UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Grupos ornamentales en el plano

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

P R E S E N T A:

Julia Carrillo Martínez de la Escalera

DIRECTOR DE TESIS:
Mat. María Guadalupe Lucio Gómez Maqueo
2012

1. Datos del alumno.
Carrillo
Martínez de la Escalera
Julia
55685899
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304518335

2. Datos del tutor.
Mat.
María Guadalupe
Lucio
Gómez Maqueo

3. Datos del sinodal 1.
Dra.
Isabel Alicia
Hubard
Escalera

4. Datos del sinodal 2.
Mat.
Cocepción
Ruiz
Ruiz-Funes

5. Datos del sinodal 3.
Dr.
Guillermo Javier Francisco
Sienra
Loera

6. Datos del sinodal 4.
M. en C.
Francisco de Jesús
Struck
Chávez

7. Datos del trabajo escrito.
Grupos ornamentales en el plano
54 p
2012

Índice general

Introducción

> “ *La simetría es una idea por la cual, el hombre de todas la épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección.*”
>
> Hermann Weyl

Simetría es ese equilibrio que se manifiesta en toda la naturaleza desde el elemento más pequeño, más simple del mundo inorgánico hasta los sistemas más organizados del mundo orgánico, haciéndose extensivo tanto a la creación artística del hombre como al hombre mismo.

La simetría (que en griego significa “medida”), es un fenómeno fundamental en el arte, la ciencia y la naturaleza que ha sido capturado, descrito y analizado usando conceptos matemáticos; es un rasgo característico de formas geométricas, sistemas, ecuaciones, objetos reales o entidades abstractas que está relacionado con su invariancia bajo ciertas transformaciones geométricas. En el arte fue resultado de planteamientos geométricos que se ejercieron desde las primeras manifestaciones artísticas y adquirió gran importancia en el Renacimiento, cuando resurge el clasicismo, época en la que los artistas dedicados al perfeccionamiento del realismo se interesaron por aplicar la ciencia en el arte. Este concepto se aprecia también en arquitectura, en obras como las pirámides de Egipto, los templos griegos, las mezquitas árabes, y las iglesias góticas entre otras. En las Bellas Artes, pintura y escultura, la simetría ha llegado a ser a menudo un método de creación. Simetría y proporción han sido exaltados en todos los tiempos y ámbitos como dos cualidades determinantes de la concepción estética. En música se manifiesta también, existen composiciones en las que se encuentran distribuciones de notas generadas de forma bilateral, traslaciones o rotaciones de media vuelta, esto se puede apreciar por ejemplo en composiciones de música clásica de J.S. Bach, por no mencionar más.

Si bien la simetría es una característica de la forma, la cual no depende del movimiento, ésta permanece constante bajo ciertos tipos de movimientos en el plano.

En este trabajo se estudian cierto tipo de simetrías en el plano desde el punto de vista matemático. Específicamente se tratan los llamados grupos ornamentales del plano, que son grupos de transformaciones (movimientos) del plano.

Los grupos ornamentales del plano son grupos de transformaciones isométricas del plano en sí mismo, esto es, aquellas que preservan distancias. Estas transformaciones son simetrías de los frisos, las rosetas y los tapices.

Una roseta es un patrón formado al rotar una figura un cierto ángulo un número finito de veces, estos patrones además de la rotación pueden ser generados utilizando otras isometrías como la reflexión. Se demuestra que si un grupo es finito entonces es diédrico o cíclico [Teorema de Leonardo].

Un friso es un cubrimiento de una región del plano limitada por dos rectas paralelas. Los frisos son cubrimientos de regiones de longitud infinita pero de ancho finito. Estos patrones están formados por la repetición de alguna figura, es decir, el patrón puede ser generado al aplicar una traslación a una figura una infinidad de veces. Además de las traslaciones hay algunas otras isometrías que dejan invariante a un patrón de frisos. De éstos, existen siete grupos diferentes que se distiguen por el tipo de simetría utlizada de modo que el patrón se mantiene fijo.

Un tapiz es el cubrimiento del plano formado por la repetición de alguna figura. El patrón puede ser generado al aplicar traslaciones a la figura en dos direcciones no paralelas una infinidad de veces. También hay otras simetrías distintas a la traslación que generan el cubrimiento del plano. A los grupos de tapiz se les llama también grupos cristalográficos. Este nombre proviene del estudio de los cristales que se agrupan bajo ciertas simetrías. En 1891, el cristalógrafo E.S. Fedorov demostró que existen 17 grupos distintos de tapices, que se diferencian por el grupo de simetrías que los generan.

Es sorprendente el número reducido de grupos que existen para la infinidad de diseños a los que pueden dar lugar.

Los árabes presentan un gran desarrollo del concepto de simetría. La religión islámica prohibe la representación de figuras de la naturaleza. Por este motivo, sus manifestaciones artísticas buscaban la belleza en los diseños geométricos, esto se ve reflejado especialmente en los frisos, las rosetas y los tapices. El arte de llenar el plano por repetición de figuras alcanzó su máxima expresión en la Alhambra de Granada. Su conocimiento de las simetrías alcanzó tal grado de magnitud que utilizaron sabiamente en sus decoraciones los 17 grupos de simetría plana. Resulta también sorprendente el hecho de que Leonardo da Vinci haya determinado las posibles simetrías de cúpulas y nichos sin destruir la simetría del núcleo [5] hace más de 500 años.

Capítulo 1

Isometrías en el plano

1.1. Isometrías en el plano

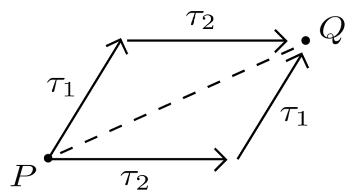
En este trabajo, por una isometría entenderemos una isometría del plano Euclidiano. Se supondrá que las propiedades elementales de las transformaciones del plano y los grupos son conocidas. En este capítulo, en primera instancia, se dan las definiciones y las propiedades generales que parecieron significativas para el desarrollo de los capítulos siguientes. Asimismo, con la finalidad de que las demostraciones principales de los cuatro siguientes capítulos sean más claras, se demuestran propiedades que se utilizan en estas demostraciones y que no forman parte del conocimiento general sobre transformaciones, ya sea porque son de mucho detalle o porque generalmente se ven en los cursos desde un enfoque más algebraico que geométrico.

1.2. Definiciones y propiedades generales

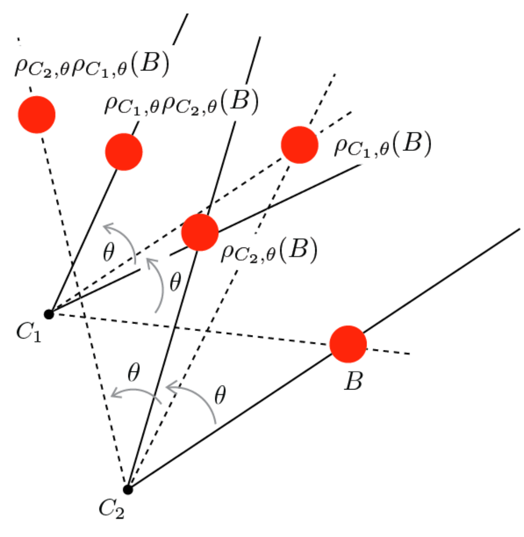
Una transformación f en el plano es una colineación si y sólo si para toda recta l, $f(l)$ es una recta. Una transformación f en el plano es una involución si y sólo si $f^2 = Id$. Una transformación f en el plano es una isometría si y sólo si preserva distancias, esto es, si $AB = f(A)f(B)$. Una isometría se llama directa si conserva el sentido del plano. En caso contrario se llama inversa. Las isometrías son colineaciones ya que mandan rectas en rectas. Asimismo, preservan segmentos, puntos medios, rayos, ángulos, triángulos, paralelismo, perpendicularidad, etc.

Una traslación del plano es una transformación definida por un par de puntos P y Q de tal forma que R' es el transformado de R si y sólo si $PQ = RR'$ y PQ es paralelo a RR', y la denotamos $\tau_{P,Q}$. Dados dos puntos P y Q, hay una única traslación que mapea P en Q. Las traslaciones son isometrías directas. Dos traslaciones

$\tau_{A,B}$ y $\tau_{C,D}$ son iguales si y solo si $\square$ $CABD$ es un paralelogramo. Si $P \neq Q$, $\tau_{P,Q}$ no fija ningún punto y transforma en sí mismas a las rectas paralelas a $\overleftrightarrow{PQ}$. Si τ es una traslación, entonces l es paralela a $\tau(l)$ para toda recta l. La composición de traslaciones es una traslación o la identidad. Dos traslaciones conmutan.



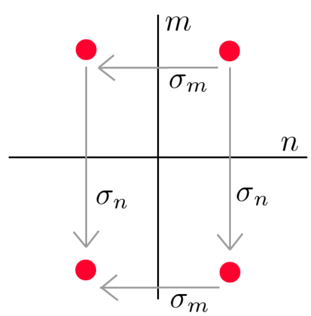
Una rotación en el plano es una transformación definida por un punto C y un ángulo θ de tal forma que deja fijo al punto C y si $R \neq C$, R' es el transformado de R si y sólo si $CR = CR'$ y el ángulo dirigido $RCR' = \theta$, y la denotamos $\rho_{(C,\theta)}$. Al punto C se la llama centro de la rotación y al ángulo θ, ángulo de rotación. Dados dos puntos P y Q las rotaciones que mandan P en Q, deben tener centro en un punto C de su mediatriz. Si $\theta \neq k(360°)$, para toda $k \geq 0$, $\rho_{(C,\theta)}$ sólo deja fijo al punto C y transforma en sí mismos a los círculos con centro en C. Las rotaciones son isometrías directas. Las rotaciones con el mismo centro conmutan y con distintos centros no conmutan.

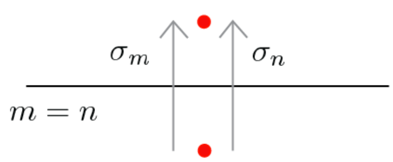


Una rotación de ángulo θ con centro en C, seguida por una rotación de ángulo ϕ con centro en D es una rotación de ángulo $(\theta + \phi)$ y centro en O donde O es el tercer vértice del triángulo con base en CD y ángulos adyacentes $\theta/2$ y $\phi/2$. En el caso en el que la suma $(\theta + \phi)$ sea cero o $k(360°)$, es una traslación.

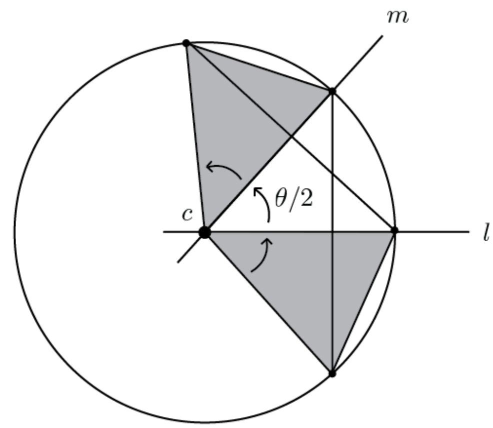
Dado un punto C, llamamos media vuelta con centro en C a la rotación de $180°$ con centro en C y la denotamos por σ_C. Las medias vueltas son involuciones. El punto medio de los puntos A y $\sigma_{P(A)}$ es P. La media vuelta σ_P fija al punto A si y sólo si $A = P$ y la recta l permanece invariante si y sólo si P está en l. El producto de dos medias vueltas, con centros en A y B respectivamente, es una traslación en la dirección de AB y de longitud $2AB$. En particular si Q es el punto medio de P y R , entonces $\sigma_Q\sigma_P = \tau_{P,R} = \sigma_R\sigma_Q$.

Dada una recta m, llamamos reflexión a la transformación tal que R' es el transformado de R si y sólo si m es la recta perpendicular al segmento RR' que pasa por M el punto medio de RR', y la denotamos σ_m. A la recta m se le llama el eje de reflexión. La reflexión es una isometría involutoria e inversa que intercambia los semiplanos determinados por m. La reflexión σ_m fija al punto P si y sólo si P está en m, fija a la recta l puntualmente si y sólo si $l = m$ y deja invariante a cualquier recta l, diferente de m, si y sólo si l es perpendicular a m. El producto de dos reflexiones σ_m, σ_n conmuta si y sólo si $m = n$ o m es perpendicular a n.

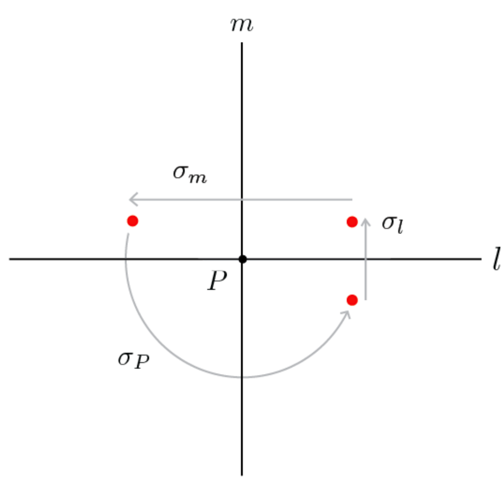




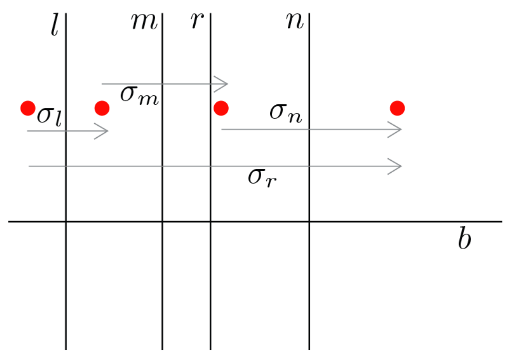
Toda traslación es producto de dos reflexiones en rectas l, m perpendiculares a la dirección de la traslación. La distancia entre las rectas es la mitad del desplazamiento de la traslación. Toda rotación con centro en un punto C y ángulo θ es producto de dos reflexiones en rectas l, m que se intersectan en el punto C y tales que la medida del ángulo dirigido de l a m es $\theta/2$.



Toda media vuelta σ_P es producto de dos reflexiones en cualesquiera dos rectas perpendiculares en P.

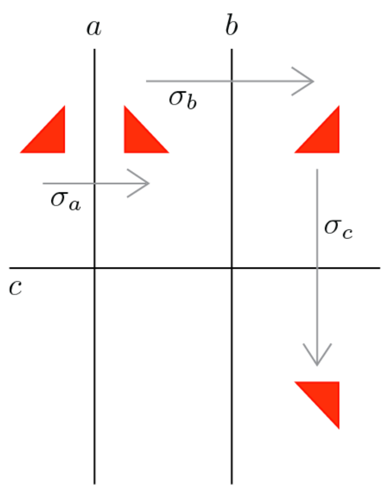


Si las rectas l, m, n son perpendiculares a la recta b, entonces hay rectas únicas p, q, tales que $\sigma_m\sigma_l = \sigma_n\sigma_p = \sigma_q\sigma_n$ donde p y q son perpendiculares a b. Si las rectas l, m, n son perpendiculares a la recta b, entonces $\sigma_n\sigma_m\sigma_l$ es una reflexión σ_r en una recta r perpendicular a b.



El producto de cuatro reflexiones es producto de dos reflexiones.

