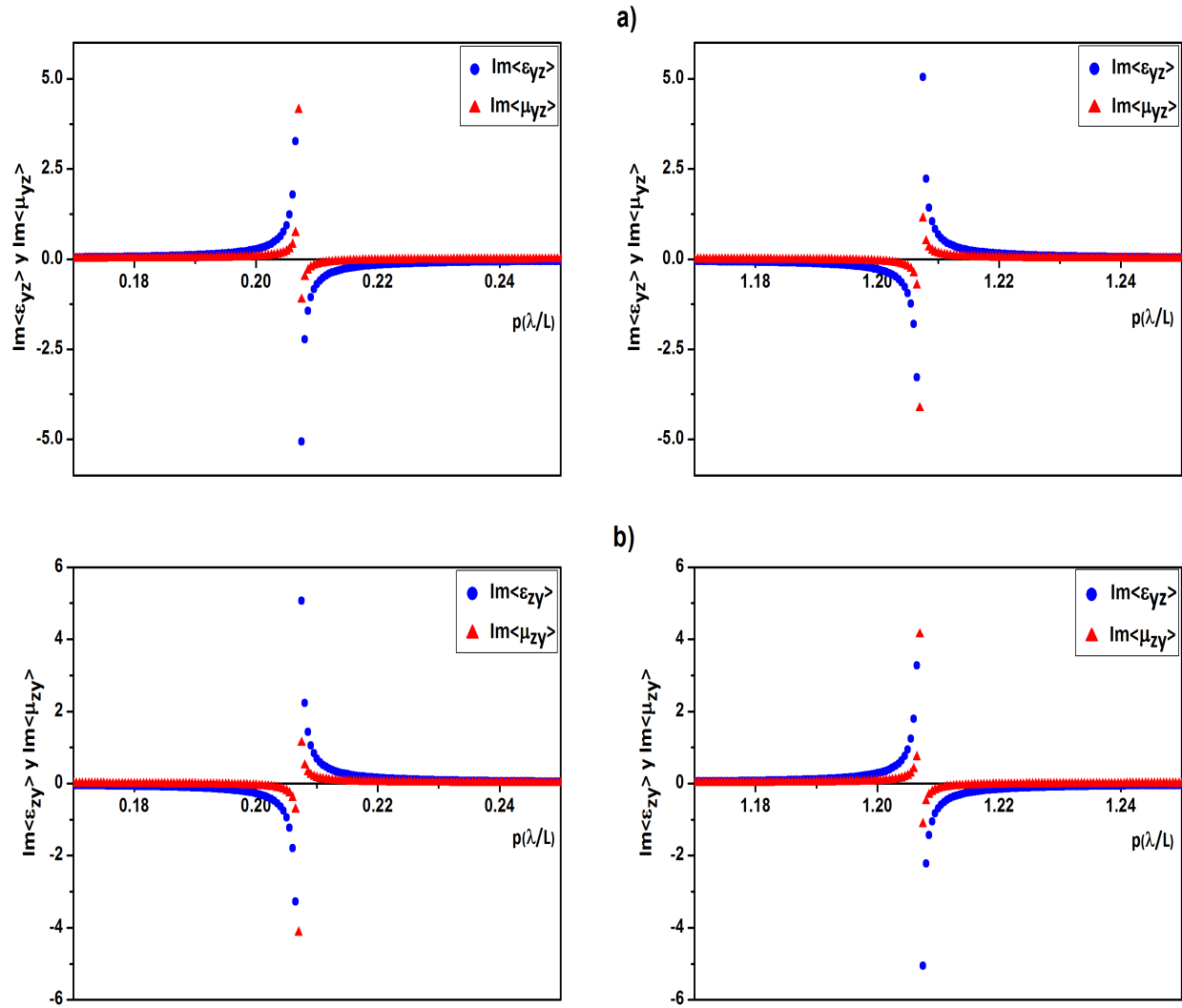


Figura 4.3: Valores efectivos de los elementos no diagonales de los tensores dieléctrico y magnético. Se muestran dos intervalos donde se ven valores negativos de: a)  $\text{Im} \langle \epsilon_{yz} \rangle$  e  $\text{Im} \langle \mu_{yz} \rangle$ ; b)  $\text{Im} \langle \epsilon_{zy} \rangle$  e  $\text{Im} \langle \mu_{zy} \rangle$ .

Las contribuciones imaginarias de los elementos no diagonales del tensor dieléctrico (Fig.(4.3)) no están asociadas a disipación sino a la actividad óptica del medio que se manifiesta girando el plano de polarización de la onda incidente.

