UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

G-Espacios Propios Universales

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

Doctor en Ciencias

PRESENTA:

M. en C. Rubén Daniel Varela Velasco

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Sergey Antonyan

México, D.F. 2012

Índice general

Lista de Símbolos

$[H]$	Tipo orbital de H, página 15
$\langle U, V \rangle$	Transportador de U a V: $\langle U, V \rangle = \{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\}$, página 22
$\lvert\ \rvert$	Cardinalidad de un conjunto, página 5
$\mathrm{con}(X)$	G-cono del G-espacio propio X, página 36
G	Grupo topológico, página 1
$G(x)$	Órbita del punto x, página 13
G-AE$(\mathcal{K})$	G-extensor absoluto para la clase G-$\mathcal{K}$, página 30
G-ANE$(\mathcal{K})$	G-extensor absoluto de vecindad para la clase G-$\mathcal{K}$, página 30
G-$\mathcal{M}$	La clase de los G-espacios (propios) que admiten una métrica invariante, página 16
G-$\mathcal{P}$	La clase de los G-espacios propios que tienen espacio de órbitas paracompacto, página 39
G/G_0	Grupo cociente de G con respecto a la componente conexa de la identidad, página 9
G_0	Componente conexa de la identidad del grupo topológico G, página 8
G_x	Estabilizador del punto x, página 15
Gx	Órbita del punto x, página 13
$G \times_K Y$	Producto torcido, página 33
HA	H-saturación del conjunto A, página 15
$\mathcal{T}(G)$	$\prod\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{con}(G/H_\alpha)$, página 57
$\mathcal{T}(G, \tau)$	$\mathcal{T}(G)^\tau \setminus \{*\}$ para τ un cardinal infinito mayor o igual al peso de G, página 58

$*$	En el contexto de $\mathcal{T}(G,\tau)$, el punto distinguido en el producto, cuyas coordenadas son los vértices de los conos correspondientes, página 58
θ	Vértice del G-cono, página 36

Agradecimientos

Agradezco a Deirdre, Natalia y Diego Ahkin por acompañarme y apoyarme en este largo y tortuoso viaje todos los días. A mis padres por su gran apoyo. A Natalia Jonard por sus revisiones y discusiones matemáticas. A mi profesor y director de Tesis el Dr. Sergey Antonyan por la educación y formación matemática que recibí de él. A CONACyT por la beca de doctorado y finalmente a la coordinación de estudios de posgrado por el apoyo en la logística de todo el proyecto, especialmente al final del trayecto.

Introducción

La teoría de grupos topológicos de transformaciones o de G-espacios tiene su origen en los trabajos clásicos del matemático noruego Sofus Lie de los años 80 del siglo XIX. En esta teoría, los espacios topológicos se estudian junto con un grupo de simetrías topológicas (homeomorfismos). La teoría de G-espacios está bastante desarollada en el caso cuando el grupo actuante G es compacto, y es especialmente rica cuando G es un grupo compacto de Lie. La propiedad mas destacada de las acciones de grupos compactos de Lie esta plasmada en el Teorema de la Rebanada Exacta, demostrada en su forma más general por Mostow [33].

Richard Palais fue el primero quien observó que si G es un grupo de Lie (no necesariamente compacto) y X es un G-espacio con estabilizadores compactos, tal que en cada punto $x \in X$ existe una rebanada exacta, entonces muchas de las afirmaciones válidas para el caso en que G es compacto también son válidas en el caso en que G no es compacto.

Esta observación llevó a Palais en el año 1961 al concepto fundamental de acción propia de un grupo G localmente compacto de Hausdorff.

En su artículo seminal [35], Palais introdujo la noción de un G-espacio propio, con el propósito de extender una buena parte de la teoría de grupos compactos de transformaciones al caso de acciones de los grupos localmente compactos.

Esta tesis doctoral esta dedicada al estudio de los G-espacios propios.

Recordemos la definición correspondiente.

Sea G un grupo topológico localmente compacto de Hausdorff. Un G-espacio X se llama propio [35, Definición 1.2.2] si posee una cubierta abierta de conjuntos, pequeños. Un subconjunto $S \subset X$ se llama pequeño, si para cualquier punto $x \in X$ existe una vecindad V_x tal que el conjunto

$$\langle\, S, V_x \,\rangle = \{g \in G \mid gS \cap V_x \neq \emptyset\}$$

tiene cerradura compacta en G.

Claramente, si G es compacto entonces todo G-espacio es propio. En el caso cuando G es discreto y X es localmente compacto, la noción de acción propia es la misma que la noción clásica de acción propiamente discontinua. Cuando el grupo G es $\mathbb{R}$, el grupo aditivo de los reales, los G-espacios propios son precisamente los sistemas dinámicos dispersos con espacio de órbitas regular. Tales sistemas con espacios fase separables y metrizables son los sistemas dinámicos paralelizables (ver [25]).

Palais extendió una de las partes fundamentales de la teoría de los grupos compactos de transformaciones al caso de acciones propias de grupos de Lie (no necesariamente compactos). En la Proposición [35, 2.3.1] se establece que existe una "rebanada exacta" a través de cada punto de un G-espacio propio (un resultado más débil se debe a Koszul [30, p.139]). Más aún, un G-espacio de Tychonoff X, es propio si y sólo si las siguientes tres condiciones se cumplen:

1. el estabilizador G_x es compacto para cada punto $x \in X$,
2. existe una rebanada en cada punto $x \in X$,
3. el espacio de órbitas X/G es de Tychonoff.

El teorema de la rebanada, le permitió a Palais [35, §4] generalizar el teorema de Mostow [33] sobre encajes equivariantes en los G-espacios lineales de dimensión finita (para encajes cerrados ver [22]). Un análisis subsiguiente de las acciones propias de grupos de Lie en variedades suaves guió a Illman [28] a la solución de la parte restante del quinto problema de Hilbert con respecto a las acciones de grupos de Lie en variedades.

Otro teorema sobre encajes equivariantes de Palais [35, Teorema 4.3.3] establece que si G es un grupo de Lie, entonces todo G-espacio propio separable y metrizable X admite un encaje equivariante a un G-espacio separable de Hilbert $H(X)$ en el que G actúa por operadores ortogonales.

En este trabajo, nos centramos en G-espacios propios universales. Recordemos que un G-espacio Z se llama universal para la clase G-$\mathcal{P}$ de G-espacios si $Z \in G$-$\mathcal{P}$ y para cada $X \in G$-$\mathcal{P}$ existe un encaje G-equivariante $X \hookrightarrow Z$.

En la tesis vamos a considerar principalmente, G-$Tych^\tau$, la clase de todos los

G-espacios propios de Tychonoff de peso $\leq \tau$, donde τ es un número cardinal infinito,

Uno de los propósitos de este trabajo es establecer la existencia de G-espacios universales propios en la clase $G\text{-}\mathcal{T}ych^{\tau}$.

La tesis esta dividida en 3 capítulos y un apéndice. Los resultados principales están en los capítulos 2 y 3.

En el capítulo 3 se demuestra la existencia de G-espacios universales propios en las clases $G\text{-}\mathcal{T}ych^{\tau}$. El teorema 3.2.2 y el corolario 3.2.3 son resultados principales de este capítulo. El corolario 3.2.3 se puede considerar como la versión equivariante del teorema clásico de Tychonoff sobre encajes en el cubo de Tychonoff. Aquí se demuestra que si τ es un cardinal infinito, entonces todo grupo G localmente compacto y σ-compacto con peso $w(G) \leq \tau$, actúa en la potencia $\mathbb{R}^{\tau}$ de la recta real de tal modo que $\mathbb{R}^{\tau} \setminus \{0\}$ se convierte en un G-espacio universal para la clase $G\text{-}\mathcal{T}ych^{\tau}$. Además, $\mathbb{R}^{\tau}$ es un extensor absoluto equivariante para todos los G-espacios propios cuyo espacio de órbitas es paracompacto. (ver Teorema 3.2.2 y Corollario 3.2.3).

Es pertinente hacer notar que anteriormente, G-espacios universales para diversas clases de G-espacios fueron construidos en los artículos [11], [15] y [31]. En estos trabajos fueron establecidas algunas versiones equivariantes del teorema clásico de Tychonoff sobre encajes. Pero estos G-espacios universales, en general, no son propios en sentido de Palais.

En todos estos trabajos el rol de "intervalos equivariantes" (las aristas del G-cubo de Tychonoff) en la categoría $G\text{-}\mathcal{T}op$ de los G-espacios juegan subconjuntos compactos, convexos e invariantes de G-espacios vectoriales equipados con acciones lineales de G. A pesar de que son objetos topológicos simples (cada uno de ellos es homeomorfo a una bola cerrada de dimensión finita o al cubo de Hilbert), las acciones del grupo G en ellos pueden ser muy complicadas.

El segundo objetivo de esta tesis es el sugerir, para un grupo localmente compacto G, objetos simples en $G\text{-}\mathcal{T}op$, que juegan más adecuadamente el rol del segmento unitario o de la recta real en esta categoría. Recordemos que un subgrupo compacto $H \subset G$ se llama *grande* si el espacio cociente G/H es una variedad (ver la Teorema A.2.13 para otras propiedades equivalentes).

Para cada subgrupo grande $H \subset G$, sea $\mathrm{con}(G/H)$ el cono sobre G/H equipado con la topología (métrica) débil y con la acción de G dada por las translaciones izquierdas en cada nivel. Resulta que estos G-espacios $\mathrm{con}(G/H)$ son objetos suficientemente informativos. A pesar de que los conos $\mathrm{con}(G/H)$ no son G-espacios propios a menos que G sea compacto, nos proveen un material simple y muy útil para la construccion de G-espacios propios. Mencionemos las siguientes ventajas evidentes de los conos:

1. $\mathrm{con}(G/H)$ es de dimensión finita,
2. $\mathrm{con}(G/H)$ es G-AE para los G-espacios propios cuyo espacio de órbitas es paracompacto,
3. $\mathrm{con}(G/H)$ tiene la más simple estructura de tipos de órbitas (sólo dos tipos orbitales) entre de todos los G-AE's métrizables no triviales.

Nuestro Teorema 3.1.1 establece que para cada G-espacio propio de Tychonoff X, existen suficientes funciones equivariantes hacia los conos $\mathrm{con}(G/H)$ en el siguiente sentido: para cada subconjunto cerrado $F \subset X$ y cada punto $a \in X \setminus F$ existen un subgrupo grande $H \subset G$ y una función equivariante $f : X \to \mathrm{con}(G/H)$ tal que $f(a) \neq \theta$ y $f(a) \notin \overline{f(F)}$ (θ es el vértice del cono).

A pesar de que $\mathrm{con}(G/G_a)$ no es un G-espacio propio cuando G no es compacto, para cualquier familia de subgrupos grandes H_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, el G-espacio

$$\left(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathrm{con}(G/H_\alpha)\right) \setminus \{*\}$$

es propio, donde $*$ es el único punto G-fijo del producto $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathrm{con}(G/H_\alpha)$ (ver Teorema 3.2.2). Los G-espacios universales construídos en la Sección 3 son precisamente de esta forma (ver Teorema 3.2.1 y Corolario 3.2.3).

Usando los resultados fundamentales de Torunńczyk [38] y Anderson [3], mostramos que nuestros G-espacios propios universales son homeomorfos a $\mathbb{R}^\tau \setminus \{0\}$ cuando el grupo actuante G es σ-compacto (ver Corolario 3.2.3).

Aún que la Sección 2 juega un papel auxiliar para esta tesis, su resultado principal como el teorema 2.3.4, tiene interés independiente y generaliza un resultado de Palais [34, Proposition 1.7.27]. Este teorema afirma que la cardinalidad del conjunto de las clases de conjugación (llamados tipos orbitales) de los subgrupos grandes de un grupo localmente compacto G, no excede al peso de G.

Finalmente, notemos que para el autocontenido de la tesis, como apéndice, en la última seccion A inculimos la información correspondiente a los subgrupos grandes y a las rebanadas aproximativas. Estas son herramientas importantes para esta tesis y fueron desarollados por S. Antonyan en sus artículos [14] y [9].

1. Preliminares

En este capítulo recordaremos e introduciremos los conceptos más importantes que se utilizarán a lo largo del trabajo. En la primera sección hablaremos de grupos topológicos. En la segunda sección abordaremos las acciones de grupos topológicos en espacios topológicos, en la tercera sección estableceremos cierta clase de acciones de grupos localmente compactos, que nos permite generalizar de alguna forma las acciones de grupos compactos y que son el tema principal de este trabajo. En la cuarta sección introduciremos las rebanadas en los G-espacios, herramienta principal en el estudio de los G-espacios propios. Por último la quinta y sexta sección tratan de conceptos, como extensores absolutos y los conos de G-espacios propios.

1.1. Grupos topológicos

Si consideramos un grupo algebraico, junto con una topología con la cual, las operaciones del grupo son continuas, nos damos cuenta de que la interacción de ambos conceptos nos garantizan varias propiedades importantes. Por ejemplo, si el grupo es T_0, entonces el grupo cumple hasta el axioma de separación $T_{3\frac{1}{2}}$, debido a la estructura del grupo y la continuidad de las operaciones.

En esta sección veremos algunas de las propiedades importantes que cumplen los grupos topológicos. Siempre consideraremos un grupo topológico completamente regular y localmente compacto, excepto cuando se especifique lo contrario. Más precisamente, definimos un grupo topológico como sigue.

Sea G un conjunto con estructura algebraica de grupo. Por otro lado consideremos una topología τ definida en el conjunto dado G. Si las operaciones definidas en el grupo,

$$\cdot : G \times G \to G \qquad y \qquad {}^{-1} : G \to G$$

resultan ser continuas, decimos que G es un ***grupo topológico*** *respecto a τ.*

Es de esperarse que la condición de continuidad en las operaciones del grupo, tenga consecuencias de gran importancia para las propiedades topológicas. De la combinación de ambas estructuras, podemos afirmar que si G es un grupo y τ una topología para G, entonces G **es un grupo topológico si y sólo si la función** $f : G \times G \to G$ **dada por** $f(g,h) = gh^{-1}$ **es continua**. De la misma forma, combinando ambas estructuras, podemos demostrar el siguiente resultado.

Proposición 1.1.1. *Sea G un grupo topológico. Las funciones dadas por $\phi_g(x) = gx$ para todo $g \in G$ y $f(g) = g^{-1}$ son homeomorfismos.*

Demostración. Por definición ϕ_g es una función continua. Veremos que es inyectiva, suprayectiva y con inversa continua. Para ello, sean h y h' elementos de G, tales que $\phi_g(h) = \phi_g(h')$, lo que implica que $gh = gh'$. De aquí $g^{-1}gh = g^{-1}gh'$ y entonces $h = h'$.

Para ver que es suprayectiva, sea b en G. Entonces $\phi_g(g^{-1}b) = gg^{-1}b = b$, por lo que $\phi_g(g^{-1}b) = b$. Para ver la continuidad de la inversa, sólo basta decir que $\phi_{g^{-1}}$ es la inversa de ϕ_g, ya que $\phi_{g^{-1}}(\phi_g(a)) = \phi_{g^{-1}}(ga) = (g^{-1}ga) = a$, y $\phi_g(\phi_{g^{-1}}(a)) = \phi_g(g^{-1}a) = gg^{-1}a = a$.

Para ver que la función $^{-1}$ es homeomorfismo, es claro que si $a^{-1} = b^{-1}$, entonces $a = b$ y por lo tanto es inyectiva. Para ver que es suprayectiva, sea $b \in G$ arbitrario. Es claro que $b^{-1} \in G$ es el elemento buscado, pues $\left(b^{-1}\right)^{-1} = b$, y la inversa es la misma inversión, por lo que es continua, y por lo tanto es homeomorfismo.

□

Otra consecuencia inmediata de la combinación de las estructuras topológica y algebraica, nos da una importante propiedad topológica de los grupos topológicos la cual toma un papel de vital importancia y muy utilizado en la teoría de grupos topológicos. Esto es:

Teorema 1.1.2. *Si G es un grupo topológico, entonces G es un espacio homogéneo,* *es decir, para cualesquiera par de elementos distintos g y h de G existe un homeomorfismo $f : G \to G$ tal que $f(g) = h$.*

Demostración. En efecto, sean g y h elementos arbitrarios de G. Es claro que $\phi_{hg^{-1}}$ es el homeomorfismo buscado, ya que $\phi_{hg^{-1}}(g) = hg^{-1}g = h$.

□

Por lo tanto, muchas propiedades topológicas dependen únicamente de las vecindades de la unidad del grupo, y las posibles traslaciones de ellas. Por ejemplo, una base para el grupo, puede obtenerse realizando todas las posibles traslaciones de una base local de la unidad, esto es,

Teorema 1.1.3. *Sean G un grupo topológico y $\mathcal{N}_e$ una base local para la identidad de G. Entonces $\{gU \mid g \in G,\ U \in \mathcal{N}_e\}$ es una base para la topología de G.*

Demostración. Sea W un abierto de G y $g \in W$, queremos ver que existe un elemento U de $\mathcal{N}_e$, tal que $g \in gU \subset W$. Como $\phi_{g^{-1}}$ es homeomorfismo, entonces $\phi_{g^{-1}}(W)$ es un abierto en G y contiene a la identidad, pues $\phi_{g^{-1}}(g) = g^{-1}g = e$. Como $\mathcal{N}_e$ es base local, existe $U \in \mathcal{N}_e$ tal que $U \subset \phi_{g^{-1}}(W)$. Es claro que $\phi_g(U) = gU$ es un abierto (ϕ_g es homeomorfismo). Además, $U \subset \phi_{g^{-1}}(W)$, y de aquí, $gU = \phi_g(U) \subset \phi_g(\phi_{g^{-1}}(W)) = W$. Que es lo que queríamos demostrar.

□

Junto con el hecho anterior, también podemos considerar las vecindades simétricas, esto es, una vecindad V tal que al aplicarle la operación del grupo $^{-1}$ sea invariante, es decir, $V = V^{-1}$. Este tipo de vecindades juegan un papel importante, e incluso, son suficientes para describir la topología del grupo, ya que tiene lugar el siguiente

Teorema 1.1.4. *Sea G un grupo topológico. Entonces existe una base local de la identidad de G, que consta de vecindades simétricas.*

Demostración. Sea U una vecindad de la identidad. Como $^{-1}$ es homeomorfismo, entonces tenemos que U^{-1} es un abierto tal que $e \in U^{-1}$. De aquí, $e \in V = U \cap U^{-1}$ es un abierto que contiene a e, $V^{-1} = U^{-1} \cap U = V$ y por lo tanto es simétrica. Ahora, es claro que $V \subset U$. Entonces, dada una vecindad de la identidad, encontramos una vecindad simétrica de la identidad dentro de la original, lo cual implica que el conjunto de vecindades simétricas de la identidad es base local para e.

□

También existen vecindades arbitrariamente pequeñas con respecto a la operación del grupo, es decir,

Teorema 1.1.5. *Sean G un grupo topológico y U una vecindad de la identidad. Entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe una vecindad V de la identidad tal que $V^n = \underbrace{V \cdot V \cdot \ldots \cdot V}_{n} \subset U$.*

Demostración. Sea U una vecindad de la identidad. Usaremos inducción sobre n. En caso de $n = 1$ es fácil ver que $V = U$ cumple las condiciones. Supongamos entonces, que para todo $k < n$, existe una vecindad W_k de la identidad tal que $W^k \subset U$. Ya que la operación del grupo es continua, entonces existen dos vecindades V' y V'' de la identidad, tales que $V'V'' \subset W$. Afirmamos que $V = V' \cap V''$ es la vecindad buscada, lo cual es obvio, pues $VV \subset W$, por lo que, sustituyendo, $(VV)^{n-1} \subset W^{n-1} \subset U$, pero $V^n \subset (VV)^{n-1} \subset U$.

□

Otra propiedad importante es el siguiente

Teorema 1.1.6. *Sean G un grupo topológico y U una vecindad de la unidad. Entonces existe otra vecindad V tal que $e \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

Demostración. Sea U una vecindad de la identidad. Por la proposición anterior existe una vecindad V simétrica de la identidad tal que $V^2 \subset U$. Afirmamos que V es la vecindad buscada. Sea $x \in \overline{V}$, entonces $xV \cap V \neq \emptyset$, es decir, existen $g, h \in V$ tales que $xg = h$ y de aqui, $x = hg^{-1} \in VV^{-1} = V^2 \subset U$. Entonces $\overline{V} \subset U$.