Una reflexión paso es una traslación seguida de una reflexión en dirección perpendicular a la traslación. Al eje de la reflexión se le llama eje de la reflexión paso. Las reflexiones paso dejan invariante a su eje. La reflexión paso es una isometría inversa. Una reflexión paso se puede ver como el producto de tres reflexiones, dada la reflexión paso γ con eje de reflexión c, existen rectas a y b perpendiculares a c, tales que $\gamma = \sigma_c\sigma_b\sigma_a$.



Una reflexión paso es la composición de una reflexión en una recta a seguida de una media vuelta alrededor de un punto fuera de a. Una reflexión paso es la composición de una media vuelta alrededor de un punto A seguida de una reflexión en una recta que no pasa por A. Si el punto P está fuera de la recta l, entonces $\sigma_P\sigma_l$ y $\sigma_l\sigma_P$ son reflexiones paso cuyo eje es la recta perpendicular a l por P. Una traslación que fija a la recta c conmuta con una reflexión paso con eje c. El cuadrado de una reflexión paso es una traslación en la dirección de su eje. Las rectas p, q, r no son concurrentes ni tienen una recta perpendicular común si y sólo si $\sigma_p\sigma_q\sigma_r$ es una reflexión paso.

Toda isometría se puede expresar como producto de a lo más tres reflexiones. Las isometrías se clasifican como pares o impares, se dice que son pares cuando se pueden expresar como producto de dos reflexiones y se dice que son impares cuando se pueden expresar como una reflexión o como producto de tres reflexiones. Las transformaciones del plano que son isometrías son las traslaciones, rotaciones, reflexiones y reflexiones paso. Las isometrías pares son la traslación y la rotación. Las isometrías impares son la reflexión y la reflexión paso. Las isometrías directas son las isometrías pares. Las isometrías inversas son las isometrías impares. Una isometría par involutoria es una media vuelta. Una isometría impar involutoria es una reflexión.

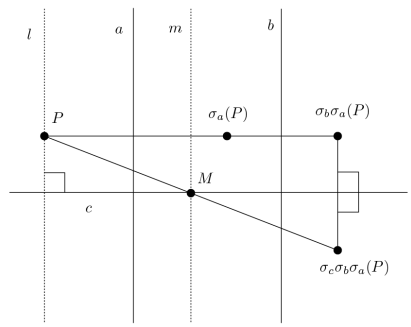
Si α y β son isometrías tales que $\alpha(P) = \beta(P)$, $\alpha(Q) = \beta(Q)$ y $\alpha(R) = \beta(R)$ para tres puntos no colineales P, Q, R, entonces $\alpha = \beta$. Las isometrías se pueden clasificar por el número de puntos que dejan fijos. Tres puntos no colineales quedan fijos si y sólo si la isometría es la identidad. Dos puntos quedan fijos si y sólo si es una reflexión. En este caso, toda la recta que los contiene queda fija punto a punto. Un punto queda fijo si y sólo si es una rotación, en particular puede ser una media vuelta. Ningún punto queda fijo si y sólo si es una traslación o una reflexión paso.

Las transformaciones en el plano forman un grupo al que se llamará $\mathcal{G}$.Las isometrías forman un subgrupo de $\mathcal{G}$ al que se llamará $\mathcal{I}$. Las involuciones forman un subgrupo de $\mathcal{G}$. Las traslaciones forman un subgrupo abeliano de $\mathcal{I}$ al que se llamará $\mathcal{T}$. Las rotaciones con el mismo centro forman un subgrupo abeliano de $\mathcal{I}$. Las traslaciones y medias vueltas forman un subgrupo de $\mathcal{I}$ al que se llamará $\mathcal{H}$. Las reflexiones generan a $\mathcal{I}$. Las isometrías pares (traslaciones y rotaciones) forman un subgrupo de $\mathcal{I}$ al que se llamará $\mathcal{E}$.

1.3. Otras propiedades de las isometrías

Proposición 1.1. *El punto medio del segmento determinado por un punto P cualquiera y $\gamma(P)$ su imagen bajo una reflexión paso γ con eje c, está en la recta c.*

Sean a y b dos rectas perpendiculares a c tales que $\gamma = \sigma_c\sigma_b\sigma_a$. Sea P un punto cualquiera en el plano y l la recta perpendicular a c por P. Existe m una recta perpendicular a c tal que $\sigma_b\sigma_a = \sigma_m\sigma_l$.



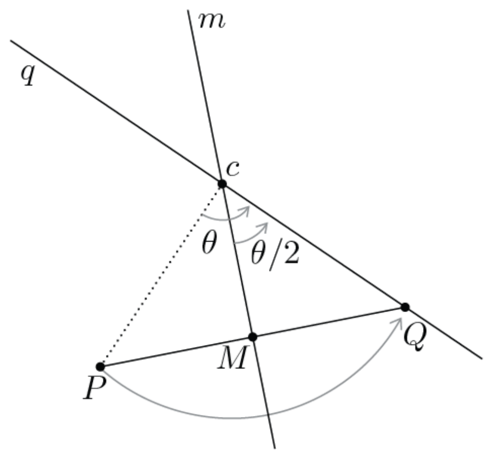
Sea M el punto de intersección de m y c, P y M son dos puntos distintos tales que $\gamma(P) = \sigma_c\sigma_b\sigma_a(P) = \sigma_c\sigma_m\sigma_l(P) = \sigma_c\sigma_m(P) = \sigma_M(P)$, por lo tanto M es el punto medio del segmento determinado por P y $\gamma(P)$.

Proposición 1.2. *Sea α una isometría par que manda un punto P en un punto Q, entonces $\alpha = \sigma_q\sigma_m$ donde m es la mediatriz de PQ y q es cualquier recta por Q.*

Sean P y Q dos puntos en el plano, sea M el punto medio del segmento PQ y m su mediatriz.

La única traslación que manda P en Q es $\tau_{P,Q}$. Pero $\tau_{P,Q} = \sigma_q\sigma_m$, donde q es la paralela a m por Q.

Las rotaciones que mandan P en Q, deben tener centro en un punto C de m, ya que es la mediatriz de PQ. Esto es, para todo C en m existe una rotación $\rho_{(C,\theta)}$ que manda P en Q, donde θ es el ángulo dirigido entre CP y CQ para cada punto C en m. Pero $\rho_{(C,\theta)} = \sigma_q\sigma_m$, donde q es la recta que pasa por C y Q, ya que el ángulo entre m y q es $\theta/2$ por ser m la mediatriz de PQ.



Inversamente, si q es una recta que pasa por Q y un punto cualquiera de m, entonces $\sigma_q\sigma_m$ es una rotación que manda P en Q.

Por lo tanto, las isometrías pares que mandan P en Q son exactamente las isometrías $\sigma_q\sigma_m$ donde m es mediatriz de PQ y q es cualquier recta por Q.

Proposición 1.3. *Sea α una isometría impar que manda a un punto P en un punto Q entonces $\alpha = \sigma_q\sigma_M$, donde M es el punto medio de PQ y q es cualquier recta por Q.*

Sea α una isometría impar que lleva P a Q. Sea $n = \overleftrightarrow{PQ}$. La isometría $\alpha\sigma_n$ es una isometría par, $\alpha\sigma_n = \sigma_q\sigma_m$ por la proposición 1.2, donde q es cualquier recta por Q y m la mediatriz de PQ. Por tanto $\alpha = \sigma_q\sigma_m\sigma_n$. Las rectas n y m son perpendiculares y se intersectan en M el punto medio de PQ, por lo tanto $\sigma_m\sigma_n = \sigma_M$ y $\alpha = \sigma_q\sigma_M$.

Inversamente, si q es una recta por Q, entonces $\sigma_q\sigma_M$ es una reflexión paso o una reflexión.

Por lo tanto las isometrías impares que mandan P en Q son exactamente las isometrías $\sigma_q\sigma_M$ donde M es el punto medio de PQ y q es cualquier recta por Q.

Definición. Sean α y β dos isometrías. A la isometría $\alpha\beta\alpha^{-1}$ se la llama la conjugada de β por α.

Proposición 1.4. *Sean α y β dos isometrías, entonces la conjugada de β por α es una involución si y sólo si β es una involución y β y su conjugada tienen la misma paridad.*

La isometría $\alpha\beta\alpha^{-1}$ es una involución si y sólo si $(\alpha\beta\alpha^{-1})^2 = Id$, pero $(\alpha\beta\alpha^{-1})^2 = (\alpha\beta\alpha^{-1})\,(\alpha\beta\alpha^{-1}) = \alpha\beta^2\alpha^{-1}$ y $\alpha\beta^2\alpha^{-1} = Id$ si y sólo si $\beta^2 = Id$. Por lo tanto $\alpha\beta\alpha^{-1}$ es una involución si y sólo si β es una involución, con lo que queda demostrada la primera parte de la proposición.

Ahora, ya que α y α^{-1} tienen la misma paridad, $\alpha\beta\alpha^{-1}$ tiene la misma paridad que β.

Proposición 1.5. *Si P es un punto, m una recta y α una isometría, entonces la conjugada de la media vuelta σ_P por α es la media vuelta $\sigma_{\alpha(P)}$ y la conjugada de la reflexión σ_m por α es la reflexión $\sigma_{\alpha(m)}$.*

Ya que σ_P es una involución par, por la proposición 1.4, $\alpha\sigma_P\alpha^{-1}$ es una involución par, por lo tanto es una media vuelta. Además, $(\alpha\sigma_P\alpha^{-1})(\alpha(P)) = (\alpha\sigma_P)(P) = \alpha(P)$, por lo tanto $\alpha(P)$ es el centro de la media vuelta.

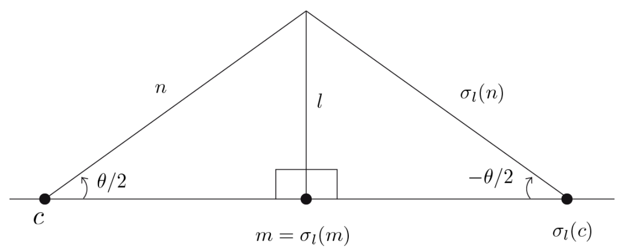
Análogamente, ya que σ_m es una involución impar, $\alpha\sigma_m\alpha^{-1}$ es una involución impar, por lo tanto es una reflexión. Además, si P es un punto cualquiera de la recta m, $(\alpha\sigma_m\alpha^{-1})\,(\alpha(P)) = \alpha\sigma_m(P) = \alpha(P)$, por lo tanto $\alpha(m)$ es su eje de reflexión.

Proposición 1.6. *Si A y B son dos puntos y α una isometría, entonces la conjugada de la traslación $\tau_{A,B}$ por α es la traslación $\tau_{\alpha(A),\alpha(B)}$.*

Sea M el punto medio del segmento AB, entonces $\alpha(M)$ es el punto medio del segmento $\alpha(A)\alpha(B)$. Además, $\tau_{A,B} = \sigma_M\sigma_A$ y $\tau_{\alpha(A),\alpha(B)} = \sigma_{\alpha(M)}\sigma_{\alpha(A)}$, por lo tanto $\alpha\tau_{A,B}\alpha^{-1} = \alpha\sigma_M\sigma_A\alpha^{-1} = \alpha\sigma_M\alpha^{-1}\sigma_A\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(M)}\sigma_{\alpha(A)} = \tau_{\alpha(A),\alpha(B)}$, como se quería demostrar.

Proposición 1.7. *Si C es un punto, θ un ángulo distinto de cero y α una isometría, entonces la conjugada de la rotación $\rho_{(C,\theta)}$ por α es la rotación $\rho_{(\alpha(C),\pm\theta)}$, donde el signo positivo aplica si α es una isometría par y el negativo cuando α es impar.*

Primero se analizará la conjugada de $\rho_{(C,\theta)}$ por σ_l para cualquier recta l en el plano. Sea m la perpendicular a l por C. Existe una recta n por C tal que $\rho_{(C,\theta)} = \sigma_n\sigma_m$.



El ángulo dirigido entre m y n es $\theta/2$. Ahora, $\sigma_l(m)$ y $\sigma_l(n)$ se intersectan en $\sigma_l(C)$ y el ángulo dirigido entre $\sigma_l(m)$ y $\sigma_l(n)$ es por lo tanto $-\theta/2$ de donde $\sigma_l\rho_{(C,\theta)}\sigma_l^{-1} = \sigma_l\sigma_n\sigma_m\sigma_l^{-1} = \sigma_l\sigma_n\sigma_l^{-1}\sigma_l\sigma_m\sigma_l^{-1} = \sigma_{\sigma_l(n)}\sigma_{\sigma_l(m)} = \rho_{(\sigma_l(C),-\theta)}$.

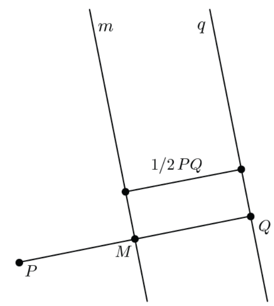
Si $\alpha = \sigma_l\sigma_s$ entonces $\alpha\rho_{(C,\theta)}\alpha^{-1} = \sigma_l(\sigma_s\rho_{(C,\theta)}\sigma_s^{-1})\sigma_l^{-1} = \rho_{(\alpha(C),+\theta)}$, con el signo positivo de θ reemplazando dos signos negativos. Si $\alpha = \sigma_l\sigma_s\sigma_r$, el signo de θ vuelve a ser negativo.

Proposición 1.8. *Si γ es una reflexión paso con eje c y α una isometría, entonces la conjugada de γ por α es una reflexión paso con eje $\alpha(c)$.*

Sea γ una reflexión paso con eje c. Ya que γ no es una involución, por la proposición 1.4, $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ tampoco lo es. Asimismo, $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ es una isometría impar, ya que γ lo es. Por lo tanto $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ es una isometría impar que no es involutiva, es una reflexión paso. Además, si Q es un punto cualquiera en $\alpha(c)$, existe un punto P en c tal que $\alpha(P) = Q$, por lo tanto $(\alpha\gamma\alpha^{-1})(Q) = (\alpha\gamma\alpha^{-1})(\alpha(P)) = \alpha\gamma(P) = \alpha(R)$, con R en c, ya que c es el eje de γ. Se tiene entonces que $\alpha(R)$ está en $\alpha(C)$ y el eje de la reflexión paso es $\alpha(C)$.

Proposición 1.9. *Sean c una recta, P y Q dos puntos en c tales que $\tau(P) = Q$, entonces $\sigma_c\tau_{P,Q} = \tau_{P,Q}\sigma_c$.*

Sean m y q dos rectas perpendiculares a c tales que $\tau_{P,Q} = \sigma_q\sigma_m$.



Por lo tanto, σ_q y σ_m conmutan con σ_c ya que m y q son perpendiculares a c y se tiene $\sigma_c\tau_{P,Q} = \sigma_c(\sigma_q\sigma_m) = (\sigma_q\sigma_c)\sigma_m = \sigma_q(\sigma_c\sigma_m) = \sigma_q(\sigma_m\sigma_c) = (\sigma_q\sigma_m)\sigma_c = \tau_{P,Q}\sigma_c$.

Proposición 1.10. *Sean O y O' dos puntos en el plano tales que $O' \neq O$ y sean ρ y α dos rotaciones tales que $\rho = \rho_{(O,\theta)}$ y $\alpha = \rho_{(O',\phi)}$ para θ y ϕ dos ángulos diferentes de 0, entonces $\alpha^{-1}\rho^{-i}\alpha\rho^i$ es una traslación diferente de la identidad.*

Se tiene que $\rho^i = \rho_{(O,i\theta)}$, $\rho^{-i} = \rho_{(O,-i\theta)}$, $\alpha^{-1} = \rho_{(O',-\phi)}$. La composición $\alpha^{-1}\rho^{-i}\alpha\rho^i$ es una traslación diferente de la identidad si la suma de los ángulos de las rotaciones que la componen es 0. Ya que $i\theta + \phi + (-i\theta) + (-\phi) = 0$, la composición es una traslación.

