



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**TEORÍA DE LOS MERCADOS FRACTALES Y EL
MERCADO DE VALORES MEXICANO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**A C T U A R I A
P R E S E N T A:**

INDHIRA SUJUMI MELCHOR QUINTO



**DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. JESÚS AGUSTÍN CANO GARCÉS
2012**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Melchor
Quinto
Indhira Sujumi
56 41 99 23
Universidad Nacional Autónoma de México
Actuaría
304217777
2. Datos del asesor
M. en C
Jesús Agustín
Cano
Garcés
3. Datos del sinodal 1
Dra.
María del Pilar
Alonso
Reyes
4. Datos del sinodal 2
Act.
Enrique
Maturano
Rodríguez
5. Datos del sinodal 3
Act.
Alberto
Cadena
Martínez
6. Datos del sinodal 4
Dr.
Sergio
Hernández
Castañeda
7. Datos del trabajo escrito
Teoría de los mercados fractales y el mercado de valores mexicano
86 p.
2012

INTRODUCCIÓN	i
CAPÍTULO 1. TEORÍA FINANCIERA TRADICIONAL.....	1
1.1 Teoría de los mercados eficientes.....	2
1.1.1 Fundamentos de la eficiencia del mercado	4
1.1.2 Tipos de eficiencia en el mercado	4
1.2 Hipótesis del paseo aleatorio	6
1.2.1 Movimiento browniano	6
1.2.2 Cálculo estocástico	8
1.2.3 Lema de Itô.....	9
1.3 Black & Scholes.....	11
CAPÍTULO 2. TEORÍA DE LOS MERCADOS FRACTALES.....	15
2.1 Fractales y geometría fractal.....	15
2.2 Coeficiente de Hurts y el rango reescalado	19
2.2.1 Metodología del rango reescalado (R/S).....	20
2.2.2 Test de confianza del R/S y el coeficiente de Hurts	22
2.3 Ciclos periódicos y no periódicos	25
2.4 Hipótesis de los mercados fractales (HMF).....	26
2.5 Movimiento browniano fraccional.....	28
2.5.1 Producto Wick	30
2.6 Integral de Itô fraccional	31
2.7 Movimiento geométrico browniano fraccional	32
2.8 Fórmula fraccional de Itô	32
2.9 Fórmula de Black & Scholes fraccional para un call europeo	33
CAPÍTULO 3. EL MERCADO DE VALORES MEXICANO	35
3.1 Validación de supuestos.....	36
3.1.1 Normalidad e independencia.....	37
3.2 IPC.....	41
3.3 Valuación de opciones.....	43

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS FRACTAL	47
4.1 Análisis gráfico	48
4.2 Coeficiente de Hurts.....	50
4.3 Detección de crisis financieras	51
4.3.1 Análisis de fluctuaciones sin tendencia.....	53
4.3.2 Metodología del análisis de fluctuaciones sin tendencia	53
4.3.3 Análisis de fluctuaciones sin tendencia aplicado al pronóstico de crisis	54
CONCLUSIONES	57
ANEXO A. PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE	59
ANEXO B. CÓDIGOS	63
GLOSARIO	75
BIBLIOGRAFÍA	85

INTRODUCCIÓN

El hombre siempre ha intentado explicar el mundo que lo rodea valiéndose de distintas herramientas, sin embargo no siempre estas son las mejores debido a sus diferencias con respecto a la realidad.

A medida que pasa el tiempo se desarrollan nuevos métodos, se perfeccionan y surgen nuevas propuestas para la solución y explicación de los problemas que aquejan al ser humano. Este es el caso de la *Teoría de los Mercados Fractales*, teoría utilizada para explicar el comportamiento de los mercados.

Se recordará que anteriormente se desarrolló otra teoría con similar objetivo, la *Teoría Financiera Tradicional*, que engloba a la Teoría de los Mercados Eficientes y la Hipótesis del paseo aleatorio. Supone entre varias cosas que los precios reflejan toda la información existente en los mercados y que los rendimientos de los activos mantienen una distribución de probabilidad normal. Este tipo de supuestos ofrece grandes ventajas con respecto al análisis, reduciendo los cálculos al trabajar con movimientos brownianos tradicionales y distribuciones normales, las cuales poseen características y propiedades estadísticas deseables por los analistas financieros.

Desafortunadamente mediante el estudio de las series reales se ha encontrado que estos supuestos no todo el tiempo se cumplen. Se ha visto que a los rendimientos de los activos no siempre les es bien ajustada una distribución de probabilidad normal debido a que siguen distribuciones con colas pesadas, o peor aún, en ocasiones resulta ilógico pensar en la validez de estos supuestos, como en los casos en que suben o bajan los precios del mercado sin razón aparente rompiendo con la supuesta eficiencia en este, anomalías en el comportamiento como las llaman los defensores de la *Teoría Financiera Tradicional*. Como consecuencia, la *Teoría de los mercados Fractales* no requiere de ningún supuesto de tipo estadístico sobre los procesos, logrando de este modo la mejor adaptación al verdadero comportamiento de los mercados.

Debido a que el presente trabajo pretende realizar una comparación entre ambas teorías, en el capítulo I se describirá el desarrollo y los supuestos manejados por la *Teoría Financiera Tradicional*, tanto para el caso de la teoría de los mercados eficientes como para la teoría del paseo aleatorio.

Posteriormente en el capítulo II se dan a conocer dos herramientas matemáticas de gran importancia en el desarrollo de la teoría de los mercados fractales, el coeficiente de Hurts y la metodología del Rango Reescalado, ambos propuestos por Hurts.

El coeficiente de Hurts permite identificar si una serie financiera posee la cualidad de independencia, lo que significaría que se cumple con la eficiencia débil o dicho de otro modo que “el mercado no tiene memoria”. Como primer objetivo se analizarán un conjunto de series financieras reales con el fin de observar independencia o dependencia en ellas y de este modo verificar que realmente la eficiencia no está presente en todo momento en el mercado.

Para el desarrollo de la *Teoría de los Mercados Fractales* también es de suma importancia el movimiento browniano fraccional el cual será explicado a lo largo del capítulo II hasta llegar a la formación de la teoría completa.

Con la ayuda del movimiento browniano tradicional se ha logrado desarrollar resultados verdaderamente útiles en el tema de valuación de opciones, tal es el caso del método de Black & Scholes, sin embargo este se desarrolla bajo un escenario de independencia y normalidad, algo que como se comentó no siempre se tiene, por lo que bajo la *Teoría de los Mercados Fractales* y utilizando el movimiento browniano fraccional se desarrollarán resultados más generales, los que permitirán incorporar la posibilidad de dependencia de las series en el cálculo de valuación de opciones.

El objetivo del capítulo III es presentar resultados obtenidos bajo la aplicación de la *Teoría de los Mercados Fractales* y bajo la *Teoría Financiera Tradicional* en el contexto de valuación de opciones, esto con el fin de comprobar que no es necesario suponer independencia ni normalidad.

Con la eliminación de los supuestos estadísticos, la *Teoría de los Mercados Fractales* permite crear herramientas mejor adaptadas al comportamiento del mercado, muy útiles en el análisis de escenarios raros como las crisis, situaciones en las que la *Teoría Financiera Tradicional* no resulta ser muy factible debido al comportamiento extraño del mercado que rompe con los supuestos manejados en dicha teoría.

En el capítulo IV se darán a conocer los escenarios bajo los cuales es mejor la aplicación de la *Teoría de los Mercados Fractales*, posibles aplicaciones como la detección

temprana de una posible crisis financiera, y finalmente se darán las conclusiones generales en base a los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 1

TEORÍA FINANCIERA TRADICIONAL

El desarrollo de la teoría financiera representa un largo proceso a través de la historia. Para convertirse en como se conoce hasta, ahora tuvieron que pasar múltiples etapas consecuencia de las aportaciones realizadas por economistas, financieros, matemáticos y demás personas interesadas en explicar el comportamiento de los mercados.

Igualmente los analistas financieros desarrollaron una serie de supuestos sobre los que descansan sus teorías financieras. Entre los más importantes se tienen:

- *El comportamiento de los inversionistas.* Los inversores tratarán de maximizar el rendimiento, minimizar el riesgo y se considera que son adversos al riesgo, por lo que tratarán de evitarlo si tienen la posibilidad. Un ejemplo en donde se hace uso de este supuesto es la teoría de las carteras, en la cual para realizar una óptima elección es necesaria la comparación entre los valores esperados de los diversos portafolios en conjunto con la revisión de la desviación estándar para contemplar el riesgo asumido al elegir dicho portafolio.
- *Eficiencia en los mercados.* Supone que un mercado es eficiente si los precios de los activos reflejan toda la información existente en ellos. Este supuesto engloba otros aspectos por lo que se tienen tres tipos de eficiencia y es considerado como uno de los pilares de la teoría financiera y como un caso particular de la teoría de los mercados fractales.
- *El paseo aleatorio.* Los rendimientos de los activos siguen una caminata aleatoria, por lo que su distribución de probabilidad se aproximará a una normal o a una normal-logarítmica. Este supuesto ha logrado el desarrollo de una gran cantidad de resultados en econometría y finanzas, como por ejemplo en valuación de opciones.

Debido a que la teoría de los mercados fractales sino se contrapone por completo, si contempla estos dos últimos supuestos como un caso particular, por lo que será necesario describirlos con detalle.

1.1. Teoría de los Mercados Eficientes

Esta teoría sin duda cambió completamente la visión manejada hasta los años setenta, cuando Eugene Fama introdujo por primera vez la relación entre mercados y eficiencia en su artículo “Efficient Capital Markets: a Review of Theory and Empirical Work”¹, donde además incluía las definiciones de las tres formas de eficiencia del mercado financiero.

Sin embargo, existen personas que opinan que la única aportación de Fama fue ligar ambos conceptos y cambiar el nombre a una teoría ya conocida donde se propone la existencia de un juego equitativo y un modelo de paseo aleatorio seguido por las series financieras en el cual no puede haber ganancias en la Bolsa propuesta unos años antes por Bachelier².

Introduciendo el concepto de eficiencia, se considera que un mercado es eficiente si toda la información es igualmente accesible para un comprador o vendedor que para otros, en consecuencia los precios de los activos determinados en base a la oferta y a la demanda reflejarán toda esta información, por lo que el precio de cualquier activo será una buena estimación de su *valor intrínseco*³.

1.1.1. Fundamentos de la eficiencia del mercado

Andrei Shleifer⁴ afirma que existen tres condiciones y que cualquiera de ellas conducirá a la eficiencia, éstas son:

¹ Fama publicó su artículo en el año de 1970, donde define a un mercado de capitales eficientes como un mercado donde el precio de los activos refleja la información disponible.

² Louis Bachelier, matemático francés, en su ensayo “Théorie de la speculation” desarrolló por primera vez en 1900 la hipótesis del mercado eficiente, pero su trabajo fue ignorado hasta 1960, cuando Paul Samuelson comenzó a difundirlos.

³ En opciones el valor intrínseco es la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio del activo subyacente. El término en ocasiones se utiliza en otros contextos para hacer referencia al valor por debajo del cual no debe caer el precio del instrumento, debido a que si es menor habría posibilidad de arbitraje.

⁴ Shleifer Andrei, *Inefficient Markets: An introduction to behavioral finance*, Oxford University Press, Oxford Reino Unido, 2000.

- ✓ Racionalidad. Esta primera condición sugiere que todos los inversionistas sean racionales, lo que implicaría que al haber alguna información nueva en el mercado automáticamente al ser “racionales” ajustarían sus estimaciones de los precios.

- ✓ Desviaciones independientes de la racionalidad. Si bien es mucho pedir que todos los inversionistas sean racionales, basta con que exista un equilibrio entre racionalidad e irracionalidad.

La información poco clara o inconclusa que se da a conocer en el mercado puede provocar dos tipos de actitud en los inversionistas. Existen los pesimistas que subestimarán el cambio en el precio y por el otro lado los optimistas que lo sobreestimarán. Si los primeros se imponen sobre los segundos el precio tal vez cambie menos de los que predice la eficiencia del mercado y viceversa si se imponen los segundos. Pero si no se impone ninguno de los dos es probable que los precios cambien en forma consistente con la eficiencia de mercado.

- ✓ Arbitraje. Se supone que en el mercado existen sólo dos tipos de personas, los amateurs irracionales y los profesionales racionales. Si el arbitraje de los profesionales domina la especulación de los amateurs, los mercados seguirán siendo eficientes. Dicho de otro modo, al especular los amateurs existirá un cambio en los precios dando cabida a las estrategias de arbitraje, pero al existir arbitraje por medio de los profesionales automáticamente se eliminarán dichos cambios en los precios regresando a la eficiencia.

Es muy difícil que se den las condiciones para que exista eficiencia en el mercado, ya que los inversionistas podrían ser entes irracionales, la irracionalidad podría relacionar a los inversionistas y propagarse entre éstos en lugar de cancelarse y con respecto a la tercera condición, las estrategias de arbitraje podrían no eliminar las ineficiencias del mercado lo que no cancelaría arbitraje con la actividad de los amateurs.

1.1.2. Tipos de eficiencia en el mercado

La información puede afectar en mayor o menor medida los precios, de ahí que los investigadores propongan la siguiente clasificación por tasa de respuesta:

- *Mercado con eficiencia débil.* Es aquel en donde las series históricas de precios no aportan información suficiente como para predecir el precio futuro de la acción debido a que esta información ya está incorporada en el precio. Dicho de otro modo el mercado no tiene memoria.

Por ejemplo, se supondrá una estrategia que consista en vender una acción después de haber registrado tres días a la baja y comprarla de haber registrado tres días a la alza y suponiendo también que el mercado es débilmente eficiente entonces será imposible generar ganancia alguna con la estrategia descrita anteriormente debido a que se basa únicamente en la información histórica de los precios.

Con frecuencia la forma débil de eficiencia es representada matemáticamente así:

$$P_t = P_{t-1} + \text{rendimiento esperado} + \text{error aleatorio}$$

Donde

P_t Es el precio de la acción en el tiempo t y el error aleatorio tendrá un valor esperado de cero y será independiente del error aleatorio en cualquier otro periodo de tiempo. Debido a la representación matemática anterior asignada a este tipo de eficiencia se dice que sigue el comportamiento de una caminata aleatoria.

- *Mercado con eficiencia semifuerte.* La eficiencia semifuerte sostiene que es imposible predecir los precios de las acciones aunque se cuente con la información histórica y la disponible para el público inversionista debido a que los precios de las acciones ya contemplan toda esta información.

- *Mercado con eficiencia fuerte.* Los mercados se clasifican como fuertemente eficientes si los precios reflejan toda la información que circula en este, incluyendo información de carácter confidencial, es decir, información interna de la empresa. Esto puede llevarnos a pensar que incluso los propios jefes de la empresa no podrían utilizar esta información para producir ganancias extraordinarias.

Para que un mercado sea eficiente no solo debe cumplir alguna de las características anteriores, es necesario contemplar que la mercancía que se va a intercambiar sea homogénea, exista una gran cantidad de inversionistas, tanto de compradores como vendedores y por último que no sea muy complicado entrar y salir del mercado.

Los defensores de la eficiencia débil en los mercados utilizan las correlaciones en serie, correlaciones entre el rendimiento de ayer con el rendimiento de hoy, si éstas son cercanas a cero se puede pensar en que el mercado posee eficiencia débil.

Si se quiere probar la existencia de la forma semifuerte se hace uso del estudio de eventos, por lo que es necesario realizar el análisis del comportamiento del precio de las acciones días antes y días después de realizar un anuncio importante para el precio. Las finanzas conductuales igualmente analizan estos eventos para demostrar la no existencia de dicha eficiencia, ya que muchas veces tardan mucho tiempo, incluso años, en incorporar este tipo de anuncios al precio. Este tipo de finanzas también han encontrado inconsistencias con la supuesta eficiencia en los mercados, tal es el caso de las caídas y burbujas⁵, los rendimientos extraordinarios, los rendimientos no consistentes con las razones financieras, entre otros.

En cuanto a la forma fuerte de eficiencia es difícil creer que una persona con información privilegiada no pueda ocuparla para obtener mejores rendimientos, por lo que empíricamente este tipo de eficiencia resulta aún más difícil de presentarse.

⁵Como ejemplo se tiene la caída del mercado de valores del 19 de octubre de 1987, donde el mercado cayó entre 20% y 25% un lunes después de un fin de semana en el que hubo pocas noticias relevantes. Otro ejemplo, la conducta de las acciones de internet cuyo índice aumentó más de diez veces desde enero de 1996 hasta marzo del 2000 y después regresó a su nivel normal en 2002.

El conjunto de información de los precios históricos de las acciones es un subconjunto de la información pública disponible, y ésta a su vez es un subconjunto de toda la información relevante de las acciones, por lo que la eficiencia fuerte incluye a la eficiencia semifuerte y esta incluye a la forma débil. En resumen la teoría de los mercados eficientes conduce a que es imposible obtener una ganancia superior a la medida en el largo plazo tratando de calcular los precios de mercado, no se le puede ganar al mercado.

1.2. Hipótesis del paseo aleatorio

Desde mediados del siglo XVII Sir William Petty introdujo los métodos estadísticos en el estudio de la economía, sin embargo fue hasta 1900 cuando Louis Bachelier aportó a esta disciplina la *hipótesis del paseo aleatorio*. Bachelier expuso que las variaciones en los precios o rendimientos son independientes y siguen una distribución gaussiana o normal, además dijo que los precios mostraban aleatoriedad en su comportamiento, es decir seguían una caminata aleatoria, lo cual no permitía la predicción de los precios futuros e implicaba que la ganancia esperada fuera cero. Esta aportación marcó un gran cambio en la modelación de los mercados financieros que incluso se mantiene vigente hasta el día de hoy.