□

De las observaciones anteriores, podemos concluir

Proposición 1.1.7. *Todo grupo topológico T_0 es regular.*

Demostración. Sea $g \in G$ y U una vecindad de g en G. Usando $\phi_{g^{-1}}$ tenemos que $\phi_{g^{-1}}(U)$ es vecindad de la identidad. Por la proposición anterior, existe una vecindad W tal que $e \in W \subset \overline{W} \subset \phi_{g^{-1}}(U)$. Aplicando la inversa ϕ_g obtenemos, $\phi_g(e) \in \phi_g(W) \subset \phi_g(\overline{W}) \subset \phi_g(\phi_{g^{-1}}(U)) = U$. Afirmamos que $V = \phi_g(W)$ es la vecindad buscada, ya que $g \in V \subset \overline{V} \subset U$ (ϕ_g es homeomorfismo).

Solo resta verificar que G es T_1. Sean g y h dos puntos distintos de G. Como G es T_0, entonces existe una vecindad U tal que $|U \cap \{g, h\}| = 1$. Supongamos que $g \in U$. Aplicando la primera parte de la prueba, existe un abierto V, tal que $g \in V \subset \overline{V} \subset U$. Sea $W = G \setminus \overline{V}$. De lo anterior, tenemos que $g \in V$ y $h \in W$, además $h \notin V$ y $g \notin W$, que es lo que queríamos demostrar.

□

Esta es una propiedad bastante sorprendente que ocurre al momento de combinar las dos estructuras de manera adecuada. Por lo tanto, en general, en este trabajo, siempre utilizaremos grupos T_0 y por lo tanto regulares. De hecho Pontryagin muestra que todo grupo topológico T_0 es completamente regular, la demostración de este hecho, se puede ver en [36, Teorema 10].

Ahora, veamos que sucede al momento de realizar operaciones algebraicas con los subconjuntos del grupo topológico G. Consideremos un par de subconjuntos A y B del grupo topológico G. Si uno de ellos es un subconjunto abierto, entonces el producto es abierto, pues se puede expresar como unión arbitraria de abiertos: $AB = \bigcup_{a \in A} aB$ (B abierto). Cuando los subconjuntos son cerrados, en general no es cierto que su producto es cerrado. Para poder asegurar que un producto de cerrados es cerrado (ejemplo 1.1), se requiere la hipótesis de que uno de ellos sea compacto.

Ejemplo 1.1.1 Para que un producto (en este caso suma finita) de dos cerrados sea cerrado, uno de los operandos **debe ser compacto**.

Sea G el conjunto de los números reales con la topología usual y la suma como su operación de grupo.
Consideremos los subconjuntos cerrados $A = \mathbb{N}$ y $B = \left\{-\left(n + \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.
El conjunto $\left\{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ está contenido en $A+B$, ya que $n+\left(-n - \frac{1}{n}\right) = n-n-\frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$.
Sin embargo $0 \notin A + B$, y por lo tanto $A + B$ no es cerrado.

Otro resultado interesante, es el siguiente:

Proposición 1.1.8. *Sea G un grupo topológico. Si H es un subgrupo de G, entonces $\overline{H}$ también es un subgrupo de G. Si H es un subgrupo abierto de G, entonces H es cerrado.*

Demostración. Sean a y b en $\overline{H}$. Queremos ver que $ab^{-1} \in \overline{H}$. Sea W una vecindad de ab^{-1}, entonces, por la continuidad de la operación, existen dos vecindades U y V de a y b respectivamente, tales que $UV^{-1} \subset W$. Como $a \in \overline{H}$, $U \cap H \neq \emptyset$, es decir, existe $x \in U \cap H$. Análogamente, existe $y \in V \cap H$. Como H es subgrupo, entonces $xy^{-1} \in H$ y $xy^{-1} \in UV^{-1} \subset W$. Por lo tanto, $W \cap H \neq \emptyset$, lo cual implica que $ab^{-1} \in \overline{H}$ y $\overline{H}$ es subgrupo de G.

Ahora, sea $a \in \overline{H}$, como H es abierto, entonces aH es una vecindad para a y por lo tanto $aH \cap H \neq \emptyset$, por lo que $a \in HH^{-1} = H$. Esto prueba que $\overline{H} = H$. □

Otro resultado muy importante, que usaremos más adelante en el trabajo, es el siguiente:

Teorema 1.1.9. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Entonces la familia de clases laterales izquierdas G/H, provisto de la topología cociente, es un espacio de Hausdorff. En este caso, la proyección $\pi : G \to G/H$ es abierta.*

Demostración. Sea O abierto en G, como $\pi^{-1}(\pi(O)) = OH$, el cual es abierto en G. Y por lo tanto $\pi(O)$ es abierto en G/H. Luego, la proyección es abierta.

Para ver que G/H es de Hausdorff, sean $g_1H \neq g_2H$, con $g_1, g_2 \in G$. Entonces $g_1^{-1}g_2 \notin H$. Como H es cerrado, existe una vecindad U de $g_1^{-1}g_2$ que no intersecta H. Sea $f : G\times G\times G \to G$ dada por $f(g,h,i) = ghi$. La función f es continua, pues la operación del grupo lo es. Aplicando la continuidad en el punto $(e, g_1^{-1}g_2, e)$ existe una vecindad V de e tal que $Vg_1^{-1}g_2V \subset U$. Sea W una vecindad simétrica de la identidad tal que $W \subset V$. Ahora, como $Wg_1^{-1}g_2W \subset U$, tenemos que $(Wg_1^{-1}g_2W)\cap H = \emptyset$, y por lo tanto $g_1^{-1}g_2W\cap WH = \emptyset$, lo cual implica que $g_2W\cap g_1WH = \emptyset$ y como H es subgrupo, entonces $g_2WH\cap g_1WH = \emptyset$. De aqui, tenemos que $\pi(g_2W) = g_2WH$ y $\pi(g_1W) = g_1WH$ que son vecindades ajenas de g_2H y g_1H. Por lo tanto G/H es de Hausdorff.

□

El resultado anterior muestra claramente los motivos por los cuales los subgrupos que consideremos en este trabajo serán cerrados: para asegurar que el cociente del grupo con algún subgrupo sea de Hausdorff.

Teorema 1.1.10. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo normal cerrado de G. Entonces G/H es un grupo topológico.*

Demostración. Por el teorema anterior, G/H es un espacio de Hausdorff y G/H es un grupo, ya que H es normal en G. Sea $\hat{\gamma} : G/H \times G/H \to G/H$ dada por $\hat{\gamma}(g_1H, g_2H) = g_1g_2^{-1}H$. Como H es normal, entonces la función está bien definida. Sólo basta ver que $\hat{\gamma}$ es continua. Para ello, consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\
G/H\times G/H \arrow[r, "\hat{\gamma}"'] & G/H
\end{tikzcd}$$

Claramente $\pi\times\pi$ es suprayectiva. Como π es abierta, entonces $\pi\times\pi$ también lo es. Por otro lado, la composición $\pi\circ\gamma$ es continua y por lo tanto $\hat{\gamma}$ también lo es.

□

Observemos que G/H **es discreto si y sólo si el subgrupo cerrado** H **es abierto**. En efecto, sea H un subgrupo cerrado y abierto. Consideremos U un conjunto arbitrario en G/H. Entonces,

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{u \in U} uH.$$

Como H es abierto, es claro que $\pi^{-1}(U)$ es unión de abiertos y por lo tanto abierto. Ahora, si G/H es discreto, significa que todo subconjunto de G/H es abierto. En especial eH, cuya preimagen bajo π es exactamente H y por lo tanto, H es abierto.

La componente conexa de la identidad, que denotaremos por G_0, juega un papel fundamental dentro del estudio de los grupos topológicos.

Teorema 1.1.11. *Sea G un grupo topológico. Sea G_0 la componente conexa de la identidad de G. Entonces G_0 es un subgrupo normal cerrado de G.*

Demostración. Sean a y b dos elementos de G_0. Como el conjunto G_0 es conexo, entonces el conjunto aG_0^{-1} también lo es. Además aG_0^{-1} contiene a e, ya que $a^{-1} \in G_0^{-1}$. De aqui, tenemos que $aG_0^{-1} \subset G_0$. Como $b \in G_0$, entonces $b^{-1} \in G_0^{-1}$ y por lo tanto, $ab^{-1} \in aG_0^{-1} \subset G_0$ y por lo tanto G_0 es subgrupo de G. Sea $x \in G$, veremos ahora que $xG_0x^{-1} \subset G_0$. Para ello, observemos que xG_0x^{-1} es un conjunto conexo de G que contiene a la identidad. Así, $xG_0x^{-1} \subset G_0$ y por lo tanto G_0 es un subgrupo normal de G.

□

Como acabamos de observar, la componente conexa de la identidad es un subgrupo normal cerrado, por lo que **el cociente** G/G_0 **es un grupo topológico**. Cuando G/G_0 es compacto, diremos que G es **casi conexo**. Además, como veremos a continuación, es totalmente disconexo.

Teorema 1.1.12. *Sean G un grupo topológico y G_0 la componente conexa de la identidad. Entonces G/G_0 es totalmente disconexo.*

Demostración. Sea $f : G \to G/G_0$ la proyección. Entonces f es un homomorfismo de grupos. Sea P^* la componente conexa de eG_0 en G/G_0 y P la preimagen bajo f de P^*. Veremos que $f|_P$ es abierta. Sea U un abierto de P, entonces existe un abierto V de G, tal que $U = V \cap P$. Ahora, $f|_P(U) = P^* \cap f(V)$. Como f es abierta, entonces $f(V)$ es un abierto de G/G_0, y por lo tanto $f|_P$ es abierta.

Supongamos ahora que P^* tiene dos o más puntos distintos. En este caso $eG_0 \in P^*$ y por lo tanto P no puede ser conexo. Así, existen dos conjuntos abiertos en P, A y B disjuntos, no vacíos y cuya unión es P. Si $a \in A$, entonces $G_0 a \subset A$, ya que $G_0 a$ es conexo. Análogamente, si $b \in B$, entonces $G_0 b \subset B$. Esto implica que $f(A)$ y $f(B)$ son abiertos disjuntos y no vacíos en P^*, y por lo tanto forman una desconexión de P^*, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $P^* = eG_0$ y como G/G_0 es homogéneo, entonces G/G_0 es totalmente disconexo.

□

A continuación veremos algunas de las propiedades importantes que se cumplen cuando G es un grupo localmente compacto y totalmente disconexo.

Teorema 1.1.13. *Sea G un grupo localmente compacto y totalmente disconexo. Entonces para toda vecindad U de la identidad de G, existe un subgrupo compacto y abierto H de G, tal que $H \subset U$.*

Demostración. Como G es totalmente disconexo, entonces $\{e\}$ es la componente conexa de la identidad. Sea U una vecindad de e en G. Como G es localmente compacto, existe una vecindad compacta P de e, tal que $e \in P \subset U$.

Sea $Q = \{\, g \in G \mid Pg \subset P \,\}$. Afirmamos que $Q \cap Q^{-1} = H$ es un subgrupo compacto y abierto de G, contenido en U.

Para demostrar que H es abierto, es suficiente ver que Q es abierto. Tomemos un punto fijo q de Q y x un punto arbitrario de P. Como $xq \in P$ y P es abierto, entonces existen vecindades U_x y V_x de x y q respectivamente, tales que $U_x V_x \subset P$. Los abiertos $\{U_x\}_{x\in P}$ forman una cubierta abierta para P, por lo que existe una subcubierta finita $\{U_{x_1}, ..., U_{x_k}\}$ de P. Sea

$$V = \bigcap_{i}^{k} V_{x_i}.$$

Entonces $PV \subset P$, y $V \subset Q$, lo cual implica que q es punto interior de Q.

Observemos que Q es cerrado. Para ello, probemos que $G \setminus Q$ es abierto. Sea $r \in G \setminus Q$. Como $Pr \not\subset P$, existe un punto $p \in P$ tal que $pr \in G \setminus P$. Como $G \setminus P$ es abierto, entonces existe una vecindad W de r tal que $pW \subset G \setminus P$ y por lo tanto $W \subset G \setminus Q$.

Ahora, $Q \subset P$ ya que $e \in P$ y si $y \in Q$ entonces $y = ey \in P$. Además, $Pe = P \subset P$ y por lo tanto $e \in Q$. Como P es compacto y Q es cerrado, entonces Q es compacto. Por lo tanto $H = Q \cap Q^{-1}$ es abierto, compacto y contiene a la identidad. Sólo falta ver que H es un subgrupo de G.

Sean h_1 y h_2 elementos de H. Entonces $h_1 \in Q$ y $h_2^{-1} \in Q^{-1}$ y

$$P(h_1 h_2^{-1}) = (Ph_1)h_2^{-1} \subset Ph_2^{-1} \subset P.$$

Es decir $h_1 h_2^{-1} \in Q$. Análogamente, $h_1 h_2^{-1} \in Q^{-1}$ y por lo tanto $h_1 h_2^{-1} \in H$, lo cual prueba que H es subgrupo de G.

Como H es un subgrupo abierto, entonces G/H es un espacio topológico discreto.

□

Teorema 1.1.14. *Sea G un grupo topológico totalmente disconexo y compacto. Sea U una vecindad de la unidad en G. Entonces existe un subgrupo normal abierto. N de G, contenido en U.*

Demostración. Sea H un subgrupo compacto y abierto de G contenido en U. Sea $N = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$. Claramente N es un subgrupo normal de G.

Afirmamos que N es abierto. Como $x^{-1}ex \in H$, entonces existen vecindades V_x y W_x de la identidad y x respectivamente, tales que $W_x^{-1}V_xW_x \subset H$. Los abiertos $\{W_x\}_{x \in G}$ forman una cubierta abierta de G, y por lo tanto existe una subcubierta finita $\{W_{x_1}, ..., W_{x_n}\}$. Sea $V = \bigcap_{i=1,..,n} V_{x_i}$. De aquí, $x^{-1}Vx \subset H$ para todo $x \in G$. Es decir, $V \subset N$, y por lo tanto, para cualquier elemento $n \in N$, tenemos que $Vn \subset N$ y por lo tanto N es abierto.

Como G/N es un espacio topológico discreto y compacto, entonces G/N es finito.

□

Otra propiedad importante que tenemos acerca de los grupos totalmente disconexos es la siguiente:

Lema 1.1.15. *Sea G un grupo totalmente disconexo, K un subgrupo compacto de G y V un abierto tal que $K \subset V$. Entonces existe un subgrupo compacto abierto K' tal que $K \subset K' \subset V$.*

Demostración. Toda vecindad de la identidad, contiene un subgrupo compacto abierto [17, II. S. 4.6 Prop.14, Cor.1]. Entonces, para el subconjunto abierto V, existe un subgrupo compacto abierto K_0 de G tal que $K_0K \subset V$. Por lo tanto, $K_1 = \bigcap_{k \in K} kK_0k^{-1}$ es una vecindad de e en G, ya que existe una vecindad W de la identidad tal que $kWk^{-1} \subset K_0$ para toda $k \in K$. Entonces el subgrupo abierto K_1 de K_0 está normalizado por K y por lo tanto $K_1 \cdot K$ es un subgrupo abierto compacto contenido en V.

□

1.2. Acciones de grupos

Nuestro trabajo está dedicado a las acciones de grupos topológicos localmente compactos en espacios topológicos. En esta sección introduciremos las nociones básicas de acciones de grupos. En general, utilizaremos grupos localmente compactos. En algunos casos, los grupos serán, además de Lie y compactos.

Sea G un grupo topológico y X un espacio topológico. Una función continua $\alpha: G \times X \to X$ es una **acción**, si cumple las siguientes condiciones:

1. Para todo $x \in X$, y el elemento identidad e de G, se cumple $\alpha(e,x) = x$.

2. Para todo par de elementos g y h de G y un elemento x en X, se cumple $\alpha(g,\alpha(h,x)) = \alpha(gh,x)$.

En este caso, diremos que G actúa en X. A α la llamaremos acción de G en X y a X le llamaremos G-**espacio** (o **espacio fase de la acción**).

Para facilitar la notación, cuando no exista ambigüedad, escribiremos gx como la imagen del punto (g,x) bajo la acción α, es decir $gx := \alpha(g,x)$.

Ejemplo 1.2.1 Un grupo topológico G actúa continuamente sobre sí mismo.

Sea G un grupo topológico. Entonces G actúa sobre $X = G$ por medio de la operación del grupo. Es decir, la función $\alpha : G \times X \to X$ dada por $\alpha(g,x) = gx$, es continua, puesto que G es un grupo topológico. Por otro lado $\alpha(e,x) = ex = x$ por definición, así como $\alpha(g,\alpha(h,x)) = g(hx) = (gh)x = \alpha(gh,x)$.
Si H es un subgrupo cerrado de G, entonces G actúa en G/H, la familia de clases laterales izquierdas, con la regla $g(g'H) = (gg')H$.
En efecto, es claro que la acción resulta continua debido a la continuidad de la multiplicación en el grupo. Ahora, $e(gH) = (eg)H = gH$ y $g(g'(g''H)) = g((g'g'')H) = (gg'g'')H = (gg')(g''H)$.

Ejemplo 1.2.2 El grupo $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ actúa en $X = \mathbb{R}^2$.

Podemos definir una acción de G en $\mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

$$\alpha(r,(x,y)) = (rx, ry) \tag{1.1}$$

Donde $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Efectivamente α es una acción, pues $\alpha(1,(x,y)) = (x,y)$ y $\alpha(r,\alpha(s,(x,y))) = \alpha(r,(sx,sy)) = (rsx, rsy) = \alpha(rs,(x,y))$.

Ejemplo 1.2.3 El grupo $\mathbb{R}$ actúa a través de traslaciones en $\mathbb{R}^2$.

Consideramos al grupo $G = (\mathbb{R}, +)$, y $X = \mathbb{R}^2$ como espacio topológico. Entonces las funciones $r_1(x,y) \mapsto (x+r,y)$ y $r_2(x,y) \mapsto (x, y+r)$ definen acciones continuas.

Ejemplo 1.2.4 La acción del grupo $\mathbb{S}^1$ sobre $\mathbb{C}$.

Si $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$, entonces $\mathbb{S}^1$ actúa en $\mathbb{C}$ por medio de la regla $(g,x) = gx$, la multiplicación de números complejos.

Cuando consideramos los G-espacios, surgen naturalmente algunos conjuntos especiales asociados a cada punto del espacio, como las órbitas, y estabilizadores. De la misma forma surgen funciones del G-espacio dado a su espacio orbital. A continuación definiremos estas nociones con mayor precisión.

En adelante G representará un grupo topológico localmente compacto, X un G-espacio y H un subgrupo cerrado de G.

Si $x \in X$ entonces definimos al conjunto $H(x) = \{\, hx \mid h \in H \,\}$ como la H-**órbita** de x. En el caso especial cuando H coincide con todo el grupo G, entonces simplemente diremos que $G(x)$ es la órbita de x. Gracias a las condiciones que satisface cualquier acción, se tiene que si $y \in G(x)$, entonces $x \in G(y)$. En efecto, si $y = gx$ para algún $g \in G$ entonces al hacer actuar g^{-1} en y, se tiene

$$g^{-1}y = g^{-1}gx = ex = x,$$

lo cual implica que $x \in G(y)$. Es claro que $x \in G(x)$. Además si $y \in G(x)$ y $z \in G(y)$, entonces $y = gx$ y $z = g'y$ para algunos $g, g' \in G$. Así $z = g'gx = (g'g)x$ lo cual implica que $z \in G(x)$. Con lo anterior, podemos observar que la relación dada por $x \sim y$ **si y sólo si** $x \in G(y)$ **es una relación de equivalencia**. De esta forma, definiremos a X/G **como el espacio cociente de** X generado por la relación de equivalencia descrita anteriormente, y lo llamaremos **espacio orbital** de X sobre G.

