Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

CONMUTATIVIDAD DE OPERADORES DE TOEPLITZ SOBRE UN ESPACIO DE BERGMAN ARMÓNICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
BEATRIZ DOMÍNGUEZ DURÁN

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO MARCOS LÓPEZ GARCÍA

2012

CONMUTATIVIDAD DE OPERADORES DE TOEPLITZ SOBRE UN ESPACIO DE BERGMAN ARMÓNICO

Beatriz Domínguez Durán

junio del 2012

Dedicatoria

A la memoria de Lupita.

A mi madre Virginia por su gran amor y apoyo incondicional.

a mi padre José con todo cariño.

A mis queridos hermanos y hermanas Lety, Rosa, Gicela, Reyna, Fernando, Christian y Karina. Por todas las aventuras y alegrías compartidas, su valioso apoyo y todo lo que me han enseñado.

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México por darme la oportunidad de aprender y forjarme no solo como profesional, a mi asesor de tesis, el Dr. Marcos López. A mis sinodales: Dra. Magali Louise Marie Folch Gabayet, Dra. María de los Ángeles Sandoval Romero que pese al trabajo que tienen, me brindaron su tiempo y acertadas sugerencias para la corrección y revisión del presente trabajo; a la Dra. María de la Luz Jimena de Teresa de Oteyza por el apoyo otorgado en el proyecto $CB - 2006/59212$ y al Dr. Fidel Casarrubias Segura.

También agradezco a mis amigos de la Facultad de Ciencias y a los que con su amistad, presencia y apoyo me alentaron a concluir por fin esta etapa: mi familia, Luis Felipe, Rocío Varillas, Nancy, Norma, Ana Lilia, Rosa, Rosario, Raquel, mis alumnos y amigos de la UAM-IZTAPALAPA, la Dra. Elsa y Yazmín.

Índice general

Introducción

El problema del subespacio invariante es el problema abierto más antiguo en la Teoría de Operadores y afirma que "Todo operador continuo definido en un espacio de Hilbert separable tiene un subespacio vectorial cerrado invariante no trivial". A la fecha se han encontrado colecciones de operadores que cumplen con tal condición, pero no se ha resuelto el caso general.

El espacio de Bergman holomorfo L_a^2 consiste de las funciones holomorfas en el disco unitario abierto que además son cuadrado integrables. En este contexto hay un problema abierto llamado el problema del subespacio invariante en el espacio de Bergman L_a^2. Un subespacio vectorial I cerrado en L_a^2 es invariante si $zI \subseteq I$ donde z es la función identidad restringida al disco unitario.

El problema del subespacio invariante en L_a^2 menciona: Dados I, J subespacios invariantes en L_a^2 tal que $I \subset J$ y $\dim J \cap I^\perp = \infty$ entonces existe un subespacio invariante L tal que $I \subsetneq L \subsetneq J$.

En el 2000 se probó que los problemas abiertos antes mencionados son equivalentes, lo que aumentó el interés en el estudio del espacio de Bergman L_a^2 y de los operadores definidos sobre ellos. También se destaca el estudio del espacio de Bergman armónico b^2 que consiste de las funciones armónicas en el disco unitario abierto que son cuadrado integrables.

En este trabajo estudiamos los operadores de Toeplitz $\mathcal{A}_u$ y T_u definidos en L_a^2 y b^2 como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_u(f) &= P(uf), \quad f \in L_a^2, \\ T_u(f) &= Q(uf), \quad f \in b^2, \end{aligned}$$

donde u es una función medible y acotada en el disco unitario abierto, y P y Q son las proyecciones ortogonales de L^2 sobre L_a^2 y b^2 respectivamente. La función u es el símbolo del operador de Toeplitz respectivo y determina las propiedades de tales operadores.

Cuando los símbolos φ y ψ están en L_a^2 es fácil ver que los operadores de Toeplitz $\mathcal{A}_\varphi$ y $\mathcal{A}_{\overline{\psi}}$ conmutan, pero no ocurre lo mismo con los operadores T_φ y $T_{\overline{\psi}}$. El resultado principal de esta tesis estudia condiciones equivalentes para que conmuten los operadores T_φ y $T_{\overline{\psi}}$.

El presente trabajo se divide en cinco capítulos. En el primero se introduce la notación a utilizar y se enuncia el Teorema de Green. En el segundo capítulo se estudian las propiedades generales de las funciones armónicas, se calcula el núcleo de Poisson para la bola unitaria n-dimensional, $n \geq 2$. Después se resuelve el problema de Dirichlet en la bola unitaria cerrada.

En el tercer capítulo se muestra que el espacio de Bergman armónico b^2 es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Se estudian las propiedades del llamado núcleo reproductor de Bergman, R_B, para la bola unitaria, además se hace notar que la proyección de Bergman Q es un operador integral. Posteriormente se estudia de manera extensa la teoría de los armónicos esféricos y armónicos zonales para encontrar una fórmula cerrada del núcleo de Bergman de la bola unitaria. Finalmente se estudia el espacio de Bergman en el semiplano superior.

Como antes, en el cuarto capítulo se estudian las propiedades del espacio de Bergman analítico L_a^2, del núcleo de Bergman analítico K y de la proyección de Bergman analítica P. El resultado principal de este trabajo se fundamenta en la igualdad que relaciona al núcleo de Bergman armónico R_B en términos del núcleo de Bergman analítico K, que trae como consecuencia la descomposición de la proyección de Bergman armónica Q en términos de la proyección de Bergman analítica P. Al final de este capítulo se da un bosquejo de los espacios de Bergman analíticos con peso.

En el capítulo final se estudian las propiedades básicas de los operadores de Toeplitz $\mathcal{A}_u$ y T_u, además se desarrollan los lemas preparatorios para demostrar el resultado principal, el cual proporciona condiciones equivalentes para que los operadores T_φ y $T_{\overline{\psi}}$ conmuten cuando $\varphi, \psi \in L_a^2$. Como consecuencia se obtiene que, bajo la hipótesis adicional de que alguno de los símbolos es acotado, los operadores T_φ y $T_{\overline{\psi}}$ conmutan si y sólo si uno de los símbolos es constante.

Capítulo 1

Funciones Armónicas

1.1. Preliminares

1.1.1. Espacios de funciones y Teorema de Green

Sea $\mathbb{R}^N$ el espacio euclidiano de dimensión $N \geq 2$. Si denotamos al producto interior en $\mathbb{R}^N$ con $\langle , \rangle$, entonces $|x| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ es la norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^N$. La bola abierta euclidiana con centro en x y radio $\varepsilon > 0$ es el conjunto $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : |x - y| < \varepsilon\}$.

En adelante, Ω denota un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$. Una región en $\mathbb{R}^N$ es un subconjunto abierto conexo no vacío de $\mathbb{R}^N$.

Introducimos los siguientes espacios de funciones:

$$\begin{aligned}
C(\Omega) &= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \mid f \text{ es continua en } \Omega\}, \\
C^k(\Omega) &= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \mid f \text{ es } k\text{-veces continuamente diferenciable en } \Omega\}, \quad k \geq 1, \\
C^\infty(\Omega) &= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \mid f \text{ es infinitamente diferenciable en } \Omega\},
\end{aligned}$$

donde $\mathbb{K}$ es un campo escalar. Decimos que $(\varphi_1, ..., \varphi_N)$ es un campo vectorial de clase C^k sobre Ω si $\varphi_i \in C^k(\Omega)$, $1 \leq i \leq N$.

Si $\mathbb{C}$ es el plano complejo, entonces $\mathbb{D}$ denota el disco unitario abierto en $\mathbb{C}$, es decir,

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

La medida de área normalizada sobre $\mathbb{D}$ se denota por $\mathrm{d}A$, de hecho, cuando escribimos $z = x + iy = re^{i\theta}$ tenemos que

$$\mathrm{d}A(z) = \pi^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi^{-1}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

La medida de Lebesgue o volumen de un boreliano $A \subset \mathbb{R}^N$ se denota por $V(A)$ y la medida de superficie de ∂A se denota por $S(\partial A)$. Además σ denotará la medida de superficie normalizada sobre ∂A, es decir, $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}S/S(\partial A)$.

Usando el Teorema de Fubini, haciendo el cambio de variable $y = r\xi$, denotando ∂B a la esfera unitaria y usando el hecho de que $\mathrm{d}S(y) = r^{N-1}\mathrm{d}S(\xi)$ obtenemos

$$V(B) = \int_0^1 \left(\int_{|y|=r} \mathrm{d}S(y) \right) \mathrm{d}r = \int_0^1 r^{N-1} \left(\int_{|\xi|=1} \mathrm{d}S(\xi) \right) \mathrm{d}r = S(\partial B)/N. \tag{1.1}$$

En $\mathbb{R}^N$, D_j denota el operador diferencial parcial $\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, N$. Cuando α es una N-ada de enteros no negativos $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$, el orden de α es $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$ y se denota por $|\alpha|$. Así, definimos al monomio x^α y al operador parcial D^α, ambos de orden $|\alpha|$, como sigue

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}, \\ D^\alpha &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}}. \end{aligned}$$

El gradiente de la función $u(x_1, ..., x_N)$ es el vector $\nabla u = (D_1 u, ..., D_N u)$. Si $\partial\Omega$ es de clase C^1, $n(x) = (n_1(x), \dots, n_N(x))$ denota la normal unitaria exterior en $x \in \partial\Omega$ y $\mathcal{D}_n = \frac{\partial}{\partial n}$ es el operador de derivada normal asociado, es decir,

$$\mathcal{D}_n u\,(x) = \langle \nabla u\,(x)\,, n(x) \rangle\,, \quad x \in \partial\Omega.$$

La divergencia de un campo vectorial $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_N)$ de clase C^1, se define como sigue

$$div\varphi = \sum_{j=1}^N D_j \varphi_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j}.$$

El Laplaciano u operador de Laplace es el siguiente operador diferencial

$$\Delta = \sum_{j=1}^N D_j^2 = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Definición 1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado. Decimos que $\partial\Omega$ es de clase C^k si para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ y una función de clase C^k, $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que reetiquetando y reorientando los ejes coordenados si es necesario, se tiene*

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) \mid x_N > \gamma(x_1, ..., x_{N-1})\}.$$

A continuación reproducimos un resultado fundamental en el análisis vectorial (ver [4, pág. 7]).

Teorema 1 *Teorema de la Divergencia. Sea $\partial\Omega$ de clase C^1 y sea $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_N)$ un campo vectorial de clase C^1 en una vecindad E de $\overline{\Omega}$, entonces*

$$\int_\Omega div\varphi\, \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \langle \varphi, n \rangle \mathrm{d}S.$$

Como consecuencia obtenemos la siguiente identidad que nos será de gran utilidad.

Corolario 1 *Identidad de Green. Sea $\partial\Omega$ de clase C^1. Si $f, g \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, entonces*

$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} (f\mathcal{D}_n g - g\mathcal{D}_n f)\mathrm{d}S. \tag{1.2}$$

Demostración. Al usar la siguiente identidad

$$f\Delta g = div(f\nabla g) - \langle \nabla f, \nabla g\rangle$$

y el Teorema de la Divergencia obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\mathrm{d}V &= \int_\Omega div\,(f\nabla g - g\nabla f)\,\mathrm{d}V \\
&= \int_{\partial\Omega} \langle f\nabla g - g\nabla f, n\rangle \mathrm{d}S \\
&= \int_{\partial\Omega} (f\mathcal{D}_n g - g\mathcal{D}_n f)\,\mathrm{d}S.
\end{aligned}$$

■

1.2. Propiedades básicas de las funciones armónicas

En esta sección analizamos la teoría basada en la ecuación de Laplace que es el modelo para la teoría de espacios armónicos.

Definición 2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto no vacío. Decimos que una función $u : \Omega \to \mathbb{K}$ es armónica en Ω si $u \in C^2(\Omega)$ y $\Delta u = 0$ en Ω. Una función definida en un conjunto cualquiera $E \subset \mathbb{R}^N$ se dice que es armónica en E si es armónica en un conjunto abierto que contiene a E. Además $H(\Omega)$ denotará el espacio de funciones armónicas en Ω con valores en un campo escalar $\mathbb{K}$.*

Observación 1

1. *Dado que el operador laplaciano es lineal sobre el espacio de funciones $C^2(\Omega)$ se sigue que $H(\Omega)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

2. *Sea $0 < r < 1$ y $u : B_\varepsilon(0) \to \mathbb{K}$ una función. La dilatación de u, denotada u_r, está definida como $u_r(x) = u(rx)$ para $x \in B_\varepsilon(0)$. Entonces $\Delta(u_r) = r^2(\Delta u)_r$, por lo que $u_r \in H(\overline{B_\varepsilon(0)})$ si $u \in H(B_\varepsilon(0))$.*

3. *Si u es armónica en $\mathbb{R}^N$ y T es una transformación ortogonal sobre $\mathbb{R}^N$, entonces $u \circ T$ es armónica en $\mathbb{R}^N$.*

Demostración. *Supongamos que $T = (t_{i,j})$. Para $1 \le m \le N$, tenemos*

$$D_m(u\circ T) = \sum_{j=1}^{N} t_{j,m}(D_j u)\circ T, \qquad \textit{para todo } 1 \le i \le N,\ 1 \le j \le N.$$

Además usando el hecho de que $\sum_{m=1}^{N} t_{k,m} t_{j,m} = \delta_{k,j}$ *obtenemos*

$$\begin{aligned} \triangle(u \circ T) &= \sum_{m=1}^{N} \sum_{j,k=1}^{N} t_{k,m} t_{j,m} (D_k D_j u) \circ T, \\ &= \sum_{j,k=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{N} t_{k,m} t_{j,m} \right) (D_k D_j u) \circ T = (\triangle u) \circ T. \end{aligned}$$

■

El siguiente resultado proporciona una condición necesaria para que una función sea armónica.

Observación 2 *Sea $\partial\Omega$ de clase C^1. Si f es una función armónica en Ω, entonces de la identidad de Green (1.2) tenemos*

$$\int_{\partial\Omega} \mathcal{D}_n f dS = 0. \tag{1.3}$$

A continuación presentamos ejemplos de funciones armónicas.

Proposición 1 *Sea f una función analítica en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces la parte real y la parte imaginaria de f son funciones armónicas en Ω.*

Demostración. Como f es analítica en Ω entonces $f^{(n)}$ es analítica en Ω para todo $n \geq 1$, (ver [2], Corolario 3.1.2). De donde se sigue que $u = \mathrm{Re} f, v = \mathrm{Im} f \in C^{\infty}(\Omega)$. De las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

se obtiene que u y v son armónicas en Ω. ■

Definición 3 *Dada u armónica en un abierto de $\mathbb{R}^2$, diremos que v es armónica conjugada de u en Ω si $f = u + iv$ es holomorfa en Ω. O equivalentemente, por las condiciones de Cauchy-Riemann, v satisface las condiciones $v_x = -u_y$, $v_y = u_x$ en todo punto de Ω.*

El siguiente ejemplo muestra que no toda función real valuada y armónica en una región es la parte real de una función analítica. De hecho, el recíproco de la proposición anterior es válido para funciones definidas en una región simplemente conexa (ver [7]).

Ejemplo 1 *La función $u(z) = \log|z|$ es armónica en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ pero no es la parte real de una función analítica en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.*

Demostración. Dado que $u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$, por simetría es fácil ver que

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad u_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}, \\ u_{xx}(x,y) &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = -u_{yy}(x,y), \end{aligned}$$

si $(x,y) \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Sin embargo esta función u no tiene armónica conjugada en $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Si existiera una armónica conjugada v de u en Ω, consideramos la función de variable real $g(t) = v(cost, sent)$, con $t \in [0, 2\pi]$. Claramente g es una función diferenciable en $[0, 2\pi]$, al derivar y usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann se obtiene

$$g'(t) = -v_x(cost, sent)sent + v_y(cost, sent)cost = u_y(cost, sent)sent + u_x(cost, sent)cost = 1.$$

Esto implica que existe una constante C tal que $g(t) = t + C$, lo cual no puede ser porque $g(0) = g(2\pi)$. ∎

Debido a la invariancia del operador de Laplace bajo transformaciones ortogonales, es natural buscar soluciones radiales $u(x) = h(|x|)$ de la ecuación de Laplace. Primero mostramos un cálculo elemental:

Lema 1 *Para $h \in C^2(0,\infty)$ se tiene*

$$\Delta h(|x|) = h''(|x|) + (N-1)|x|^{-1}h'(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}. \tag{1.4}$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$. Claramente

$$D_i(h(|x|)) = h'(|x|)D_i|x| = h'(|x|)\,|x|^{-1}x_i, \tag{1.5}$$

usando la igualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned} D_i^2(h(|x|)) &= h'(|x|)\,|x|^{-1} + \left\{h''(|x|)\,|x|^{-1} - h'(|x|)\,|x|^{-2}\right\}|x|^{-1}x_i^2 \\ &= h''(|x|)\,|x|^{-2}x_i^2 + h'(|x|)\left\{|x|^{-1} - |x|^{-3}x_i^2\right\}. \end{aligned}$$

∎

Observación 3 *Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\Delta|x|^\alpha = \alpha(N+\alpha-2)|x|^{\alpha-2}, \quad x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}. \tag{1.6}$$

En particular, la función $|x|^{2-N}$ es armónica en $\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ para $N > 2$.

El siguiente resultado caracteriza a las funciones radiales y armónicas en $\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$.

Proposición 2 *Sea* $h \in C^2(0,\infty)$. *Si* $u(x) = h(|x|)$ *es una función armónica en* $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, *entonces*

$$h(r) = \begin{cases} C_1 + C_2 \log r, & si\ N = 2, \\ C_1 + C_2 r^{2-N}, & si\ N \geq 3, \end{cases}$$

donde C_1 *y* C_2 *son constantes.*

Demostración. De (1.4) se sigue que h tiene que satisfacer la ecuación diferencial

$$h''(r) + \frac{N-1}{r} h'(r) = 0, \quad r > 0,$$

por lo tanto

$$(h'(r) r^{N-1})' = 0,$$

lo cual implica que existe una constante C tal que $h'(r) = Cr^{1-N}$, de donde se sigue el resultado. ■

Definición 4 *Sea* $y \in \mathbb{R}^N$, *la función* $\Gamma(\cdot, y)$ *definida en* $\mathbb{R}^N \backslash \{y\}$ *como sigue*

$$\Gamma(x,y) = \begin{cases} \log |x-y|, & si\ N = 2, \\ |x-y|^{2-N}, & si\ N \geq 3, \end{cases}$$

es armónica en $\mathbb{R}^N \backslash \{y\}$ *por el Ejemplo 1, la Observación 3 y la invariancia de las funciones armónicas bajo traslaciones. La función* $\Gamma(x,y)$ *es conocida como la solución fundamental de la ecuación de Laplace.*

Enseguida mostramos la característica más reconocida de las funciones armónicas.

Teorema 2 *Propiedad del valor medio. Supongamos que* u *es armónica en* $\overline{B(a;r)}$. *Entonces*

$$u(a) = \int_{\partial B} u(a + r\zeta) \mathrm{d}\sigma(\zeta), \tag{1.7}$$

donde $B = B_1(0)$.