Sin duda el trabajo de Bachelier fue el pionero en la introducción de lo que hoy se conoce como movimiento Browniano en la modelación de las series financieras pero posteriormente estos primeros estudios fueron perfeccionados y enriquecidos entre otros por Norbert Wiener (1920-1923), Paul Levy (1886-1971), Andrey Kolmogorov (1938), Black & Scholes (1975-1976) y Kiyosi Itô (1940-1946).

1.2.1. Movimiento Browniano

En el año de 1827 el botánico Robert Brown⁶ observando las partículas de polen encontró que cuando éstas se encontraban suspendidas en agua mostraban un comportamiento peculiarmente errático. A principios del siglo XX se demostró que este movimiento, al que después se le llamaría *browniano* gracias a su descubridor, se debía al choque entre las partículas de agua y polen.

⁶Brown Robert, 1828. A Brief Account on the particles contained in the pollen of plants and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies.

En 1905, Albert Einstein escribió un artículo acerca de mecánica estadística donde establece las bases matemáticas del movimiento browniano. Sin embargo adelantándose a Einstein, en 1900 Bachelier en su tesis doctoral *Théorie de la speculation* fue el primero en plantear la hipótesis del paseo aleatorio.

Bachelier enfocó el movimiento browniano a un campo completamente distinto al de las partículas de polen y modeló el comportamiento aleatorio del precio de las acciones de la bolsa de París, pero debido a la enorme influencia de Albert Einstein su trabajo no se divulgó sino hasta que Paul Samuelson⁷, sesenta años después lo difundió.

El movimiento browniano (M.B) se puede ver como la versión continua de la caminata aleatoria⁸ en un intervalo $[0, t]$ cuando le es aplicado el teorema del límite central, por lo que le son heredadas las propiedades de Markov y Martingala. Otra forma para definirlo es:

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad fijo, el M.B estándar y unidimensional es una función

$$W: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R$$

tal que para $t \geq 0$, la función $W(t, \cdot): \Omega \rightarrow R$ es una variable aleatoria definida en (Ω, \mathcal{F}) y para $w \in \Omega$ la función es continua en $[0, \infty)$. La familia de variables aleatorias $W(t, \cdot)$ es comúnmente denotada como $\{w_t\}_{t \geq 0}$ y además cumplirá con las siguientes características:

- i) $W_0 = 0$, o dicho de otro modo el proceso empieza en $t=0$.
- ii) Para cualquier conjunto de tiempos, tales que $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$, los incrementos $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son estocásticamente independientes.
- iii) Para cualquier par de tiempos t y s con $0 \leq s < t, W_t - W_s \sim N(0, t - s)$

⁷ Samuelson Paul, 1965. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. Industrial Management Review 6.

⁸ Una caminata aleatoria cumple la propiedad de Markov y la de Martingala, es decir, si S_n es la ganancia acumulada al tiempo n , la esperanza condicional de esta variable aleatoria dados sus valores pasados depende únicamente de S_{n-1} y dicha esperanza será igual a S_{n-1} , la ganancia acumulada al tiempo $n-1$.

Sin duda el M.B es la base en la modelación de las variables financieras, sin embargo, algunos como los precios de los activos no se adaptan bien a un M.B estándar debido a que el precio inicial no es cero, tienen incrementos con medias distintas a cero y sus varianzas no son proporcionales al tiempo. Para este tipo de variantes surge el *movimiento browniano geométrico*, el cual es una transformación exponencial del M.B estándar obtenido de la siguiente manera:

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right]$$

Donde S_0 será el precio inicial del activo, μ es una constante llamada tendencia, σ será una constante positiva mejor conocida como volatilidad y W_t es un M.B estándar.

Este proceso es frecuentemente utilizado para describir el rendimiento del precio de un activo debido a que si le es aplicado logaritmo natural seguirá una distribución normal con

$$E(\ln(S_t)) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \text{ y } Var(\ln(S_t)) = \sigma^2 t$$

1.2.2. Cálculo estocástico

El movimiento browniano es considerado la piedra angular del cálculo estocástico, herramienta sumamente necesaria en la modelación estocástica a tiempo continuo de los mercados financieros. La principal herramienta del cálculo estocástico es la integración y se basa en la siguiente expresión

$$\int_0^t (dW_s)^2 = t$$

De la cual deriva la integral estocástica o de Itô, definida de la siguiente manera

$$V_t = \int_0^t f(S) dW_s$$

que es el proceso estocástico tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - V_t \right]^2 = 0$ donde $\{W_s\}_{s \geq 0}$ es un M.B estándar.

La función $f(s)$ puede ser determinista o estocástica, pero es muy importante que la evaluación se haga en t_{i-1} . Para el caso de finanzas esto garantiza que la evaluación dependerá del pasado y no de las acciones futuras.

La integral de Itô tiene las siguientes propiedades:

Si f y g son tales que sus integrales de Itô existen y α y $\beta \in \mathbb{R}$ entonces:

1) *Linealidad*

$$\int_0^t (\alpha f(s) + \beta g(s)) dW_s = \alpha \int_0^t f(s) dW_s + \beta \int_0^t g(s) dW_s$$

2) *Isometría*

$$E \left[\left(\int_0^t f(s) dW_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t f(s)^2 ds \right] = \int_0^t E[f(s)^2] ds$$

3) *Propiedad de Martingala*

$$E \left[\int_0^t f(s) dW_s \mid \mathcal{F}_u \right] = \int_0^u f(s) dW_s$$

La integral de Itô permitirá el planteamiento de otro importante resultado, el *Lema de Itô*, el cual será sumamente necesario en el desarrollo de los modelos de Black & Scholes para el caso de valuación de opciones, que es precisamente a donde se quiere llegar en este recorrido por la evolución de la teoría financiera tradicional.

1.2.3. Lema de Itô

Para el desarrollo de este lema se debe considerar la siguiente integral estocástica:

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu(S_u, u) du + \int_0^t \sigma(S_u, u) dW_u \quad (1.1)$$

La cual vista desde su forma diferencial sería:

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t$$

Y donde $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un M.B definido sobre un espacio fijo de probabilidad conjuntamente con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Para asegurar que la expresión (1.1) tiene una única solución, S_t , adaptada a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, se requiere que $\mu(S_t, t)$ y $\sigma(S_t, t)$ satisfagan la condición global de Lipschitz, enunciada de la siguiente manera:

$$|\mu(x, t) - \mu(y, t)| \leq k|x - y| \quad \forall t \in [0, \infty) \quad y \quad x, y \in \mathbb{R}$$

y con la condición de incremento

$$\mu^2(x, t) + \sigma^2(x, t) \leq k(1 + x^2) \quad \forall t \in [0, \infty) \quad y \quad x \in \mathbb{R}$$

Además, con el fin de que la media y la varianza del proceso (1.1) estén bien definidas, se requiere satisfacer las siguientes condiciones de integrabilidad, casi donde quiera con respecto de \mathbb{P}

$$\int_0^\infty |\mu(S_t, t)| dt < \infty \quad y \quad \int_0^\infty \sigma^2(S_t, t) dt < \infty$$

Bajo las condiciones anteriores se puede asegurar la existencia de un sólo proceso S_t , adaptada a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, con media y varianza finitas, condicionales a la información de \mathcal{F}_0 , dadas respectivamente por:

$$E(S_t | \mathcal{F}_0) = S_0 + \int_0^t \mu(S_u, u) du \leq \int_0^\infty |\mu(S_t, t)| dt < \infty \quad y \quad Var(S_t | \mathcal{F}_0) = \int_0^t \sigma^2(S_u, u) du$$

Ahora si se tiene a $y = f(S_t, t)$ y se le calcula su diferencial mediante su expansión de Taylor de segundo grado correspondiente se tendría:

$$dy = \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial S_t \partial t} (dS_t)(dt) + \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial t^2} (dt)^2 \right]$$

Sustituyendo dS_t

$$\begin{aligned} dy = & \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} (\mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t) \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (\mu^2(S_t, t)(dt)^2 + 2\mu(S_t, t)\sigma(S_t, t)(dt)(dW_t) + \sigma^2(S_t, t)(dW_t)^2) \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t} (\mu(S_t, t)(dt)^2 + \sigma(S_t, t)(dW_t)(dt)) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right] \end{aligned}$$

Y recordando las reglas básicas del cálculo estocástico⁹ se llega al siguiente desarrollo:

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t} \mu(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2(S_t, t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma(S_t, t) dW_t$$

Entonces a

$$y_t = y_0 + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial S_u} \mu(S_u, u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_u^2} \sigma^2(S_u, u) \right) du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial S_u} \sigma(S_u, u) dW_u$$

Bajo el supuesto de que y tiene segundas derivadas parciales continuas se le conoce como el *Lema de Itô*.

1.3. Black & Scholes

A principios de la década de los setentas, Fisher Black y Myron Scholes publicaron en su artículo "The pricing of options and corporate liabilities" un modelo para valuación de opciones europeas sobre una acción que no paga dividendos y la cual sigue un comportamiento browniano geométrico. Dicho modelo se desarrolla bajo condiciones de equilibrio, es decir, de no arbitraje y está basado en una ecuación diferencial parcial de segundo orden, lineal y cuya solución es el precio de la opción europea. Esta ecuación es la base para el cálculo del precio de muchos productos derivados hoy en día, por lo que es muy conocida en todo el sector financiero.

⁹ $(dt)^2 = 0, (dt)(dW_t) = 0, (dW_t)^2 = dt$

Black y Scholes desarrollan su modelo bajo las siguientes condiciones ideales de los mercados de acciones y opciones:

- ✓ El activo subyacente es una acción que no paga dividendos a lo largo de la vida del contrato.
- ✓ El precio de la acción sigue el comportamiento de un movimiento browniano geométrico.
- ✓ La volatilidad del precio de la acción es constante a través del tiempo.
- ✓ Se permite la realización de ventas en corto¹⁰ donde se involucre al activo subyacente
- ✓ El activo subyacente es fácilmente adquirible o vendible, dicho de otro modo su mercado es líquido y divisible
- ✓ No existen las comisiones y los impuestos
- ✓ El mercado opera de forma continua, por lo que no se contemplan los fines de semana y días festivos.
- ✓ Existe un sistema bancario donde los agentes pueden prestar y pedir prestado siempre y cuando se haga a una tasa de interés constante para todos los plazos y libre de riesgo, evitando de esta manera una ganancia por alguna posible diferencia de tasas.
- ✓ La información disponible es la misma para todos los agentes.
- ✓ Existe equilibrio en los mercados por lo que no hay posibilidades de arbitraje.

¹⁰ La venta en corto es una operación en un mercado financiero que implica la venta de un título que no se posee, la cual se cubre por la compra del mismo a una fecha posterior con la expectativa de conseguirlo en un precio menor al precio de venta.

Bajo los supuestos anteriores el precio de una opción europea dependerá del precio de ejercicio (K), la fecha de vencimiento (T), el precio de contado de la acción en el momento de la valuación de la opción (S_t), la volatilidad del precio del activo subyacente (σ) y la tasa de interés (r).

Bajo un desarrollo algebraico¹¹ Black y Scholes presentan la siguiente fórmula para el cálculo del precio de una opción call europea tradicional:

$$c(S_t, t) = S_t \varphi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \varphi(d_2)$$

donde φ es la función de distribución de una variable normal estándar y

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Existen otros modelos para valuar opciones, como por ejemplo el de Samuelson o el de Robert Merton, sin embargo el de Black & Scholes marcó un gran cambio en el mercado de opciones y acciones debido a que bajo este el precio de la opción únicamente dependerá del precio actual de la acción, del tiempo de vencimiento del contrato y de un conjunto de constantes.

¹¹ Para mayor referencia consultar *Riesgos Financieros y Económicos: productos derivados y decisiones económicas*, Venegas Martínez Francisco.

CAPÍTULO 2

TEORÍA DE LOS MERCADOS FRACTALES

La cultura proveniente de Europa ha estado obsesionada con la simetría, de ahí que los antiguos griegos utilizaran formas de este tipo para describir el mundo que habitaban. Platón decía que el mundo real consistía de formas perfectas creadas por el bien y que este mundo era una copia imperfecta de ese mundo, creada por otra entidad llamada Demiurgo, por lo que el problema en esencia no era la geometría, formalizada posteriormente por Euclides, sino el mundo en el que se vivía.

La geometría Euclideana es capaz de recrear la parte simétrica de un objeto pero no la complejidad de su estructura interna, por ejemplo, en un árbol podrá replicar su estructura global en base a triángulos sin embargo no podrá asemejar lo complejo de una de sus ramas.

El no poder replicar objetos, principalmente orgánicos, es uno de los problemas que enfrenta la geometría Euclideana, pero no el único, también existe un problema de dimensión, ya que la percepción de dimensión puede cambiar dependiendo de la distancia a la que se encuentra el objeto. Es por esto que surge la geometría fractal, capaz de describir y crear modelos más cercanos al mundo real, además de distinguirse por una aproximación más abstracta a la dimensión de la que caracteriza a la geometría convencional.

2.1. Fractales y geometría fractal

Benoit Mandelbrot¹² es considerado el padre de la geometría fractal, pero incluso el no logró definir con precisión lo que es un fractal. Pese a eso, es posible mencionar algo de ellos.

¹² Mandelbrot sostuvo que los fractales en muchos aspectos son más naturales y por lo tanto mejor comprendidos intuitivamente por el hombre que los objetos basados en la geometría euclideana que han sido suavizados artificialmente.

Los fractales son objetos matemáticos base de la geometría del caos. Por la manera de ser construidos los objetos fractales se pueden clasificar en dos clases:

Lineales. Son aquellos construidos a través de variaciones en la escala, haciéndolos de esta manera idénticos al aumentar o disminuir esta. Algunos ejemplos son el conjunto de Cantor, el conjunto Von Koch (copo de nieve) y el triángulo de Sierpinski.

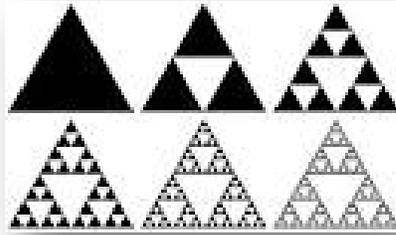


Fig.1 Triángulo de Sierpinski

No lineales. Este tipo de fractales son generados, como su nombre lo indica, a partir de distorsiones complejas o no lineales. Como ejemplos se tienen al conjunto de Mandelbrot y al conjunto de Julia.

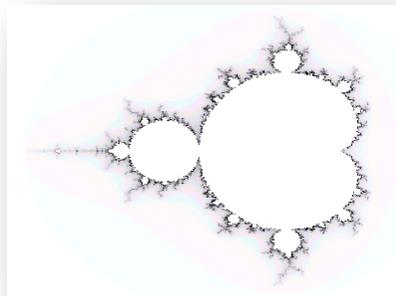


Fig. 2 Conjunto de Mandelbrot

Los fractales poseen dos características esenciales:

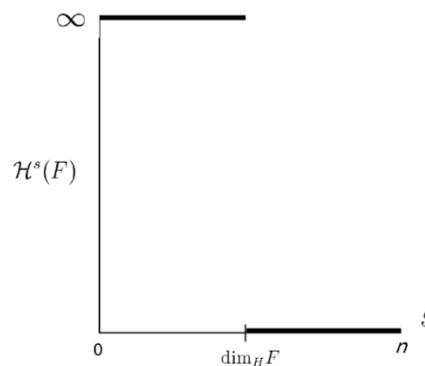
Autosimilaridad. Es la propiedad más importante de los fractales, debido a que ésta los hace invariantes en la escala, dicho de otro modo, significa que cada una de sus partes posee las mismas características del objeto completo.

Dimensión Fractal. La más antigua forma de medir la dimensión fractal es la dimensión de Hausdorff, denotada por H^s .

Para todo conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ existe $S_0 \leq n$ con la siguiente propiedad:

$$H^s(U) = \begin{cases} \infty & \text{para } s < S_0 \\ 0 & \text{para } s > S_0 \end{cases}$$

Al graficar H^s contra s se puede observar que existe un valor de s para el cual H^s pasa de ∞ a 0



Por lo que para el cálculo de la dimensión de Hausdorff se tiene que hacer referencia a la siguiente expresión:

$$\dim_H(U) := \sup\{s: H^s(U) = \infty\} := \inf\{s: H^s(U) = 0\}$$

Ligando el concepto de objeto fractal y dimensión, se puede decir que un objeto fractal es aquel cuya dimensión fractal de Hausdorff supera a su dimensión topológica¹³ y la cual no es un número entero. El concepto de dimensión fractal no solo aplica para los objetos, puede ser extendible al tiempo. Para el caso de una serie de tiempo la dimensión fractal mide la duración de sus ciclos.

¹³ La dimensión topológica del conjunto vacío es de -1, de un punto es 0, de una línea es 1, de un plano es 2 y de un cuerpo en el espacio es 3.

Al basarse en esta idea la dimensión fractal de una serie puede ser obtenida de la siguiente manera:

$$N(2r)^d = 1$$

donde

N= número de círculos necesarios para cubrir la serie

r= radios de los círculos

d= dimensión fractal

Por lo que al realizar el despeje correspondiente se tendrá que la siguiente expresión arrojará la dimensión fractal buscada:

$$d = \log(N) / \log\left(\frac{1}{2r}\right)$$

Se sabe que la dimensión fractal de una línea es 1 y la de una caminata aleatoria es de 1.5, de ahí que si la serie tiene una dimensión fractal entre 1 y 1.5 es más que una línea pero menos que una caminata aleatoria¹⁴.

Para una serie de tiempo se pueden incrementar los radios o el tiempo y posteriormente realizar el conteo de los círculos necesarios para cubrir la serie como función del incremento en el tiempo, por lo tanto es posible ver a la dimensión fractal de una serie de tiempo como una función de la escalación del tiempo.