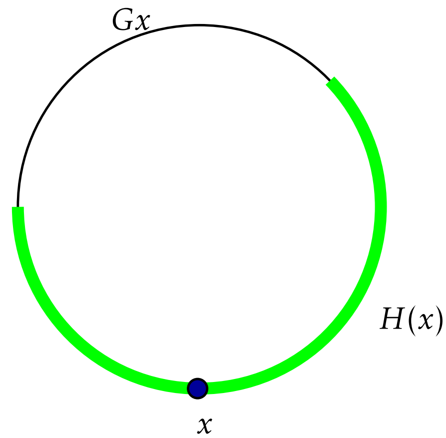


Figura 1.1: H-órbita de x. H es un subconjunto de G. La H-órbita es el resultado de hacer actuar todos los elementos $h \in H$ en x. Si H es el mismo grupo G, la H-órbita, se llamará simplemente órbita de x.

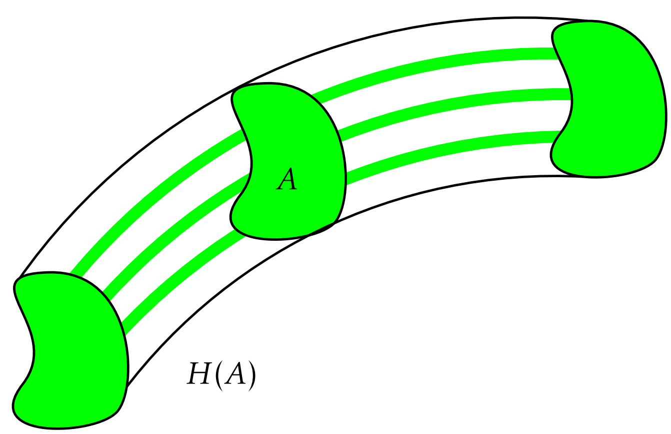


Figura 1.2: H-saturación de A. Si H es un subconjunto de G. HA es la unión de todos los traslados ha con $h \in H$ y $a \in A$.

Naturalmente, si consideramos las H-órbitas, para un subgrupo cerrado H de G, tendremos también el H-espacio orbital, aplicando la restricción de la relación de equivalencia a H-órbitas.

Para un subconjunto A de X, y un subgrupo cerrado H de G, definimos H-**saturación** de A como el conjunto $HA = \{ha \mid h \in H,\ a \in A\}$. Si $HA = A$, diremos que el conjunto A es H-invariante.

Finalmente, definimos el **estabilizador** de un punto $x \in X$ como

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\},$$

es decir, el conjunto de elementos de G que "fijan" a x bajo la acción. Observemos que para todo punto $x \in X$ el **estabilizador es un subgrupo** de G. En efecto, claramente $e \in G_x$, pues $ex = x$. Ahora, sean g y h elementos de G_x. Como $x = hx$, si a ambos lados aplicamos h^{-1}, se tiene que $h^{-1}x = h^{-1}hx = (h^{-1}h)x = ex = x$. Por lo tanto $h^{-1} \in G_x$. Por último, $(gh)x = g(hx) = gx = x$, pues g y h fijan al punto x.

Una de las partes fundamentales a estudiar en los espacios topológicos son las propiedades que se conservan bajo funciones continuas. En los G-espacios, consideramos además la forma en que interactúa el grupo topológico con el espacio topológico. De esta manera, nos interesarán las propiedades que se preservan bajo funciones continuas que respetan la acción del grupo. Mas precisamente si X y Y son dos G-espacios y $f : X \to Y$ una función continua, diremos que f es una G-**función** o **función equivariante** si para todo $g \in G$ y $x \in X$, se cumple que $f(gx) = gf(x)$.

Otro concepto de relevancia para este trabajo, es el de **tipo orbital**, y lo definimos como sigue: si H es un subgrupo de G, el **tipo orbital** de H, denotado por $[H]$ es el conjunto de subgrupos conjugados de H, es decir:

$$[H] = \{K < G \mid \text{ existe } g \in G \text{ tal que } gKg^{-1} = H\}.$$

1.2.1. Métricas invariantes

En el caso de G-espacios métricos tendremos particular interés por las métricas con respecto a las cuales el grupo actúa isométricamente.

Dado un G-espacio X, diremos que X *admite* una **métrica invariante** si existe una métrica d compatible con su topología y tal que para cada $g \in G$ la g-traslación $\theta_g : X \to X$ dada por $\theta_g(x) = gx$ es una isometría de X, es decir:

$$d(gx, gy) = d(x, y)$$

para toda $g \in G$ y cualesquiera $x, y \in X$.

Si G es un grupo compacto y (Y, d') es un espacio métrico, entonces la función definida por

$$d(x, y) = \sup_{g \in G} d'(gx, gy)$$

es una métrica invariante y admisible en X. Sin embargo no todos los G-espacios metrizables admiten métricas invariantes.

Los G-espacios propios que admiten métricas invariantes forman una clase destacada que denotaremos por G-$\mathcal{M}$.

A lo largo del trabajo, mencionaremos y usaremos resultados relacionados con este problema. Una discusión más detallada sobre el tema se encuentra en el trabajo de S. Antonyan y S. de Neymet [10].

Ejemplo 1.2.5 Un G-espacio que no acepta una métrica invariante (ver [20, Capítulo III, Sección 2.3]).

Sean $k \in \mathbb{N}$, $S = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ el espacio discreto de k puntos y $X = S^{\mathbb{Z}}$. Entonces X es un espacio metrizable y compacto. Sea $\varphi : X \to X$, la función dada por

$$\varphi\left((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

Es decir, φ es la función que *desplaza* a la derecha cada entrada. Entonces φ es un homeomorfismo y genera una acción de $\mathbb{Z}$ en X dada por:

$$m \cdot x = \varphi^m(x), \qquad m \in \mathbb{Z}, \quad x \in X$$

Este $\mathbb{Z}$-espacio no admite ninguna métrica invariante.
En efecto, supongamos que existe una métrica invariante compatible con la topología de X. Si $x = (..., 1, 1, 1, ...)$ y $y_n = (..., 1, 1, 1, 0, 0, 0, ...)$ el punto cuyas coordenadas son 1 hasta la n-ésima coordenada, a partir de la cual todas las demás serán 0. Sea $r = 1/2d(x, y_0)$.
Como la métrica d es invariante, entonces $d(x, y_n) = d(x, y_0)$ (ya que x es un punto fijo bajo la acción y $y_n = n \cdot y_0$). Sea $B_r(x)$ la bola abierta de radio r centrada en x. Entonces como la topología generada por d es compatible con la topología producto, entonces existe una vecindad básica U (de la topología producto) contenida en $B_r(x)$.
De acuerdo a la definición de la vecindad básica U, existe un $l \in \mathbb{Z}$ tal que, U contiene a los respectivos espacios S_j, con $j > l$. Por lo tanto, el punto y_l que tiene todas las coordenadas menores que l igual a las coordenadas de x. Entonces $y_l \in U \subset B_r(x)$, lo cual es una contradicción, pues $d(x, y_l) = 2r$.
Así, si d es una métrica invariante para X, entonces no puede ser compatible con la topología producto. Por lo tanto, X no tiene una métrica invariante.

1.2.2. Espacios de órbitas

Dado un G-espacio X, definimos la proyección natural $p : X \to X/G$ por la regla

$$p(x) = G(x)$$

donde $G(x)$ denota la órbita del punto $x \in X$.

Recordemos que un conjunto $U \subset X/G$ es abierto si y sólo si $p^{-1}(U) \subset X$ es abierto. Este espacio se llama **espacio de órbitas** y la identificación p **proyección orbital**.

Como ejemplos importantes de espacios de órbitas podemos mencionar los espacios de clases laterales derechas e izquierdas de un subgrupo cerrado H de G:

1. En efecto, si el subgrupo cerrado H actúa en G mediante la multiplicación $h \cdot g = hg$, la clase lateral derecha Hg es la H-órbita de $g \in G$. El total de estas clases, $G\backslash H = \{Hg \mid g \in G\}$ es el espacio de H-órbitas.
2. Si H actúa en G mediante la división, $h \cdot g = gh^{-1}$, la H-órbita de $g \in G$ es la clase lateral izquierda gH. De este modo, $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ con la topología cociente es el espacio de H-órbitas.

La condición de tener a H como un subgrupo cerrado de G resulta necesaria para que G/H sea un espacio de Hausdorff (también es homogéneo y completamente regular).

Dado $A \subset X$, entonces $p^{-1}(p(A)) = G(A)$ es la saturación de A en X. Cuando A es abierto, su saturación también lo es. Esto se sigue de la igualdad

$$G(A) = \bigcup_{g \in G} gA$$

y el hecho de que cada gA es la imagen de A bajo el homeomorfismo θ_g. De este modo, p resulta una identificación abierta. Tenemos entonces que

- si X es (localmente) compacto o (localmente) conexo, X/G también lo es.
- si X es primero numerable o segundo numerable, X/G también lo es.

Aunque asumimos que X es un espacio de Tychonoff, el espacio de órbitas X/G puede no ser de Hausdorff o ni siquiera T_1, si el grupo actuante no es compacto. Observamos que de acuerdo a la topología cociente de X/G, el axioma de T_1 equivale a que cada órbita $G(x) \subset X$ sea cerrada. El axioma T_2 o de Hausdorff equivale a la existencia de vecindades ajenas e invariantes para dos órbitas distintas. En el siguiente ejemplo se ilustra esta situación para $G = \mathbb{R}$ y X un subespacio del plano euclidiano.

Cuando el grupo G es compacto la situación mejora drásticamente, pues a partir del siguiente lema muchas propiedades que posea el G-espacio X también las tendrá su espacio de óbitas.

Lema 1.2.1. *Sean G un grupo topológico compacto y X un G-espacio. Entonces la proyección orbital $p : X \to X/G$ es una función perfecta, i.e. cerrada y con fibras $p^{-1}(\widetilde{x})$, $\widetilde{x} \in X/G$ compactas.*

Demostración. El resultado se sigue de la siguiente observación: si $K \subset G$ es compacto y $C \subset X$ cerrado, $K(C) \subset X$ es cerrado. En efecto, dado $x \in \overline{K(C)}$, existen redes $\{g_\alpha\}$ en K y $\{x_\alpha\}$ en C tales que $g_\alpha x_\alpha$ converge a x. Como K es compacto, $\{g_\alpha\}$ tiene una subred convergente $\{g_\beta\}$. Supongamos que dicha subred converge a $g \in K$. Entonces g_β^{-1} converge a g^{-1} y por lo tanto

$$x_\beta = g_\beta^{-1}(g_\beta x_\beta) \rightsquigarrow g^{-1}x$$

Como C es cerrado, $g^{-1}x \in C$. Es decir, $x \in gC \subset K(C)$.

□

De las propiedades de funciones perfectas se sigue que si X es compacto, localmente compacto, paracompacto, metrizable o normal, entonces X/G también será compacto, localmente compacto, paracompacto, metrizable o normal, respectivamente. Es un hecho conocido que X/G también es un espacio de Tychonoff cuando el *espacio fase* X lo es. En el caso general (G no compacto), si X admite una métrica invariante y el espacio de órbitas satisface el axioma de separación T_1, es posible definir una métrica en X/G como se muestra a continuación.

Lema 1.2.2. *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Si X admite una métrica invariante y X/G es un espacio T_1, entonces X/G es metrizable.*

Demostración. Sea d una métrica invariante para X. Mostraremos que la función:

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \text{ínf}\{d(x',y') \mid x' \in \widetilde{x},\ y' \in \widetilde{y}\}$$

es una métrica compatible con la topología cociente de X/G.

Dados $\widetilde{x},\widetilde{y} \in X/G$ distintos, es claro que $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) \geq 0$ y que $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \widetilde{d}(\widetilde{y},\widetilde{x})$. Además, al fijar $x' \in \widetilde{x}$ y $y' \in \widetilde{y}$,

$$d(gx',hy') = d(x',g^{-1}hy')$$

por lo que

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \inf_{k \in G} d(x',ky') = d(x',G(y'))$$

y como x' no está en la órbita cerrada $G(y')$, se tiene $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) > 0$.

Notemos que $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = d(x',G(y'))$, que es la distancia del punto x' al conjunto $G(y')$, por lo que cumple con la desigualdad del triángulo.

Esto demuestra que $\widetilde{d}$ es en efecto una métrica para X/G.

Para verificar la compatibilidad de $\widetilde{d}$ con la topología cociente de X/G escojamos $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Mostraremos que para las ε-bolas alrededor de x y $\widetilde{x} = p(x)$ se cumple

$$p(B_d(x,\varepsilon)) = B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon)$$

lo que a su vez implica que $p : (X,d) \to (X/G,\widetilde{d})$ es una función continua, suprayectiva y abierta, en particular una identificación abierta, por lo que $\widetilde{d}$ es compatible.

Sea $y \in B_d(x,\varepsilon)$. Entonces $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) \leq d(x,y) < \varepsilon$, por lo que $p(y) = \widetilde{y} \in B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon)$ y $p(B_d(x,\varepsilon)) \subseteq B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon)$.

Por otro lado, dado $\widetilde{z} \in B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon)$,

$$d(x,G(z)) = \widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{z}) < \varepsilon$$

por lo que $d(x,z') < \varepsilon$ para alguna $z' \in G(z)$. Así, $\widetilde{z} = p(z') \in p(B_d(x,\varepsilon))$ y $B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon) \subseteq p(B_d(x,\varepsilon))$. Esto termina la demostración.

$\square$

Para el caso de G no compacto, ciertas restricciones sobre la acción deben añadirse con el fin de preservar propiedades importantes como la separación de puntos en X/G y otras propiedades. En la siguiente sección se introduce una condición más general y suficiente en la acción para garantizar estas propiedades.

Supongamos ahora que Y es un G-espacio trivial y $f : X \to Y$ una función invariante, i.e. $f(gx) = f(x)$ para toda $x \in X$ y toda $g \in G$. Esto significa que f es constante en las órbitas de X, por lo que f se factoriza a través de la proyección orbital como $f = \widetilde{f} \circ p$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X/G \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}.$$

Es fácil ver que $\widetilde{f}$ es continua. De hecho, en una situación más general tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.2.3. *Sean G un grupo topológico y $f : X \to Y$ una función equivariante entre G-espacios X e Y. Entonces f induce una función continua $\widetilde{f} : X/G \to Y/G$ que completa el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X/G \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}"] & Y/G. \end{tikzcd}$$

Demostración. Dado $\widetilde{x} \in X/G$, la única forma de hacer conmutar el diagrama, es definiendo

$$\widetilde{f}(\widetilde{x}) = \widetilde{f(x)}.$$

Esta asignación está bien definida ya que

$$\widetilde{f}(\widetilde{gx}) = \widetilde{f(gx)} = \widetilde{gf(x)} = \widetilde{f(x)}$$

para cada $g \in G$. Como $\widetilde{f} \circ p = q \circ f$ es continua y p una identificación, $\widetilde{f}$ también es continua.

$\square$

1.3. Acciones propias

Cuando el grupo actuante no es compacto, la proyección orbital no es una función perfecta y por lo tanto muchas de las propiedades del espacio fase no las cumple el espacio orbital. Un ejemplo es el siguiente: consideremos $X = \mathbb{R}^2$ y al grupo $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$. El grupo G actúa en X de la siguiente forma, $g * (x, y) = (gx, gy)$. El espacio orbital que genera esta acción no es ni siquiera T_0.

Para evitar este tipo de dificultades y que algunas propiedades del espacio fase también las posea el espacio orbital, consideraremos una subclase de las posibles acciones de los grupos localmente compactos de Hausdorff, en espacios topológicos de Tychonoff: las acciones propias.

En esta sección, definimos las acciones propias, las cuales surgieron, precisamente en un intento de generalizar las acciones de grupos compactos a grupos localmente compactos. Cabe destacar el trabajo de Palais [35].

Para ello, primero introduciremos la notación adecuada. Dados dos subconjuntos U y V de un G-espacio X, definimos al conjunto **transportador** de U a V, como

$$\langle U, V \rangle = \{ g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset \}.$$

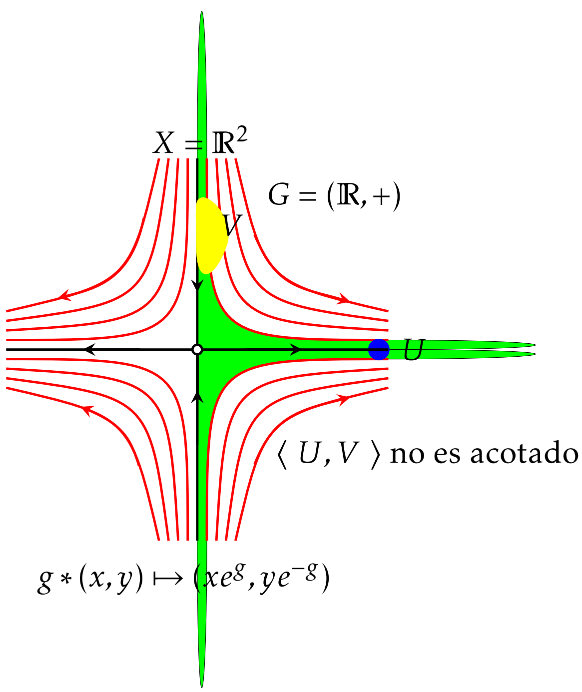
Decimos que U es **delgada relativa** a V si el transportador $\langle U, V \rangle$ tiene cerradura compacta en G. En el caso que U es delgada relativa a U, diremos que U es un conjunto **delgado**. Si U es un subconjunto abierto y delgado, entonces diremos que es un **abierto delgado**.

Diremos que un subconjunto S de un G-espacio X es **pequeño**, si cada punto x en X, posee una vecindad delgada relativa al conjunto dado S. Es decir, para todo punto x en X, existe una vecindad V_x de x tal que su transportador $\langle V_x, S \rangle$ tiene cerradura compacta.

Teniendo estos conceptos en mente, podemos definir la clase de los G-espacios propios, en el sentido de R. Palais [35]

Definición 1.3.1. Sea X un G-espacio. Decimos que X es un G-**espacio propio** si todo punto $x \in X$ posee una vecindad pequeña.

Ejemplo 1.3.1 Mostremos un G-espacio que no es propio, pero que tiene órbitas cerradas. Sea $G = (\mathbb{R}, +)$ y $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, Definamos $\alpha : G \times X \to X$ dada por $\alpha(g,(x,y)) = (xe^g, ye^g)$. Las líneas indican las órbitas de algunos puntos en el espacio, y su dirección conforme crece el parámetro g. El resultado de la acción se da hacia la flecha. Este G-espacio no es propio, pues las vecindades V y U de puntos distintos en los ejes, no poseen un transportador con cerradura compacta.



Ejemplo 1.3.2 Sea G un grupo localmente compacto y H un subgrupo compacto de G. Entonces G/H es un G-espacio propio.

En efecto, sea $p : G \to G/H$ la proyección natural $p(g) = gH$. La acción de G en G/H está dada como sigue $g' * gH = g'gH$. Sea $gH \in G/H$. Si U es una vecindad abierta de g en G con cerradura compacta, entonces $p(U)$ es una vecindad pequeña para gH.
Sea $kH \in G/H$ y $V \subset G$ una vecindad de k en G con cerradura compacta, entonces

$$\langle\, p(U), p(V)\,\rangle = \{g \in G \mid gUH \cap VH \neq \emptyset\} = (VH)(UH)^{-1}$$

que tiene cerradura compacta.

Ejemplo 1.3.3 Sea G un grupo localmente compacto y $C_0(G)$ el espacio de las funciones continuas con soporte compacto, definidas de G a $\mathbb{R}$ con la métrica del supremo. Entonces $C_0(G)$ es un G-espacio propio con la acción $g * f = (g * f)(x) = f(g^{-1}x)$.

En efecto, $C_0(G)$ es un G-espacio propio. Veremos que la acción es propia. Sea $f \in C_0(G)$, entonces observemos que $\text{máx}\, f : C_0(G) \to \mathbb{R}$ es una función continua.
Sea $F = \{f \in C_0(G) \mid 2f(e) - \text{máx}\, f > 0\} = \{f \in C_0(G) \mid 2f(e) > \text{máx}\, f\}$. Donde $e \in G$ es el elemento identidad. Veremos que $GF = C_0(G)$, sea $f \in C_0(G)$, con máximo en $g \in G$, entonces $g^{-1} * f$ tiene máximo en $e \in G$. Por lo tanto, $g^{-1} * f \in F$.
Ahora veremos que todo punto $f_0 \in C_0(G)$ tiene una vecindad pequeña. Sea $m = \text{máx}\, f_0$. Notemos que $g * f \in F$ si y sólo si, $2f(g^{-1}) > \text{máx}\, f$. Afirmamos entonces que $U = \{f \in C_0(G) \mid \sup|f - f_0| < m/4\}$ es la vecindad pequeña de f_0.
Si $f \in U$, entonces $3m/4 \leq \text{máx}\, f$ por lo tanto si $g^{-1} \in \langle\, U, F\,\rangle$, es decir g^{-1} es tal que $g^{-1}U \cap F \neq \emptyset$, tenemos que $2f(g) > \text{máx}\, f \geq 3m/4$. Como f tiene soporte compacto, entonces $\langle\, U, F\,\rangle$ tiene cerradura compacta.