Proposición 1.11. *Sean A y B dos puntos distintos en el plano y M el punto medio del segmento AB entonces $\sigma_M = \tau_{A,B}\sigma_A$.*

Ya que $\tau_{A,B} = \sigma_M\sigma_A$, se tiene que $\tau_{A,B}\sigma_A = \sigma_M\sigma_A\sigma_A = \sigma_M\sigma_A^2 = \sigma_M$.

Proposición 1.12. *Sean c una recta y A un punto en c, entonces $\sigma_c\sigma_A = \sigma_A\sigma_c = \sigma_a$, donde a es la recta perpendicular a c por el punto A.*

Sea a la recta perpendicular a c por el punto A. La media vuelta $\sigma_A = \sigma_c\sigma_a$, ya que las rectas c y a son perpendiculares en A. Por lo tanto $\sigma_c\sigma_A = \sigma_c\sigma_c\sigma_a = \sigma_c^2\sigma_a = \sigma_a$. Las reflexiones σ_c y σ_a conmutan, ya que sus ejes son perpendiculares, por lo tanto $\sigma_A\sigma_c = \sigma_c\sigma_a\sigma_c = \sigma_c^2\sigma_a = \sigma_a$ como se quería demostrar.

Capítulo 2

Grupos ornamentales del plano

2.1. Grupos de simetría

Si F es cualquier figura del plano, el conjunto $\mathcal{W}$ de isometrías que dejan F invariante es un subgrupo de $\mathcal{I}$ el grupo de las isometrías del plano. A este grupo $\mathcal{W}$ asociado a F, se le llama grupo de simetrías de F. Por lo tanto, una simetría ϕ está en el grupo de simetría de F si y sólo si $\phi(F) = F$. En este caso F es un figura simétrica.

Se llama a m recta de simetría para un conjunto S de puntos si $\sigma_m(S) = S$.

Se llama a P punto de simetría para un conjunto S de puntos si $\sigma_P(S) = S$.

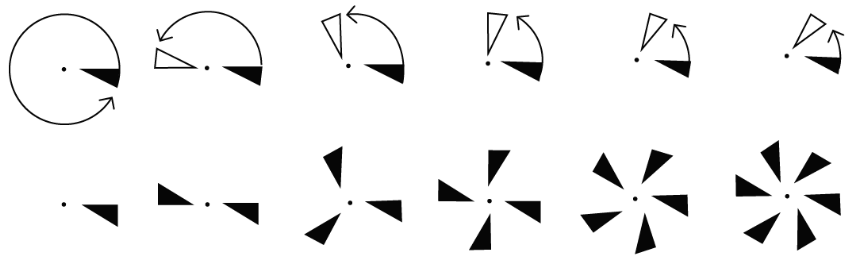
La isometría α es una simetría para un conjunto S de puntos si $\alpha(S) = S$.

Lema 2.1. *Si P es un punto de simetría para un conjunto S de puntos, y α es una simetría de S, entonces $\alpha(P)$ es un punto de simetría para S. Si m es una recta de simetría para un conjunto S de puntos y α es una simetría de S, entonces $\alpha(m)$ es una recta de simetría para S.*

Si P es un punto de simetría de S, σ_P está en el grupo $\mathcal{W}$ se simetrías de S. Si las isometrías α y σ_P están en el grupo $\mathcal{W}$ se simetrías de S, entonces $\alpha\sigma_P\alpha^{-1}$ está en S, pero por la proposición 1.5 $\alpha\sigma_P\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(P)}$, por lo tanto $\sigma_{\alpha(P)}$ está en $\mathcal{W}$ y $\alpha(P)$ es un punto de simetría para S.

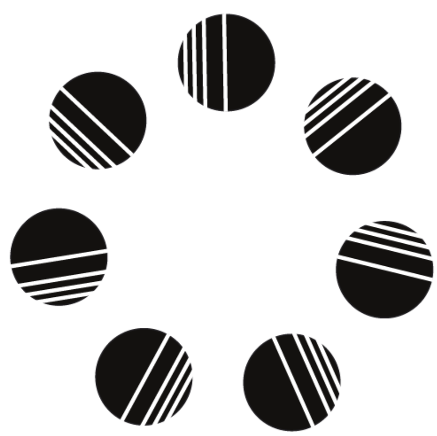
Análogamente, si m es una recta de simetría de S, σ_m está en el grupo $\mathcal{W}$ de simetrías de S, entonces $\alpha\sigma_m\alpha^{-1}$ está en S, pero $\alpha\sigma_m\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(m)}$ está en $\mathcal{W}$ y $\alpha_(m)$ es una recta de simetría para S.

Toda figura simétrica F está compuesta por una región fundamental K que se repite, mediante rotaciones, traslaciones, reflexiones y reflexiones paso. Al actuar el grupo de simetrías de F sobre K, se obtiene la figura F.



A estos grupos de simetrías, como ya se ha dicho, se les llama grupos ornamentales del plano.

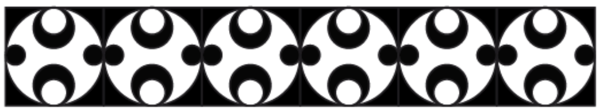
A los grupos finitos se les llama grupos de Leonardo o de roseta. En el siguiente capítulo se demostrará que si el grupo de isometrías $\mathcal{W}$ de una figura F es finito, entonces el grupo $\mathcal{W}$ no contiene ninguna traslación diferente de la identidad, esto es, $\mathcal{W} \cap \mathcal{T} = Id$, donde $\mathcal{T}$ es el grupo de traslaciones del plano.



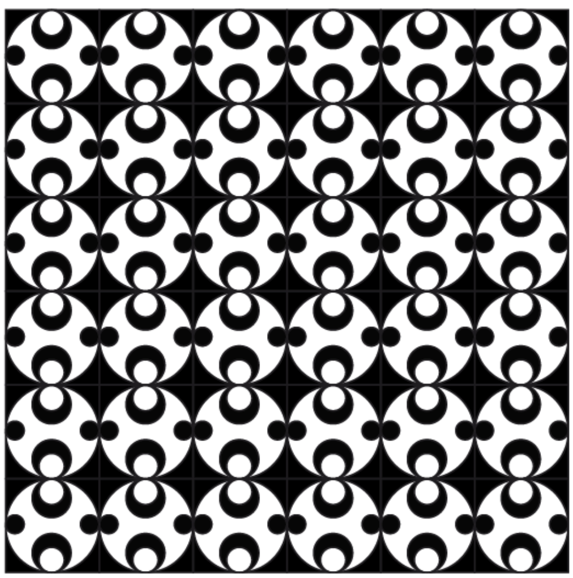
En el caso de grupos infinitos basta con analizar aquellos que su subgrupo de traslaciones sea generado por una o dos traslaciones no paralelas ya que cualquier otra traslación en el plano puede ser generada por estas dos.

A los grupos infinitos se les llama grupos de frisos en el caso en que su subgrupo de traslaciones sea generado por una traslación y grupos de tapices o cristalográficas si su subgrupo de traslaciones está generado por dos traslaciones no paralelas.

Si $\mathcal{W}$ es un grupo de frisos, entonces existe $\tau \in \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{W} \cap \mathcal{T} = \langle \tau \rangle$. Un friso es un cubrimiento de una región del plano limitada por dos rectas paralelas. Los frisos son cubrimientos de regiones de longitud infinita pero de ancho finito.



Si ahora $\mathcal{W}$ es un grupo de tapices, entonces existen τ_1 y $\tau_2 \in \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{W} \cap \mathcal{T} = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$. Un tapiz es un cubrimiento de todo el plano



Capítulo 3

Grupos de Leonardo

3.1. Los grupos de Leonardo

Ahora se analizarán los grupos finitos de isometrías.

Teorema 3.1 (Teorema de Leonardo). *Si $\mathcal{W}$ es un grupo finito de isometrías del plano, entonces $\mathcal{W}$ es isomorfo a un grupo diédrico o un grupo cíclico.*

La demostración de este teorema se hará mostrando que los elementos de estos grupos finitos, además de la identidad, pueden ser solamente rotaciones con centro en un punto fijo y reflexiones en rectas que pasan por este punto.

Sea $\mathcal{W}$ un grupo finito de isometrías.

a) Ninguna traslación diferente de la identidad puede ser miembro de $\mathcal{W}$.

   Supongamos que τ es una traslación, $\tau \neq Id$, si $\tau \in \mathcal{W}$, entonces el grupo $\langle\tau\rangle$ que es un grupo cíclico infinito sería un subgrupo de $\mathcal{W}$ por lo que $\mathcal{W}$ sería infinito. Por tanto $\mathcal{W} \cap \mathcal{T} = Id$.

b) Ninguna reflexión paso puede ser miembro de un grupo finito de isometrías $\mathcal{W}$.

   Supongamos que α es una reflexión paso tal que $\alpha \in \mathcal{W}$, un grupo finito de simetrías, entonces $\alpha^2 \in \mathcal{W}$, pero $\alpha^2 = \tau$ es una translación diferente de la identidad, por lo que $\mathcal{W}$ no puede contener tampoco una reflexión paso.

   Esto es, los elementos de $\mathcal{W}$, diferentes de la identidad sólo pueden ser: rotaciones y reflexiones.

c) Si $\mathcal{W}$ no tiene reflexiones, entonces $\mathcal{W} = C_n$, para alguna n, donde C_n es el grupo cíclico de orden n. En el apéndice se encuentra una descripción del grupo cíclico de orden n así como la del grupo diédrico de orden n, D_n.

Considérese que $\mathcal{W} \neq Id$, esto es, existe $\rho \in \mathcal{W}$ tal que $\rho = \rho_{(O,\theta)}$, con $\theta \neq 360°$.

Ya que $\rho \in \mathcal{W}$, entonces $\langle\rho\rangle \subset \mathcal{W}$, lo que implica que $\langle\rho\rangle$ es un grupo finito, esto es, existe n tal que $\rho^n = Id$, y $\langle\rho\rangle = C_n$; por lo tanto si $\mathcal{W}$ contiene una rotación ρ, entonces $\mathcal{W}$ tiene como subgrupo a C_n, para alguna n.

Si $\alpha \in \mathcal{W}$ tal que $\alpha = \rho_{(O',\phi)}$ con $O' \neq O$, entonces por la proposición 1.10 $\alpha^{-1}\rho^{-i}\alpha\rho^{i}$ es una translación y $\alpha^{-1}\rho^{-i}\alpha\rho^{i} \in \mathcal{W}$ contradiciendo el hecho de que $\mathcal{W}$ es finito. Por lo tanto todas las rotaciones de $\mathcal{W}$ tienen el mismo centro.

Sea $S = \{\alpha \in \mathcal{W} \mid \alpha \text{ es una rotación}\}$, se demostrará que toda $\alpha \in S$ es de la forma α^k, donde α es un elemento de S.

Ya que S es finito, existe $\alpha_{(O,\theta)} \in S$, con $0 \leq \theta < 360°$, tal que θ es mínima. Sea $\alpha_{(O,\phi)} \in S$, con $\phi > 0$. Entonces $\phi - k\theta$, no puede ser un entero positivo menor que θ para ninguna k, por ser θ mínimo, por lo tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\phi - k\theta = 0$. Es decir, $\phi = k\theta$ y $\alpha_{(O,\phi)} = \alpha^k_{(O,\phi)}$.

Esto es, si $\mathcal{W}$ contiene únicamente rotaciones, entonces $\mathcal{W} = C_n$, para alguna n.

d) Supongamos ahora que $\mathcal{W}$ es un grupo finito que contiene al menos una reflexión.

En primer lugar, el subconjunto de $\mathcal{W}$ de las isometrías pares es un subgrupo finito de $\mathcal{W}$, ya que el producto de isometrías pares es una isometría par, la identidad es una isometría par y la inversa de una isometría par es par. Por lo visto en los incisos a y c las únicas isometrías pares son las de C_n; por tanto C_n es un subgrupo propio de $\mathcal{W}$. Esto es, las únicas isometrías pares de $\mathcal{W}$ son las n rotaciones $\rho, \rho^2, \rho^3, ..., \rho^n = Id$, con $\rho = \rho_{(O,\theta)}$, con $\theta \neq 360°$.

Sea $\sigma \in \mathcal{W}$, una reflexión, entonces las isometrías $\sigma\rho, \sigma\rho^2, \sigma\rho^3, ..., \sigma\rho^n$ son n isometrías impares diferentes, esto es n reflexiones diferentes, por lo visto en el inciso b. Supongamos que hubiera m reflexiones diferentes en $\mathcal{W}$, entonces $n \leq m$, por otro lado si multiplicamos las m reflexiones por la derecha por σ, se obtienen isometrías pares, por lo que $m \leq n$; por lo tanto $m = n$ y $\mathcal{W}$ tiene n reflexiones.

Además, el eje de cada una de las reflexiones tiene que pasar por O, si no de otra manera se tendría una reflexión paso en $\mathcal{W}$, lo cual ya se vio que no es posible.

Por lo tanto, en este caso se tienen dos posibilidades $\mathcal{W} = C_n$ o bien si $\mathcal{W} \neq C_n \rightarrow \mathcal{W} = D_n$ y queda demostrado el teorema.

Capítulo 4

Grupos de frisos

4.1. Generalidades y restricciones

Ya se habían definido los grupos de frisos tales que $\mathcal{F} \cap \mathcal{T} = \langle \tau \rangle$ Estos grupos son infinitos por ser $\langle \tau \rangle$ un grupo cíclico infinito y fijan todas las rectas paralelas a τ. En particular se llama centro del friso a la recta por el punto medio de cualquier perpendicular a las paralelas que determinan el friso, y por la definición, ésta queda invariante.

Los patrones de frisos los podemos pensar como la repetición infinita de alguna figura, es decir, el patrón puede ser generado al aplicar la traslación τ a una figura una infinidad de veces.

Se dice que AB es la longitud de la traslación si $\tau = \tau_{AB}$ y se dice que τ_{AB} es más corta o menor que τ_{CD}, si $AB < CD$.

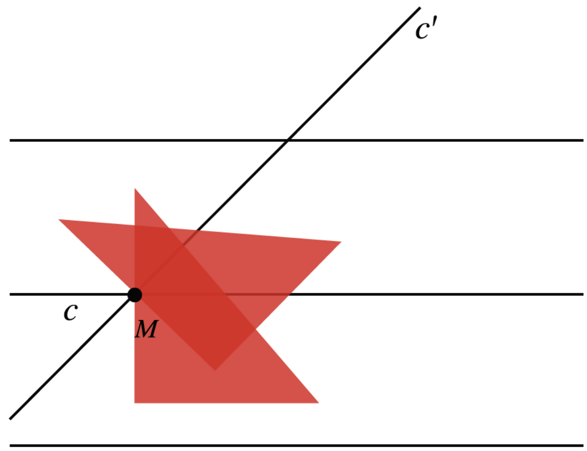
La característica fundamental de un patrón de friso es que queda invariante por alguna traslación "más corta".

Para determinar los diferentes grupos, primero se verá cuáles isometrías no pueden ser elementos de los grupos de frisos; esto es, que no dejan fija a c. De esta forma, considerando las simetrías bajo las cuales la recta c sí queda invariante, veremos que hay solamente siete posibles tipos de patrones de frisos.