Además de la autosimilaridad y la dimensión fractal en un fractal coexisten la aleatoriedad local y el determinismo global. Con base en lo anterior se puede hacer una relación con los mercados ya que estos pueden ser localmente aleatorios pero globalmente poseen una estructura estadística determinística por lo que la teoría tradicional únicamente podría sustentar la aleatoriedad local existente en ellos. En consecuencia efectivamente no se pueden predecir movimientos en el mercado a corto plazo pero sí movimientos a largo plazo analizando su todo determinista.

¹⁴ Para mayor referencia consultar "Fractal Markets Analysis", Peters.

2.2. Coeficiente de Hurts y el Rango reescalado

Con anterioridad se mencionó la coexistencia de aleatoriedad y determinismo en el mercado. Ahora es necesario plantearse una nueva interrogante, ¿cuándo una serie financiera puede catalogarse como aleatoria y cuándo no?

En el capítulo tres se mostrará que las distribuciones de probabilidad de los rendimientos son poco adaptables a una distribución normal por lo que será necesario definir metodologías no paramétricas.

El método no paramétrico fue descubierto por H. E. Hurts, quien en 1951 publicó “The long-term storage capacity of reservoirs”, donde exhibe una nueva metodología estadística para distinguir series de tiempo aleatorias de series de tiempo fractales, llamado análisis del Rango Reescalado (R/S).

Hurts conocía el trabajo de Einstein acerca del movimiento browniano y también estaba bien enterado de sus resultados, por lo que los utilizó para el desarrollo del Rango Reescalado.

Einstein afirmaba de acuerdo a sus observaciones que la distancia recorrida por una partícula errática suspendida en un fluido se incrementa con la raíz cuadrada del tiempo, que expresado de forma matemática puede verse de la siguiente manera

$$R = T^{0.50}$$

Donde

R= distancia

T= tiempo

La expresión anterior es conocida actualmente como la regla de un medio y en el campo financiero es utilizada para anualizar la volatilidad asumiendo que la dispersión de los rendimientos se incrementa con la raíz cuadrada del tiempo.

Para que este concepto sea extendible a series de tiempo no brownianas se debe considerar una ecuación que tome en cuenta que los componentes de las series de tiempo no son independientes. Hurts planteó la siguiente ley de potencia:

$$(R/S)_n = cn^H$$

Donde

$(R/S)_n = \text{estadístico Rango Reescalado}$

$c = \text{constante}$

$n = \text{numero de observaciones de la serie de tiempo}$

$H = \text{coeficiente de Hurts.}$

2.2.1. Metodología del Rango reescalado(R/S)

Para el cálculo del Rango Reescalado de una serie se debe seguir la siguiente metodología:

Se supondrá que se tiene una serie $x = x_1, \dots, x_n$ donde cada x_i es el rendimiento i -ésimo del precio de una acción. Por otro lado X_m y S_n serán la media y la desviación estándar muestral de los x_i respectivamente obtenidas de la forma general, es decir:

$$X_m = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad S_n = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - X_m)^2}{n} \right)^{1/2}$$

El periodo de tiempo de la serie en este caso es n , el cual será dividido en K subperiodos contiguos de longitud l , tal que $K \cdot l = n$. Cada uno de estos subperiodos se renombrará como I_k con $k=1,2, \dots, K$. Ahora cada uno de los elementos en I_k es etiquetado como $X_{j,k}$ con $j = 1,2, \dots, l$ y para cada subperiodo I_k de longitud l , el valor promedio estará dado por:

$$e_k = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l X_{j,k}$$

A continuación se creará una nueva serie $Z_{j,k}$ la cual tendrá media cero y se obtendrá de este modo:

$$Z_{j,k} = X_{j,k} - e_k \quad j = 1, 2, \dots, l \quad y \quad k = 1, 2, \dots, K$$

El siguiente paso es crear una serie acumulativa donde

$$Y_{b,k} = \sum_{j=1}^b Z_{j,k} \quad b = 1, 2, \dots, l$$

Entonces el rango ajustado R_{I_k} es:

$$R_{I_k} = \text{máx}(Y_{1,k}, \dots, Y_{l,k}) - \text{mín}(Y_{1,k}, \dots, Y_{l,k})$$

Dicho rango ajustado siempre será no negativo debido a que como $Z_{j,k}$ fue ajustado a una media de cero, el $\text{máx}(Y_{1,k}, \dots, Y_{l,k})$ siempre será mayor o igual a cero y el $\text{mín}(Y_{1,k}, \dots, Y_{l,k})$ siempre será menor o igual a cero. Este rango ajustado es la distancia que el sistema viaja por un tiempo l .

Ahora se calculará la desviación estándar muestral S_{I_k} para cada subperiodo de la siguiente manera:

$$S_{I_k} = \left(\frac{1}{l} \sum_{j=1}^l (Z_{j,k})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Posteriormente es necesario normalizar el rango ajustado dividiéndolo entre su desviación estándar para que de esta manera se puedan comparar periodos de tiempo entre los cuales existe un gran número de años y minimizar el problema de que exista mayor volatilidad en un periodo que en otro. Por lo tanto el Rango Reescalado para cada subperiodo I_k es igual a R_{I_k}/S_{I_k} . Como existen K subperiodos de longitud l entonces se toma como valor del R/S para periodos de longitud l al valor obtenido de la siguiente expresión

$$(R/S)_l = \left(\frac{1}{K} \right) \sum_{K=1}^l (R_{I_k}/S_{I_k})$$

La longitud l se incrementa al siguiente valor posible de tal forma que $\frac{n}{l}$ sea entero. Se inicia con el valor más pequeño que cumpla con la condición anterior y se sigue hasta que $l = \frac{n}{2}$, utilizando siempre la serie completa.

Realizando un simple cambio de variables, ahora es necesario recordar que Hurts planteó la siguiente ecuación

$$(R/S)_l = cl^H \quad (2.1)$$

entonces

$$\log(R/S)_l = \log(c) + H\log(l)$$

Al compararla con la ecuación de una línea recta, la ordenada al origen es el $\log(c)$ y la pendiente es la estimación del exponente de Hurts.

De acuerdo al valor de H obtenido, si $H = 0.50$ implicaría que el proceso es independiente. Si $0.50 < H \leq 1$ implica que la serie es persistente y es caracterizada por efectos de memoria a largo plazo. Este tipo de sistemas son más comunes en el mundo económico y en los mercados.

Por otro lado, si $0 \leq H < 0.50$ se tiene un caso de antipersistencia, es decir, el sistema cubre menos distancia que uno aleatorio, lo que quiere decir que retrocede con mayor frecuencia.

2.2.2. Test de confianza del R/S y el Coeficiente de Hurts

Una vez obtenido el cálculo del coeficiente de Hurts para una serie de tiempo el siguiente paso es determinar que tan confiable es ese resultado. El mejor camino para verificar si los resultados son significativos son las famosas pruebas de significancia o test de confianza.

Para esta prueba se tomará como hipótesis nula una estructura gaussiana, la cual será independiente, idénticamente distribuida (iid) y caracterizada por una caminata aleatoria, esto debido a que este modelo ya ha sido altamente estudiado y son bien conocidas sus características.

Entonces para el caso Gaussiano, donde el coeficiente de Hurts es igual a 0.5, la ecuación (2.1) se transforma en:

$$(R/S)_n = (n^{\pi/2})^{0.50} \text{ donde } n = \text{número de observaciones}$$

La prueba de significancia para el R/S será similar a las pruebas “t” utilizadas en las regresiones lineales, por lo que es necesario calcular el valor esperado y la varianza del rango ajustado.

Feller encontró las siguientes formulas para dichos cálculos, anteriormente Hurts llegó a las mismas, sin embargo el basó su hipótesis nula en una distribución binomial.

$$E(R'(n)) = (n^{\pi/2})^{0.50} \tag{2.2}$$

$$Var(E(R'(n))) = n(\pi^2/6 - \pi/2) \tag{2.3}$$

Bajo simulaciones de Monte Carlo se puede ver que para n grande (mayores a 20) convergen a las expresiones (2.2) y (2.3), sin embargo para n pequeña la variación es considerablemente grande, en consecuencia Anis y Lloyd desarrollaron la siguiente ecuación en 1976 para evitar la desviación en muestras pequeñas

$$E(R/S_n) = \left[\Gamma\{0.5 * (n - 1)\} / (\sqrt{\pi} * \Gamma(0.5 * n)) \right] * \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{\frac{(n-r)}{r}} \tag{2.4}$$

La ecuación (2.4) resulta funcionar muy bien para los valores pequeños de n pero lamentablemente presenta problemas para valores grandes debido a que los valores de la gamma son demasiado grandes superando la capacidad de las computadoras para procesarlos. Pero si se usa la fórmula de Stirling¹⁵ la ecuación puede simplificarse en

$$E(R/S_n) = (n * \pi/2)^{-0.50} * \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{\frac{(n-r)}{r}}$$

Y esta ecuación puede ser usada con n>300. Cuando n tiende a infinito se aproximará a la ecuación (2.2). La complicación con esta ecuación surge nuevamente para valores menores a 20. Debido a esto Peters¹⁶ desarrolló la siguiente corrección a la fórmula de Anis y Lloyd

$$E(R/S_n) = \left((n - 0.5)/n \right) * (n * \pi/2)^{-0.50} * \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{\frac{(n-r)}{r}} \quad (2.5)$$

Usando la ecuación (2.5) es posible obtener los valores esperados del coeficiente de Hurts y los valores obtenidos son muy cercanos a los valores simulados del R/S.

Bajo las simulaciones realizadas del R/S para series de tiempo aleatorias Peters observó que los valores de este se distribuyen de forma normal, por lo que se espera que los valores de H sigan la misma distribución. En base a esto la varianza esperada del coeficiente de Hurts será calculada así:

$$Var(H)_n = 1/T$$

¹⁵La fórmula de Stirling es una aproximación para factoriales grandes. La aproximación se expresa como $\ln n! \approx n \ln n - n$ para n grande.

¹⁶ Peters, E., Fractal Market analysis, Applying Chaos Theory to investment an economic, New York, John Wiley and sons, Pàg 71

Donde

$T =$ número total de observaciones en la muestra

2.3. Ciclos periódicos y no periódicos

El análisis espectral es una técnica utilizada para detectar ciclos, la cual consiste en distinguir una estructura periódica no observada en base a distintas estructuras no periódicas observadas. Granger¹⁷ fue el primero en proponer el uso del análisis espectral en series de tiempo financieras, sin embargo sus resultados fueron inconclusos.

En la teoría fractal existen tanto ciclos periódicos como no periódicos y debido a que el análisis espectral no funciona con este segundo tipo de ciclos, resulta ser poco conveniente su uso. El R/S será la herramienta capaz de distinguir y medir los ciclos no periódicos existentes en las series.

Ciclos periódicos. Hurst fue el primero en observar que bajo el análisis del R/S es posible detectar un componente periódico. Por ejemplo para una curva, las series de tiempo podrían relacionarse con la amplitud de la curva, o dicho de otro modo el rango nunca alcanzaría un valor superior a esta amplitud, por lo que el R/S alcanzaría su valor máximo después de un ciclo.

Hurts propuso el siguiente estadístico para medir la longitud de un ciclo:

$$V_n = (R/S)_n / \sqrt{n}$$

Mediante el gráfico del estadístico anterior contra el $\log(n)$ igualmente encontró la siguiente relación para clasificar los procesos. Si el gráfico muestra una tendencia positiva quiere decir que el proceso es persistente, por lo que el coeficiente de Hurts se encontrará entre 0.5 y 1, por el contrario si la tendencia mostrada en el gráfico es negativa será evidencia de antipersistencia en el proceso. En el caso de que no exista tendencia y el gráfico muestre un comportamiento constante señalará independencia y un coeficiente de Hurts igual a 0.5.

¹⁷Granger publicó en 1964 su libro "Análisis espectral de las series temporales económicas"

Para aproximar la longitud del ciclo es necesario observar en qué momento el gráfico se aplana o cambia de tendencia, ya que esto querrá decir que el rango llegó a un máximo por lo que marcará el fin de un ciclo.

Ciclos no periódicos. El ciclo no periódico se caracteriza por la ausencia de frecuencia absoluta. La mayoría de los tests se vuelven inestables en presencia del ruido, sin embargo no es el caso del rango reescalado puesto que este análisis fue desarrollado precisamente para medir la cantidad de ruido en un sistema.

Dentro de un sistema existen dos tipos de ruido, el primero es el aditivo, el cual no afecta al sistema agregándose únicamente en las salidas de este. Un ejemplo clásico es el ruido provocado por condiciones externas cuando se están realizando las mediciones en algún experimento. El ruido aditivo proviene del exterior y afecta a cada una de las salidas pero no proviene del sistema en sí por lo que será fácilmente medible.

El segundo es el ruido dinámico, el cual no depende del observador ni de las condiciones externas sino que invade y está dentro del sistema.

En conclusión, el análisis del rango reescalado puede mostrar persistencia en un sistema, pero también puede ayudar a estimar la longitud promedio de ciclos periódicos y no periódicos de este bajo la presencia de ruido, lo que lo hace una excelente herramienta en el análisis de series financieras.

2.4. Hipótesis de los mercados fractales(HMF)

Es importante distinguir primero que no es lo mismo un mercado estable que un mercado eficiente. Un mercado estable es sinónimo de un mercado líquido, debido a que en presencia de liquidez los precios que los inversores consiguen serán cercanos a los que los mercados consideran justos.

La teoría de los mercados eficientes no contempla el aspecto de liquidez por lo que es deficiente en la explicación de caídas o estampidas consecuencia del desequilibrio entre oferta y demanda.

Otra distinción importante es la existente entre liquidez y el volumen de mercado o volumen comercial¹⁸, de hecho las grandes caídas han ocurrido cuando hay poca liquidez y el volumen operado ha sido elevado. La liquidez es la cualidad de los activos para ser convertidos en dinero efectivo de forma inmediata sin pérdida significativa de su valor o también puede verse como la facilidad de que algo sea intercambiado por productos y servicios.

También es importante mencionar que los inversionistas cuentan con distintos horizontes de inversión por lo que la información del mercado los impacta de forma distinta. Este aspecto y el de liquidez están estrechamente ligados, ya que si toda la información tuviera el mismo impacto sobre ellos no se generaría liquidez. En conclusión lo que hace que exista liquidez en el mercado es que los inversionistas no son homogéneos, que haya distintos horizontes de inversión, impactos e incluso conceptos de precio justo.

La hipótesis de los mercados fractales pone especial énfasis en el impacto de la liquidez y los horizontes de inversión en el comportamiento de los inversionistas y además para que sea tan general como sea posible se eliminan los supuestos estadísticos de los procesos. Esta hipótesis proporciona un modelo de dicho comportamiento y del movimiento en los precios del mercado de acuerdo a las observaciones realizadas.

Para que el mercado sea estable, los inversionistas deben tener el mismo nivel de riesgo y este riesgo compartido explica porque la distribución de frecuencia se preserva sin importar el horizonte de inversión, a esta propiedad se le conoce como autosimilaridad en el mercado, que en conjunto con la no homogenización de horizontes y la liquidez constituyen lo que se conoce como la estructura fractal. Los mercados se vuelven inestables cuando esta estructura se pierde.

Ahora que ya fueron descritos los elementos envueltos en la hipótesis de los mercados fractales, se procederá a describirla.

La hipótesis de los Mercados Fractales propone:

- El mercado es estable cuando hay diversidad en los horizontes de inversión, lo que garantiza liquidez.

¹⁸ El volumen comercial puede definirse como la cantidad de transacciones comerciales producidas en un determinado periodo de tiempo entre dos unidades económicas, como por ejemplo dos países o empresas.

- El conjunto de información relevante para cada horizonte de inversión es distinto, en consecuencia las variaciones en el precio de las acciones serán el reflejo de esta información.
- Los horizontes a corto plazo se apoyan más en la sensibilidad del mercado y en las fluctuaciones de oferta-demanda, mientras que los horizontes de largo plazo establecen sus decisiones en base a los valores económicos o fundamentales.
- Cuando todos los horizontes de inversión se reducen a uno solo, el mercado se vuelve inestable, ya que no existen inversores de largo plazo que estabilicen el mercado ofreciendo liquidez a los de corto plazo.

Con base a estos supuestos se logra desarrollar la base matemática sobre la que descansa esta hipótesis y la cual será presentada a continuación.

2.5. Movimiento browniano fraccional (MBF)

El movimiento browniano fraccional fue definido inicialmente por Kolmogorov y bautizado posteriormente por Mandelbrot. No es un proceso de Markov ni una semimartingala si su parámetro de Hurts es distinto de un medio, por lo que el cálculo desarrollado por Itô no es aplicable.

Es considerado un proceso autosimilar, es decir, invariante en distribución bajo un cambio de escala de tiempo y espacio, y es utilizado para la modelación de fenómenos aleatorios con dependencia a largo plazo. Intuitivamente esto quiere decir que las trayectorias no son idénticas pero si visualmente similares.

Un proceso gaussiano centrado $B^H = \{B_t^H : 0 \leq t < \infty\}$ con $B_0^H = 0$ es un MBF con parámetro $H \in (0,1)$ (coeficiente de Hurts) si y solo si cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$a) \text{cov}(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})\text{var}(B_1^H) \quad \forall t, s \geq 0$$

$$b) (B_{t_2}^H - B_{t_1}^H, B_{s_2}^H - B_{s_1}^H) \stackrel{d}{=} (B_{t_2+h}^H - B_{t_1+h}^H, B_{s_2+h}^H - B_{s_1+h}^H) \quad \forall t_2, t_1, s_1, s_2 \text{ y } h \geq 0 \text{ y existe}$$

$H \in (0,1)$ tal que

$$B_{t+\tau}^H - B_t^H \stackrel{d}{=} h^{-H} (B_{t+h\tau}^H - B_t^H) \quad \forall t, \tau, h \geq 0$$

$$c) \text{Var}(B_t^H - B_s^H) = |t - s|^{2H} \text{Var}(B_1^H) \quad \forall t, s \geq 0$$

En consecuencia un MBF posee incrementos estacionarios. Ahora bien si se tiene la siguiente expresión para la covarianza

$$\text{cov}(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H, B_{s_2}^H - B_{s_1}^H) = \frac{1}{2} [(s_2 - t_1)^{2H} + (s_1 - t_2)^{2H} - (s_2 - t_2)^{2H} + (s_1 - t_1)^{2H}]$$

Entonces si $H < \frac{1}{2}$ el MBF es negativamente correlacionado, si $H > \frac{1}{2}$ será positivamente correlacionado y si $H = \frac{1}{2}$ la covarianza será cero y dado que el MBF es un proceso gaussiano se tendrá la independencia de incrementos por lo que será equivalente a un movimiento browniano estándar. Igualmente si y sólo si $H = \frac{1}{2}$ este se convertirá en un proceso de Markov

Otra característica importante del MBF es que dada su propiedad de autosimilaridad sus trayectorias son diferenciales en ninguna parte casi seguramente.