Es claro que si G es un grupo compacto, entonces la clase de los G-espacios y la clase de los G-espacios propios coinciden.

Veremos algunas propiedades básicas acerca de las acciones propias, que utilizaremos más adelante en este trabajo.

Si X es un G-espacio, entonces los siguientes enunciados, claramente se cumplen: todo subconjunto de un conjunto pequeño, es pequeño; la unión finita de subconjuntos pequeños en X es pequeña en X; si S es un subconjunto pequeño de X y K un compacto, entonces K es delgado-relativo a S, es decir $\langle K, S \rangle$ tiene cerradura compacta.

Ahora, si X es un G-espacio propio, entonces todo subconjunto compacto de X es pequeño en X y todo subconjunto compacto es delgado.

Las siguientes afirmaciones nos muestran que los espacios orbitales de los G-espacios propios, son suficientemente buenos, es decir, cumplen hasta el axioma de separación $T_{3\frac{1}{2}}$, si X lo cumple.

Teorema 1.3.2. *El espacio orbital X/G, de un G-espacio propio cumple con ser T_1, es decir, si X es un G-espacio propio, entonces la órbita $G(x)$ de todo punto $x \in X$ es cerrada y el estabilizador G_x es compacto.*

Demostración. Sean $x \in X$ y V una vecindad delgada de x. Claramente G_x es cerrado en G y está contenido en $\overline{\langle V, V \rangle}$ que es subconjunto compacto, y por lo tanto G_x es compacto. Ahora, sea $y \in \overline{G(x)}$ y sea U una vecindad delgada de y. Sea $(g_\alpha x)$ una red en U que converge a y. Escojamos un α_0, tal que $g_\alpha x \in U$ para todo $\alpha > \alpha_0$. Es claro que $(g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1}(g_{\alpha_0} x)) = g_\alpha x$. Por lo tanto $g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1} \in \overline{\langle U, U \rangle}$. De aquí, tenemos que $g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1}$ posee una subred convergente, y por lo tanto, una subred de g_α converge a cierto $g \in G$. Supongamos, sin perder la generalidad, que la red (g_α) misma, converge a $g \in G$. Entonces $y = \lim g_\alpha x = gx \in G(x)$, y por lo tanto $G(x)$ es cerrado.

□

Notemos que $G(x) = \pi(x)$ y $G(x)$ es cerrado en X, por lo tanto, $\pi(x)$ es cerrado en X/G, y por lo tanto X/G es T_1.

Para demostrar que el espacio orbital es de Tychonoff, mostraremos primero:

Lema 1.3.3. *Sea X un G-espacio propio y un punto arbitrario x en X. Entonces la función $G \longrightarrow G(x)$ dada por $g \mapsto gx$ es abierta.*

Demostración. Como G es un espacio homogéneo, basta demostrar que si K es una vecindad de e en G, entonces $K(x)$ es una vecindad de x en $G(x)$. Supongamos que no. Entonces existe una red g_α en G tal que $g_\alpha x \notin K(x)$ y que $g_\alpha x$ converge a x. Como $g_\alpha x \in K(x)$ si y sólo si $g_\alpha \in K \cdot G_x$, se tiene que $g_\alpha \notin K \cdot G_x$. Por otro lado $K \cdot G_x$ es una vecindad de G_x, y por lo tanto ninguna subred de g_α converge a un elemento de G_x. Sea U una vecindad delgada de x. Como existe α_0 tal que para todo $\alpha > \alpha_0$ se tiene que $g_\alpha x \in U$, entonces podemos suponer que existe alguna subred g_β contenida en $\langle\, U, U \,\rangle$. Pero la cerradura de $\langle\, U, U \,\rangle$ es compacta y por lo tanto existe una subred g_γ convergente, esto es $g_\gamma \to g$. Así $gx = \lim g_\gamma x = x$ y por lo tanto $g \in G_x$, lo cual es una contradicción.

□

Teorema 1.3.4. *Sea X un G-espacio propio. Para todo punto $x \in X$, la función de $G/G_x \to G(x)$, dada por $gG_x \mapsto gx$ es un homeomorfismo.*

Demostración. La demostración es evidente del siguiente diagrama conmutativo, y debido a que las funciones correspondientes son abiertas.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g\mapsto gx"] \arrow[d, "g\mapsto gG_x"'] & G(x) \\ G/G_x \arrow[ur, "gG_x\mapsto gx"'] & \end{tikzcd}$$

□

Para demostrar que todo G-espacio propio de Tychonoff posee un espacio de órbitas de Tychonoff, necesitamos mencionar la siguiente proposición, la cual nos muestra una forma de invariantizar funciones con soporte pequeño, que es un paso fundamental en algunas de las demostraciones. El tener funciones equivariantes, nos permite inducir funciones del espacio fase al espacio orbital ya que el ser invariante significa que es constante en cada órbita,

Lema 1.3.5. *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una* *función continua y H es un subconjunto compacto de G, entonces la función*

$$\varphi(z) = \sup_{g\in H} f(gz)$$

es continua.

Demostración. Sean $z \in X$ y $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de la acción y de la función f, existen para cada $g \in G$, vecindades $W_g \subset G$ de g y $V_g \subset X$ de z, tales que

$$|f(hy) - f(gz)| < \varepsilon$$

para cualesquiera $h \in W_g$ y $y \in V_g$. Ahora, por la compacidad de H, existen $g_1, \dots, g_n \in G$ tales que $H \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{g_i}$. Sea entonces $V_0 = \bigcap_{i=1}^{n} V_{g_i}$ la vecindad de z correspondiente. Entonces para cada $y \in V_0$ y cada $g \in H$, existe $i = \{1, \dots, n\}$ tal que $g \in W_{g_i}$. como $y \in V_{g_i}$,

$$|f(gy) - f(gz)| < \varepsilon$$

de donde se deduce que

$$|\sup_{g\in H} f(gy) - \sup_{g\in H} f(gz)| \leq \varepsilon$$

es decir, φ es continua en el punto $z \in X$.

□

Teorema 1.3.6. *Sea X un G-espacio propio de Tychonoff, entonces X/G es un espacio de Tychonoff.*

Demostración. Sean $\tilde{x}$ un punto en X/G y $\tilde{F} \subset X/G$ un subconjunto cerrado, tales que $\tilde{x} \notin \tilde{F}$. Sea $p : X \to X/G$ la función orbital y supongamos que $\tilde{x} = p(x)$ para algún punto $x \in X$. Sea $F = p^{-1}(\tilde{F})$, entonces el conjunto F es cerrado en X, es invariante y $G(x) \cap F = \emptyset$.

Sea $U \subset X$ una vecindad pequeña de x en X. Como X es de Tychonoff, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X \setminus U) = 0$. Para cada $z \in X$, definimos $\varphi : X \to [0,1]$ dada por

$$\varphi(z) = \sup_{g \in G} f(gz)$$

De esta forma φ es invariante. En efecto, para cada $h \in G$ y $z \in X$, tenemos que

$$\varphi(hz) = \sup_{g \in G} f(g(hz)) = \sup_{g \in G} f((gh)z) = \sup_{t \in G} f(tz) = \varphi(z)$$

pues $g \mapsto gh$ es una permutación de G. Es inmediato comprobar que $\varphi(G(x)) = 1$ y $\varphi(F) = 0$. Falta demostrar que φ es continua.

Sea z un punto de X. Entonces existe una vecindad V de z en X tal que $K = \overline{\langle\, U, V \,\rangle}$ es compacto. Si $y \in V$, observemos que

$$\varphi(y) = \sup_{g \in K^{-1}} f(gy).$$

En efecto, si $g \notin K^{-1}$ entonces $g^{-1} \notin \langle\, U, V \,\rangle$, es decir, $g^{-1}U \cap V = \emptyset$, de tal forma que $y \notin g^{-1}U$, o bien, $gy \notin U$. Así $f(gy) = 0$.

El lema anterior nos garantiza la continuidad de φ en V. Ahora sólo falta notar que una función invariante como φ se factoriza a través de la proyección orbital p y una función continua $\tilde{\varphi}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & {[0,1]} \\ X/G \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Así que $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = 1$, mientras que $\tilde{\varphi}(\tilde{F}) = 0$.

$\square$

Si X es un G-espacio X, y H un subgrupo cerrado de G, y Y un subconjunto H-invariante, entonces podemos considerar a Y como un H-espacio, restringiendo la acción al subgrupo cerrado H.

Otra técnica muy importante es la factorización por un grupo cerrado normal N de G. Es decir, si X es un G-espacio y N es un subgrupo normal cerrado de G entonces, el espacio orbital X/N es un G/N-espacio propio. En efecto, G/N actúa en X/N de la siguiente forma $(gN)(N(x)) = Ngx$. Como X/N es de Tychonoff, entonces X/N es un G/N-espacio. Más aún $\frac{X/N}{G/N}$ es canónicamente homeomorfo a X/G y por lo tanto, de Tychonoff. Sólo falta verificar que todo punto $\tilde{x} = Nx$ de X/N tiene una vecindad G/N-delgada. Sea U una vecindad delgada de x en X. Entonces $\tilde{U} = \{Ny \mid y \in U\}$ es una vecindad de $\tilde{x}$ en X/N (porque la proyección $y \to Ny$ es abierta). Más aún si π es la función canónica de G a G/N, entonces es inmediato que $\pi(\langle\ U,U\ \rangle) = \langle\ U,U\ \rangle$, como $\langle\ U,U\ \rangle$ tiene cerradura compacta en G, entonces $\langle\ U,U\ \rangle$ tiene cerradura compacta en G/N, y por lo tanto $\tilde{U}$ es una vecindad delgada de $\tilde{x}$.

1.4. Extensores absolutos equivariantes

Dentro de la topología general, siempre ha sido un problema importante el poder extender funciones continuas. En este contexto, aparecen los extensores absolutos, que son espacios topológicos tales que cualquier función continua definida desde un subconjunto cerrado de un espacio topológico en alguna clase en especial, hacia el extensor, admite una extensión de forma continua, ya sea a una vecindad del dominio o bien, a todo el espacio dado.

En la teoría equivariante, el problema consiste en extender funciones continuas y equivariantes de manera en que la extensión no pierda estas características. Para ello, debemos tener en cuenta, que el dominio original de la función sea un conjunto invariante, y que la función que se desea extender sea equivariante.

En este contexto, definiremos los extensores absolutos equivariantes y extensores absolutos de vecindad equivariantes o G-AE y G-ANE, respectivamente, de la siguiente manera.

Sean G un grupo topológico localmente compacto, X y Y dos G-espacios dados. Decimos que Y es G-**extensor absoluto de vecindad** para X si toda función equivariante $f : A \to Y$ definida en un conjunto cerrado invariante A de X, posee una extensión continua y equivariante $F : U \to Y$ a una vecindad invariante U de A. Es decir, existe una vecindad invariante de A y una función equivariante

$F : U \to Y$ tal que extiende a f.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\imath"'] & Y \\ U \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Si siempre es posible escoger a U como todo el espacio X, diremos que Y es un G-**extensor absoluto** para X. Es decir,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\imath"'] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

En caso de que Y sea un G-extensor absoluto de vecindad para X, denotamos $Y \in G$-ANE(X) y si Y es G-extensor absoluto, $Y \in G$-AE(X).

Cuando Y es G-ANE(X) o G-AE(X) para todo G-espacio X en una clase G-$\mathcal{K}$, denotaremos que $Y \in G$-ANE$(\mathcal{K})$ o $Y \in G$-AE$(\mathcal{K})$, respectivamente.

En este trabajo utilizaremos la **clase** G-$\mathcal{P}$, de los G-**espacios propios paracompactos con espacio orbital paracompacto**.

Al igual que los extensores absolutos no equivariantes, la versión equivariante conservan las propiedades del producto: el producto de G-extensores absolutos es G-extensor absoluto, y el producto finito de G-extensores absolutos de vecindad es G-extensor absoluto de vecindad [4][5].

Es decir,

1. Sea $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de G-extensores absolutos para una clase G-$\mathcal{K}$. Entonces $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha$ con la acción diagonal de G, es un G-extensor absoluto para la clase G-$\mathcal{K}$.

2. Sea $\{Y_1,...,Y_n\}$ una familia finita de G-extensores absolutos de vecindad para una clase G-$\mathcal{K}$. Entonces $Y = \prod_{i=1}^{n} Y_i$ provisto con la acción diagonal de G, también es un G-extensor absoluto de vecindad para la clase G-$\mathcal{K}$.

Finalmente, al igual que con los extensores absolutos no equivariantes, los subconjuntos abiertos invariantes de G-extensores absolutos son G-extensores absolutos de vecindad.

1.5. Rebanadas

Una noción fundamental en el estudio de los G-espacios es el concepto de rebanada. En el caso de las acciones propias de grupos localmente compactos de Lie, R. Palais desarrolló importantes resultados al respecto [35].

Definición 1.5.1. Sean X un G-espacio propio y H un subgrupo cerrado. Un conjunto H-invariante S de X se llama H**-rebanada** si $G(S)$ es abierto en X y existe una G-función $f : G(S) \to G/H$ tal que $S = f^{-1}(eH)$. Si además $G(S) = X$ entonces, diremos que S es una H**-rebanada global**.

Una **caracterización importante de una** H**-rebanada** es la siguiente.

Teorema 1.5.2. *Sean X un G-espacio propio y H un subgrupo cerrado de G. Si S es una H-rebanada en X, entonces*

1. *S es cerrado en $G(S)$;*
2. *S es H-invariante;*
3. *y siempre que $gS \cap S \neq \emptyset$ entonces $g \in H$.*

Si además H es compacto, entonces

4. *existe una vecindad delgada V de S en $G(S)$.*

Demostración. Si S es una H-rebanada en X, entonces existe una función G-equivariante $f : G(S) \to G/H$. Además $f^{-1}(eH) = S$ y por lo tanto es cerrado. Por definición S es H-invariante y $G(S)$ es abierto en X. Si $gS \cap S \neq \emptyset$, entonces existe $s, s' \in S$ tal que $gs' = s$, y $f(gs') = f(s) = eH$ lo cual implica que $gf(s') = geH = eH$ por lo tanto $g \in H$.

Ahora, supongamos que se cumplen las tres condiciones. Sean g_1 y $g_2 \in G$ tales que $s_1, s_2 \in S$ y $g_1 s_1 = g_2 s_2$. Entonces $g_2^{-1} g_1 s_1 = s_2$ por lo que $g_2^{-1} g_1 \in H$ (por la tercera condición), y $g_1 H = g_2 H$, por lo que la función $f : G(S) \to G/H$ dada por $f(gs) = gH$ está bien definida. Claramente f es G-equivariante y $S = f^{-1}(eH)$. Sólo falta ver que f es continua. Sea $g_\alpha s_\alpha$ una red convergente a gs. Debemos mostrar que $g_\alpha H$ converge a gH. Como $g^{-1} g_\alpha s_\alpha \to s$ y $g^{-1} g_\alpha H \to H$ entonces $g_\alpha H \to H$ y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $g = e$.

Si $g_\alpha H$ no converge a H, entonces existe una vecindad U de H, tal que $g_\alpha \notin U$ para α arbitrariamente grandes, por lo que existe una subred completamente contenida en el complemento de U. Podemos suponer que dicha subred es la misma red, que por lo tanto ninguna subred de g_α converge a algún punto de H. Por otro lado, sea V una vecindad delgada de S en $G(S)$, entonces $g_\alpha s_\alpha \in V$ para α suficientemente grande, por lo que $g_\alpha \in \langle V, V \rangle$ y por lo tanto alguna subred $g_{\alpha(\beta)}$ de g_α converge a $g \in G$. En efecto, como $g_{\alpha(\beta)} s_{\alpha(\beta)} \to s$, entonces $s_{\alpha(\beta)} \to g^{-1}s$. Como S es cerrado en $G(S)$, se tiene que $g^{-1}s \in S$ y por la tercera condición, g^{-1} y por lo tanto g están en H, lo que contradice el hecho que ninguna subred converge a ningún punto de H.

□

La existencia de una rebanada nos permite ver a un G-espacio propio como la unión de pequeños conjuntos, llamados tubos que son saturaciones de unas rebanadas. En el caso en que el grupo actuante es compacto de Lie, entonces el subgrupo rebanador coincide con un estabilizador de algún punto que pertenezca a la rebanada. Cuando el grupo G es localmente compacto, no se puede asegurar que el subgrupo rebanador, sea específicamente un estabilizador, pero lo que sí es un hecho es que se puede pedir que sea un subgrupo grande.

Definición 1.5.3. Sea G un grupo topológico. Diremos que un subgrupo compacto H de G es un **subgrupo grande** si el cociente G/H **es localmente conexo y de dimensión finita**

Los subgrupos grandes se caracterizan a través de la siguiente proposición:

Proposición 1.5.4. *Sea H un subgrupo compacto de G, entonces, son equivalentes:*

1. *H es un subgrupo grande de G,*
2. *G/H es una variedad suave,*
3. *G/H es un G-ANE($\mathcal{P}$) metrizable,*

En el caso especial en que G es un grupo topológico casi conexo:

4. *existe un subgrupo compacto normal N de G tal que $N \subset H$ y G/N es un grupo de Lie. En particular, G/H es un espacio cociente de un grupo de Lie.*

La demostración se encuentra en [14, Proposición 3.7 y Teorema 5.3]

Definición 1.5.5. Sean G un grupo localmente compacto, K un subgrupo compacto de G y Y un K-espacio. Definimos a $G \times_K Y$ como el espacio orbital del K-espacio $G \times Y$, donde K actúa en $G \times Y$ de la siguiente manera: $k(g,y) = (gk^{-1}, ky)$. Mas aún, en $G \times_K Y$, el grupo G actúa con la acción $g'[g,y] = [g'g,y]$, donde $[g,y]$ es la K-órbita del punto $(g,y) \in G \times Y$.

El espacio $G \times_K Y$ se llama **producto torcido**.

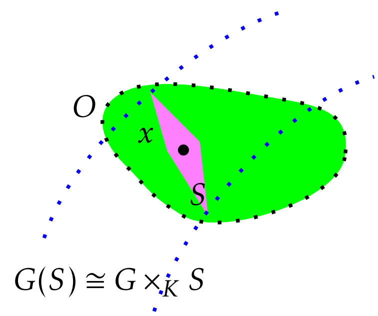


Figura 1.3: S es una K-rebanada para el punto $x \in X$. El tubo $G(S)$, es G-**homeomorfo al producto torcido** $G \times_K S$.

El siguiente lema, demuestra que el tubo $G(S)$ de una H-rebanada S es homeomorfo al producto torcido $G \times_H S$.

Lema 1.5.6. *Sean G un grupo localmente compacto, H un subgrupo compacto de G, X un G-espacio, $f : X \to G/H$ una función equivariante y sea $S = f^{-1}(eH)$. Entonces $\xi : G \times_H S \to X$ definida por $\xi([g,s]) = gs$ es un G-homeomorfismo y $\xi f = p$ donde $p : G \times_H S \to G/H$ está dada por $p([g,s]) = gH$.*

Teorema 1.5.7. *Sean G un grupo metrizable y localmente compacto, K un subgrupo compacto de G y Y un K-espacio metrizable. Entonces $G \times_K Y$ es un G-espacio propio metrizable que admite una métrica invariante.*

Demostración. Tenemos la función G-equivariante $p : G \times_K Y \to G/K$, dada por $p([g,y]) = gK$. Como G/K es un G-espacio propio, entonces $G \times_K Y$ también lo es.

Falta ver que el espacio $G\times_K Y$ admite una métrica invariante compatible. Sea ρ' una métrica invariante izquierda en G.

Entonces $\rho(g,g') = \sup_{k\in K}\{\ \rho'(gk,g'k)\ \}$ define una métrica G-invariante izquierda y K-invariante derecha, es decir: $\rho(tgk,tg'k) = \rho(g,g')$ para todo $t\in G$, $g,g'\in G$ y $k\in K$.