Demostración. Debido a la invariancia de la ecuación de Laplace respecto a traslaciones y dilataciones podemos suponer que $a = 0$, $r = 1$. Sea $\epsilon \in (0,1)$ fijo. Cuando $N > 2$ aplicamos la identidad de Green (1.2) a las funciones armónicas $u, v(x) = |x|^{2-N}$ en $B \backslash B_\epsilon(0)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B \backslash B_\epsilon(0)} \left(u(x) \Delta(|x|^{2-N}) - |x|^{2-N} \Delta u(x) \right) \mathrm{d}V, \\ &= \int_{\partial(B \backslash B_\epsilon(0))} (u(x) \mathcal{D}_n |x|^{2-N} - |x|^{2-N} \mathcal{D}_n u) \mathrm{d}S. \end{aligned}$$

Por otro lado, de (1.5) se sigue que $\mathcal{D}_n|x|^{2-N} = \left\langle (2-N)\,|x|^{-N}x, x\right\rangle = (2-N)$ en ∂B y $\mathcal{D}_n|x|^{2-N} = \left\langle (2-N)\,|x|^{-N}x, \epsilon^{-1}x\right\rangle = (2-N)\,\epsilon^{1-N}$ en $\partial B_\epsilon(0)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(2-N)\int_{\partial B} u\mathrm{d}S &= (2-N)\epsilon^{1-N}\int_{\partial B_\epsilon(0)} u\mathrm{d}S + \int_{\partial B}\mathcal{D}_n u\mathrm{d}S - \epsilon^{2-N}\int_{\partial B_\epsilon(0)}\mathcal{D}_n u\mathrm{d}S,\\ &= (2-N)\epsilon^{1-N}\int_{\partial B_\epsilon(0)} u\mathrm{d}S = (2-N)\int_{\partial B} u\left(\epsilon\xi\right)\mathrm{d}S\left(\xi\right),\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue de (1.3). Como u es continua en 0, el último término de la igualdad anterior tiende a $(2-N)S(\partial B)u\,(0)$ cuando $\epsilon \to 0$. Cuando $N = 2$ la demostración es similar, basta reemplazar $|x|^{2-N}$ por $log|x|$. ■

Proposición 3 *Propiedad del valor medio versión volumen. Si u es armónica en $\overline{B}(a;r)$. Entonces*

$$u(a) = \frac{1}{V(B(a,r))}\int_{B(a,r)} u\mathrm{d}V. \tag{1.8}$$

Demostración. Usando coordenadas polares, el Teorema de Fubini, (1.7), (1.1) y (1.7) tenemos

$$\int_{B(a,r)} u\mathrm{d}V = \int_0^r t^{N-1}\left(\int_{\partial B} u(a+t\zeta)\mathrm{d}S(\zeta)\right)\mathrm{d}t = \frac{r^N S(\partial B)}{N}u(a).$$

■

Un hecho notable es que toda función continua que satisface la propiedad del valor medio es armónica. A continuación mencionamos tal resultado para referencias futuras, aunque no lo probamos, (ver [8, Teorema 1.20]).

Teorema 3 *Sea u una función continua en Ω que satisface la propiedad del valor medio, entonces u es armónica en Ω.*

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado sobre convergencia de sucesiones armónicas.

Teorema 4 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones armónicas definidas en Ω. Si $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre todo conjunto compacto K de Ω a una función u, entonces u es armónica en Ω.*

Demostración. De la hipótesis se sigue que u es continua sobre todo subconjunto compacto de Ω, en particular en Ω.

Sea $x_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subseteq \Omega$. Usando nuevamente la hipótesis tenemos que existe m_0 tal que

$$|u_m(x) - u(x)| < 1, \text{ para todo } x \in \overline{B_r(x_0)},\ m > m_0.$$

Como u_m es armónica en Ω, por la propiedad del valor medio se tiene

$$u_m(x_0) = \frac{1}{Vol(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} u_m(x) \mathrm{d}V, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Además,

$$|u_m(x)| \leq |u(x) - u_m(x)| + |u(x)| < 1 + |u(x)|, \text{ para todo } x \in \overline{B_r(x_0)}, \; m > m_0.$$

Por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene

$$u(x_0) = \frac{1}{Vol(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} u(x) \mathrm{d}V,$$

por lo que u es armónica en Ω. ∎

1.3. El principio del máximo

Ahora presentamos una propiedad muy importante que satisfacen las funciones armónicas, a saber, el principio del máximo (y del mínimo).

Teorema 5 *Principio del Máximo. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ una región y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función armónica. Si u alcanza su máximo (mínimo) en Ω, entonces u es constante en Ω.*

Demostración. Supongamos que u alcanza su máximo en $x_0 \in \Omega$. Dado que u es una función continua en Ω, se sigue que el conjunto $M = \{x \in \Omega : u(x) = \text{máx}_{y \in \Omega} u(y)\}$ es cerrado (relativo a Ω) y no vacío.

Como Ω es abierto existe $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Supongamos que existe $x \in B_r(x_0)$ tal que $u(x) < u(x_0)$. Por la continuidad de u en x, existe $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x) \subset \overline{B}_r(x_0)$ y $u < u(x_0)$ en $B_\rho(x)$. Por la Propiedad del Valor Medio se sigue que

$$u(x_0) = \int_{B_r(x_0) \setminus B_\rho(x)} u \frac{\mathrm{d}V}{V(B_r(x_0))} + \int_{B_\rho(x)} u \frac{\mathrm{d}V}{V(B_r(x_0))} < u(x_0).$$

Lo cual no es posible, por lo tanto $u = u(x_0)$ en $B_r(x_0)$ y se sigue que M es un subconjunto abierto de Ω. De la conexidad de Ω se tiene que $M = \Omega$.

Si u alcanza un mínimo en Ω, se aplica el mismo argumento a $-u$ ya que $-u$ es armónica y $min_\Omega u = -max_\Omega(-u)$. ∎

Corolario 2 *Sea Ω una región acotada. Si $u \in C(\overline{\Omega})$ es armónica en Ω y toma valores reales, entonces u alcanza su valor máximo (mínimo) en $\partial\Omega$.*

Demostración. Como $\overline{\Omega}$ es compacto, u alcanza su mínimo y máximo. Si u alcanza su máximo (mínimo) en Ω entonces u es constante en $\overline{\Omega}$. ∎

Corolario 3 *Sea Ω una región acotada. Si $u, v \in C(\overline{\Omega})$ son armónicas en Ω y $u = v$ en $\partial\Omega$, entonces $u = v$ en Ω.*

Ejemplo 2 *El resultado anterior no se cumple en regiones no acotadas; por ejemplo, las funciones $u(x) = 0$ y $v(x) = x_N$ son armónicas en el semiespacio superior y coinciden en el plano $x_N = 0$.*

El siguiente ejemplo muestra que es necesaria la condición $u, v \in C(\overline{\Omega})$ en el corolario anterior.

Ejemplo 3 *La función*

$$u(z) = Re\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

es armónica en $\mathbb{D}$ y $u = 0$ en $\partial\mathbb{D}\setminus\{1\}$. En este caso la función alcanza un valor mínimo en $\overline{\mathbb{D}}\setminus\{1\}$ pero no un valor máximo.

El siguiente resultado es el principio del máximo para funciones armónicas con valores complejos.

Corolario 4 *Sea Ω una región y $u : \Omega \to \mathbb{C}$ una función armónica en Ω. Si $|u|$ alcanza su máximo en Ω, entonces u es constante.*

Demostración. Supongamos que existe $a \in \Omega$ tal que $|u(a)| > 0$ y $|u(z)| \leq |u(a)|$ para todo $z \in \Omega$. Elegimos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$ y $\lambda u(a) = |u\,(a)\,|$. Dado que $Re\,(\lambda u) \leq |\lambda u| \leq |u\,(a)\,| = Re\,(\lambda u\,(a))$ en Ω, por el principio del máximo se sigue que $Re(\lambda u)$ es constante en Ω y que $\text{Im}(\lambda u) \equiv 0$ en Ω. Así λu, es constante en Ω, por lo tanto u, es constante en Ω. ■

Observación 4 *El principio del mínimo no se cumple para $|u|$, por ejemplo, consideremos la función armónica en B dada por $u(x) = x_1$.*

Corolario 5 *Los ceros de una función armónica real valuada no son aislados.*

Demostración. Supongamos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica. Sean $a \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(a) \subseteq \Omega$ y $u(a) = 0$.

Si $u \equiv 0$ en $\partial B_r(a)$ por el principio del máximo (mínimo) se sigue que $u \equiv 0$ en $B_r(a)$.

Si $u \not\equiv 0$ en $\partial B_r(a)$ por el principio del máximo (mínimo) tenemos que u toma valores positivos y negativos en $\partial B_r(a)$. Por la continuidad de u obtenemos que $u(\partial B_r(a))$ es un intervalo que contiene al cero. Dado que $r > 0$ fue arbitrario, a no es un cero aislado. ■

1.4. El núcleo de Poisson para la bola unitaria

Definición 5 *Sean Ω una región y $\varphi \in C(\partial\Omega)$. El problema de Dirichlet para el operador de Laplace en Ω, consiste en hallar una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisfaga*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \text{ en } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi, \text{ en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Observación 5 *Sean Ω una región acotada y $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluciones del problema de Dirichlet en Ω, por lo tanto $u_1 - u_2 = 0$ en $\partial\Omega$. Del principio del máximo (mínimo) se tiene que $u_1 = u_2$ en Ω, de donde se sigue la unicidad de las soluciones al problema de Dirichlet.*

Teorema 6 *Existe una función $P : B \times \partial B \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para toda función u armónica en $\overline{B}$ se tiene*

$$u(x) = \int_{\partial B} u(\zeta) P(x,\zeta) \mathrm{d}\sigma(\zeta), \; x \in B. \tag{1.9}$$

La función $P(x,\zeta)$ se conoce como núcleo de Poisson y está dada por

$$P(x,\zeta) = \frac{1 - |x|^2}{|x-\zeta|^N}. \tag{1.10}$$

Demostración. Supongamos que $N = 2$ y que $0 < |a| < 1$, $a \in \mathbb{C}$. La transformación de Möbius $T(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z}$ es analítica en $\overline{\mathbb{D}}$ y $T(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$. Aplicamos la propiedad del valor medio a la función armónica $u \circ T$:

$$u(a) = \int_0^{2\pi} (u \circ T)\left(e^{i\theta}\right) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

Haciendo el cambio de variable $e^{i\varphi} = T\left(e^{i\theta}\right)$ tenemos que

$$\begin{aligned} ie^{i\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} &= T'\left(e^{i\theta}\right) ie^{i\theta} \\ &= \frac{1-|a|^2}{\left(1+\overline{a}e^{i\theta}\right)^2} ie^{i\theta}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi &= \frac{1-|a|^2}{\left(1+\overline{a}e^{i\theta}\right)^2} \frac{e^{i\theta}}{T\left(e^{i\theta}\right)} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\left|e^{i\varphi}-a\right|^2}{1-|a|^2} \mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que $T^{-1}(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$. Entonces

$$u(a) = \int_0^{2\pi} \frac{1-|a|^2}{|e^{i\varphi}-a|^2} u\left(e^{i\varphi}\right) \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}.$$

Se sigue en este caso que $P(x,\zeta) = \left(1 - |x|^2\right)|x-\zeta|^{-2}$.

Ahora consideramos el caso $N > 2$. Dado que

$$\left||y|^{-1}y - |y|x\right|^2 = 1 + |x|^2|y|^2 - 2\langle x,y\rangle, \quad y \neq 0,$$

se tiene por simetría que para todo $x, y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

$$\left||y|^{-1}y - |y|x\right| = \left||x|^{-1}x - |x|y\right|.$$

En particular, para $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $y \in S$, tenemos

$$|y - x|^{2-N} = |x|^{2-N}\left|y - |x|^{-2}x\right|^{2-N}. \tag{1.11}$$

Sea $x \in B\backslash\{0\}$ fijo. De la Observación 3 se sigue que la función $\mathcal{L}(y) = |y-x|^{2-N}$ es armónica en $\overline{B}\backslash\{x\}$ y que la función $\mathcal{R}(y) = |x|^{2-N}\left|y - |x|^{-2}x\right|^{2-N}$ es armónica en $\overline{B}$ dado que $|x|^{-2}x \notin \overline{B}$. Además de la igualdad (1.11) se sigue que $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ en ∂B. Sean

$$v(y) = \mathcal{L}(y) - \mathcal{R}(y)$$

y $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq B$. Si $\Omega_\epsilon = B\backslash B_\epsilon(x)$ entonces $v \in C^2(\overline{\Omega}_\epsilon)$ y de la identidad de Green tenemos

$$0 = \int_{\Omega_\epsilon}(v\Delta u - u\Delta v)\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega_\epsilon}(v\mathcal{D}_n u - u\mathcal{D}_n v)\,\mathrm{d}S.$$

Dado que $\partial\Omega_\epsilon = \partial B \cup \partial B_\epsilon(x)$ y $v = 0$ en ∂B, entonces

$$-\int_{\partial B} u\mathcal{D}_n v\mathrm{d}S = \int_{\partial B_\epsilon(x)}(v\mathcal{D}_n u - u\mathcal{D}_n v)\,\mathrm{d}S. \tag{1.12}$$

Claramente $|\mathcal{D}_n u| \leq \|\nabla u\|_\infty$, $\mathcal{R}$ es acotada en B, $\mathcal{L} = \epsilon^{2-N}$ sobre ∂B_ϵ y $S(\partial B_\epsilon) = \epsilon^{N-1}S(\partial B)$, por lo tanto

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial B_\epsilon(x)} v(y)\mathcal{D}_n u(y)\mathrm{d}S = 0. \tag{1.13}$$

Usando (1.5) calculamos $\nabla\mathcal{R}(y)$ y $\nabla\mathcal{L}(y)$:

$$\nabla\mathcal{R}(y) = (2-N)|x|^{2-N}\left|y - |x|^{-2}x\right|^{-N}(y - |x|^{-2}x),\ \nabla\mathcal{L}(y) = (2-N)|y-x|^{-N}(y-x).$$

Por lo tanto existe $C > 0$ tal que $|\mathcal{D}_n\mathcal{R}| \leq C|x|^{2-N}$ sobre $\overline{B}$, y además

$$\mathcal{D}_n\mathcal{L} = (2-N)\epsilon^{1-N},\ \text{sobre } \partial B_\epsilon(x).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial B_\epsilon(x)} u\mathcal{D}_n v\frac{\mathrm{d}S}{2-N} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial B_\epsilon(x)}\epsilon^{1-N}u\mathrm{d}S = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial B} u(x+\epsilon z)\mathrm{d}S(z) = S(\partial B)u(x).$$

De lo anterior y de las igualdades (1.12) y (1.13) se sigue que

$$u(x) = \frac{1}{(2-N)} \int_{\partial B} u(y) \mathcal{D}_n v(y) \mathrm{d}\sigma(y).$$

Usamos (1.11) para calcular $\mathcal{D}_n v$ sobre ∂B:

$$\frac{1}{2-N} \mathcal{D}_n v(y) = \frac{1-|x|^2}{|x-y|^N}$$

De donde se sigue que

$$P(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^N}.$$

■

A continuación presentamos algunas propiedades básicas del Núcleo de Poisson.

Proposición 4 *Para cada $y \in \partial B$ fijo, el núcleo de Poisson $P(x,y)$ es una función armónica en $\mathbb{R}^N \backslash \{y\}$, $N \geq 2$.*

Demostración. Ponemos $u(x) = 1-|x|^2$, $v(x) = |x-y|^{-N}$ en la siguiente igualdad

$$\Delta_x (uv) = v\Delta_x u + 2\langle \nabla_x u, \nabla_x v \rangle + u\Delta_x v,$$

y por (1.4), (1.5), (1.6), tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_x P(x,y) &= -2Nv + 2\left\langle -2x, \frac{-N(x-y)}{|x-y|^{N+2}} \right\rangle + \frac{2Nu(x)}{|x-y|^{N+2}} \\ &= \frac{2N}{|x-y|^{N+2}} \left(-|x-y|^2 + 2\langle x, x-y \rangle + 1 - |x|^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

■

Lema 2 *El núcleo de Poisson tiene las siguientes propiedades:*

1. *$P(x,y) > 0$ para todo $x \in B$, $y \in \partial B$.*
2. *$\int_{\partial B} P(x,y) \mathrm{d}\sigma(y) = 1$ para todo $x \in B$.*
3. *Para todo $\eta \in \partial B$, $\delta > 0$,*

$$\lim_{x \to \eta} \int_{|y-\eta|>\delta} P(x,y) \mathrm{d}\sigma(y) = 0.$$

Demostración. El primer punto es claro. Dado que la función constante igual a 1 es armónica en $\mathbb{R}^N$, el Teorema 6 implica el segundo punto. Sean $\delta > 0$ y $\eta \in \partial B$ fijos, si $|x-\eta| < \delta$ y $|y-\eta| > \delta$ entonces $|y-x| \geq |y-\eta| - |\eta - x| > \delta - |\eta - x| > 0$, por lo tanto

$$\int_{|y-\eta|>\delta} P(x,y)\mathrm{d}\sigma(y) \leq (\delta - |\eta - x|)^{-N}(1-|x|^2),$$

de donde se sigue el punto 3. ■

Definición 6 *Para $f \in C(\partial B)$, la integral de Poisson de f, denotada por $P[f]$, es la función definida en B como sigue*

$$P[f](x) = \int_{\partial B} P(x,y)f(y)\mathrm{d}\sigma(y). \tag{1.14}$$

El siguiente teorema muestra que la integral de Poisson resuelve el problema de Dirichlet para B.

Teorema 7 *Solución del problema de Dirichlet para la bola. Sea $f \in C(\partial B)$, definimos a la función u en $\overline{B}$ como sigue*

$$u(x) = \begin{cases} \int_{\partial B} P(x,y)f(y)\mathrm{d}\sigma(y) & si\ x \in B, \\ f(x) & si\ x \in \partial B. \end{cases}$$

Entonces u es continua en $\overline{B}$ y armónica en B.

Demostración. Las derivadas parciales de segundo orden de $P(x,y)$ respecto a $x \in B$ son continuas, esto implica que podemos diferenciar bajo el símbolo de integral y usar la Proposición 4 para concluir que u es armónica en B. Resta probar que u es continua en ∂B. Sea $\eta \in \partial B$ fijo y $\varepsilon > 0$ dado, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|f(\zeta) - f(\eta)| < \epsilon$ si $|\zeta - \eta| \leq \delta$. Usando las propiedades del núcleo de Poisson tenemos

$$\begin{aligned} |u(x) - f(\eta)| &= \left| \int_{\partial B} P(x,\zeta)f(\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta) - \int_{\partial B} P(x,\zeta)f(\eta)\mathrm{d}\sigma(\zeta) \right| \\ &\leq \int_{\partial B} |P(x,\zeta)||f(\zeta) - f(\eta)|\mathrm{d}\sigma(\zeta) \\ &< \varepsilon \int_{|\zeta-\eta|\leq\delta} P(x,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta) + 2\|f\|_\infty \int_{|\zeta-\eta|>\delta} P(x,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta) \\ &< \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{|\zeta-\eta|>\delta} P(x,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta). \end{aligned}$$

Por el punto 3. del Lema 2 se sigue que existe $\gamma > 0$ tal que

$$2\|f\|_\infty \int_{|\zeta-\eta|>\delta} P(x,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta) < \varepsilon,$$

si $|x-\eta| < \gamma$, $x \in B$, de donde se sigue el resultado. ■

Corolario 6 *Si u es una función continua en $\overline{B}$ y armónica en B, entonces $u = P[u|_{\partial B}]$ en B.*

Demostración. Por el teorema anterior la función $u - P[u|_{\partial B}]$ es armónica en B y se anula en ∂B, por el Corolario 2 se tiene que $u - P[u|_{\partial B}] \equiv 0$ en B. ■

Usando el hecho de que las funciones armónicas se preservan bajo dilataciones y traslaciones, dada una función continua f en $\partial B(a, r)$ existe una única función continua u en $\overline{B(a, r)}$, con u armónica en $B(a, r)$ tal que $u = f$ en $\overline{B(a, r)}$. En este caso u resuelve el problema de Dirichlet en $\overline{B(a, r)}$ con f continua en $\partial B(a, r)$.

Observación 6 *Toda función armónica es infinitamente diferenciable.*

Demostración. Para cada $\zeta \in \partial B$ la función $P(\cdot, \zeta)$ es infinitamente diferenciable en B. Además si u es continua en $\overline{B}$ y armónica en B entonces

$$u(x) = \int_{\partial B} P(x, \zeta) u(\zeta) \mathrm{d}\sigma(\zeta) \qquad \text{para toda } x \in B. \tag{1.15}$$

Diferenciando bajo la integral se tiene que $u \in C^\infty(B)$ de hecho la fórmula

$$D^\alpha u(x) = \int_{\partial B} D_x^\alpha P(x, \zeta) u(\zeta) \mathrm{d}\sigma(\zeta) \tag{1.16}$$

se cumple para toda $x \in B$ y para todo multiíndice α. Lo anterior es válido para toda bola cerrada, después de aplicar una traslación y una dilatación, se sigue que toda función armónica en un conjunto abierto es infinitamente diferenciable. ■

Recordamos que si f es analítica y acotada por M en un disco $B(a, r) \subset \mathbb{C}$, entonces

$$|f^{(m)}(a)| \leq \frac{m! M}{r^m}$$

para todo entero no negativo m. El siguiente resultado es el análogo del anterior en el contexto de las funciones armónicas definidas sobre bolas en R^N.