De forma general un movimiento Browniano Fraccional B_H cuyo parámetro es el coeficiente de Hurts, denotado por H y con $0 \leq H \leq 1$, es un proceso gaussiano definido por las siguientes propiedades:

$$i) B_H(0) = 0$$

$$ii) E[B_H(t)] = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} iii) C_H(t, s) &= E[B_H(s)B_H(t)] = H(2H - 1) \int_0^t \int_0^t |t - s|^{2H-2} ds dt \\ &= \frac{1}{2} [|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s - t|^{2H}] \end{aligned}$$

$$\forall s \text{ y } t \in \mathbb{R}$$

Por lo que el parámetro H determina el signo de la covarianza entre dos eventos. Como caso particular si $s=t$ y $H=1/2$ entonces $\text{Var}_H(t) = C_H(t, t) = t$.

Dasgupta y Shiryaev encontraron que con la integral de trayectoria los procesos no son libres de arbitraje bajo la metodología de Itô, por lo que es necesario desarrollar un cálculo equivalente el cual contempla operaciones con un nuevo tipo de producto, el producto Wick, el cual será representado por \diamond .

2.5.1. Producto Wick

Dasgupta y Shiryaev encontraron que con las integrales de trayectoria¹⁹ cuando se supone un coeficiente de Hurts distinto de un medio los procesos no son libres de arbitraje bajo las metodologías de Itô, un grave inconveniente en el momento de llevar a cabo la valuación de opciones con Black & Scholes ya que ésta se desarrolla bajo un escenario de un mercado libre de arbitraje donde el rendimiento de cualquier portafolio sin riesgo coincide a la tasa libre de riesgo.

Debido a esto; Duncan, Hu y Pasik desarrollaron una nueva integral llamada Skorohod, denotada por

$$\int_0^T \phi(t, w) \delta_H(t) = \lim_{\delta_{t_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{N-1} \phi(t_k) \diamond (B(t_{k-1}) - B(t_k))$$

Con la cual se elimina las posibilidades de arbitraje y donde \diamond denota el producto Wick definido de la siguiente manera:

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible, entonces se dice que $f \in L^2_\phi(\mathbb{R})$, es decir, pertenece al conjunto de las funciones cuadrado integrables si $|f|_\phi^2 = \iint f(s)f(t)\phi(t,s)dsdt < \infty$. Ahora bien si se define el producto interior de la siguiente manera

¹⁹ Una integral de trayectoria será definida como la siguiente suma de Riemann:

$$\int_0^T \phi(t, w) dB_H(t) = \lim_{\delta_{t_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{N-1} \phi(t_k)(B(t_{k-1}) - B(t_k))$$

donde $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ partición de $[0, T]$ y $\delta_{t_k} = t_{k-1} - t_k$

$$\langle f, g \rangle_\phi := \iint f(s)g(t)\phi_H(t, s)dsdt \quad f, g \in L^2_\phi(\mathbb{R})$$

se puede construir el siguiente espacio de Hilbert $(L^2_\phi(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle_\phi)$.

Bajo la construcción de este espacio de Hilbert se definirá lo siguiente

Sea $X \in L^2(\mu)$, entonces existe una constante $c_\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in I$ tal que

$$X(w) = \sum_{\alpha} c_\alpha H_\alpha(w) \quad \text{en } L^2(\mu) \quad \text{y} \quad \|X\|_{L^2(\mu)}^2 = \sum_{\alpha \in I} \alpha! c_\alpha^2$$

$$\text{donde } \alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

Y se denotará con $(S)_H^*$ al conjunto de todas las expansiones formales de este tipo

$$G(w) = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha H_\alpha(w) \text{ tales que } \|G\|_{H, -q}^2 = \sum_{\alpha \in I} \alpha! c_\alpha^2 (2N)^{-\alpha q} < \infty \text{ para alguna } q \in \mathbb{N}$$

Finalmente el producto Wick de

$$F(w) = \sum_{\alpha \in I} \alpha_\alpha H_\alpha(w) \in (S)_H^* \quad \text{y} \quad G(w) = \sum_{\alpha \in I} b_\alpha H_\alpha(w) \in (S)_H^*$$

será definido así:

$$(F \diamond G)(w) = \sum_{\alpha, \beta \in I} \alpha_\alpha b_\beta H_{\alpha+\beta}(w)$$

$$\text{Además si } F, G \in (S)_H^* \Rightarrow F \diamond G \in (S)_H^*$$

2.6. Integral de Itô Fraccional

El ruido blanco fraccional $W_H(t)$ en el tiempo t será definido como

$$W_H(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_R e_i(v) \phi(t, v) dv \right] \int_R e_i(t) dB_H(t) \quad \text{donde } W_H(t) \in (S)_H^* \quad \forall t$$

y si además $t \rightarrow B_H(t)$ es diferenciable en $(S)_H^*$ se puede llegar a $\frac{d}{dt}B_H(t) = W_H(t)$ en $(S)_H^*$

Una vez definido lo anterior, si $Y: R \rightarrow (S)_H^*$ es una función tal que $Y(t) \diamond W_H(t)$ es integrable en $(S)_H^*$ entonces se definirá la Integral de Itô fraccional como

$$\int_R Y(t)dB_H(t) := \int_R Y(t) \diamond W_H(t)dt$$

2.7. Movimiento geométrico browniano fraccional

Al igual que con el movimiento browniano tradicional existe un movimiento geométrico browniano, este concepto puede extenderse al caso fraccional. Para llegar a su ecuación general se partirá de la siguiente ecuación diferencial estocástica fraccional

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB_H(t) \quad \text{con } X(0) = x > 0 \quad \text{y } x, \mu, \sigma \text{ constantes}$$

Reescribiéndola en su forma diferencial se tiene lo siguiente

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mu X(t)dt + \sigma X(t) \diamond dW_H(t) = (\mu + \sigma W(t)) \diamond X(t)$$

Utilizando el producto Wick definido anteriormente la solución de la ecuación está dada por

$$X(t) = x \exp^{\diamond(\mu t + \sigma \int_0^t W_H(s)ds)} = x \exp^{\diamond(\mu t + \sigma B_H(t))}$$

Por lo que el movimiento geométrico browniano fraccional queda definido de la siguiente manera

$$X(t) = x \exp\left(\sigma B_H(t) + \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H}\right)$$

2.8. Fórmula fraccional de Itô

Se supondrá que $X(t)$ sigue el siguiente proceso browniano fraccional

$$dX(t) = \mu(t, w)dt + \sigma(t, w)dB_H(t) \quad \text{con } \mu, \sigma \in L_\phi^{1,2}$$

Y si $f \in C^2(R \times R)$ entonces la fórmula de Itô para el caso fraccional será:

$$\begin{aligned}
 f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) \\
 &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X(s)) ds \\
 &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s)) \mu(s) ds \\
 &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s)) \sigma(s) dB_H(s) + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X(s)) \sigma(s) D_s^\phi X(s) ds
 \end{aligned}$$

2.9. Fórmula de Black & Scholes fraccional para un Call europeo

De la misma manera que para el caso tradicional ya se han construido todas las herramientas necesarias para llegar al objetivo de construir la fórmula de Black & Scholes para el caso fraccional, por lo que ahora solo queda mencionarla.

El precio de una opción de tipo call europea en t , para $0 \leq t \leq T$, cuyo precio de ejercicio está representado por K , una tasa libre de riesgo r , volatilidad σ^2 , fecha de vencimiento T y un coeficiente de Hurts H obtenido de la serie financiera del subyacente $S(t)$ está dado por:

$$C(t, S(t)) = S(t)N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

Una vez construidas ambas fórmulas y analizados sus fundamentos, tanto para el caso tradicional como para el fraccional, los capítulos posteriores analizarán y compararán sus resultados dentro del mercado financiero mexicano.

CAPÍTULO 3

EL MERCADO DE VALORES MEXICANO

El sistema financiero es el resultado de la búsqueda de las empresas mexicanas por obtener un funcionamiento óptimo, esto mediante el financiamiento proveniente tanto de las instituciones públicas, en el sector gubernamental, como de las instituciones privadas en el sector empresarial.

El sistema financiero mexicano está conformado por un conjunto de instituciones cuya finalidad es la de captar, administrar y canalizar la inversión de participantes nacionales y extranjeros. Está integrado por: Grupos Financieros, la Banca Comercial, la Banca de Desarrollo, Casas de Bolsa, Sociedades de Inversión, Aseguradoras, Arrendadoras Financieras, Afianzadoras, Almacenes Generales de Depósito, Uniones de Crédito, Casas de Cambio y Empresas de Factoraje.

Ahora bien, el mercado de valores es el conjunto de operaciones realizadas entre oferentes e inversionistas con el fin de realizar la negociación de títulos valores (acciones, obligaciones, reportos, certificados de inversión, títulos estatales, etc.) permitiendo, entre otras cosas, canalizar eficientemente el ahorro del público inversionista dentro del sector productivo.

Es gracias al intercambio y a la operación de estas instituciones que la economía del país puede funcionar día a día.

Por años se ha creído que el mercado en donde se desarrollan dichas operaciones cumple con los supuestos de la teoría financiera tradicional, que las series financieras son independientes, siguen el comportamiento de una caminata aleatoria y que sus rendimientos pueden adaptarse a la campana de una distribución normal. En el capítulo II se mencionó que estos supuestos no siempre se cumplen, por lo que en este capítulo se analizarán algunas series financieras para verificar la veracidad de dicha afirmación.

3.1. Validación de supuestos

El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) es el principal indicador de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y expresa el rendimiento del mercado accionario en función de las variaciones de precios de una muestra balanceada, ponderada y representativa del conjunto de acciones cotizadas en la Bolsa.

De acuerdo a la BMV el IPC constituye un fiel indicador de las fluctuaciones del mercado accionario, considerando dos conceptos fundamentales:

- Representatividad. La muestra que lo compone, refleja el comportamiento y la dinámica operativa del mercado mexicano.
- Invertibilidad: Las series accionarias que lo integran cuentan con las cualidades de operación y liquidez que facilitan las transacciones de compra y venta para responder a las necesidades del mercado mexicano.

El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC, con base octubre de 1978) tiene como principal objetivo constituirse como un indicador representativo del Mercado Mexicano y servir como subyacente de productos financieros por lo que será una de las series que se analizarán. Publicadas en el mes de septiembre del 2012 en la página de la BMV estas son las acciones que el IPC toma como muestra

Emisora	Serie	Emisora	Serie
AC	*	GFNORTE	O
ALFA	A	GMEXICO	B
ALSEA	*	GMODELO	C
AMX	L	GRUMA	B
ARA	*	HOMEX	*
ASUR	B	ICA	*
AXTEL	CPO	KIMBER	A
AZTECA	CPO	LAB	B
BIMBO	A	LIVEPOL	C-1
BOLSA	A	MEXCHEM	*
CEMEX	CPO	MFRISCO	A-1
CHDRAUI	B	OHLMEX	*
COMERCI	UBC	PE&OLES	*
COMPARC	*	SORIANA	B
ELEKTRA	*	TLEVISA	CPO
FEMSA	UBD	URBI	*
GAP	B	WALMEX	V
GEO	B		

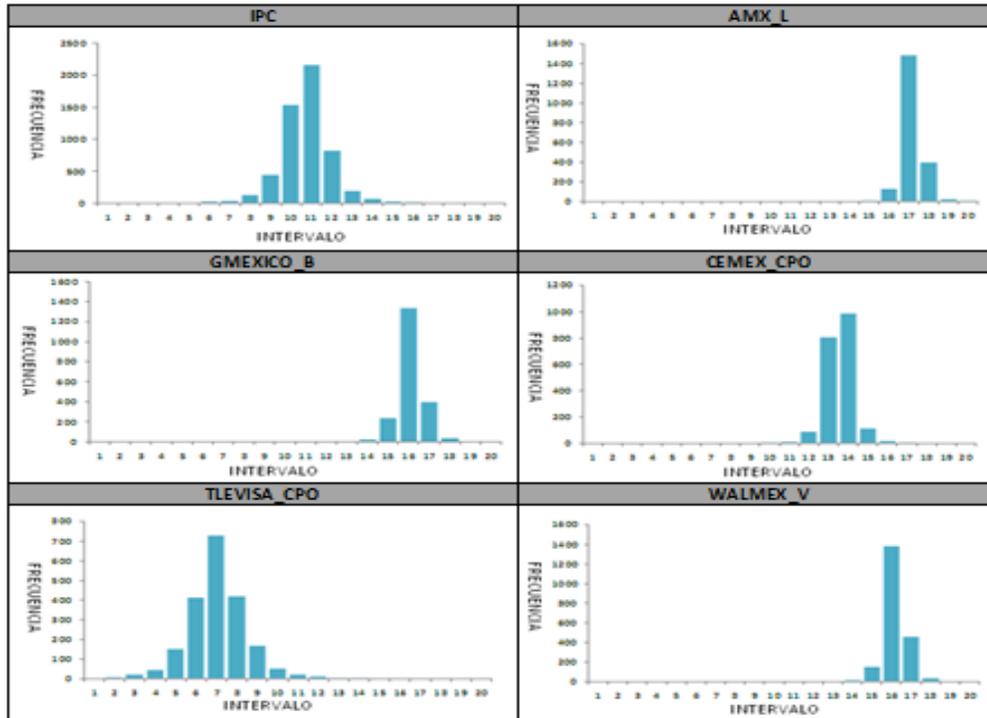
3.1.1. Normalidad e independencia

Con la ayuda del Rango Reescalado y el coeficiente de Hurts desarrollado en el capítulo II se podrá verificar si las series son independientes o persistentes. Para el caso de la normalidad serán aplicadas las pruebas de bondad de ajuste conocidas como la prueba de la Ji-cuadrada y la prueba de Kolmogorov, esto porque la primera es catalogada por muchos como una prueba no tan confiable debido a que es para datos agrupados.

Como ya se explicó con anterioridad, el IPC es uno de los mejores indicadores que puede reflejar el comportamiento bursátil del país, por lo que este y las siguientes acciones serán el objeto de estudio del análisis.

	Empresa	Sector (Clasificación BMV)
AMX_L	America Móvil	Sector Comunicaciones
GMEXICO_B	Grupo México	Sector Minero
CEMEX_CPO	Cementos Mexicanos	Sector Industrial
TLEVISA_CPO	Grupo Televisa	Sector Entretenimiento
WALMEX_V	Wal-Mart de México	Sector Comercial

El primer análisis que se realizará para validar la normalidad de los rendimientos de las acciones, tomando dichos rendimientos de la fecha en que nacieron las acciones al 28/10/2011, será el gráfico.



Los gráficos anteriores muestran la distribución de los rendimientos para cada una de las acciones y para el IPC. Como puede observarse, estos no siguen un comportamiento muy parecido al de una distribución normal ya que sus gráficos presentan gran acumulación en la parte central concluyendo que podría tratarse de distribuciones leptocúrticas.

Como las gráficas de los datos definitivamente no son suficientes como para aseverar que son distribuciones leptocúrticas (Coeficiente de curtosis mayor a cero), platicúrticas (Coeficiente de curtosis menor a cero) o mesocúrticas (Coeficiente de curtosis igual a cero) se decidió calcular el coeficiente de curtosis y comprobarlo.

Las medidas de curtosis también son conocidas como medidas de apuntamiento o de concentración central y tratan de estudiar la mayor o menor concentración de frecuencias alrededor de la media y en la zona central de la distribución. Los coeficientes de curtosis obtenidos de cada serie financiera son los siguientes:

	Coeficiente de Curtosis $g_2=(\mu_4/\sigma^4)-3$	Tipo de distribución
IPC	0.019442	Leptocúrtica
AMX_L	0.001800	Leptocúrtica
GMEXICO_B	0.004617	Leptocúrtica
CEMEX_CPO	0.000482	Leptocúrtica
TLEVISA_CPO	0.006892	Leptocúrtica
WALMEX_V	0.001944	Leptocúrtica

De esta manera se puede comprobar que todas las series son leptocúrticas. Ahora el siguiente paso es verificar que tan normales son. Muchas personas creen que una gráfica puede ayudar a comprender mucho lo que se está estudiando sin embargo las pruebas gráficas no son suficientes como para decir que una serie de datos se distribuye de manera normal o no. Al realizar las pruebas de la Ji- cuadrada y la de Kolmogorov²⁰ a un

	Prueba Ji-cuadrada			Prueba Kolmogorov		
	T	$\chi_{(19).95}$	Resultado	Ln	$W_{.95}$	Resultado
IPC	10,381,182,635.41	30.144000	Rechazar	0.060224	0.012051	Rechazar
AMX_L	5.48E+114	30.144000	Rechazar	0.930688	0.019631	Rechazar
GMEXICO_B	2.45E+69	30.144000	Rechazar	0.954491	0.019616	Rechazar
CEMEX_CPO	1.38E+39	30.144000	Rechazar	0.980859	0.019616	Rechazar
TLEVISA_CPO	2375199.553700	30.144000	Rechazar	0.981856	0.019616	Rechazar
WALMEX_V	2.74E+85	30.144000	Rechazar	0.949976	0.019616	Rechazar

²⁰ Para mayor información acerca de estas pruebas dirigirse al Anexo A del presente documento

nivel de confianza del 95% se obtuvieron los siguientes resultados:

Para el caso de la prueba de Ji- cuadrada el criterio de rechazo será si $T > \chi_{.95}^{(19)}$, mientras que para la prueba de Kolmogorov se rechazará la hipótesis nula si $L_n > W_{.95}$. De acuerdo a estos criterios, en todos los casos se rechaza que las series sean normales.