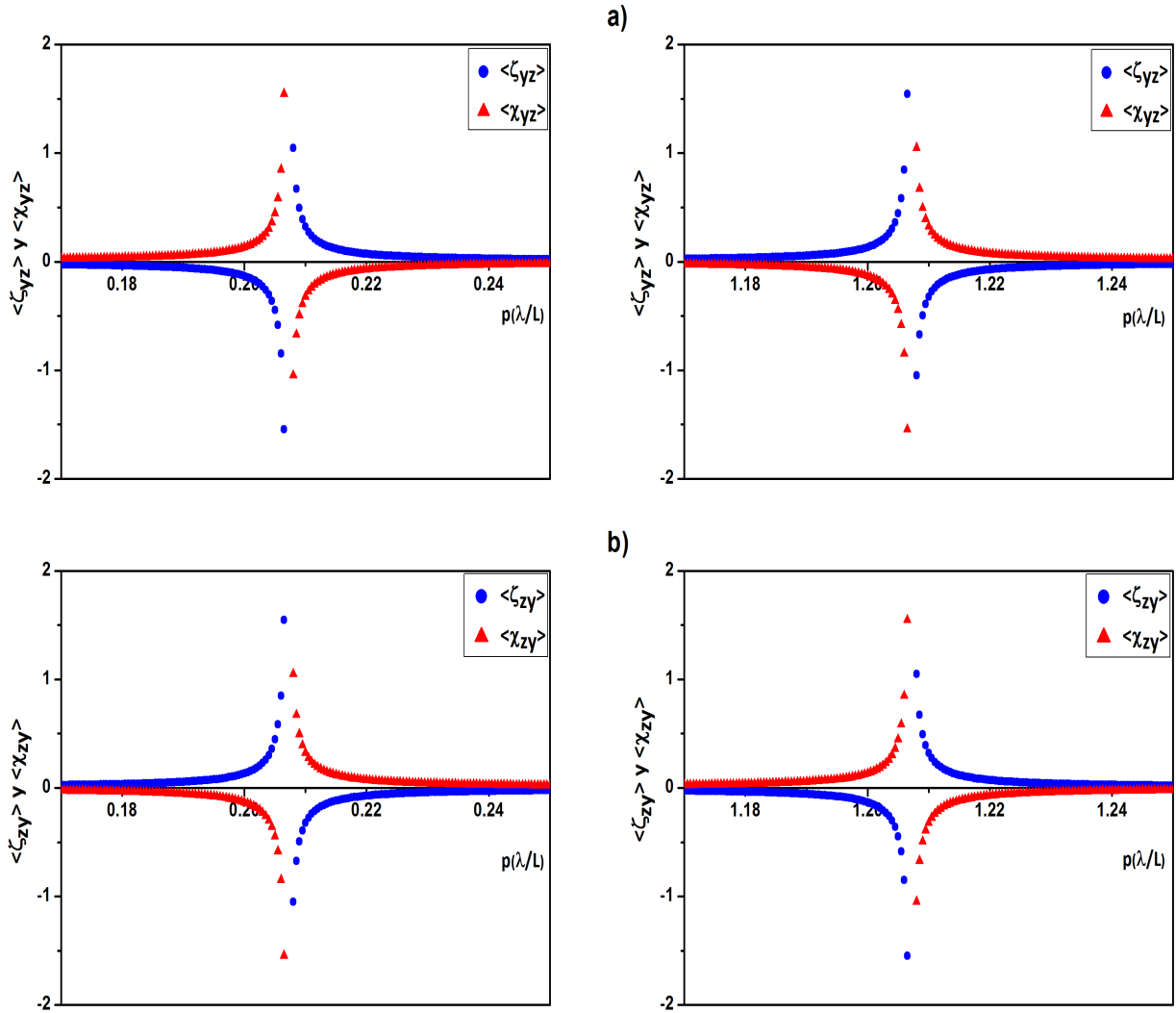


Figura 4.4: Valores efectivos de los elementos no diagonales de los pseudotensores electro-magnéticos. Se muestran dos intervalos donde se ven valores negativos de: a)  $\langle \zeta_{yz} \rangle$  e  $\langle \chi_{yz} \rangle$ ; b)  $\langle \zeta_{zy} \rangle$  e  $\langle \chi_{zy} \rangle$ .

Una peculiaridad que observamos al emplear el concepto de límite de longitud de onda larga es que el medio muestra valores efectivos de pseudotensores electro-magnéticos aún cuando, en principio, se analizó un medio anisotrópico simple, esto sucede por la correlación existente entre los campos eléctrico y magnético. Los valores efectivos en la Fig.(4.4) presentan divergencias de los pseudotensores en los planos  $yz$  y  $zy$ . Los elementos de la diagonales de los pseudotensores (Fig.(4.5)) también presentan contribuciones imaginarias debido a la actividad óptica del medio.

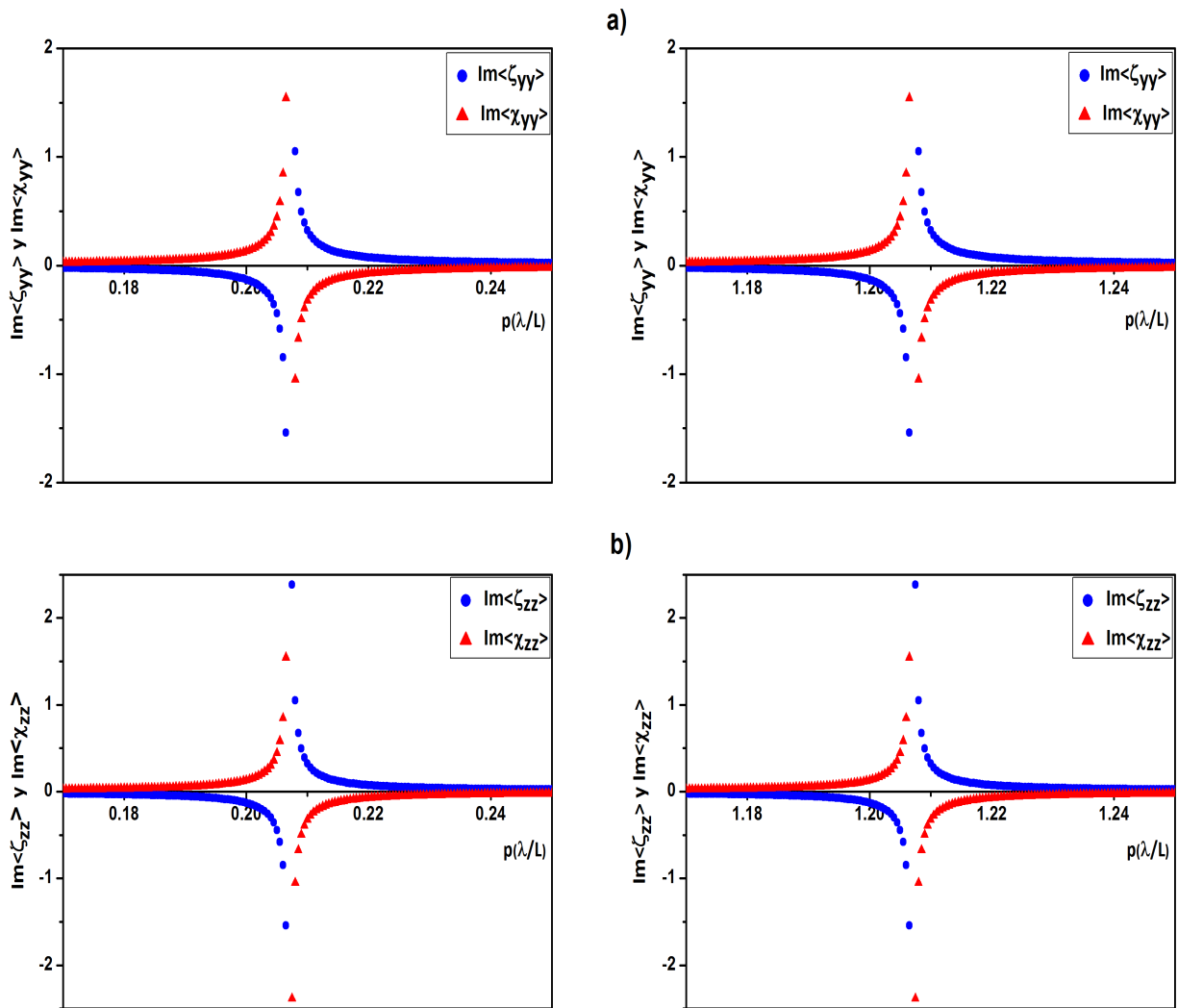


Figura 4.5: Valores efectivos de los pseudotensores electro-magnéticos. Se muestran dos intervalos donde se observa la divergencia de: a)  $\text{Im} \langle \zeta_{yy} \rangle$  y  $\text{Im} \langle \chi_{yy} \rangle$ ; b)  $\text{Im} \langle \zeta_{zz} \rangle$  y  $\text{Im} \langle \chi_{zz} \rangle$ .