Proposición 5 *Sean α un multiíndice, u armónica y acotada por M en $B(a, r)$. Entonces existe una constante positiva C_α tal que*

$$|D^\alpha u(a)| \leq \frac{C_\alpha M}{r^{|\alpha|}}. \tag{1.17}$$

Demostración. Supongamos que $a = 0$. Si u es armónica y acotada por M sobre $\overline{B}$, entonces por (1.16) se sigue

$$|D^\alpha u(0)| = \left| \int_{\partial B} D_x^\alpha P(0, \zeta) u(\zeta) \mathrm{d}\sigma(\zeta) \right| \leq M \int_{\partial B} |D_x^\alpha P(0, \zeta)| \, \mathrm{d}\sigma(\zeta) \;\; = \;\; C_\alpha M,$$

donde $C_\alpha = \int_{\partial B} |D_x^\alpha P(0,\zeta)|\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)$.

Si u es armónica y acotada por M sobre $\overline{B}(0,r)$, entonces aplicando la igualdad anterior a la $r-$dilatación u_r se sigue que

$$|D^\alpha u(0)| \leq \frac{C_\alpha M}{r^{|\alpha|}}.$$

Reemplazando r por $r-\epsilon$ y haciendo $\epsilon \longrightarrow 0$, se obtiene el resultado cuando u es armónica en la bola abierta $B(0,r)$ y está acotada por M. $\blacksquare$

Capítulo 2

Espacios de Bergman armónicos

En este capítulo introducimos los espacios de Bergman armónicos y mostramos algunos aspectos de tales espacios.

Para $1 \leq p \leq \infty$ definimos

$$\mathbf{b}^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} \mid u \text{ es armónica en } \Omega \text{ y } u \in \mathbf{L}^p(\Omega)\}.$$

El espacio vectorial $\mathbf{b}^p(\Omega)$ hereda la norma de $\mathbf{L}^p(\Omega)$ y se le llama espacio de Bergman armónico.

2.1. Continuidad del funcional valuación

Para cada $x \in \Omega$ fijo, el mapeo $u \longmapsto u(x)$ es un funcional lineal en $\mathbf{b}^p(\Omega)$ y es conocido como el funcional valuación en x.

El siguiente resultado establece que el funcional valuación es acotado sobre cada espacio de Bergman.

Proposición 6 *Sea $1 \leq p \leq \infty$, Ω un conjunto abierto con $\partial\Omega \neq \emptyset$ y $x \in \Omega$ fijo. Entonces*

$$|u(x)| \leq \frac{1}{(V(B))^{\frac{1}{p}} d(x, \partial\Omega)^{\frac{N}{p}}} \|u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}. \tag{2.1}$$

para todo $u \in \mathbf{b}^p(\Omega)$, donde $d(x, \partial\Omega)$ es la distancia de x a la frontera de Ω.

Demostración. Claramente el resultado es válido cuando $p = \infty$. Si $x \in \Omega$ entonces $d_\Omega(x) := d(x, \partial\Omega) = inf\{d(x, y) \mid y \in \partial\Omega\} > 0$. Tomamos $0 < r < d_\Omega(x)$, entonces $B_r(x) \subseteq \Omega$ y aplicando la versión volumen de la propiedad del valor medio a u sobre $B_r(x)$ tenemos

$$u(x) = \frac{1}{Vol(B_r(x))} \int_{B_r(x)} u(y) \mathrm{d}V(y),$$

por la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq \frac{1}{Vol(B_r(x))}\int_\Omega |u(y)|\chi_{B_r(x)}(y)\mathrm{d}V(y)\\ &\leq (Vol(B_r(x)))^{-\frac{1}{p}}\|u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}\\ &= r^{-\frac{N}{p}}(Vol(B))^{-\frac{1}{p}}\|u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

El resultado se sigue al considerar el límite cuando r tiende a $d_\Omega(x)$. ■

Corolario 7 *Sea $1 \leq p \leq \infty$, Ω un conjunto abierto con $\partial\Omega \neq \emptyset$ y $x \in \Omega$ fijo. Para todo multiíndice α, existe una constante $C_\alpha > 0$ tal que*

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{C_\alpha}{d(x,\partial\Omega)^{|\alpha|+\frac{N}{p}}}\|u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \qquad \text{para todo } x \in \Omega,\ u \in \mathbf{b}^p(\Omega). \tag{2.3}$$

Demostración. Aplicamos la proposición anterior y la desigualdad (1.17) a la función u sobre la bola de radio $\frac{d(x,\partial\Omega)}{2}$ con centro en x. ■

Observación 7 *De (2.1) se sigue que la convergencia de una sucesión en $\mathbf{b}^2(\Omega)$ implica su convergencia puntual en Ω.*

El siguiente resultado muestra que $\mathbf{b}^p$ es un espacio vectorial normado completo.

Proposición 7 *Para $1 \leq p \leq \infty$, $\mathbf{b}^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Como $\mathbf{L}^p(\Omega)$ es completo, basta mostrar que $\mathbf{b}^p(\Omega)$ es cerrado. Sean $u \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ y $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{b}^p(\Omega)$ tal que $\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = 0$. Mostraremos que $u \in \mathbf{b}^p(\Omega)$.

Fijamos un conjunto compacto $K \subseteq \Omega$. Dado que $\partial\Omega$ es cerrado y $K \bigcap \partial\Omega = \phi$, se sigue que $d(K,\partial\Omega) > 0$. Aplicando la Proposición 6 a la función $u_n - u_m$ tenemos

$$\begin{aligned}|(u_n - u_m)(x)| &\leq \frac{1}{(V(B))^{\frac{1}{p}}d(x,\partial\Omega)^{\frac{N}{p}}}\|u_n - u_m\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)},\\ &\leq \frac{1}{(V(B))^{\frac{1}{p}}d(K,\partial\Omega)^{\frac{N}{p}}}\|u_n - u_m\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

para todo $x \in K$, $n, m \in \mathbb{N}$. Dado que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbf{L}^p(\Omega)$, la desigualdad anterior implica que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy uniforme sobre K. Así que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre K a una función ν_K.

Sea $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos compactos tal que $K_m \subsetneq K_{m+1}$ y $\Omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$. Por la unicidad de los límites se sigue que $\nu_{K_{m+1}}$ es una extensión de ν_{K_m} y por lo tanto $\nu = \lim_{m\to\infty}\nu_{K_m}$ es una función bien definida sobre Ω. Dado que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge sobre subconjuntos compactos de Ω a ν, por el Teorema 4 se sigue que ν es armónica en Ω.

Como $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u en $\mathbf{L}^p(\Omega)$, entonces existe una subsucesión $\left\{u_{n_j}\right\}$ tal que $\lim_{j\to\infty} u_{n_j} = u$ en c.t.p de Ω. Por la unicidad de los límites se sigue que $u = \nu$ en c.t.p de Ω y la función u se identifica con ν por lo que $u \in \mathbf{b}^p(\Omega)$. ∎

Tenemos particular interés cuando $p = 2$, en este caso el espacio $\mathbf{b}^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert respecto al producto interior

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u\overline{v}\mathrm{d}V.$$

2.2. Núcleo de Bergman

En esta sección introducimos el llamado núcleo de Bergman y estudiamos algunas de sus propiedades básicas.
Sea $x \in \Omega$ fijo. Consideramos $F_x : \mathbf{b}^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ el funcional valuación en x, es decir,

$$F_x(u) = u(x), \text{ para todo } u \in \mathbf{b}^2(\Omega).$$

De la Proposición 6 se sigue que F_x es un funcional lineal continuo sobre $\mathbf{b}^2(\Omega)$. Por el Teorema de Representación de Riesz, existe una única función $R_\Omega(x,\cdot) \in \mathbf{b}^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} F_x(u) &= \langle u, R_\Omega(x,\cdot)\rangle \\ &= \int_\Omega u(y)\overline{R_\Omega(x,y)}\mathrm{d}V(y), \end{aligned} \tag{2.5}$$

para todo $u \in \mathbf{b}^2(\Omega)$. Además $\|R_\Omega(x,\cdot)\|_2 = \|F_x\|$.

La función $R_\Omega : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ se conoce como el núcleo reproductor de $\mathbf{b}^2(\Omega)$ o el núcleo de Bergman de $\mathbf{b}^2(\Omega)$ ya que la fórmula anterior reproduce cada función en $\mathbf{b}^2(\Omega)$.

Como una consecuencia de la relación anterior tenemos

$$\|R_\Omega(x,\cdot)\|_2^2 = \langle R_\Omega(x,\cdot), R_\Omega(x,\cdot)\rangle = R_\Omega(x,x), \text{ para todo } x \in \Omega. \tag{2.6}$$

2.2.1. Propiedades del núcleo reproductor

Proposición 8 *El núcleo de Bergman R_Ω toma valores reales y $R_\Omega(x,y) = R_\Omega(y,x)$ para todo $x, y \in \Omega$.*

Demostración. Supongamos que $u \in \mathbf{b}^2(\Omega)$ toma valores reales, entonces

$$\begin{aligned} 0 = Imu(x) &= Im\int_\Omega u(y)\overline{R_\Omega(x,y)}\mathrm{d}V(y) \\ &= \int_\Omega u(y)Im\overline{R_\Omega(x,y)}\mathrm{d}V(y) \\ &= -\int_\Omega u(y)ImR_\Omega(x,y)\mathrm{d}V(y), \text{ para todo } x \in \Omega. \end{aligned}$$

En particular, podemos poner $u = ImR_\Omega(x,\cdot) \in \mathbf{b}^2(\Omega)$, $x \in \Omega$. Así,

$$\int_\Omega (ImR_\Omega(x,y))^2 \mathrm{d}V(y) = 0.$$

Por lo tanto $ImR_\Omega(x,y) = 0$ para todo $x, y \in \Omega$.

Dado que R_Ω toma valores reales, de (2.5) obtenemos

$$\begin{aligned} R_\Omega(y,x) &= \langle R_\Omega(y,\cdot), R_\Omega(x,\cdot)\rangle \\ &= \int_\Omega R_\Omega(y,z)R_\Omega(x,z)\mathrm{d}V(z) \\ &= R_\Omega(x,y). \end{aligned}$$

■

El siguiente resultado nos permite calcular el núcleo reproductor de $\mathbf{b}^2(\Omega)$.

Proposición 9 *Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier base ortonormal de $\mathbf{b}^2(\Omega)$ entonces*

$$R_\Omega(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u_n(x)} u_n(y), \tag{2.7}$$

para todo $x, y, \in \Omega$. Además la convergencia de la serie es uniforme sobre subconjuntos compactos de $\Omega \times \Omega$.

Demostración. Afirmamos que para todo subconjunto compacto K de Ω y cualquier base ortonormal $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbf{b}^2(\Omega)$, se tiene

$$sup_{x\in K}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|^2\right) < \infty. \tag{2.8}$$

Como $d(K,\partial\Omega) > 0$, por la igualdad (2.1) con $u = R_\Omega(x,\cdot)$ y (2.6) tenemos que

$$\|R_\Omega(x,\cdot)\|_2 \le V(B)^{-\frac{1}{2}} d(K,\partial\Omega)^{-\frac{N}{2}}, \text{ para todo } x \in K. \tag{2.9}$$

Dada la base ortonormal $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{b}^2(\Omega)$, $R_\Omega(x,\cdot)$ tiene la representación

$$R_\Omega(x,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle R_\Omega(x,\cdot), u_n\rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} u_n,$$

donde la serie converge en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, en particular en $\mathbf{b}^2(\Omega)$. Por (2.5), tenemos

$$\langle R_\Omega(x,\cdot), u_n\rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \overline{\langle u_n, R_\Omega(x,\cdot)\rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)}} = \overline{u_n(x)}.$$

Por lo tanto,

$$R_\Omega(x,\cdot)=\sum_{k=1}^{\infty}\overline{u_n(x)}u_n. \tag{2.10}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{u_n(x)}u_n$ converge en $\mathbf{b}^2(\Omega)$ a $R_\Omega(x,\cdot)$ y por la Observación 7 tenemos

$$R_\Omega(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{u_n(x)}u_n(y).$$

Usando la identidad de Parseval y (2.9) se obtiene (2.8):

$$\begin{aligned} sup\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}:x\in K\right\} &= sup\left\{\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\overline{u_n(x)}u_n\right\|_2 :x\in K\right\} \\ &\leq V(B)^{-\frac{1}{2}}d(K,\partial\Omega)^{-\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

La convergencia uniforme mencionada se sigue de (2.7), (2.8) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz. ■

2.2.2. La proyección de Bergman

Como $\mathbf{b}^2(\Omega)$ es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathbf{L}^2(\Omega,dV)$, existe una única proyección ortogonal

$$Q:\mathbf{L}^2(\Omega,dV)\longrightarrow\mathbf{b}^2(\Omega)$$

que es llamada la proyección de Bergman y que es un operador acotado de norma 1 que satisface $Qu=u$ para toda $u\in\mathbf{b}^2(\Omega)$ y $Q=Q^*$. Ahora veamos que Qu es un operador integral con núcleo R_Ω.

Proposición 10 *La proyección de Bergman $Q:\mathbf{L}^2(\Omega,dV)\longrightarrow\mathbf{b}^2(\Omega)$ satisface*

$$(Qu)(x)=\langle u,R_\Omega(x,\cdot)\rangle=\int_\Omega u(y)R_\Omega(x,y)\mathrm{d}V(y), \tag{2.11}$$

para toda $x\in\Omega, u\in\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Demostración. En efecto, aplicamos la igualdad (2.5) a $Qu\in\mathbf{b}^2(\Omega)$,

$$Qu(x)=\langle Qu,R_\Omega(x,\cdot)\rangle=\langle u,QR_\Omega(x,\cdot)\rangle=\langle u,R_\Omega(x,\cdot)\rangle.$$

■

2.3. Armónicos esféricos

En ocasiones es deseable poder expresar una función armónica en términos de series de funciones armónicas normalizadas, en este trabajo consideramos los llamados armónicos esféricos.

Primero introducimos el espacio de funciones de polinomios homogéneos.

Definición 7 *Un polinomio p se dice que es homogéneo de orden m en $\mathbb{R}^N$ si*

$$p(\lambda x_1, ..., \lambda x_N) = \lambda^m p(x_1, ..., x_N),$$

para todo $(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N, \lambda > 0$.

Denotamos por $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^N)$ al espacio de todos los polinomios homogéneos de orden m en $\mathbb{R}^N$ que tienen coeficientes complejos.

Claramente $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^N)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Con la notación de multiíndices, los elementos de $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^N)$ son los polinomios $p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ de la forma

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha, \qquad a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Es claro que el conjunto de monomios $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$ con $|\alpha| = m$ es una base para el espacio $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^N)$. Por otro lado, la dimensión de este espacio, que denotamos por d_m, es el número de formas en que puede ser escrita una N-ada $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ satisfaciendo $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N = m$.

Observación 8 *La dimensión de $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^N)$ es*

$$d_{m,N} = \binom{N+m-1}{N-1} = \binom{N+m-1}{m} = \frac{(N+m-1)!}{(N-1)!m!}.$$

Demostración. Usando la definición del producto finito de series absolutamente convergentes, haciendo $z = x_1 = \cdots = x_N$ tal que $|z| < 1$, tenemos

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} z^j\right)^N = \sum_{j=0}^{\infty} x_1^j \cdots \sum_{j=0}^{\infty} x_N^j = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=m} x^\alpha\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=m} 1\right) z^m.$$

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} z^j\right)^N = (1-z)^{-N} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{N+m-1}{m} z^m.$$

El resultado se sigue de igualar los coeficientes correspondientes. ■

Definición 8 $\mathcal{H}_m\left(\mathbb{R}^N\right)$ *denota al espacio de polinomios armónicos homogéneos de orden m en $\mathbb{R}^N$.*

Definición 9 *Un armónico esférico de grado m es la restricción a ∂B de un elemento en $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$. Denotamos por $\mathcal{H}_m(\partial B)$ a la colección de todos los armónicos esféricos de orden m.*

Claramente $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^N)$. Además es fácil ver que $\mathcal{H}_m(\partial B)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Proposición 11 *Sea $O(N)$ el grupo de transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^N$. Entonces $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$ es $O(N)$-invariante. En particular, $\mathcal{H}_m(\partial B)$ también lo es.*

Demostración. Si $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$ y $T \in O(N)$, entonces $(p \circ T)(\lambda x) = p(\lambda T x) = \lambda^m (p \circ T)(x)$ si $\lambda > 0$. Es claro que $p \circ T$ es un polinomio homogéneo de grado m. Concluimos al recordar que el espacio de funciones armónicas son invariante bajo rotaciones. ■

Dado que $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$ es invariante bajo conjugación compleja, se tiene que si $p \in \mathcal{H}_m(\partial B)$ entonces $Rep \in \mathcal{H}_m(\partial B)$ e $Imp \in \mathcal{H}_m(\partial B)$.

Definición 10 *Ponemos $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_1 = \{0\}$. Para $m \geq 2$ denotamos por $\mathcal{Q}_m(\mathbb{R}^N)$ al conjunto de todos los polinomios de la forma $Q(x) = |x|^2 p(x)$ donde $p \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^N)$. Es claro que $\mathcal{Q}_m(\mathbb{R}^N)$ es un subespacio de $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^N)$.*

A cada polinomio $p(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha$ con $a_\alpha \in \mathbb{C}$, le asociamos el operador diferencial $p(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$.

Si $|\alpha| \geq 1$ claramente $D^\alpha x^\alpha = \alpha!$. Si $|\alpha| = |\beta| \geq 1$ con $\alpha \neq \beta$, entonces podemos suponer que $\alpha_j > \beta_j$ para algún j de donde se sigue que $D^\alpha x^\beta = \prod_{i=1}^N \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i} x^{\beta_i} = 0$.

Usando la observación previa definimos un producto interior $\langle , \rangle_m$ en $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^N)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle_m &= p(D)[\overline{q}] \\ &= \sum_{|\alpha| = m} \alpha! a_\alpha \overline{b_\alpha} \end{aligned}$$

si $p(x) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha x^\alpha$, $q(x) = \sum_{|\alpha| = m} b_\alpha x^\alpha$.

Por convención identificamos a la función constante $p(D)[\overline{q}]$ definida en $\mathbb{R}^N$ con su valor numérico. Es fácil ver que $\langle p, q \rangle_m$ es lineal en la primer variable, lineal conjugada en la segunda variable y que $\langle p, p \rangle_m > 0$ si $p \neq 0$.

Ahora vamos a establecer una importante relación entre los espacios $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{H}_m$ y $\mathcal{Q}_m$.

Proposición 12 *Respecto al producto interior $\langle , \rangle_m$ en $\mathcal{P}_m$ tenemos*

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^N) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N) \oplus \mathcal{Q}_m(\mathbb{R}^N), \ m \geq 0. \tag{2.12}$$

Demostración. El resultado es trivial cuando $m = 0, 1$. Supongamos que $m \geq 2$, así que mostraremos que $\mathcal{H}_m\left(\mathbb{R}^N\right) = \mathcal{Q}_m^{\perp}(\mathbb{R}^N)$.

Sean $p \in \mathcal{Q}_m^{\perp}(\mathbb{R}^N)$ y $r(x) = h(x)q(x)$ con $q \in \mathcal{P}_{m-2}$ y $h(x) = |x|^2$, entonces $r(D) = h(D)q(D) = \Delta q(D) = q(D)\Delta$, lo cual implica

$$0 = \langle r, p\rangle_m = q\,(D)\,[\Delta\overline{p}] = q\,(D)\,[\overline{\Delta p}]. \tag{2.13}$$

Como Δp y q están en $\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^N)$ entonces

$$\langle q, \Delta p\rangle_{m-2} = q\,(D)\,[\overline{\Delta p}] = 0.$$

Al poner $q = \Delta p$ se tiene que $\langle \Delta p, \Delta p\rangle_{m-2} = 0$ lo cual implica que $\Delta p = 0$. Así que $p \in \mathcal{H}_m\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Recíprocamente la relación en (2.13) implica que $p \in \mathcal{Q}_m^{\perp}$ si $p \in \mathcal{H}_m\left(\mathbb{R}^N\right)$. ∎

Teorema 8 *Todo polinomio $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^N)$ se escribe de manera única en la forma*

$$p(x) = p_m(x) + |x|^2 p_{m-2}(x) + ... + |x|^{2k} p_{m-2k}(x),$$

donde $k = \left[\frac{m}{2}\right]$ denota el mayor entero menor o igual a $\frac{m}{2}$ y $p_{m-2j} \in \mathcal{H}_{m-2j}$ para todo $j = 0, \ldots, k$.

