



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

**ESTUDIO DE CAMPOS DE VELOCIDAD  
EN ZONAS ESTANCADAS EN FLUJO GRANULAR**

**T E S I S**

*QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:*

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**INGENIERÍA MECÁNICA - TERMOFLUIDOS**

*P R E S E N T A :*

**ENRIQUE SANDOVAL NAVA**

Director de tesis: Dr. Roberto Zenit Camacho

Abril, 2012



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Virginia y Enrique,  
por darme herramientas, no soluciones. Por su infinito amor.

A Gustavo,  
por que no soy la más alta barrera sino el más bajo escalón.

A Javier Alberto,  
por que sé que entiendes cada una de estas palabras.

A Sandra,  
por tu inmensa pasión y desinteresada entrega. Siempre.

Al indeleble recuerdo de María, Miguel, *Paquito*, Enrique, María Elena y Guadalupe.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Propiedades estáticas y dinámicas . . . . .	8
1.2. Flujo granular denso . . . . .	13
1.3. Dinámica granular y su modelado . . . . .	18
1.3.1. Modelos continuos . . . . .	19
1.3.2. Modelos discretos . . . . .	21
1.4. Zonas de estancamiento . . . . .	24
<b>2. Objetivo</b>	<b>27</b>
<b>3. Metodología Experimental</b>	<b>29</b>
3.1. Dispositivo y diseño experimental . . . . .	29
3.2. Adquisición de Imágenes . . . . .	32
3.3. Técnica de visualización . . . . .	33
3.4. Procesamiento de Datos . . . . .	35
3.5. Validación experimental de la velocidad de descarga . . . . .	41
<b>4. Resultados</b>	<b>43</b>
4.1. Fase I: Efecto del tamaño de la placa . . . . .	44
4.2. Fase II: Efecto de la orientación de la placa . . . . .	48
4.3. Morfología del estancamiento . . . . .	52
<b>5. Discusión</b>	<b>55</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>59</b>
6.1. Forma y Tamaño . . . . .	60
6.2. Arreglo y técnicas experimentales . . . . .	60

6.3. Prospección . . . . .	61
<b>Apéndices</b>	<b>62</b>
<b>A. Ubicación del punto de estancamiento</b>	<b>65</b>
A.1. Punto coincidente con la línea de altura . . . . .	66
A.2. Punto coincidente con la línea bisectriz . . . . .	67
A.3. Área del estancamiento . . . . .	69
<b>B. Dinámica de flotadores en una superficie oscilante</b>	<b>71</b>
B.1. Introducción . . . . .	71
B.2. Objetivo . . . . .	72
B.3. Arreglo experimental y técnicas de análisis . . . . .	72
B.4. Balance de Fuerza . . . . .	75
B.4.1. Fuerza de atracción capilar entre dos flotadores idénticos . . . . .	75
B.4.2. Fuerza debida a una onda estacionaria . . . . .	76
B.4.3. Arrastre Viscoso . . . . .	77
B.4.4. Fuerzas de contacto . . . . .	77
B.5. Resultados . . . . .	79
B.5.1. Dinámica de un flotador único . . . . .	79
B.5.2. Simulaciones . . . . .	82
B.5.2.1. Cinemática de un flotador que interactúa con otros . . . . .	82
B.5.2.2. Cinemática colectiva de flotadores en sistemas de concentración variable . . . . .	84
B.6. Conclusiones . . . . .	88
<b>C. Presentaciones en congresos</b>	<b>91</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>96</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>97</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>102</b>



# Resumen

Los materiales granulares pueden exhibir comportamientos múltiples para una misma condición dinámica. En una variedad de situaciones, se forma una región de estancamiento en el seno del material que fluye. Las circunstancias que originan estas estructuras, así como sus propiedades e implicaciones no han sido totalmente comprendidas. Con el propósito de caracterizar este fenómeno, se estudió una zona de estancamiento generada por una placa plana en un flujo de material granular. La corriente se produjo al vaciarse un contenedor, lleno de esferas de vidrio de 3 mm, en cuyo centro se colocó una placa sólida. El método experimental comprendió dos situaciones: en la primera, se varió el tamaño de la placa, colocada de manera frontal al flujo empleando cuatro valores de flujo de masa. En una segunda fase, se cambió la orientación del obstáculo, usando las mismas tasas de flujo de descarga. Se capturaron secuencias fotográficas de alta velocidad en la región aguas arriba de la placa. Tras el procesamiento de imágenes, se obtuvieron los campos vectoriales y escalares de velocidad correspondientes a cada evento experimental. En general, se aprecia que la zona estancada presenta pequeñas variaciones de velocidad. En la línea central del canal, la velocidad crece significativamente con la altura, presentando grandes variaciones en la zona estancada. El decaimiento de la velocidad muestra dependencia exponencial con la altura, tendiendo a cero a medida que ésta se incrementa. Las alteraciones más notables se observan en la placa de mayor tamaño. La prevalencia de una zona de estancamiento es significativa para valores críticos en la orientación del obstáculo. De igual forma, la ubicación del punto de estancamiento, muestra un cambio de tendencia en su desplazamiento, desde el centro hacia el borde de ataque. Dicho ángulo crítico se sitúa dentro del rango típico del ángulo de estabilidad dinámica del material. La región de estancamiento muestra un aspecto triangular con un borde redondo, el cual se orienta hacia el borde de ataque conforme crece la oposición. Estos parámetros muestran mayormente dependencia del tamaño del obstáculo, no así de la velocidad del flujo.



# *Introducción*

Los flujos granulares se presentan cuando una colección de sólidos macroscópicos, se deslizan y ruedan unos sobre otros, ante una perturbación o fuerza externa. Estas congregaciones de granos comprenden desde finos polvos hasta escombros minerales de gran tamaño, generalmente con diferentes geometrías. Suele decirse que las partículas se encuentran inmersas en un fluido, pero si éste es aire o vacío, se los llama flujos granulares secos. Si el nivel de empaquetamiento es considerable, se habla entonces de flujos granulares densos.

La presencia de materiales granulares en las actividades cotidianas de la sociedad representa un porcentaje muy significativo, casi a la par de la manipulación de fluidos como agua y petróleo [1]. En una variedad de industrias productivas, los materiales de transformación o los bienes fabricados, son materiales granulados. A la luz de semejantes datos, la importancia que reviste el entendimiento del manejo y aprovechamiento de estos materiales es evidente. Por otro lado y no menos importante, en la naturaleza, a diversas escalas dimensionales, fenómenos que involucran materia granular se presentan a cada momento sin que se conozcan a profundidad los mecanismos que los producen. Últimamente, se emplean análisis semejantes a los usados en física granular para estudiar algunos procesos antropogénicos como el comportamiento de multitudes o el tránsito vehicular en las ciudades [2].

Una de las características más relevantes de estos agregados, es que, dado que generalmente están compuestos de sólidos medianamente incompresibles, la respuesta a las imposiciones energéticas es puramente disipativa. Esto es, los choques entre partículas son inelásticos y la energía cinética no se conserva. Si bien dos granos pueden experimentar una colisión perfectamente elástica, la distancia libre media que recorrerían sería muy limitada, dada la aglomeración en el conjunto granular, lo cual elimina toda posibilidad de producir movimiento por contacto. Esta razón provoca que la energía mecánica se pierda como consecuencia del alto número de impactos que una sola partícula recibe durante el desarrollo del flujo. A lo largo del último medio

siglo, una gran cantidad de esfuerzos se han realizado para establecer relaciones efectivas que describan el desempeño de los flujos de grupos de partículas, considerados ya como un continuo o bien estableciendo modelos dinámicos que incorporen su condición particularizada. Si bien hay un gran número de publicaciones al respecto, no existe un conjunto bien definido de leyes que englobe efectivamente el comportamiento de flujos granulares ante las diversas condiciones dinámicas en que se los puede encontrar.

La naturaleza de estas peculiares colecciones de sólidos macroscópicos, da pie al uso de relaciones que residen en la frontera entre la mecánica de sólidos y de fluidos. Esta difusa separación genera todo tipo de leyes y relaciones que pueden predecir con cierto éxito el desarrollo de algunas variables de importancia en un flujo granular, aún cuando son incapaces de unificar el entendimiento sobre el medio en su totalidad. Estas aportaciones, teóricas o numéricas, tratan de predecir de manera certera las variables más importantes que se estudian convencionalmente en la mecánica de fluidos, extendiendo su aplicación al campo de los medios granulares.

## 1.1. Propiedades estáticas y dinámicas

Se llaman materiales o medios granulares a una clasificación específica de fluidos multifásicos, a saber, aquellos en los que la densidad de la fase dispersa es varias veces mayor que la de la fase continua. En ocasiones, la interacción con aquella puede resultar imperceptible en el comportamiento mecánico del material, lo cual le dota de características, visibles en el reposo y el movimiento, que lo distinguen de otro tipo de sustancias. Quizá la más evidente, es que pueden exhibir múltiples comportamientos, según la densidad que posean y que resulta la propiedad más importante para caracterizar un medio granular [3], pues de ésta dependerá si el medio se mueve como un fluido o exhibe características de sólido. Como los líquidos, son capaces de tomar la forma de un contenedor, pero al mismo tiempo, agruparse como sólidos y resistir deformaciones considerables. Si no están restringidos, pueden igualmente adoptar perfiles peculiares al formar depósitos. A diferencia de los líquidos, que se consideran prácticamente incompresibles, los materiales granulares admiten compresión debido a que el espacio que hay entre sus partículas puede cambiar con el movimiento del conjunto granular. Si se intenta mezclar líquidos, generalmente se puede lograr una composición homogénea, pero hacerlo con granos de diversos tamaños o materiales, frecuentemente provoca la separación de los constituyentes, como se explicará más adelante.

Cabe mencionar que la materia granular no posee una densidad única. El volumen de los materiales granulares, y en consecuencia su densidad, cambia si se les impone alguna condición dinámica: si se los hace fluir o si se agitan. Dada la composición de un medio granulado, se debe tomar en cuenta la contribución a la densidad global del medio por parte de cada componente. La densidad de las partículas,  $\rho_p$ , es la densidad del material del cual están hechos los granos individuales; si la del fluido intersticial se representa como  $\rho_f$ , entonces la densidad del medio granular se define por

$$\rho_b = \rho_p \nu + \rho_f (1 - \nu) \quad (1.1)$$

donde  $\nu$  es la fracción de sólidos, definido con mayor detalle unas líneas adelante. Si se asume como la porosidad al factor  $\epsilon = 1 - \nu$ , véase que equivale a la fracción efectiva de fluido intersticial en el medio. Dicha fase regularmente tiene una densidad pequeña en comparación con los sólidos que integran el material







Figura 1.1: La materia granular se presenta en la vida diaria en miles de formas y en una variedad de fenómenos naturales e industrias productivas. Recientemente, modelos matemáticos empleados en mecánica granular se usan también para predecir el comportamiento de multitudes y tránsito vehicular.

( $\rho_p/\rho_f \sim 10^3$ ), de manera que se asume que  $\rho_b = \rho_p \nu$ .