El siguiente supuesto a validar es el de independencia, o dicho de otro modo verificar que las series sigan el comportamiento de una caminata aleatoria. Para la validación de este supuesto en el capítulo II se desarrollaron dos herramientas, el Rango Reescalado y el coeficiente de Hurts. Con la ayuda de éstas se clasificarán a las series anteriores como persistentes, antipersistentes o independientes. Siguiendo la metodología para el R/S del capítulo II y utilizando mínimos cuadrados para la aproximación del coeficiente de Hurts se obtuvieron los siguientes resultados. Es importante recordar que se cataloga a una serie como persistente si su coeficiente de Hurts es mayor a 0.5, antipersistente si es menor a 0.5 e independiente si es igual a 0.5.

	$\widehat{\beta}_0 = \bar{Y} - \bar{X} \widehat{\beta}_1$	$H = \widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$	Tipo de serie
IPC	-0.211323	0.591489479	Persistente
AMX_L	-0.229754	0.552683285	Persistente
GMEXICO_B	-0.236632	0.581921352	Persistente
CEMEX_CPO	-0.218228	0.576680924	Persistente
TLEVISA_CPO	-0.103928	0.531283578	Persistente
WALMEX_V	-0.156618	0.541945179	Persistente

Debido a que los cálculos obtenidos a través del método de mínimos cuadrados son aproximaciones, es necesario realizar pruebas de significancia para descartar que tal coeficiente sea igual a 0.5 implicando que la serie es independiente a un cierto nivel de confianza.

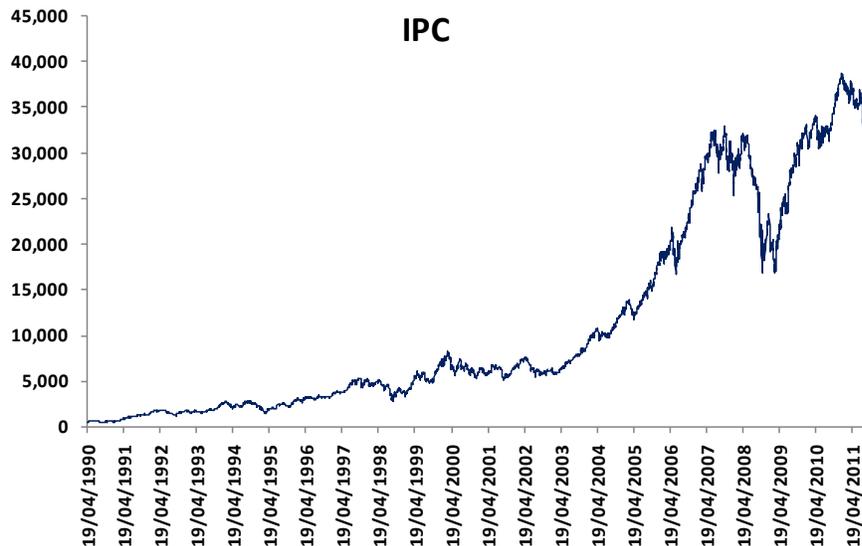
En el siguiente cuadro se muestran los intervalos de confianza al 95% correspondientes al coeficiente de Hurts para cada una de las series analizadas.

	Límite Inferior	Límite Superior	Gráfico
IPC	0.555108	0.627871	
AMX_L	0.512854	0.592513	
GMEXICO_B	0.570438	0.593405	
CEMEX_CPO	0.559136	0.594226	
TLEVISA_CPO	0.512047	0.550520	
WALMEX_V	0.527773	0.556117	

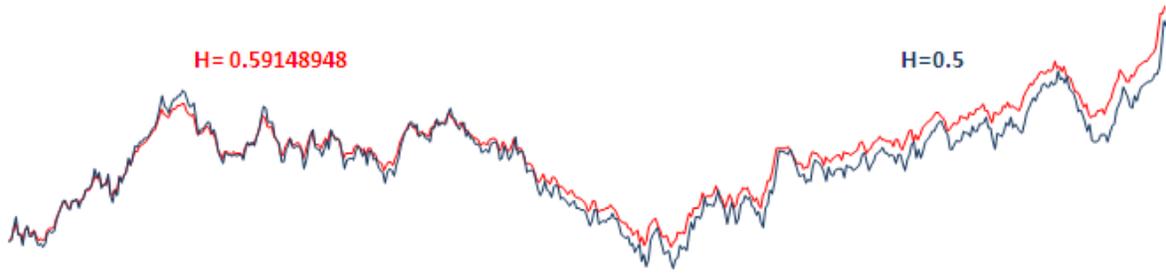
Ya que el valor de 0.5 no se encuentra dentro de los intervalos de confianza anteriormente calculados, entonces se puede concluir para todas las series que H es distinto a 0.5 con el 95% de confianza y serían consideradas series persistentes, es decir, presentan memoria a largo plazo. De esta manera se descarta el supuesto de independencia en los rendimientos de las series.

3.2. IPC

De acuerdo al análisis anterior es posible concluir que el IPC es una serie persistente cuyos rendimientos no son normales, sigue una distribución leptocúrtica y debido a su gran representatividad en el mercado de valores mexicano seguirá siendo el ejemplo perfecto para estudiar las características de las series persistentes estudiadas en el capítulo II.



Para realizar una comparación visual el siguiente gráfico muestra la simulación de un movimiento browniano fraccional con un coeficiente de Hurts de 0.5, es decir, un movimiento browniano tradicional, contra uno con $H=0.59148948$, coeficiente correspondiente al IPC.



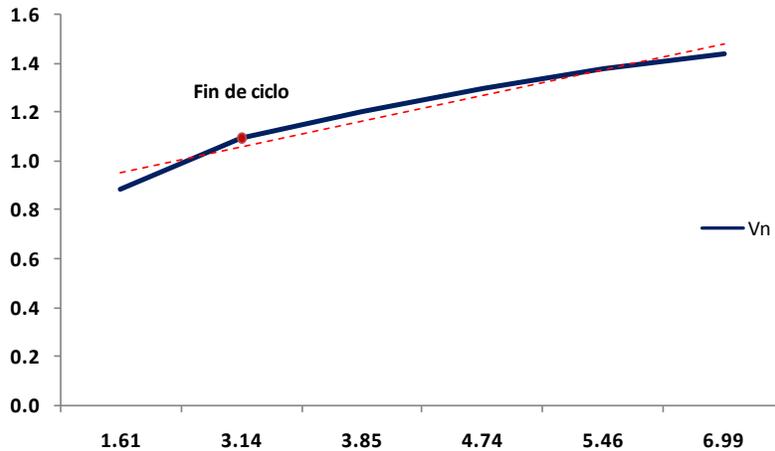
Se observa que el movimiento browniano fraccional recorre una mayor distancia en un mismo lapso de tiempo que la serie que sigue una caminata aleatoria, incluso se puede ver que la serie persistente, en la segunda parte del periodo de observación, se encuentra por arriba de la aleatoria ya que al mostrar una tendencia positiva con mayor probabilidad irá hacia arriba que hacia abajo.

Ahora que se sabe que el IPC es una serie no independiente, lo siguiente es analizar los ciclos que tiene. En el capítulo II se mencionó como herramienta para detectar los ciclos no periódicos al Rango Reescalado y mediante el estadístico que propuso Hurts se tiene lo siguiente:

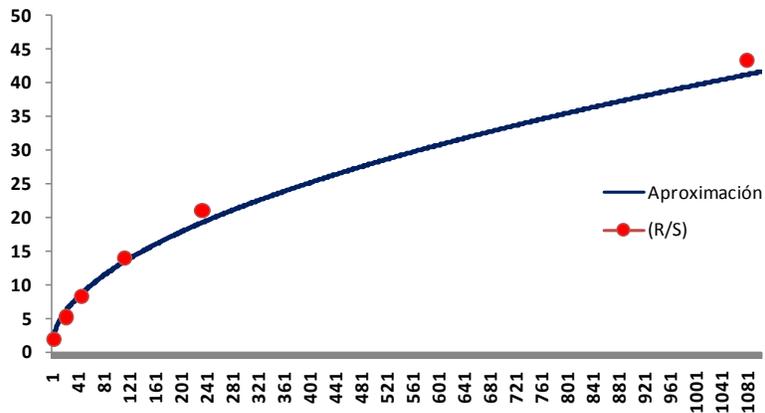
$$V_n = \left(\frac{R}{S}\right)^n / \sqrt{n}$$

n	(R/S)	logn	Vn
5	1.976363	1.609438	0.883856
23	5.250094	3.135494	1.094720
47	8.229840	3.850148	1.200445
115	13.923260	4.744932	1.298351
235	21.060035	5.459586	1.373805
1081	47.254761	6.985642	1.437251

Al graficar el log(n) contra el estadístico anterior fácilmente se puede identificar en donde termina un ciclo y también se puede comprobar nuevamente que se trata de una serie persistente ya que el gráfico presenta una pendiente positiva.



Antes de pasar a la valuación de opciones y como análisis final de la serie de rendimientos del IPC se presenta el gráfico del R/S de la serie comparado con la aproximación de la ec. (2.2) obtenida en el capítulo II. De esta manera se comprueba que dicha aproximación realmente es cercana a los valores obtenidos del rango reescalado anteriormente calculados.



3.3. Valuación de opciones

En el año de 1973, Robert C. Merton publicó "Theory of rational option pricing", en el cual menciona el modelo desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes, posteriormente denominado Black & Scholes.

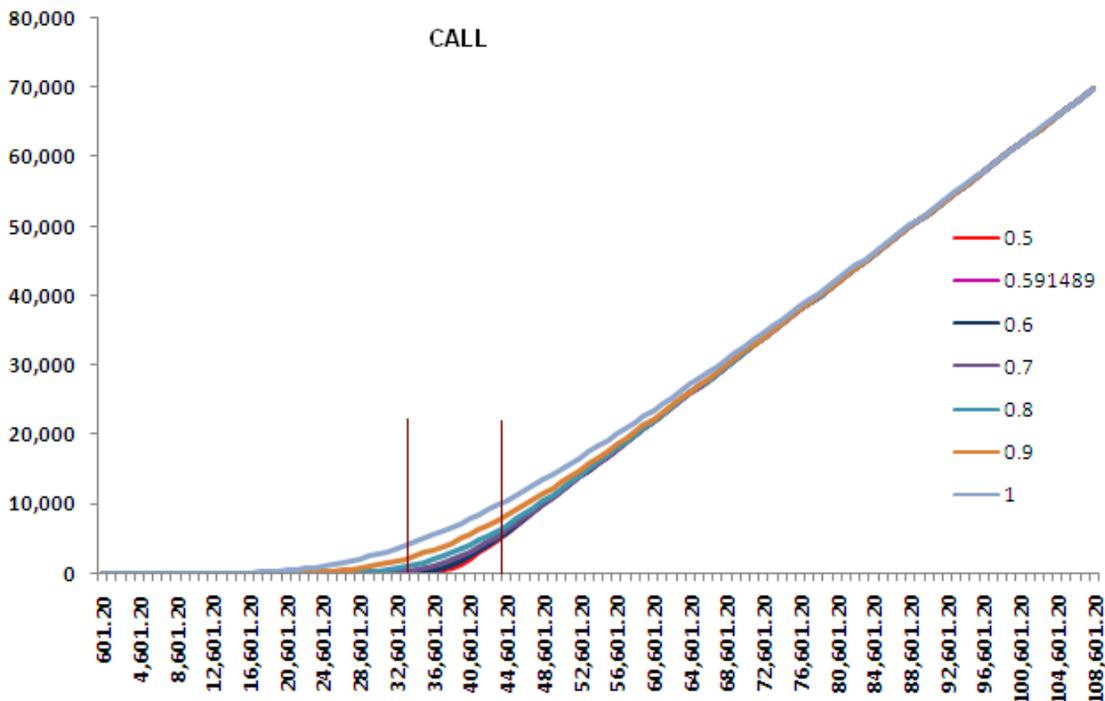
Este modelo fue empleado para estimar el valor actual de una opción europea y posteriormente se adecuó a una aproximación de opciones americanas.

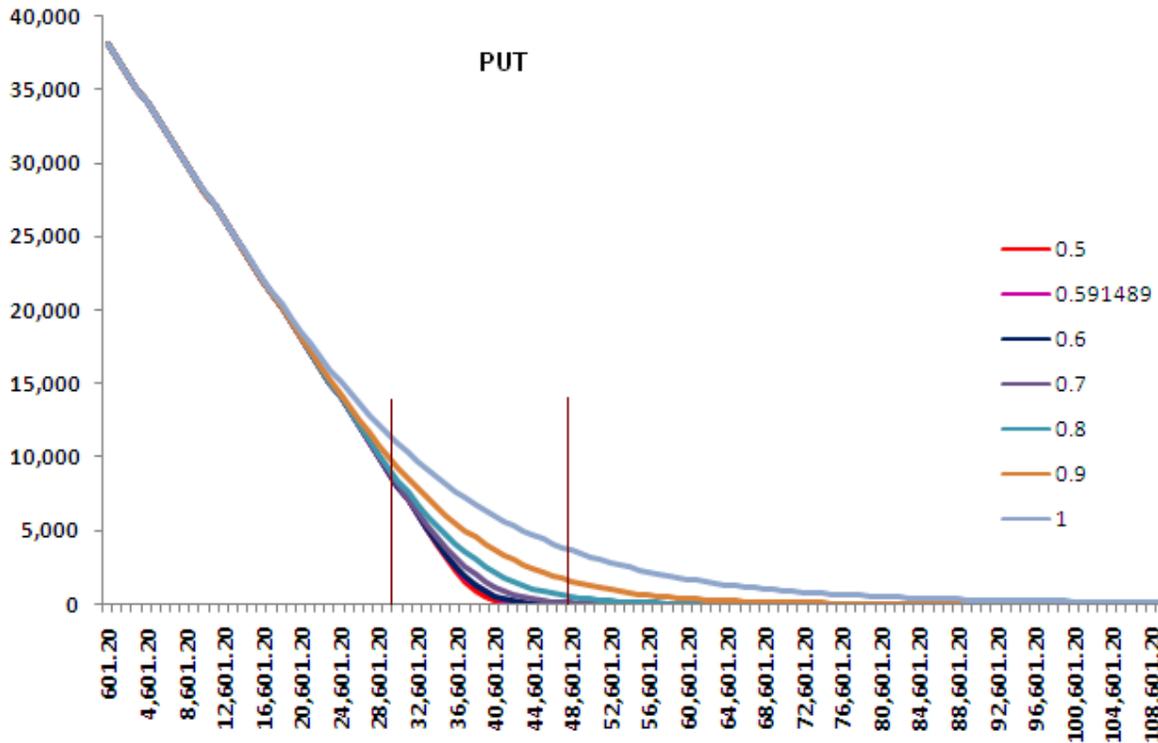
Utilizando las fórmulas de Black & Scholes tanto en su forma tradicional como fraccional se valorará una opción call y una put europeas cuyos subyacentes son el IPC y la volatilidad empleada sea la explícita. Se usarán distintos valores del coeficiente de Hurts, incluyendo el valor del coeficiente de esta serie para observar el comportamiento del precio al variar este parámetro.

Los datos utilizados para la valuación son:

Nombre del instrumento	CALL_MEXBOL_120224	PUT_MEXBOL_120224
Subyacente	IPC	IPC
Precio de ejercicio(strike)	38,800	38,800
Fecha de Vencimiento	24/02/2012	24/02/2012
Fecha de Valuación	18/01/2012	18/01/2012

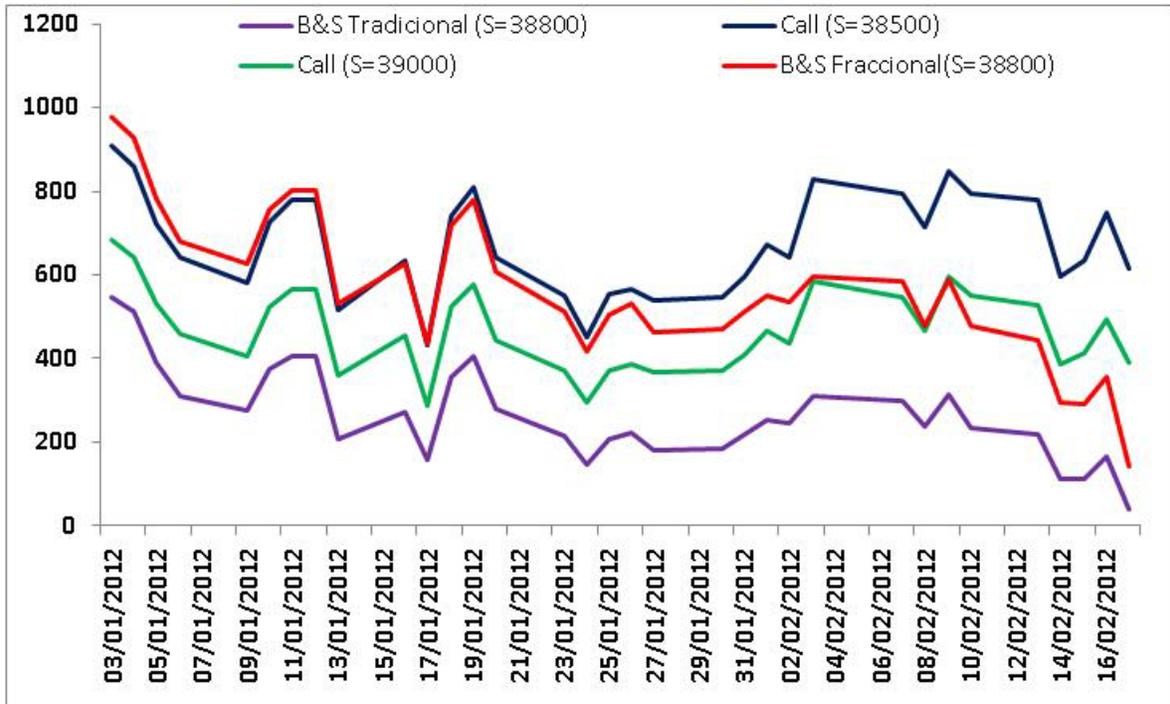
Y se obtuvieron los siguientes gráficos del spot del subyacente contra el precio de la opción:





En el caso del call las diferencias entre los precios no se incrementan tanto como para el put. De hecho para el call las diferencias más grandes se encuentran en un intervalo de +/- 5,000 alrededor del strike y para el put este intervalo se prolonga hasta +/- 9000, lo que lleva a pensar que la fórmula para el put es más sensible al cambio del coeficiente de Hurts, sin embargo ambas convergen en los valores extremos del spot tanto para el caso en que se encuentra at the Money (ATM) como para cuando está out the Money (OTM). Con base a lo anterior, la primera conclusión sería que a mayor persistencia mayor precio.