Demostración. Basta considerar $m \geq 2$. Si $m = 2$ el resultado se sigue de la Proposición 12.

Asumamos que el resultado es válido para todos los polinomios en $\mathcal{P}_j(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq j \leq m$. Si $p \in \mathcal{P}_{m+1}(\mathbb{R}^N)$, por la Proposición 12 existen $p_{m+1} \in \mathcal{H}_{m+1}(\mathbb{R}^N)$ y $q \in \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{R}^N)$, determinados de manera única por p, tal que

$$p(x) = p_{m+1}(x) + |x|^2 q(x).$$

Para finalizar aplicamos la hipótesis de inducción a q, el cual tiene una representación única en la forma mencionada. ∎

Corolario 8 *Si $p \in \mathcal{P}_m\left(\mathbb{R}^N\right)$, entonces $p|_{\partial B}$ es una suma de armónicos esféricos de grado a lo más m.*

Corolario 9 *Sea $h_{m,N} = dim\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$, se cumple que*

$$h_{m,N} = \binom{N+m-1}{N-1} - \binom{N+m-3}{N-1}, \qquad m \geq 2.$$

Demostración. El resultado se sigue de la Proposición 12 y de la Observación 8:

$$dim\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^N) = dim\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N) + dim\mathcal{Q}_m(\mathbb{R}^N) = dim\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N) + dim\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^N).$$

■

Es claro que $d_{0,N} = h_{0,N} = 1$ y que $d_{1,N} = h_{1,N} = N$.

Notamos que $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{H}_m(\partial B)$ tienen la misma dimensión ya que el mapeo $p \mapsto p_{|\partial B}$ es un isomorfismo.

Dado que $\binom{k+1}{j} = \binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}$, entonces

$$h_{m,N} = \binom{N+m-2}{N-2} + \binom{N+m-3}{N-2},$$

por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{h_{m,N}}{m^{N-2}} = \frac{2}{(N-2)!}. \tag{2.14}$$

Ejemplo 4 *Sea $m \geq 0$, $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^2)$ es el espacio vectorial complejo generado por $\left\{e^{im\theta}, e^{-im\theta}\right\}$.*

Demostración. Podemos representar un polinomio armónico $u(x,y)$ como la parte real de una función entera

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann se sigue que v es un polinomio en x y y. Dado que $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z)$ y f es analítica, se tiene que $f^{(n)} \equiv 0$ para un cierto $n \geq 0$ por lo que f es un polinomio en z. De modo que $u = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ es una combinación lineal de potencias $(x \pm iy)^m = r^m e^{\pm im\theta}$ si $x + iy = re^{i\theta}$. ■

Observación 9 *Dado que todo espacio vectorial de dimensión finita es cerrado, se sigue que $\mathcal{H}_m(\partial B)$ es un subespacio cerrado de $\mathbf{L}^2(\partial B)$ para toda $m \geq 0$ (ver [3]).*

Si $\mathbf{H} \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$, entonces $p = \frac{\mathbf{H}}{|x|^m}$ es un armónico esférico de orden m. Recíprocamente, si p es un armónico esférico de grado m, entonces $|x|^m p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$.

En adelante usamos el hecho de que cada $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ admite una única representación de la forma $x = r\xi$ donde $r = |x|$, $\xi \in \partial B$.

Proposición 13 *Si $m \neq k$, entonces $\mathcal{H}_m(\partial B)$ es ortogonal a $\mathcal{H}_k(\partial B)$ en $\mathbf{L}^2(\partial B)$.*

Demostración. Sean $p \in \mathcal{H}_m(\partial B)$, $q \in \mathcal{H}_k(\partial B)$. Aplicando la identidad de Green a las funciones armónicas $u(x) = r^m p(\zeta)$ y $v(x) = r^k q(\zeta)$ obtenemos

$$\int_{\partial B} (u\mathcal{D}_n v - v\mathcal{D}_n u)\mathrm{d}S = 0.$$

Sin embargo, para $\zeta \in \partial B$,

$$\mathcal{D}_n u(\zeta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} p(r\zeta) \mid_{r=1} = p(\zeta) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^m) \mid_{r=1} = mp(\zeta).$$

Análogamente $\mathcal{D}_n v = kq$ en ∂B, por lo tanto

$$(k-m) \int_{\partial B} q(\zeta) p(\zeta) \mathrm{d}S(\zeta) = 0.$$

∎

A continuación introducimos la noción de suma directa de subespacios vectoriales de un espacio de Hilbert.

Definición 11 *Sea H un espacio de Hilbert complejo, se dice que H es una suma directa de los subespacios H_m, denotado $H = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m$, cuando las siguientes condiciones se cumplen:*

1. *H_m es subespacio cerrado de H para toda $m \geq 0$.*
2. *H_m es ortogonal a H_k si $m \neq k$.*
3. *Para cada $x \in H$, existe una sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ en H tal que $x_m \in H_m$, $m \geq 1$, y*

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m,$$

donde la suma converge respecto a la norma en H.

Cuando se cumplen los incisos (1), (2) y (3) se dice que el espacio de Hilbert H es la suma directa de los subespacios H_m. Además la expansión en (3) es única.

Notamos que si se satisfacen (1) y (2), entonces (3) se cumple si y sólo si el espacio vectorial complejo generado por $\bigcup_{m=0}^{\infty} H_m$ es denso en H. Cuando $H = \mathbf{L}^2(\partial B)$ y $H_m = \mathcal{H}_m(\partial B)$ con $m \geq 0$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 9

$$\mathbf{L}^2(\partial B) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(\partial B). \tag{2.15}$$

Demostración. En este caso, las condiciones 1 y 2 de la Definición 11 se siguen de la Observación 9 y de la Proposición 13, resta probar la condición 3. Es suficiente mostrar que el espacio vectorial generado por $\bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(\partial B)$ es denso en $\mathbf{L}^2(\partial B)$. Por el Teorema de Stone-Weierstrass, el conjunto de restricciones $p|_{\partial B}$ de cada uno de los polinomios en $\mathbb{R}^N$ es denso en $C(\partial B)$ respecto a la norma del supremo. Por el Corolario 8 tales restricciones son combinaciones lineales finitas en $\bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(\partial B)$. El resultado se sigue al notar que $C(\partial B)$ está densamente encajado en $L^2(\partial B)$. ∎

2.4. Armónicos zonales

Sea $\eta \in S$ fijo, consideramos ahora el mapeo $\Lambda_\eta : \mathcal{H}_m(\partial B) \to \mathbb{C}$ definido por

$$\Lambda_\eta(p) = p(\eta),$$

para todo $p \in \mathcal{H}_m(\partial B)$. Dado que Λ_η es un funcional lineal y $dim\mathcal{H}_m(\partial B) < \infty$ se tiene que Λ_η es continuo. Es decir, $\Lambda_\eta \in (\mathcal{H}_m(\partial B))^*$ y por el Teorema de Representación de Riesz, existe un único $Z_\eta \in \mathcal{H}_m(\partial B)$ tal que

$$p(\eta) = \Lambda_\eta(p) = \langle p, Z_\eta \rangle_{\mathbf{L}^2(\partial B)} = \int_{\partial B} p\overline{Z_\eta} \mathrm{d}\sigma, \tag{2.16}$$

para toda $p \in \mathcal{H}_m$. Al armónico esférico Z_η se le llama armónico zonal de grado m con polo en η.

Denotamos $Z(\xi, \eta) := Z_\eta(\xi)$ y cuando se requiera explícitamente el orden m, se escribirá $Z_m(\xi, \eta)$.

Ejemplo 5 *Cuando $N = 2$, por el Ejemplo 4, es fácil verificar que*

$$Z_m(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = e^{i(\theta-\varphi)m} + e^{i(\varphi-\theta)m} = 2\cos(m(\theta - \varphi)). \tag{2.17}$$

Ahora establecemos algunas propiedades básicas de los armónicos zonales.

Proposición 14 *(Propiedades de los armónicos zonales.)*

1. *Z_η toma valores reales para todo $\eta \in \partial B$.*

2. *Sea $\{p_1, p_2, ..., p_{h_m}\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}_m(\partial B)$, entonces*

$$Z_m(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{h_m} p_j(\xi)\overline{p_j(\eta)}. \tag{2.18}$$

   Además, $Z_m(\xi, \eta) = Z_m(\eta, \xi)$ para todo $\xi, \eta \in \partial B$.

3. *Para cada $T \in O(N)$, $\eta \in \partial B$, se cumple*

$$Z_{T(\eta)} \circ T = Z_\eta. \tag{2.19}$$

Demostración. 1) Sea $p \in \mathcal{H}_m(\partial B)$ que toma valores reales, tenemos

$$0 = Im(p(\eta)) = Im \int_{\partial B} p\overline{Z_\eta} \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial B} pIm\overline{Z_\eta} \mathrm{d}\sigma = -\int_{\partial B} pImZ_\eta \mathrm{d}\sigma,$$

podemos considerar $p = ImZ_\eta$, de donde se sigue

$$\int_{\partial B} (ImZ_\eta)^2 \mathrm{d}\sigma = 0.$$

2) De la hipótesis y del hecho de que $\langle Z_\eta, p_j\rangle = \overline{\langle p_j, Z_\eta\rangle}$, tenemos

$$\begin{aligned} Z_\eta &= \sum_{j=1}^{h_m} \langle Z_\eta, p_j\rangle\, p_j \\ &= \sum_{j=1}^{h_m} \overline{p_j(\eta)} p_j. \end{aligned}$$

Como $Z(\cdot,\eta)$ toma valores reales, para cada $\eta, \xi \in \partial B$ se tiene

$$Z(\xi,\eta) = \overline{Z(\xi,\eta)} = \sum_{j=1}^{h_m} \overline{p_j(\xi)} p_j(\eta) = Z(\eta,\xi).$$

De (2.18) y de la igualdad de Parseval obtenemos

$$Z(\eta,\eta) = \sum_{j=1}^{h_m} |p_j(\eta)|^2 = \|Z_\eta\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)}. \tag{2.20}$$

3) Sea $T \in O(N)$ fijo y $p \in \mathcal{H}_m(\partial B)$ arbitrario. Haciendo el cambio de variable $\psi = T^{-1}\xi$ y notando que $\mathrm{d}\sigma$ es invariante bajo transformaciones ortogonales, tenemos

$$\int_{\partial B} p(\xi)\left(Z_\eta \circ T^{-1}\right)(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi) = \int_{\partial B} (p\circ T)(\psi) Z_\eta(\psi)\mathrm{d}\sigma(\psi) = (p\circ T)(\eta) = \int_{\partial B} p(\xi) Z_{T(\eta)}(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi).$$

Dado que $Z_\eta \circ T^{-1}$ es un armónico esférico y por la unicidad en el Teorema de Representación de Riesz, tenemos

$$Z_{T(\eta)} = Z_\eta \circ T^{-1},$$

el resultado se sigue al evaluar en $T(\xi)$ con $\xi \in \partial B$. ∎

En particular de (2.19) se sigue que la función $\eta \mapsto Z(\eta,\eta)$ es constante. Dicha constante se obtiene al integrar sobre ∂B la ecuación (2.20) de modo que

$$Z_\eta(\eta) = \int_{\partial B} \sum_{j=1}^{h_m} |p_j(\eta)|^2 \mathrm{d}\sigma(\eta) = \sum_{j=1}^{h_m} \int_{\partial B} |p_j(\eta)|^2 \mathrm{d}\sigma(\eta) = h_m.$$

Por lo tanto para todo $\eta \in \partial B$,

$$\|Z_\eta\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)} = Z_\eta(\eta) = h_m. \tag{2.21}$$

De hecho, el armónico zonal Z_η alcanza su valor máximo en η. Esto se sigue al poner $p = Z_m(\xi,\cdot)$ en $p(\eta) = \langle p, Z_\eta\rangle_{\mathbf{L}^2(\partial B)}$, aplicando la desigualdad de Schwarz y la igualdad anterior:

$$|Z_m(\xi,\eta)| = |\langle Z_m(\xi,\cdot), Z_m(\eta,\cdot)\rangle| \le \|Z_m(\xi,\cdot)\|_{\mathbf{L}^2(\partial B)} \|Z_m(\eta,\cdot)\|_{\mathbf{L}^2(\partial B)} = Z_m(\eta,\eta). \tag{2.22}$$

2.4.1. Propiedad geométrica de los armónicos zonales

Ahora vemos como la noción cartográfica de paralelo se extiende a todas las dimensiones. Dada $\eta \in S$, un paralelo ortogonal a η es la intersección de ∂B con cualquier hiperplano perpendicular a η.

Notamos que una función f sobre S es constante en paralelos ortogonales a η si y sólo si para toda $T \in O(N)$ tal que $T(\eta) = \eta$ entonces $f \circ T = f$. Por (2.19) se tiene que para toda $T \in O(N)$ con $T(\eta) = \eta$, $Z_\eta \circ T = Z_\eta$, de modo que Z_η es constante en cada paralelo ortogonal a η. Más adelante mostraremos que un armónico esférico de orden m es constante en paralelos ortogonales a η si y sólo si es un múltiplo constante de $Z_m(\cdot, \eta)$. Esta propiedad geométrica justifica el nombre de los armónicos zonales; el término "zonal" se refiere a las "zonas" entre paralelos ortogonales al "polo" η.

Teorema 10 *Si $f \in \mathbf{L}^2(\partial B)$, entonces*

$$f(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle f, Z_m(\cdot, \eta) \rangle , \tag{2.23}$$

donde la convergencia es en $\mathbf{L}^2(\partial B)$.

Demostración. Por el Teorema 9 existe una sucesión (p_n) tal que $p_n \in \mathcal{H}_n(\partial B)$, para todo $n \geq 0$ y $f = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$ donde la serie converge en $\mathbf{L}^2(\partial B)$. Sea $\eta \in \partial B$ fija, entonces

$$\begin{aligned} \langle f, Z_m(\cdot, \eta) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle p_n, Z_m(\cdot, \eta) \rangle \\ &= p_m(\eta) \end{aligned}$$

para todo $m \geq 0$, donde hemos usado la continuidad del producto interior y la ortogonalidad de los espacios $\mathcal{H}_m(\partial B)$. ■

2.4.2. El núcleo de Poisson en términos de armónicos zonales

En esta sección usamos el hecho de que cada elemento p en $\mathcal{H}_m(\partial B)$ tiene una única extensión $|x|^m p\left(\frac{x}{|x|}\right)$ en $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$, también denotamos con p a tal extensión.

En particular, los armónicos zonales se extienden como funciones definidas en $\mathbb{R}^N \times \partial B$, donde la notación $Z_m(\cdot, \xi)$ se refiere a la extensión del correspondiente armónico zonal.

El siguiente resultado muestra que los armónicos zonales son núcleos reproductores para el espacio $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$.

Proposición 15 *Sea $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$. Entonces*

$$p(x) = \int_{\partial B} p(\xi) Z_m(x, \xi) \mathrm{d}\sigma(\xi), \qquad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.24}$$

Demostración. Supongamos que $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, tenemos

$$\begin{aligned} p(x) &= |x|^m p\left(\frac{x}{|x|}\right) \\ &= |x|^m \int_{\partial B} p(\xi) Z_m\left(\frac{x}{|x|}, \xi\right) \mathrm{d}\sigma(\xi) \\ &= \int_{\partial B} p(\xi) Z_m(x,\xi) \mathrm{d}\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Notamos que el primer y último término de la igualdad anterior coinciden cuando $x = 0$ para todo $m \geq 0$. De hecho $Z_m(0,\xi) = p(0) = 0$ si $m \geq 1$ y $Z_m(0,\xi) = 1$ si $m = 0$. ■

El siguiente resultado expresa la integral de Poisson de un polinomio en términos de armónicos zonales.

Teorema 11 *Sea f un polinomio en $\mathbb{R}^N$ de grado m. Entonces $\mathbf{P}[f]$, la integral de Poisson de f es un polinomio de orden a lo más m. Más aún,*

$$\mathbf{P}[f](x) = \sum_{k=0}^{m} \int_{\partial B} Z_k(x,\xi) f(\xi) \mathrm{d}\sigma(\xi), \qquad x \in B. \tag{2.25}$$

Demostración. Sea f un polinomio en $\mathbb{R}^N$ de grado $m \geq 1$, aplicando el Corolario 8 se tiene que existen $p_k \in \mathcal{H}_k(\partial B)$, $0 \leq k \leq m$, tal que

$$f = p_0 + p_1 + ... + p_m \text{ en } \partial B. \tag{2.26}$$

Por la unicidad de la solución del problema de Dirichlet para B tenemos

$$\mathbf{P}[f](x) = p_0(x) + \ldots + p_m(x), \qquad x \in B,$$

viendo a cada p_k como un polinomio armónico homogéneo en $\mathbb{R}^N$. De la ortogonalidad entre armónicos esféricos de distintos órdenes obtenemos

$$p_k(x) = \int_{\partial B} Z_k(x,\xi) f(\xi) \mathrm{d}\sigma(\xi), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

de donde se sigue el resultado. ■

La igualdad (2.26) muestra que si f es un polinomio de orden m, entonces la restricción de f sobre ∂B es ortogonal a todos los armónicos esféricos de orden superior a m. De modo que podemos reemplazar la suma finita en (2.25) con una suma infinita.

Teorema 12 *Para $N \geq 2$,*

$$\mathbf{P}(x,\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\xi) \text{ para todo } x \in B,\ \xi \in \partial B. \tag{2.27}$$

Además la serie converge absolutamente y uniformemente sobre $K \times \partial B$ para cada compacto $K \subset B$.

Demostración. Sea $K \subset B$ compacto, entonces existe $r < 1$ tal que $K \subseteq r\overline{B}$. De (2.14) y (2.22) se sigue que existe $M_0 \geq 0$ y $C_N > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |Z_m(x,\xi)| &= |x|^m \left| Z_m\left(\frac{x}{|x|}, \xi\right) \right| \\ &\leq r^m h_m \\ &\leq C_N r^m m^{N-2}, \text{ si } m \geq M_0,\ x \in K. \end{aligned}$$

Por el criterio de la razón es fácil ver que $\sum_{m=M_0}^{\infty} m^{N-2} r^m < \infty$, así que el criterio M de Weierstrass implica que la serie $\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\xi)$ converge absolutamente y uniformemente en $K \times \partial B$, de donde se sigue que $\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\xi)$ es continua en $K \times \partial B$.

Fijamos $x \in B$, la convergencia uniforme de la serie en (2.27), el Teorema de la Convergencia Dominada, la ortogonalidad de los armónicos esféricos de diferente orden y (2.24) muestran que ambos lados de la igualdad (2.27) integran lo mismo (sobre ∂B) contra los armónicos esféricos. El Teorema 9 implica que las sumas finitas de armónicos esféricos son densas en $\mathbf{L}^2(\partial B)$, por lo que se satisface la igualdad casi en todo punto. Dado que las funciones involucradas son continuas se sigue el resultado. ∎

El teorema anterior nos permite mostrar la convergencia de la expansión homogénea de una función armónica arbitraria.

Lema 3 *Sea $r > 0$ fijo. Si $p_m, q_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$ para todo $m \geq 0$ y si*

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(x)$$

para todo $x \in rB$, entonces $p_m = q_m$ para todo $m \geq 0$.