Alternativamente, la densidad de un medio granular se define de manera análoga a como se hace para sólidos o líquidos

$$\rho_s = \frac{m_s}{V_s} \quad (1.2)$$

donde  $\rho_s$  es la densidad de los sólidos,  $m_s$  su masa y  $V_s$  el volumen que ocupan.



De acuerdo a la manera en que los granos se acomodan para empacarse, la densidad granular puede estimarse en términos del estado de movimiento. Si se compara la densidad de reposo,  $\rho_d$ , aquella que presenta el medio granular al empacarse libremente, con la densidad de compactación dinámica,  $\rho_m$ , que posee como resultado de algún efecto dinámico, se define entonces el coeficiente de compacidad como el cociente entre dichas cantidades

$$K_m = \frac{\rho_m}{\rho_d} \quad (1.3)$$

Puede definirse la compacidad como la medida de cuanto puede compactarse un sistema. Esto es, una configuración de partículas espaciosa es un sistema de alta compacidad, en tanto, uno de baja sería representado por granos considerablemente empacados. Por otro lado la magnitud de la compacidad está relacionada con el porcentaje de volumen efectivo que ocupa una masa de granos, definido como la fracción de sólidos,  $\nu$ . Para un medio granular se distinguen dos valores que definen los estados límite de compacidad en términos de esta propiedad. Para  $\nu$  cerca de 0.6 se habla de empaquetamiento holgado aleatorio (LCP, por sus siglas en inglés, [4]), pues existen vacíos de un tamaño comparable al de las partículas que integran la red, las cuales no mantienen entre ellas un patrón dimensional claramente distinguible. El empaquetamiento compacto aleatorio (RCP), que es el arreglo más denso posible para sistemas monodispersos de esferas duras, se obtiene cuando  $\nu$  es del orden de 0.64. La exactitud de estos valores en el volumen efectivo de sólidos, como la determinación de otras propiedades granulares depende significativamente de los métodos de evaluación experimental.

Estos diversos grados de compactación, inducen en los granos, fuerzas adicionales a las que les impone su propia masa (i. e. peso, fuerzas inerciales, etc.). La condición de empaquetamiento provoca que las partículas se vean sujetas a rozamiento y compresión producidas por otras con las que mantienen contacto. El resultado macroscópico de estas interacciones es un conjunto de fuerzas, entre las que destacan notablemente la cohesión y la fricción, que a su vez provocan manifestaciones únicas en el material granular.

La cohesión es la tendencia de los granos a mantenerse unidos debido al efecto de fuerzas de atracción [5]. Un material se asume como cohesivo si para separar sus partículas es necesario aplicar fuerzas netas en dirección normal a la interfase que las vincula. Contrariamente, un material sin cohesión es aquel incapaz de soportar esfuerzos de tensión. La cantidad y calidad de fluido intersticial puede influir fuertemente en el carácter cohesivo de un material, teniendo efectos significativos sobre materiales con un tamaño de partícula del orden de  $10 \mu\text{m}$ . Las partículas grandes forman materiales no cohesivos debido a que su peso individual supera las fuerzas de atracción. Esta característica redundante en otra propiedad importante, y es que los medios granulares no son capaces de ofrecer resistencia alguna a la extensión, por lo que los esfuerzos compresivos se consideran positivos [6].

La fricción es la resistencia al desplazamiento relativo en dirección tangencial, entre dos cuerpos que comparten una interfase. En los materiales granulares, la fricción estática entre los granos es una propiedad que gobierna el carácter macroscópico del medio en conjunto y tiene importantes efectos sobre la formación de cadenas de fuerza, empaquetamiento [7] y formación de pilas. De igual manera, la dinámica de muchos fenómenos está regida por la interacción entre granos que tienen un movimiento relativo. Fenómenos como la segregación y las avalanchas dependen fuertemente de la fricción dinámica que existe entre las partículas [8, 9].



Entender las propiedades friccionales de la materia granular resulta una tarea difícil, ya que los problemas básicos, como la propagación del esfuerzo en un arreglo estático no han hallado una solución, dada la aleatoria naturaleza de la repartición de esfuerzos dentro del medio. Por otra parte, cuando un medio granular se somete a un esfuerzo de corte, se reorganiza, modificando continuamente su configuración. La disposición microscópica [10, 11, 12] de los granos y su compactación tienen un efecto importante en la fricción, ya que con el fin de deformar el medio, es necesario superar varias restricciones geométricas.



Figura 1.2: A diferencia de los fluidos convencionales, un medio granular en equilibrio no necesariamente presenta una superficie libre horizontal.

Como se ha mencionado anteriormente, tanto la fricción como la cohesión, tienen participación importante en la caracterización de algunas propiedades de los materiales granulares. A diferencia de los líquidos, la superficie libre de un material granular no necesariamente es horizontal cuando éste se encuentra en reposo (fig. 1.2), formando una pila cónica. A continuación se describen brevemente los ángulos característicos que exhibe un material granular, ya en reposo o sujeto a alguna condición dinámica. La capacidad para fluir de un material granular es limitada, y mantiene su forma únicamente cuando el ángulo de la interfase se encuentra debajo de un cierto límite. A esta inclinación se le conoce como ángulo natural de reposo. Aunque su definición formal es motivo de un debate, en general se define como la inclinación máxima medida con respecto a la horizontal que exhibe un medio granular que se encuentra en reposo.



Considérese una pendiente inclinada a un ángulo  $\theta$  con respecto a la horizontal (fig. 1.3). Ante una inestabilidad pequeña, se formará una superficie plana de deslizamiento (segmento  $AB$ ), inclinada a un ángulo  $\alpha$ . De la figura puede verse que  $\alpha < \theta$ . Ahora bien, si el deslizamiento de material ocurre entre los puntos  $A$  y  $B$ , el esfuerzo de corte en el plano está dado por  $\tau = \mu \sigma$ , siendo  $\mu$  el coeficiente de fricción entre los granos y  $\sigma$ , el esfuerzo normal. De manera que suponiendo que el plano tiene un área unitaria, la fuerza de fricción en él está dada por  $F = \mu N$ , donde  $N$  es la fuerza normal. Por lo tanto la fuerza total en el plano,  $X$ , está inclinada con respecto a la fuerza normal a un ángulo  $\phi$ , de manera que  $\tan \phi = \mu = F/N$ , y así  $X$  está orientada con respecto a la vertical a un ángulo  $\alpha - \phi$ .

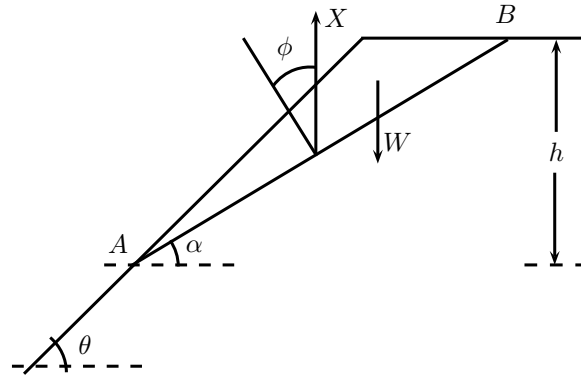


Figura 1.3: Ángulo de reposo y fricción interna.

Supóngase ahora que el material encima de  $AB$  se comporta como un sólido que está sujeto a dos fuerzas, la fuerza  $X$  y su propio peso,  $W$ . Dado que este cuerpo se encuentra en equilibrio, las fuerzas a las que está sometido, necesariamente deberán ser colineales, de manera que  $X$  es vertical y por lo tanto  $\alpha = \phi$ . Cabe hacer notar entonces que, para que un plano deslizante se forme,  $\theta > \phi$ , y de esa manera se establece que el valor que debe tener  $\theta$  para ser estable es igual a  $\phi$ . Puede verse entonces que el ángulo de reposo es igual al ángulo de fricción interna. Cabe señalar que la altura de la pendiente de material no se considera en el análisis, de manera que el ángulo de reposo resulta independiente de la extensión de la pila de material. El ángulo de fricción externa,  $\alpha$ , es el ángulo incluido de la inclinación de la superficie horizontal cuando los granos de un material comienzan a deslizarse. La tangente del ángulo de fricción externa se conoce como coeficiente de fricción externa.

Una de las propiedades granulares más importantes es el ángulo de estabilidad dinámica. Este atributo se estudia a través de un arreglo de tambor giratorio, descrito en la sección siguiente. En esta configuración un cilindro lleno parcialmente con material roto sobre su eje longitudinal. La dinámica del granulado se describe a través de los ángulos de reposo inferior y superior como se muestra en la fig. 1.4. La pared del tambor giratorio eleva el lecho de material como cuerpo rígido hasta que alcanza el ángulo superior de reposo,  $\theta_s$ , en la cual las partículas sobre la superficie del lecho comienzan a deslizarse hacia abajo formando una avalancha. Durante este proceso, la pendiente de la superficie disminuye. A medida que la avalancha se detiene, la superficie de la cama muestra una menor inclinación respecto a la horizontal, el ángulo inferior de reposo,  $\theta_i$ . Si el proceso se repite hasta que el granulado alcance el ángulo  $\theta_s$  se producirá una nueva avalancha. Si la rotación es suficientemente rápida, el flujo será continuo, haciendo que la superficie de deslizamiento se mantenga aproximadamente constante. El ángulo de esa pendiente se conoce como ángulo de estabilidad dinámica,  $\theta_d$ .



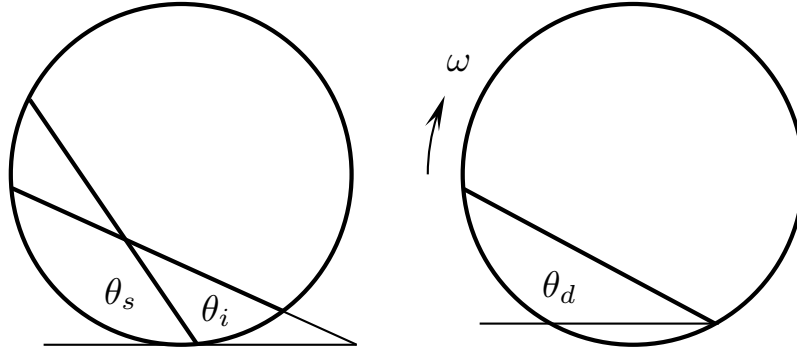


Figura 1.4: Movimiento de material en un cilindro giratorio. El tambor gira hasta que la superficie alcanza el ángulo de reposo superior,  $\theta_s$ , e inicia una avalancha. Cuando este proceso se detiene la superficie se encuentra ahora a un ángulo de reposo inferior,  $\theta_i$ . El ángulo de estabilidad dinámica,  $\theta_d$ , es el que la superficie muestra durante un estado de rotación continua

## 1.2. Flujo granular denso

Entre los flujos granulares, especialmente en aquellos con alta concentración de partículas, la duración del contacto entre ellas determina el carácter del flujo, así como las propiedades del mismo, las cuales pueden ser muy distintas de las de los fluidos “convencionales”. Los flujos granulares densos exhiben características fenomenológicas tipo sólido o líquido, en función de las velocidades que posean sus partículas [13]. Cabe mencionar que, a diferencia de dichas sustancias, los flujos densos pueden exhibir una combinación de comportamientos ante las mismas imposiciones dinámicas. Al hablar de estas manifestaciones, se diferencian claramente dos regímenes. En primer lugar, un movimiento cuasi estático, en el que las propiedades inerciales de los elementos del medio son despreciables y la descripción del mismo se efectúa a través de modelos usualmente empleados en mecánica de suelos. Si el medio se encuentra sometido a agitación [14], o se encuentra muy diluido, muestra una dinámica distinta [15], y se prefiere un modelado basado en cinética de gases. Entre estos dos regímenes existe un estado de flujo en el que la inercia que las partículas adquieren al chocar con otras resulta significativa, pero igualmente, las redes de contacto que se forman en el régimen de poca fluencia tienen una participación activa en el desarrollo dinámico del sistema [16]. La carencia de información y la diferencia entre los criterios para el análisis de uno y otro estado de flujo, promueve el desarrollo de estudios teóricos, experimentales y numéricos.