Es importante verificar que el modelo realmente es consistente con el comportamiento del mercado por lo que se tomarán como referencias las historias de los precios de dos opciones de compra del IPC listados en MexDer cuyos precios de ejercicios son 38,500 y 39,000, siendo estos los contratos con las características más parecidas al contrato tomado como ejemplo para que siguiendo el razonamiento de que a características similares le deben corresponder precios similares se concluya que método resulta ser más eficiente.



Se puede observar en el gráfico anterior que la opción valuada bajo el método tradicional de Black & Scholes está subvaluada en todo momento sin embargo bajo el método fraccional desarrollado en el capítulo II se consigue una mejor aproximación acercándose mucho más a los precios de mercado de las opciones que se tomaron como referencias.

Entonces como segunda conclusión, bajo Black & Scholes Fraccional se lograría obtener una mejor valuación del precio de una opción de compra al acercarse más a los niveles que presenta el mercado.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS FRACTAL

Desde la aparición del trabajo de Mandelbrot publicado en el año de 1973 con el nombre de “Los objetos fractales”, el tema de los fractales poco a poco se ha ido abriendo camino en un gran número de campos de investigación al capturar la atención de los científicos en las posibles aplicaciones que puede tener tan revolucionario concepto intentando explicar el comportamiento de fenómenos naturales cuya complejidad simplemente no puede ser explicada mediante el uso de una geometría Euclídeana.

El Análisis Fractal consiste en el modelado de un conjunto de datos mediante técnicas fractales. Estos datos provienen de simulaciones computacionales o de mediciones empíricas generalmente en forma de series de tiempo, como por ejemplo precios de cierre de una bolsa de valores, datos de un electroencefalograma o cantidad de lluvia registrada a lo largo de un año en una determinada región.

Entre las técnicas mencionadas en el párrafo anterior se encuentra la dimensión fractal, la cual puede ser estimada mediante una gran cantidad de algoritmos. Uno de los más famosos y utilizados a lo largo del presente trabajo es el exponente de Hurts²¹.

A lo largo de este capítulo se aplicarán distintos métodos para la identificación del comportamiento futuro de la serie del IPC. Se comenzará analizando la serie de forma gráfica y posteriormente se utilizará el coeficiente de Hurts y el análisis de fluctuaciones sin tendencia para detectar señales que antecedieron y que muy posiblemente pudieron haber servido para identificar la crisis financiera hipotecaria del 2008 o credit crunch como la nombran los financieros.

Es importante destacar que con este tipo de análisis no se buscan resultados numéricos exactos sino patrones y estructuras que nos indiquen como puede evolucionar un sistema a determinada escala de tiempo.

²¹ Otros métodos serían: Dimensión de Hausdorff-Besicovitch, Método de conteo de cajas, exponentes de Lyapunov, dimensión de autocorrelación, Wavelets y Redes Neuronales.

4.1. Análisis gráfico

Antes de realizar el análisis gráfico de la serie del IPC es necesario recordar una de las características principales que posee un fractal, la autosimilitud.

Se mencionó en el capítulo II que un objeto es autosimilar si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo. Puede darse a diferente escala o presentarse con cierta deformación.

Los fractales pueden presentar tres tipos de autosimilitud:

- *Autosimilitud exacta.* Exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas.
- *Cuasiautosimilitud.* Se presenta cuando el fractal es aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Los fractales de este tipo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos.
- *Autosimilitud estadística.* Es el tipo más débil de autosimilitud. Se exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala.

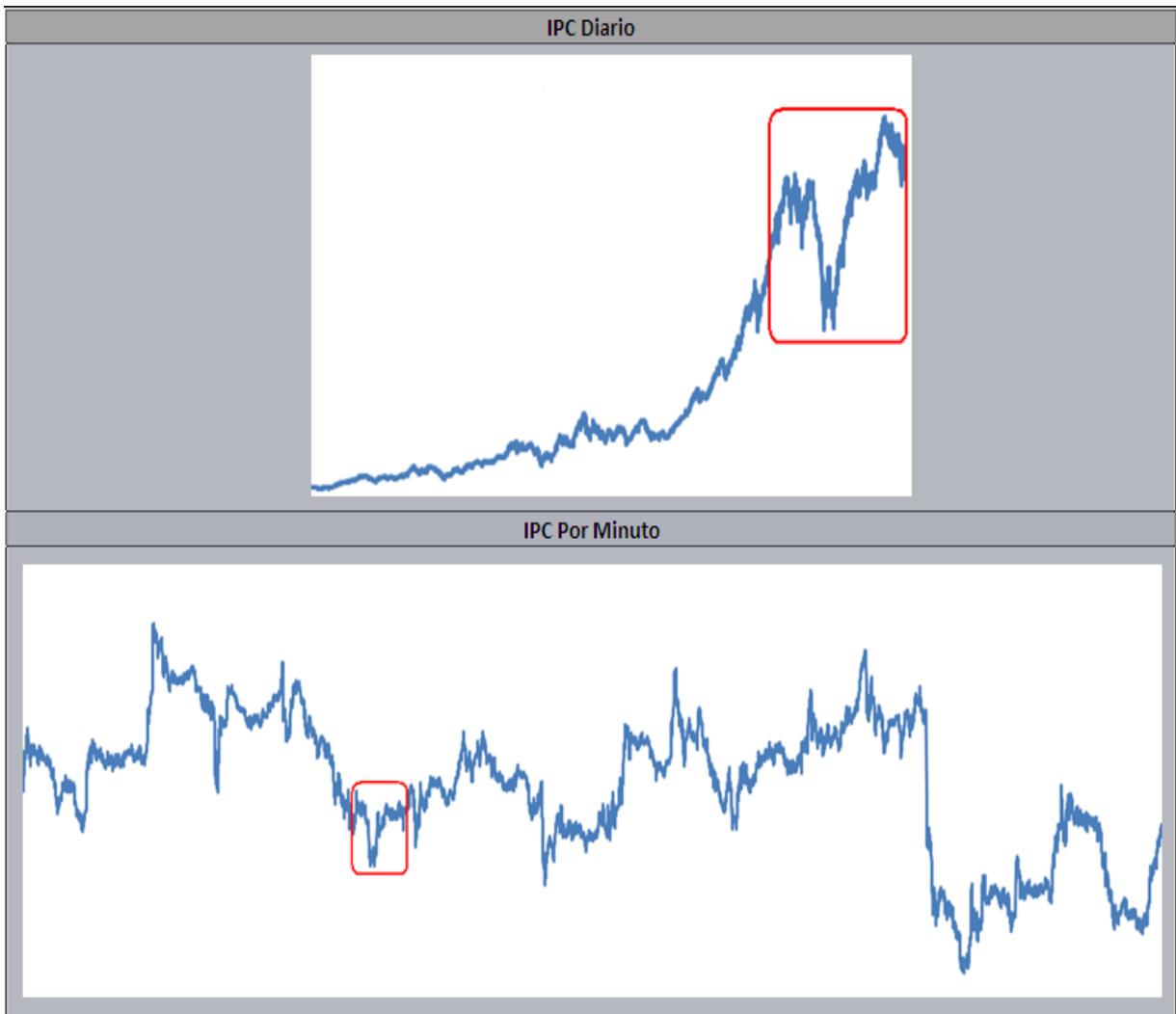
Para observar la autosimilitud del IPC se utilizará una muestra de los precios de dicho índice del 15 de febrero del 2012 al 14 de marzo del mismo año bajo observaciones realizadas por minuto, de esta manera se podrá hacer un comparativo a distintas escalas.

El primer objetivo es probar que esta serie observada por minuto presenta la autosimilitud estadística por lo que es necesario comprobar que es catalogada como fractal y cumple con las mismas características estadísticas que la serie observada diariamente.

	IPC Diario	IPC Por Minuto
Histograma de Rendimientos		
Coefficiente de Curtosis $g_2=(\mu_4/\sigma^4)-3$	0.019442089	0.0000000076
$H= \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$	0.591489479	0.560005755
Tipo de distribución	Leptocúrtica	Leptocúrtica
Tipo de series	Persistente	Persistente
Prueba de Kolmogorov	Rechazo normalidad al 95% de confianza	Rechazo normalidad al 95% de confianza
Prueba Ji_cuadrada	Ln= 0.0602244775606421 Rechazo normalidad al 95%	Ln= 0.0702793445989101 Rechazo normalidad al 95%

En el cuadro anterior se muestran los histogramas de las distribuciones de los rendimientos, el coeficiente de curtosis, el coeficiente de Hurts y los resultados de las pruebas de normalidad para ambas series. Se puede notar que la serie observada por minuto presenta características estadísticas similares a la serie original y también pertenece al grupo de la series financieras fractales.

Una vez confirmada la autosimilitud estadística en la serie del IPC, los gráficos que a continuación son presentados dibujan los precios de ambas series, tanto la observada diariamente como la observada por minuto. Se puede identificar una figura similar en ambas (marcadas con un rectángulo rojo) y dado que son parecidas pero no exactamente iguales entonces cumple con la cuasiautosimilitud también.



4.2. Coeficiente de Hurts

Lynch & Allison realizaron un análisis fractal basado en el cálculo del exponente de Hurst para determinar cuánto le toma al mercado de futuros del petróleo regresar a su equilibrio después de un incremento repentino en la volatilidad por las transacciones especulativas.

La serie de tiempo con la que trabajaron fueron las transacciones realizadas durante los años 1989-1999. Mediante el análisis de los datos encontraron que dicha serie era antipersistente al obtener un coeficiente de $H = 0.29$ por lo que concluyeron que después de un rango de transacciones especulativas excesivamente grande el rango de negociaciones del siguiente día tiene una probabilidad del 71 % de ser menor que el valor del día anterior. Esto se interpreta como que el mercado está intentando alcanzar su nivel de equilibrio en el rango negociado.

En el capítulo II se estudió el coeficiente de Hurts y se mencionó que es una útil herramienta para detectar si se trata de una serie persistente ($0.50 \leq H < 1$), antipersistente ($0 \leq H < 0.50$) o una caminata aleatoria, cuando el coeficiente de Hurts es igual a 0.5. Sin embargo ésta no es la única funcionalidad de dicha medida, igualmente resulta muy eficiente en la detección de las tendencias y pronóstico del comportamiento futuro de las series en base a los siguientes criterios:

- Si la serie posee un coeficiente dentro del rango $0.50 \leq H < 1$ entonces los datos muestran un comportamiento persistente y una correlación positiva por lo que si existe un periodo de crecimiento más probablemente será seguido por otro análogo.
- Para los valores del coeficiente de Hurts que se encuentran ubicados en $0 \leq H < 0.50$ corresponde un comportamiento antipersistente cuya correlación será definida negativa. Lo anterior se traduce en que un periodo de crecimiento será seguido de uno de decrecimiento o viceversa, dicho de otro modo, hay más probabilidad que el próximo período se encuentre debajo del promedio.

- Finalmente si H es igual a 0.5 se tendrá una caminata aleatoria por lo que en este caso un aumento puede ser seguido por cualquiera de las dos posibles opciones, una baja o un alza reflejando de este modo su correlación igual a cero.

Con base a estos criterios se realizará el análisis del coeficiente de Hurst del IPC observado de forma diaria durante el periodo del 02/04/2008 al 02/01/2009 dividiéndolo en seis periodos de 32 días cada uno para ver si es posible detectar el comportamiento bajista del índice durante la crisis hipotecaria, la cual según financieros expertos tuvo lugar del 15/08/2008 al 24/09/2008.

Esta tabla muestra los coeficientes de Hurts obtenidos para cada uno de los segmentos de la serie

	Periodo	Coeficiente de Hurts
	02/04/2008 a 16/05/2008	H= 0.712760044737872
Periodos de antipersistencia	19/05/2008 a 01/07/2008	H= 0.494325911732462
	02/07/2008 a 14/08/2008	H= 0.459524141557535
Crisis Hipotecaria	15/08/2008 a 30/09/2008	H= 0.510994708138719
	01/10/2008 a 13/11/2008	H= 0.699928691030931
	14/11/2008 a 02/01/2009	H= 0.514945843637464

De acuerdo a los resultados obtenidos de los coeficientes se puede observar que dos periodos antes de la crisis el IPC mostró antipersistencia y dado que mantenía un comportamiento de crecimiento se podría haber concluido que para el siguiente periodo, que consistentemente es el de la crisis, habría uno de decrecimiento.

4.3. Detección de crisis financieras

La globalización y la apertura a nuevos mercados tanto nacionales como internacionales han provocado que los participantes del mercado de valores intenten buscar métodos más eficientes para prevenir futuros desastres financieros y de esta manera tal vez reducir sus pérdidas futuras.

En el ámbito financiero las principales fuentes de riesgo derivan de fluctuaciones sobre precios, tipos de cambio y tasas de interés. Dichas fluctuaciones se han convertido en la preocupación primordial de los inversionistas siendo estas las causas de sus pérdidas y ganancias.

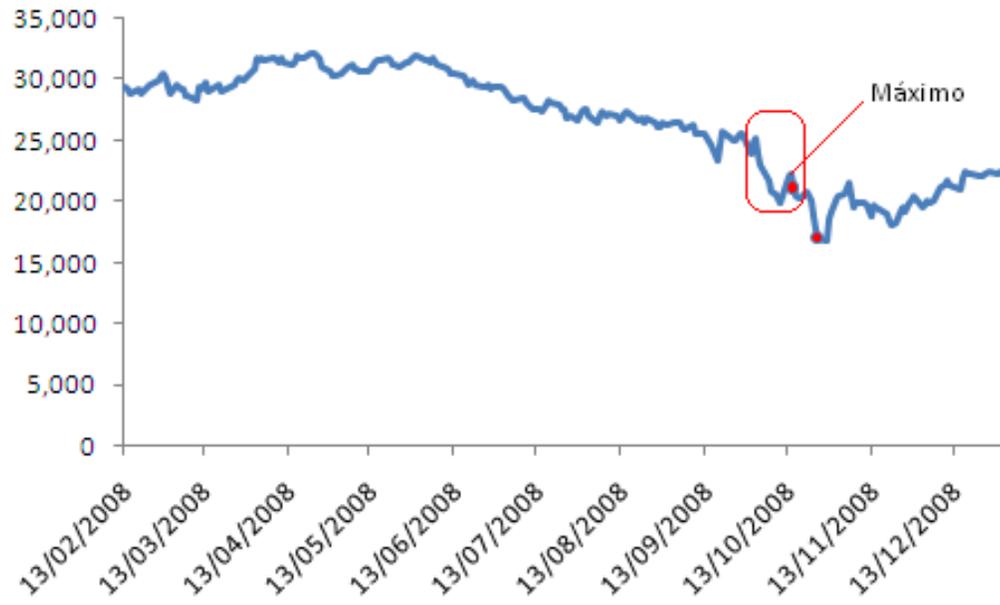
Para poder minimizar los efectos de estas fluctuaciones es necesario analizarlas a través de los datos históricos de las series financieras.

De acuerdo con Sornette²² la ocurrencia de crisis en los mercados de capitales es precedida por señales que son detectadas por indicadores cualitativos y cuantitativos. Estas señales indican que las series financieras son fluctuaciones que responden a distribuciones estables y poseen estructuras fractales.

Con base al razonamiento de Sornette es que utilizando el análisis de fluctuaciones sin tendencia, un método diseñado para la detección de indicios de crisis financieras, se buscarán dichas señales que precedieron a la crisis hipotecaria del 2008.

Según Sornette la historia de burbujas y crisis financieras se repiten durante siglos con pocas variaciones y sostiene que existe un periodo de incremento de precios que antecede a la crisis. La existencia de una baja rápida de los precios, seguida del momento de valor máximo sucede en un tiempo más corto que el periodo de aceleramiento. Este comentario realmente resulta interesante ya que al observar el siguiente gráfico efectivamente se observa una caída repentina (encerrada en el rectángulo) que poco tiempo después se recupera para alcanzar su máximo y después desplomarse durante el periodo de crisis (identificado con puntos en el gráfico).

²² Didier Sornette es profesor en la Cátedra de Riesgos empresariales en el instituto Federal Suizo de Tecnología de Zurich y ha desarrollado un gran número de trabajos acerca de pronósticos de crisis financieras.