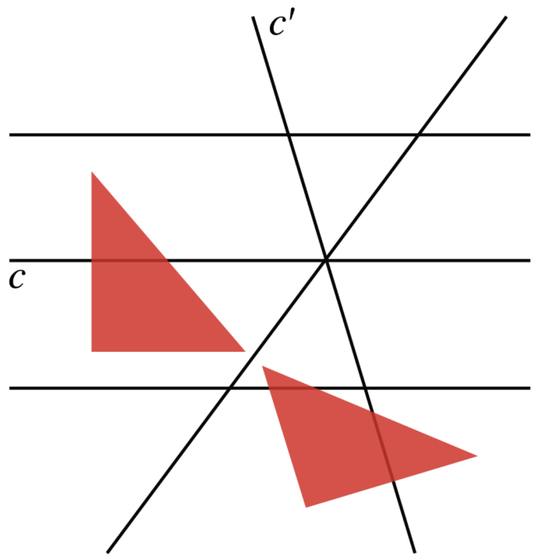
A continuación se ven las restricciones para que una isometría pertenezca a un grupo de frisos.

a) Ninguna traslación puede ser diferente de τ^n, por la definición del grupo de frisos.

b) Las únicas rotaciones que pueden ser elementos de $\mathcal{F}$ son las medias vueltas con centro en algún punto de c, el centro del friso, ya que de otra forma, la recta c no queda fija.



c) Las únicas reflexiones que pueden ser elementos de $\mathcal{F}$ tienen a c, o a rectas perpendiculares a c como ejes, ya que de otra forma, la recta c no queda fija.



d) Las únicas reflexiones paso son las que tienen eje c ya que si γ es una reflexión paso, entonces $\gamma^2 = \tau'$ una traslación en la dirección de su eje.

Resumiendo tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.1. *Las isometrías que dejan invariante al centro del friso son:*

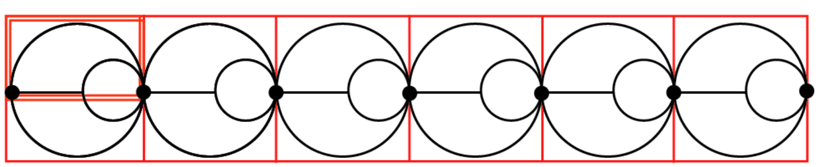
- *Traslación de la forma τ^n en la dirección de c.*
- *Media vuelta con centro en un punto de c.*
- *Refexión sobre c y sobre rectas perpendiculares a c.*
- *Reflexión paso con eje c.*

Para la construcción de los grupos, se usará la proposición 4.1 y se usará la siguiente notación, elegimos un punto A sobre la recta c de la siguiente manera: si $\mathcal{F}$ contiene medias vueltas, entonces llamamos A al centro de una de las medias vueltas; si $\mathcal{F}$ no contiene medias vueltas, pero contiene reflexiones en rectas perpendiculares a c, entonces llamamos A a la intersección de una de estas rectas con c; si $\mathcal{F}$ no contiene medias vueltas, ni reflexiones en rectas perpendiculares a c, llamamos A a cualquier punto sobre c.

Sea $A_i = \tau^i(A)$. Entonces $A_0 = A$. Como $\tau^n(A_i) = \tau^{n+i}(A)$, entonces toda traslación en $\mathcal{F}$ debe mandar a cada A_i en una A_j. Sea M el punto medio de A y A_1 y sea $M_i = \tau^i(M)$. Entonces M_i es el punto medio de A_i y A_{i+1} y también el punto medio de A_0 y A_{2i+1}.

Como ya se ha dicho, toda figura simétrica está compuesta por una región fundamental k que se repite al actuar el grupo de simetrías de $\mathcal{F}$ sobre k para obtener la figura F.

Además, se le llama región de traslación para el grupo $\mathcal{F}$, a los rectángulos determinados por la traslación más corta en $\mathcal{F}$, y retícula de traslación al conjunto de regiones de traslación.



En la imágen se ha señalado con doble línea la región fundamental y con línea simple la región de traslación.

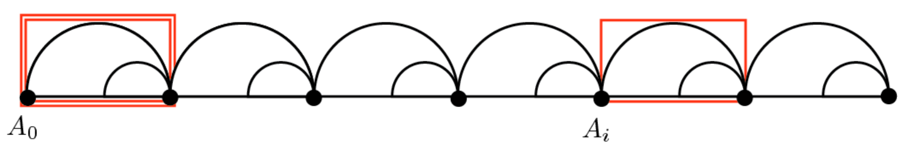
Para nombrar a los grupos se utiliza $\mathcal{F}$ con subíndice 1 cuando el friso no tiene media vuelta y subíndice 2 cuando si tiene media vuelta. Llamaremos $\mathcal{F}$ superíndice 1 cuando el friso tiene reflexión en el centro, $\mathcal{F}$ superíndice 2 cuando tiene solamente reflexión en rectas perpendiculares al centro y finalmente llamaremos $\mathcal{F}$ superíndice 3 cuando el friso tiene reflexión paso.

4.2. Construcción de los grupos de frisos

Para construir los grupos, se considera en primera instancia los que conservan la orientación, esto es, los que están generados por isometrías pares.

1) El primer grupo a considerar es el generado solamente por τ. Definimos $\mathcal{F}_1 = \langle \tau \rangle$.

   $\mathcal{F}_1$ contiene únicamente isometrías pares, ya que la composición de las traslaciones es una traslación y éstas son isometrías pares. Además $\mathcal{F}_1$ es un grupo cíclico infinito.

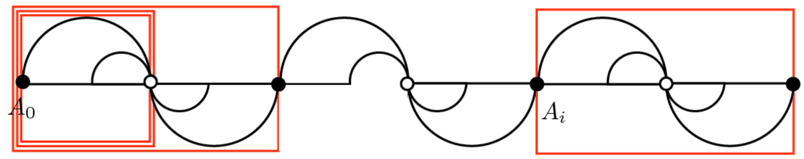
   Este grupo no tiene punto de simetría, no tiene recta de simetría y no está fijo por una reflexión paso. $\mathcal{F}_1$ conserva la orientación.

2) Si el grupo $\mathcal{F}$ tiene únicamente isometrías pares, se considera al siguiente grupo al aumentar $\mathcal{F}_1$ con una media vuelta.

   Consideremos que σ_A está en $\mathcal{F}$, entonces también σ_M está en $\mathcal{F}$ ya que σ_M es el producto $\tau\sigma_A$ por la proposición 1.11. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ contiene las medias vueltas con centro A_i y centro M_i.

   Ahora supongamos que P es el centro de alguna media vuelta en $\mathcal{F}$, entonces la traslación $\sigma_P\sigma_A$ está en $\mathcal{F}$. Por lo tanto $\sigma_P\sigma_A(A) = A_n$ para alguna n. Entonces $\sigma_P(A) = A_n$ y P es el punto medio de A y A_n. $\mathcal{F}$ contiene exactamente aquellas medias vueltas que tienen centro A_i y aquellas con centro M_i.

Sea $\mathcal{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$. Como $\tau\sigma_A = \sigma_M$ por la proposición 1.11 entonces es una involución y $\tau\sigma_A = \sigma_A\tau^{-1}$. Así todo elemento de $\mathcal{F}_2$ es de la forma $\sigma_A^j\tau^i$. También $\mathcal{F}_2 = \langle \sigma_A, \sigma_M \rangle$, ya que $\sigma_M\tau = \sigma_A$.

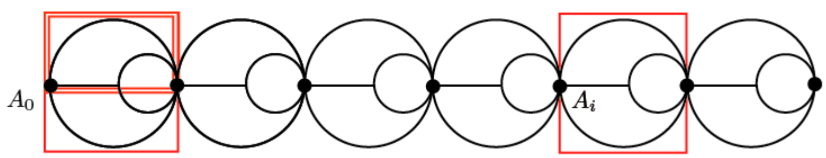


Este grupo tiene punto de simetría y su centro no es una recta de simetría. $\mathcal{F}_2$ conserva la orientación.

Si $\mathcal{F}$ solamente tiene isometrías pares, entonces tiene que ser $\mathcal{F}_1$ o $\mathcal{F}_2$. Las únicas otras posibilidades son aumentar $\mathcal{F}_1$ o $\mathcal{F}_2$ por isometrías impares. Primero se considerará aumentar estos grupos con reflexiones.

3) Ahora vamos a considerar aumentar a $\mathcal{F}_1$ con reflexiones.

Definimos el grupo de frisos $\mathcal{F}_1^1$=$\langle \tau, \sigma_c \rangle$. Como $\tau\sigma_c = \sigma_c\tau$ por la proposición 1.9, $\mathcal{F}_1^1$ es un grupo abeliano y todo elemento en él es de la forma $\sigma_c^j\tau^i$. Si n≠0, $\mathcal{F}_1^1$ contiene a la reflexión paso con eje c que manda a A en A_n.



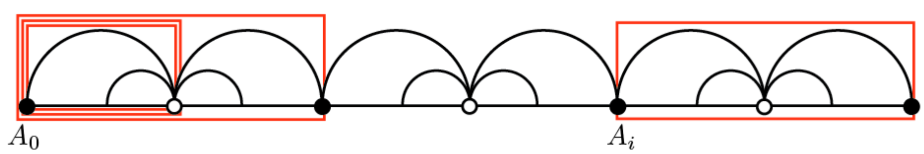
Este grupo no tiene punto de simetría y su centro c es una recta de simetría.

4) Ahora consideremos aumentar a $\mathcal{F}_1$ con una reflexión sobre una recta a perpedicular a c. En este caso suponemos que A está en a. Entonces $\mathcal{F}$ contiene a $\tau^{2i}\sigma_a$, la reflexión en la recta perpendicular a c en A_i, y $\mathcal{F}$ contiene a $\tau^{2i+1}\sigma_a$, que es la reflexión en una recta perpendicular a c en M_i.

Si suponemos que $\mathcal{F}$ contiene otra reflexión σ_l, $l \neq c$ ya que la media vuelta $\sigma_c\sigma_a$ no está en $\mathcal{F}$. Entonces l es perpendicular a c. Luego, $\mathcal{F}$ contiene a la traslación $\sigma_l\sigma_a$, que debe mandar a A en A_n para alguna n, esto es, $\sigma_l\sigma_a =$

τ^n, y por lo tanto $\sigma_l(A) = A_n$, para alguna $n \neq 0$. Esto implica que l es perpendicular a c en algún A_i o en algún M_i. Entonces $\mathcal{F}$ contiene exactamente las reflexiones en rectas perpendiculares a c en A_i y aquellas reflexiones en rectas perpendiculares a c en M_i, para cada i.

Definimos el grupo de frisos $\mathcal{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle$ donde a es perpendicular a c en A. Como $\tau\sigma_a = \sigma_a\tau^{-1}$, entonces todo elemento de $\mathcal{F}_1^2$ es de la forma $\sigma_a^j\tau^i$. $\mathcal{F}_1^2$ no contiene a σ_c, pero contiene a las reflexiones en las rectas perpendiculares a c que pasan por A_i y M_i.

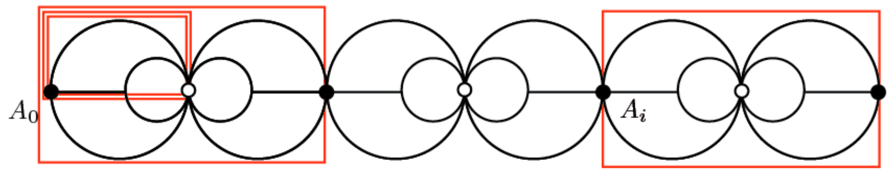


Este grupo no tiene puntos de simetría, tiene rectas de simetría, y su centro no es una recta de simetría.

5) Definimos el grupo de simetrías $\mathcal{F}_2^1$ de la siguiente manera.

Este grupo lo obtenemos al aumentar a $\mathcal{F}_2$ con una reflexión sobre la recta c.

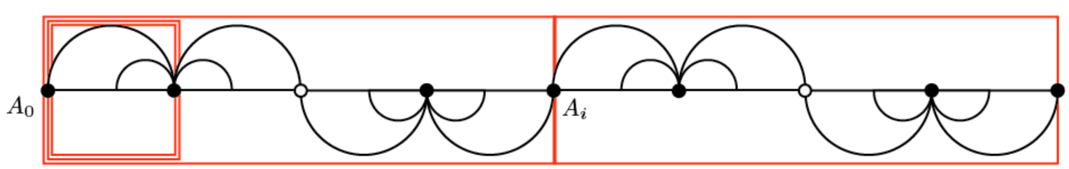
Sea $\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$. Como σ_c conmuta con τ y σ_A por las proposiciones 1.9 y 1.11, entonces todo elemento de $\mathcal{F}_2^1$ es de la forma $\sigma_c^k\sigma_A^j\tau^i$. Si $n \neq 0$, entonces $\mathcal{F}_2^1$ contiene la reflexión paso $\sigma_c\tau^n$ con eje c que manda a A en A_n. También, $\mathcal{F}_2^1$ contiene a $\tau^{2i}\sigma_A\sigma_c$ que es la reflexión en la recta perpendicular a c en A_i y a $\tau^{2i+1}\sigma_A\sigma_c$, la reflexión en la recta perpendicular a c en M_i. Si a es la recta perpendicular a c en A, entonces $\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_a, \sigma_c \rangle$.



Este grupo tiene un punto de simetría y su centro es una recta de simetría.

6) Vamos a aumentar a $\mathcal{F}_2$ con otra reflexión. Supongamos que $\mathcal{F}$ contiene una media vuelta y la reflexión en una recta q. Si $q \neq c$ y q es perpendicular a c en A_i, o q es perpendicular a c en M_i, regresamos a $\mathcal{F}_2^1$. Para obtener algo nuevo, debemos suponer que q no coincide con ningún A_i y ningún M_i. Ya que $\sigma_q(A)$ debe ser el centro de una media vuelta en $\mathcal{F}$ por el lema 2.1 (con $\alpha = \sigma_q$), la única posibilidad es que q sea el bisector perpendicular de $\overline{AM_i}$ para alguna i. Por el mismo lema $\mathcal{F}$ contiene a las reflexiones en la mediatriz de $\overline{AM_i}$ para cada i. En particular $\mathcal{F}$ contiene a σ_p donde p es la mediatriz de $\overline{AM_i}$. Si la recta a es perpendicular a c en A, entonces $\mathcal{F}$ no puede contener a σ_p y a σ_a, ya que la traslación $\sigma_p\sigma_a$ mandaría a A en M, que es imposible. Más aún, como $\sigma_p\sigma_a = \sigma_p\sigma_c\sigma_A$, entonces $\mathcal{F}$ no puede contener a σ_p y a σ_c.

   Definimos el grupo de frisos $\mathcal{F}_2^2 = \left\langle \tau, \sigma_A, \sigma_p \right\rangle$ donde p es la mediatriz de $\overline{AM}$. Notemos que $\mathcal{F}_2^2$ contiene la relexión paso $\sigma_p\sigma_A$ con eje c que manda a A en M. Sea $\gamma = \sigma_p\sigma_A$. Como $\tau = \gamma^2$ y $\sigma_p = \gamma\sigma_A$, entonces $\mathcal{F}_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$, y como ya se había observado $\mathcal{F}_2^2$ no contiene a σ_c.