Tradicionalmente, los flujos granulares densos se estudian en un pequeño grupo de dispositivos experimentales, inspirados en aplicaciones industriales cotidianas. En estos aparatos es posible obtener un flujo cortante con el fin de medir algunas de sus propiedades. Comúnmente, estos instrumentos se clasifican en dos grupos, los que poseen una superficie libre y los flujos confinados, aunque también se podrían organizar en los producidos por gravedad y aquellos inducidos por una superficie móvil. Algunos autores [17, 18] sugieren que existen de 4 a 6 de estas configuraciones típicas: cortante simple (fig. 1.5a), flujo anular (fig. 1.5b), canal vertical (fig. 1.5c), plano inclinado (fig. 1.5d), flujo en montículo (fig. 1.5e) y tambor rotativo (fig. 1.5f).

Los aparatos de flujo confinado se caracterizan por que el material sufre un esfuerzo de corte fluyendo entre las paredes del dispositivo, las cuales pueden (figs. 1.5a y 1.5b) o no presentar movimiento relativo (fig. 1.5c). En las configuraciones de corte simple y flujo anular, el parámetro de control es con frecuencia la velocidad de la pared móvil o el esfuerzo que se le imprime. En este tipo de aparatos, se ha encontrado que el estado





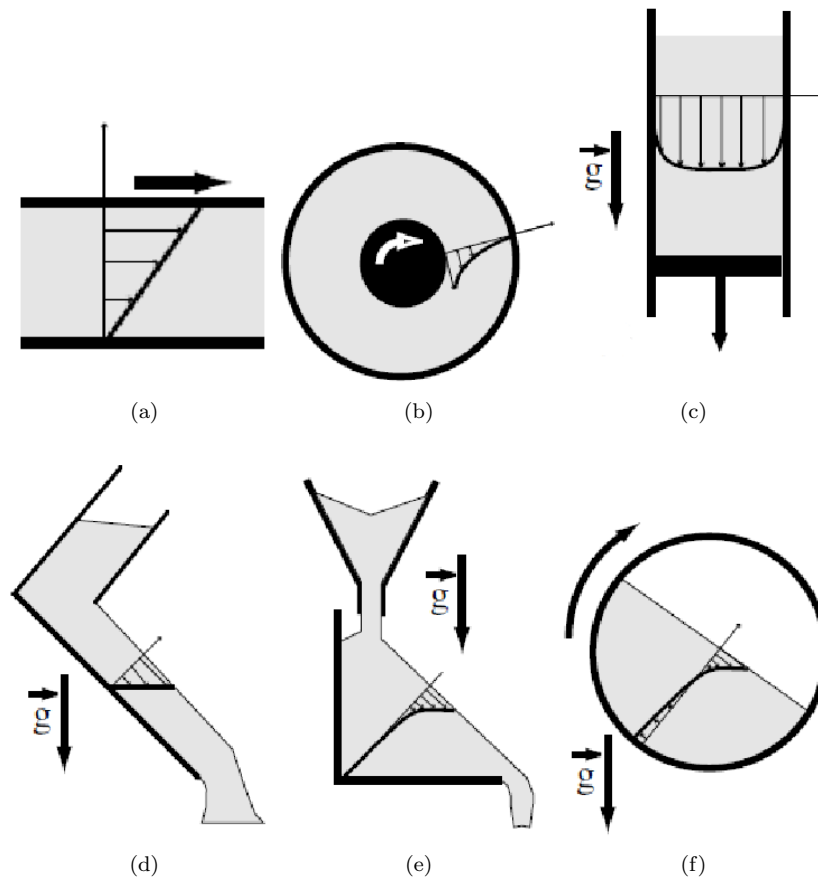


Figura 1.5: Dispositivos comunes en los que se observan flujos granulares densos. Tomado de [17].

de flujo estacionario se observa a rapidezces de deformación altas, mostrando un variación significativa en la fracción sólida a lo largo del material, siendo más baja en la zona de alto esfuerzo cortante. Además, los perfiles de velocidad y densidad, aparentemente son independientes de la velocidad impuesta a la placa móvil.

Los flujos de superficie libre se caracterizan justamente por que una de sus áreas no tiene contacto con pared alguna y cambia a medida que se desarrolla el flujo (figs. 1.5c a 1.5f). En esta clase de dispositivos la fuerza que produce el flujo, es la generada por la aceleración de la gravedad. Las distribuciones de velocidad muestran un perfil semejante a las observadas en el flujo cortante simple, en capas muy cercanas a la superficie libre. El ángulo de inclinación de ésta, es un indicador de las características del flujo. Los flujos sobre planos inclinados se presentan para condiciones específicas de inclinación y grosor de la capa de material (fig. 1.5d). Para valores moderados, se obtiene un flujo estable, pero si la capa es de dimensiones considerables o el plano está muy inclinado, se tendrá un flujo que se acelera continuamente. Para cada valor de inclinación, existe un grosor mínimo de la capa, debajo del cual el flujo se suspende. Es importante señalar que la altura crítica de la capa se reduce a medida que aumenta la inclinación, y tiende a infinito cuando la pendiente del plano se acerca al ángulo de reposo del material. Por otra parte, los flujos sobre montículos son estables a altas tasas de flujo másico. En este estado, es el mismo sistema el que impone la inclinación de la superficie libre. El perfil localizado cerca de la superficie libre se considera lineal, mostrando una dependencia exponencial a una mayor profundidad. Dicha distribución exterior, muestra independencia de la tasa de flujo.



Otro de los arreglos estudiados con gran detalle es el tambor giratorio [19]. Estos aparatos usan la velocidad de giro de un cilindro, parcialmente lleno de material granulado (fig. 1.5f), con diversos fines, desde homogeneizar una mezcla de partículas de varios tamaños, hasta remover componentes no deseados. A diferencia de otros flujos libres, la forma de la superficie varía con el desarrollo del flujo. Para el análisis de estos dispositivos, la suposición fundamental es que el material puede ser dividido en una región con características de sólido y otra de fluido, que están separadas por un interfaz inmaterial en la que se presentan discontinuidades. Los experimentos muestran que cerca de la superficie libre hay una capa delgada que se mueve cuesta abajo como un líquido, y debajo hay una gran masa cuasiestática que gira lentamente. La región sólida transporta material cuesta arriba existiendo una gran transferencia de masa entre las dos regiones. Una de las características observadas con frecuencia, es la aparición de bandas de estratificación. Un buen número de experimentos y simulaciones numéricas, han demostrado que la segregación axial, está precedida por la formación de cúmulos de partículas en dirección radial.

En el caso del canal vertical (fig. 1.5c), el flujo de masa se controla cambiando la apertura del contenedor o modificando la velocidad vertical. Por la cantidad de aplicaciones prácticas en que se presenta, este tipo de dispositivo ha sido ampliamente estudiado. Dependiendo de su geometría se conoce como tolva, silo o simplemente contenedor. De manera experimental, se ha encontrado que el flujo de masa a través de la salida, es independiente de la altura que tenga el material contenido. La explicación de este comportamiento radica en el papel que juega la fricción, entre granos y con las paredes del depósito. Dado que los esfuerzos se transmiten a través de direcciones preferenciales, conocidas como cadenas de fuerza, y puesto que éstas no son lineales, tienden a desviar parte de la presión de la columna granular hacia las paredes del recipiente [20]. A diferencia de los líquidos, la distribución de los esfuerzos no es equitativa y el fondo de la columna está sujeta a menor presión, y a una altura determinada puede alcanzar un valor constante. Para algunas condiciones geométricas o del flujo, puede presentarse un fenómeno conocido como “arqueó”, en el que un grupo de partículas se ordena de manera semejante a un arco, apoyándose en las paredes del canal e impidiendo el avance del material que está encima [21]. Otra manifestación frecuente en envases verticales es la aparición de patrones de flujo distintos. Si la geometría de la salida del canal es lo suficientemente amplia y despejada, permitirá el libre flujo del material, esta condición se conoce como *flujo a granel* (ver fig. 1.6a). En ella, todos los granos contenidos se mueven libremente, evacuando el silo de manera uniforme. Pero en determinados casos, ya sea por la forma de la desembocadura o la naturaleza de las partículas, determinadas regiones permanecerán estancadas o al menos se moverán más lentamente, formándose un núcleo de salida del material [22]. Este estado se conoce como *flujo de embudo* (ver fig. 1.6b).

En determinados dispositivos de almacenaje, y bajo un conjunto de condiciones de funcionamiento, es difícil determinar *a priori* el tipo de flujo que es probable que prevalezca. No obstante, es pertinente denotar sus diferencias, así como los mecanismos que caracterizan su aparición en una variedad de situaciones. Los ejemplos anteriormente expuestos ofrecen un panorama del comportamiento de los flujos densos en las condiciones encontradas en la práctica.



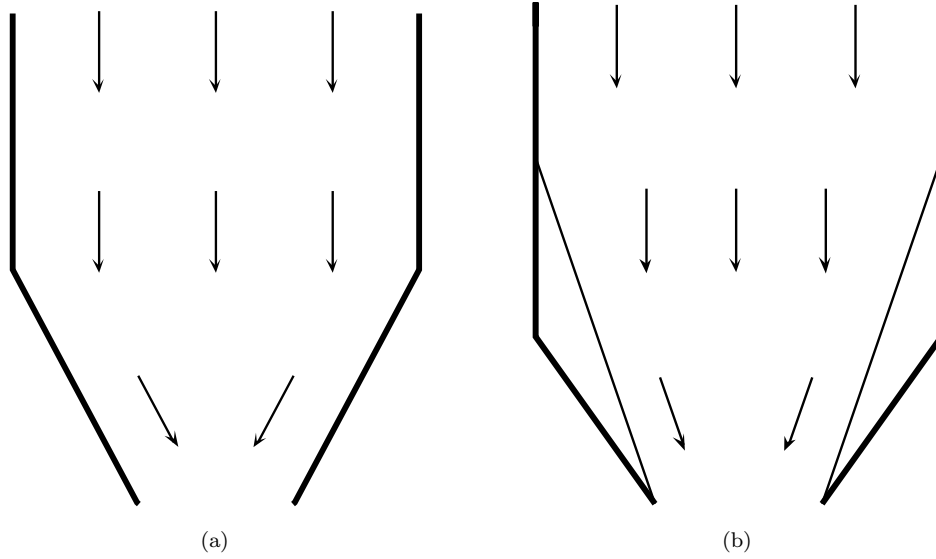


Figura 1.6: Patrones de flujo a través de la descarga de un canal: (a) flujo a granel y (b) flujo embudo con zonas de estancamiento.