## Capítulo 5

# Discusión y Conclusiones

El estudio realizado en la tesis se enfocó en los cristales fotónicos (cuyos parámetros son una función periódica) los cuales ofrecen la inferencia del control de la luz. Si se utilizan ciertos materiales y una forma de la celda unitaria es posible obtener una banda fotónica prohibida, a pesar de que sus estructuras no necesariamente adquieren alguna de las redes de Bravais y de que su periodicidad se puede limitar a solo ser bidimensional o unidimensional. De hecho, los cristales fotónicos son utilizados para la construcción de materiales con la permitividad dieléctrica y la permeabilidad magnética negativas, conocidos como "*Metamateriales*", por lo que es posible construir metamateriales o medios bianisotrópicos tomando ventaja del hecho de que la longitud de la onda de la luz sea mayor a las dimensiones espaciales del medio, no alcanzando a discernir los detalles finos estructurales de los arreglos. Por tanto en lugar de utilizar valores locales tanto para el tensor de permitividad dieléctrica como para el tensor de permeabilidad magnética será necesario definir valores únicos efectivos de los mismos, válidos para todo el material; a pesar de que internamente el medio es intrínsecamente inhomogéneo. Este procedimiento se efectúa utilizando una teoría de promediación u homogenización.

Por medio de la solución a las Ecuaciones de Maxwell encontramos los modos normales de una estructura con las características de un cristal líquido colestérico, ya que éste es un sistema particular de un cristal fotónico unidimensional donde el tensor dieléctrico del material gira uniformemente en torno a una dirección fija mientras va avanzando a lo largo de esta dirección. Se mostró la presencia de una brecha parcial de frecuencia la cual significa que un colestérico se comporta como un filtro de ondas electromagnéticas (*característica importante de un cristal fotónico*), ya que en dicho intervalo sólo permite el paso de la luz polarizada circularmente contraria a la dirección de la hélice. Otra importante característica del colestérico es la reflexión de Bragg que da lugar al fenómeno de Bragg circular, en donde la onda incidente puede ser vista en dos componentes de polarizaciones circulares opuestas, una de las componentes es fuertemente reflejada en forma de la espiral colestérica y la otra componente se transmite sin reflexión selectiva.

Usamos el método de desarrollo en ondas de Bloch de la solución de las ecuaciones de Maxwell para un medio periódico general que satisface las ecuaciones constitutivas de Tellegen, con el propósito de definir el modelo homogéneo para medios bianisotrópicos. Según este procedimiento, el tensor  $\gamma$  que define las propiedades materiales del sistema, el cual debe cumplir la condición de periodicidad, es desarrollado en una serie Fourier[25], además, debido al teorema de Bloch el campo electromagnético se puede representar en términos de modos normales. Donde obtuvimos una aproximación que toma en cuenta el esparcimiento de hasta dos fotones (Ec.(4.47)). Dicha aproximación contiene un operador  $G$  el



cual acopla a los campos eléctrico y magnético, así como a los pseudotensores electro-magnéticos. En el caso donde los pseudotensores electro-magnéticos son cero, el operador  $G$  contiene elementos no nulos. Se tomó en cuenta el espaciamiento de dos fotones porque se tiene una estructura periódica entonces podemos extrapolar los resultados para toda la estructura, además de que un cristal fotónico, debido a su periodicidad en su constante dieléctrica presenta bandas de energía prohibidas restringiendo la energía de los fotones a un intervalo de valores específicos, dichas bandas dependen de la dirección de la periodicidad dieléctrica y de las distancias que definen dicha periodicidad.

Conforme al modelo homogéneo obtenido se analizó el caso simple de un medio periódico unidimensional, que tiene la misma estructura de un cristal líquido colestérico quiral. Se construyó el tensor dieléctrico, girando a lo largo del eje  $x$ , para el cristal, dando por resultado un desarrollo en serie de Fourier del tensor dieléctrico  $\varepsilon(x)$  y de forma análoga se construyó el tensor magnético  $\mu(x)$ . A partir de estos valores y del operador  $G$ , obtuvimos una expresión para el tensor efectivo del material  $\langle \gamma \rangle$  el cual nos define las propiedades ópticas del material. Consideramos los valores de  $\varepsilon_a = 0,3$ ,  $\varepsilon_{\perp} = 2$ ,  $\mu_a = 0,1$ ,  $\mu_{\perp} = 1$  y  $n_x = 1$ , para graficar cada una de las entradas del tensor efectivo del material (4.64). Al trabajar en el límite de longitud de onda larga, y como estamos en un medio periódico, existen oscilaciones de las propiedades eléctricas y magnéticas, las ecuaciones resultantes (Ec.(4.65), Ec.(4.71), para  $\tilde{\mu}$  véase el apéndice B.1) confirman la presencia de susceptibilidades dieléctricas y magnéticas promedio en las estructuras periódicas, que debido a su periodicidad, presentan una región con valores negativos (Fig.(4.2)) para cierto intervalo de frecuencias. Estas zonas negativas aparecen como consecuencia de la resonancia entre la periodicidad de la onda electromagnética y la estructura periódica del colestérico. Esta resonancia se manifiesta como divergencia propiamente, debido a que en nuestro modelo hemos ignorado completamente la posible absorción ocasionada por el medio. Las contribuciones imaginarias de los elementos no diagonales del tensor dieléctrico (Fig.(4.3)), así como de los pseudotensores (Fig.(4.5)), están asociadas a la actividad óptica del medio que se manifiesta girando el plano de polarización de la onda incidente. También encontramos valores efectivos para los pseudotensores  $\zeta$  y  $\chi$ , a pesar de que el medio es anisotrópico, esto confirma que el campo eléctrico induce una polarización magnética y que el campo magnético genera una polarización eléctrica. En la Fig.(4.4) se presentan divergencias de los pseudotensores en los planos  $yz$  y  $zy$ . Con este resultado, determinamos la posibilidad de emplear una estructura colestérica para construir un cristal fotónico con valores negativos de  $\varepsilon$  y  $\mu$ .

Como ya se comentó, estos valores negativos de la permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética nos permitirían obtener un material con un índice de refracción negativo (metamaterial), estos materiales alteran el comportamiento natural de la luz, esto quiere decir que si el índice de refracción de un medio es negativo, de acuerdo con la ley de Snell, el ángulo refractado también deberá ser negativo (Fig.(2.3) b)). Aprovechando esta característica puede aplicarse una capa de metamaterial sobre otro material, y que por su asombrosa capacidad para "evitar" las ondas electromagnéticas, se puede conseguir la invisibilidad de éste último debido a que la luz rodea el objeto como un río sobre una roca. Con el fin de que sus propiedades funcionen en frecuencias del orden de las ondas electromagnéticas, las componentes estructurales de un metamaterial deberían ser, en principio, más pequeñas que la longitud de onda de la radiación electromagnética con la que interactúa.