Por la compacidad de K, existe una métrica K-invariante, d en Y (Lema 1.2.2). Para $(g,y),(g',y')\in G\times Y$ definimos

$$\nu\left((g,y),(g',y')\right) = \rho(g,g') + d(y,y')$$

Entonces ν es una métrica K-invariante compatible en el K-espacio $G\times Y$. Por lo tanto, de acuerdo al lema 1.2.2, ν induce una métrica compatible $\tilde{\nu}$ en el espacio orbital $G\times_K Y = (G\times Y)/K$, dada por:

$$\tilde{\nu}\left([g,y],[g',y']\right) = \operatorname*{ínf}_{k\in K}\ \{\ \nu((g,y),(g'k^{-1},ky))\ \}$$

Más aún, la invarianza izquierda de ρ implica que la métrica ν satisface

$$\nu((tg,y),(tg',y')) = \nu((g,y),(g',y')) \qquad \text{para todo } g,g',t\in G \text{ y } y,y'\in Y$$

lo cual quiere decir que $\tilde{\nu}$ es una métrica G-invariante compatible para $G\times_K Y$.

□

Como lo habíamos mencionado, una razón fundamental para definir y trabajar con acciones propias, es la de poder descomponer todo el G-espacio propio en pequeños tubos presumiblemente más sencillos de analizar. Para ello, definiremos el concepto de rebanada y probaremos el teorema de la rebanada aproximativa, fundamental en este trabajo.

Una herramienta fundamental en nuestro trabajo, es el teorema de la rebanada aproximativa, que se demuestra en el apéndice A, siguiendo la demostración más reciente de S. Antonyan [14]

Teorema 1.5.8 (Rebanada aproximativa). *Sean X un G-espacio propio, x un punto arbitrario en X y O una vecindad de x. Sea $\mathcal{N}(x,O)$ el conjunto de todos los subgrupos grandes H de G, tales que $G_x \subset H$ y $H(x) \subset O$, entonces:*

1. *el conjunto $\mathcal{N}(x,O)$ no es vacío,*
2. *para todo $K \in \mathcal{N}(x,O)$, existe una K-rebanada S con $x \in S \subset O$.*

1.6. G-conos

En esta sección introduciremos los G-conos, los cuales son una generalización de los conos, definiendo en ellos, una acción del grupo dado. Al igual que en topología general, los conos son una gran herramienta para que, teniendo como base del cono un extensor absoluto de vecindad, generar un extensor absoluto. De la misma forma, los G-conos se pueden utilizar con este propósito.

Con mayor precisión, consideremos un espacio topológico X y su producto con el intervalo $I = [0,1]$, y la relación de equivalencia dada, en el cilindro $I \times X$, por la regla:

$$\begin{cases} (t,x) \sim (t',x') & t = t',\ x = x' \\ (t,x) \sim (t',x') & t = t' = 0 \end{cases}$$

El **cono** de X es el espacio topológico que resulta del cociente dado por

$$\operatorname{con}(X) = \frac{I \times X}{\{0\} \times X}$$

Denotaremos a un punto (t,x) en el cono de X como tx. Así es natural denotar el vértice $0x = \theta$.

Equipamos a este espacio con la topología débil: un conjunto U en el cono de X es abierto, si su preimagen bajo la proyección natural $p : X \times I \to \mathrm{con}(X)$ es abierta y, en caso de que $\theta \in U$ se pide la condición adicional de que exista un $\epsilon > 0$ tal que el conjunto $X \times [0,\epsilon) \subset p^{-1}(U)$. La topología débil del cono le permite al cono, conservar algunas propiedades topológicas de la base del cono, como por ejemplo metrizabilidad.

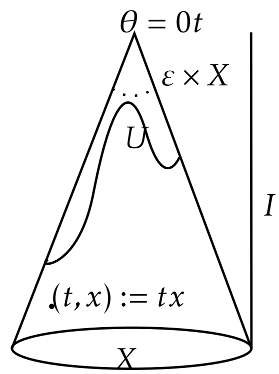


Figura 1.4: Topología Débil del Cono. Notemos que los abiertos que contienen al vértice, continen toda una franja del cono. Cuando no haya ambigüedad, cada punto en el cono (t,x) lo denotaremos como tx.

Si además X es un G-espacio entonces $\mathrm{con}(X)$ también lo es. La acción en $\mathrm{con}(X)$ está dada por $g(t,x) = (t,gx)$, es decir $g * (tx) = t(gx)$.

Teorema 1.6.1. *Sea Z un G-espacio propio y $tz \in \mathrm{con}(Z) \setminus \{\theta\}$, entonces tz posee una vecindad pequeña.*

Demostración. Sean W_z una vecindad pequeña de $z \in Z$ y U_t una vecindad de t de la forma $(t/2,1]$ si $t = 1$ o $(t/2,1)$ si $t < 1$. Entonces U_tW_z es una vecindad pequeña de $tz \in \mathrm{con}(Z)$. Si $sy \in \mathrm{con}(Z)$ es diferente del vértice, entonces escogemos una vecindad W_y de y delgada relativa con W_z. Entonces U_sW_y es una vecindad de sy en el $\mathrm{con}(Z)$ y como $\langle\, U_tW_z, U_sW_y \,\rangle = \langle\, W_z, W_y \,\rangle$, concluimos que U_tW_z es delgada relativa a U_sW_y. Ahora, si $sy = \theta$, entonces

$U = (0, t/4)Z \cup \{\theta\}$ es una vecindad invariante de θ en $\mathrm{con}(Z)$ ajena a $U_t W_z$. Por lo tanto U es delgada relativa a $U_t W_z$.

□

Teorema 1.6.2 ([8, Proposición 2.1])**.** *Sea X un G-espacio propio metrizable. Entonces el G-cono resultante* $\mathrm{con}(X)$*, también es un G-espacio metrizable*

Más precisamente, sea d una métrica compatible con un G-espacio propio metrizable X, tal que $d(x,y) \leq 1$*. Entonces la fórmula:*

$$d^*(tx, t'y) = \sqrt{t^2 + t'^2 - 2tt' \cos(d(x,y))} \qquad \text{para todo par } tx,\ t'y \in \mathrm{con}(X) \tag{1.2}$$

define una métrica para $\mathrm{con}(X)$*, compatible con la topología débil del cono. Además d es completa si y sólo si* d^* *también lo es.*

Más aún, d^* *es G-invariante si lo es d.*

Demostración. Sólo verificaremos la desigualdad del triángulo.

Sean $tx,\ ry,\ qz \in \mathrm{con}(X)$. Consideremos un triángulo esférico $\triangle ABC$ (posiblemente degenerado) constituido por los círculos máximos de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$, definidos por los arcos AB, BC y AC con distancias $d(x,y)$, $d(y,z)$ y $d(x,z)$, respectivamente. Como $d \leq 1$, el triángulo dado existe. Denotemos por O al centro de la esfera unitaria. Escojamos puntos $E \in OA$ $F \in OB$ y $L \in OC$ tales que $|OE| = t$, $|OF| = r$ y $|OL| = q$. Entonces en el triángulo ordinario $\triangle EFL$, tenemos que $|EF| = d^*(tx, ry)$, $|FL| = d^*(ry, qz)$ y $|EL| = d^*(tx, qz)$, por lo que se verifica la desigualdad del triángulo.

Ahora, para $tx,\ ry \in \mathrm{con}(X)$ se tiene

$$|t-r|^2 + \frac{tr}{2}(d(x,y))^2 \leq (d^*(tx,ry))^2 \leq |t-r|^2 + tr(d(x,y))^2$$

por las desigualdades

$$1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \leq \cos\alpha \leq 1 - \frac{1}{4}\alpha^2$$

para toda $0 \leq \alpha \leq 1$. De aquí, la completitud de la métrica.

La G-invarianza de d^* es evidente.

□

Una de las características del cono de un espacio topológico, es como mencionamos antes, que si el espacio base es extensor absoluto de vecindad para alguna clase de espacios topológicos, entonces el cono es un extensor absoluto para la misma clase. Cuando introducimos la acción del grupo G, este resultado sigue siendo válido:

Teorema 1.6.3. *Sea G un grupo topológico. Si Y es G-ANE($\mathcal{P}$), entonces* $\mathrm{con}(Y) \in G$-AE($\mathcal{P}$).

Demostración. Sean X un G-espacio en la clase G-$\mathcal{P}$, A un subconjunto cerrado invariante de X y $f : A \to \mathrm{con}(Y)$ una función continua equivariante. Sea f_1 la composición $f_1 = \pi_1 \circ f : A \to [0,1]$, donde π_1 es la proyección $\pi_1 : \mathrm{con}(Y) \to [0,1]$. Como el conjunto $f_1^{-1}((0,1])$ es abierto en A, existe un conjunto U abierto en X, tal que $U \cap A = f_1^{-1}((0,1])$.

Afirmamos que U está en la clase G-$\mathcal{P}$. En efecto, U es un subconjunto F_σ de Y, por lo que es paracompacto. De la misma forma, U/G es paracompacto, y por lo tanto U está en la clase G-$\mathcal{P}$.

Sea f_2 la composición $f_2 = \pi_2 \circ f\,|_{U \cap A}$, donde $\pi_2 : (0,1] \cdot Y \to Y$ es la proyección.

El conjunto $U \cap A$ es un subconjunto cerrado invariante de U, y como Y es un G-ANE($\mathcal{P}$), la función f_2 tiene una extensión equivariante $F_2 : V \to Y$ definida en alguna vecindad invariante V de $A \cap U$ en U.

Consideramos el subconjunto cerrado invariante $A \cup (X \setminus V)$ de X y definimos la función equivariante $\psi : A \cup (X \setminus V) \to [0,1]$ según la fórmula:

$$\psi(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \in X \setminus V. \end{cases}$$

Como $A \cap (X \setminus U) = f_1^{-1}(0)$ y $(X \setminus V) \subset (X \setminus U)$, entonces la función ψ está bien definida, es continua e invariante.

Como X está en la clase G-$\mathcal{P}$, entonces X/G está en la clase $\mathcal{P}$, y por lo tanto es un espacio paracompacto.

Como ψ es invariante, se puede considerar extender la función inducida por ψ en el espacio orbital $A \cup (X \setminus V)/G$, utilizando el teorema de Tietze-Urysohn, a todo el espacio $X/G \to [0,1]$, que a su vez induce una función invariante $\varphi : X \to [0,1]$.

Así, la extensión equivariante deseada $F : X \to \text{con}(Y)$ está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} \varphi(x) \cdot F_2(x), & \text{si } x \in V, \\ \theta, & \text{si } x \in X \setminus V. \end{cases}$$

Verificaremos, que F es extensión de f. En efecto, sea $x \in A$. Entonces, si $x \in V$,

$$F(x) = \varphi(x) \cdot F_2(x) = \psi(x) \cdot f_2(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = f(x)$$

Si $x \notin V$, entonces $F(x) = \theta$. Como $(X \setminus V) \subset (X \setminus U)$ se tiene que $f_1(x) \notin (0,1]$. Luego $f_1(x) = 0$ lo cual significa que $f(x) = \theta$, y por lo tanto, $F(x) = f(x)$.

Veamos que $F : X \to \text{con}(Y)$ es continua. Sean $x \in X$ y W una vecindad de $F(x)$ en $\text{con}(Y)$. Debemos mostrar una vecindad S de x tal que $F(S) \subset W$.

Tenemos los siguientes dos casos:

1. Supongamos que $x \in V$. Sea $p : [0,1] \times Y \to \text{con}(Y)$ la identificación.

Entonces, como $F(x) = \varphi(x)\cdot F_2(x) \in W$, inferimos que el par $(\varphi(x), F_2(x))$ pertenece al conjunto $p^{-1}(W)$, que es abierto en el producto $[0,1]\times Y$. Por lo tanto, existen dos abiertos W_1 en $[0,1]$ y W_2 en Y, tales que $\varphi(x) \in W_1$, $F_2(x) \in W_2$ y $W_1 \times W_2 \subset p^{-1}(W)$, es decir, $W_1 \cdot W_2 \subset W$.

Como la función φ es continua en x, existe S_1 abierto en X, tal que $x \in S_1$ y $\varphi(S_1) \subset W_1$. Por otro lado, como F_2 es continua en x, existe un abierto S_2 en V (y por lo tanto en X) tal que $x \in S_2$ y $F_2(S_2) \subset W_2$.

Luego, para $x \in S = S_1 \cap S_2$ tenemos que $F(x) = \varphi(x)\cdot F_2(x) \in W_1 \cdot W_2 \subset W$. Consecuentemente, $F(S) \subset W$.

2. Supongamos que $x \in X \setminus V$. Entonces

$$F(x) = \theta \in W \qquad \text{y} \qquad \varphi(x) = 0$$

Por definición de la topología débil del cono, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $[0,\varepsilon)\times Y \subset W$. Por la continuidad de φ, existe una vecindad S de x en X tal que $\varphi(S) \subset [0,\varepsilon)$.

Afirmamos que $F(S) \subset W$. En efecto, consideremos dos casos

a) $s \in S \cap V$. Entonces

$$F(s) = \varphi(s)\cdot F_2(s) \in [0,\varepsilon)\cdot Y \subset W$$

b) $s \in S \setminus V$. Entonces $F(s) = \theta \in W$

Por lo tanto, $F(S) \subset W$.

□

Corolario 1.6.4. *Sea H un subgrupo grande de G. Entonces* con(G/H) *es un* G-AE$(\mathcal{P})$ *metrizable.*

Demostración. Por [14, Teorema 5.3(2)], G/H es un G-ANE$(\mathcal{P})$ metrizable. Entonces el resultado sigue inmediatamente de la Proposición anterior, ya que la clase G-$\mathcal{P}$ satisface las hipótesis.

□

Como mencionamos con anterioridad, en este trabajo utilizaremos productos de conos y demostraremos que el producto sin el punto distinguido, es un G-espacio propio.

Proposición 1.6.5. *Sea G un grupo localmente compacto. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de G-espacios propios. Entonces $X = \left(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \operatorname{con}(X_\alpha)\right)\setminus\{*\}$ es un G-espacio propio, donde $*$ es el punto cuyas coordenadas son los vértices de cada cono.*

Demostración. Sea $a = (t_\alpha x_\alpha) \in X$. Entonces existe un índice $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ tal que $t_{\alpha_0} \neq 0$.

Como el cono $\operatorname{con}(X_{\alpha_0})$ es un espacio de Hausdorff, los puntos $t_{\alpha_0}x_{\alpha_0}$ y θ_{α_0} tienen vecindades disjuntas, digamos W_{α_0} y S_{α_0}, respectivamente. Podemos suponer que S_{α_0} es una vecindad básica de θ_{α_0} y por lo tanto, invariante. En este caso, claramente, $\langle\, W_{\alpha_0}, S_{\alpha_0}\,\rangle = \emptyset$. Por el teorema 1.6.1, $t_{\alpha_0}x_{\alpha_0}$ posee una vecindad pequeña V_{α_0} del punto $t_{\alpha_0}x_{\alpha_0}$ tal que $V_{\alpha_0} \subset W_{\alpha_0}$. Entonces, el conjunto dado por

$$V = V_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha\neq\alpha_0} \operatorname{con}(X_\alpha)$$

es una vecindad pequeña de a en X. De hecho, como V_{α_0} no contiene al vértice del $\operatorname{con}(X_{\alpha_0})$, entonces $V \subset X$, y claramente $a \in V$. Ahora, sea $b = (s_\alpha y_\alpha) \in X$, un punto arbitrario. Entonces b tiene una vecindad Q_{α_0} delgada relativa a V_{α_0}. Si $s_{\alpha_0} \neq 0$, por el teorema 1.6.1, se puede escoger Q_{α_0} tal que no contenga al vértice θ_{α_0}, y entonces el conjunto

$$Q = Q_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha\neq\alpha_0} \operatorname{con}(X_\alpha)$$

es una vecindad de b en X. Como $\langle\, V, Q\,\rangle = \langle\, V_{\alpha_0}, Q_{\alpha_0}\,\rangle$ concluimos que $\langle\, V, Q\,\rangle$ posee cerradura compacta, y por lo tanto Q es delgada relativa a V.

Ahora, si $s_{\alpha_0} = 0$ entonces debe existir un índice α_1 diferente de α_0, tal que $s_{\alpha_1} \neq 0$. Entonces, sea $S_{\alpha_1} = (0,1] \cdot X_{\alpha_1}$ y

$$S = S_{\alpha_0} \times S_{\alpha_1} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0, \alpha_1} \operatorname{con}(X_\alpha)$$

Entonces S es una vecindad de b en X y como

$$\langle\, V, S \,\rangle \subset \langle\, V_{\alpha_0}, S_{\alpha_0} \,\rangle \subset \langle\, W_{\alpha_0}, S_{\alpha_0} \,\rangle = \emptyset$$

podemos concluir que S es delgada relativa con V.

□

1.7. Representaciones

En esta sección, G siempre será un grupo topológico compacto.

Una **representación lineal** (de dimensión finita) de un grupo topológico compacto G es cualquier homomorfismo continuo de G en el grupo de Lie $GL_n(\mathbb{R})$ de las matrices no-singulares reales de algún orden finito. En el lenguaje de las acciones de grupos, cada representación lineal de G, induce una acción lineal de G en $\mathbb{R}^n$. En efecto, si G es un grupo topológico y $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{R})$ es una representación lineal de G, entonces $\alpha : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\alpha(g,x) = (\varphi(g)) \cdot x$, es una acción de G en $\mathbb{R}^n$.

Decimos que **dos representaciones lineales** $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{R})$ y $\psi : G \to GL_n(\mathbb{R})$ **de** G**, son equivalentes** si existe una matriz fija T, tal que para todo $g \in G$:

$$T \cdot \varphi(g) \cdot T^{-1} = \psi(g).$$

Sea $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{R})$ una representación lineal. A cada elemento g de G, le corresponde una matriz fija $\varphi(g)$, que naturalmente induce una tranformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$. La representación φ de G, se llama reducible, si existe un subespacio propio, no trivial de $\mathbb{R}^n$, que es invariante con respecto a cada transformación lineal inducida por la imagen de φ bajo G. En otro caso, la **representación** φ de G se llama **irreducible**.

Una **representación** φ de G, se llama **ortogonal o unitaria**, si para todo $g \in G$, la transformación lineal inducida $\varphi(g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preserva el producto interno, es decir, $\langle x, y\rangle = \langle(\varphi(g))(x), (\varphi(g))(y)\rangle$.

Proposición 1.7.1. *[36, Sección 32] Si φ es una representación lineal del grupo compacto G, entonces existe una representación lineal ortogonal ψ equivalente a φ. Además si $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{R})$ es reducible, entonces existe un número finito de representaciones $\psi_1 : G \to GL_{n_1}(\mathbb{R}), \ldots, \psi_k : G \to GL_{n_k}(\mathbb{R})$ irreducibles y unitarias tales que*

$$\varphi = \bigtriangleup_{i=1}^{k} \psi_i : G \to \bigoplus_{i=1}^{k} GL_{n_i}(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{R}).$$

Uno de los resultados importantes que utilizaremos más adelante, es el siguiente resultado de Pontryagin [36, Cap. 5, Ex 58]:

Proposición 1.7.2. *La cardinalidad de las clases de equivalencia de las representaciones lineales unitarias irreducibles de un grupo compacto G, es igual al peso de G.*

2. Cardinalidad de los tipos orbitales

Una parte fundamental en este trabajo, es el poder acotar la cardinalidad de los tipos orbitales de los subgrupos grandes.

En este capítulo demostraremos que la cardinalidad de los tipos orbitales grandes de un grupo localmente compacto G, es menor o igual al peso de G.

Cuando el grupo es de Lie, se sabe que la cardinalidad de los tipos orbitales de los subgrupos compactos es a lo más numerable [8, Prop 3.6]. Haciendo uso de este resultado, demostraremos el teorema en el caso de que G sea compacto y luego generalizaremos este resultado en los casos en que G sea casi conexo, y luego localmente compacto.