En términos temporales, si la duración de la interacción de una partícula con sus vecinas es prolongada, se habla de flujos granulares lentos. Estos se caracterizan por su alta fracción de sólidos,  $\nu$ , y por la formación de estructuras, a través de las cuales se transmite el esfuerzo en el medio granular. Estos ensamblajes, aunque tienen una existencia breve, son capaces de inhibir los efectos inerciales de las partículas, que giran y resbalan sobre otras. Por otro lado, si los granos se impactan con frecuencia, significa que la fracción sólida es menor, permitiendo un mayor grado de movimiento y una rapidez de deformación,  $\dot{\gamma}$ , más alta. En estas condiciones, la inercia de los movimientos de cada partícula, provoca que el material granular se comporte como un gas. Análogamente a los gases moleculares, la teoría cinética de los gases se puede adaptar al estudio de estos flujos [23, 24, 25].

No existen, sin embargo, relaciones constitutivas que puedan definir con claridad la transición entre ambos estados. Sin embargo, un criterio basado en una cantidad adimensional permite predecir la manifestación de uno u otro. Es notable que a baja  $\dot{\gamma}$  y alta  $\nu$ , es decir en flujo lento, el estado de esfuerzo muestra independencia del valor de la rapidez de deformación, y por el contrario, exhibe una fuerte relación con  $\dot{\gamma}$  cuando la concentración de granos es baja.

El análisis dimensional sugiere que en un flujo sujeto a un esfuerzo de corte,  $\tau$ , con rapidez de deformación,  $\dot{\gamma}$ , y una fracción de sólidos,  $\nu$ , el esfuerzo adimensional,  $\tau/\rho_b d_p^2 \dot{\gamma}^2$  es una función de los parámetros de interacción entre las partículas, tales como la fricción de Coulomb,  $\mu_C$ , el coeficiente de restitución,  $\epsilon$  y la constante elástica,  $E$ , así como el diámetro de sus partículas,  $d_p$

$$\frac{\tau}{\rho_b d_p^2 \dot{\gamma}^2} = f \left( \mu_C, \epsilon, \nu, \frac{E}{\rho_b d_p^3 \dot{\gamma}^2} \right) \quad (1.4)$$

El parámetro  $\frac{E}{\rho_b d_p^3 \dot{\gamma}^2}$  es el cuadrado de la razón entre el tiempo característico del cortante,  $t_\tau = 1/\dot{\gamma}$ , con el tiempo típico de una colisión binaria,  $t_{col} = (m_p/E)^{1/2}$ .





Con lo expuesto anteriormente, es posible identificar dos límites en dicho parámetro, vía el tiempo de interacción de los granos. Si los contactos son duraderos en comparación con el lapso de aplicación del esfuerzo,  $\frac{E}{\rho_b d_p^3 \dot{\gamma}^2} \ll 1$ , de modo que la frecuencia de encuentros es comparable con el inverso del tiempo característico de colisión binaria. Con esto, las partículas se ven forzadas a relacionarse en múltiples maneras y comienzan a formar estructuras. Este régimen, llamado flujo denso lento, es cuasi estático y los esfuerzos no dependen de la rapidez de deformación.

Ahora bien, si los choques son instantáneos, ocurridos en períodos de tiempo menores que  $t_\tau$ ,  $\frac{E}{\rho_b d_p^3 \dot{\gamma}^2} \gg 1$ . Este patrón de flujo se conoce como régimen inercial. Si las colisiones son puramente binarias, entonces toma el nombre de flujo rápido.

Otra manera de estudiar la transición entre flujo lento y rápido es a través de la idealización del gas granular. Dado que los constituyentes de un material granular en movimiento colisionan con frecuencia, es comprensible que se tomen algunos de los conceptos empleados en la teoría cinética de los gases. Sin embargo, esta similitud debe tomarse con ciertas restricciones. Las colisiones entre granos son inelásticas y ese solo hecho tiene implicaciones para las propiedades materiales del medio granular. No obstante, la siguiente idealización puede funcionar como la definición de un estado de equilibrio granular [26]. Considérese un gas granular de densidad uniforme, de partículas macroscópicas con una distribución de velocidad uniforme e isotrópica, con valor medio de cero. Dado que las colisiones entre granos no son elásticas, este estado no puede ser estacionario. Por lo tanto, es de esperarse que la energía cinética del medio decaiga con el tiempo. De esta forma, el único estado estacionario que puede exhibir un material granular es el correspondiente a cero energía cinética, es decir cero temperatura granular. Para permanecer en un estado cinético diferente de cero, es necesario suministrar energía de manera que siempre se encuentre fuera del equilibrio [27].

La temperatura granular se define como

$$T^* = \frac{1}{2}(\langle u' \rangle^2 + \langle v' \rangle^2)/U_\infty \quad (1.5)$$

donde  $\langle u' \rangle$  y  $\langle v' \rangle$  son las fluctuaciones horizontal y vertical de la velocidad, respectivamente. La temperatura granular, o varianza de la velocidad de las partículas se calcula a través de la desviación cuadrada media de la velocidad con respecto a la media local para cada punto del espacio analizado. Esta magnitud es una medida de la fluctuación de la energía cinética en el flujo.



### 1.3. Dinámica granular y su modelado

Las diversas condiciones en que se pueden encontrar flujos granulares, obligan a buscar maneras de predecir variables de interés que puedan ser comparadas con las análisis empíricos. Dada su compleja naturaleza, los materiales granulares, a diferencia de otras sustancias, no cuentan con un conjunto propio de leyes constitutivas. Con frecuencia, para dar una descripción detallada de los fenómenos en que están implicados, es preciso tomar prestados principios y modelos fundamentales de la mecánica de sólidos, fluidos e incluso gases.

En general, hay dos maneras de analizar la dinámica de los materiales granulares. La primera, basada en un enfoque espacial o Euleriano, consiste en asumir la continuidad del medio granular, aunque sea evidente que las partículas no están unidas y simplemente mantienen contacto. Por el otro lado, puede también entenderse que cada partícula individual es un elemento sujeto a un balance de fuerza único y así, seguir el historial dinámico unitario desde un punto de vista Lagrangiano. Por supuesto, cada enfoque posee virtudes y desventajas, y si bien resulta apropiado para un tipo de problema en particular, puede no ser lo indicado para otro. Los modelos continuos pueden plantearse de manera relativamente sencilla basados en enunciados formales de física estadística. No obstante, en ocasiones incorporan una gran cantidad de variables que no es posible medir directamente en las escalas temporales y dimensionales en que se desarrolla un flujo granular. Esta característica provoca que el uso de un modelo granular continuo sea válido para sistemas comparables, en longitud y tiempo, con el tamaño de las partículas o la duración del contacto entre ellas, respectivamente.

De esta manera puede entenderse cómo surge la segunda alternativa al tratar de analizar un problema de fluidos granulares. Los modelos granulares discretos hicieron su aparición tras la incorporación del cómputo a las técnicas de análisis en muchos campos de la ciencia, gozando desde entonces de una gran popularidad, al permitir analizar el desarrollo de fenómenos sin la necesidad de conocer enteramente las leyes que los rigen. Con respecto a los flujos granulares, ofrecen una alternativa poderosa al análisis experimental tradicional. En ocasiones, es complicado -si no que imposible- estudiar detalladamente la estructura interna de los flujos, dado que las escalas de los arreglos pueden ser muy disímiles respecto al observador. Reproducir con precisión lo que ocurre en aplicaciones industriales puede resultar costoso y consumir recursos humanos y materiales. Ante la carencia de leyes conservativas, las simulaciones de flujos de materiales granulares, pueden prescindir de ellas y en su lugar, emplear modelos más simples que reproduzcan las interacciones entre las partículas. Aún cuando permiten realizar una gran cantidad de “observaciones” en áreas de exploración complejas, los modelos discretos deben estar bien fundamentados en modelos físicos que imiten fielmente lo que pasa en la realidad. Además, debe tenerse en cuenta que ante el gran número de partículas que forma un sistema granular típico, el consumo de recursos computacionales es una variable que debe cuidarse. Así mismo la validación experimental de los métodos numéricos debe ser fiable y reproducible para poder considerar efectivos los resultados que arrojan.

Así pues, ninguna técnica es superior a otra y es evidente que aún queda un gran trabajo por efectuar en la investigación de estos materiales excepcionales. A continuación se describen brevemente algunas de las características y ejemplos de modelos para fluidos granulares.



### 1.3.1. Modelos continuos

Puede resultar sorprendente que aunque los materiales granulares son discretos, tomarlos por medios continuos puede ofrecer buenas aproximaciones a su desempeño real bajo ciertas condiciones [28, 13]. Los modelos continuos se han utilizado ampliamente para los problemas tanto estáticos como de alguna situación de flujo. El principal atributo de estos modelos es que las partículas se sustituyen por un medio continuo, y cantidades tales como la velocidad y la densidad se consideran funciones suaves de la posición y el tiempo. Una vez que el material granular se idealiza como un continuo, está sujeto a las leyes de equilibrio de la mecánica del medio continuo. Estas ecuaciones deben ser complementadas con ecuaciones constitutivas que describen el comportamiento del material. En la actualidad, la falta de ecuaciones constitutivas válidas en un amplio rango de densidades y velocidades de corte representa un obstáculo importante, pues la inclusión de propiedades de las partículas en ecuaciones continuas puede resultar difícil si no se hace de manera empírica.

Para trabajar con un enfoque continuo, una ley de balance debe formularse para las cantidades que desean analizar, a saber, masa, momentum linear y/o angular, energía y entropía. En caso de generarse alguna discrepancia entre la teoría y el experimento, puede modificarse la ecuación constitutiva correspondiente, pero respetando la forma del balance. A menos que se indique lo contrario, los medios granulares constan de una sola fase y no se contempla la adición de fluido intersticial.

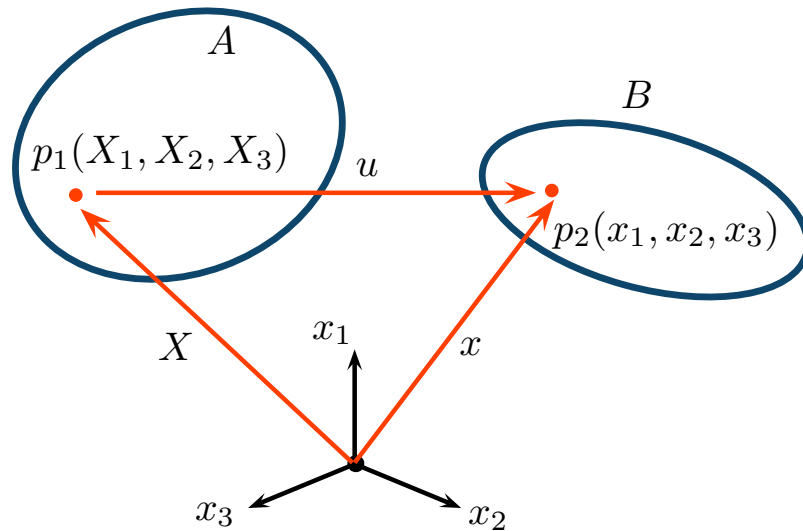


Figura 1.7: Sistema de referencia mostrando la posición de un punto,  $p$ , entre dos configuraciones,  $A$  y  $B$ .