## Apéndice A

# Medios dieléctrico y magnético

En este apartado se va a mostrar la forma de determinar la matriz inversa  $G$ . Lo que haremos es aplicar el método de adjuntos y determinantes, por ser una matriz cuadrada su determinante debe ser diferente de cero para la existencia de la matriz inversa. De la siguiente relación partiremos para hacer el cálculo

$$M^{-1} = \frac{M^d}{\det(M)}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $M^d$  es la matriz de adjuntos de  $M$ ,

$$\det(G) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{\parallel} & 0 & 0 & 0 & -n_z & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 & n_z & 0 & -(n_x + p') \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 & n_x + p' & 0 \\ 0 & n_z & 0 & \mu_{\parallel} & 0 & 0 \\ -n_z & 0 & n_x + p' & 0 & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & -(n_x + p') & 0 & 0 & 0 & \mu_{\perp} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

o de la forma

$$\begin{aligned} \det(G) &= \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}^2 \mu_{\parallel} \mu_{\perp}^2 - \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} (n_x + p')^2 - \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp}^2 n_z^2 \\ &+ \varepsilon_{\parallel} \mu_{\perp} n_z^2 (n_x + p')^2 - \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} \mu_{\perp} (n_x + p')^2 + \varepsilon_{\parallel} \mu_{\parallel} (n_x + p')^4 \\ &- \varepsilon_{\perp}^2 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} n_z^2 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} n_z^4 + \varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} n_z^2 (n_x + p')^2, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

a continuación factorizamos los términos  $\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp}$ ,  $-\varepsilon_{\perp} n_z^2$  y  $-\varepsilon_{\parallel} (n_x + p')^2$

$$\begin{aligned} \det(G) &= \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} (\varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} \mu_{\perp} - \mu_{\perp} n_z^2 - \mu_{\parallel} (n_x + p')^2) \\ &- \varepsilon_{\perp} n_z^2 (\varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} \mu_{\perp} - \mu_{\perp} n_z^2 - \mu_{\parallel} (n_x + p')^2) \\ &- \varepsilon_{\parallel} (n_x + p')^2 (\varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} \mu_{\perp} - \mu_{\perp} n_z^2 - \mu_{\parallel} (n_x + p')^2), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

realizamos otra factorización obteniendo por resultado

$$\det(G) = (\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} - \varepsilon_{\perp} n_z^2 - \varepsilon_{\parallel} (n_x + p')^2) (\varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} \mu_{\perp} - \mu_{\perp} n_z^2 - \mu_{\parallel} (n_x + p')^2), \quad (\text{A.5})$$

definimos a  $g_1 \equiv \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} - \varepsilon_{\perp} n_z^2 - \varepsilon_{\parallel} (n_x + p')^2$  y  $g_2 \equiv \varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} \mu_{\perp} - \mu_{\perp} n_z^2 - \mu_{\parallel} (n_x + p')^2$ . Por lo tanto el determinante de  $G$  es

$$\det(G) = g_1 g_2. \quad (\text{A.6})$$

Lo siguiente es obtener el adjunto de cada entrada para formar la matriz adjunta de  $G$ . Comenzamos por la entrada  $G_{11}$ , entonces

$$G_{11} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & n_z & 0 & -(n_x + p') \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 & n_x + p' & 0 \\ n_z & 0 & \mu_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & n_x + p' & 0 & \mu_{\perp} & 0 \\ -(n_x + p') & 0 & 0 & 0 & \mu_{\perp} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

haciendo las operaciones necesarias llegamos a la siguiente relación

$$G_{11} = \varepsilon_{\perp}^2 \mu_{\parallel} \mu_{\perp}^2 - \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp}^2 (n_x + p')^2 - \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp}^2 n_z^2 + \mu_{\perp} n_z^2 (n_x + p')^2 - \varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} \mu_{\perp} (n_x + p')^2 + \mu_{\parallel} (n_x + p')^4, \quad (\text{A.8})$$

factorizamos los términos comunes

$$G_{11} = \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} (\varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} \mu_{\perp} - \mu_{\perp} n_z^2 - \mu_{\parallel} (n_x + p')^2) - (n_x + p') (\varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} \mu_{\perp} - \mu_{\perp} n_z^2 - \mu_{\parallel} (n_x + p')^2), \quad (\text{A.9})$$

por lo tanto el adjunto de  $G_{11}$  es

$$G_{11}^d = (\varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} - (n_x + p')) g_2. \quad (\text{A.10})$$

De manera análoga, se realizaron las operaciones para los adjuntos de cada entrada de la matriz  $G$ .

Para la entrada  $G_{13}$  su adjunto es

$$\begin{aligned} G_{13}^d &= -\varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} \mu_{\perp} n_z (n_x + p') + \mu_{\perp} n_z^3 (n_x + p') + \mu_{\parallel} n_z (n_x + p')^3 \\ &= -n_z (n_x + p') (\varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} \mu_{\perp} - \mu_{\perp} n_z^2 - \mu_{\parallel} (n_x + p')^2), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$G_{13}^d = -n_z (n_x + p') g_2. \quad (\text{A.12})$$

Para la entrada  $G_{15}$  su adjunto es

$$\begin{aligned} G_{15}^d &= \varepsilon_{\perp}^2 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} n_z - \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} n_z^3 - \varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} n_z (n_x + p')^2 \\ &= \varepsilon_{\perp} n_z (\varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} \mu_{\perp} - \mu_{\perp} n_z^2 - \mu_{\parallel} (n_x + p')^2), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$G_{15}^d = \varepsilon_{\perp} n_z g_2. \quad (\text{A.14})$$

Para la entrada  $G_{22}$  su adjunto es

$$\begin{aligned}
G_{22}^d &= \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}\mu_{\perp}^2 - \varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}\mu_{\perp}(n_x + p')^2 - \varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}\mu_{\perp}n_z^2 \\
&= \mu_{\parallel}\mu_{\perp}(\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp} - \varepsilon_{\perp}n_z^2 - \varepsilon_{\parallel}(n_x + p')^2),
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$G_{22}^d = \mu_{\parallel}\mu_{\perp}g_1. \tag{A.16}$$

Para la entrada  $G_{24}$  su adjunto es

$$\begin{aligned}
G_{24}^d &= -\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp}^2n_z + \varepsilon_{\perp}\mu_{\perp}n_z(n_x + p')^2 + \varepsilon_{\perp}\mu_{\perp}n_z^3 \\
&= -\mu_{\parallel}n_z(\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp} - \varepsilon_{\perp}n_z^2 - \varepsilon_{\parallel}(n_x + p')^2),
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$G_{24}^d = -\mu_{\parallel}n_zg_1. \tag{A.18}$$