2.1. El caso del grupo compacto

En esta sección, G denotará a un grupo compacto de Hausdorff. Para G, definimos

$$\mathcal{O}(G) = \{[K] \mid K \text{ es un subgrupo grande de } G\}$$

Consideremos un subgrupo normal compacto fijo N de G, tal que G/N es un grupo de Lie, y definimos al conjunto $\mathcal{O}_N(G)$ por

$$\mathcal{O}_N(G) = \{[K] \mid K \text{ es un subgrupo grande de } G \text{ tal que } N \subset K\}$$

Entonces, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. *Existe una biyección* $\varphi : \mathcal{O}_N(G) \to \mathcal{O}(G/N)$.

Demostración. Sea $\varphi : \mathcal{O}_N(G) \to \mathcal{O}(G/N)$ dada por la fórmula $\varphi([K]) = [K/N]$.

Verifiquemos que φ está bien definida. En efecto, supongamos que $[H] = [K]$. Entonces existe un elemento g de G tal que $gHg^{-1} = K$.

De aquí tenemos que:

$$(gN)(H/N)(g^{-1}N) = \{ghg^{-1}N \mid h \in H\} = \{kN \mid k \in K\} = K/N$$

lo cual significa que los subgrupos K/N y H/N son conjugados en G/N, es decir $[K/N] = [H/N]$.

Veamos ahora que φ es inyectiva.

Supongamos que K y H son dos subgrupos grandes de G, tales que $N \subset H$, $N \subset K$ y $[K/N] = [H/N]$. Queremos probar que $[H] = [K]$.

La igualdad $[K/N] = [H/N]$, nos asegura la existencia de un elemento gN de G/N, tal que

$$(gN)(K/N)(g^{-1}N) = H/N \tag{2.1}$$

como

$$\{gkg^{-1}N \mid k \in K\} = (gN)(K/N)(g^{-1}N) \qquad \text{y} \qquad H/N = \{hN \mid h \in H\} \tag{2.2}$$

entonces, de la ecuación 2.1, se tiene que todo $gkg^{-1}N$ es igual a hN para algún $h \in H$. Lo cual implica que para cada $k \in K$, $gkg^{-1} \in hN \subset H$, y por lo tanto, $gkg^{-1} \in H$. De aquí tenemos que $gKg^{-1} \subset H$. Análogamente, tenemos que $g^{-1}Hg \subset K$ y por lo tanto $gKg^{-1} = H$, lo cual prueba que $[H] = [K]$.

Demostremos ahora que φ es suprayectiva. Sea M/N un subgrupo compacto grande de G/N y denotemos por $\pi : G \to G/N$ al homomorfismo natural. Entonces, $K := \pi^{-1}(M/N)$ es un subgrupo cerrado de G. Como G es compacto, entonces K es un subgrupo compacto de G, que contiene a N. Además $K/N = M/N$. En particular, $\varphi([K]) = [M/N]$.

□

Corolario 2.1.2. *La cardinalidad del conjunto $\mathcal{O}_N(G)$ es igual a la cardinalidad del conjunto $\mathcal{O}(G/N)$.*

Denotemos ahora por $\mathcal{N}(G)$ al conjunto de todos los subgrupos normales N de G, tales que el cociente G/N es un grupo de Lie; y por $\mathcal{R}(G)$ a las clases de equivalencia de todas las representaciones ortogonales, reales y de dimensión finita de G.

También denotemos por $\mathcal{IR}(G)$ a las clases de equivalencia de todas las representaciones ortogonales, reales e irreducibles de G. El siguiente resultado, lo probó Pontriagyn [36, Cap. 5, Ej 58]:

Proposición 2.1.3. *Sea G un grupo compacto infinito. Entonces $|\mathcal{IR}(G)| = w(G)$.*

Como cada representación ortogonal, real y de dimensión finita de G se representa de forma única como la suma directa de una cantidad finita de representaciones ortogonales, reales de dimensión finita e irreducibles (ver Proposición 1.7.1), entonces tenemos que $\mathcal{R}(G)$ y $\mathcal{IR}(G)$ tienen la misma cardinalidad, siempre que G sea infinito. Por lo tanto, la proposición 2.1.3, implica lo siguiente:

Corolario 2.1.4. *Sea G un grupo compacto infinito. Entonces $|\mathcal{R}(G)| = w(G)$.*

Ahora, probemos lo siguiente:

Lema 2.1.5. $|\mathcal{N}(G)| \leq |\mathcal{R}(G)|$.

Demostración. Para la prueba, basta construir una función suprayectiva $F : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{N}(G)$.

Para ello, consideremos la función f definida en cada representación ortogonal, real de dimensión finita α, por $f(\alpha) = \ker\alpha$. Claramente, $f(\alpha) \in \mathcal{N}(G)$. Como dos representaciones equivalentes poseen el mismo kernel la función f nos induce una función $F : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{N}(G)$ bien definida, dada por la fórmula $F([\alpha]) = \ker\alpha$, para cada $[\alpha] \in \mathcal{R}(G)$. Verifiquemos que F es suprayectiva. En efecto, para cada $N \in \mathcal{N}(G)$, el grupo de Lie G/N admite un encaje monomórfico topológico $h : G/N \hookrightarrow O(n)$, para algún $n \in \mathbb{N}$, (ver por ejemplo [18, Cap. 0, Coro. 4.5]), y por lo tanto el homomorfismo natural $\pi : G \to G/N$ compuesto con h es una representación continua $\beta : G \to O(n)$, tal que $ker\beta = N$. Entonces $f(\beta) = N$, y por lo tanto $F([\beta]) = N$.

□

Lema 2.1.6. *Sea G un grupo compacto infinito. Entonces la cardinalidad de la unión disjunta:*

$$\bigsqcup_{N\in\mathcal{N}(G)} \mathcal{O}_N(G)$$

no excede el peso de G.

Demostración. Para cada $N \in \mathcal{N}(G)$, el conjunto $\mathcal{O}(G/N)$ es a lo más numerable, pues cada grupo compacto de Lie posee a lo más una cantidad numerable de tipos orbitales (ver, [34, Proposición 1.7.27]). Por otro lado, del corolario 2.1.4 y el lema 2.1.5 tenemos que $|\mathcal{N}(G)| \leq w(G)$. Por lo tanto,

$$\bigsqcup_{N\in\mathcal{N}(G)} \mathcal{O}(G/N)$$

no excede al peso de G.

Falta observar que por el corolario 2.1.2 las uniones disjuntas

$$\bigsqcup_{N\in\mathcal{N}(G)} \mathcal{O}_N(G) \qquad \text{y} \qquad \bigsqcup_{N\in\mathcal{N}(G)} \mathcal{O}(G/N)$$

tienen la misma cardinalidad.

□

Corolario 2.1.7. $|\mathcal{O}(G)| \leq w(G)$.

Demostración. Si G es finito la desigualdad es evidente. Sea G un subgrupo compacto infinito.

Para cada $N \in \mathcal{N}(G)$, sea $f_N : \mathcal{O}_N(G) \hookrightarrow \mathcal{O}(G)$ la inclusión natural. Estas funciones, nos definen una función:

$$F : \bigsqcup_{N\in\mathcal{N}(G)} \mathcal{O}_N(G) \to \mathcal{O}(G).$$

por la proposición 1.5.4(6) se tiene que F es supreyectiva (Si K es un subgrupo grande, entonces por la proposición 1.5.4, en el caso que el grupo es compacto, existe un subgrupo normal compacto N de G tal que G/N es grupo de Lie, por lo que $[K/N] \in \mathcal{O}_N(G)$ y su imagen es K).

Lo que implica que la cardinalidad de $\mathcal{O}(G)$ no excede la cardinalidad de $\bigsqcup_{N\in\mathcal{N}(G)} \mathcal{O}_N(G)$, que debido al lema 2.1.6, no excede al peso de G.

□

2.2. El caso del grupo casi conexo

En el caso de que el grupo sea localmente compacto separaremos el cálculo que nos interesa en dos partes. La primera cuando existe dentro del grupo un subgrupo compacto maximal y la segunda en el caso general. El primer caso es indispensable, pues haremos uso de este para la generalización completa.

Recordemos que un subgrupo compacto maximal K de G, es un subgrupo compacto K tal que para todo subgrupo compacto M de G, se cumple que $M \subset K \subset G$ o bien existe $g \in G$ tal que $gMg^{-1} \subset K \subset G$. En [1, Teorema A.5.iii)] se encuentra el conocido resultado acerca de la existencia del subgrupo compacto maximal K en un grupo casi conexo G. Este es un resultado clásico para el caso de grupos de Lie (ver [26, Capítulo XV, Teorema 3.1]).

Teorema 2.2.1 ([1, Teorema A.5.iii)]). *Sea G un grupo topológico localmente compacto casi conexo. Entonces existe un subgrupo compacto maximal K de G, tal que para cada subgrupo compacto L de G, existe un elemento $x \in G$ tal que $xLx^{-1} \subset K$.*

La existencia del subgrupo compacto maximal nos permite utilizar el caso anterior, en donde ya hemos realizado el cálculo para un grupo compacto. Para ello, utilizaremos el siguiente lema.

Lema 2.2.2. *Sea G un grupo localmente compacto casi conexo y K un subgrupo compacto maximal de G. Entonces $|\mathcal{O}(G)| \leq |\mathcal{O}(K)|$.*

Demostración. Para demostrar el lema, es suficiente encontrar una función suprayectiva $f : \mathcal{O}(K) \to \mathcal{O}(G)$.

Para cada subgrupo $H \subset K$, denotaremos por $[H]_K$ a la clase de conjugación de H en K y por $[H]_G$ a la clase de conjugación de H en G. Para cada $[H]_K \in \mathcal{O}(K)$ definimos f como sigue:

$$f([H]_K) = [H]_G.$$

Claramente f está bien definida. Más aún, si $[L]_G \in \mathcal{O}(G)$, entonces debido a la maximalidad de K, se tiene que existe un elemento g en G, tal que $gLg^{-1} \subset K$. Entonces $f\left([gLg^{-1}]_K\right) = [gLg^{-1}]_G = [L]_G$, lo que prueba la suprayectividad de f.

$\square$

Corolario 2.2.3. *Sea G un grupo localmente compacto casi conexo. Entonces* $|\mathcal{O}(G)| \leq w(G)$.

Demostración. Por el lema anterior, se tiene que $|\mathcal{O}(G)| \leq |\mathcal{O}(K)|$, donde K es un subgrupo compacto maximal de G. Ahora, como $|\mathcal{O}(K)| \leq w(K)$, y $w(K) \leq w(G)$, tenemos que $|\mathcal{O}(G)| \leq w(G)$ lo cual prueba el corolario.

□

2.3. El caso del grupo localmente compacto

En esta sección calcularemos la cardinalidad de los tipos orbitales de los subgrupos grandes, en el caso de un grupo localmente compacto, en general.

El esquema de la desmostración es el siguiente:

Como ya establecimos en la sección anterior, la cardinalidad de los tipos orbitales grandes de un grupo localmente compacto casi conexo, es menor o igual al peso del grupo dado. Cuando el grupo no es casi conexo, no podemos aplicar este resultado directamente. Sin embargo, para cualquier grupo localmente compacto, tenemos que el cociente G/G_0 es un grupo totalmente disconexo, cuya familia de subgrupos compactos abiertos es de cardinalidad menor o igual al peso del grupo G/G_0. Ahora, si H es un subgrupo grande de G, entonces G_0H es un subgrupo abierto y casi conexo de G, por lo que su proyección a G/G_0 es compacta y por lo tanto es uno de la familia mencionada anteriormente. Como además, G_0H es casi conexo, aplicando el caso anterior, para grupos localmente compactos casi conexos, tenemos que la cardinalidad de tipos orbitales grandes respecto a G_0H, contenidos en G_0H, es menor o igual al peso de G_0H.

Tomando en cuenta estos dos hechos, podemos afirmar que la cardinalidad de tipos orbitales grandes de G, es menor o igual al peso del grupo localmente compacto G.

Antes de continuar, notemos que en general,

Proposición 2.3.1. *Si X es un espacio topológico de Hausdorff, entonces la cardinalidad de subconjuntos compactos abiertos de X no excede al peso de X.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base de cardinalidad mínima para X. Sea $\mathcal{K}$ el conjunto de todos los subconjuntos compactos abiertos de X. Entonces todo elemento K de $\mathcal{K}$ puede ser (no únicamente) representado como una unión finita de elementos de $\mathcal{B}$. Esto implica que la cardinalidad de $\mathcal{K}$ no excede la cardinalidad del conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathcal{B}$, que es igual a $|\mathcal{B}|$. Entonces, $|\mathcal{K}| \leq |\mathcal{B}| = w(X)$.

□

Corolario 2.3.2. *Sea G un grupo localmente compacto y totalmente disconexo. Entonces la cardinalidad del conjunto de todos los subgrupos compactos y abiertos no excede al peso del grupo.*

Con el siguiente lema, formalizaremos las afirmaciones anteriores, que establecen que todo subgrupo grande H de G, está contenido en un subgrupo casi conexo de G: G_0H. Además, para cada subgrupo grande H de G, cada G_0H es un subgrupo abierto de G. Como la proyección $\pi : G \to G/G_0$ es abierta, y G_0H es casi conexo, entonces $\pi(G_0H)$ es compacto y abierto.

Lema 2.3.3. *Sean G un grupo localmente compacto y K un subgrupo grande de G. Entonces el subgrupo G_0K es un casi conexo y abierto de G.*

Demostración. Como K es un subgrupo grande de G, entonces por la definición G/K es localmente conexo. Además como la función natural

$$G/K \to G/G_0K \qquad \text{dada por} \qquad gK \mapsto gG_0K$$

es abierta, y la conexidad local es invariante bajo funciones abiertas, entonces G/G_0K es localmente conexo. Por otro lado,

$$G/G_0K \cong \frac{G/G_0}{(G_0K)/G_0}.$$

Por lo tanto, G/G_0K es el cociente de un grupo totalmente disconexo G/G_0, por lo cual es totalmente disconexo. Ahora, G/G_0K es localmente conexo y totalmente disconexo lo que forza a que sea discreto, lo cual implica que G_0K es un subgrupo abierto de G. Para demostrar que G_0K es casi conexo, es suficiente observar que el cociente G_0K/G_0 es la imagen del grupo compacto K, bajo el homomorfismo natural $G \to G/G_0$, y por lo tanto, es compacto.

□

Lema 2.3.4. *Sean G un grupo localmente compacto y G_0 la componente conexa de la identidad de G. Entonces, la cardinalidad de la familia:*

$$\mathcal{A} = \{G_0K \mid K \text{ es subgrupo grande de } G\}$$

no excede al peso del grupo G.

Demostración. Sea $\pi : G \to G/G_0$ el homomorfismo natural. Denotemos por $\pi(\mathcal{A})$ al conjunto $\{\pi(G_0K) \mid K$ es subgrupo grande de $G\}$. Observemos que la función que asocia a cada $G_0K \in \mathcal{A}$ con su imagen $\pi(G_0K)$ es biyectiva, ya que $\pi^{-1}(\pi(G_0K)) = G_0K$. Entonces, $|\mathcal{A}| = |\pi(\mathcal{A})|$.

Luego, como π es abierta, tenemos que cada $\pi(G_0K)$ es un subgrupo abierto de G/G_0 (ver A.1.2). Además, $\pi(G_0K)$ es compacto, ya que $\pi(G_0K) = \pi(K)$ y K es compacto. Por lo tanto $\pi(\mathcal{A})$ consiste de subgrupos compactos y abiertos del grupo totalmente disconexo G/G_0. Por lo tanto, $|\pi(\mathcal{A})| \leq w(G/G_0)$ (ver Corolario 2.3.2). Como π es abierta, tenemos que $w(G/G_0) \leq w(G)$. En conjunto, tenemos que $|\mathcal{A}| = |\pi(\mathcal{A})| \leq w(G/G_0) \leq w(G)$.

□

En este momento ya tenemos todo lo necesario para demostrar el teorema principal de este capítulo, que establece lo siguiente:

Teorema 2.3.5. *Sea G un grupo localmente compacto, entonces la cardinalidad de $\mathcal{O}(G)$ no excede al peso del grupo.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ un conjunto de exactamente un representante de cada tipo orbital $[H] \in \mathcal{O}(G)$. Entonces, claramente $|\mathcal{H}| = |\mathcal{O}(G)|$.

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto definido en el lema anterior, es decir,

$$\mathcal{A} = \{G_0 K \mid K \text{ es subgrupo grande de } G\}.$$

Definimos

$$\varphi : \mathcal{H} \to \bigsqcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{O}(A)$$

de acuerdo con la siguiente regla de correspondencia: para cada $H \in \mathcal{H}$, sea $\varphi(H) = [H]_{G_0 H}$, la clase de conjugación de H en el grupo casi conexo $G_0 H$.

Como $G_0 H \in \mathcal{A}$, entonces φ está bien definida. Más aún, si $[H_1]_{G_0 H_1} = [H_2]_{G_0 H_2}$ para algún par H_1 y H_2 en $\mathcal{H}$, entonces claramente $[H_1] = [H_2]$, pero como $\mathcal{H}$ tiene un sólo representante de cada tipo orbital, concluímos que $H_1 = H_2$. Lo cual prueba que φ es inyectiva. Por lo tanto,

$$|\mathcal{H}| \leq \left| \bigsqcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{O}(A) \right| \tag{2.3}$$

Por el lema 2.2.2, $|\mathcal{O}(A)| \leq w(A) \leq w(G)$ para cada $A \in \mathcal{A}$. Además por el lema 2.3.4, $|\mathcal{A}| \leq w(G)$. De aquí $\left|\bigsqcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{O}(A)\right| \leq w(G)$. Este resultado, junto con la desigualdad (2.3), implica que $|\mathcal{H}| \leq w(G)$. Finalmente, $|\mathcal{O}(G)| = |\mathcal{H}|$, por lo que $|\mathcal{O}(G)| \leq w(G)$, que es lo que queríamos demostrar.

□

3. G-ESPACIOS PROPIOS UNIVERSALES

En este capítulo construiremos un G-espacio propio universal de peso τ, para la clase $G\text{-}Tych^{\tau}$, de todos los G-espacios propios de Tychonoff de peso $\leq \tau$. Aquí τ es un cardinal infinito mayor o igual al peso del grupo actuante G, donde G es un grupo localmente compacto.

Utilizaremos una versión equivariante del teorema del encaje diagonal. El teorema de la rebanada aproximativa será esencial para la construcción de las funciones que separan puntos de cerrados, las cuales intervienen en la demostración del teorema del encaje de Tychonoff.

Recordemos que en el teorema del encaje de Tychonoff se construye una familia de funciones que separan puntos de cerrados, y cuya imagen es el intervalo $[0,1]$. Observemos que se puede ver al intervalo $[0,1]$ como el cono sobre un solo punto. Usando esta misma idea para construir las funciones equivariantes utilizadas en el encaje, utilizaremos los conos sobre los cocientes G/H de los subgrupos grandes H de G. La ventaja que tienen, a diferencia de los intervalos, es que existe una acción natural de G en dichos cocientes. El teorema de la rebanada aproximativa nos brindará directamente las funciones requeridas del G-espacio propio, a los diversos cocientes.

3.1. Funciones que separan puntos de cerrados

Teorema 3.1.1. *Sean G un grupo localmente compacto, X un G-espacio propio, $F \subset X$ un subconjunto cerrado y $a \in X \setminus F$. Entonces existe un subgrupo grande K tal que $G_a \subset K$ y una función continua equivariante $f : X \to \mathrm{con}(G/K)$ tal que $f(a) \neq \theta$ y $f(a) \notin \overline{f(F)}$.*

Demostración. Por la continuidad de la acción existen vecindades O y U de la identidad en G y de a en X respectivamente, tales que $OU \subset X \setminus F$.

Por el Teorema A.2.2 existen un subgrupo grande K de G tal que $G_a \subset K$, una K-rebanada S tal que $S \subset U$ y una función equivariante $\varphi : G(S) \to G/K$ tal que $\varphi^{-1}(eK) = S$.

Como K es compacto y U es una vecindad del conjunto K-invariante S, podemos suponer que U es una vecindad K-invariante.

Sea $W = G(S)$. W es un abierto en X, pues S es una K-rebanada y por lo tanto es una vecindad invariante de a.

Gracias a que φ es equivariante, entonces se cumple $\varphi(OS) = \{gK \mid g \in O\}$. El conjunto $\{gK \mid g \in O\}$ es abierto en G/K ya que coincide con la imagen de O bajo la función cociente $G \to G/K$ la cual es una función abierta. Esto implica que $\varphi(OS)$ es un subconjunto abierto de G/K.