Antes de postular un balance, de masa por ejemplo, se requiere definir la velocidad del medio. Ya que se trata de un continuo, no hay partículas que describir de manera que esta cantidad se define análogamente, en términos de puntos materiales. Todos los puntos contenidos en un volumen,  $V$ , se consideran un cuerpo y la región ocupada por todos ellos se conoce como configuración. Así, el movimiento de un cuerpo consta de la secuencia de configuraciones que se suceden en el tiempo,  $t$ . Puesto que no se contemplan cambios de fase o reacciones químicas en los medios granulares, cada configuración contiene el mismo número de puntos materiales durante todo el tiempo de observación. De manera que el volumen es una función del tiempo y aún cuando su forma y tamaño pueden cambiar, contendrá siempre el mismo número de integrantes.



Para dar cuenta de estas variaciones dimensionales y temporales, es necesario introducir el concepto de marco de referencia, el cual consta de un sistema de coordenadas y un elemento que permita contabilizar el tiempo. En muchas situaciones es preferible emplear un marco de referencia que se encuentra en reposo. A continuación se detalla brevemente la operación de estos conceptos.

Supóngase que en un tiempo de arranque,  $t_0$ , se analiza un punto material, denotado por  $p$ , como se aprecia en la fig. 1.7. En una configuración inicial,  $A$ , este punto corresponde con la ubicación del vector de posición,  $X$ , cuyas componentes,  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  se conocen como las coordenadas materiales del punto  $p$ . Transcurrida una determinada cantidad de tiempo, el cuerpo bajo estudio tendrá, en general, una configuración distinta,  $B$ . Ahora las coordenadas materiales de  $p$  están descritas en las componentes  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ . El movimiento del cuerpo se describe a través de  $x = x(X, t)$ , donde cada vector  $X$  corresponde a un punto material. Ahora bien, si se entiende que la velocidad está dada por el cambio temporal de la posición, para cada punto material se define como  $V = Dx/Dt = (\partial x/\partial t)_X$ . Esta expresión se conoce como la derivada material y sirve para medir la variación temporal de una propiedad -la velocidad en este caso- en un punto material.

Una vez que se han establecido las condiciones de seguimiento y caracterización del medio continuo, se pueden efectuar los balances adecuados que permiten determinar las cantidades de interés. Estos balances pueden expresarse tanto de forma diferencial (como se reseñó arriba) como integral. La forma de plantearlos depende de la aplicación que requiere un tipo particular de problema. Con respecto a los materiales granulares, los balances integrales pueden ofrecer información sobre cantidades globales, tales como flujo total de masa o fuerza sobre las paredes de un contenedor. Contrariamente, los balances diferenciales resultan útiles para investigar propiedades locales sobre los campos de densidad, esfuerzo o velocidad, aunque para ello requieren de un trabajo conceptual más arduo.

Considérese nuevamente la velocidad de los puntos materiales de un medio continuo. El balance integral de masa se puede expresar como

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (1.6)$$

donde  $\rho = \rho_s \nu$  es la densidad del medio granular.

Por otro lado un balance diferencial se puede expresar como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (1.7)$$

donde  $i$  corresponde a cada dirección del sistema coordinado. Esta misma expresión puede reescribirse de la siguiente forma

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot v_i) \quad (1.8)$$

donde  $D/Dt$  es la derivada material.

Con estas herramientas es entonces posible encontrar la forma de otras variables de interés para el medio continuo, siendo la densidad, el esfuerzo y los perfiles de velocidad los más recurrentes, como ya se ha mencionado. Históricamente, muchos investigadores han propuesto el empleo del principio de superposición en los análisis, sumando las características elásticas, plásticas y viscosas de las partículas del agregado granular.



Un ejemplo son los modelos de materiales elastoplásticos. Estos sugieren que por debajo de un umbral en la relación entre esfuerzos normales y tangenciales, el material soporta elásticamente las interacciones del sistema de fuerzas. Una vez que esa frontera es superada, se presenta fluencia plástica en el medio. Otros siguen una metodología semejante, pero desprecian la deformación elástica, asumiendo un comportamiento rígido elástico en el agregado. En determinadas situaciones, es útil incluso considerar al medio granular no sólo como un continuo sino como un fluido Newtoniano regular [29].

El primer paso para caracterizar el desempeño mecánico de un material, es buscar una relación entre el esfuerzo o la deformación, a través de sus propiedades. Simplificar su comportamiento, puede aproximar satisfactoriamente los resultados experimentales. Al igual que los sólidos o los líquidos, el estudio teórico de los medios granulares se basa en un material ideal. El *Material Ideal de Coulomb*, es un caso especial dentro de los materiales rígido-plásticos, y es el equivalente fenomenológico del Sólido Hookeano o el Fluido Newtoniano. Dichos materiales exhiben una relación lineal entre el esfuerzo normal y el esfuerzo de corte. Este modelo se conoce como Criterio de Mohr-Coulomb y se escribe como

$$\tau = \mu \sigma + c \quad (1.9)$$

donde  $\tau$  es el esfuerzo cortante aplicado y  $\sigma$  el esfuerzo normal. Las constantes  $\mu$  y  $c$  son el coeficiente de fricción y la cohesión y son valores que dependen de la naturaleza del medio, como ya se ha mencionado. Típicamente, los materiales granulares, aún los más rugosos no pueden ofrecer una gran cohesión y ésta se considera nula.

Esta ecuación puede ofrecer una buena aproximación a lo que experimenta un bloque de material granular en la realidad. Ante la aplicación de una fuerza externa pequeña, que no comprometa la capacidad elástica del medio, éste no se ve deformado. En cambio, si la fuerza supera un valor determinado, el material se divide en dos bloques rígidos que se deslizan uno sobre otro. Aunque existen deformaciones elásticas en la zona de ruptura, puede decirse que los bloques se mantiene rígidos, y que el deslizamiento tiene lugar debido a una falla plástica.

Otra de las vías para aprovechar los lineamientos básicos de la mecánica del continuo, se fundamenta en modelar alguna de las variables. Con el propósito de encontrar algún perfil que se pueda comparar satisfactoriamente con resultados experimentales, puede modificarse por ejemplo, el tensor de esfuerzos [30] o añadir un factor de proporcionalidad a la rapidez de deformación [31].

### 1.3.2. Modelos discretos

El enfoque de Lagrange puede ser visto como una extensión del de Euler, de manera que el modelo Lagrangiano describe la fase sólida a nivel de las partículas y la fase gaseosa como un continuo. En la situación del flujo bifásico, las ecuaciones del movimiento de cada partícula individual se resuelven incluyendo los efectos de las colisiones de las partículas y fuerzas que actúan sobre las partículas debidas a la interacción con la fase menos densa. Esto significa que las leyes del movimiento deben ser resueltas para un elevado número de partículas en un dominio computacional que represente un arreglo especial de “experimentación”. Es evidente que estos modelos son más precisos que los continuos puesto que, además de no requerir ecuaciones acopladas para la fase suspendida, pueden calcular las propiedades del movimiento de cada partícula individualmente.



Aunque el comportamiento verdadero de los sistemas de partículas puede ser un poco más complejo, la asunción de que las interacciones son binarias y entre partículas perfectamente esféricas, es una aproximación que permite enunciar algunos elementos básicos de la mecánica granular. Antes de ello, es primordial definir algunos conceptos necesarios para la comprensión de dichos fundamentos. Como ya se ha expresado, las partículas del medio granular están formadas de un material sólido. La deformación que experimenta un sólido se puede representar en la forma más simple por la ley de Hooke, que supone una relación lineal con el esfuerzo aplicado. Las propiedades elásticas de la sustancia están caracterizadas por el módulo de elasticidad,  $E$  y el coeficiente de Poisson,  $\nu$ , los cuales cuantifican la resistencia del material a la compresión en la dirección normal y tangencial a la aplicación de la fuerza, respectivamente.

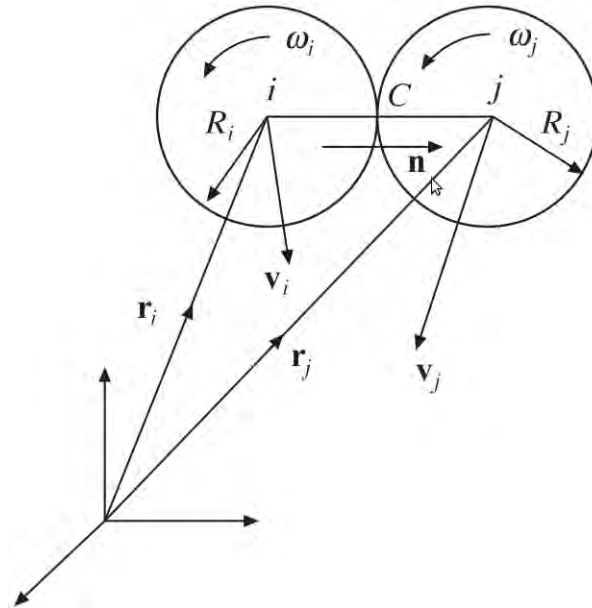


Figura 1.8: Esquema de dos partículas esféricas  $i$  y  $j$  teniendo contacto en el punto  $C$ , mostrando la velocidad del centro de masa,  $V$ , la velocidad de giro,  $\omega$  y el vector unitario,  $n$ , que une sus centros.

Considérense dos esferas rígidas de radio  $R_1$  y  $R_2$ , en general con masas diferentes,  $m_1$  y  $m_2$ , viajando a velocidades distintas,  $\bar{v}_1$  y  $\bar{v}_2$ , referenciadas a un marco inercial a través de sus vectores de posición  $\bar{r}_1$  y  $\bar{r}_2$ . Si experimentan una colisión elástica, las velocidades que poseen luego del choque serán  $\bar{v}'_1$  y  $\bar{v}'_2$ . Idealmente, las interacciones entre los granos no les provocan deformación permanente, además, tanto el momento lineal como la energía cinética del sistema se mantienen. Los impactos de este tipo se consideran perfectamente elásticos. Dado que los choques que experimentan los granos no son siempre ideales, es importante saber la cantidad de energía cinética que se pierde durante estos contactos. Para ello existe una medida conocida como coeficiente de restitución,  $\epsilon$ . Este valor cuantifica el grado de conservación de la energía cinética durante el choque, es decir, permite estimar su carácter de elasticidad y se conoce como coeficiente de restitución

$$\epsilon = \frac{\bar{v}'_2 - \bar{v}'_1}{\bar{v}_2 - \bar{v}_1} \quad (1.10)$$

Por conservación de energía, el valor de dicha relación es igual a 1 como máximo, situación en la que se presenta un choque perfectamente elástico. Por lo anterior, el coeficiente de restitución contiene las características disipativas de la colisión. Aunque un análisis minucioso de la mecánica de las colisiones, revela que



$\epsilon$  es una función de la velocidad de impacto, en general se asume como constante para un material dado. Ya que en el caso de los medios granulares,  $\bar{v}'_1$  y  $\bar{v}'_2$ , se desconocen, pueden estimarse a partir de las ecuaciones de conservación de momentum y energía, incluyendo la definición del coeficiente de restitución,

$$\bar{v}'_1 = \bar{v}_1 - 1/2 (1 + \epsilon) (\bar{v}_{12} \cdot \hat{n}) \hat{n}, \quad \bar{v}'_2 = \bar{v}_2 - 1/2 (1 + \epsilon) (\bar{v}_{12} \cdot \hat{n}) \hat{n} \quad (1.11)$$

donde  $\hat{n} = |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|/(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$ , es el vector unitario que une los centros de las esferas.