Para la entrada  $G_{26}$  su adjunto es

$$\begin{aligned}
G_{26}^d &= \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}\mu_{\perp}(n_x + p') - \varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}(n_x + p')^3 - \varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}n_z^2(n_x + p') \\
&= \mu_{\parallel}(n_x + p')(\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp} - \varepsilon_{\perp}n_z^2 - \varepsilon_{\parallel}(n_x + p')^2),
\end{aligned} \tag{A.19}$$

$$G_{26}^d = \mu_{\parallel}(n_x + p')g_1. \tag{A.20}$$

Para la entrada  $G_{31}$  su adjunto es

$$\begin{aligned}
G_{31}^d &= -\varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}\mu_{\perp}n_z(n_x + p') + \mu_{\perp}n_z^3(n_x + p') + \mu_{\parallel}n_z(n_x + p')^3 \\
&= -n_z(n_x + p')(\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}\mu_{\perp} - \mu_{\perp}n_z^2 - \mu_{\parallel}(n_x + p')^2),
\end{aligned} \tag{A.21}$$

$$G_{31}^d = -n_z(n_x + p')g_2. \tag{A.22}$$

Para la entrada  $G_{33}$  su adjunto es

$$\begin{aligned}
G_{33}^d &= \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}\mu_{\perp}^2 - \varepsilon_{\parallel}\mu_{\perp}^2n_z^2 - \varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}\mu_{\perp}(n_x + p')^2 \\
&\quad - \varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}\mu_{\perp}n_z^2 + \mu_{\perp}n_z^4 + \mu_{\parallel}n_z^2(n_x + p')^2 \\
&= (\varepsilon_{\parallel}\mu_{\perp} - n_z^2)(\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}\mu_{\perp} - \mu_{\perp}n_z^2 - \mu_{\parallel}(n_x + p')^2),
\end{aligned}$$

$$G_{33}^d = (\varepsilon_{\parallel}\mu_{\perp} - n_z^2)g_2. \tag{A.23}$$

Para la entrada  $G_{35}$  su adjunto es

$$\begin{aligned}
G_{35}^d &= -\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}\mu_{\perp}(n_x + p') + \varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}n_z^2(n_x + p') + \varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}(n_x + p')^3 \\
&= -\varepsilon_{\parallel}(n_x + p')(\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}\mu_{\perp} - \mu_{\perp}n_z^2 - \mu_{\parallel}(n_x + p')^2),
\end{aligned} \tag{A.24}$$

$$G_{35}^d = -\varepsilon_{\parallel}(n_x + p')g_2. \tag{A.25}$$

Para la entrada  $G_{42}$  su adjunto es

$$\begin{aligned}
G_{42}^d &= -\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp}^2 n_z + \varepsilon_{\parallel}\mu_{\perp} n_z (n_x + p')^2 + \varepsilon_{\perp}\mu_{\perp} n_z^3 \\
&= -\mu_{\perp} n_z (\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp} - \varepsilon_{\perp} n_z^2 - \varepsilon_{\parallel} (n_x + p')^2),
\end{aligned} \tag{A.26}$$

$$G_{42}^d = -\mu_{\perp} n_z g_1. \tag{A.27}$$

Para la entrada  $G_{44}$  su adjunto es

$$\begin{aligned}
G_{44}^d &= \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}^2\mu_{\perp}^2 - \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}(n_x + p')^2 - \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp}(n_x + p')^2 + \varepsilon_{\parallel}(n_x + p')^4 \\
&\quad - \varepsilon_{\perp}^2\mu_{\parallel}n_z^2 + \varepsilon_{\perp}n_z^2(n_x + p')^2 \\
&= (\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp} - (n_x + p')^2)(\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp} - \varepsilon_{\perp}n_z^2 - \varepsilon_{\parallel}(n_x + p')^2),
\end{aligned} \tag{A.28}$$

$$G_{44}^d = (\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp} - (n_x + p')^2)g_1. \tag{A.29}$$

Para la entrada  $G_{46}$  su adjunto es

$$\begin{aligned}
G_{46}^d &= \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}(0) - \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp}n_z(n_x + p') + \varepsilon_{\parallel}n_z(n_x + p')^3 + \varepsilon_{\perp}n_z(0) \\
&\quad + \varepsilon_{\perp}n_z^3(n_x + p') \\
&= -n_z(n_x + p')(\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp} - \varepsilon_{\perp}n_z^2 + \varepsilon_{\parallel}(n_x + p')^2),
\end{aligned} \tag{A.30}$$

$$G_{46}^d = -n_z(n_x + p')g_1. \tag{A.31}$$

Para la entrada  $G_{51}$  su adjunto es

$$\begin{aligned}
G_{51}^d &= \varepsilon_{\perp}^2\mu_{\parallel}\mu_{\perp}n_z - \varepsilon_{\perp}\mu_{\perp}n_z^3 - \varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}n_z(n_x + p')^2 \\
&= \varepsilon_{\perp}n_z(\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}\mu_{\perp} - \mu_{\perp}n_z^2 - \mu_{\parallel}(n_x + p')^2),
\end{aligned} \tag{A.32}$$

$$G_{51}^d = \varepsilon_{\perp}n_z g_2. \tag{A.33}$$

Para la entrada  $G_{53}$  su adjunto es

$$\begin{aligned}
G_{53}^d &= -\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}\mu_{\perp}(n_x + p') + \varepsilon_{\parallel}\mu_{\perp}n_z^2(n_x + p') + \varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}(n_x + p')^3 \\
&= -\varepsilon_{\parallel}(n_x + p')(\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}\mu_{\perp} + \mu_{\perp}n_z^2 + \mu_{\parallel}(n_x + p')^2),
\end{aligned} \tag{A.34}$$

$$G_{53}^d = -\varepsilon_{\parallel}(n_x + p')g_2. \tag{A.35}$$

Para la entrada  $G_{55}$  su adjunto es

$$\begin{aligned}
G_{55}^d &= \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}^2\mu_{\parallel}\mu_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp}n_z^2 - \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}(n_x + p')^2 \\
&= \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}(\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}\mu_{\perp} - \mu_{\perp}n_z^2 - \mu_{\parallel}(n_x + p')^2),
\end{aligned} \tag{A.36}$$

$$G_{55}^d = \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}g_2. \tag{A.37}$$

Para la entrada  $G_{62}$  su adjunto es



por lo tanto

$$G = - \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} - (n_x + p')^2}{g_1} & 0 & \frac{-n_z (n_x + p')}{g_1} & 0 & \frac{\varepsilon_{\perp} n_z}{g_1} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_{\parallel} \mu_{\perp}}{g_2} & 0 & \frac{-\mu_{\perp} n_z}{g_2} & 0 & \frac{\mu_{\parallel} (n_x + p')}{g_2} \\ \frac{-n_z (n_x + p')}{g_1} & 0 & \frac{\varepsilon_{\parallel} \mu_{\perp} - n_z^2}{g_1} & 0 & \frac{-\varepsilon_{\parallel} (n_x + p')}{g_1} & 0 \\ 0 & \frac{-\mu_{\perp} n_z}{g_2} & 0 & \frac{\varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} - (n_x + p')^2}{g_2} & 0 & \frac{-n_z (n_x + p')}{g_2} \\ \frac{\varepsilon_{\perp} n_z}{g_1} & 0 & \frac{-\varepsilon_{\parallel} (n_x + p')}{g_1} & 0 & \frac{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}}{g_1} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_{\parallel} (n_x + p')}{g_2} & 0 & \frac{-n_z (n_x + p')}{g_2} & 0 & \frac{\varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel} - n_z^2}{g_2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.45})$$