Demostración. Fijamos $\xi \in \partial B$. Dado que ambas series convergen y son iguales en cada punto de rB, tenemos

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(\xi) t^m = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(\xi) t^m$$

para todo $t \in (-r, r)$. Por la unicidad de los coeficientes en las series de potencias de una variable, $p_m(\xi) = q_m(\xi)$ para todo $m \geq 0$. Dado que $\xi \in \partial B$ fue arbitrario se sigue que $p_m = q_m$ en $\mathcal{H}_m(\partial B)$ para todo $m \geq 0$. ∎

Corolario 10 *Si u es una función armónica en $B(a,r)$, entonces existen $p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$, $m \geq 0$, tal que*

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x-a), \qquad x \in B(a,r). \tag{2.28}$$

Además, la serie converge uniformemente y absolutamente en subconjuntos compactos de $B(a,r)$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a = 0$, $r = 1$. Sea u una función armónica en $\overline{B}$ y $x \in B$ fija. Por (2.27) tenemos

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial B} \mathbf{P}(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\partial B} Z_m(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi), \end{aligned}$$

donde usamos además la convergencia uniforme de la serie sobre $\{x\} \times \partial B$ para poder aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada.

Para $x \in \mathbb{R}^N$, definimos $p_m(x) = \int_{\partial B} Z_m(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi)$. Dado que $Z_m(\lambda x, \xi) = \lambda^m Z_m(x,\xi)$ y $\Delta_x Z_m(x,\xi) = 0$, se sigue que $p_m(\lambda x) = \lambda^m p(x)$ y $\Delta p_m(x) = 0$ por lo que $p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$.

En la demostración del teorema anterior vimos que existe $M_0 \geq 0$ y $C_N > 0$ tal que $|Z_m(x,\xi)| \leq Cm^{N-2}r^m$ si $|x| \leq r, m \geq M_0$. Así,

$$|p_m(x)| \leq C_N m^{N-2} r^m \int_{\partial B} |u| \mathrm{d}\sigma(\xi) \qquad \text{si } |x| \leq r, m \geq M_0.$$

Como $\sum_{m=0}^{\infty} m^{N-2} r^m < \infty$ se sigue del criterio M de Weierstrass que la serie $\sum_{m=0}^{\infty} p_m$ converge absolutamente y uniformemente sobre subconjuntos compactos de B.

Sea ahora u armónica en $B(a,r)$. Para cada $s \in (0,r)$ definimos la función $w_s(x)$, como sigue

$$w_s(x) = u(sx + a)$$

la cual es armónica en $\overline{B}$, y aplicando el paso previo a w_s, se tiene que existe una sucesión de polinomios armónicos homogéneos $(p_m^s)_m$ tal que

$$u(sx + a) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m^s(x), \qquad x \in \overline{B}.$$

Por el lema anterior se sigue que todas estas expansiones son las mismas y así u tiene la expansión mencionada. ∎

2.4.3. El núcleo reproductor para la bola unitaria

En esta sección hallamos una fórmula explícita del núcleo reproductor para el espacio de Bergman $\mathbf{b}^2(B)$. La Proposición 9 nos dice que podemos calcular el núcleo reproductor a partir de una base ortonormal para $\mathbf{b}^2(B)$. Sin embargo, no es fácil hallar una base ortonormal para $\mathbf{b}^2(B)$ cuando $N > 2$. Para resolver este inconveniente hacemos otra extensión del armónico zonal pero ahora respecto a su segunda coordenada. Definimos

$$Z_m(x,y) := |x|^m |y|^m Z_m\left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|}\right) \qquad x, y \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

Si $x = 0$ o $y = 0$, $Z_m(x, y) = 0$ para $m > 0$ y $Z_m(x, y) = 1$ cuando $m = 0$. De modo que $Z_m(x, \cdot) \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$. El siguiente resultado es análogo a (2.24).

Proposición 16 *Para cada $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$, tenemos*

$$p(x) = \frac{N + 2m}{NV(B)} \int_B p(y)Z_m(x, y)\mathrm{d}V(y), \qquad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.29}$$

Demostración. Usando coordenadas esféricas, el Teorema de Fubini y el cambio de variable $y = r\xi$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_B p(y)Z_m(x, y)\mathrm{d}V(y) &= \int_0^1 \left(\int_{|y|=r} p(y)Z_m(x, y)\mathrm{d}S(y) \right) dr \\
&= \int_0^1 \left(\int_{|\xi|=1} p(r\xi)Z_m(x, r\xi)\mathrm{d}S(\xi) \right) r^{N-1}\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\partial B} p(\xi)Z_m(x, \xi)dS(\xi) \right) r^{2m+N-1}\mathrm{d}r \\
&= NV(B)p(x) \int_0^1 r^{2m+N-1}\mathrm{d}r \\
&= \frac{NV(B)}{N + 2m} p(x),
\end{aligned}$$

donde usamos que $dS(\xi) = NV(B)d\sigma(\xi)$. ■

Proposición 17 *Sea $k \neq m$, entonces $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$ es ortogonal a $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^N)$ en $\mathbf{L}^2(B)$.*

Demostración. Sean $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$, $q \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^N)$ con $k \neq m$, entonces

$$\int p\overline{q}\mathrm{d}V = \int_0^1 r^{N-1} \left(\int_{|\xi|=1} p(\xi)\overline{q(\xi)}\mathrm{d}S(\xi) \right) \mathrm{d}r = 0.$$

■

La igualdad (2.29) se puede escribir en términos del producto interior en $\mathbf{L}^2(B)$ como sigue

$$p(x) = \left\langle p, \frac{N + 2m}{NV(B)} Z_m(x, \cdot) \right\rangle_{\mathbf{L}^2(B)}. \tag{2.30}$$

Si $u \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^N)$, por la Proposición 17 se tiene

$$u(x) = \left\langle u, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{N + 2m}{NV(B)} Z_m(x, \cdot) \right\rangle_{\mathbf{L}^2(B)}.$$

Lema 4 *El conjunto de polinomios armónicos homogéneos es denso en $\mathbf{b}^2(B)$.*

Demostración. Primero mostramos que cualquier función u en $\mathbf{b}^2(B)$ se puede aproximar en $\mathbf{b}^2(B)$ por funciones armónicas en $\overline{B}$. Para $0 < r < 1$ definimos $u_r(x) = u(rx)$, $|x| < 1/r$. Claramente u_r es armónica en $B(0, 1/r)$. Afirmamos que $\lim_{r\to 1} u_r = u$ en $\mathbf{L}^2(B, \mathrm{d}V)$.

En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe $v \in C(\overline{B})$ tal que $\|u - v\|_{\mathbf{L}^2(B)} < \epsilon/3$. Como v es uniformemente continua en $\overline{B}$ existe $\delta > 0$ tal que $|v(x) - v(y)| < \epsilon/3$ si $|x - y| < \delta$ con $x, y \in \overline{B}$. Por lo tanto,

$$|v(rx) - v(x)| < \epsilon/3 \quad \text{para toda } x \in \overline{B},\ 1 - \delta < r < 1.$$

El resultado se sigue de la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \|u - u_r\|_2 &\leq \|u - v\|_2 + \|v - v_r\|_2 + \|v_r - u_r\|_2 \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon, \text{ si } 1 - \delta < r < 1. \end{aligned}$$

Por el Corolario 10, existe una sucesión $(p_m)_{m\geq 0}$, con $p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$, cuya serie converge uniformemente y absolutamente en $\overline{B}$ (y por lo tanto en $L^2(B)$) a la función u_r. Por lo tanto u_r puede ser aproximado en $L^2(B)$ por un polinomio armónico homogéneo. ■

A continuación damos una fórmula explícita del núcleo reproductor en $\mathbf{b}^2(B)$.

Teorema 13 *Si $x, y \in B$, entonces*

$$R_B(x, y) = \frac{1}{NV(B)} \sum_{m=0}^{\infty} (N + 2m) Z_m(x, y). \tag{2.31}$$

La serie converge absolutamente y uniformemente en $K \times B$ para todo compacto $K \subset B$.

Demostración. Por (2.22), existen $M_0 \geq 0$ y $C_N > 0$ tal que $h_m \leq C_N m^{N-2}$ si $m \geq M_0$. Para $x \in rB\backslash\{0\}$, $y \in B\backslash\{0\}$, $0 < r < 1$, tenemos

$$\begin{aligned} |Z_m(x, y)| &= |x|^m |y|^m \left| Z_m\left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|}\right) \right| \\ &\leq |x|^m |y|^m h_m \leq C_N m^{N-2} r^m. \end{aligned}$$

Por el criterio M de Weierstrass se sigue que la siguiente serie

$$F(x, y) = \frac{1}{NV(B)} \sum_{m=0}^{\infty} (N + 2m) Z_m(x, y),$$

converge absolutamente y uniformemente en $rB \times B$, lo cual implica que para cada x fija, $F(x, \cdot)$ es una función armónica acotada, entonces $F(x, \cdot) \in \mathbf{b}^2(B)$ para cada $x \in B$.

Ahora mostramos que $u(x) = \langle u, F(x,\cdot)\rangle$. Sea x fijo y $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^N)$, entonces por (2.29) tenemos

$$p(x) = \frac{1}{NV(B)} \int_B (N+2m) Z_m(x,y) p(y) \mathrm{d}V(y).$$

Dado que $Z_\ell(x,\cdot)$ es ortogonal a p para todo $\ell \neq m$, tenemos

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_B (N+2\ell) Z_\ell(x,y) p(y) \frac{\mathrm{d}V(y)}{NV(B)} \\ &= \int_B \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} (N+2\ell) Z_\ell(x,y) \right) p(y) \frac{\mathrm{d}V(y)}{NV(B)} \\ &= \langle F(x,\cdot), p \rangle_{\mathbf{L}^2(B)}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la convergencia uniforme de la serie correspondiente.

Si $u \in \mathbf{b}^2(B)$, el Lema 4 implica que existe una sucesión (p_n) de polinomios armónicos homogéneos tal que $p_n \to u$ en $\mathbf{L}^2(B)$. Dado que la evaluación puntual es continua en $\mathbf{b}^2(B)$, se tiene que para todo $x \in B$, $u \in \mathbf{b}^2(B)$,

$$\langle u, F(x,\cdot)\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} p_n, F(x,\cdot) \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle p_n, F(x,\cdot)\rangle = \lim_{n\to\infty} p_n(x) = u(x).$$

Por la unicidad en el teorema de Representación de Riesz se sigue que

$$R_B(x,y) = F(x,y) \qquad \text{para todo}\, x,y \in B. \tag{2.32}$$

Por lo tanto, F es el núcleo reproductor para $\mathbf{b}^2(B)$. ■

Por otro lado, queremos escribir en forma cerrada a la función R_B.

Corolario 11

$$R_B(x,y) = \frac{N\mathbf{P}(x,y) + \frac{d}{dt}\mathbf{P}(tx,ty)\big|_{t=1}}{NV(B)}. \tag{2.33}$$

Demostración. Cuando $x \in B$, $y \in B\backslash\{0\}$, por (2.27) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty} Z_m\left(|y|x, \frac{y}{|y|}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(|y|x, \frac{y}{|y|}\right) \\ &= \frac{1-|x|^2|y|^2}{(1-2x\cdot y+|x|^2|y|^2)^{\frac{N}{2}}}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Para $x \in B$ fijo, extendemos a la función $\mathbf{P}(x, \cdot)$ a todo $\overline{B}$ como sigue

$$\mathbf{P}(x,y) = \frac{1-|x|^2|y|^2}{(1-2x\cdot y+|x|^2|y|^2)^{\frac{N}{2}}} \qquad y \in \overline{B}. \tag{2.35}$$

Claramente $\mathbf{P}(x, \cdot)$ es una función armónica en $\overline{B}$ para cada $x \in B$. Además,

$$\mathbf{P}(x,y) = \mathbf{P}(y,x) \qquad \text{si}\, x, y \in B.$$

Por la homogeneidad de los armónicos zonales Z_m tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} 2mZ_m(x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{dt} t^{2m} Z_m(x,y)\bigg|_{t=1} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{m=0}^{\infty} t^{2m} Z_m(x,y)\right)\bigg|_{t=1} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(tx,ty)\right)\bigg|_{t=1} \\
&= \frac{d}{dt}\mathbf{P}(tx,ty)\bigg|_{t=1}.
\end{aligned}$$

De (2.31), (2.34) y la igualdad anterior obtenemos el resultado

$$R_B(x,y) = \frac{N\mathbf{P}(x,y) + \frac{d}{dt}\mathbf{P}(tx,ty)\big|_{t=1}}{NV(B)}.$$

■

Un cálculo directo nos permite obtener la forma cerrada del núcleo de Bergman.

Corolario 12 *Sean $x, y \in B$. Entonces*

$$R_B(x,y) = \frac{(N-4)|x|^4|y|^4 + (8x\cdot y - 2N - 4)|x|^2|y|^2 + N}{NV(B)(1-2x\cdot y + |x|^2|y|^2)^{1+\frac{N}{2}}}. \tag{2.36}$$

En el Capítulo 3 usaremos el caso cuando $N = 2$:

$$R_B(x,y) = \frac{-|z|^4|w|^4 + 4|z|^2|w|^2(Re(\overline{w}z)-1)-1}{\pi|1-\overline{w}z)|^4}. \tag{2.37}$$

2.5. El núcleo reproductor en el semiespacio superior

Denotamos por $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N : y > 0\}$ al semiespacio superior. El objetivo de esta sección es hallar una fórmula explícita del núcleo reproductor para $\mathbf{b}^2(\mathbb{H})$.

Notamos que $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$. Si $w = (w_1, ..., w_N) \in \mathbb{R}^N$, $\overline{w}$ denotará la reflexón de w a través de $\partial\mathbb{H}$, es decir, $\overline{w} = (w_1, ..., w_{N-1}, -w_N)$. Para $z = (x, y) \in \mathbb{H}$ y $t \in \mathbb{R}^{N-1}$, definimos el núcleo de Poisson en $\mathbb{H}$ como sigue

$$\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z, t) = \frac{2}{NV(B)} \frac{y}{(|x - t|^2 + y^2)^{\frac{N}{2}}}. \tag{2.38}$$

Si $\tilde{t} = (t, 0)$, notamos que

$$|x - t|^2_{\mathbb{R}^{N-1}} + y^2 = \left|z - \tilde{t}\right|^2_{\mathbb{R}^N},$$

donde $|\cdot|_{\mathbb{R}^N}$ denota la norma euclideana usual en $\mathbb{R}^N$. Por lo tanto

$$\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z, t) = \frac{2z_N}{NV(B)\left|z - \tilde{t}\right|^N_{\mathbb{R}^N}}, \tag{2.39}$$

si $z = (z_1, ..., z_N)$, $t \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Observación 10 *Sea $t \in \mathbb{R}^{N-1}$ fija, $\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(\cdot, t)$ es una función armónica en $\mathbb{H}$.*

Para $z \in \mathbb{H}$ fijo, extendemos a la función $\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z, \cdot)$ a todo $\overline{\mathbb{H}}$ como sigue

$$\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z, w) = \frac{2}{NV(B)} \frac{z_N + w_N}{|z - \overline{w}|^N}, \qquad w \in \overline{\mathbb{H}}. \tag{2.40}$$

Cuando $w_N = 0$, recuperamos la fórmula usual.

Observación 11 *Propiedades de $\mathbf{P}_{\mathbb{H}}$*
Claramente $|z - \overline{w}| = |w - \overline{z}|$, por lo tanto

$$\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z, w) = \mathbf{P}_{\mathbb{H}}(w, z), \qquad \textit{para todo}\, z, w \in \mathbb{H}. \tag{2.41}$$

Para $r \in \mathbb{R}$, se tiene que $\overline{w + (0, r)} = \overline{w} - (0, r)$ por lo tanto

$$\mathbf{P}_{\mathbb{H}}\left(z + (0, r), w\right) = \mathbf{P}_{\mathbb{H}}\left(z, w + (0, r)\right), \qquad \textit{para todo}\, z, w \in \mathbb{H}. \tag{2.42}$$

Como consecuencia de (2.41) y (2.42) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z, w) &= \mathbf{P}_{\mathbb{H}}(w, z) \\ &= \mathbf{P}_{\mathbb{H}}\left(w + (0, z_N) - (0, z_N), z\right) \\ &= \mathbf{P}_{\mathbb{H}}\left(w + (0, z_N), z - (0, z_N)\right), \end{aligned} \tag{2.43}$$

para todo $z, w \in \mathbb{H}$. Para $z \in \mathbb{H}$ fija notamos que $z - (0, z_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$ y que la función $\mathbf{P}_{\mathbb{H}}\left(w + (0, z_N), z - (0, z_N)\right)$ es armónica como función de w si $w_N > -z_N$; se sigue entonces que $\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z, \cdot)$ es armónica en $\{w \in \mathbb{R}^N : w_N > -z_N\}$ para cada $z \in \mathbb{H}$.

Ahora vemos como desarrollar la teoría de la integral de Poisson en el semiplano superior.

Sea $1 \leq p \leq \infty$. La integral de Poisson de $f \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^{N-1})$ en $\mathbb{H}$ es la función $\mathbf{P}_{\mathbb{H}}[f]$ definida como

$$\mathbf{P}_{\mathbb{H}}[f](z) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z, t) f(t) \mathrm{d}(t).$$

Notamos que para toda $1 \leq q \leq \infty$, $\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z, \cdot) \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^{N-1})$; se sigue entonces por la desigualdad de Hölder que la integral anterior está bien definida para toda $z \in \mathbb{H}$.

Teorema 14 *Sea u una función continua acotada en $\overline{\mathbb{H}}$ y armónica en $\mathbb{H}$. Entonces u es la integral de Poisson de sus valores frontera. Es decir,*

$$u = \mathbf{P}_{\mathbb{H}}[u|_{\mathbb{R}^{N-1}}] \quad \textit{en } \mathbb{H}. \tag{2.44}$$

A continuación obtenemos la forma cerrada del núcleo de Bergman en el semiplano superior.

Teorema 15 *El núcleo reproductor de $\mathbf{b}^2(\mathbb{H})$ está dado por*

$$R_{\mathbb{H}}(z, w) = -2\frac{\partial}{\partial w_N}\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z, w) = \frac{4}{NV(B)} \frac{N(z_N + w_N)^2 - |z - \overline{w}|^2}{|z - \overline{w}|^{N+2}}. \tag{2.45}$$

Demostración. De (2.40) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_N}\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z, w) &= \frac{2}{NV(B)} \frac{\partial}{\partial w_N}\left(\frac{z_N + w_N}{|z - \overline{w}|^N}\right) \\
&= \frac{2}{NV(B)}\left[\frac{1}{|z - \overline{w}|^N} + (z_N + w_N)\left(-N|z - \overline{w}|^{-(N+2)}(z_N + w_N)\right)\right] \\
&= \frac{2}{NV(B)}\left[\frac{|z - \overline{w}|^2 - N(z_N + w_N)^2}{|z - \overline{w}|^{N+2}}\right].
\end{aligned}$$

Falta mostrar que se cumple la igualdad

$$R_{\mathbb{H}}(z, w) = -2\frac{\partial}{\partial w_N}\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z, w). \tag{2.46}$$

En efecto, para $\delta > 0$ ponemos $\Omega_\delta = \{w \in \mathbb{R}^N : w_N > -\delta\}$, por lo que la frontera de Ω_δ es el hiperplano $w_N = -\delta$. Fijamos $z \in \mathbb{H}$ y consideramos $u \in \mathbf{b}^2\left(\Omega_\delta\right)$, de (2.1) tenemos

$$|u(z)| \leq \frac{\| u \|_{\mathbf{L}^2(\Omega_\delta)}}{V(B)^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{N}{2}}}, \quad \text{para todo } z \in \overline{\mathbb{H}}. \tag{2.47}$$

Así, u es armónica y acotada en $\overline{\mathbb{H}}$.