Como se ha considerado, los impactos ocurren en un instante de tiempo únicamente entre pares de partículas. La fuerza con que se impactan depende implícitamente del tiempo puesto que las posiciones -y consecuentemente las velocidades- relativas son funciones del tiempo. Por otro lado, en cada paso temporal, existe una interacción con una partícula diferente, que a su vez posee una secuencia propia de contactos previos. Una vez que el encuentro ocurre, éste tomará un determinado período, conocido como tiempo de colisión, luego del cual, la partícula se desplazará hasta encontrar otra y tendrá lugar un nuevo contacto. Es evidente que mientras más diluido se encuentre el medio y los contactos sean mas cortos, asumir colisiones binarias será más adecuado, como en el caso de los llamados gases granulares [24]. Por el contrario, si los periodos entre un impacto y otro son muy cortos se habla de entonces de flujos granulares densos.

Los modelos de partículas pueden dividirse, en términos simples, en dos tipos, los de partícula dura y suave, mismos que se expondrán con brevedad a continuación.

En los modelos de esferas duras se asume que las partículas interactúan a través de colisiones instantáneas, binarias. En una secuencia de colisiones se procesa una colisión a la vez, en orden de aparición. Por esta razón, son también conocidos como modelos de eventos secuenciados (del inglés *event driven models*), ya que una secuencia de colisiones es un proceso en que se calcula la dinámica de todas las partículas que se mueven hasta que la próxima colisión se produzca. La dinámica de estas colisiones se describe por leyes que involucran la disipación energética, debida a la interacción no ideal de las partículas, mediante la inclusión de los coeficientes empíricos de restitución normal y tangencial y el coeficiente de fricción. La disipación que produce la interacción de sus partículas, hace que estos sistemas sean significativamente diferentes de los sistemas moleculares, donde la energía asociada con las colisiones siempre se conserva. Esto significa que la energía debe ser continuamente suministrada a fin de mantener sus partículas en movimiento.

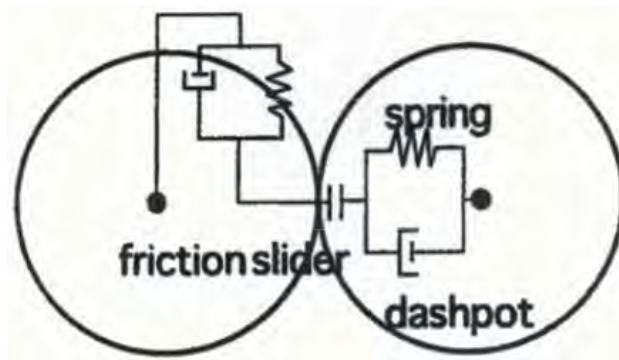


Figura 1.9: Modelo de partícula suave, considerando resortes, amortiguadores y deslizadores para simular el contacto entre partículas esféricas.



Los modelos de partícula suave difieren de los anteriores al considerar que las interacciones entre las partículas son un proceso continuo que se desarrolla en un tiempo finito. Como su nombre sugiere, se considera que los granos sufren una cierta cantidad de deformación durante la colisión y que las fuerzas de contacto se calculan empleando una idealización que involucra resortes, amortiguadores y deslizadores, como se ha explicado antes. Esta versión de los modelos de partículas resulta más acertada que la asunción de partícula dura y se emplea con mucha más frecuencia. Con los modelos de partícula suave, las fuerzas ejercidas sobre cada partícula se calculan como funciones continuas de la distancia entre partículas contiguas y se basan en leyes físicas realistas. En el caso de una partícula que está en contacto con varias otras partículas, la fuerza de contacto resultante se desprende de la suma de las contribuciones binarias. En términos de consumo computacional, en comparación con la aproximación de esfera dura, este enfoque es intensivo y requiere aún más recursos numéricos de simulación, sin embargo proporciona información sobre la estructura y dinámica de materiales específicos, incluyendo detalles de las posiciones, velocidades, fuerzas y particiones de energía.

Dado que los modelos discretos describen el movimiento de las partículas en detalle, se espera muestren más similitud con los resultados experimentales que los modelos continuos. Sin embargo, una comparación directa entre los modelos de partícula dura y suave y experimentos no se ha hecho hasta ahora. Por un lado, la gran cantidad de partículas que se requiere para justificar la aplicación del enfoque continuo, y por el otro, el limitado número de partículas que pueden ser manejadas por los modelos de elementos discretos. Otras complicaciones surgen del hecho de que una comparación rigurosa sólo puede hacerse si el elemento discreto considera el movimiento tridimensional de los granos, pues los que se emplean hasta ahora resultan restrictivos, pues sólo contemplan dos direcciones. Esto aumenta considerablemente el número requerido de partículas y con ello, las demandas computacionales.

## 1.4. Zonas de estancamiento

Bajo determinadas condiciones, los flujos de materiales granulados exhiben zonas de estancamiento, donde se comportan como sólidos y parecen ser indiferentes al desarrollo del flujo circundante. Sin embargo, el entendimiento de las circunstancias que producen dichas formaciones no es completo y se desconoce si son originadas por las propiedades del material (rugosidad, tamaño o geometría de las partículas) o por los atributos del flujo. Así mismo, se ignora la relación entre la morfología y la dimensión del estancamiento, y el aspecto del objeto. Una de las situaciones específicas en las que dicho fenómeno se desarrolla, tiene lugar al interactuar una corriente granular con un objeto inmerso en ella (ver fig. 1.11). Aguas arriba del obstáculo, se crea una zona de estancamiento, mientras que tras el intruso, una *estela vacía* aparece.

La presencia de zonas de estancamiento en dispositivos empleados con frecuencia en aplicaciones industriales, así como en fenómenos naturales, motiva la reproducción experimental de dichas instancias. A menudo se describe a dichas regiones como inmóviles o *congeladas* y se piensa que no tienen una participación significativa en el flujo. Una explicación profunda de los mecanismos involucrados en la generación de dichas estructuras no se ha alcanzado, y los documentos que refieren su aparición, presentan apenas una descripción de su forma para circunstancias particulares. Otros autores han logrado propuesto modelos hidrodinámicos, realizando algunas idealizaciones, que pueden establecer la forma de dichas regiones, sin embargo, las reseñas que ofrecen son someras en cuanto a la transición entre flujo lento y rápido. Así mismo, no se ha contemplado la influencia -geométrica y dinámica- que tiene un intruso en el despliegue de un flujo de material granular.





Como se ha mencionado, en situaciones específicas el desarrollo de un flujo granular, propicia la aparición de zonas de estancamiento. Estas características estructurales están presentes en varios experimentos y arreglos industriales comunes. Los tambores giratorios poseen zonas de transición entre un sector de alta rapidez de deformación y un núcleo cuasiestático [32]. Así mismo, los colapsos de columnas granulares presentan mecanismos de interacción semejantes. En determinados contenedores y silos es deseable, regular la velocidad o impedir la formación de arcos en la boca de la descarga, introduciendo insertos de variadas geometrías y tamaños. El presente estudio se ocupa de la descripción de una zona estancada generada por un flujo denso que interactúa con una placa plana.

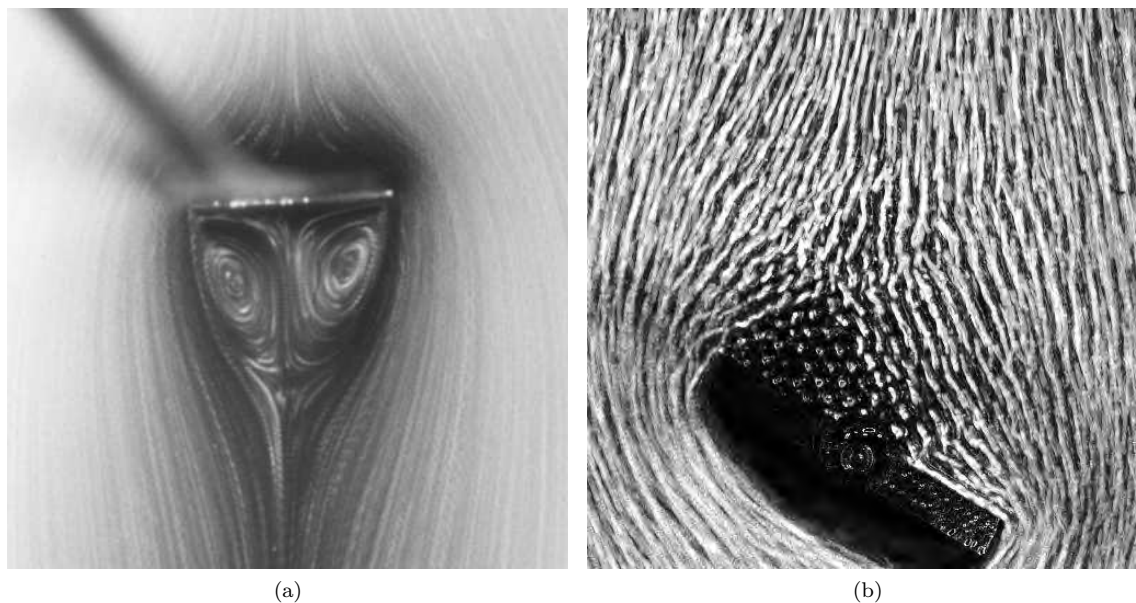


Figura 1.10: Flujo frontal sobre una placa plana. En el caso de un fluido newtoniano, (a), la interacción produce una zona de recirculación aguas abajo del obstáculo, tomado de [33]. Un flujo granular, (b), exhibe una zona de estancamiento por encima de la placa y un vacío en la parte posterior.

A diferencia de lo que ocurre con los fluidos “convencionales”, se presentan dos fenómenos que contrastan con este experimento clásico (fig. 1.10). Sobre el obstáculo se forma una pila de partículas que presentan un movimiento extremadamente lento en relación con la corriente circundante. Por otro lado, no se presentan vórtices aguas abajo de la obstrucción (fig. 1.10a), y por el contrario, se genera un vacío (fig. 1.10b). Históricamente, los primeros estudios sobre materiales granulares se concentraron en identificar la forma del flujo, y la fuerza que experimenta el objeto [34, 35, 36], sin tomar en cuenta la participación de la zona estancada. Más adelante, se notó la importancia de la predicción en la distribución de velocidad en el interior del contenedor, y su dependencia de la alteración que sufre el flujo.