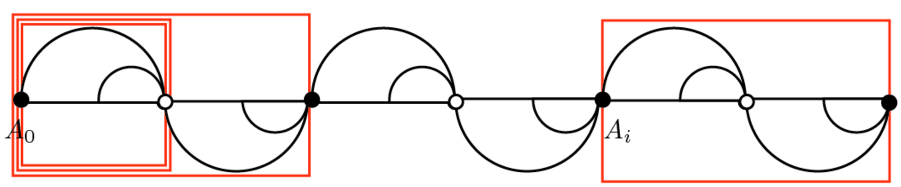
Este grupo tiene punto de simetría, tiene recta de simetría, pero el centro no es recta de simetría.

Se han considerado todos los casos para $\mathcal{F}$ en que no contiene una reflexión paso. Ahora aumentaremos $\mathcal{F}$ con reflexiones paso.

7) La última posibilidad para aumentar a $\mathcal{F}_1$ es considerar las reflexiones paso. Supongamos que $\mathcal{F}$ contiene la reflexión paso α. Por lo tanto, α tiene eje c y α^2 es una traslación que fija a c. Hay dos casos: $\alpha^2 = \tau^{2n}$ y $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$ para algún entero n. Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^2 = \tau^{2n}$. Como α y τ conmutan, $(\alpha\tau^{-n})^2$ es la identidad. Entonces la isometría involutoria impar $\alpha\tau^{-n}$ es σ_c. Es decir, $\alpha = \sigma_c\tau^n$. En este caso $\mathcal{F}$ contiene a σ_c y $\sigma_c\tau^m$ para cada entero m, lo que nos dice que estamos de regreso a $\mathcal{F}_1^1$.

Ahora supongamos que $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$, entonces $(\tau^{-n}\alpha)^2$ es τ. Sea $\gamma = \tau^{-n}\alpha$, γ es una isometría impar cuyo cuadrado es τ. Por lo tanto γ debe ser la única relexión paso con eje c que manda a A en M. Ya que $\gamma^{2m} = \tau^m$ y $\gamma^{2m+1} = \tau^m\gamma$, las reflexiones paso en $\mathcal{F}$ son exactamente aquellas de la forma $\tau^m\gamma$.

Definimos el grupo $\mathcal{F}_1^3 = \langle\gamma\rangle$ donde γ es la reflexión paso con eje c tal que $\gamma^2 = \tau$.



Este grupo no tiene punto de simetría, no tiene recta de simetría, pero está fijo por una reflexión paso.

Para ver con mayor claridad el hecho de que estos son los únicos grupos de frisos véase la siguiente tabla:

<table>
<tr><td colspan="15">$\mathcal{F}_1 = \langle \tau \rangle$</td></tr>
<tr><td>Media vuelta</td><td colspan="7">No</td><td colspan="7">Sí</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="7">$\mathcal{F}_1$</td><td colspan="7">$\mathcal{F}_2$</td></tr>
<tr><td>Reflexión en c</td><td colspan="4">No</td><td colspan="3">Sí</td><td colspan="4">No</td><td colspan="3">Sí</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">$\mathcal{F}_1$</td><td colspan="3">$\mathcal{F}_1^1$</td><td colspan="4">$\mathcal{F}_2$</td><td colspan="3">$\mathcal{F}_2^1$</td></tr>
<tr><td>Reflexión perpendicular a la recta c</td><td colspan="2">No</td><td colspan="2">Sí</td><td colspan="2">No</td><td>Sí</td><td colspan="2">No</td><td colspan="2">Sí</td><td>No</td><td colspan="2">Sí</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$\mathcal{F}_1$</td><td colspan="2">$\mathcal{F}_2^2$</td><td colspan="2">$\mathcal{F}_1^1$</td><td>●</td><td colspan="2">$\mathcal{F}_2$</td><td colspan="2">$\mathcal{F}_2^2$</td><td>○</td><td colspan="2">$\mathcal{F}_2^1$</td></tr>
<tr><td>Reflexión paso</td><td>No</td><td>Sí</td><td>No</td><td>Sí</td><td>No</td><td>Sí</td><td>●</td><td>No</td><td>Sí</td><td>No</td><td>Sí</td><td>○</td><td>No</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>Grupos posibles</td><td>$\mathcal{F}_1$</td><td>$\mathcal{F}_1^3$</td><td>$\mathcal{F}_1^2$</td><td>●●</td><td>●●●</td><td>$\mathcal{F}_1^1$</td><td>●</td><td>$\mathcal{F}_2$</td><td>○○○</td><td>$\mathcal{F}_2^2$</td><td>○○○</td><td>○</td><td>$\mathcal{F}_2^1$</td><td>○○○</td></tr>
</table>

● *Esta opión no es posible ya que entones se tendría una media vuelta en* $\mathcal{F}$

●● *Esta opión no es posible ya que entones se tendría una media vuelta en* $\mathcal{F}$

●●● *El grupo* $\mathcal{F}_1^1$ *contiene a la reflexión paso con eje en c, por lo tanto esta opción no es posible.*

○ *Esta opción no es posible ya que* $\mathcal{F}_2^1$ *contiene reflexiones en perpendiculares a c.*

○○ *El grupo* $\mathcal{F}_2^1$ *contiene reflexiones en perpendiculares a c.*

○○○ *En estos casos, si una reflexión paso se aumentara a alguno de estos grupos, o bien se tendría una traslación más corta a* $\mathcal{T}$ *o se tendría nuevamente el grupo* $\mathcal{F}_2^2$

Capítulo 5

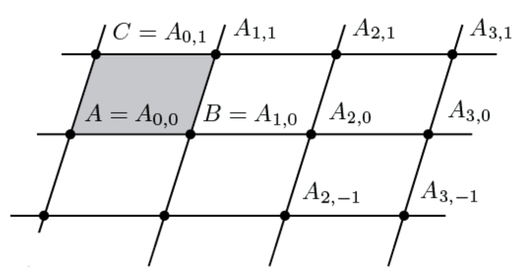
Grupos de tapices

5.1. Generalidades y restricciones

Ahora vamos a considerar a los grupos de isometrías cuyo subgrupo de traslaciones es generado por dos traslaciones no paralelas.

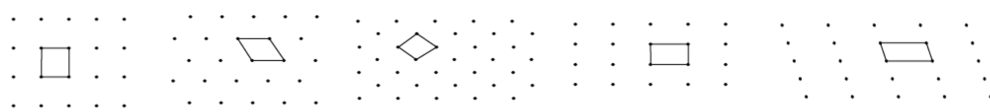
Un grupo de tapiz $\mathcal{W}$ es un grupo de isometrías cuyas traslaciones son exactamente aquellas en $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ donde si $\tau_1 = \tau_{A,B}$ y $\tau_2 = \tau_{A,C}$ entonces A, B, C son puntos no colineales.

La retícula de traslación para $\mathcal{W}$ determinada por el punto P es el conjunto de todas las imágenes de P bajo las traslaciones de $\mathcal{W}$. Como cada traslación en el grupo de tapiz $\mathcal{W}$ es de la forma $\tau_2^j \tau_1^i$, entonces todos los puntos A_{ij} forman un retícula de traslación donde $A_{ij} = \tau_2^j \tau_1^i(A)$.



Una región de traslación para $\mathcal{W}$ con respecto al punto A y las traslaciones generadoras τ_1 y τ_2 es un cuadilátero con vertices $A_{ij}, A_{i+1,j}, A_{i,j+1}$, y $A_{i+1,j+1}$. Una región de traslación es siempre un paralelogramo.

Se pueden clasificar las retículas en 5 tipos diferentes. Si la retícula tiene una región de traslación cuadrada se llama una retícula cuadrada. Si tiene como región de traslación un rombo con un par de ángulos de 60° se le llama hexagonal. Esto es porque en este caso, los puntos en la retícula más cercanos a algún vértice de la región y los otros puntos de la región forman un hexágono. Si la retícula tiene como región de traslación un rombo, entonces se llama rómbica, así que las retículas cuadradas y hexagonales son un tipo especial de retículas rómbicas. De manera análoga se tienen las retículas rectangulares y en general las retículas en forma de paralelogramo.



Retícula cuadrada *Retícula hexagonal* *Retícula rombal* *Retícula rectangular* *Retícula en forma de paralelogramo*

Un punto P es un n-centro para un grupo $\mathcal{W}$ de isometrías si las rotaciones en $\mathcal{W}$ con centro en P forman un grupo cíclico finito C_n con $n > 1$. Si P es un n-centro para un grupo de simetría de una figura, entonces a P se le llama también n-centro de la figura. Un centro de simetría de la figura es un n-centro para cualquier n. Así, si P es un 4-centro para una figura, entonces P es un punto de simetría de la figura ya que $\sigma_P = \rho^2_{(P,90°)}$. En este caso P es un punto de simetría de la figura, pero P no es un 2-centro. En el caso de que Q sea un 3-centro para alguna figura, Q no es un punto de simetría, ya que $\rho^2_{(Q,120°)} \neq \sigma_Q$, $\rho^3_{(Q,120°)} = Id \neq \sigma_Q$.

Al igual que en el caso de los frisos, para determinar los diferentes grupos de tapices, primero se verán algunos resultados generales y las diferentes restricciones para que las isometrías formen parte de ellos.

Primero veremos las isometrías pares.

Lema 5.1. *Si $\tau \in \mathcal{W}$, entonces $\tau^n \in \mathcal{W}$, para toda n, por la definición de $\mathcal{W}$.*

Lema 5.2. *En todo grupo $\mathcal{W}$ existen traslaciones de longitud mínima por el principio del buen orden.*

Lema 5.3. *Si P es un n-centro para $\mathcal{W}$, α una isometría en $\mathcal{W}$ y $\alpha(P) = Q$, entonces Q es un n-centro para $\mathcal{W}$, para la misma n.*

Si $\alpha(P) = Q$, de las ecuaciones $\alpha\rho_{(P,\theta)}\alpha^{-1} = \rho_{(Q,\pm\theta)}$ y $\alpha^{-1}\rho_{(Q,\theta)}\alpha = \rho_{(P,\pm\phi)}$ se tiene que Q es un n-centro si y sólo sí P es un n-centro, para la misma n.

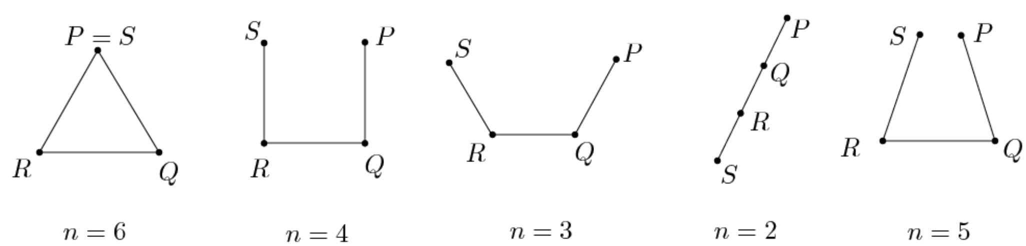
Lema 5.4. *Si $\rho = \rho_{(P,360°/n)}$ y $\rho' = \rho_{(A,360°/n)}$ con $P \neq A$ y $n > 1$ están en un grupo de tapiz $\mathcal{W}$, y τ_1, τ_2 son las traslaciones generadoras de $\mathcal{W}$, entonces $2AP$ es mayor o igual que la longitud de la traslación mínima de $\mathcal{W}$.*

La composición $\rho_{(P,360°/n)}\rho_{(A,-360°/n)}$ está en $\mathcal{W}$ y ya que es una traslación, entonces es de la forma $\rho_{(P,360°/n)}\rho_{(A,-360°/n)} = \tau_1^i\ \tau_2^j$ para algunas i, j; por lo tanto, $\rho_{(P,360°/n)}(A) = \tau_1^i\tau_2^j\ \rho_{(A,360°/n)}(A) = A_{ij}$.

Esto es, si $n = 2$ entonces A, P, A_{ij} son colineales y P es el punto medio de AA_{ij} y $2AP = AA_{ij}$ y si $n > 2$ entonces el triángulo APA_{ij} es isósceles y por la desigualdad del triángulo $2AP = AP + PA_{ij} > AA_{ij}$.

Lema 5.5. *Si P es un n-centro para $\mathcal{W}$, entonces n = 1, 2, 3, 4, 6. A este resultado se le llama la restricción cristalográfica.*

Supóngase que P es un n-centro para el grupo $\mathcal{W}$. Sea $Q \neq P$ un n-centro para la misma n y a la menor distancia posible de P. La existencia de Q está asegurada por los lemas 5.3 y 5.4. Sea $R = \rho_{(Q,360°/n)}(P)$.



Entonces R es un n-centro y $PQ = QR$. Sea $S = \rho_{(R,360°/n)}(P)(Q)$. Entonces S es un n-centro y $RQ = RS$. Si $P = S$, entonces el triángulo es equilátero y $n = 6$. Si $P \neq S$, entonces por ser la distancia PQ la mínima entre dos n-centros y $PQ = QR$, se tiene que $SP \geq RQ$. En el caso de que $SP = RQ$, se tiene que el cuadrilátero $SPRQ$ es un cuadrado y $n = 4$. En el caso de que $SP > RQ$, si los puntos no son colineales se tiene un trapecio isósceles con la base menor igual a los lados, por lo tanto, son lados de un hexágono regular y $n = 3$; si los puntos son colineales entonces $n = 2$. Queda claro que se han agotado las posibilidades, por lo tanto estas son las únicas opciones para un n-centro, pero veamos que si $n = 5$ se tiene $SP < PQ$, que no es opción válida.

Lema 5.6. *Si en un grupo $\mathcal{W}$, hay un 4-centro, entonces el grupo no tiene ni 3-centros, ni 6-centros.*

Si en $\mathcal{W}$ hay un 4-centro, entonces existe una rotación $\rho = rho_{(P,90°)}$ en algún punto P, si hubiera un 6- centro, entonces existiría una rotación $\rho' = \rho_{(Q,60°)}$ en algún punto Q. La composición de las rotaciones es una rotación de ángulo 30°, que estaría en $\mathcal{W}$ lo que no es posible por la restricción cristalográfica. Análogamente para el caso de un 3-centro.

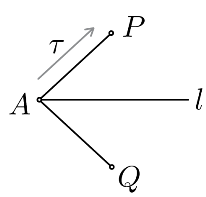
Ahora veremos el caso de las isometrías impares.

Lema 5.7. *Si σ_l está en el grupo $\mathcal{W}$ de tapices, entonces l es paralela a la diagonal de una región de trasalación rómbica de $\mathcal{W}$ o bien es paralela a un lado de una región de traslación rectangular de $\mathcal{W}$.*

Sea A un punto en l y sea $\tau_{A,P}$ una traslación más corta distinta de la identidad en $\mathcal{W}$.

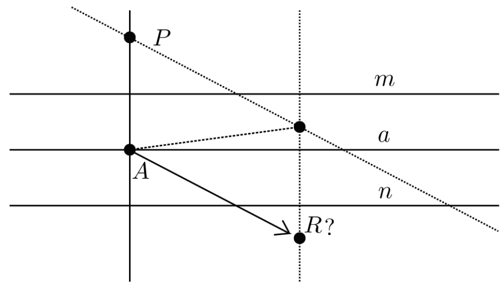
a) Si $AP \neq l$, AP no es perpendicular a l.

Sea $Q = \sigma_l(P)$, entonces $\tau_{A,Q} \in \mathcal{W}$, ya que $\tau_{A,Q} = \tau_{\sigma(A)}$, $\sigma(P) = \sigma_l \tau_{A,P} \sigma_l^{-1}$. Como $AP = AQ$ y A, P, Q no son colineales, entonces $\left\langle \tau_{A,P}, \tau_{A,Q} \right\rangle$ es el grupo de las traslaciones en $\mathcal{W}$ y l contiene a la diagonal de una región de traslación.