## Apéndice B

# Cristal líquido colestérico quiral

Realizaremos la construcción de los tensores dieléctrico y magnético del cristal líquido (medio periódico). A partir de la sustitución, del seno y el coseno en su forma exponencial y dado el vector director  $\tilde{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha \cos qx, \sin \alpha \sin qx)$ , en la Ec(3.73), tenemos lo siguiente. Primero calculamos la diádica  $\tilde{n}\tilde{n}$ , entonces

$$\tilde{n}\tilde{n} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \cos qx & \cos \alpha \sin \alpha \sin qx \\ \cos \alpha \sin \alpha \cos qx & \sin^2 \alpha \cos^2 qx & \sin^2 \alpha \cos qx \sin qx \\ \cos \alpha \sin \alpha \sin qx & \sin^2 \alpha \cos qx \sin qx & \sin^2 \alpha \sin^2 qx \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

luego determinaremos cada una de las entradas del tensor  $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ . Para  $(\overleftrightarrow{\varepsilon})_{11}$

$$(\overleftrightarrow{\varepsilon})_{11} = \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \alpha, \quad (\text{B.2})$$

esta entrada la dejamos así porque no aparece el valor  $qx$ . Luego entonces, la siguiente entrada es de la forma

$$(\overleftrightarrow{\varepsilon})_{12} = \varepsilon_a \sin \alpha \cos \alpha \cos qx, \quad (\text{B.3})$$

sustituimos  $\cos qx = \frac{e^{iqx} + e^{-iqx}}{2}$  y la identidad trigonométrica  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ , lo cual implica

$$(\overleftrightarrow{\varepsilon})_{12} = \frac{\varepsilon_a}{2} \sin 2\alpha \left( \frac{e^{iqx} + e^{-iqx}}{2} \right), \quad (\text{B.4})$$

después separamos los términos  $e^{iqx}$  y  $e^{-iqx}$ , dando como resultado

$$(\overleftrightarrow{\varepsilon})_{12} = \frac{\varepsilon_a}{4} e^{iqx} \sin 2\alpha + \frac{\varepsilon_a}{4} e^{-iqx} \sin 2\alpha. \quad (\text{B.5})$$

Análogamente, se realizaron las operaciones para encontrar las entradas  $(\overleftrightarrow{\varepsilon})_{13}$ ,  $(\overleftrightarrow{\varepsilon})_{21}$  y  $(\overleftrightarrow{\varepsilon})_{31}$  del tensor  $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ . Los resultados son los siguientes, para  $(\overleftrightarrow{\varepsilon})_{13}$

$$(\overleftrightarrow{\varepsilon})_{13} = \varepsilon_a \sin \alpha \cos \alpha \sin qx, \quad (\text{B.6})$$

donde  $\sin qx = \frac{e^{iqx} - e^{-iqx}}{2i}$ , entonces

$$(\overleftrightarrow{\varepsilon})_{13} = \frac{\varepsilon_a}{2} \sin 2\alpha \left( \frac{e^{iqx} - e^{-iqx}}{2i} \right), \quad (\text{B.7})$$



$$(\overleftarrow{\varepsilon})_{13} = -\frac{\varepsilon_a}{4} i e^{iqx} \sin 2\alpha + \frac{\varepsilon_a}{4} i e^{-iqx} \sin 2\alpha, \quad (\text{B.8})$$

tenemos que  $(\overleftarrow{\varepsilon})_{12} = (\overleftarrow{\varepsilon})_{21}$  por tanto

$$(\overleftarrow{\varepsilon})_{21} = \frac{\varepsilon_a}{4} e^{iqx} \sin 2\alpha + \frac{\varepsilon_a}{4} e^{-iqx} \sin 2\alpha, \quad (\text{B.9})$$

además  $(\overleftarrow{\varepsilon})_{13} = (\overleftarrow{\varepsilon})_{31}$  por tanto

$$(\overleftarrow{\varepsilon})_{31} = -\frac{\varepsilon_a}{4} i e^{iqx} \sin 2\alpha + \frac{\varepsilon_a}{4} i e^{-iqx} \sin 2\alpha. \quad (\text{B.10})$$

Ahora la entrada  $(\overleftarrow{\varepsilon})_{22}$  es

$$(\overleftarrow{\varepsilon})_{22} = \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \alpha \cos^2 qx, \quad (\text{B.11})$$

con la sustitución de  $\cos qx = \frac{e^{iqx} + e^{-iqx}}{2}$  desarrollamos el binomio y nos da

$$(\overleftarrow{\varepsilon})_{22} = \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \alpha \left( \frac{e^{2iqx} + e^{-2iqx}}{4} + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{B.12})$$

por lo tanto

$$(\overleftarrow{\varepsilon})_{22} = \varepsilon_{\perp} + \frac{\varepsilon_a}{2} \sin^2 \alpha + \frac{\varepsilon_a}{4} e^{2iqx} \sin^2 \alpha + \frac{\varepsilon_a}{4} e^{-2iqx} \sin^2 \alpha, \quad (\text{B.13})$$

para entrada  $(\overleftarrow{\varepsilon})_{23}$  tenemos

$$(\overleftarrow{\varepsilon})_{23} = \varepsilon_a \sin^2 \alpha \sin qx \cos qx, \quad (\text{B.14})$$

$$(\overleftarrow{\varepsilon})_{23} = \varepsilon_a \sin^2 \alpha \left( \frac{e^{iqx} - e^{-iqx}}{2i} \right) \left( \frac{e^{iqx} + e^{-iqx}}{2} \right), \quad (\text{B.15})$$

realizando el producto y separando las exponenciales obtenemos como resultado

$$(\overleftarrow{\varepsilon})_{23} = -\frac{\varepsilon_a}{4} i e^{2iqx} \sin^2 \alpha + \frac{\varepsilon_a}{4} i e^{-2iqx} \sin^2 \alpha, \quad (\text{B.16})$$

las entradas  $(\overleftarrow{\varepsilon})_{23} = (\overleftarrow{\varepsilon})_{32}$  por lo tanto

$$(\overleftarrow{\varepsilon})_{23} = -\frac{\varepsilon_a}{4} i e^{2iqx} \sin^2 \alpha + \frac{\varepsilon_a}{4} i e^{-2iqx} \sin^2 \alpha. \quad (\text{B.17})$$