Afirmamos que $\varphi(OS) \cap \varphi(F \cap W) = \emptyset$.

Supongamos que no, es decir, existen $t \in O$, $g \in G$, $x, y \in S$ con $gy \in F \cap W$ tales que $\varphi(tx) = \varphi(gy)$. Como φ es equivariante, tenemos que $t\varphi(x) = g\varphi(y)$. Pero como x y y son elementos de la rebanada S, entonces $\varphi(x) = \varphi(y) = eK$, y por lo tanto $t(eK) = g(eK)$. De aquí se tiene que $g = tk$ para algún $k \in K$. Sustituyendo, $gy = tky$, como $y \in S$ entonces $ky \in S$ ya que S es K-invariante. Por lo tanto $gy = tky \in tS$, pero como $t \in O$ tenemos que $gy = tky \in tS \subset OS \subset X \setminus F$ lo cual es una contradicción, pues $gy \in F$.

Sea $\lambda : X \to [0,1]$ una función continua G-invariante tal que $\lambda|_{X \setminus W} = 0$ y $\lambda|_K = 1$. Esto es posible porque el espacio orbital X/G es un G-espacio de Tychonoff 1.3.6.

Sea $f : X \to \mathrm{con}(G/K)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(x)\varphi(x) & x \in W \\ \theta & x \in X \setminus W \end{cases}$$

Veamos que f es la función adecuada.

Como $f(F \cap W) \subset (0,1]\varphi(F \cap W)$ y $f(F \cap (X \setminus W)) = \theta$ vemos que $f(F) \subset [0,1]\varphi(F \cap W)$. Por otro lado, $(0,1]\varphi(OS)$ es vecindad de $f(a)$ en $\mathrm{con}(G/K)$. Como $\varphi(OS)$ y $\varphi(F \cap W)$ son ajenos en G/K tenemos que $(0,1]\varphi(OS)$ y $[0,1]\varphi(F \cap W)$ son ajenos en $\mathrm{con}(G/K)$, por lo tanto $f(a) \notin \overline{f(F)}$. Ahora, solo falta observar que $f(a) = 1(eK) \neq \theta$.

De aqui concluimos que f es la función buscada.

□

Es importante notar, que dado G un grupo localmente compacto y H_1 y H_2 subgrupos compactos de G entonces existe un homeomorfismo equivariante entre G/H_1 y G/H_2, si y sólo si $H_1 \in [H_2]$.

Como habíamos mencionado anteriormente, construiremos el G-espacio propio universal en la clase de todos los G-espacios propios de Tychonoff de peso menor o igual a τ.

Sea $\mathcal{H} = \{(H_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un conjunto que conste de exactamente un representante de cada tipo orbital grande de G.

Definimos
$$\mathcal{T}(\mathcal{H}) = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{con}(G/H_\alpha).$$

Observemos que gracias al G-homeomorfismo que ocurre entre G/H y G/K, cuando H y K son dos representantes distintos del mismo tipo orbital, entonces la construcción de $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ no depende de los representantes elegidos en $\mathcal{H}$.

En efecto, si $[H'] = [H]$, entonces existe un $g \in G$ tal que $H' = gHg^{-1}$. Esto nos permite construir un homeomorfismo equivariante $f : G/H \to G/H'$ dado por $f(xH) = xg^{-1}H'$. Luego, f admite una extensión conónica a un homeomorfismo equivariante $\tilde{f} : \mathrm{con}(G/H) \to \mathrm{con}(G/H')$. Claramente el resultado es que existe un homeomorfismo equivariante $\mathcal{T}(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}(\mathcal{H}')$. Por esta razón, sólo usaremos la notación
$$\mathcal{T}(G) = \prod_{H \in \mathcal{H}} \mathrm{con}(G/H)$$
independientemente de la elección de los representantes de los tipos orbitales grandes.

Si consideramos a un cardinal infinito τ, mayor o igual al peso de grupo G, entonces definimos

$$\mathcal{T}(G,\tau) = \mathcal{T}(G)^{\tau} \setminus \{*\}$$

es decir,

$$\mathcal{T}(G,\tau) = \left(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathrm{con}(G/H_\alpha) \right)^{\tau} \setminus \{*\}$$

donde $*$ es el punto distinguido del producto (es decir, todas sus coordenadas son los vértices de cada cono).

Es claro que G actúa diagonalmente en $\mathcal{T}(G,\tau)$, y observemos que $*$ es el único punto fijo bajo la acción de G. En efecto, G actúa coordenada a coordenada, y $g \cdot * = (g \cdot \theta_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} = *$, es decir, el punto cuyas coordenadas son los vértices de los conos correspondientes.

Notemos además que el teorema 2.3.5, del capítulo anterior, nos muestra que la cardinalidad de $\mathcal{H}$ no sobrepasa el peso de G, es decir, es menor o igual a τ, y por lo tanto $\mathcal{T}(G,\tau)$ es de peso τ.

Corolario 3.1.2. *Sea G un grupo localmente compacto, entonces para todo G-espacio propio X, el conjunto de G-funciones $X \to \mathcal{T}(G)$ separa puntos de cerrados en X.*

Demostración. Sea $F \subset X$ un subconjunto cerrado y $a \in X \setminus F$. Por el teorema 3.1.1 existe un subgrupo grande K y una G-función $f : X \to \mathrm{con}(G/K)$ tal que $f(a) = eK \notin \overline{f(F)}$. Como K es un subgrupo grande de G, existe un representante $H_\alpha \in \mathcal{H}$ tal que $K \in [H_\alpha]$ y por lo tanto existe un homeomorfismo equivariante $h' : G/K \to G/H_\alpha$ tal que $h'(eK) = eH_\alpha$ y una extensión canónica de h' a $h : \mathrm{con}(G/K) \to \mathrm{con}(G/H_\alpha)$ la cual es un homeomorfismo equivariante entre los conos respectivos. Considerando la función dada por

$\varphi = h \circ f : X \to \mathrm{con}(G/H_\alpha)$, satisface que $\varphi(a) = eH_\alpha \notin \overline{\varphi(F)}$. Sea

$$j : \mathrm{con}(G/H_\alpha) \hookrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H}) = \mathcal{T}(G)$$

el G-encaje natural. (Esto es, para cada $x \in \mathrm{con}(G/H_\alpha)$ la H_β-coordenada de $j(x)$ equivale a θ siempre que $H_\beta \neq H_\alpha$, en el otro caso $j(x)$ tiene la H_α-coordenada igual a x).

Entonces $\psi = j \circ \varphi : X \to \mathcal{T}(G)$ es tal que $\psi(a) \notin \overline{\psi(F)}$, más aún $\psi(a) \neq *$, ya que la H_α-coordenada de $\psi(a) = eH_\alpha$ que es diferente del vértice del cono $\mathrm{con}(G/H_\alpha)$. Lo cual prueba lo que se quería demostrar.

□

3.2. G-encaje

En esta sección presentamos la demostración de que el G-espacio propio que construímos en este capítulo, es universal en la clase de todos los G-espacios propios de peso menor o igual a τ, donde τ es un cardinal infinito mayor o igual al peso de G. Es importante notar, que el peso del G-espacio construido es precisamente máx$\{w(G), \tau\}$, por lo que para que éste pueda ser universal, se debe elegir τ mayor o igual al peso de G.

Teorema 3.2.1. *Sea G un grupo localmente compacto de peso infinito τ. Entonces*

1. $w(\mathcal{T}(G)) \leq w(G)$,
2. $\mathcal{T}(G)$ *es un* G-AE$(\mathcal{P})$,
3. *Si G es σ-compacto, no compacto entonces $\mathcal{T}(G)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^\tau$ y*
4. *Si G es compacto, entonces $\mathcal{T}(G)$ es homeomorfo a $\mathbb{I}^\tau$.*

Demostración.

1. Claramente, $w(G/H) \leq w(G)$, para todo subgrupo cerrado grande H de G. Gracias al Teorema 3.1.1, la cardinalidad de conjunto $\mathcal{O}(G)$ de todos los tipos orbitales grandes de G, no excede al peso de $w(G) = \tau$, y por lo tanto, aplicando la definición de $\mathcal{T}(G)$, se tiene el resultado deseado.

2. Sigue directamente de las Proposiciones 1.5.4 y 1.6.3, junto con el hecho de que el producto topológico de espacios G-AE($\mathcal{P}$) es G-AE($\mathcal{P}$).

3. Observemos que cada G/H, donde H es un subgrupo grande, es completamente metrizable. En efecto, la metrizabilidad del cociente G/H se muestra en [14, Teorema 4.14], y como G/H es Čech-Completo (gracias a su compacidad local), inferimos que es completamente metrizable (ver [23, Teorema 4.3.26]). Escogiendo una métrica completa d para G/H podemos definir, por la fórmula 1.2, una métrica completa d^* para el cono con(G/H) (ver Sección 1.6 o [8, Proposición 2.1]).

   De la σ-compacidad de G se tiene que G/H y, debido a la metrizabilidad de G/H, concluímos que G/H es separable. Consecuentemente, G/H posee una base numerable. Más aún, por la Proposición 1.6.3, cada cono con(G/H) es un AR para los espacios metrizables. Observemos además que cada cono con(G/H) no es compacto y tiene el mismo peso que la base G/H, es decir $w(\text{con}(G/H)) = \aleph_0$.

   Entonces, se cumplen todas las hipótesis del Teorema de Toruńczyk [38, Teorema 5.1] que nos permite afirmar que cada producto numerable $\prod_{i=1}^{\infty} \text{con}(G/H_i)$, donde $H_i \in \mathcal{H}$, es homeomorfo al espacio separable de Hilbert l_2 de dimensión infinita. Lo cual, implica que $\mathcal{T}(G)$ es homeomorfo a la potencia ${l_2}^{\tau}$, pues $w(\mathcal{T}(G)) = \tau \geq \aleph_0$. Más aún, aplicando el bien conocido Teorema de Anderson [3], tenemos que l_2 es homeomorfo a la potencia $\mathbb{R}^{\aleph_0}$. En combinación lo anterior, $\mathcal{T}(G) \simeq (l_2)^{\tau}$, obtenemos que $\mathcal{T}(G)$ es homeomorfo a la potencia $(\mathbb{R}^{\aleph_0})^{\tau} \simeq \mathbb{R}^{\tau}$.

4. Como cada con(G/H_i) es un compacto no degenerado y AR, de acuerdo a resultados de West [39], $\mathcal{T}(G)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert. Por lo tanto $\mathcal{T}(G)^{\tau}$ es homeomorfo al cubo de Tychonoff $\mathbb{I}^{\tau}$.

□

Teorema 3.2.2. *Sean τ un cardinal infinito y G un grupo de peso $w(G) = \nu$. Entonces*

1. *Cada G-espacio propio X de peso $w(X) \leq \tau$ admite un encaje equivariante al G-espacio $\mathcal{T}(G)^\tau$. Si además, G no es compacto entonces X admite un encaje equivariante al G-espacio propio $\mathcal{T}(G,\tau) = \mathcal{T}(G)^\tau \setminus \{*\}$,*
2. *$\mathcal{T}(G)^\tau$ es G-*AE($\mathcal{P}$),
3. *Si G es σ-compacto y no es compacto entonces $\mathcal{T}(G)^\tau$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{\nu\tau}$ y*
4. *Si G es compacto entonces $\mathcal{T}(G)^\tau$ es homeomorfo al cubo de Tychonoff $\mathbb{I}^{\nu\tau}$.*

Demostración.

1. Como las funciones equivariantes $X \to \mathcal{T}(G)$ separan puntos de cerrados en X (Corolario 3.1.2), aplicando el procedimiento que se puede encontrar en [23, p. 115], podemos elegir una familia $\mathcal{F}$ de funciones equivariantes $X \to \mathcal{T}(G)$, que también separa puntos de cerrados y tiene cardinalidad $|\mathcal{F}| = \tau$. Por lo tanto, el producto diagonal de $\mathcal{F}$ define un encaje topológico $i : X \hookrightarrow \mathcal{T}(G)^\tau$ [23, Teorema 2.3.20]. Como todas las funciones de $\mathcal{F}$ son equivariantes, i es equivariante.

   Ahora, supongamos que G no es compacto. Como los encajes equivariantes preservan los estabilizadores, y el estabilizador de cada punto de X es compacto, entonces X se encaja en $\mathcal{T}(G)^\tau \setminus \{*\}$ (pues $*$ es un punto fijo, por lo tanto su estabilizador es G, que no es compacto). El hecho que $\mathcal{T}(G)^\tau \setminus \{*\}$ es propio, sigue de la Proposición 1.6.5.

2. Sigue de la Proposición 3.2.1 que $\mathcal{T}(G)^\tau$ es un G-AE($\mathcal{P}$).

3. El hecho de que $\mathcal{T}(G)^\tau$ es homeomorfo a la potencia $\mathbb{R}^{\nu\tau}$ sigue directamente de la Proposicion 3.2.1(3), de acuerdo a la cual $\mathcal{T}(G)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^\nu$.

4. Si G es compacto, gracias a la Proposición 3.2.1(4), $\mathcal{T}(G)$ es homeomorfo al cubo de Tychonoff $\mathbb{I}^\nu$, lo cual implica que $\mathcal{T}(G)^\tau$ es homeomorfo a $\mathbb{I}^{\nu\tau}$.

$\square$

El siguiente resultado puede ser reconocido como la versión equivariante del clásico Teorema del encaje de Tychonoff, en la categoría de los G-espacios propios.

Corolario 3.2.3. *Sea τ un cardinal infinito y G un grupo no compacto de peso $w(G) \leq \tau$. Entonces:*

1. *El G-espacio propio $\mathcal{T}(G,\tau)$ es universal en la clase G-$Tych^{\tau}$ de todos los G-espacios propios de Tychonoff de peso $\leq \tau$,*
2. *$\mathcal{T}(G)^{\tau}$ es un G-$\mathrm{AE}(\mathcal{P})$, y*
3. *Si además, G es σ-compacto entonces $\mathcal{T}(G)^{\tau}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{\tau}$*

Demostración. Es inmediato del Teorema anterior. Sólo hace falta mostrar que el peso de $\mathcal{T}(G,\tau)$ es igual a τ. Pero esto sigue directamente de la desigualdad $w(\mathcal{T}(G)) \leq w(G)$, que se demostró en la Proposición 3.2.1(1). □

En conclusión, observamos que el G-espacio propio ambiental en el Teorema 3.2.2 y el Corolario 3.2.3 se puede pedir que sea un espacio lineal. Más específicamente, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.2.4. *Sean τ un cardinal infinito y G un grupo de peso $w(G) \leq \tau$. Entonces existe un G-espacio lineal L, tal que $L \setminus \{0\}$ es un G-espacio propio y para todo G-espacio propio de peso menor o igual a τ, existe un encaje equivariante $X \hookrightarrow L \setminus \{0\}$. Más aún, L es el producto $\prod\limits_{j \in \mathcal{J}} L_j$ de G-espacios lineales normados L_j, tales que el complemento $L_j \setminus \{0\}$ son G-espacios propios.*

Demostración. Gracias al Corolario 3.2.3, si G no es compacto entonces existe un G-espacio propio $\mathcal{T}_\tau$ de peso $w(\mathcal{T}_\tau) = \tau$ que contiene una copia G-homeomorfa a cualquier G-espacio propio de peso menor o igual a τ. Si G es un grupo compacto entonces existe un G-espacio (compacto) $\mathcal{T}_\tau$ de peso $w(\mathcal{T}_\tau) = \tau$ que contiene una copia G-homeomorfa a cualquier G-espacio de peso menor o igual a τ (esto se prueba en [5, Teorema 10], ver tambien Proposición 3.2.1(4)). Gracias a la compacidad de G, en este caso, $\mathcal{T}_\tau$ es un G-espacio propio.

Aplicando [6, Teorema 1.1] al G-espacio propio $\mathcal{T}_\tau$ obtenemos el G-espacio lineal deseado L.

$\square$

Observemos que la linealización del G-espacio propio $L \setminus \{0\}$ en este teorema no se afirma que tenga peso τ, y por lo tanto, no es universal en la clase G-$Tych^\tau$.

A. Teorema de la rebanada aproximativa

En este trabajo utilizamos de manera sustancial varios hechos muy importantes que forman parte del trabajo mas reciente de S. Antonyan [14]. Para conveniencia del lector, incluiremos las demostraciones más importantes.

A.1. Subgrupos grandes

Recordemos que G siempre será un grupo localmente compacto de Hausdorff a menos que se establezca lo contrario.

Definición A.1.1. Un subgrupo compacto H de G se llama **subgrupo grande** si el espacio cociente G/H es localmente conexo y de dimensión finita.

La noción de un subgrupo grande H de un grupo compacto G fué introducida en 1991 por S. Antonyan en el artículo [13] en la forma de sus dos principales características: "G/H es una variedad topológica" y "G/H es un G-ANR". El concepto fué estudiado más sistemáticamente en [12] (para grupos compactos) y en [9] (para grupos casi conexos). En esta sección desarrollaremos el caso general para grupos arbitrarios localmente compactos. Los subgrupos grandes juegan un papel central también en la seción 6.

Lema A.1.2. *Sean H un subgrupo grande de G y G_0 la componente conexa de la identidad de G. Si G/H es localmente conexo entonces el subgrupo $G_0H \subset G$ es abierto y casi conexo.*

Demostración. Como la función natural

$$G/H \to G/G_0H, \qquad gH \mapsto gG_0H$$

es abierta y la conexidad local es invariante bajo funciones abiertas, entonces tenemos que G/G_0H es localmente conexo. Por otro lado

$$G/G_0H \cong \frac{G/G_0}{(G_0H)G_0}.$$

Consecuentemente, como G/G_0H es el espacio cociente de un grupo totalmente disconexo G/G_0, también es totalmente disconexo. Por lo tanto G/G_0H es discreto, lo cual implica que G_0H es un subgrupo abierto de G.

Para probar que G_0H es casi conexo, basta observar que el grupo cociente G_0H/G_0 es la imagen de un grupo compacto H, bajo el homomorfismo natural $G \to G/G_0$, y por lo tanto, es compacto.

□

Del lema A.1.2 se desprende automáticamente lo siguiente:

Corolario A.1.3. *Sean H un subgrupo grande de G y G_0 la componente conexa de la unidad de G. Entonces el subgrupo $G_0H \subset G$ es abierto y casi conexo.*

Proposición A.1.4. *Sean H y K subgrupos compactos de G tales que $H \subset K$. Si H es un subgrupo grande, entonces K también lo es.*

Demostración. Como H es un subgrupo grande de G, entonces el cociente G/H es de dimensión finita y localmente conexo. Ya que la función $G/H \to G/K$, dada por $gH \mapsto gK$, es continua y abierta, entonces G/K es localmente conexo. Utilizando la igualdad (ver [37, Teorema 10]):

$$\dim G/H = \dim G/K + \dim K/H \tag{A.1}$$

□

Proposición A.1.5. *Sean H y K dos subgrupos compactos de G, tales que K es un subgrupo grande de G, y H es un subgrupo grande de K. Entonces H es un subgrupo grande de G.*

Demostración. Como K es un subgrupo grande de G, entonces el cociente G/K es de dimensión finita y localmente conexo. Entonces la función natural $G/H \to G/K$ es una fibración localmente trivial con fibras homeomorfas a K/H (ver [37, Teorema 13']). Además K/H es localmente conexo (y de dimensión finita), lo que implica que G/H es localmente conexo. Utilizando nuevamente la ecuación (A.1) y que G/K y K/H son de dimensión finita, obtenemos que G/H también lo es. Por lo tanto, G/H es localmente conexo y de dimensión finita.

□

La siguiente caracterización de subgrupos grandes es bien conocida. Para grupos compactos se demostró en el libro de Pontryagin [36, Cap. 8, S48], para grupos casi conexos con base numerable, se puede encontrar en el libro de Montgomery y Zippin [32, S6.3], y para grupos arbitrarios casi conexos se prueba en el artículo de Skljarenko [37, Teorema 3].