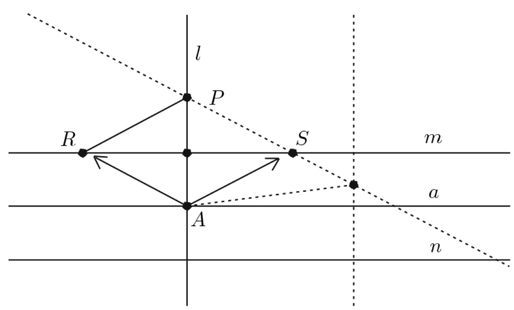
b) Si $AP = l$ o AP es perpendicular a l.

Sea a la perpendicular a AP en A, sea m la mediatriz de AP. Sea $n = \sigma_a(m)$. Sea $\tau_{A,R}$ la traslación más corta que no está en $\langle \tau_{A,P} \rangle$. Si R está fuera de la franja acotada por m y n, entonces $\tau_{A,P}^{\pm 1} \tau_{A,R}$ es más corta que $\tau_{A,R}$.



Considerando $\tau_{A,R}$ y su inversa, se puede afirmar, sin pérdida de generalidad, que R es tal que está en m, en a o entre ellas.

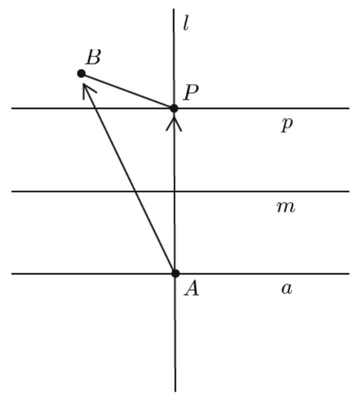
Sea $S = \sigma_l(R)$, supongamos que R está entre a y m. Si $l = \overleftrightarrow{AP}$, entonces $\tau_{A,S}\tau_{A,R}$ es una traslación más corta que $\tau_{A,P}$. Si l es perpendicular a $\overleftrightarrow{AP}$, entonces $\tau_{S,A}\tau_{A,R}$ es una traslación más corta que $\tau_{A,P}$. Por lo tanto R está en m o en a



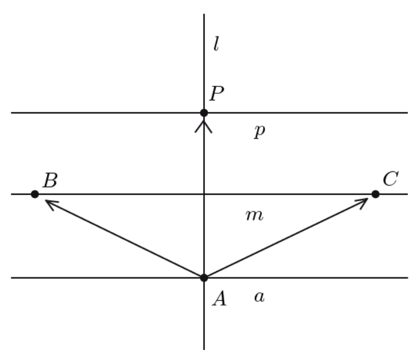
Si R está en m, entonces $\langle \tau_{A,R}, \tau_{A,S} \rangle = \langle \tau_{A,P}, \tau_{A,R} \rangle$ ya que $\tau_{A,S}\tau_{A,R} = \tau_{A,P}$ y l es paralela a la diagonal de una región de traslación rómbica (cuadrilátero ARPS). Análogamente si R está en a, l es paralela a un lado de una región de traslación rectangular para $\mathcal{W}$.

Lema 5.8. *Si un grupo $\mathcal{W}$ de tapices tiene una reflexión paso, entonces $\mathcal{W}$ tiene una región de traslación que es rómbica o rectangular.*

Sea $\mathcal{W}$ tal que contiene una reflexión paso que fija la recta l pero que no contiene reflexiones. El grupo más pequeño que contiene la traslación y la reflexión paso que fijan l es $\mathcal{F}_1^3$, ya que de los grupos de frisos sólo $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ y $\mathcal{F}_1^3$ no contienen reflexiones y $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ no tienen isometrías impares. $\mathcal{F}_1^3$ está generado por una reflexión paso γ con eje l. Por tanto γ^2 es la traslación más corta que fija l. Sea A un punto en l. Sea a la perpendicular a l en A, $m = \gamma(a)$, $p = \gamma^2(a)$ y $P = \gamma^2(A)$, por tanto $\tau_{A,P}$ es la traslación más corta en $\langle\gamma\rangle$. Sea $\tau_{A,B}$ la traslación más corta en $\mathcal{W}$ que no está en $\left\langle\gamma^2\right\rangle$. Ya que $\tau_{A,P}^{\pm 1}\tau_{A,B}$ no puede ser más corta que $\tau_{A,B}$ se puede suponer sin pérdida de generalidad que B está en a o B está entre a y p.



Si B está en a, $\mathcal{W}$ tiene una región de traslación rectangular y l es paralela a un lado de la región de traslación rectangular. Si B está entre a y p, sea $C = \sigma_l(B)$, por tanto $\tau_{A,C} = \gamma\tau_{A,B}\gamma^{-1}$ y $\tau_{A,C}$ está en $\mathcal{W}$. Entonces $\tau_{A,C}\tau_{A,B} = \gamma^2$ y B está en m. El paralelogramo $ABPC$ es un rombo y l contiene a una de sus diagonales, como se quería demostrar.



Lema 5.9. *Si una reflexión paso en un grupo de tapices $\mathcal{W}$ fija la retícula de traslación de $\mathcal{W}$, entonces $\mathcal{W}$ contiene una reflexión.*

Si una reflexión paso γ lleva el punto A al punto P en la retícula de traslación determinada por A para el grupo de tapices $\mathcal{W}$, entonces γ seguida de la traslación

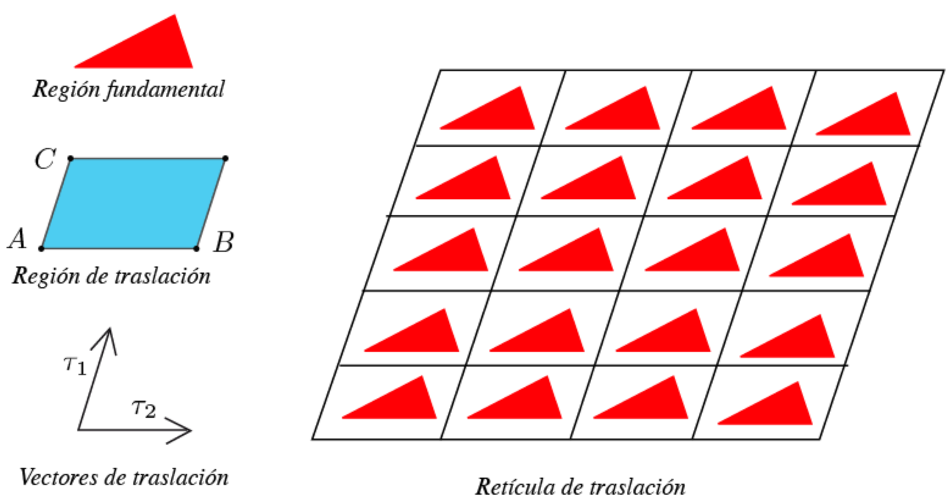
$\tau_{P,A}$ es una isometría impar que fija al punto A, por tanto es una reflexión.

5.2. Construcción de los grupos

Para la construcción de los grupos de tapices iniciaremos por los que no tienen isometrías inversas, esto es, solamente tienen traslaciones y rotaciones.

1) $\mathcal{W}$ está generado sólo por el par de traslaciones $\tau_{A,B}$ y $\tau_{A,C}$ con A arbitrario y tal que A, B y C son no colineales.

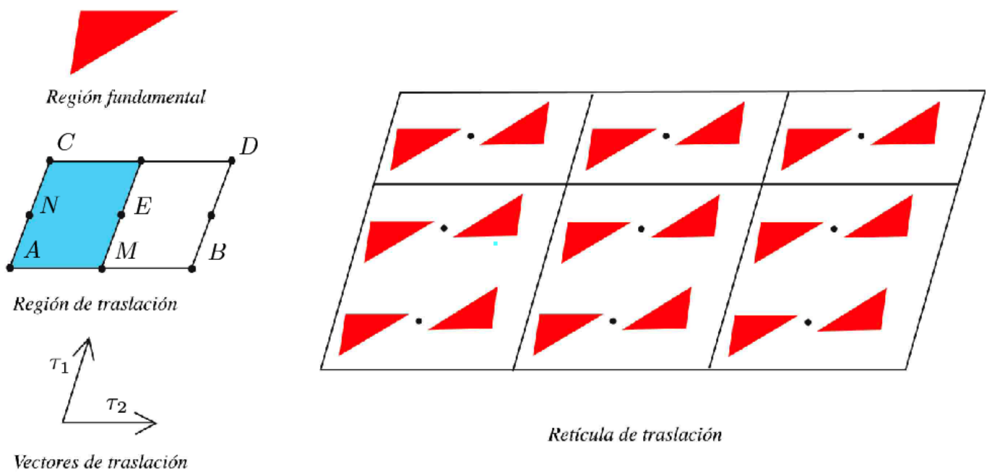
   En este caso $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1$ donde $\mathcal{W}_1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,B}\tau_{A,C} \rangle$ Este grupo no tiene centro de simetría y no está fijo por una isometría impar. La región fundamental y la región de traslación coinciden y son un paralelogramo.



2) Si $\mathcal{W}$, además de $\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle$ tiene un 2-centro en A y todo centro de simetría en $\mathcal{W}$ es un 2-centro, entonces todo punto A_{ij} en la retícula de traslación determinada por A es un 2-centro al igual que los puntos medios de cualesquiera dos puntos en la retícula.

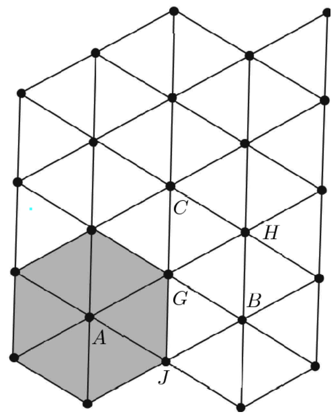
   Si A es un 2-centro, $\sigma_A \in \mathcal{W}$. Sean $\sigma_M = \tau_{A,B}\sigma_A$, $\sigma_N = \tau_{A,C}\sigma_A$ y $\sigma_E = \sigma_N\sigma_A\sigma_M$. Los puntos M, N, E son 2-centros y el cuadrilátero $ABCD$ es la región de traslación.

Todo punto A_{ij} en la retícula de traslación determinada por A es un 2-centro así como los puntos medios de cualesquiera dos puntos en la retícula. Estos son los únicos centros de simetría. $\mathcal{W} = \mathcal{W}_2$ donde $\mathcal{W}_2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A \rangle = \langle \sigma_M \sigma_E \sigma_N \rangle$. A $\mathcal{W}_2$ se le llama también $p2$ en la notación cristalográfica. La región de traslación es un paralelogramo $ABCD$ en la figura anterior, y la región fundamental es el paralelogramo sombreado en la misma figura.

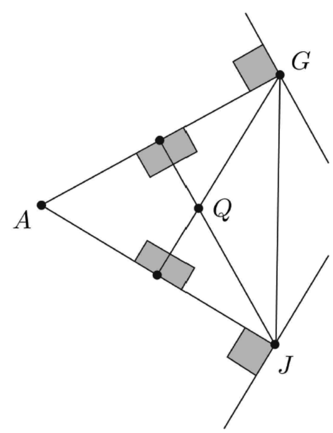


3) Si $\mathcal{W}$ tiene un 3-centro en A y no tiene 6-centros, entonces todo centro de simetría de W es un 3-centro y A es el centro de un hexágono cuyos vértices son 3-centros. Todos los centros de simetría de $\mathcal{W}$ están determinados por A y su 3-centro más cercano.

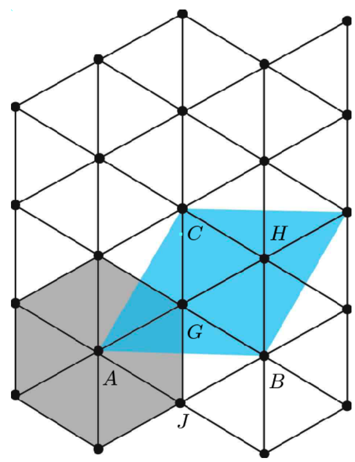
Por el lema 5.6 de este capítulo, $\mathcal{W}$ no puede tener 4-centros. Tampoco puede tener 2-centros, ya que si hubiera alguno en un punto P, entonces la composición $\rho_{(A,-120°)}\rho_{(P,180°)}$ estaría en $\mathcal{W}$, y $\mathcal{W}$ tendría un 6-centro. Sea G el 3-centro más cercano a A y sea J tal que $\rho_{(G,120°)}\rho_{(A,120°)} = \rho_{(J,240°)}$. Entonces J es un 3-centro y el triángulo AGJ es equilátero.



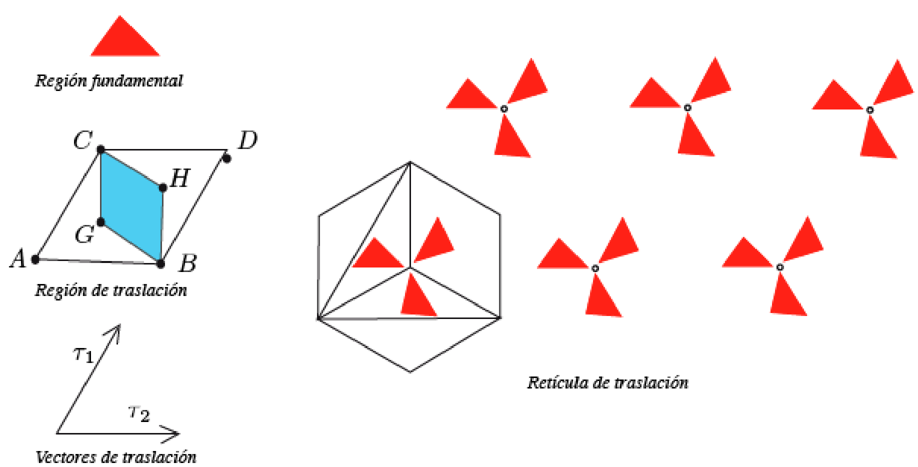
Las imágenes de G y J bajo las potencias de $\rho_{(A,120^\circ)}$ son los vértices de un hexágono. Haciendo uso repetidamente de este argumento se tiene que los 3-centros están configurados como se muestra en la figura anterior. Más aún, $\rho_{(G,120^\circ)}\tau_{A,G}$ y $\rho_{(J,120^\circ)}\tau_{A,J}$ son iguales a $\rho_{(Q,120^\circ)}$, donde Q es el centroide del triángulo AGJ. Por lo tanto $\tau_{A,G}$ y $\tau_{A,J}$ no están en $\mathcal{W}$, o Q sería un 3-centro más cercano a A que G, contrario a la hipótesis.



Por lo tanto, si $\tau_{A,B}$ es la traslación más corta de $\mathcal{W}$, B no es vértice del hexágono de los 3-centros más cercanos a A. Se definen B y C por $\tau_{A,B} = \rho_{(G,-120^\circ)}\rho_{(A,-120^\circ)}$ y $\tau_{A,C} = \rho_{(G,-120^\circ)}\rho_{(A,120^\circ)}$, entonces $\tau_{A,B}$ y $\tau_{A,C}$ son las traslaciones más cortas de $\mathcal{W}$ que llevan A a los 3-centros más cercanos. Por lo tanto $\tau_{A,B}$ y $\tau_{A,C}$ generan al subgrupo de traslaciones de $\mathcal{W}$.