Por último, para  $(\overleftarrow{\varepsilon})_{33}$

$$(\overleftarrow{\varepsilon})_{33} = \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \alpha \sin^2 qx, \quad (\text{B.18})$$

sustituimos  $\sin qx = \frac{e^{iqx} - e^{-iqx}}{2i}$  teniendo por resultado

$$(\overleftarrow{\varepsilon})_{33} = \varepsilon_{\perp} + \frac{\varepsilon_a}{2} \sin^2 \alpha - \frac{\varepsilon_a}{4} e^{2iqx} \sin^2 \alpha - \frac{\varepsilon_a}{4} e^{-2iqx} \sin^2 \alpha. \quad (\text{B.19})$$

Por lo tanto el tensor dieléctrico es

$$\begin{aligned}
\overleftrightarrow{\varepsilon} = & \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} + \frac{\varepsilon_a}{2} \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp} + \frac{\varepsilon_a}{2} \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \\
& + \frac{\varepsilon_a}{4} \begin{pmatrix} 0 & \sin 2\alpha & i \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 0 & 0 \\ i \sin 2\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-iqx} \\
& + \frac{\varepsilon_a}{4} \begin{pmatrix} 0 & \sin 2\alpha & -i \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 0 & 0 \\ -i \sin 2\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{iqx} \\
& + \frac{\varepsilon_a}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \alpha & i \sin^2 \alpha \\ 0 & i \sin^2 \alpha & -\sin^2 \alpha \end{pmatrix} e^{-2iqx} \\
& + \frac{\varepsilon_a}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \alpha & -i \sin^2 \alpha \\ 0 & -i \sin^2 \alpha & -\sin^2 \alpha \end{pmatrix} e^{2iqx}.
\end{aligned} \tag{B.20}$$

El tensor magnético  $\overleftrightarrow{\mu}$  se puede construir de igual forma que el tensor  $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ , partiendo de la Ec(3.73)

$$\overleftrightarrow{\mu} = \mu_{\perp} + \mu_a \tilde{n}\tilde{n}. \tag{B.21}$$

Análogamente, las operaciones realizadas para la obtención del tensor  $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ , las emplearemos para determinar el tensor magnético. Esto implica que, para  $(\overleftrightarrow{\mu})_{11}$

$$(\overleftrightarrow{\mu})_{11} = \mu_{\perp} + \mu_a \cos^2 \alpha, \tag{B.22}$$

para  $(\overleftrightarrow{\mu})_{22}$

$$(\overleftrightarrow{\mu})_{22} = \mu_{\perp} + \frac{\mu_a}{2} \sin^2 \alpha + \frac{\mu_a}{4} e^{2iqx} \sin^2 \alpha + \frac{\mu_a}{4} e^{-2iqx} \sin^2 \alpha, \tag{B.23}$$

para  $(\overleftrightarrow{\mu})_{33}$

$$(\overleftrightarrow{\mu})_{33} = \mu_{\perp} + \frac{\mu_a}{2} \sin^2 \alpha - \frac{\mu_a}{4} e^{2iqx} \sin^2 \alpha - \frac{\mu_a}{4} e^{-2iqx} \sin^2 \alpha, \tag{B.24}$$

para  $(\overleftrightarrow{\mu})_{12}$  y  $(\overleftrightarrow{\mu})_{21}$

$$(\overleftrightarrow{\mu})_{12} = (\overleftrightarrow{\mu})_{21} = \frac{\mu_a}{4} e^{iqx} \sin 2\alpha + \frac{\mu_a}{4} e^{-iqx} \sin 2\alpha, \tag{B.25}$$

para  $(\overleftrightarrow{\mu})_{13}$  y  $(\overleftrightarrow{\mu})_{31}$

$$(\overleftrightarrow{\mu})_{13} = (\overleftrightarrow{\mu})_{31} = -\frac{\mu_a}{4} i e^{iqx} \sin 2\alpha + \frac{\mu_a}{4} i e^{-iqx} \sin 2\alpha, \tag{B.26}$$

y, por último, para  $(\overleftrightarrow{\mu})_{23}$  y  $(\overleftrightarrow{\mu})_{32}$

$$(\overleftrightarrow{\mu})_{23} = (\overleftrightarrow{\mu})_{32} = -\frac{\mu_a}{4} i e^{2iqx} \sin^2 \alpha + \frac{\mu_a}{4} i e^{-2iqx} \sin^2 \alpha. \tag{B.27}$$

Con las cuales podemos formar el tensor magnético  $\overleftrightarrow{\mu}$

$$\begin{aligned}
\overleftrightarrow{\mu} = & \begin{pmatrix} \mu_{\perp} + \mu_a \cos^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\perp} + \frac{\mu_a}{2} \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\perp} + \frac{\mu_a}{2} \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \\
& + \frac{\mu_a}{4} \begin{pmatrix} 0 & \sin 2\alpha & i \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 0 & 0 \\ i \sin 2\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-iqx} \\
& + \frac{\mu_a}{4} \begin{pmatrix} 0 & \sin 2\alpha & -i \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 0 & 0 \\ -i \sin 2\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{iqx} \\
& + \frac{\mu_a}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \alpha & i \sin^2 \alpha \\ 0 & i \sin^2 \alpha & -\sin^2 \alpha \end{pmatrix} e^{-2iqx} \\
& + \frac{\mu_a}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \alpha & -i \sin^2 \alpha \\ 0 & -i \sin^2 \alpha & -\sin^2 \alpha \end{pmatrix} e^{2iqx}.
\end{aligned} \tag{B.28}$$

## B.1. Tensor efectivo del material

El tensor efectivo del material está expresado como la suma de los promedios espaciales de  $\varepsilon(\vec{r})$ ,  $\mu(\vec{r})$ ,  $\zeta(\vec{r})$  y  $\chi(\vec{r})$ . Entonces, el tensor es de la forma

$$\langle \gamma \rangle = \bar{\gamma} + \gamma_1 G(p') \gamma_{-1} + \gamma_{-1} G(-p') \gamma_1 + \gamma_2 G(2p') \gamma_{-2} + \gamma_{-2} G(-2p') \gamma_2, \tag{B.29}$$

hacemos la sustitución de la matriz  $G(p')$  y de las componentes de la serie de Fourier (Ec.(4.58), Ec.(4.59), Ec.(4.61) y Ec.(4.62)), teniendo

$$\begin{aligned}
\langle \gamma \rangle = & \bar{\gamma} - \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{ee}(p') & G_{em}(p') \\ G_{me}(p') & G_{mm}(p') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{-1} & 0 \\ 0 & v_{-1} \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} \xi_{-1} & 0 \\ 0 & v_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{ee}(-p') & G_{em}(-p') \\ G_{me}(-p') & G_{mm}(-p') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & v_1 \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} \xi_2 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{ee}(2p') & G_{em}(2p') \\ G_{me}(2p') & G_{mm}(2p') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{-2} & 0 \\ 0 & v_{-2} \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} \xi_{-2} & 0 \\ 0 & v_{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{ee}(-2p') & G_{em}(-2p') \\ G_{me}(-2p') & G_{mm}(-2p') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{B.30}$$