Cabe mencionar que la mayoría de los experimentos y simulaciones numéricas en los que se estudia la interacción entre una corriente y un obstáculo, se efectúan en un flujo diluido [37, 38, 39]. El objeto que se emplea como intruso suele ser un cilindro. Esta configuración no ofrece una perspectiva de la influencia de la disposición angular del flujo respecto a la obstrucción. Con frecuencia, se admite que estas estructuras poseen una forma triangular, al igual que las pilas cónicas que produce el decantamiento de material granular sobre una superficie plana. De la misma forma, las primeras observaciones señalaban la poca participación de la zona de estancamiento en el flujo global, considerándola congelada.





Figura 1.11: Fotografía de larga exposición, mostrando la interacción entre un flujo granular y un cilindro. Nótese la zona de estancamiento y la región sin material aguas abajo. Tomada de Brennen, *Fundamentals of Multiphase Flow* [40], con permiso de R.H.Sabersky.

No obstante, algunas investigaciones recientes [41], han encontrado que aún las capas más profundas de dichas estructuras, no están del todo inmóviles y exhiben movimiento muy lento. De forma semejante, se ha visto que para un flujo diluido que interactúa con un objeto, el estancamiento exhibe una forma parabólica, dentro de la cual subyace una región aproximadamente triangular, marcando la transición entre los dos regímenes [42, 43]. Estas aseveraciones contradicen el enfoque tradicional bajo el que se estudiaban las zonas estancadas y ofrecen descripciones de la dinámica granular que las genera.

De acuerdo con estos planteamientos, las zonas de estancamiento exhiben -aunque pequeño- movimiento de las partículas que las forman. Las capas más externas y que marcan la transición entre flujo rápido y lento, muestran un perfil de velocidad no lineal [44]. Dentro de las regiones de atasco, la velocidad decae con la profundidad hacia valores pequeños que no son estrictamente iguales a cero.

# 2

## *Objetivo*

El propósito de este estudio es analizar el estancamiento generado por la interacción de una placa plana con un flujo granular. El primer objetivo es estudiar la movilidad de la zona de atascamiento, para diferentes condiciones de flujo de masa, longitud del obstáculo y orientación. Además, se analiza la morfología de la región estancada, tratando de establecer un criterio sobre su tamaño y prevalencia para condiciones de flujo determinadas. Con estas evaluaciones se pretende definir parámetros que permitan caracterizar la aparición de las mencionadas estructuras. Se busca establecer un criterio que permita diferenciar la región transitoria entre un flujo rápido y uno cuasiestático. Por otro lado, se intenta entender la naturaleza de las condiciones que impactan mayormente la formación de estancamientos. Se investiga una relación entre las propiedades materiales o los atributos del flujo con las cualidades del estancamiento. De igual manera, se analizan las implicaciones que esto tiene en el diseño de dispositivos y procesos que incluyen la manipulación de materiales granulares.

# 3

## *Metodología Experimental*

En esta sección se describe el dispositivo experimental empleado y su funcionamiento. De igual manera, se establecen las condiciones de ejecución experimental y los parámetros que se variaron durante las pruebas. Se expone brevemente la definición de variables características, especialmente la estimación de la velocidad promedio del flujo y su comparación teórica y experimental. Se reseña también, la técnica de visualización del flujo, así como la obtención y manipulación de datos usando rutinas computacionales. Finalmente se mencionan las etapas para la caracterización de parámetros de interés, relativos a la zona de estancamiento y las variables fundamentales del experimento.

### **3.1. Dispositivo y diseño experimental**

A fin de producir un flujo gravitacional cuasi bidimensional, se construyó un canal vertical de 1100 mm de alto, con una sección transversal rectangular de 300 x 50 mm, con cubiertas de vidrio. El canal está provisto de una bandeja de almacenamiento en la parte superior y una tobera de descarga en la parte inferior, que se cubre con una lámina delgada de tamaño  $A_h$  (fig. 3.1). En el centro del contenedor se coloca una placa sólida de longitud  $L_p$ , con una orientación determinada,  $\alpha_p$ . Ésta se sostiene con una varilla delgada que atraviesa tanto la placa como las paredes de vidrio del canal. A éste se introduce una masa cercana a los 30 kg de partículas esféricas de vidrio transparente de 3 mm de diámetro. Al retirar la cubierta de la tobera de salida, se produce un flujo inducido por gravedad, de velocidad media  $U_\infty$ , que interactúa con la placa y causa la formación de una zona de estancamiento en la parte anterior de ésta. En este experimento se emplearon tres tamaños de placa, cuatro diferentes aperturas y ocho posiciones angulares, distribuidas en dos etapas de experimentos que se describen con detalle más adelante.

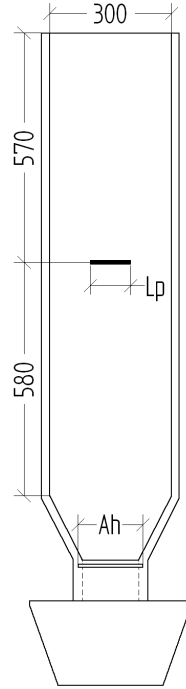


Figura 3.1: Canal de pruebas mostrando dimensiones relevantes en milímetros.

Además de las condiciones geométricas del canal de pruebas, la variable más importante para caracterizar este experimento es la velocidad promedio del flujo. A partir de la evaluación de esta cantidad es posible estimar el movimiento relativo de una zona de estancamiento y analizar su prevalencia para una serie de condiciones experimentales. A continuación se describe un modelo analítico, empleado con anterioridad [45] para cuantificar la velocidad de una corriente granular en un aparato experimental semejante al referido en este estudio.

La velocidad media del flujo, se calcula dividiendo el gasto volumétrico del flujo que se obtiene con cada apertura entre el área del canal. Midiendo el tiempo que una masa de esferas conocida tarda en evacuar el contenedor, es posible conocer el flujo másico,  $\dot{m} = m/t_d$ . El tiempo de descarga es una función de la apertura del canal,  $A_h$ . Para estimar el gasto volumétrico, basta dividir este valor entre la densidad del material granular, es decir  $\dot{Q} = \dot{m}/\rho$ . Recordando que la densidad efectiva se expresa como  $\rho_b = \rho_p \nu$ , y que el área del canal está dada por  $A = L W$ , la velocidad se obtiene como

$$U_\infty = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{m}{t_d \rho_p \nu_{RCP} L W} \quad (3.1)$$

donde  $\dot{m}$  es el flujo másico,  $\rho$  la densidad de las partículas,  $A = L W$  es el área transversal del canal y  $\nu_{RCP}$  es el factor de empaquetamiento máximo. Como ya se ha mencionado, se estima que el valor de este factor en flujo denso es de 0.64, sin embargo, no es constante durante el desarrollo del flujo, pues cambia debido al movimiento de las partículas, a su interacción con las paredes del canal y a las imposiciones del obstáculo. Esta es la razón por la que la ecuación (3.1) brinda una velocidad de descarga promedio. Como puede verse, la velocidad tiene una relación inversa con el tiempo de descarga.



Cabe señalar que esta velocidad, no es una función lineal de la apertura de descarga,  $A_h$ , como se puede apreciar en la fig. 3.2. Lo mismo ocurre con el tiempo de desalojo, que al igual que la velocidad de descarga, sigue una ley de potencias con la apertura del canal (fig. 3.2b). En la tabla 3.2 se muestra la duración del desalojo para diversos valores de apertura,  $A_h$ , y las velocidades,  $U_\infty$ , obtenidas con esta aproximación. Para relacionar la velocidad de vaciado con la apertura de la tobera se usa una función potencial que aproxima satisfactoriamente los datos experimentales.

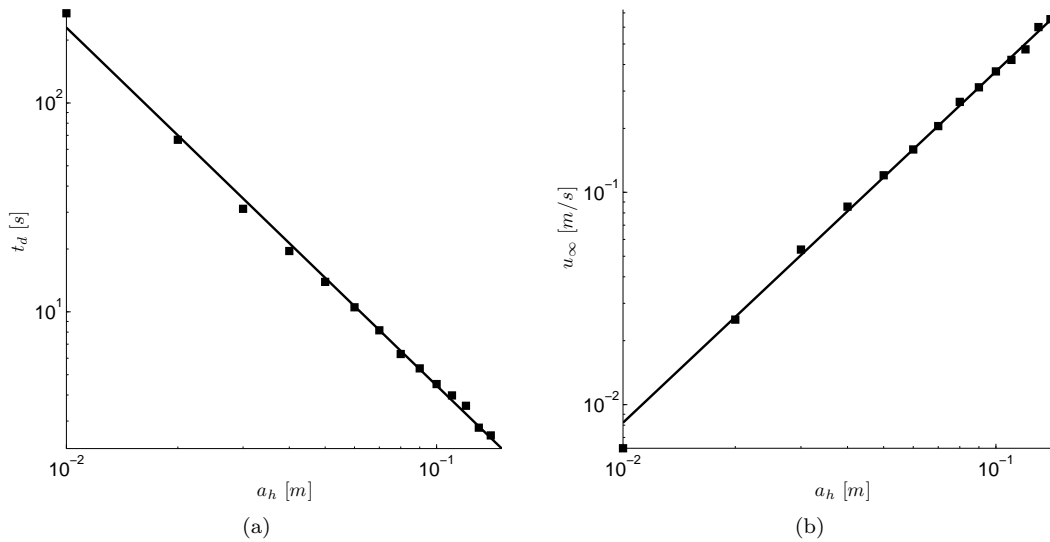


Figura 3.2: Comportamiento de (a) el tiempo de descarga y (b) la velocidad de descarga como función de la apertura del canal,  $A_h$ .

El diseño experimental comprendió dos etapas, ambas enfocadas en la exploración de los campos de velocidad y la variación de su magnitud en función de las aperturas del canal, la orientación del obstáculo y los distintos tamaños de la placa (Véase tabla (3.1)). En la primera fase **(I)** se usaron tres longitudes ( $L_p = 3, 5$  y  $10$  cm) para una posición horizontal (perpendicular al flujo). El objetivo primordial de estos ensayos es estudiar las variaciones de la magnitud de la velocidad en el campo de flujo y la caracterización de estos atributos como función de las variables características del experimento.

Posteriormente, en una segunda etapa **(II)**, se usó la placa de tamaño intermedio ( $L_p = 5$  cm) y el ángulo de ataque se modificó, desde la posición horizontal y hasta  $90^\circ$ , en incrementos de  $10$  y  $15^\circ$ . En esta fase se estudió con especial atención, el comportamiento del flujo y los campos de velocidad, en posiciones cercanas al ángulo de reposo, que se estima, para arreglos tridimensionales de esferas, en  $23.5^\circ$ [46]. Así mismo se estudia la ubicación del punto de menor velocidad en el campo, y la forma y tamaño de la zona de estancamiento.

		$A_h$ [cm]				
		5	8	11	14	
$\alpha_p$ [°]	0	3, 5, 10				<b>(I)</b>
	0, 10, 20, 30, 45, 60, 75, 90	5				<b>(II)</b>

Tabla 3.1: Longitud de placa ( $L_p$ ) en cm, utilizada en cada ensayo experimental.