Proposición A.1.6. *Sea H un subgrupo compacto de un grupo casi conexo G. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *H es un subgrupo grande,*
2. *Existe un subgrupo normal compacto N de G tal que $N \subset H$ y G/N es un grupo de Lie. En particular, G/H es un espacio cociente de un grupo de Lie.*

Esta proposición nos proporciona la siguiente caracterización de subgrupos grandes de grupos localmente compactos arbitrarios ([37, Corolario]):

Proposición A.1.7. *Sea H un subgrupo compacto de un grupo localmente compacto G. Entonces, son equivalentes:*

1. *H es un subgrupo grande,*
2. *G/H es una variedad suave. En este caso es la unión disjunta de subvariedades abiertas, que son homeomorfas al mismo espacio cociente de un grupo de Lie.*

Demostración.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Como G_0H es un subconjunto abierto en G (ver CorolarioA.1.3), entonces G puede expresarse como la unión disjunta de los subconjuntos abiertos xG_0H con $x \in G$.

Ya que la función cociente $p : G \to G/H$ es continua, abierta y cerrada, entonces G_0H/H es abierto y cerrado en G/H, y G/H es la unión disjunta de sus subconjuntos abiertos xG_0H/H con $x \in G$. Observemos que cada xG_0H/H es homeomorfo al espacio cociente G_0H/H.

Del Corolario A.1.3 se tiene que G_0H es un subgrupo abierto y casi conexo de G.

Por lo tanto, en virtud de la Proposición A.1.6, sólo basta probar que H es un subgrupo grande del grupo casi conexo G_0H (ver Corolario A.1.3).

En efecto, ya que G_0H/H es un subconjunto abierto del espacio localmente conexo G/H, entonces tenemos que G_0H/H es localmente conexo. Más aún, como G_0H/H es cerrado en G/H entonces $\dim G_0H/H \leq \dim G/H$ y por lo tanto, G_0H/H es de dimensión finita, ya que G/H también lo es. Por lo tanto, H es un subgrupo grande de G_0H.

(2) $\Longrightarrow$ (1) es evidente.

□

A.2. Rebanadas aproximativas para acciones propias de grupos localmente compactos

El siguiente resultado de R. Palais [35, Proposición 2.3.1] juega un papel central en la teoría de grupos topológicos de transformaciones:

Teorema A.2.1 (Rebanada exacta). *Sean G un grupo de Lie, X un G-espacio propio y $a \in X$. Entonces existe una G_a-rebanada $S \subset X$ tal que $a \in S$.*

En [2] y [9] se han desarrollado versiones aproximativas del Teorema de la Rebanada Exacta A.2.1, que son aplicables también a las acciones propias de grupos no de Lie.

En esta sección demostraremos la siguiente versión del Teorema de la Rebanada Apriximativa para acciones propias en el caso de grupos arbitrarios localmente compactos, que mejora el Teorema en [9, Teorema 3.6]:

Teorema A.2.2 (Teorema de la Rebanada Aproximativa). *Sean X un G-espacio propio, x un punto arbitrario en X y O una vecindad de x. Sea $\mathcal{N}(x,O)$ el conjunto de todos los subgrupos grandes H de G, tales que $G_x \subset H$ y $H(x) \subset O$, entonces:*

1. *el conjunto $\mathcal{N}(x,O)$ no es vacío y*
2. *para todo $K \in \mathcal{N}(x,O)$, existe una K-rebanada S con $x \in S \subset O$.*

Para probar este teorema, utilizaremos el siguiente lema:

Lema A.2.3. *Sean X un G-espacio propio, H un subgrupo compacto de G y S una H-rebanada global de X. Entonces la restricción $f : G \times S \to X$ de la acción es una función abierta.*

Demostración. Sea O un abierto de G y U una vecindad abierta de S. Basta demostrar que el conjunto $OU = \{gu \mid g \in O,\ u \in U\}$ es abierto en X.

Sea $W = \bigcup_{h \in H} (Oh^{-1}) \times (hU)$. Afirmamos que

$$X \setminus OU = f\Big((G \times S) \setminus W\Big) \tag{A.2}$$

En efecto, como $OU = f(W)$ y $X = f(G \times S)$, es claro que $X \setminus OU \subset f\Big((G \times S) \setminus W\Big)$.

Veremos que $f\Big((G \times S) \setminus W\Big) \subset X \setminus OU$.

Supongamos lo contrario, es decir, que existe un punto $gs \in f\Big((G \times S) \setminus W\Big)$ con $(g, s) \in (G \times S) \setminus W$ tal que $gs \in OU$. Entonces $gs = tu$ para algún $(t, u) \in O \times U$. Sea $h = g^{-1}t$. Entonces se tiene que

$$s = g^{-1}tu = hu \quad \text{y} \quad (g, s) = (tt^{-1}g, g^{-1}tu) = (th^{-1}, hu) \in (Oh^{-1}) \times (hU)$$

Como los puntos s y u pertenecen a S, y $s = hu$, entonces $h \in H$. Consecuentemente, $(Oh^{-1}) \times (hU) \subset W$ lo cual implica que $(g, s) \in W$, que es una contradicción. Por lo que se demuestra la igualdad (A.2).

Como S es una H-rebanada global, entonces S es un subconjunto cerrado y pequeño de X. Por lo tanto y aplicando [2, Proposición 1.4], la restricción de la acción $G \times S \to X$ es cerrada. Entonces como $(G \times S) \setminus W$ es un cerrado de $G \times S$, la imagen $f\Big((G \times S) \setminus W\Big)$ es cerrada en X. Finalmente, junto con la ecuación (A.2), se tiene que OU es abierto en X.

□

Demostración (Teorema A.2.2). Realizaremos la demostración en 3 partes.

1. Cuando el grupo es totalmente disconexo,
2. cuando el grupo es casi conexo y
3. cuando el grupo es cualquier grupo localmente compacto.

Sea $V = \{g \in G \mid gx \in O\}$. Entonces V es una vecindad abierta del subgrupo compacto G_x en G.

Caso 1: Sea G totalmente disconexo. Existe un subgrupo compacto abierto H de G tal que $G_x \subset H \subset V$ (ver [32, Cap. II, §2.3]). Por lo tanto G/H es discreto y H es un subgrupo grande de G. Lo cual implica que $H \in \mathcal{N}(x, O)$.

Supongamos ahora que $K \in \mathcal{N}(x, O)$. Entonces K es un subgrupo compacto abierto de G (ver Corolario A.1.3). Como $K(x) \subset O$, entonces existe una vecindad Q de x tal que $KQ \subset O$. Utilizando que K es abierto, por [35, Proposición 1.1.6], existe una vecindad W de x en X tal que $\langle\, W, W\,\rangle \subset K$. Entonces el conjunto $S = K(Q \cap W)$ es una vecindad K-invariante de x con $S \subset O$ y

$$\langle\, S, S\,\rangle = K^{-1}\langle\, Q \cap W, Q \cap W\,\rangle K = K.$$

Ahora, la saturación $U = G(S)$ es unión disjunta de subconjuntos abiertos gS donde g es un representante de cada elemento del cociente G/K. Así la función $f : U \to G/K$ con $f(u) = gK$ si $u \in gS$, es una G-función bien definida y $f^{-1}(eK) = S$. Como $x \in S \subset O$, S es la rebanada buscada.

Caso 2: Sea G casi conexo. Por la compacidad de G_x, existe una vecindad de la unidad V_1 en G, tal que $V_1 \cdot G_x \subset V$. Por un resultado de Yamabe (ver [32, Cap. IV, §46] o [24, Teorema 8]), V_1 contiene un subgrupo normal compacto N de G tal que G/N es un grupo de Lie. En particular, N es un subgrupo grande de G. Sea $H = N \cdot G_x$. Entonces H es un subgrupo compacto de G tal que $G_x \subset H \subset V$. Como $N \subset H$ y N es un subgrupo grande, entonces de la proposición A.1.4 se obtiene que H también es grande y por lo tanto $H \subset \mathcal{N}(x, O)$.

Para continuar la prueba, consideremos $K \in \mathcal{N}(x, O)$. Como G/K es de dimensión finita y localmente conexo, por la Proposición A.1.6, existe un subgrupo compacto normal M de G tal que $M \subset K$ y G/M es un grupo de Lie.

Como K es compacto y $K(x) \subset O$, existe una vecindad K-invariante Q de x tal que $Q \subset O$. Sea $p : X \to X/M$ la función M-orbital. Entonces X/M es un G/M-espacio propio [35, Proposición 1.3.2], y es fácil ver que el G/M-estabilizador del punto $p(x) \in X/M$ es precisamente el grupo K/M. Ahora, por el Teorema de la Rebanada Exacta A.2.1, existe una vecindad invariante $\widetilde{U}$ de $p(x)$ en X/M y una G/M-función equivariante

$$\widetilde{f} : \widetilde{U} \to \frac{G/M}{K/M}$$

tal que $\widetilde{f}(p(x)) = K/M$.

Consideremos X/M (y sus subconjuntos invariantes) como un G-espacio equipado con la acción de G definida por el homomorfismo natural $G \to G/M$. En particular, $\widetilde{U}$ es un G-espacio.

Como los dos G-espacios $\frac{G/M}{K/M}$ y G/K son naturalmente G-homeomorfos, entonces podemos considerar a $\widetilde{f}$ como una función G-equivariante de $\widetilde{U}$ a G/K con $\widetilde{f}(p(x)) = eK$.

Sea $S' = \widetilde{f}^{-1}(eK)$ y $S_1 = S' \cap p(Q)$. Entonces S' es una K-rebanada global para $\widetilde{U}$ y S_1 es un conjunto abierto K-invariante de S'.

Afirmamos que la G-saturación $U_1 = G(S_1)$ es un conjunto tubular con S_1 como K-rebanada. En efecto, U_1 es abierto en $\widetilde{U}$, y por lo tanto, por el Lema A.2.3 lo es en X/M.

Para probar que S_1 es una K-rebanada global de U_1 basta verificar que $f_1^{-1}(eK) = S_1$, donde $f_1 : U_1 \to G/K$ es la restricción de $\widetilde{f}|_{U_1}$.

Para esto, sea x un punto arbitrario en $f_1^{-1}(eK)$. Como $f_1^{-1}(eK) = S' \cap U_1$ entonces $x = gs_1$ para algún $s_1 \in S_1$ y $g \in G$. Por lo tanto, $gs_1 \in S' \cap gS$, lo cual implica que $g \in K$. Como S_1 es un conjunto K-invariante entonces $x = gs_1 \in S_1$. Por lo que $f_1^{-1}(eK) \subset S_1$. La inclusión contraria $S_1 \subset f_1^{-1}(eK)$ es evidente, por lo que obtenemos la igualdad deseada $f_1^{-1}(eK) = S_1$.

Por lo anterior, tenemos que S_1 es una K-rebanada en $p(Q)$ y contiene al punto $p(x) \in X/M$.

Sean $U = p^{-1}(U_1)$, $S = p^{-1}(S_1)$ y $f : U \to G/K$ la composición $f_1 \circ p$. Como $S = f^{-1}(eK) \subset p^{-1}(p(Q)) = Q \subset O$ y $x \in S$, concluimos que S es la K-rebanada deseada.

Caso 3: Sea G localmente compacto. Primero, mostraremos que $\mathcal{N}(x, O) \neq \emptyset$.

Sea G_0 la componente conexa de la identidad de G y $\widetilde{G} = G/G_0$. Sea $\widetilde{X} = X/G_0$ y $p : X \to \widetilde{X}$ la función G_0-orbital. Entonces $\widetilde{X}$ es un $\widetilde{G}$-espacio propio [35, Proposición 1.3.2] y el estabilizador $\widetilde{G}_{p(x)}$ del punto $p(x) \in X/G_0$ en $\widetilde{G}$ es el grupo $(G_0 \cdot G_x)/G_0$.

Como $\widetilde{G}$ es totalmente disconexo, existe un subgrupo compacto abierto M de $\widetilde{G}$ tal que $\widetilde{G}_{p(x)} \subset M$ (ver [32, Cap. II, §2.3]).

Sea $\pi : G \to \widetilde{G}$ el homomorfismo natural y $L = \pi^{-1}(M)$. Entonces L es un subgrupo abierto y cerrado de G. Como, claramente, el grupo cociente G/G_0 es topológicamente isomorfo al grupo compacto M, entonces L es casi conexo. Por lo tanto, podemos aplicar el caso anterior al grupo casi conexo L, al L-espacio propio X y la vecindad $O \subset X$ del punto $x \in X$. Entonces, existe un subgrupo grande N de L tal que $L_x \subset N$ y $N(x) \subset O$.

Afirmamos que $N \in \mathcal{N}(x, O)$. En efecto, como $(G_0 \cdot G_x)/G_0 = \widetilde{G}_{p(x)} \subset M$ entonces $G_0 \cdot G_x \subset L$. En particular, $G_x = L_x$ y por lo tanto $G_x \subset N$. Falta verificar que N es un subgrupo grande de G. De hecho, como N es un subgrupo grande de L, por la Proposición A.1.7, el cociente L/N es localmente contraíble. Sin embargo, G/N es la unión disjunta de sus subconjuntos abiertos de la forma xL/N con $x \in G$ y cada uno homeomorfo a L/N. Consecuentemente, G/N es localmente contraíble, y por la Proposición A.1.7, obtenemos que N es un subgrupo grande de G. De aquí probamos que $N \in \mathcal{N}(x, O)$ y por lo tanto no es vacío.

Para probar la segunda parte, sea $K \in \mathcal{N}(x, O)$. Como K es un subgrupo grande de G, por el corolario A.1.3, $H = G_0 K$ es un subgrupo abierto casi conexo de G. Entonces $\widetilde{H} = G_0 K/G_0$ es un subgrupo compacto abierto de $\widetilde{G}$. La inclusión $G_x \subset K$ fácilmente implica que $\widetilde{G}_{p(x)} \subset \widetilde{H}$. Respectivamente, la inclusión $K(x) \subset O$, implica que $\widetilde{H} \subset p(O)$. Entonces de acuerdo al primer caso, existe una $\widetilde{G}$-función $f_1 : U_1 \to \widetilde{G}/\widetilde{H}$ de una vecindad $\widetilde{G}$-invariante U_1 de $p(x)$ en $\widetilde{X}$ al $\widetilde{G}$-espacio discreto $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ con $p(x) \in f_1^{-1}(\widetilde{e}\widetilde{H}) \subset p(O)$.

La imagen inversa $W_1 = f_1^{-1}(\widetilde{e}\widetilde{H})$, es un subconjunto abierto $\widetilde{H}$-invariante de $\widetilde{X}$; entonces el conjunto $W = p^{-1}(W_1)$ es un subconjunto abierto H-invariante de X con $x \in W$, $G_x \subset K \subset H$ y $K(x) \subset W \cap O$. Como H/K es abierto en G/K entonces K es un subgrupo grande de H (ver Proposición A.1.7).

Por lo tanto, podemos aplicar el segundo caso al grupo casi conexo H, junto con el H-espacio propio W, la vecindad $O \cap W$ del punto $x \in W$ y el subgrupo grande K de H. Entonces existe una vecindad H-invariante U de x en W y una H-función $f_0 : U \to H/K$ con $x \in f_0^{-1}(eK) \subset O \cap W$. Lo que queremos ahora, es extender f_0 a una G-función $f : G(U) \to G/K$. Como $H/K \subset G/K$, simplemente definimos $f(gu) = gf_0(u)$ para toda $g \in G$ y $u \in U$.

Es fácil ver que f es una G-función bien definida. Por lo que la K-rebanada $S = f^{-1}(eK)$, es la K-rebanada buscada.

$\square$

Bibliografía

[1] H. Abels. Parallelizability of proper actions, global K-slices and maximal compact subgroups. *Mathematical Annals*, 212:1–19, 1974.

[2] H. Abels. A universal proper G-space. *Math. Z.*, 159(2):143–158, 1978.

[3] R. D. Anderson. Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72:515–519, 1966.

[4] S. Antonian. Retracts in categories of G-spaces. *Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR. Ser. Mat*, 15:365–378, 1980.

[5] S. Antonian. Equivariant embeddings into G-AR's. *Glasnik Matematički*, 22(42):503–533, 1987.

[6] N. Antonyan, S. Antonyan, and L. Rodríguez-Medina. Linearization of proper group actions. *Topology Appl.*, 156:1946–1956, 2009.

[7] S. Antonyan. Extensorial properties of orbit spaces of proper group actions. *Topology Appl.*, 98:35–46, 1999.

[8] S. Antonyan. Universal proper G-spaces. *Topology and Its Applications*, 117:23–43, March 2002.

[9] S. Antonyan. Orbit spaces and unions of equivariant absolute neighborhood extensors. *Topology and Its Applications*, 146–147:289–315, 2005.

[10] S. Antonyan and S. de Neymet. Invariant pseudometrics on Palais proper G-spaces. *Acta Math. Hungar.*, 98(1-2):59–69, 2003.

[11] S. Antonyan and Y. M. Smirnov. Universal objects and bicompact extensions for topological transformation groups. *Soviet Math. Doklady*, 23(2):279–284, 1981.

[12] S. A. Antonyan. Existence of a slice for arbitrary compact transformation groups. *Mat. Z.*, 56(5–6):101–104, 1994.

[13] S. A. Antonyan. Equivariant embeddings and free G-spaces. *Il VI^{sto} Simposio Tiraspoliano di Topologia Generale e sui Applicazioni*, pages 9–10, Institutul Pedagogio din Tiraspol, Chisinău, 1991.

[14] S. A. Antonyan. Equivariant extension properties of coset spaces of locally compact groups and approximate slices. *Topology Appl.*, to appear.

[15] S. A. Antonyan and J. de Vries. Tychonov's theorem for G-spaces. *Acta Math. Hung.*, 3–4(50):23–43, March 1987.

[16] K. Borsuk. *Theory of Retracts*. PWN, 1967.

[17] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*. Hermann, Paris, 1971.

[18] G. E. Bredon. *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press, New York, 1972.

[19] S. de Neymet. *Grupos topológicos de transformaciones*. Sociedad Matemática Mexicana, 2005.

[20] J. de Vries. *Elements of topological dynamics*, volume 257 of *Mathematics and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[21] J. Dugundji. An extension of tietze's theorem. *Pacific Journal Mathematics*, 1:353–367, 1951.

[22] E. Elfving. The G-homotopy type of proper locally linear G-manifolds. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss.*, (108):50, 1996.

[23] R. Engelking. *General Topology*. PWN, Warsaw, 1977.

[24] V. M. Gluškov. The structure of locally compact groups and Hilbert's fifth problem. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 15:55–93, 1960.

[25] O. Hájek. Parallelizability revisited. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 27(1):77–84, 1971.

[26] G. Hochschild. *The structure of Lie groups*. Holden-Day Inc., San Francisco, 1965.

[27] S. T. Hu. *Teory of Retracts*. Detroit, 1965.

[28] S. Illman. Every proper smooth action of a Lie group is equivalent to a real analytic action: a contribution to Hilbert's fifth problem. *Prospects in Topology: Proceedings of a Conference in honor of William Browder, Ann. of Math. Stud.*, 138:189–220, 1995.

[29] K. Kawakubo. *Topological Transformation Groups*. Oxford Academic Press, 1996.

[30] J. L. Koszul. Lectures on groups of transformations. *Tata Institute of Fundamental Research*, 1965.

[31] M. Megrelishvili. Topological transformation groups: selected topics. *in: Open Problems in Topology II*, pages 423–437, 2007.

[32] D. Montgomery and L. Zippin. *Topological transformation groups*. Robert E. Krieger Publ. Comp., Huntington, New York, 1974.

[33] G. D. Mostow. Equivariant embeddings in euclidean spaces. *Ann. Math.*, 65, 1957.

[34] R. S. Palais. *The classification of G-spaces*. Mem. Amer. Math. Soc. No. 36, 1960.

[35] R. S. Palais. On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups. *The Annals of Mathematics, 2nd Ser.*, 73(2):295–323, 1961.

[36] L. S. Pontryagin. *Selected works. Volume 2. Topological groups*. Classics of Soviet Math. Gordon & Breach Sci. Publ., new york-london-paris-montreux-tokyo edition, 1986.

[37] E. G. Skljarenko. On the topological structure of locally bicompact groups and their quotient spaces. *Amer. Math. Soc. Transl, Ser. 2*, 39:57–82, 1964.

[38] H. Toruńczyk. Characterizing Hilbert space topology. *Fund. Math.*, 61:247–262, 1981.

[39] J. E. West. Infinite products which are Hilbert cubes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 150:1–25, 1970.

Índice de Ejemplos

Índice de figuras

Índice alfabético