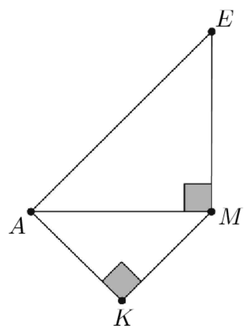
$\mathcal{W} = \mathcal{W}_3$ donde $W_3 = \left\langle \tau_{A,B}\tau_{A,C}\rho_{(A,120°)} \right\rangle = \left\langle \rho_{(A,120°)}\rho_{(G,120°)} \right\rangle$. A $\mathcal{W}_3$ se le llama $p3$ en la notación cristalográfica. La región de traslación es hexagonal, esto es un rombo con dos ángulos opuestos de 60°, $ABCD$ en la figura siguiente y la región fundamental es el rombo $CGHB$, sombreado en la misma figura, con A, B, C y D centros de hexágonos y GH lado común de dos de ellos.



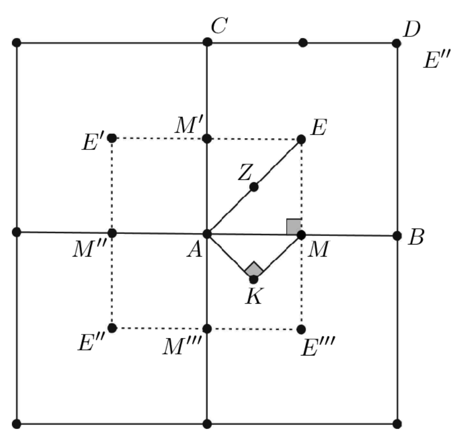
4) Si $\mathcal{W}$ tiene un 4-centro en A, entonces no hay 3-centros, ni 6-centros en $\mathcal{W}$. Más aún, el centro de simetría más cercano a A es un 2-centro M, y A es el centro de un cuadrado cuyos vértices son 4-centros y cuyos lados están

bisecados por 2-centros. Todos los centros de simetría están determinados por A y M.

Por el lema 5.6, si A es un 4-centro de $\mathcal{W}$, cualquier otro centro de simetría es un 2-centro o un 4-centro. Sea M el centro de simetría más cercano a A. Si M es un 4-centro y se define K por $\sigma_K = \rho_{(M,90°)}\rho_{(A,90°)}$, K es un 4-centro más cercano, contrario a la hipótesis, por lo tanto M es un 2-centro. Sea E tal que $\rho_{(M,180°)}\rho_{(A,-90°)} = \rho_{(E,90°)}$. E es un 4-centro.



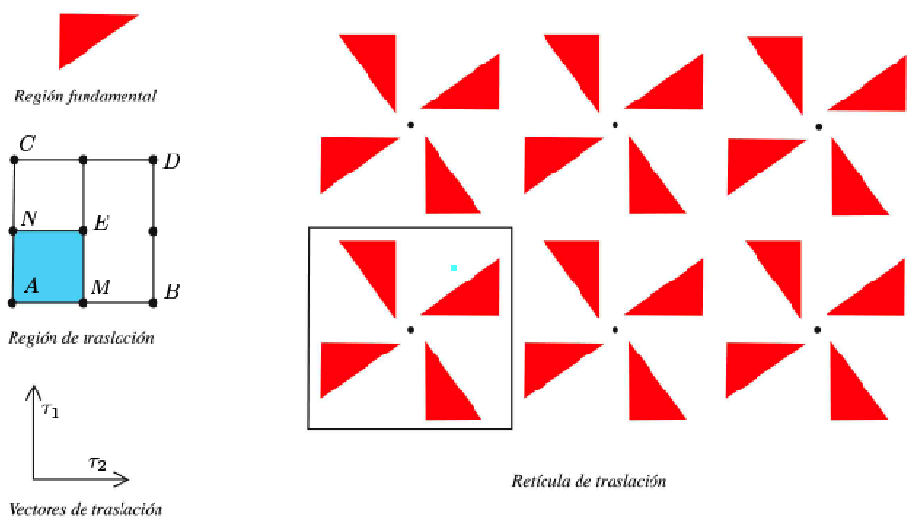
Las imágenes de E y las de M, bajo las potencias de la rotación $\rho_{(A,90°)}$, son respectivamente los vértices y los puntos medios de un cuadrado con centro en A, donde las imágenes de M son 2-centros y las de E son 4-centros, tal y como se quería demostrar.



Sea Z, tal que $\tau_{A,E}\sigma_A = \sigma_Z$. La traslación $\tau_{A,E}$ no está en $\mathcal{W}$, ya que en ese caso Z sería un centro de simetría más cercano a A que M. Con N =

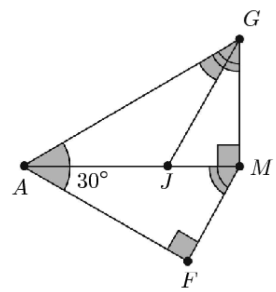
$M' = \rho_{(A.90°)}(M)$, $\tau_{A,B} = \sigma_M\sigma_A$, y $\tau_{A,C} = \sigma_N\sigma_A$, el cuadrilátero $NAME$ es un cuadrado y $\tau_{A,B}$ y $\tau_{A,C}$ son las traslaciones más cortas que generan su subgrupo de traslaciones. Por tanto ya se han determinado todos los centros de simetría.

Sea $\mathcal{W} = \mathcal{W}_4$, donde $\mathcal{W}_4 = \left\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{(A,90°)} \right\rangle = \left\langle \rho_{(A,90°)}, \rho_{(E,90°)} \right\rangle$, con E el centro del cuadrado $ABCD$. A $\mathcal{W}_4$ se le llama $p4$ en la notación cristalográfica. La región de traslación es un cuadrado $ABCD$ que se muestra sombreado en la figura, y la región fundamental es el cuadrado sombreado, $AMEN$ en la misma figura.

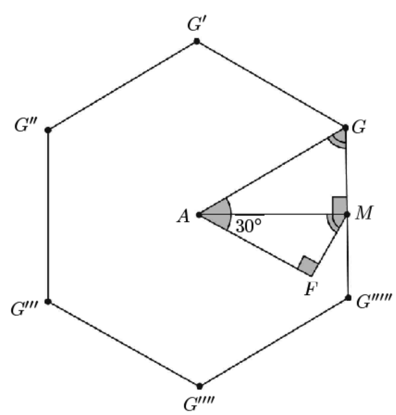


5) Si $\mathcal{W}$ tiene un 6-centro en A, entonces no hay 4-centros en $\mathcal{W}$. Más aún, el centro de simetría más cercano a A es un 2-centro M, y A es el centro de un hexágono regular cuyos vértices son 3-centros y cuyos lados están bisecados por 2-centros. Todos los centros de simetría están determinados por A y M.

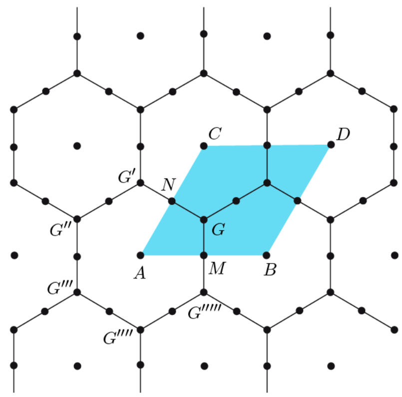
Por el 5.6, si A es un 6-centro de $\mathcal{W}$, cualquier otro centro de simetría es un 2- centro, un 3-centro o un 6-centro. Sea M el centro de simetría más cercano a A. Si M es un 3-centro o un 6-centro, se define F tal que $\rho_{(M,120°)}\rho_{(A,60°)} = \rho_{(F,180°)}$, y F es un n-centro más cercano a A que M. Por tanto, M es un 2-centro.



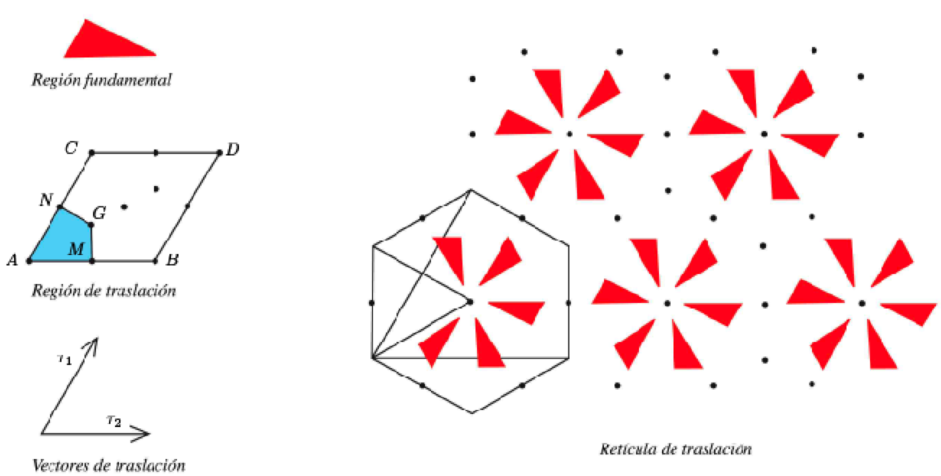
Se define G por la ecuación $\rho_{(M,180^\circ)}\rho_{(A,-60^\circ)} = \rho_{(G,120^\circ)}$, por tanto G es un 3-centro o un 6-centro. Si G es un 6-centro, se define J por la ecuación $\rho_{(G,60^\circ)}\rho_{(A,60^\circ)} = \rho_{(J,120^\circ)}$ y J es un 3-centro más cercano a A que M. Por tanto G es un 3-centro. Las imágenes de G bajo las potencias de $\rho_{(A,60^\circ)}$ son 3-centros y son los vértices de un hexágono regular con centro en A.



Sean $B = \sigma_M(A)$ y $C = \rho_{(A,60^\circ)}(B)$, entonces B y C son 6-centros de $\mathcal{W}$. Los centros de simetría determinados por el 6-centro A y el 2-centro M tienen la configuración mostrada en la siguiente figura. Con $N = \rho_{(A,60^\circ)}(M)$, N es un 2-centro de $\mathcal{W}$. De esta forma, los vértices de los hexágonos son 3-centros, los puntos medios de los lados son 2-centros y los centros de los hexágonos son 6-centros, con lo queda demostrado el teorema.



Ya que un 6-centro debe ir a un 6-centro bajo cualquier elemento de $\mathcal{W}$, $\sigma_M\sigma_A$ y $\sigma_N\sigma_A$ son las traslaciones más cortas de $\mathcal{W}$. Por tanto $\tau_{A,B}$ y $\tau_{A,C}$ generan el subgrupo de traslaciones de $\mathcal{W}$. Sea $\mathcal{W} = \mathcal{W}_6$, donde $\mathcal{W}_6 = \left\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{(A,60^\circ)} \right\rangle = \left\langle \rho_{(A,60^\circ)}, \sigma_M \right\rangle$, donde el triángulo ABC es equilátero y M el punto medio de AB. A $\mathcal{W}_6$ se le llama $p6$ en la notación cristalográfica. La región de traslación hexagonal, esto es un rombo con dos ángulos opuestos de 60°, $ABCD$ en la siguiente figura y la región fundamental es el cuadrilátero sombreado, $NAMG$ en la misma figura.

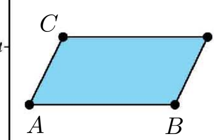
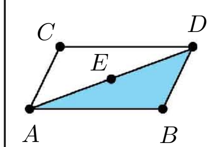
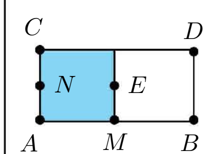
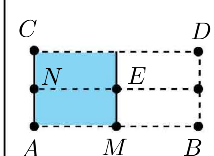


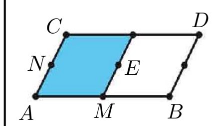
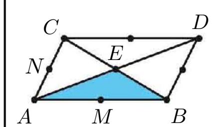
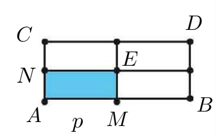
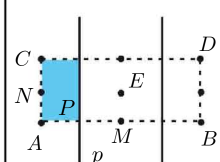
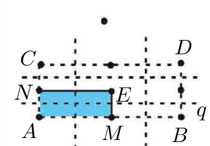
Estos son los únicos grupos de tapices que no contienen isometrías impares, como se puede ver en la siguiente tabla, donde la diagonal de la tabla corresponde a los grupos que sólo tienen un tipo de n-centros.

No tiene isometrías impares ¿Tiene n-centros?									
No	*Sí*								
$\mathcal{W}_1$	*Otros n-centros*	*2-centros*		*3-centros*		*4-centros*		*6-centros*	
	2-centros	$\mathcal{W}_2$	*1*	$\mathcal{W}_6$	*2*	$\mathcal{W}_4$	*3*	$\mathcal{W}_6$	*6*
	3-centros	$\mathcal{W}_6$	*2*	$\mathcal{W}_3$	*4*		*5*	$\mathcal{W}_6$	*6*
	4-centros	$\mathcal{W}_4$	*3*		*5*		*3*		*5*
	6-centros	$\mathcal{W}_6$	*2*	$\mathcal{W}_6$	*6*		*5*		*6*

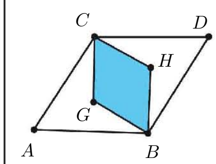
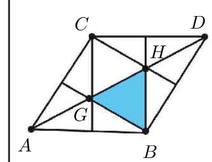
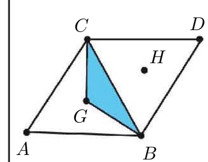
1: Inciso 2. 2: Si $\mathcal{W}$ tiene 2-centros y 3-centros, tiene 6-centros ya que $\rho_{(0,180^\circ)}\rho_{(P,120^\circ)} = \rho_{(0',60^\circ)}$ y por el inciso 5 es $\mathcal{W}_6$. 3: Inciso 4. 4: Inciso 3. 5: Lema 5.6. 6: Inciso 5.