4.3.1. Análisis de fluctuaciones sin tendencia

En la aplicación de este método se utilizará la propiedad fractal de la ley de potencia, misma que permitirá estimar el parámetro para detectar las señales que antecederán la crisis.

Igualmente se asumirá la hipótesis de Grech y Mazur quienes sostienen y demuestran que los cambios bruscos en el comportamiento del mercado se anticipan con movimientos nerviosos expresados por los movimientos del parámetro estimado (α), exponente de la ley de potencia. Estos cambios anticipados a las crisis son los indicativos de una futura crisis.

4.3.2. Metodología del análisis de fluctuaciones sin tendencia

Teniendo una serie de tiempo $x(t)$ de tamaño L se tomará un conjunto de esta de tamaño N , el cual se irá incrementando en este caso de diez en diez hasta llegar a 300 observaciones, con N un número entero.

1. Se divide la serie en N/τ subgrupos, los cuales tendrán tamaño τ , siendo cuidadosos de que N/τ y τ sean números enteros.
2. Para cada grupo se toman dos puntos consecutivos y se les ajusta una recta cuya ecuación tenga la siguiente forma $y(t) = at + b$, siendo a la pendiente y b la ordenada al origen.
3. A cada valor de $x(t)$ se le resta el correspondiente valor $y(t)$ de la recta calculada en cada subgrupo.
4. Se calcula la siguiente suma $F^2(\tau) = \sum_{i=1}^N (x(t) - y(t))^2$
5. Esta suma sigue la siguiente ley de potencia

$$F^2(\tau) = \tau^{2\alpha}$$

por lo que utilizando la función de logaritmo se puede obtener α . Este exponente será el correspondiente al tamaño τ para una serie de tamaño N .

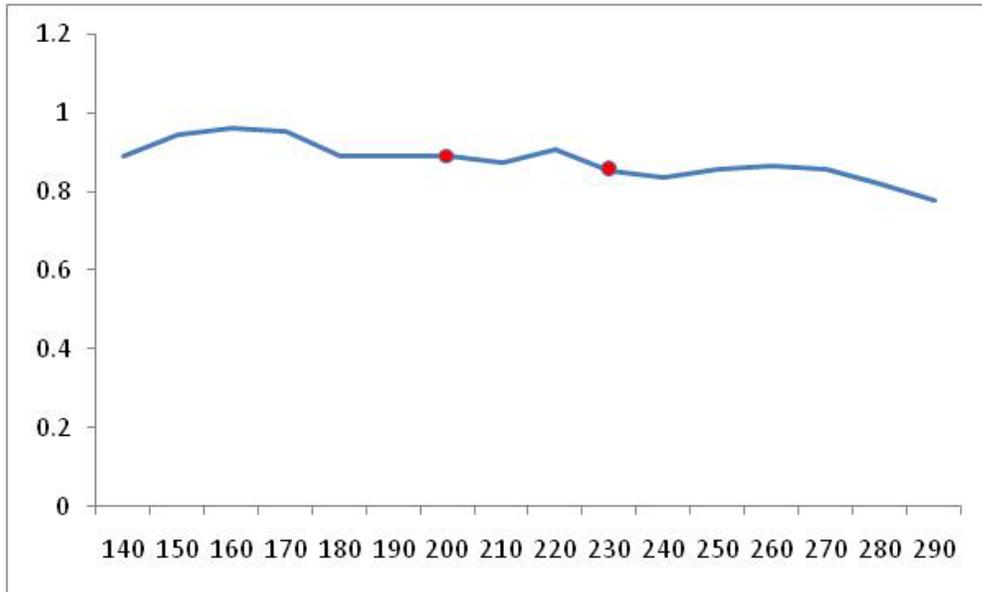
6. Se repite desde el paso 1 cambiando el tamaño τ por el siguiente divisor entero de N .
7. Una vez que el proceso anterior se realizó para todos los divisores de N se procede a incrementar N .
8. Finalmente se obtiene un promedio de los α de cada divisor para cada uno de las N y se grafican para la detección de señales.

4.3.3. Análisis de fluctuación sin tendencia aplicado al pronóstico de crisis

Para el análisis de fluctuaciones sin tendencia se tomará la serie de precios del IPC registrada de forma diaria durante el periodo del 28/11/2007 al 09/02/2009 (300 observaciones), comprendida la crisis hipotecaria dentro de dicho periodo.

El objetivo del análisis es observar efectivamente si existen perturbaciones en el movimiento del exponente α alrededor de las observaciones 200-230 que son las que reflejan el periodo de crisis.

Al realizar el análisis se obtuvo el siguiente gráfico



Se puede ver que aproximadamente en la observación 180 el exponente mostró un comportamiento irregular aplanándose de repente. Esta es la señal de aviso de la crisis hipotecaria, la cual posteriormente se confirma al aparecer una especie de pico durante el periodo de crisis, señalado con puntos, para después regresar con el comportamiento que α mostraba con anterioridad.

CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se presentaron pruebas estadísticas y gráficas de la ausencia de los supuestos estadísticos necesarios en la aplicación de la teoría financiera tradicional para las series financieras. Con esto no se debe pensar que la teoría tradicional es mala ya que sin duda ésta fue el punto de partida en el entendimiento de los mercados financieros y la cual pese al incumplimiento de los supuestos sigue aproximándose demasiado al comportamiento de dichos mercados. Sin embargo como todo en esta vida tiene que evolucionar surge la teoría de los mercados fractales.

Esta teoría, que contempla como caso particular a la teoría financiera tradicional, elimina los supuestos estadísticos para englobar todos los casos y ser más general.

Con los resultados del capítulo III se pudo comprobar que al trabajar con series financieras no independientes y cuyos rendimientos no son normales se logran obtener datos más parecidos a los de mercado, incluso más cercanos que los obtenidos bajo la antigua teoría, para el caso de las opciones por ejemplo.

También con la ayuda de la teoría de los mercados fractales y de otras herramientas como el coeficiente de Hurts y el análisis de fluctuaciones sin tendencia en el capítulo IV se detectaron señales que antecedieron la crisis hipotecaria del 2008. La detección temprana de crisis o movimientos bruscos del mercado son otras de las aplicaciones de esta innovadora teoría.

Como anteriormente se mencionó, el objetivo de este método no es obtener datos numéricos sino encontrar patrones y estructuras que permitan predecir el comportamiento futuro de las series, de ahí que muchas personas opinan que el análisis de gráficos no es tan confiable, sin embargo, el realizado en el presente trabajo usando el coeficiente de Hurts y el análisis de fluctuaciones sin tendencia tiene un sustento estadístico también.

Existen muchos otros métodos de predicción de crisis pero mientras no se posea un oráculo divino que te diga que va a pasar todos darán simplemente suposiciones. Lo que sí se puede mencionar es que muchos analistas han utilizado el análisis fractal en la realización de sus predicciones y han obtenido resultados realmente positivos.

Uno de ellos es Didier Sornette, quien el 13 de julio del 2009 predijo la caída del índice Shanghai Composite a principios de Agosto aplicando su modelo de burbujas que se basa en la detección del crecimiento “más que exponencial” utilizando para esto una ley de potencia.

Al realizar el análisis de las series financieras del IPC y de algunas acciones que integran este índice se puede observar la evolución que poco a poco se ha dado en los mercados financieros y que pocas veces puede ser explicado.

Es importante que al igual que los mercados las técnicas para valuar los instrumentos y las técnicas que nos ayudan a manejarlos de una forma más sencilla se vuelvan más robustos e igualmente evolucionen.

Si bien es cierto que la teoría financiera tradicional fue muy innovadora en su tiempo, también es cierto que en la actualidad resulta en algunos casos insuficiente, por lo que es tiempo de pensar en abrirle paso a nuevas teorías, como a la *Teoría de los Mercados Fractales*.

ANEXO A

PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE

Prueba de la Ji-cuadrada para bondad de ajuste

Esta prueba fue inventada por Karl Pearson en el año de 1900 y fue desarrollada como una aplicación de la prueba de razón de verosimilitudes.

Se tendrán los siguientes supuestos

- k resultados posibles
- p_i $i = 1, 2, \dots, k$ y tal que $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ probabilidad de que en una de las realizaciones del experimento se obtenga el resultado i
- n_i tal que $\sum_{i=1}^k n_i = n$ número de veces que se obtendrá el resultado i , donde n es el total de realizaciones del experimento

En base a los supuestos anteriores se puede asociar una distribución binomial con parámetros (n, p_i) a cada uno de los posibles resultados y cuyo valor esperado quedará definido por np_i .

A continuación se definirán estas dos variables:

$o_i = n_i$ Frecuencia observada del resultado i en las n realizaciones del experimento

$e_i = np_i$ Frecuencia esperada del experimento i

La hipótesis simple que se quiere probar es :

$$H_0: p_i = \pi_i \text{ con } i = 1, 2, \dots, k$$

Donde

π_i probabilidad postulada del resultado i

Haciendo el desarrollo por máxima verosimilitud se puede demostrar que la estadística de prueba $-2\ln\lambda$ es asintóticamente equivalente a la siguiente expresión propuesta por Pearson.

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

Finalmente, el criterio para rechazar o aceptar la hipótesis nula a un nivel de confianza del 95%, por ejemplo, será

$$\text{Si } T > w_{.95} \text{ se rechaza } H_0$$

Donde

T Estadística de prueba

$w_{.95}$ Cuantil .95 de una distribución $\chi^2_{(k-1)}$.

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para bondad de ajuste

Anteriormente esta prueba resultaba conservativa cuando la función de distribución postulada no estaba completamente especificada, es decir, cuando los parámetros de la distribución que se quería probar no todos eran conocidos. Sin embargo posteriormente se fueron desarrollando modificaciones al punto de poder llegar a probar con éxito la hipótesis nula de que la población perteneciera a la familia de distribuciones normales sin especificar la media y la varianza de la distribución.

Para la construcción se considerará una muestra aleatoria $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ de tamaño n de una población con función de distribución desconocida $F(x)$, cuyos estimadores de μ y σ estarán definidos de la siguiente manera:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$$

Con la ayuda de los estimadores se calcularán los valores estandarizados como sigue, ya que en base a estos estará definida la estadística de prueba.

$$Z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{S} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

La hipótesis compuesta que se desea probar será:

H_0 : La muestra aleatoria tiene distribución normal, con media y varianza no especificadas

vs

H_a : La función de distribución de la muestra no es normal

La estadística de prueba será la máxima distancia vertical entre la distribución postulada y la distribución empírica, es decir

$$L_n = \sup_x |S_n(x) - F(x)|$$

Donde

$S_n(x)$ Distribución empírica

$F(x)$ Distribución postulada

Finalmente la regla de decisión al nivel de significancia α será rechazar la hipótesis nula si

$$L_n > w_{1-\alpha}$$

Donde

L_n Estadística de prueba

$w_{1-\alpha}$ Cuantil $1-\alpha$ de la distribución de L_n .

ANEXO B

CÓDIGOS

Código para el cálculo del rango reescalado

Sub rangoreescalado()

Dim n As Integer, i As Integer, l As Integer, k As Integer, j As Integer, m As Integer, r As Integer

Dim Xm As Double, suma As Double, suma_cuadrada As Double, rangoreescalado As Double, aux As Double

Dim Sn As Double, maximo As Double, minimo As Double

Dim X() As Double

Dim Z() As Double

Dim Y() As Double

Dim esperanzas() As Double

Dim rango() As Double

Dim desviaciones() As Double

Dim rangoest() As Double

i = 0

n = 0

Do While Cells(5 + i, 4) <> ""

 n = n + 1

 i = i + 1

Loop

Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5, 10).Value = n

ReDim X(n - 1) As Double

ReDim Z(n - 1) As Double

ReDim Y(n - 1) As Double

i = 0

Do While Worksheets("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + i, 4).Value <> ""

X(i) = Worksheets("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + i, 4).Value

i = i + 1

Loop

i = 0

suma = 0

Do While Worksheets("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + i, 4).Value <> ""

suma = suma + X(i)

i = i + 1

Loop

Xm = suma / n

Worksheets("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(6, 10).Value = Xm

i = 0

suma_cuadrada = 0

Do While Worksheets("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + i, 4).Value <> ""

suma_cuadrada = suma_cuadrada + (X(i) - Xm) ^ 2

i = i + 1

Loop

Sn = (suma_cuadrada / n) ^ (1 / 2)

Worksheets("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(7, 10).Value = Sn

i = 0

Do While Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + i, 12).Value <> ""

l = Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + i, 12).Value

k = n / l

Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(8, 10).Value = k

Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(9, 10).Value = l

ReDim esperanzas(k - 1) As Double

ReDim rango(k - 1) As Double

ReDim desviaciones(k - 1) As Double

ReDim rangoest(k - 1) As Double

j = 0

m = 0

Do While j <> k

aux = 0

Do While m < (j + 1) * l

aux = aux + X(m)

m = m + 1

Loop

esperanzas(j) = aux / l

Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + j, 15).Value = "e" & j + 1

Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + j, 16).Value = esperanzas(j)

j = j + 1

Loop

j = 0

m = 0

Do While j <> k

Do While m < (j + 1) * l

aux = 0

Z(m) = X(m) - esperanzas(j)

Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + m, 5).Value = Z(m)

If m = 0 Then

Y(m) = Z(m)

Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + m, 6).Value = Y(m)

Else

Y(m) = Y(m - 1) + Z(m)

Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + m, 6).Value = Y(m)

End If

m = m + 1

Loop

j = j + 1

Loop

j = 0

m = 0

Do While j <> k

aux = 0

```
Do While m < (j + 1) * I
    aux = aux + (Z(m)) ^ 2
    m = m + 1
Loop
desviaciones(j) = (aux / I) ^ (1 / 2)
Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + j, 21).Value = "S" & j + 1
Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + j, 22).Value = desviaciones(j)
    j = j + 1
Loop
j = 0
m = 0
aux = 0
Do While j <> k
    maximo = 0
    minimo = 0
    Do While m < (j + 1) * I
        If Y(m) < minimo Then
            minimo = Y(m)
        End If
        If Y(m) > maximo Then
            maximo = Y(m)
        End If
        m = m + 1
```

Loop

rango(j) = maximo - minimo

rangoest(j) = rango(j) / desviaciones(j)

Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + j, 18).Value = "R" & j + 1

Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + j, 19).Value = rango(j)

Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + j, 24).Value = "(R/S)" & j + 1

Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + j, 25).Value = rangoest(j)

aux = aux + rangoest(j)

j = j + 1

Loop

rangoreescalado = aux / k

Workbooks("RangoReescalado.xlsm").Sheets("Main").Cells(5 + i, 13).Value = rangoreescalado

i = i + 1

Loop

End Sub

Código para el cálculo del análisis de fluctuaciones

Sub analisisfluctuaciones()

Dim N As Integer, i As Integer, l As Integer, k As Integer, j As Integer, T As Integer, contador As Integer

Dim suma As Double

Dim X() As Double

Dim Z() As Double

Dim Y() As Double

i = 0

Do While Workbooks("Análisis fluctuaciones.xlsx").Sheets("Main").Cells(3 + i, 17).Value <> ""

N = Workbooks("Análisis fluctuaciones.xlsx").Sheets("Main").Cells(3 + i, 17).Value

Workbooks("Análisis fluctuaciones.xlsx").Sheets("Main").Cells(2, 7).Value = N

ReDim X(N - 1) As Double

ReDim Y(N - 1) As Double

ReDim Z(N - 1) As Double

l = 0

Do While l <> N

X(l) = Workbooks("Análisis fluctuaciones.xlsx").Sheets("Main").Cells(3 + l, 4).Value

l = l + 1

Loop

j = 0

Do While Workbooks("Análisis fluctuaciones.xlsx").Sheets("Main").Cells(2, 33 + j).Value <> N

j = j + 1

Loop

k = 0

Do While Workbooks("Análisis fluctuaciones.xlsx").Sheets("Main").Cells(3 + k, 33 + j).Value <> ""

T = Workbooks("Análisis fluctuaciones.xlsx").Sheets("Main").Cells(3 + k, 33 + j).Value

Workbooks("Análisis fluctuaciones.xlsx").Sheets("Main").Cells(3, 7).Value = T

ReDim m((N / T) - 1) As Double

ReDim b((N / T) - 1) As Double

I = 0

contador = 0

suma = 0

Do While contador <> (N / T)

$m(\text{contador}) = (X((\text{contador} * T) + 1) - X(\text{contador} * T)) / (((\text{contador} * T) + 2) - ((\text{contador} * T) + 1))$

$b(\text{contador}) = X(\text{contador} * T) - m(\text{contador}) * ((\text{contador} * T) + 1)$

Do While I <> ((contador + 1) * T)

$Y(I) = m(\text{contador}) * (I + 1) + b(\text{contador})$

$Z(I) = (X(I) - Y(I)) ^ 2$

Workbooks("Analisis fluctuaciones.xlsm").Sheets("Main").Cells(3 + I, 12).Value = Y(I)

Workbooks("Analisis fluctuaciones.xlsm").Sheets("Main").Cells(3 + I, 13).Value = Sqr(Z(I))

Workbooks("Analisis fluctuaciones.xlsm").Sheets("Main").Cells(3 + I, 14).Value = Z(I)

suma = suma + Z(I)

I = I + 1

Loop

contador = contador + 1

Loop

Workbooks("Analisis fluctuaciones.xlsm").Sheets("Main").Cells(3 + i, 18 + k).Value = (Log(suma / N) / Log(T)) / 2

k = k + 1

Loop

i = i + 1

Loop

End Sub

Código para el cálculo del precio de una opción call usando distintos valores del coeficiente de Hurts (H) y el modelo de Black and Scholes fraccional

Sub preciocall()

Dim spot As Double, strike As Double, H As Double, DXV As Double, TLR As Double, TD As Double, vol As Double

Dim d1 As Double, d2 As Double, Nd1 As Double, Nd2 As Double, valcall As Double

Dim n As Integer, i As Integer

n = 0

i = 0

Do While Worksheets("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(6, 12 + i).Value <> ""