tomamos en cuenta que  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  y  $n_z = 0$ , por lo tanto el tensor efectivo es

$$\langle \gamma \rangle = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon'' & \chi'' \\ \zeta'' & \mu'' \end{pmatrix}, \tag{B.31}$$

donde

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.32})$$

$$\varepsilon'' = \varepsilon_a^2 \mu_\perp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-n_x^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp - 4p'^2}{4(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2)} & \frac{ip' n_x}{n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2} \\ 0 & \frac{ip' n_x}{n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2} & \frac{-n_x^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp - 4p'^2}{4(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2)} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.33})$$

$$\mu'' = \mu_a^2 \varepsilon_\perp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-n_x^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp - 4p'^2}{4(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2)} & \frac{ip' n_x}{n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2} \\ 0 & \frac{ip' n_x}{n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2} & \frac{-n_x^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp - 4p'^2}{4(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2)} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.34})$$

$$\zeta'' = -\varepsilon_a \mu_a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-ip'(-n_x^2 - \varepsilon_\perp \mu_\perp + 4p'^2)}{2(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2)} & \frac{n_x(-n_x^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp + 4p'^2)}{4(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2)} \\ 0 & \frac{n_x(-n_x^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp + 4p'^2)}{4(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2)} & \frac{-ip'(-n_x^2 - \varepsilon_\perp \mu_\perp + 4p'^2)}{2(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2)} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.35})$$

$$\chi'' = -\varepsilon_a \mu_a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ip'(-n_x^2 - \varepsilon_\perp \mu_\perp + 4p'^2)}{2(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2)} & \frac{n_x(-n_x^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp + 4p'^2)}{4(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2)} \\ 0 & \frac{n_x(-n_x^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp + 4p'^2)}{4(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2)} & \frac{ip'(-n_x^2 - \varepsilon_\perp \mu_\perp + 4p'^2)}{2(n_x^4 - 2n_x^2(4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp) + (-4p'^2 + \varepsilon_\perp \mu_\perp)^2)} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.36})$$

# Bibliografía

- [1] V. G. Veselago. "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ ", Sov. Phys. Uspekhi, 1968.
- [2] <http://materias.fi.uba.ar/6210/CRISTALES%20FOTONICOS.pdf>
- [3] P. J. Collings. "Liquid Crystals: Nature's Delicate Phase of Matter", Princeton University Press, Second Edition, 2002.
- [4] M. Kleman, and O.D. Lavrentovich. "Soft Matter Physics: An Introduction", Spriger-Verlag, New York, 2003.
- [5] P. G. De Gennes and J. Prost. "The Physics of liquid crystals", Clarendon Press Oxford, Second Edition, 1993.
- [6] S. Pikin, L. Blinov. "Cristales Líquidos", Editorial Mir Moscú, Rubiños 1860-Madrid, 1985.
- [7] <http://proton.ucting.udg.mx/materias/tecnologia/Conductores.htm>
- [8] [http://revcolfis.org/publicaciones/vol40\\_2/4002325.pdf](http://revcolfis.org/publicaciones/vol40_2/4002325.pdf)
- [9] J. D. Joannopoulos, R. D. Medde, and J. N. Winn. "Photonic Crystals: Molding the Flow of Light", Princeton University Press, Second Edition, NJ, 2008.
- [10] J.A. Reyes-Avendaño. "Dielectric, metallo-dielectric, and liquid crystal-infilled 2D photonic crystals: homogenization and tuning for in-plane and axial propagation", Thesis Dr. of Sciences in Electronics, National Institute of Astrophysics, Optics and Electronics (INAOE), 2011.
- [11] M. Loncar, T. Yoshie, A. Scherer, P. Gogna, and Y. Qiu. *Appl. Phys. Lett.* 81, 2680, (2002).
- [12] E. Chow, S. Y. Lin, J. R. Wendt, S. G. Johnson, and J. D. Joannopoulos. *Opt. Lett.*, 26, 286, (2001).
- [13] K. Asakawa, Y. Sugimoto, Y. Watanabe, N. Ozaki, A. Mizutani, Y. Takata, Y. Kitagawa, H. Ishikawa, N. Ikeda, K. Awazu, X. Wang, A. Watanabe, S. Nakamura, S. Ohkouchi, K. Inoue, M. Kristensen, O. Sigmund, P.I. Borel, and R. Baets. *New J. Phys.* 8, 208, (2006).
- [14] Y. Fink, Joshua N. Winn, Shanhui Fan, Chiping Chen, Jurgen Michel, John D. Joannopoulos, and Edwin L. Thomas. *Science* 282, 1679, (1998).
- [15] N. Engheta, R. W. Ziolkowski. "Metamaterials: physics and engineering applications", IEEE Press Hoboken, New Jersey: Wiley-Interscience, c2006.

- [16] P. W. Milonni. *"Fast Light, Slow Light and Left-Handed Light"*, editorial Taylor & Francis Group is the Academic Division of T & F Informa plc. published in 2005, New York.
- [17] [http://www.portalcultura.mde.es/Galerias/publicaciones/fichero/Monografia\\_SOPT\\_9.pdf](http://www.portalcultura.mde.es/Galerias/publicaciones/fichero/Monografia_SOPT_9.pdf).
- [18] J. D. Jackson. *"Classical electrodynamics"*, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [19] P. Lorrain, D. R. Corson, F. Lorrain. *"Electromagnetic Fields and Waves"*, W. H. Freeman and Company, Third Edition, New York, 1988.
- [20] P. Lorrain, D. R. Corson. *"Electromagnetism: Principles and Applications"*, W. H. Freeman and Company, Second Edition, New York, 1990.
- [21] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands. *"The Feynman Lectures on Physics. Mainly Electromagnetism and matter"*, Addison-Wesley Publishing Company, EUA, 1964.
- [22] J. D. Jackson. *"Classical electrodynamics"*, John Wiley & Sons, Third Edition, NJ, 1999.
- [23] C. W. Oseen. *"The theory of liquid crystals"*, *J. Chem. Soc. Faraday Trans. II* 29 (1933).
- [24] L. O. Palomares-Hernández. *"Sintonización Electro-Óptica de una capa quiral nanoestructurada con un defecto de torsión"*, Dra. en Ciencias (Física), Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.
- [25] S. Ponti, J. A. Reyes, and C. Oldano. *"Homogeneous models for bianisotropic crystals"*, *J. Phys.: Condens. Matter* 14 (2002), [stacks.iop.org/JPhysCM/14/10173](http://stacks.iop.org/JPhysCM/14/10173)