Además, usando (2.3) tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right| \leq \frac{C}{(y+\delta)^{1+\frac{N}{2}}} \parallel u \parallel_{\mathbf{L}^2(\Omega_\delta)} \qquad \text{para todo}\,(x,y) \in \mathbb{H}. \tag{2.48}$$

Por otro lado, usando el Teorema de Fubini obtenemos

$$\int_{\mathbb{H}} u(w)\frac{\partial}{\partial w_N}\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z,w)\mathrm{d}V(w) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_0^\infty u(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z,(x,y))\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \tag{2.49}$$

Integrando por partes, usando que $\lim_{w_N \longrightarrow \infty} \mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z,w) = 0$ y que u es acotada en $\overline{\mathbb{H}}$ tenemos

$$\int_0^\infty u(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z,(x,y))\mathrm{d}y \;=\; -u(x,0)\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z,x) - \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z,(x,y))\mathrm{d}y.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x,0)\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z,x)\mathrm{d}x = u(z)$ por Teorema 14, entonces en (2.49) se tiene

$$\int_{\mathbb{H}} u(w)\frac{\partial}{\partial w_N}\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z,w)\mathrm{d}V(w) = -u(z) - \int_0^\infty \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z,(x,y))\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \tag{2.50}$$

Hacemos notar que en la última igualdad aplicamos Fubini, lo cual es posible ya que el integrando en la parte derecha es integrable por (2.48) y porque (2.43) implica que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z,(x,y))\mathrm{d}x = 1 \quad \text{para cada}\, y > 0.$$

Observamos que $u \in \mathbf{b}^2(\Omega_\delta)$ implica que $\frac{\partial u}{\partial w_N}$ es armónica en Ω_δ.
Para cada $y > 0$ fijo consideramos la función

$$w \overset{T_y}{\longmapsto} \left(\frac{\partial u}{\partial w_N}\right)(w + (0,y)), \qquad w \in \overline{\mathbb{H}},$$

que es armónica en $\overline{\mathbb{H}}$ y también acotada por el Corolario 2.3:

$$\begin{aligned} |T_y(w)| \;&=\; \left|\left(\frac{\partial u}{\partial w_N}\right)(w + (0,y))\right| \\ &\leq\; \frac{C \parallel u \parallel_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}{w_N + y + \delta} \leq \frac{C \parallel u \parallel_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}{\delta}, \qquad w \in \overline{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

Para cada $y > 0$ tenemos $\frac{\partial u}{\partial y}(\cdot, y) = T_y|_{\mathbb{R}^{N-1}}$, así que usando (2.43) y el Teorema 14, tenemos

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z,(x,y))\mathrm{d}x \;&=\; \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} T_y(x,y)\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z+(0,y),(x,0))\mathrm{d}x \\ = T_y\left(z + (0,y)\right) \;&=\; \frac{\partial u}{\partial y}\left(z + (0,2y)\right), \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial y}(z+(0,2y))\,\mathrm{d}y = -\frac{u(z)}{2}$$

pues por (2.1) se tiene

$$\lim_{y\longmapsto\infty}\frac{1}{2}u(z+(0,2y)) = 0.$$

Por (2.50) tenemos que

$$u(z) = -2\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} u(w)\frac{\partial}{\partial w_N}\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z,w)\mathrm{d}V(w), \quad z\in\mathbb{H}.$$

Hemos probado que la función $-2\frac{\partial}{\partial w_N}\mathbf{P}_{\mathbb{H}}(z,w)$ reproduce a las funciones que son armónicas y cuadrado integrables sobre cualquier semiespacio más grande que $\mathbb{H}$. A continuación mostramos que el conjunto de tales funciones son densas en $\mathbf{b}^2(\mathbb{H})$. Dado que el funcional valuación es continuo, la prueba está completa.
■

Lema 5 *Para toda $\delta > 0$,*

$$\overline{\cup\mathbf{b}^2(\Omega_\delta)} = \mathbf{b}^2(\mathbb{H}) \tag{2.51}$$

Demostración. Es claro que para toda $\delta > 0$,

$$\mathbf{b}^2(\Omega_\delta)\subseteq\mathbf{b}^2(\mathbb{H}),$$

y como $\mathbf{b}^2(\mathbb{H})$ es completo,

$$\overline{\cup\mathbf{b}^2(\Omega_\delta)}\subseteq\overline{\mathbf{b}^2(\mathbb{H})} = \mathbf{b}^2(\mathbb{H}).$$

Para mostrar $\mathbf{b}^2(\mathbb{H})\subseteq\overline{\cup\mathbf{b}^2(\Omega_\delta)}$. Sea $u\in\mathbf{b}^2(\mathbb{H})$, para $\delta>0$, queremos ver que

$$z\overset{u_\delta}{\longmapsto} u(z+(0,\delta))\in\mathbf{b}^2(\Omega_\delta).$$

Claramente u_δ es armónica en Ω_δ. Por otro lado,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}}\int\limits_{z_N>-\delta}|u(z+(0,\delta))|^2\mathrm{d}z_N\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_{N-1} = \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}}\int\limits_{z_N}|u(z)|^2\mathrm{d}z = \| u\|_2^2<\infty.$$

De manera que $u(z+(0,\delta))\in\mathbf{L}^2(\mathbb{H})$. Por otro lado, también hay que mostrar que $\lim_{\delta\longrightarrow 0}u_\delta = u$ en $\mathbf{b}^2(\mathbb{H})$. Para ello, sea

$$C_c(\mathbb{H}) = \{\text{funciones continuas con soporte compacto en}\,\mathbb{H}\}.$$

Dado $\epsilon>0$, existe $\nu\in C_c(\mathbb{H})$ tal que

$$\| u-\nu\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{H})}<\frac{\epsilon}{3},$$

como $\nu \in C_c(\mathbb{H})$, entonces ν es uniformemente continua en $\mathbb{H}$, esto implica que existe $\rho = \rho(\epsilon) > 0$ tal que

$$|\nu(z) - \nu(w)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{si } \parallel z - w \parallel < \rho,$$

si $0 < \delta < \rho$

$$|\nu\left(z + (0, \delta) - \nu(z)\right)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

También,

$$\parallel \nu_\delta - u_\delta \parallel_{\mathbf{L}^2(\mathbb{H})} \leq \parallel \nu_\delta - u_\delta \parallel_{\mathbf{L}^2(\Omega_\delta)} = \parallel \nu - u \parallel_{\mathbf{L}^2(\mathbb{H})} < \frac{\epsilon}{3},$$

entonces

$$\parallel u - u_\delta \parallel_2 \leq \parallel u - \nu \parallel_2 + \parallel \nu - \nu_\delta \parallel_2 + \parallel \nu_\delta - u_\delta \parallel_2 \leq \epsilon.$$

De modo que $\lim_{\delta \longrightarrow 0} u_\delta = u$ en $\mathbf{b}^2(\mathbb{H})$. ∎

Capítulo 3

Espacios de Bergman analíticos

3.1. Espacios de Bergman analíticos sin peso

En esta sección analizamos los espacios de Bergman analíticos sobre el disco unitario. Sea $\mathbf{L}^p = \mathbf{L}^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A)$ el espacio de Lebesgue usual sobre el disco unitario abierto del plano complejo, donde A es la medida de área normalizada y $1 \leq p \leq \infty$.

Para $1 \leq p < \infty$, el espacio de Bergman analítico $\mathbf{L}_a^p(\mathbb{D})$ se define como

$$\mathbf{L}_a^p(\mathbb{D}) = \{u : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid u \text{ es analítica en } \mathbb{D} \text{ y } u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{D})\}.$$

Para $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{D})$ se define $\|f\|_\infty = supess\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\}$.

Es bien conocido que $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{D})$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_\infty$. Denotamos por $\mathbf{H}^\infty(\mathbb{D})$ al subespacio de funciones analíticas y acotadas en $\mathbb{D}$. Usando la fórmula integral de Cauchy podemos ver que $\mathbf{H}^\infty(\mathbb{D})$ es cerrado en $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{D})$ y por lo tanto es un espacio de Banach. Además, como el producto de dos funciones acotadas y analíticas, es analítica y acotada, $\mathbf{H}^\infty$ es un álgebra de Banach (ver Apéndice).

El siguiente resultado será útil para obtener las propiedades básicas de los espacios de Bergman $\mathbf{L}_a^p$.

Proposición 18 *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y K un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Entonces existe una constante positiva $C_K > 0$ tal que*

$$sup\{|f(z)| : z \in K\} \leq C_K \|f\|_p, \tag{3.1}$$

para toda $f \in \mathbf{L}_a^p$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ con $r \in (0,1)$. Sea $\rho = \frac{(1-r)}{2}$ y $B(z,\rho)$ la bola con centro z y radio ρ, la fórmula del valor medio implica

$$f(z) = \frac{1}{\rho^2} \int_{B(z,\rho)} f(w) \mathrm{d}A(w),$$

ya que $B(z,\rho) \subset \mathbb{D}$ para toda $z \in K$. Así, para cada $z \in K$ tenemos

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\rho^2} \int_{B(z,\rho)} |f(w)| \mathrm{d}A(w) \leq \frac{1}{\rho^2} \int_{\mathbb{D}} |f(w)| \mathrm{d}A(w) \leq \frac{\|f\|_p}{\rho^2},$$

para toda $f \in \mathbf{L}_a^p$. ■

El siguiente resultado muestra que $\mathbf{L}_a^p$ es un espacio de Banach para $1 \leq p < \infty$.

Proposición 19 *Para* $1 \leq p < \infty$ $\mathbf{L}_a^p(\mathbb{D})$ *es un subespacio cerrado de* $\mathbf{L}^p(\mathbb{D})$.

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas que converge en $\mathbf{L}_a^p(\mathbb{D})$ a una función $f \in \mathbf{L}^p(\mathbb{D})$, es decir $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$. La desigualdad (3.1) implica que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy uniforme en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, entonces $f_n(z) \longrightarrow f(z)$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$; como cada función f_n es analítica en $\mathbb{D}$, de la fórmula integral de Cauchy se sigue que f es analítica en $\mathbb{D}$. ■

En muchas aplicaciones se requiere aproximar una función en el espacio de Bergman $\mathbf{L}_a^p(\mathbb{D})$ por una sucesión de funciones más simples; en este contexto la forma usual de hacerlo es la siguiente.

Proposición 20 *Sea* $f \in \mathbf{L}_a^p(\mathbb{D})$ *y* $0 < r < 1$, *consideramos la función* $f_r(z) = f(rz)$, $z \in \mathbb{D}$. *Entonces*

1. *Para toda* $f \in \mathbf{L}_a^p(\mathbb{D})$, $\|f_r - f\|_p \longrightarrow 0$ *cuando* $r \longrightarrow 1^-$.
2. *Para toda* $f \in \mathbf{L}_a^p(\mathbb{D})$, *existe una sucesión* $\{p_n\}$ *de polinomios tal que* $\|p_n - f\|_p \longrightarrow 0$ *cuando* $n \longrightarrow \infty$.

Demostración.

1. Sea $f \in \mathbf{L}_a^p(\mathbb{D})$ y $\delta \in (0,1)$, tenemos
$$\int_{\mathbb{D}} |f_r(z) - f(z)|^p \,\mathrm{d}A(z) \leq \int_{|z|\leq\delta} |f_r(z) - f(z)|^p \,\mathrm{d}A(z) + \int_{\delta<|z|<1} (|f_r(z)|^p + |f(z)|^p) \,\mathrm{d}A(z). \tag{3.2}$$
Dado que $f \in \mathbf{L}^p$, podemos hacer el segundo sumando de arriba arbitrariamente pequeño eligiendo δ cerca de 1. Una vez elegida δ, es claro que la primera integral tiende a 0 cuando r tiende a 1.
Este resultado nos permitirá probar el inciso 2.

2. Sea $\epsilon > 0$. Por la afirmación anterior existe $0 < r < 1$ tal que
$$\| f_r - f \|_p < \frac{\epsilon}{2}.$$
Como la función f_r es analítica en $\frac{1}{r}\mathbb{D}$, entonces la serie de Taylor de f_r converge uniformemente en $\mathbb{D}$ a f_r; esto es, existe un polinomio P_n tal que
$$\|p_n - f_r\|_p \leq \|p_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{2},$$
para n suficientemente grande.

■

Proposición 21 $\mathbf{H}^{\infty}(\mathbb{D})$ *es denso en* $\mathbf{L}^p_a(\mathbb{D})$.

Como en los espacios de Bergman armónicos, por (3.1) cada funcional valuación en $z \in \mathbb{D}$ es un funcional lineal acotado en los espacios de Bergman analíticos. En lo que sigue, consideramos $p = 2$. En el espacio de Hilbert $\mathbf{L}^2_a$, el Teorema de Representación de Riesz implica que existe una única función K_z en $\mathbf{L}^2_a$ tal que

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle_{\mathbf{L}^2} = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{K_z(w)}\mathrm{d}A(w) \qquad \text{para todo } f \in \mathbf{L}^2_a. \tag{3.3}$$

Definición 12 *La función* $K : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ *dada por*

$$K(z,w) = \overline{K_z(w)},$$

con $z, w \in \mathbb{D}$, *es llamada el núcleo reproductor de* $\mathbf{L}^2_a$. *En particular* $K(z,z) = \|K_z\|^2_{\mathbf{L}^2}$.

Proposición 22 *Sea* $\{e_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *una base ortonormal de* $\mathbf{L}^2_a$, *entonces*

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}. \tag{3.4}$$

En particular, $K(z,w)$ *es independiente de la elección de la base ortonormal* $\{e_n(z)\}$. *Además la serie converge uniformemente sobre conjuntos compactos de* $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

Demostración. Si $f \in \mathbf{L}^2_a$, entonces $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$, donde la serie converge en $\mathbf{L}^2_a$, de modo que converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.

En particular, si $z \in \mathbb{D}$ se sigue que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n(z) = \left\langle f, \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(z)} e_n \right\rangle,$$

puesto que $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(z)} e_n \in \mathbf{L}^2_a(\mathbb{D})$, de la unicidad del Teorema de Representación de Riesz se sigue que

$$K_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(z)} e_n(w).$$

Para cada conjunto compacto $\mathbf{K}$ en $\mathbb{D}$ se tiene por la identidad de Parseval que

$$\begin{aligned} sup\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mid e_n(z) \mid^2 : z \in \mathbf{K} \right\} &= sup\left\{ \| \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(z)} e_n \|_2^2 : z \in \mathbf{K} \right\} \\ &= sup\{\|K_z\|_2^2 : z \in \mathbf{K}\} = sup\{K(z,z) : z \in \mathbf{K}\}. \end{aligned}$$

Se sigue que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}$ converge uniformemente en conjuntos compactos de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. ■

Usando el resultado previo obtenemos la forma cerrada del núcleo reproductor de $\mathbf{L}^2_a$.

Proposición 23 *El núcleo reproductor de* $\mathbf{L}_a^2$ *está dado por*

$$K(z,w) = \frac{1}{(1-\overline{w}z)^2}. \tag{3.5}$$

Demostración. Para $n \geq 0$ consideramos $e_n(z) = \sqrt{n+1}z^n$. Afirmamos que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $\mathbf{L}_a^2$, de donde se sigue que

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\overline{w}^n = \frac{1}{(1-\overline{w}z)^2}.$$

Para probar la afirmación notamos que

$$\int_{\mathbb{D}} e_n(z)e_m(z)\mathrm{d}A(z) = 2\frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{n+m+2}\delta_{n,m},$$

por lo que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortogonal en $\mathbf{L}_a^2$ que además es completo en $\mathbf{L}_a^2$ por la Proposición 20 inciso 2. ∎

Corolario 13

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-w\overline{z}|^4}\mathrm{d}A(w) = 1 \qquad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}. \tag{3.6}$$

Demostración. Claramente

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-w\overline{z}|^4}\mathrm{d}A(w) = \left(1-|z|^2\right)^2 \langle K_z, K_z\rangle = \left(1-|z|^2\right)^2 K(z,z) = 1. \tag{3.7}$$

∎

El siguiente resultado establece una relación entre el núcleo de Bergman analítico y el núcleo de Bergman armónico.

Proposición 24 *Para* $N=2$ *tenemos la siguiente relación*

$$K_z(w) + \overline{K}_z(w) - 1 = \pi R_B(z,w), \qquad \textit{con } z,w \in \mathbb{D}. \tag{3.8}$$

Demostración. Usando (3.5) tenemos

$$\begin{aligned}
K_z(w) + \overline{K}_z(w) - 1 &= \frac{1}{(1-w\overline{z})^2} + \frac{1}{(1-\overline{w}z)^2} - 1 \\
&= \frac{(1-\overline{w}z)^2 + (1-w\overline{z})^2 - (|1-\overline{w}z|^2)^2}{|1-\overline{w}z|^4} \\
&= \frac{2Re(1-\overline{w}z)^2 - (1-2Re(\bar{w}z)+|z|^2|w|^2)^2}{|1-\overline{w}z|^4}.
\end{aligned}$$

Dado que

$$2Re\,(1-\overline{w}z)^2 = 2 - 4Re(\bar{w}z) + 2Re(\bar{w}z)^2,$$

$$-\left(1-2Re(\bar{w}z)+|z|^2|w|^2\right)^2 = -1+4Re(\overline{w}z)-|w|^4|z|^4+4|w|^2|z|^2Re(\bar{w}z)-4[Re(\bar{w}z)]^2-2|w|^2|z|^2,$$

$$Re(\bar{w}z)^2 - 2[Re(\bar{w}z)]^2 = Re(\bar{w}z)^2 - \frac{1}{2}(\overline{w}z+w\overline{z})^2 = -|w|^2|z|^2,$$

y notando que $Re(\bar{w}z) = \langle z, w\rangle_{\mathbb{R}^2}$, se sigue que

$$K_z(w) + \overline{K}_z(w) - 1 = \frac{1-|w|^4|z|^4+4|w|^2|z|^2(Re(\bar{w}z)-1)}{|1-\overline{w}z|^4} = \pi R_B(z,w),$$

donde la última igualdad se sigue de (2.37). ■

Como $\mathbf{L}^2_a$ es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathbf{L}^2(\mathbb{D})$, existe una única proyección ortogonal

$$P : \mathbf{L}^2(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathbf{L}^2_a$$

que es llamada la proyección de Bergman analítica.

Proposición 25 *La proyección de Bergman analítica está dada por*

$$Pu(z) = \int_{\mathbb{D}} u(w)K(z,w)\mathrm{d}A(w), \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{3.9}$$

Demostración. Sea $u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{D})$, entonces

$$Pu(z) = \langle Pu, K_z\rangle = \langle u, K_z\rangle = \int_{\mathbb{D}} u(w)K(z,w)\mathrm{d}A(w).$$

■

Proposición 26 *Para $u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{D})$ se tiene la siguiente descomposición*

$$Qu(z) = (Pu)(z) + \overline{(P\overline{u})(z)} - (Pu)(0). \tag{3.10}$$

Además $b^2 = \mathbf{L}^2_a + \overline{\mathbf{L}^2_a}$.

Demostración. Claramente $b^2 \neq \mathbf{L}^2_a \oplus \overline{\mathbf{L}^2_a}$ pues toda función constante no cero está en $\mathbf{L}^2_a \cap \overline{\mathbf{L}^2_a}$.

Dado que la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa son funciones armónicas se sigue que $\mathbf{L}^2_a + \overline{\mathbf{L}^2_a} \subset b^2$. Resta ver que $b^2 \subset \mathbf{L}^2_a + \overline{\mathbf{L}^2_a}$.

Por la Proposición 24, $R_B(z,w) = K_z(w) + \overline{K}_z(w) - 1$, así que para $u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{D})$ tenemos

$$Qu(z) = (Pu)(z) + \overline{(P\overline{u})(z)} - \int u(w)\mathrm{dA}(w), \tag{3.11}$$

de donde se sigue la primera parte del resultado.

Si $u \in b^2$ entonces $u = Qu$, como P es una proyección sobre $\mathbf{L}^2_a$, la contención faltante se sigue de (3.10). ■

3.2. Espacios de Bergman analíticos con peso

Para $\alpha > -1$ consideramos la medida $\mathrm{d}A_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha\, \mathrm{d}A(z)$.
Cuando $1 \leq p < \infty$, $\mathbf{L}^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ denota el espacio de Banach de las funciones f Lebesgue-medibles en $\mathbb{D}$ tales que

$$\| f \|_{p,\alpha} = \left[\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, \mathrm{d}A_\alpha \right]^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{3.12}$$

Definición 13 *Para $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$, el espacio de Bergman analítico con peso $\mathbf{L}^p_{a,\alpha}(\mathbb{D})$ es el subespacio de $\mathbf{L}^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ que consiste de las funciones analíticas en $\mathbb{D}$.*

Como en la sección anterior es fácil ver que para cada compacto $K \subset \mathbb{D}$ existe una constante $C_K > 0$ tal que

$$sup\,\{|f(z)| : z \in K\} \leq C_K \| f \|_{p,\alpha} \qquad \text{para toda } f \in \mathbf{L}^p_{a,\alpha}(\mathbb{D}),$$

de donde se deduce lo siguiente:

1. $\mathbf{L}^p_{a,\alpha}$ es un espacio de Banach.