H = Worksheets("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(6, 12 + i).Value

Worksheets("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(8, 4).Value = H

strike = Worksheets("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(6, 2).Value

DXV = Worksheets("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(9, 4).Value

TLR = Worksheets("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(11, 2).Value

TD = Worksheets("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(12, 2).Value

vol = Worksheets("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(13, 2).Value

Do While Worksheets("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(8 + n, 9).Value <> ""

spot = Worksheets("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(8 + n, 9).Value

Worksheets("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(8, 2).Value = spot

d1 = Worksheets("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(16, 2).Value

d2 = Worksheets("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(17, 2).Value

```
Nd1 = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(16, 4).Value  
Nd2 = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(17, 4).Value  
valcall = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(20, 2).Value  
Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("CALL_Indices").Cells(8 + n, 12 + i).Value = valcall  
  
n = n + 1  
  
Loop  
  
i = i + 1  
  
n = 0  
  
Loop  
  
End Sub
```

Código para el cálculo del precio de una opción put usando distintos valores del coeficiente de Hurts (H) y el modelo de Black and Scholes fraccional

```
Sub precioput()  
  
Dim spot As Double, strike As Double, H As Double, DXV As Double, TLR As Double, TD As Double, vol As Double  
  
Dim d1 As Double, d2 As Double, Nd1 As Double, Nd2 As Double, valcall As Double  
  
Dim n As Integer, i As Integer  
  
n = 0  
  
i = 0  
  
Do While Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(6, 12 + i).Value <> ""  
  
H = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(6, 12 + i).Value  
  
Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(8, 4).Value = H
```

```
strike = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(6, 2).Value  
  
DXV = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(9, 4).Value  
  
TLR = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(11, 2).Value  
  
TD = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(12, 2).Value  
  
vol = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(13, 2).Value  
  
Do While Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(8 + n, 9).Value <> ""  
    spot = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(8 + n, 9).Value  
  
    Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(8, 2).Value = spot  
  
    d1 = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(16, 2).Value  
  
    d2 = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(17, 2).Value  
  
    Nd1 = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(16, 4).Value  
  
    Nd2 = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(17, 4).Value  
  
    valcall = Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(20, 2).Value  
  
    Workbooks("Calculadora Movil.xlsm").Sheets("PUT_Indices").Cells(8 + n, 12 + i).Value = valcall  
  
n = n + 1  
  
Loop  
  
i = i + 1  
  
n = 0  
  
Loop  
  
End Sub
```


GLOSARIO

Arrendadoras Financieras. Las arrendadoras financieras son sociedades anónimas especializadas en la adquisición de determinados bienes cuyo uso o goce temporal lo conceden a una persona física o moral (su cliente) por un plazo preestablecido recibiendo de dicho cliente como contraprestación una cantidad determinada. Al vencimiento del contrato las personas físicas o morales que han hecho uso o goce temporal de los bienes arrendados pueden:

- Comprar los bienes a un precio inferior a su valor de adquisición, que se haya fijado en el contrato. En caso de que no se haya fijado el precio, éste debe ser inferior al valor marcado a la fecha de compra conforme a las bases que se establezcan en el contrato.
- Prorrogar el plazo para continuar con el uso o goce temporal pagando una renta inferior a los pagos periódicos que venía haciendo conforme a las bases que se establezcan en el contrato.
- Participar con la arrendadora financiera en el precio de la venta de los bienes a un tercero en las proporciones y términos que se establezcan en el contrato.

Banca comercial. Banca que se dedica a financiar el ciclo productivo de las empresas sin participar en el capital de éstas, así como a trabajar con particulares.

Activo. Es un bien tangible o intangible que posee una empresa o persona natural. Por extensión se denomina también activo al conjunto de los activos de una empresa.

Activo subyacente. El activo sobre el que se emiten una opción, un futuro, un swap u otro derivado. El subyacente es la fuente de la que se deriva el valor intrínseco del derivado. El activo subyacente podría ser un activo en el sentido usual o podría ser un tipo (tal como un tipo de interés o un tipo de cambio), un valor de un índice (tal como un índice

de renta fija o de renta variable) o un crédito de referencia (en el caso de derivados de crédito). El activo subyacente se suele citar sencillamente como subyacente.

Afianzadoras. Sociedad autorizada por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, cuyo objeto consiste en otorgar fianzas a título oneroso.

Almacenes generales de depósito. Los almacenes generales de depósito tendrán por objeto el almacenamiento, guarda o conservación, manejo, control, distribución o comercialización de bienes o mercancías bajo su custodia o que se encuentren en tránsito, amparados por certificados de depósito y el otorgamiento de financiamientos con garantía de los mismos. También podrán realizar procesos de incorporación del valor agregado, así como la transformación, reparación y ensamble de las mercancías depositadas a fin de aumentar su valor sin variar esencialmente su naturaleza. Sólo los almacenes estarán facultados para expedir certificados de depósito y bonos de prenda.

Operaciones de Arbitraje. Las operaciones de Arbitraje son comunes en el mercado de divisas, serán encontradas constantemente operaciones de este tipo que consisten en adquirir un producto financiero en un mercado a un precio y revenderlo a otro mayor en un mercado diferente. Como consecuencia de ello se obtiene una igualdad en precios en todos los mercados.

Aseguradoras. Las aseguradoras tienen como objetivo brindar cobertura financiera al asegurado en caso de que sufra una contingencia. El alcance de los servicios que facilitará la compañía de seguros al asegurado se establece en la póliza de acuerdo a la cobertura que contrate.

At the Money. Una opción está at-the-money si su precio de ejercicio (strike price), es decir, el precio que el poseedor debe pagar para ejercer su derecho, es el mismo que el precio del subyacente sobre el que la opción está basada.

Banca de Desarrollo. Instituciones que ejercen el servicio de banca y crédito de largo plazo para atender el impulso de sectores, regiones o actividades prioritarias de acuerdo a sus leyes orgánicas constitutivas. Las instituciones de banca de desarrollo tienen por objeto financiar proyectos prioritarios para el país y estimular con equidad y eficiencia el desarrollo económico nacional.

Burbuja financiera. Una burbuja económica, también llamada burbuja especulativa, burbuja de mercado o burbuja financiera, es un fenómeno que se produce en los mercados en buena parte debido a la especulación, que se caracteriza por una subida anormal y prolongada del precio de un activo o producto de forma que dicho precio se aleja cada vez más del valor real o intrínseco del producto. El proceso especulativo lleva a nuevos compradores a comprar con el fin de vender a un precio mayor en el futuro lo que provoca una espiral de subida continua. El precio del activo alcanza niveles absurdamente altos hasta que la burbuja acaba estallando debido al inicio de la venta masiva del activo cuando hay pocos compradores dispuestos a adquirirlo. Esto provoca una caída repentina y brusca de los precios llevándolo a precios muy bajos incluso inferiores a su nivel natural.

Caminata aleatoria. El camino aleatorio o paseo aleatorio es una formalización matemática de la trayectoria que resulta de hacer sucesivos pasos aleatorios. En su forma más general los paseos aleatorios son cualquier proceso aleatorio donde la posición en cierto instante depende sólo de su posición en algún instante previo y alguna variable aleatoria que determina su subsecuente dirección y la longitud de paso.

Casas de Bolsa. Las casas de bolsa son sociedades anónimas que realizan operaciones para intermediar la oferta y la demanda de valores, y administran carteras de valores propiedad de terceros.

La Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) se encarga de otorgar o revocar la autorización para operar, de emitir reglas de carácter general y de realizar la supervisión de dichas instituciones

Casas de Cambio. Las casas de cambio son instituciones financieras dedicadas a la compra-venta de divisas de diferentes países y que pueden o no estar vinculadas a los grupos financieros. En México, estas instituciones son reguladas y supervisadas por la CNBV.

Derivada parcial. Una derivada parcial de una función de diversas variables es su derivada respecto a una de esas variables manteniendo las otras como constantes. Las derivadas parciales son útiles en cálculo vectorial y geometría diferencial.

Distribución binomial. La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que mide el número de éxitos en una secuencia de n ensayos Bernoulli independientes entre sí, con una probabilidad fija p de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

Un experimento de Bernoulli se caracteriza por ser dicotómico, esto es, sólo son posibles dos resultados. A uno de estos se denomina éxito y tiene una probabilidad de ocurrencia p y al otro fracaso con una probabilidad $q = 1 - p$. En la distribución binomial el anterior experimento se repite n veces, de forma independiente y se trata de calcular la probabilidad de un determinado número de éxitos. Para representar que una variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros n y p se escribe:

$$X \sim B(n, p)$$

Distribución de probabilidad. En teoría de la probabilidad y estadística, la distribución de probabilidad de una variable aleatoria es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable aleatoria la probabilidad de que dicho suceso ocurra. La distribución de probabilidad está definida sobre el conjunto de todos los sucesos, cada uno de los sucesos es el rango de valores de la variable aleatoria.

Cuando la variable aleatoria toma valores en el conjunto de los números reales la distribución de probabilidad está completamente especificada por la función de distribución cuyo valor en cada real x es la probabilidad de que la variable aleatoria sea menor o igual que x .

Empresas de Factoraje. Las empresas de factoraje financiero son sociedades anónimas especializadas en adquirir (de sus clientes) derechos de crédito (a favor de tales clientes) relacionados a proveeduría de bienes o servicios, a cambio de un precio determinado. Al adquirir de un cliente los documentos para cobrarle al deudor estas empresas pagan o adelantan dinero a dicho cliente (dueño del derecho de cobro) cobrándole un importe por el servicio. A estas operaciones se les conoce como "descuento de documentos". Las empresas de factoraje financiero pueden pactar la corresponsabilidad o no corresponsabilidad del cliente respecto del pago de los derechos de crédito transmitidos (con recurso o sin recurso). El beneficio que obtienen los clientes al acudir a estas empresas es que obtienen liquidez para hacer frente a sus necesidades o para realizar inversiones sin tener que esperar al vencimiento de los derechos de cobro.

Espacio de Hilbert. El concepto de espacio de Hilbert es una generalización del concepto de espacio euclídeo. Esta generalización permite que técnicas algebraicas y geométricas aplicables a espacios de dimensión dos y tres se extiendan a espacios de dimensión arbitraria, incluyendo a espacios de dimensión infinita. Más formalmente, se define como un espacio de producto interior que es completo con respecto a la norma vectorial definida por el producto interior.

Espacio de probabilidad. En general un espacio probabilístico (Ω, B, P) está integrado por tres componentes. Primero Ω o espacio muestral, el conjunto de los posibles resultados elementales del experimento. Segundo, la colección B de todos los sucesos aleatorios (no solo los elementales), que es una σ -álgebra sobre Ω . El par (Ω, B) es lo que se conoce como un espacio medible. Por último, una medida de probabilidad o función de probabilidad P que asigna una probabilidad a todo suceso y que verifica los llamados axiomas de Kolmogorov.

Futuro. Un futuro se puede definir como un contrato o acuerdo vinculante entre dos partes por el que se comprometen a intercambiar un activo financiero a un precio determinado y en una fecha futura preestablecida.

Grupo financiero. Son las asociaciones de intermediarios de distinto tipo con reconocimiento legal que se comprometen a seguir políticas comunes y a responder conjuntamente de sus pérdidas. Entre las ventajas que implican estos grupos destaca la posibilidad de que sus integrantes actúen de manera conjunta, ofreciendo servicios complementarios al público. Los grupos financieros están integrados por una sociedad controladora y cuando menos tres de las entidades siguientes: almacenes generales de depósito, arrendadoras financieras, casas de bolsa, casa de cambio, empresas de factoraje financiero, instituciones de banca múltiple, instituciones de fianzas e instituciones de seguros.

Horizonte de inversión. Período de tiempo en el que el inversionista contempla mantener su dinero en un instrumento de inversión. Existen tres tipos, corto plazo (menos de tres meses), mediano plazo (de tres meses a un año) o largo plazo (más de un año).

In the Money. Una opción in-the-money tiene valor intrínseco, por ejemplo en el caso de una opción de compra el precio del activo subyacente es mayor que el precio de ejercicio de la opción.

MexDer. Bolsa de Derivados de México.

Opción americana. Las opciones financieras suponen el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender algo a un precio estipulado durante un periodo fijado de tiempo. En el caso de las americanas se puede ejercer dicho derecho en cualquier momento hasta el momento de su vencimiento.

Opción europea. En contraste con las opciones americanas las europeas tan solo pueden ser ejercidas al vencimiento.

Out de Money. Una opción está out-of-the-money si no tiene valor intrínseco, sería el caso de una opción de compra (call) para la que el precio del activo subyacente es menor que el precio de ejercicio de la opción.

Precio spot. El precio spot o precio corriente de un producto, de un bono o de una divisa es el precio que es pactado para transacciones (compras o ventas) de manera inmediata.

Pruebas de bondad de ajuste. Las pruebas de bondad de ajuste tienen por objetivo determinar si los datos de una muestra se ajustan a una determinada distribución, esta distribución puede estar completamente especificada (hipótesis simple) o pertenecer a una clase paramétrica (hipótesis compuesta).

Serie de tiempo. Una serie de tiempo o serie temporal es una colección de observaciones tomadas a lo largo del tiempo cuyo objetivo principal es describir, explicar, predecir y controlar algún proceso. Las observaciones están ordenadas respecto al tiempo y sucesivas observaciones son generalmente dependientes. De hecho esta dependencia entre las observaciones jugará un papel importante en el análisis de la serie.

Simulaciones Montecarlo. El método de Montecarlo es un método no determinístico o estadístico numérico, usado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud.

El método de Montecarlo proporciona soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos posibilitando la realización de experimentos con muestreos de números pseudoaleatorios en una computadora. El método es aplicable a cualquier tipo de problema, ya sea estocástico o determinista. A diferencia de los métodos numéricos que se basan en evaluaciones en N puntos en un espacio M -dimensional para producir una solución aproximada, el método de Montecarlo tiene un error absoluto de la estimación que decrece como $\frac{1}{\sqrt{N}}$ en virtud del teorema del límite central.

Sociedades de inversión. Las sociedades de inversión, mejor conocidas como fondos, son la forma más accesible para que los pequeños y medianos inversionistas puedan beneficiarse del ahorro en instrumentos bursátiles. El inversionista compra acciones de estas sociedades cuyo rendimiento está determinado por la diferencia entre el precio de compra y el de venta de sus acciones. Los recursos aportados por los inversionistas son aplicados por los fondos a la compra de una canasta de instrumentos del mercado de valores, procurando la diversificación de riesgos.

Tasa libre de riesgo. Como el mismo nombre la define, es aquella tasa de rendimiento que se obtiene al invertir en un activo financiero que no tiene riesgo de incumplir su pago, tales como los bonos emitidos por el gobierno.

Teoría de las carteras. La teoría de la cartera dará un conjunto de normas que prescriben la forma en que concretamente se pueden construir carteras con determinadas características que se consideran deseables. Para esto se utiliza el método de optimización por medio de la Media Varianza (CMV), el cual señala las características que deben tener aquellos que son eficientes. El desarrollo inicial de la teoría de las carteras de inversión se basa en la consideración de que la conducta del inversionista podía ser

caracterizada por aquellos tipos de función de utilidad para las cuales la desviación estándar proporciona una medida suficiente del riesgo.

Uniones de crédito. Una unión de crédito es una entidad financiera auxiliar de crédito, autorizada y regulada por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores, constituida de acuerdo a la legislación mercantil bajo la modalidad de Sociedad Anónima de Capital Variable.

Las Uniones de Crédito son instituciones financieras, constituidas con el propósito de ofrecer acceso al financiamiento y condiciones favorables para ahorrar y recibir préstamos y servicios financieros. Es importante destacar que las Uniones de Crédito no proporcionan servicios al público en general ya que solo están autorizadas para realizar operaciones con sus socios.

Variable aleatoria. Una variable aleatoria o variable estocástica es una variable estadística cuyos valores se obtienen de mediciones en algún tipo de experimento aleatorio. Los valores posibles de una variable aleatoria pueden representar los posibles resultados de un experimento aún no realizado o los posibles valores de una cantidad cuyo valor actualmente existente es incierto.

BIBLIOGRAFÍA

- Duncan T. E., Z. Hu, B. Pasik Duncan, “Stochastics Calculus for Fractional Brownian Motion I THEORY”.
- F.Fama Eugene, “Efficient Capital Markets: II”, The Journal of Finance, Vol XLVI Núm 5, 1991.
- Gálvez Medina Ernesto Teobaldo, “Análisis Fractal del Mercado de Valores de México (1978-2004)”, Escuela Superior de Comercio y Administración, Sección de estudios de Posgrado e investigación Unidad Santo Tomás.
- Peters Edgar, “Fractal Markets analysis: applying chaos theory to investment and economics”, New York, J Wiley, 1994.
- “Revista colombiana de estadística”, Volumen 28 número dos, p.p 173 a 191. Diciembre 2005.
- Ross, Westerfield, Jaffe, “Finanzas corporativas”, México, Mc Graw Hill, séptima edición.
- Shleifer Andrei, “Inefficient Markets: An introduction to behavioral finance”, Oxford University Press, Oxford Reino Unido, 2000.
- Sierra Juárez Guillermo, “Procesos Hurts y movimiento browniano fraccional en mercados fractales: valuación y aplicaciones a los derivados y finanzas”, Instituto Tecnológico de Estudios superiores de Monterrey.
- Venegas Martínez, Francisco, “Riesgos Financieros y Económicos: productos derivados y decisiones económicas”, México, Thompson.
- <http://www.bmv.com.mx>.

- <http://www.banxico.org.mx>.
- <http://www.mexder.com.mx/MEX/paginaprincipal.html>.
- <http://www.valmer.com.mx/VAL>.
- <http://francisthemuleneews.wordpress.com/2009/09/09/didier-sornette>.