Los demás grupos se construyen ampliando con reflexiones y reflexiones paso estos cinco grupos, de manera análoga como se hizo en los frisos. Se obtienen los siguientes grupos:

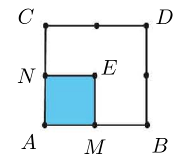
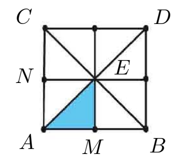
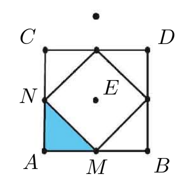
Grupo $\mathcal{W}_1$	*Generadores*	*Región de traslación*	*Descripción*	*Región fundamental sombreada*
$\mathcal{W}_1$ P_1	$\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle$ $=$ $\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle$	*paralelogramo*	*Las únicas isometrías son las traslaciones, no tiene centro ni recta de simetría.*	
$\mathcal{W}_1^1$ cm	$\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{AD} \rangle$ $=$ $\langle \tau_{A,B}, \sigma_{AD} \rangle$	*rombo*	*Además de las traslaciones no paralelas, que tienen todos los grupos, tiene reflexión con eje sobre la diagonal de la región de traslación. Tiene reflexiones paso cuyos ejes son distintos a los de reflexión. No tiene centro de simetría. No todos los ejes de reflexión son rectas de simetría.*	
$\mathcal{W}_1^2$ pm	$\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{AC} \rangle$ $=$ $\langle \tau_{A,C}, \sigma_{AC}, \sigma_{ME} \rangle$	*rectángulo*	*Tiene reflexión con eje paralelo a uno de los lados de la región de traslación.* *Los ejes de las reflexiones paso coinciden con los de reflexión.* *No tiene centro de simetría.*	
$\mathcal{W}_1^3$ pg	$\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \gamma \rangle$ $=$ $\langle \gamma, \epsilon \rangle$	*rectángulo*	*No tiene reflexiones, pero sí reflexiones paso. No tiene centro de simetría, ni recta de simetría.*	
CABD Es la región de traslación *M: punto medio de AB* *N: punto medio de AC* *E: punto medio de las diagonales de la región de traslación*				

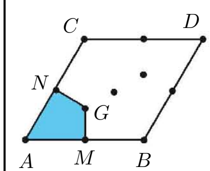
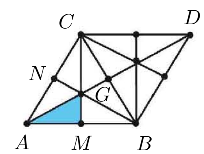
Grupo $\mathcal{W}_2$	*Generadores*	*Región de traslación*	*Descripción*	*Región fundamental sombreada*
$\mathcal{W}_2$ $p2$	$\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A \rangle$ $=$ $\langle \sigma_M, \sigma_E, \sigma_N \rangle$	*paralelogramo*	*Las rotaciones son de amplitud 180º. No hay reflexiones ni reflexiones paso. Todo centro de simetría es un 2-centro.*	
$\mathcal{W}_2^1$ cmm	$\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{AE}, \sigma_{BE} \rangle$ $=$ $\langle \sigma_{AE}, \sigma_{BE}, \sigma_M \rangle$	*rumbo*	*Las rotaciones son de amplitud 180º. Los ejes de reflexión están sobre las diagonales de la región de traslación. Todo centro de simetría es un 2-centro. No todos los centros de simetría están sobre rectas de simetría y no todos los ejes de simetría pasan por centros de simetría. no tiene reflexión paso.*	
$\mathcal{W}_2^2$ pmm	$\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{AM}, \sigma_{AN} \rangle$ $=$ $\langle \sigma_{AM}, \sigma_{ME}, \sigma_{AN}, \sigma_{NE} \rangle$	*rectángulo*	*Las rotaciones son de amplitud 180º. Los ejes de reflexión son paralelos a los lados de la región de traslación. Todo centro de simetría es un 2-centro. Todo centro de simetría está sobre una recta de simetría. No tiene reflexión paso.*	
$\mathcal{W}_2^3$ pmg	$\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A, \sigma_P \rangle$ $\langle \sigma_A, \sigma_N, \sigma_P \rangle$	*rectángulo*	*Las rotaciones son de amplitud 180º. No tiene reflexión. Los ejes de las reflexiones paso son paralelos a un lado de la región de traslación. Todo centro de simetría es un 2-centro. Tiene rectas de simetría. Todas las rectas de simetría son paralelas.*	
$\mathcal{W}_2^4$ pgg	$\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A, \gamma \rangle$ $= \quad \langle \gamma, \epsilon \rangle$ *donde* γ *y* ϵ *son reflexiones paso con ejes p y q*	*rectángulo*	*Las rotaciones son de amplitud 180º. No tiene reflexión. Los ejes de las reflexiones paso son perpendiculares y paralelos a los lados de la región de traslación. Todo centro de simetría es un 2-centro. No tiene rectas de simetría.*	

CABD es la región de traslación
M: punto medio de AB
N: punto medio de AC
E: punto medio de las diagonales de la región de traslación
P: punto medio de AM
p: mediatriz de AM
q: mediatris de AN

Grupo	*Generadores*	*Región de traslación*	*Descripción*	*Región fundamental sombreada*
$\mathcal{W}_3$ $p3$	$\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{(A,120^\circ)} \rangle$ $=$ $\langle \rho_{(A,120^\circ)}, \rho_{(G,120^\circ)} \rangle$	*hexágonal*	*Las rotaciones son de amplitud 120º. Sólo tiene 3-centros. No hay reflexiones ni reflexiones paso. Todo centro de simetría es un 3-centro. Todo centro de simetría es centro de un hexágono cuyos vértices son 3-centros. No tiene rectas de simetría.*	
$\mathcal{W}_3^1$ $p3m1$	$\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{(A,120^\circ)}, \sigma_{AG} \rangle$ $=$ $\langle \rho_{(A,120^\circ)}, \rho_{(G,120^\circ)}, \sigma_{AG} \rangle$	*hexágonal*	*Las rotaciones son de amplitud 120º. Sólo tiene 3-centros. El eje de reflexión está sobre una diagonal de la región de traslación. Todo 3-centro está sobre una recta de simetría. No tiene reflexión.*	
$\mathcal{W}_3^2$ $p31m$	$\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{(A,120^\circ)}, \sigma_{BC} \rangle$ $=$ $\langle \rho_{(A,120^\circ)}, \rho_{(G,120^\circ)}, \sigma_{BC} \rangle$	*hexágonal*	*Las rotaciones son de amplitud 120º. Sólo tiene 3-centros. El eje de reflexión está sobre otra diagonal de la región de traslación. Todo 3-centro no está sobre una recta de simetría. No tiene reflexión paso.*	

CABD es la región de traslación
A: 3-centro cualquiera
G: 3-centro más cercano a A.
H: 3-centro tal que los triángulos CGH y BGH son equiláteros

Grupo $\mathcal{W}_4$	*Generadores*	*Región de traslación*	*Descripción*	*Región fundamental sombreada*
$\mathcal{W}_4$ $p4$	$\left\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{(A,90^\circ)} \right\rangle$ $=$ $\left\langle \rho_{(A,90^\circ)}, \rho_{(E,90^\circ)} \right\rangle$	*cuadrada*	*Las rotaciones de menor amplitud son de 60º. También tiene rotaciones de 120º y 180º. No hay reflexiones ni reflexiones paso. No tiene rectas de simetría.*	
$\mathcal{W}_4^1$ $p4m$	$\left\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{(A,90^\circ)}, \sigma_{AE} \right\rangle$ $=$ $\left\langle \rho_{(A,90^\circ)}, \rho_{(E,90^\circ)}, \sigma_{AE} \right\rangle$	*cuadrada*	*Las rotaciones de menor amplitud son de 90º. También tiene rotaciones de 180º. El eje de reflexión está sobre la diagonal de la región de traslación. Las rectas de simetría pasan por 4-centros. No tiene reflexión paso.*	
$\mathcal{W}_4^2$ $p4g$	$\left\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{(A,90^\circ)}, \sigma_{MN} \right\rangle$ $=$ $\left\langle \rho_{(A,90^\circ)}, \sigma_{MN} \right\rangle$	*cuadrada*	*Las rotaciones de menor amplitud son de 90º. También tiene rotaciones de 180º. Las rectas de simetría no pasan por los 4-centros. Los ejes de las reflexiones paso no son paralelos a ningún eje de reflexión.*	
CABD es la región de traslación *M: punto medio de AB* *N: punto medio de AC* *E: punto medio de las diagonales de la región de traslación*				

Grupo $\mathcal{W}_6$	*Generadores*	*Región de traslación*	*Descripción*	*Región fundamental sombreada*
$\mathcal{W}_6$ $p6$	$\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{(A,60^\circ)} \rangle$ $=$ $\langle \rho_{(A,60^\circ)}, \sigma_M \rangle$	*hexágono*	*Las rotaciones de menor amplitud son de 60º. También tiene rotaciones de 120º y 180º. Los 6-centros son centro de un hexágono cuyos vértices son 3-centros y cuyos lados son bisecados por 2-centros. No hay reflexiones ni reflexiones paso. No tiene rectas de simetría.*	
$\mathcal{W}_6^1$ $p6m$	$\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{(A,60^\circ)}, \sigma_{MC} \rangle$ $=$ $\langle \rho_{(A,60^\circ)}, \sigma_{MC} \rangle$	*hexágono*	*Las rotaciones de menor amplitud son de 60º. También tiene rotaciones de 120º y 180º. Los ejes de reflexión pasan por los centros de simetría. Los ejes de las reflexiones paso no coinciden con los ejes de reflexión.*	
CABD es la región de traslación. *M: punto medio de AB* *N: punto medio de AC* *A: 6-centro cualquiera* *G: 3-centro más cercano*				

Los resultados y descripciones anteriores se concretan en el llamado Teorema de Feodorov: Existen 17 grupos cristalográficos no isomorfos. Estos se clasifican de acuerdo con su subgrupo de rotaciones:

1. Grupos sin rotación: $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_1^1$, $\mathcal{W}_1^2$,$\mathcal{W}_1^3$.

2. Grupos con rotación de orden 2: $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_2^1$, $\mathcal{W}_2^2$, $\mathcal{W}_2^3$, $\mathcal{W}_2^4$.

3. Grupos con rotación de orden 3: $\mathcal{W}_3$, $\mathcal{W}_3^1$, $\mathcal{W}_3^2$.

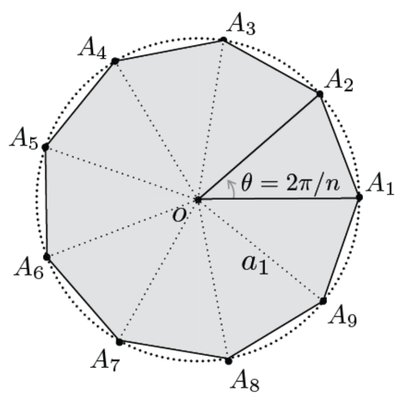
4. Grupos con rotación de orden 4: $\mathcal{W}_4$, $\mathcal{W}_4^1$, $\mathcal{W}_4^2$.

5. Grupos con rotación de orden 6: $\mathcal{W}_6$, $\mathcal{W}_6^1$.

Apéndice

- Simetrías de un polígono regular de n lados.

  Dado un polígono regular con n lados, cuyos vértices son $A_1, A_2, ..., A_n$. Sea O el centro del círculo circunscrito a sus vértices, $\theta = 2\pi/n$ y, $\rho = \rho_{(O,\theta)}$ la rotación con centro en O y ángulo θ. Sea $C_n = \langle \rho \rangle$.

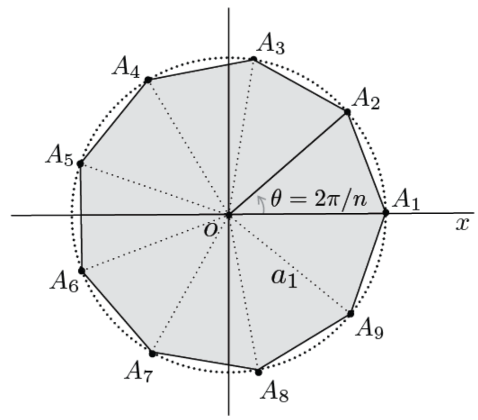


$\rho^i(A_j) = A_{i+j(mod n)}$

C_n es un grupo cíclico de orden n, ya que $\rho^n = \rho_{(O,n\theta)} = \rho_{(O,2\pi)} = Id$. Por lo tanto, C_n es un grupo abeliano y los elementos de C_n dejan fijo al polígono.

El grupo C_n es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_n$ bajo la asociación: $1 \to \rho$, ya que $\rho^i \rho^j = \rho^{i+j}$.

Pero, éstas no son las únicas simetrías de un polígono regular, también es invariante bajo ciertas reflexiones. Para encontrar el grupo de simetría que incluya las reflexiones, consideremos al vértice A_1 en el eje X y a O en el origen de los ejes cartesianos y consideremos $\sigma = \sigma_X$.



El polígono regular de n lados queda fijo bajo la acción de $\rho = \rho_{(O,\theta)}$ y de $\sigma = \sigma_X$ y además $\rho^n = \sigma^2 = Id$. Ya que las simetrías del polígono forman un grupo y que el polígono queda fijo por las n isometrías pares, las rotaciones $\rho, \rho^2, \rho^3, ..., \rho^n = Id$, y por las isometrías impares $\rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, ..., \rho^n\sigma = \sigma$, el grupo de isometrías tiene al menos $2n$ elementos, ya que todas éstas son diferentes.

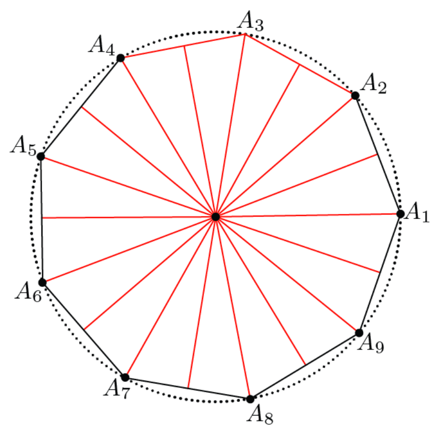
Por otro lado, si consideramos los dos vértices adyacentes del polígono, A_1 y A_2, bajo cualquier simetría del polígono la imagen de A_1 puede ser cualquiera de los n vértices del polígono y la imagen de A_2 debe ser alguno de los dos vértices adyacentes a la imagen de A_1. La imagen del resto de los vértices queda determinada por estas dos, por lo tanto el número de simetrías del polígono es a lo más $2n$, lo que junto con el resultado anterior implica que hay exactamente $2n$ simetrías del polígono de n lados. Estas son las que hemos enlistado. A este grupo se le llama el grupo diédrico de orden n, se denota por D_n y se tiene que $D_n = \langle \rho, \sigma \rangle$.

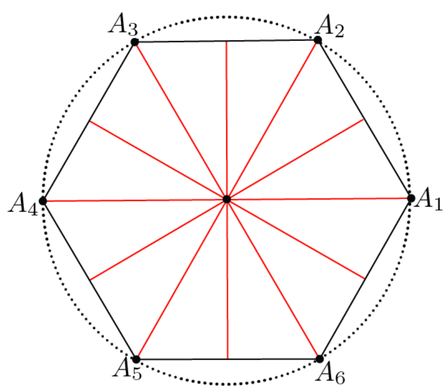
Veamos ahora como se puede expresar los productos $\sigma\rho, \sigma\rho^2, \sigma\rho^3, ..., \sigma\rho^n$ en función de los elementos de D_n que ya se han descrito.

$\sigma\rho^k$ es una reflexión sobre una recta por O, ya que es un producto de tres reflexiones sobre rectas que pasan por el mismo punto, por lo tanto $\sigma\rho^k$ es una involución y $\sigma\rho^k = (\sigma\rho^k)^{-1}$, lo que implica que $\sigma\rho^k = \rho^{-k}\sigma = \rho^{n-k}\sigma$. Con esta ecuación y las ecuaciones $\rho^n = \sigma^2 = Id$, se puede encontrar la tabla de Cayley del grupo.

Más aún, todos los productos $\rho^k\sigma$ son reflexiones, por lo que los elementos del grupo diédrico son n rotaciones y n reflexiones.

En el caso de que n sea par, los ejes de reflexión son las rectas que unen vértices opuestos y los puntos medios de lados opuestos y en caso de que n sea impar los ejes de reflexión son las rectas que pasan por cada vértice y el punto medio del lado opuesto.





Cabe mencionar que C_n es un subgrupo de D_n.

Bibliografía

[1] G.E. Martin, *Transformation Geometry: An introduction to symmetry*. Springer-Verlag, London, Paris, Tokyo, 1982.

[2] F. Monroy Pérez, *Matemáticas para el diseño. Introducción a la Teoría de Simetría*. Universidad Autónoma Metropolitana, 1989.

[3] F. Rivero Mendoza, *Grupos Cristalográficos Planos*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana VI-1: 141-156, 1999.

[4] R.L.E. Schwarzenberger, *The 17 plane symmetry groups*. Mathematical Gazette, 58:123–131, 1974.

[5] H. Weyl, *Symmetry*. Princeton University Press, reedición ??.