2. El funcional valuación en $z \in \mathbb{D}$ es continuo en $\mathbf{L}^p_{a,\alpha}$.

3. El espacio $\mathbf{L}^2_{a,\alpha}$ tiene un núcleo reproductor $K_\alpha : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, es decir,

$$f(z) = \int f(w) K_\alpha(z,w) \mathrm{d}A_\alpha(w), \qquad \text{para toda } f \in \mathbf{L}^2_{a,\alpha}.$$

Como en la sección anterior, se puede ver que $\left\{ \sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}} z^n \right\}_{n \geq 0}$ es una base ortonormal en $\mathbf{L}^2_{a,\alpha}$ y que el núcleo reproductor K_α se calcula como sigue

$$K_\alpha(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} (z\overline{w})^n = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}. \tag{3.13}$$

Finalmente, la proyección de Bergman P_α es la única proyección ortogonal de $\mathbf{L}^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ sobre $\mathbf{L}^2_{a,\alpha}$ y está dada por

$$P_\alpha f(z) = \int \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(w), \qquad \text{para toda } f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha). \tag{3.14}$$

En este contexto probamos el resultado que nos interesa (ver [1]).

Lema 6 *Para $\alpha > -1$ se cumple*

$$P_\alpha \overline{f} \equiv \overline{f}(0), \qquad \textit{para toda } f \in \mathbf{L}^2_{a,\alpha}. \tag{3.15}$$

Demostración. Para todo $h, f \in \mathbf{L}^2_{a,\alpha}$ tenemos

$$\left\langle h, P_\alpha \overline{f} \right\rangle = \left\langle P_\alpha h, \overline{f} \right\rangle = \left\langle h, \overline{f} \right\rangle = h(0)f(0) = \left\langle h, \overline{f(0)} \right\rangle.$$

■

Capítulo 4

Operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman b^2

En este capítulo se aborda uno de los operadores definidos en el espacio de funciones analíticas en el disco unitario, el llamado operador de Toeplitz.

Toda función $u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{D})$ define un operador de Toeplitz analítico $\mathcal{A}_u : \mathbf{L}_a^2 \longrightarrow \mathbf{L}_a^2$, dado por

$$\mathcal{A}_u f = P(uf),$$

donde $P : \mathbf{L}^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A) \longrightarrow \mathbf{L}_a^2$ es la proyección de Bergman analítica asociada.

A la función u se le llama símbolo del operador $\mathcal{A}_u$. Las propiedades de un operador de Toeplitz analítico dependen de su símbolo, claramente $\|\mathcal{A}_u\| \leq \|u\|_\infty$. Además el operador de Toeplitz $\mathcal{A}_u$ es compacto si su símbolo es continuo en $\overline{\mathbb{D}}$ y se anula en la frontera del disco (ver [6, pág. 107]).

A continuación establecemos algunas propiedades básicas del operador de Toeplitz analítico.

Proposición 27 *Sean $a, b \in \mathbb{C}$ y $\varphi, \psi \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{D})$. Entonces*

1. $\mathcal{A}_{a\varphi + b\psi} = a\mathcal{A}_\varphi + b\mathcal{A}_\psi$.

2. $\mathcal{A}_{\bar{\varphi}} = \mathcal{A}_\varphi^*$.

3. Si ψ es analítica en $\mathbb{D}$ entonces $\mathcal{A}_\varphi \mathcal{A}_\psi = \mathcal{A}_{\varphi\psi}$ y $\mathcal{A}_{\overline{\psi}} \mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}_{\overline{\psi}\varphi}$.

Demostración.

1. Es evidente.

2. Se sigue del hecho que para todo $f, g \in \mathbf{L}_a^2$ se cumple

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_{\overline{\varphi}} f, g \rangle &= \langle P(\overline{\varphi} f), g \rangle = \langle \overline{\varphi} f, Pg \rangle \\ &= \langle \overline{\varphi} f, g \rangle = \langle f, \varphi g \rangle \\ &= \langle Pf, \varphi g \rangle = \langle f, P(\varphi g) \rangle = \langle f, \mathcal{A}_\varphi g \rangle . \end{aligned}$$

3. Para $f \in \mathbf{L}_a^2$ se cumple

$$\mathcal{A}_\varphi \mathcal{A}_\psi f = P(\varphi P(\psi f)) = P(\varphi\psi f) = \mathcal{A}_{\varphi\psi} f,$$

$$\mathcal{A}_{\overline{\varphi}} \mathcal{A}_\psi f = P(\overline{\varphi} P(\psi f)) = P(\overline{\varphi}\psi f) = \mathcal{A}_{\overline{\varphi}\psi} f.$$

Así que $\mathcal{A}_{\overline{\varphi}} \mathcal{A}_\psi = \mathcal{A}_{\overline{\varphi}\psi}$, por lo tanto

$$\mathcal{A}_{\overline{\psi}} \mathcal{A}_\varphi = (\mathcal{A}_{\overline{\varphi}} \mathcal{A}_\psi)^* = (\mathcal{A}_{\overline{\varphi}\psi})^* = \mathcal{A}_{\varphi\overline{\psi}}$$

■

Del inciso 3) se sigue que los operadores de Toeplitz analíticos siempre conmutan cuando al menos uno de ellos tiene un símbolo analítico acotado.

Para $u \in \mathbf{L}^\infty$, el operador de Toeplitz armónico $T_u : \mathbf{b}^2 \longrightarrow \mathbf{b}^2$ con símbolo u está dado por

$$T_u f = Q(uf), \qquad f \in \mathbf{b}^2, \tag{4.1}$$

donde $Q : \mathbf{L}^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A) \longrightarrow \mathbf{b}^2$ es la proyección de Bergman armónica.

Observación 12 *Si $u \in \mathbf{L}^2$ el operador de Toeplitz T_u está densamente definido y en general no es acotado.*

En efecto, observamos que $fu \in \mathbf{L}^2$ para todo $f \in \mathbf{H}^\infty + \overline{\mathbf{H}^\infty}$, por lo tanto

$$T_u f \doteq Q(uf) \qquad \text{si } f \in \mathbf{H}^\infty + \overline{\mathbf{H}^\infty}. \tag{4.2}$$

Es fácil ver que $T_{au+bv} = aT_u + bT_v$ y que $T_u^* = T_{\overline{u}}$, sin embargo existen aspectos de la teoría de los operadores de Toeplitz en el espacio armónico de Bergman $\mathbf{b}^2$ que difieren de la teoría del operador de Toeplitz en el espacio analítico de Bergman $\mathbf{L}_a^2$. Por ejemplo, en [1] se obtuvo que dos operadores de Toeplitz armónicos conmutan cuando sus símbolos analíticos y la función constante 1 son linealmente dependientes, sin embargo los operadores analíticos de Toeplitz siempre conmutan en el espacio analítico de Bergman. Recientemente Guo y Zheng en [5] caracterizaron operadores compactos de Toeplitz con símbolo acotado en el espacio armónico de Bergman $\mathbf{b}^2$, su resultado también es diferente del correspondiente espacio analítico de Bergman.

Lema 7 *Sea $f \in \mathbf{L}_a^2$, para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple*

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}} \left\{ z^2 P\left[(1-|w|^2)f\right](z) \right\} = zf(z)$.

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}} \left\{ z^2 P\left[(1-|w|^2)\overline{f}\right](z) \right\} = z\overline{f(0)}$.

(c) $P(|w|^2 f)(z) = f(z) - \frac{1}{z^2}\int_0^z \xi f(\xi)\mathrm{d}\xi$.

(d) $P(|w|^2 \bar{f})(z) = \overline{P(|w|^2 f)(0)} = \frac{1}{2}\overline{f(0)}$.

Demostración. Sea

$$\psi(z) = P\left[(1-|w|^2)f\right](z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)f(w)}{(1-\bar{w}z)^2}\mathrm{d}A(w),$$

diferenciando se tiene

$$\psi'(z) = 2\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)f(w)}{(1-\bar{w}z)^3}\bar{w}\mathrm{d}A(w),$$

luego,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\left\{z^2P\left[(1-|w|^2)f\right](z)\right\} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\left\{z^2\psi(z)\right\} = z^2\psi'(z) + 2z\psi(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)f(w)}{(1-\bar{w}z)^2}\left[\frac{2z^2\bar{w}}{1-\bar{w}z} + 2z\right]\mathrm{d}A(w) \\
&= 2z\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)f(w)}{(1-\bar{w}z)^3}\mathrm{d}A(w) \\
&= 2z(P_1f)(z) = 2zf(z),
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos (3.14) con $\alpha = 1$.

Como antes,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\left\{z^2P\left[(1-|w|^2)\overline{f}\right](z)\right\} = 2z\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)\overline{f(w)}}{(1-\bar{w}z)^3}\mathrm{d}A(w) = z(P_1\overline{f})(z) = \overline{f}(0)z,$$

donde la última igualdad se sigue de (3.15) con $\alpha = 1$.

Integrando ambos lados de (a) se tiene

$$z^2P\left[(1-|w|^2)f\right](z) = z^2f(z) - z^2P(|w|^2f)(z) = \int_0^z \xi f(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad z \in \mathbb{D},$$

de donde se sigue el inciso (c).

Integrando ambos lados de (b) se tiene

$$z^2P\left[(1-|w|^2)\bar{f}\right](z) = z^2\overline{f(0)} - z^2P(|w|^2\bar{f})(z) = \int_0^z \xi\overline{f(0)}\mathrm{d}\xi = \frac{\overline{f(0)}z^2}{2},$$

así que

$$P(|w|^2\bar{f})(z) = \frac{1}{2}\overline{f(0)}.$$

Usando coordenadas polares y aplicando el Teorema del valor medio a f tenemos

$$P(|w|^2f)(0) = \int_{\mathbb{D}} |w|^2f(w)\mathrm{d}A(w) = \frac{1}{2}f(0).$$

$\blacksquare$

Lema 8 *Sea $f \in \mathbf{L}_a^2$ y supongamos que $f(0) = 0$. Entonces para $z \in \mathbb{D}$ se cumple*

(a) $P(\bar{w}f)(z) = \frac{1}{z}f(z) - \frac{1}{z^2}\int_0^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$.

(b) $P(w\bar{f})(z) = \overline{P(\bar{w}f)(0)} = \frac{1}{2}\overline{f'(0)}$.

Demostración. De la hipótesis se sigue que existe una función holomorfa g en $\mathbb{D}$ tal que $f(z) = zg(z)$. Además $g \in \mathbf{L}_a^2$ y por el Lema 7 inciso (c) tenemos

$$P(\bar{w}f)(z) = P(|w|^2 g)(z) = g(z) - \frac{1}{z^2}\int_0^z \xi g(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{z}f(z) - \frac{1}{z^2}\int_0^z f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Similarmente, por el Lema 7 inciso (d) tenemos

$$P(w\bar{f})(z) = P(|w|^2\bar{g})(z) = \frac{1}{2}\overline{g(0)} = \frac{1}{2}\overline{f'(0)}.$$

■

Lema 9 *Para $f, g \in \mathbf{L}_a^2$, se tiene*

$$\int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{g(w)}\mathrm{d}A(w) = \int_{\mathbb{D}} f(w)[2\overline{g(w)} + \overline{wg'(w)}](1 - |w|^2)\mathrm{d}A(w). \tag{4.3}$$

Demostración. Notamos que basta probar la siguiente igualdad

$$\int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{g(w)}\mathrm{d}A(w) = 2\int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{g(w)}|w|^2\mathrm{d}A(w) - \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{wg'(w)}(1 - |w|^2)\mathrm{d}A(w).$$

Como f y g son analíticas en $\mathbb{D}$ se pueden expresar como sigue

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Dado que $\{\sqrt{n+1}z^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de $\mathbf{L}_a^2$ tenemos

$$\int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{g(w)}\mathrm{d}A(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\overline{b_n}}{n+1},$$

por la misma razón obtenemos

$$\int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{wg'(w)}\mathrm{d}A(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na_n\overline{b_n}}{n+1}.$$

Para calcular la siguiente integral usamos coordenadas polares

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{g(w)}|w|^2\mathrm{d}A(w) &= 2\int_0^1 r^3 \left(\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)\mathrm{d}r = 2\int_0^1 r^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}r^{2n}\mathrm{d}r \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}\int_0^1 2r^{2n+3}\mathrm{d}r = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\overline{b_n}}{n+2}.\end{aligned}$$

De igual manera es fácil ver que

$$\int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{wg'(w)}|w|^2 \mathrm{d}A(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na_n\overline{b_n}}{n+2}.$$

El resultado se sigue de la siguiente igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{n+2} - \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2}\right) a_n\overline{b_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\overline{b_n}}{n+1}.$$

■

Lema 10 *Sean $f, g \in \mathbf{L}_a^2$ tal que $g(0) = 0$. Si T_f y $T_{\bar{g}}$ conmutan sobre $\mathbf{b}^2$, entonces*

$$P\left(f\overline{P(g\bar{w})}\right) = P(fw\bar{g}). \tag{4.4}$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathbf{H}^\infty$ arbitraria. Dado que el producto de dos funciones analíticas es una función armónica, tenemos

$$\begin{aligned}
T_f T_{\bar{g}}\varphi &= Q\left\{fQ\left(\bar{g}\varphi\right)\right\} \\
&= Q\left\{f\left[P\left(\bar{g}\varphi\right) + \overline{P\left(g\overline{\varphi}\right)} - P\left(\bar{g}\varphi\right)(0)\right]\right\} \\
&= Q\left[fP\left(\bar{g}\varphi\right)\right] + Q\left[f\overline{P\left(g\overline{\varphi}\right)}\right] - P\left(\bar{g}\varphi\right)(0)Qf \qquad (4.5)\\
&= fP\left(\bar{g}\varphi\right) + Q\left[f\overline{P\left(g\overline{\varphi}\right)}\right] - P\left(\bar{g}\varphi\right)(0)f \\
&= fP\left(\bar{g}\varphi\right) + P\left[f\overline{P\left(g\overline{\varphi}\right)}\right] + \overline{P\left[\bar{f}P\left(g\overline{\varphi}\right)\right]} - P\left[f\overline{P\left(g\overline{\varphi}\right)}\right](0) - P\left(\bar{g}\varphi\right)(0)f.
\end{aligned}$$

Por otro lado, usamos el hecho de que $f\varphi$ es una función armónica para tener

$$\begin{aligned}
T_{\bar{g}}T_f\varphi &= T_{\bar{g}}\left(Q\left(f\varphi\right)\right) = Q\left(\bar{g}f\varphi\right) \\
&= P\left(\bar{g}f\varphi\right) + \overline{P\left(g\overline{f\varphi}\right)} - P\left(\bar{g}f\varphi\right)(0). \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Además notamos que $\mathcal{A}_{f\varphi} = \mathcal{A}_\varphi\mathcal{A}_f$, por lo tanto $\mathcal{A}_{f\varphi}^* = (\mathcal{A}_\varphi\mathcal{A}_f)^*$, entonces

$$P\left[\bar{f}P\left(g\overline{\varphi}\right)\right] = \mathcal{A}_{\bar{f}}\mathcal{A}_{\overline{\varphi}}g = \mathcal{A}_{\overline{f\varphi}}g = P\left(g\overline{f\varphi}\right), \tag{4.7}$$

por las igualdades (4.5) y (4.6) tenemos en particular para $\varphi(w) = w$ que

$$\begin{aligned}
T_f T_{\bar{g}}w &= fP(\bar{g}w) + P\left(f\overline{P(g\bar{w})}\right) + \overline{P\left(\bar{f}P(g\bar{w})\right)} - P\left(f\overline{P(g\bar{w})}\right)(0) - P(\bar{g}w)(0)f \\
T_{\bar{g}}T_f w &= P(\bar{g}fw) + \overline{P(g\overline{fw})} - P(\bar{g}fw)(0).
\end{aligned}$$

Por otro lado, por (4.7) se tiene que $P\left(\bar{f}P(g\bar{w})\right) = P(g\overline{fw})$. El resultado se sigue de la hipótesis $T_fT_{\bar{g}}w = T_{\bar{g}}T_fw$, el Lema 8 inciso b) y de la identidad

$$P\left(f\overline{P(g\bar{w})}\right)(0) = \langle f, P(g\bar{w})\rangle = \langle Pf, g\bar{w}\rangle = \int f\bar{g}w\mathrm{d}A = P(\bar{g}fw)(0).$$

■

Lema 11 *Sean $f, g \in \mathbf{L}^2_a$ y supongamos que $f(0) = g(0) = 0$. Si T_f y $T_{\bar{g}}$ conmutan sobre $\mathbf{b}^2$ entonces*

$$\int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{G(w)w^k}(1-|w|^2)\mathrm{d}A(w) = 0 \quad \textit{para toda}\, k \geq 0, \tag{4.8}$$

donde

$$G(w) = \frac{1}{w}\int_0^w g(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{4.9}$$

Demostración. Por el lema anterior obtenemos para $k \geq 0$

$$\begin{aligned}\left\langle f, P(g\bar{w})w^{k+1}\right\rangle &= \left\langle f\overline{P(g\bar{w})}, Pw^{k+1}\right\rangle = \left\langle P[f\overline{P(g\bar{w})}], w^{k+1}\right\rangle = \left\langle P(fw\bar{g}), w^{k+1}\right\rangle \\ &= \left\langle fw\bar{g}, Pw^{k+1}\right\rangle = \left\langle fw\bar{g}, w^{k+1}\right\rangle = \int f(w)\bar{g}(w)\overline{w^k}|w|^2\mathrm{d}A(w).\end{aligned}$$

Como $g(0) = 0$, usando el Lema 8 inciso (a) tenemos

$$\int f(w)\overline{g(w)w^k}\mathrm{d}A(w) - \int f(w)\overline{G(w)w^k}\mathrm{d}A(w) = \int f(w)\overline{g(w)w^k}|w|^2\mathrm{d}A(w),$$

por lo tanto

$$\int f(w)\overline{g(w)w^k}(1-|w|^2)\mathrm{d}A(w) = \int f(w)\overline{G(w)w^k}\mathrm{d}A(w). \tag{4.10}$$

Usando el Lema 9 con $g = Gw^k$ en lugar de g, tenemos

$$\int f(w)\overline{G(w)w^k}\mathrm{d}A(w) = \int f(w)\left[2\overline{G(w)w^k} + \overline{kw^kG(w) + w^k(g(w)-G(w))}\right](1-|w|^2)\mathrm{d}A(w),$$

ya que $w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}[G(w)w^k] = kw^kG(w) + w^k(g(w)-G(w))$. Al sustituir en (4.10) obtenemos

$$\int f(w)\left[(k+1)\overline{G(w)w^k} + \overline{w^kg(w)}\right](1-|w|^2)\mathrm{d}A(w) = \int f(w)\overline{g(w)w^k}(1-|w|^2)\mathrm{d}A(w),$$

de donde se sigue el resultado. ∎

Observación 13 *Si f, φ son analíticas en $\mathbb{D}$, entonces por las ecuaciones de Cauchy-Riemann $f_x = -if_y$, $\varphi_x = -i\varphi_y$, de donde se sigue que $\Delta(f\varphi) = 2\nabla f \cdot \nabla\varphi = 0$; por lo tanto $f\varphi$ es una función armónica en $\mathbb{D}$. De manera similar se muestra que $\overline{f\varphi}$ es armónica en $\mathbb{D}$.*

Observamos que cuando $f, g \in \mathbf{L}^2_a$ se cumple que $\mathcal{A}_{\bar{g}}\mathcal{A}_f = \mathcal{A}_{\bar{g}f}$ en $\mathbf{H}^\infty$. Sin embargo, en el espacio armónico de Bergman se tiene el siguiente resultado

Teorema 16 *Sean $f, g \in \mathbf{L}^2_a$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $T_f T_{\overline{g}} = T_{\overline{g}} T_f$.

(b) $T_{f\overline{g}} = T_{\overline{g}} T_f$.

(c) $T_{f\overline{g}} = T_f T_{\overline{g}}$.

Demostración. Supongamos que se cumple a). La hipótesis implica que los operadores $T_f T_{\overline{g}}$ y $T_{\overline{g}} T_f$ son continuos y que coinciden en $\mathbf{b}^2$. Sea $\varphi \in \mathbf{H}^\infty$, por la observación anterior

$$T_{f\overline{g}}\varphi = Q(f\overline{g}\varphi) = Q(\overline{g}Q(f\varphi)) = T_{\overline{g}}T_f\varphi = T_f T_{\overline{g}}\varphi,$$

$$T_{f\overline{g}}\overline{\varphi} = Q(f\overline{g\varphi}) = Q(fQ(\overline{g\varphi})) = T_f T_{\overline{g}}\overline{\varphi} = T_{\overline{g}}T_f\overline{\varphi}.$$

Así, $T_{f\overline{g}} = T_f T_{\overline{g}} = T_{\overline{g}} T_f$ en $\mathbf{H}^\infty + \overline{\mathbf{H}^\infty}$. Dado que $\mathbf{H}^\infty$ es denso en $\mathbf{L}_a^2$ y $\mathbf{b}^2 = \mathbf{L}_a^2 + \overline{\mathbf{L}_a^2}$ se sigue que a) implica b) y c).

Ahora suponemos que se cumple b), es decir $T_{f\overline{g}}$ y $T_{\overline{g}}T_f$ son operadores continuos y $T_{f\overline{g}} = T_{\overline{g}}T_f$ en $\mathbf{b}^2$. Consideramos una función $\varphi \in \mathbf{H}^\infty$. Dado que las funciones φ y g son analíticas, por la Observación 13 tenemos

$$T_f T_{\overline{g}}\overline{\varphi} = Q\left(f\overline{g\varphi}\right) = T_{f\overline{g}}\overline{\varphi} = T_{\overline{g}}T_f\overline{\varphi}.$$

Para probar que b) implica a), resta mostrar que

$$T_f T_{\overline{g}}\varphi = T_{\overline{g}}T_f\varphi.$$

La hipótesis también implica que $T_{f\overline{g}}^* = \left(T_{\overline{g}}T_f\right)^*$, por lo tanto $T_{\overline{f}g} = T_{\overline{f}}T_g$, de donde se sigue

$$T_{\overline{f}}T_g\overline{\varphi} = T_{\overline{f}g}\overline{\varphi} = Q\left(g\overline{f\varphi}\right) = T_g T_{\overline{f}}\overline{\varphi}.$$

Además,

$$\begin{aligned}
T_{\overline{f}}T_g\overline{\varphi} &= Q\left(\overline{f}Q\left(g\overline{\varphi}\right)\right) \\
&= Q\left(\overline{f}P\left(g\overline{\varphi}\right) + \overline{f}\,\overline{P\left(\overline{g}\varphi\right)} - P\left(g\overline{\varphi}\right)(0)\overline{f}\right) \\
&= Q\left[\overline{f}P\left(g\overline{\varphi}\right)\right] + \overline{fP\left(\overline{g}\varphi\right)} - P\left(g\overline{\varphi}\right)(0)\overline{f} \\
&= P\left[\overline{f}P\left(g\overline{\varphi}\right)\right] + \overline{P\left[f\overline{P\left(g\overline{\varphi}\right)}\right]} - P\left[\overline{f}P\left(g\overline{\varphi}\right)\right](0) \\
&\quad + \overline{fP\left(\overline{g}\varphi\right)} - P\left(g\overline{\varphi}\right)(0)\overline{f}
\end{aligned}$$

y

$$T_g T_{\overline{f}}\overline{\varphi} = T_{\overline{f}g}\overline{\varphi} = Q\left(\overline{f}g\overline{\varphi}\right) = P\left(g\overline{f\varphi}\right) + \overline{P\left(f\varphi\overline{g}\right)} - P\left(g\overline{f\varphi}\right)(0),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
P\left(g\overline{f\varphi}\right) + \overline{P\left(f\varphi\overline{g}\right)} - P\left(g\overline{f\varphi}\right)(0) &= P\left[\overline{f}P\left(g\overline{\varphi}\right)\right] + \overline{P\left[f\overline{P\left(g\overline{\varphi}\right)}\right]} - P\left[\overline{f}P\left(g\overline{\varphi}\right)\right](0) \\
&\quad + \overline{fP\left(\overline{g}\varphi\right)} - P\left(g\overline{\varphi}\right)(0)\overline{f}.
\end{aligned}$$

así que la igualdad (4.7)implica que

$$\overline{P\left(f\varphi\overline{g}\right)} = \overline{P\left[f\overline{P\left(g\overline{\varphi}\right)}\right]} + \overline{fP\left(\overline{g}\varphi\right)} - P\left(g\overline{\varphi}\right)(0)\overline{f},$$

por lo tanto,

$$P\left(f\varphi\overline{g}\right) = P\left[f\overline{P\left(g\overline{\varphi}\right)}\right] + fP\left(\overline{g}\varphi\right) - \overline{P\left(g\overline{\varphi}\right)(0)}f.$$

Claramente $\overline{P\left(g\overline{\varphi}\right)(0)} = \int \overline{g}\varphi \mathrm{d}A = P\left(\overline{g}\varphi\right)(0)$ y

$$P\left[f\left(\overline{P\left(g\overline{\varphi}\right)}\right)\right](0) = \langle f, P\left(g\overline{\varphi}\right)\rangle = \langle f, g\overline{\varphi}\rangle = P\left(f\overline{g}\varphi\right)(0),$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} T_f T_{\overline{g}}\varphi &= \left\{fP\left(\overline{g}\varphi\right) + P\left[f\overline{P\left(g\overline{\varphi}\right)}\right] - P\left(\overline{g}\varphi\right)(0)f\right\} + \overline{P\left[\overline{f}P\left(g\overline{\varphi}\right)\right]} - P\left[f\left(\overline{P\left(g\overline{\varphi}\right)}\right)\right](0) \\ &= P\left[f\varphi\overline{g}\right] + \overline{P\left(g\overline{f\varphi}\right)} - P\left(f\overline{g}\varphi\right)(0) = T_{\overline{g}}T_f\varphi. \end{aligned}$$

■

Ahora enunciamos un resutado que será de gran utilidad (ver [9, pág. 632]).

Lema 12 *Sea $f \in \mathbf{H}^\infty$ no constante. Entonces la subálgebra normada cerrada en $\mathcal{L}^\infty$ generada por $\bar{f}$ y $\mathbf{H}^\infty$ contiene a $C(\overline{\mathbb{D}})$. Es decir $C(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{Alg\left\langle \bar{f}, \mathbf{H}^\infty \right\rangle}$*

A continuación presentamos el teorema principal de esta tesis.

Teorema 17 *Sean $f, g \in \mathbf{L}^2_a$ con f acotada o g acotada en $\mathbb{D}$. Entonces T_f y $T_{\bar{g}}$ conmutan sobre $\mathbf{b}^2$ si y sólo si f es constante o g es constante.*

Demostración. Para la condición suficiente suponemos que f es una función constante c. Para $u \in \mathbf{b}^2$ tenemos

$$T_{f\bar{g}}(u) = Q(c\bar{g}u) = cQ(\bar{g}u),$$

por otro lado,

$$T_{\bar{g}}(T_f(u)) = T_{\bar{g}}(cu) = cT_{\bar{g}}(u) = cQ(\bar{g}u).$$

Así, $T_{f\bar{g}} = T_{\bar{g}}T_f$ y por el Teorema 16, T_f y $T_{\bar{g}}$ conmutan.

Para la condición necesaria, suponemos que $f \in \mathbf{H}^\infty$, $g \in \mathbf{L}^2_a$ son tales que $f(0) = g(0) = 0$. Como se cumplen las hipótesis del Lema 11 tenemos

$$\int_{\mathbb{D}} \overline{f(w)}G(w)w^k(1-|w|^2)\mathrm{d}A(w) = 0, \qquad k = 0, 1, ...$$

donde

$$G(w) = \frac{1}{w}\int_0^w g(\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad w \in \mathbb{D}. \tag{4.11}$$

Por la linealidad de la integral se sigue que para todo polinomio $h_n \in \mathbf{H}^\infty(\mathbb{D})$

$$\int_{\mathbb{D}} \overline{f(w)}G(w)h_n(w)(1-|w|^2)\mathrm{d}A(w) = 0. \tag{4.12}$$

Sea $g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$ la serie de Taylor de g, así que

$$G(w) = \frac{1}{w}\int_0^w g(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{w^k}{k+1}.$$

Por la Proposición 36 tenemos

$$\| G \|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{k+1} = \| g \|_2^2 < \infty,$$

lo cual implica que $G \in \mathbf{L}_a^2$. Ahora consideramos $h \in \mathbf{H}^\infty$. Usando (4.12) se tiene

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{D}} \overline{f(w)}G(w)(1-|w|^2)h(w)\mathrm{d}A(w)\right| &= \left|\int_{\mathbb{D}} \overline{f(w)}G(w)(1-|w|^2)(h(w)-h_n(w))\mathrm{d}A(w)\right| \\ &\leq \int |f(w)|\,|G(w)|\,|h(w)-h_n(w)|\,\mathrm{d}A(w) \\ &\leq \|fG\|_2 \|h(w)-h_n(w)\|_2,\end{aligned}$$

para todo polinomio $h_n \in \mathbf{H}^\infty(\mathbb{D})$. Para cada $h \in \mathbf{H}^\infty$ existe una sucesión de polinomios $(h_n) \in \mathbf{H}^\infty$ tal que $lim_{n\longrightarrow\infty} \| h - h_n \|_2 = 0$. Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{D}} \overline{f(w)}G(w)(1-|w|^2)h(w)\mathrm{d}A(w) = 0 \qquad \text{para cada } h \in \mathbf{H}^\infty. \tag{4.13}$$

De la linealidad de la integral se sigue que

$$\int_{\mathbb{D}} G(w)(1-|w|^2)\psi(w)\mathrm{d}A(w) = 0,$$

para cada $\psi \in \overline{Alg\left\langle \bar{f}, \mathbf{H}^\infty \right\rangle}$.

Si f no es una función constante del Lema 12 se sigue que la igualdad anterior es válida para toda $\psi \in C(\overline{\mathbb{D}})$. Como $C(\overline{\mathbb{D}})$ es denso en $\mathbf{L}^2(\mathbb{D})$ se sigue que

$$G(w)(1-|w|^2) = 0$$

en $\mathbb{D}$. Por lo tanto $G \equiv 0$ y concluimos que g es la función cero. Para el caso general, sean F, $G \in \mathbf{L}_a^2$ tal que F es acotada o G es acotada en $\mathbb{D}$ y supongamos que T_F y $T_{\bar{G}}$ conmutan. Queremos ver que F es constante o G es constante. Ponemos

$$\begin{aligned} f(z) &= F(z) - F(0), \\ g(z) &= G(z) - G(0), \end{aligned}$$

notamos que f y g están en $\mathbf{L}_a^2$. Además, $f(0) = g(0) = 0$ y f es acotada o g es acotada en $\mathbb{D}$. Usando el teorema previo tenemos

$$\begin{aligned} T_f T_{\bar{g}} &= T_{F-F(0)} T_{\bar{G}-\bar{G(0)}} = T_{F\bar{G}} - F(0) T_{\bar{G}} - \bar{G(0)} T_F + \bar{G(0)} F(0) \\ &= T_{\bar{G}} T_F - F(0) T_{\bar{G}} - \bar{G(0)} T_F + \bar{G(0)} F(0) = T_{\bar{G}-\bar{G(0)}} T_{F-F(0)} = T_{\bar{g}} T_f \end{aligned}$$

lo cual implica que $f = 0$ o $g = 0$. Por lo tanto $F \equiv F(0)$ o $G \equiv G(0)$. ■

Apéndice A

Apéndice

Proposición 28 *Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ y σ_N la medida de superficie sobre la esfera unitaria. Entonces*

$$\sigma_N = \begin{cases} \frac{\pi^{N/2}}{(N/2)!} & \text{si } N \text{ es par;} \\ \frac{2^{(N+1)/2}\pi^{(N-1)/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(N-2)} & \text{si } N \text{ es impar.} \end{cases}$$

Teorema 18 *Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.*
Sea (X, μ) un espacio de medida. Sean $\{f_n\}_{n\geq 1}$ y f funciones medibles tales que $f_n \longrightarrow f$ c.t.p en X. Si existe $g \in \mathbf{L}_1(\mu)$ tal que para toda n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p en X, entonces $f \in \mathbf{L}_1(\mu)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu.$$

Proposición 29 *Desigualdad de Hölder.*
Sea (X, μ) un espacio de medida.
Sean $p, q \in (1, \infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sea $f \in \mathbf{L}_p(\mu)$ y $g \in \mathbf{L}_q(\mu)$. Entonces $fg \in \mathbf{L}_1(\mu)$ y

$$\int |\, fg \,|\, \mathrm{d}\mu \leq \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{A.1}$$

Proposición 30 *Si $f_n \to f$ en $\mathbf{L}^p(\Omega)$. Entonces existe una subsucesión $\left\{f_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{j\to\infty} f_{n_j} = f$ c.t.p en X.*

Definición 14 *Sean $(X, \|\|_X)$ y $(Y, \|\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados sobre el campo K.Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ a la colección de operadores lineales de X en Y y por $\mathcal{B}(X, Y)$ a la colección de operadores lineales acotados de $(X, \|\|_X)$ a $(Y, \|\|_Y)$.*

Proposición 31 *Sea $(X, \|\|_X)$ espacio de Banach y $M \subseteq X$ un subespacio cerrado. Entonces M es un subespacio de Banach.*

Proposición 32 *Sean $(X, \|\|_X)$ y $(Y, \|\|_Y)$ espacios vectoriales normados sobre el campo K. Si $(Y, \|\|_Y)$ es un espacio de Banach, entonces $(\mathcal{B}(X,Y), \|\|_{\mathcal{B}(X,Y)})$ es un espacio de Banach con la norma*

$$\| A \|_{\mathcal{B}(X,Y)}) = sup_{x\neq 0}\frac{\| Ax \|_Y}{\| x \|_X}.$$

A continuación introducimos el concepto de espacio dual.

Definición 15 *Sea $(X, \|\|)$ un espacio vectorial normado sobre un campo escalar K. Denotamos por*

$$X^* = \{f : X \longrightarrow K \mid f \, es\ funcional\ lineal\ acotada\}.$$

Así pues $X^* = \mathcal{B}(X,K)$ y se sigue X^* tiene estructura de espacio vectorial normado ya que

$$\| f \|= inf \{M > 0 : para\ todo\ \ x \in X \, |f(x)| \leq M \| x \|\}.$$

La pareja $(X^*, \|\|)$ es el espacio dual normado de $(X, \|\|)$.

Observación 14 *Si K es un espacio de Banach, se sigue de la proposición anterior, $X^* = \mathcal{B}(X,K)$ es de Banach.*

Teorema 19 *Teorema de Representación de Riesz. Sea $(H, \langle,\rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, denotamos*

$$H^* = \{F : H \longrightarrow \mathbb{C} \mid F \ es\ funcional\ lineal\ acotada\}.$$

Si $F \in H^*$ entonces existe una única $y = y_f \in H$ tal que $F(x) = \langle x, y\rangle$, para todo $x \in H$.

Proposición 33 *Desigualdad de Bessel. Si $\{x_j\}_{j=1}^n$ es una familia ortonormal finita, entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} | \langle x, x_j\rangle |^2 \leq \| x \|^2 \qquad para\ todo\ \ x \in X. \tag{A.2}$$

Definición 16 *Los escalares $\langle x, x_1\rangle, ..., \langle x, x_n\rangle$ se llaman los coeficientes de Fourier de x con respecto al sistema ortonormal $\{x_j\}_{j=1}^n$.*

Consideremos el siguiente problema:
Sea $\{x_j\}_{j=1}^n$ una familia ortonormal en $(X, \langle,\rangle)$; sea $x \in X$ fijo, queremos hallar $z \in \langle\{x_1, ..., x_n\}\rangle$ tal que $\|x - z\|$ sea mínimo. Como $z = \beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n$ basta hallar $\beta_1, ..., \beta_n$. Estimamos $\|x - \sum_{i=1}^n \beta_i x_i\|^2$ para hallar las condiciones sobre los β_i. Así pues $\|x - \sum_{i=1}^n \beta_i x_i\|^2$ alcanza su valor mínimo si y sólo si $\beta_i = \langle x, x_i\rangle$, $\forall i = 1, ...n$.

Proposición 34 $(x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i) \perp \langle\{x_1, ..., x_n\}\rangle$,

donde $x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i$ es la proyección ortogonal de x en $\langle\{x_1, ..., x_n\}\rangle$.

Definición 17 *Sea* $(X, \langle, \rangle)$ *un espacio con producto interior y sea* F *un subconjunto de* X*. La colección de vectores*

$$F^{\perp} = \{y \in X \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } x \in F\}$$

es llamado el complemento ortogonal de F*.*

El siguiente teorema considera el complemento ortogonal de un subespacio que es finito dimensional.

Definición 18 *Sea* $(X, \langle, \rangle)$ *un espacio con producto interior y sea* $A = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *un sistema ortonormal en* X*. Se dice que* A *es completo si no existe otro conjunto ortonormal contenido en* A*; esto es,* A *deberá ser un conjunto ortonormal maximal.*

Proposición 35 *Un conjunto ortonormal* A *es completo si y sólo si para toda* x *tal que* $x \perp A$*,* $x = 0$*.*

Teorema 20 *Identidad de Parseval. Sea* $(X, \langle, \rangle)$ *un espacio con producto interior y sea* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *un sistema ortonormal en* X*. Entonces*

1. *Si para todo* $x \in X$ *se cumple*

$$\| x \|^2 = \sum_{\alpha} | \langle x, x_\alpha \rangle |^2, \tag{A.3}$$

entonces $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *es completo.*

2. *Si* X *es un espacio de Hilbert y* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *es conjunto ortonormal completo, entonces la ecuación A.3 se cumple para todo* $x \in X$*.*

Teorema 21 *Teorema de Stone-Weierstrass. Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *un conjunto cerrado y acotado. El conjunto de polinomios en* N *variables es denso en* $C(\Omega)$ *respecto la norma del supremo.*

Proposición 36 *Sea* $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbf{L}_a^2$ *entonces*

$$\| h \|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{D})}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}. \tag{A.4}$$

Demostración. Como $\{\sqrt{n+1} z^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de $\mathbf{L}_a^2$, el resultado se sigue por la identidad de Parseval. ■

Definición 19 $\mathcal{A}$ *es llamada un álgebra normada si*

1. $\mathcal{A}$ *es un álgebra.*
2. $(\mathcal{A}, ||)$ *es un espacio vectorial normado.*
3. *Para todo* $x, y \in \mathcal{A}$*,*

$$|xy| \leq |x||y|. \tag{A.5}$$

4. *Si* $\mathcal{A}$ *contiene una identidad* e*, entonces* $|e| = 1$*.*

La norma en un álgebra normada $\mathcal{A}$ induce una topología en $\mathcal{A}$ de la manera usual.

Bibliografía

[1] Boo Rim Choe, Young Joo Lee, *Commuting Toeplitz Operators on the Harmonic Bergman Space*. Michigan Math. J. 46(1999)166-174.

[2] Greene Robert, Krantz Steven, *Function theory of one complex variable*. Third edition. Graduate Studies in Mathematics,40. American Mathematical Society, Providences, 2006. x+504 pp.

[3] H. Groemer, *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 61. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. xii+329 pp.

[4] Jürgen Jost, *Partial Differential Equations*. Graduate texts in mathematics, 214. New York, NY, Springer, 2007.

[5] K. Guo, D. Zheng, *Toeplitz algebra and Hankel algebra on the harmonic Bergman space*. J. Math. Anal. Appl. 276(2002)213-230.

[6] Kehe Zhu, *Operator theory in function spaces*. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 138. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. xvi+348 pp.

[7] Rudin Walter, *Real and complex analysis*. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. xiv+416 pp.

[8] Sheldon Axler, Bourdon Paul, Ramey Wade, *Harmonic function theory*. Graduate Texts in Mathematics, 137. Springer-Verlag, New York, 1992. xii+231 pp.

[9] S. Axler, A. L. Shields, *Algebras generated by Analytic and Harmonic Functions*. Indiana Univ. Math. J. 36(1987).