### 3.2. Adquisición de Imágenes

Una cámara de alta velocidad, conectada previamente a un equipo de cómputo, se coloca frente al canal a la altura de la placa, teniendo un cuadro de visión de la región estancada encima de ésta. El origen del sistema de referencia,  $[x, y]$  se ubica en el centro de la placa. Para el primer régimen experimental, la región de interés es un cuadrado de aproximadamente 12 cm por lado, con uno de sus vértices ubicado en el centro de la placa (ver fig. 3.3a); esto debido a que se considera que el flujo es simétrico. La razón de mantener las dimensiones de la región de observación para todos los tamaños de placa disponibles es igualar el número de regiones de interrogación, permitiendo que éstas contengan, en promedio la misma cantidad de partículas. Para los experimentos en que el ángulo se modifica, la placa se observa completa en una región de aproximadamente 1.3 veces la longitud del obstáculo (ver fig. 3.3b), al estar alineada con la cámara en las diversas inclinaciones que se contemplan en el experimento.

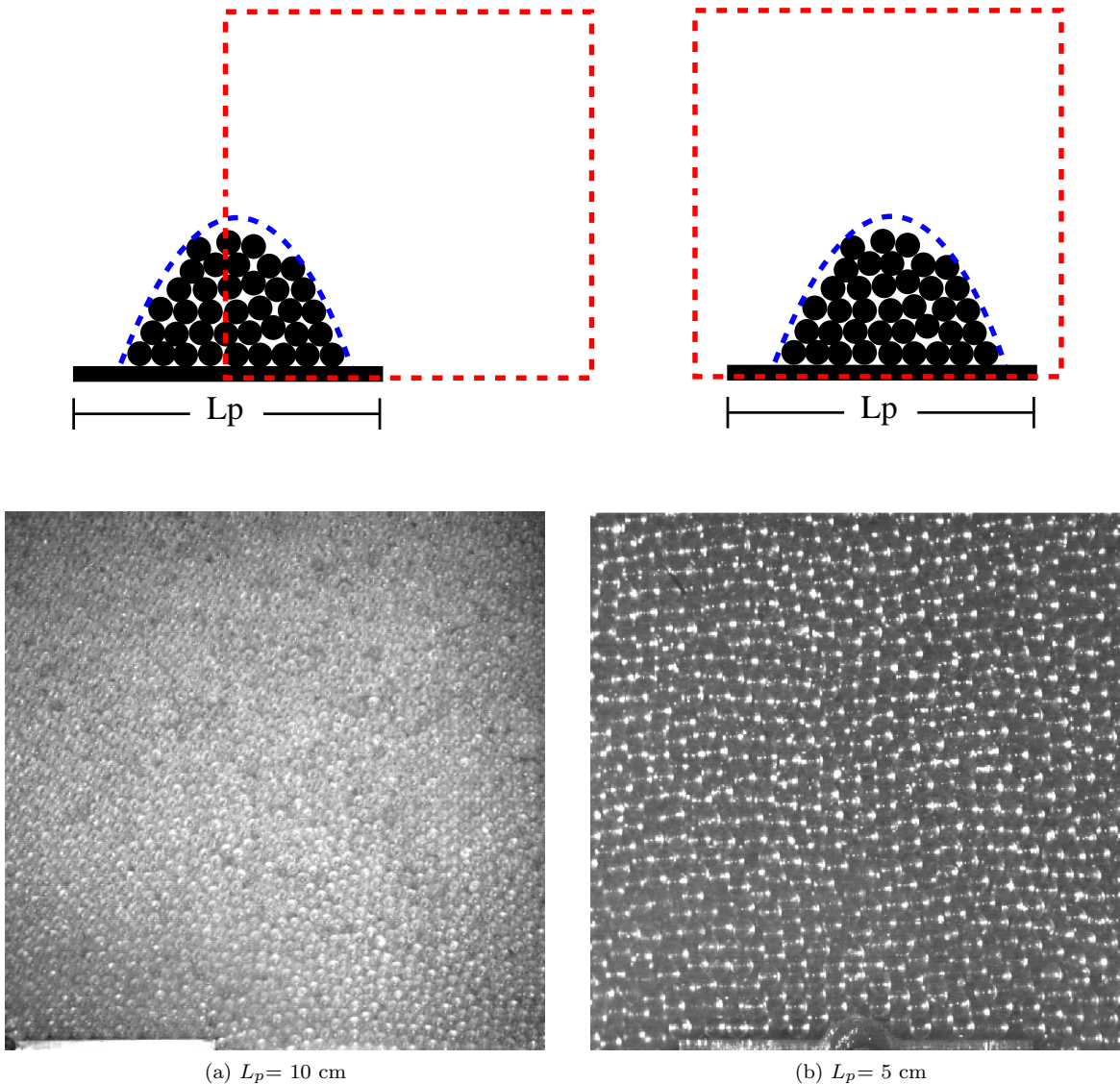


Figura 3.3: Ejemplos de las regiones de observación para la (a) primera y (b) segunda fase experimental.



Por cada uno de los eventos experimentales, se tomó una secuencia fotográfica de alta velocidad, a una tasa de 500 cuadros por segundo. Una vez adquirida dicha colección de imágenes, se utilizó una técnica de correlación cruzada -frecuentemente empleada en velocimetría por imágenes de partículas (PIV), descrita más adelante- para obtener los respectivos mapas de velocidad y temperatura granular. Estos datos numéricos son posteriormente tratados para deducir las curvas de velocidad en función de la posición,  $L^* = x/L_p$ , y la altura adimensionales,  $H^* = y/L_p$ , respecto a la placa. Además, con los datos obtenidos de las secuencias de la segunda etapa, se calcularon las curvas de isovelocidad y la ubicación del punto de estancamiento. Posteriormente, se analizó su progresión en el ámbito de la placa para diferentes velocidades del flujo y orientaciones de la placa. A pesar de la rotación impuesta a la placa durante la segunda etapa experimental, la cámara permanece alineada con la placa, con el objetivo de capturar el movimiento aguas arriba del obstáculo, ignorando la zona vacía formada.

### 3.3. Técnica de visualización

En este estudio se empleó una técnica de visualización de imágenes semejante a la de Velocimetría por Imágenes de Partículas (PIV). La técnica de PIV es un método de visualización, relativamente nuevo y ampliamente utilizado en varios ramos de la ciencia en la actualidad. A través de este sistema es posible estimar campos de velocidad instantáneos, a partir de los cuales se cuantifican otras variables de interés. El principio fundamental consiste en comparar pares de imágenes sucesivas del desarrollo de un fenómeno de rápida evolución. Conociendo el tiempo que transcurre entre las dos fotografías, y comparando las posiciones relativas entre puntos sobre las regiones de interés, se determina un campo de vectores de velocidad. En virtud de la celeridad con que se manifiestan dichos eventos, es común la utilización de una cámara (o más en el caso 3D) de alta velocidad, con la que se pueden capturar desde algunas decenas hasta miles de cuadros por segundo, dependiendo de la naturaleza del fenómeno a observar [47].

El uso de sistemas PIV en experimentos con materiales granulares puede prescindir de sistemas complejos de iluminación. Por los atributos ópticos de los granos -que suelen ser opacos- y su tamaño, es suficiente el uso de focos ordinarios o en su defecto, luz estroboscópica sustituyendo al láser pulsado [48]. Igualmente, es innecesario el uso de partículas trazadoras, y en su lugar pueden emplearse granos de otro color, tamaño o material [49, 50]. Para el experimento que se reporta se emplearon lámparas de LEDes con el fin de eliminar variaciones en la iluminación, surgidas de la naturaleza fluctuante de la corriente alterna. Tampoco se empleó otra clase de partículas, dado que no se efectuó seguimiento individual.

Por cada ensayo experimental (ver tabla 3.1) la adquisición de imágenes se efectúa durante 2 segundos, a una tasa de captura de 500 cuadros por segundo. Este procedimiento da como resultado una colección de 1000 fotografías por cada evento. La elección del periodo de observación se efectuó con base en los datos de la tabla 3.2. Para valores muy grandes de apertura de descarga en el canal, el tiempo de desalojo dura apenas unos pocos segundos. Para analizar todos los casos en el mismo lapso de tiempo y reducir la cantidad de fotografías individuales, se eligió el menor tiempo de vaciado del canal.

Existen dos métodos para obtener capturas en un sistema PIV: exposición simple a multicuadros (SFME) y multicuadro de exposición única (MFSE). La primera se refiere a la generación de un fotograma unitario a partir de la superposición de varias imágenes sucesivas. La segunda consiste en registrar en cada fotografía el





evento correspondiente a un tiempo determinado. Aunque la técnica a emplear depende de los requerimientos del experimento, la MFSE conserva el orden cronológico de las fotografías, eliminando las ambigüedades en la determinación del desplazamiento efectivo, surgidas del uso de SFME. En virtud de la naturaleza del experimento que se reporta, el orden de las fotografías no está gobernado por un mecanismo de disparo, es decir, el tiempo entre imágenes individuales y entre pares es igual.

El análisis de imágenes es la etapa siguiente a la captura. En la técnica de velocimetría por imágenes, no se estudia el movimiento individual de una partícula. La concentración de éstas puede resultar muy alta como para computar de manera certera el desplazamiento de cada una, además de que su tamaño y otros fenómenos ópticos harían muy compleja dicha labor. En vez de esto, se divide la imagen en un determinado número de áreas rectangulares, llamadas “áreas de interrogación”. El método para estimar el desplazamiento promedio de un área de interrogación entre dos instantes de tiempo se fundamenta en la correlación.

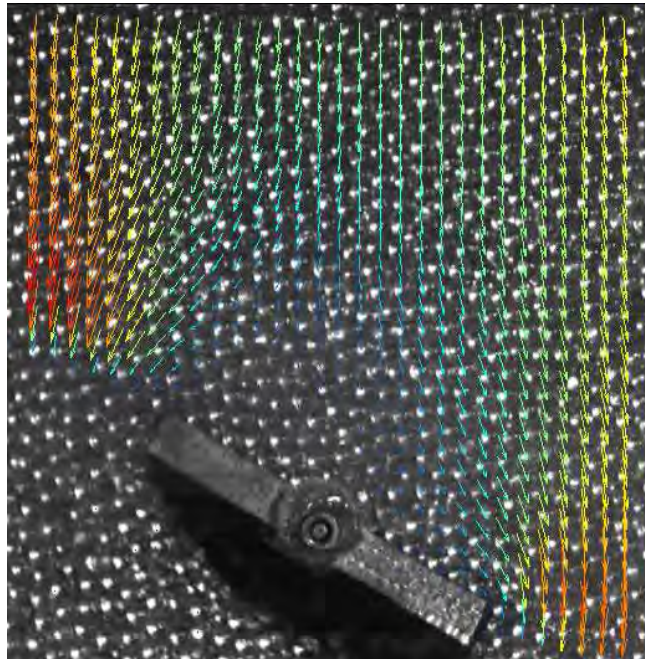


Figura 3.4: Superposición de un campo de vectores con la fotografía de origen.

La función de correlación mide la similaridad que tienen dos variables aleatorias entre dos instantes de tiempo. Si se analiza la correlación entre variables que representan la misma cantidad en instantes de tiempo diferentes, se habla de autocorrelación. Por otro lado, si las señales son distintas y se comparan en lapsos de tiempo iguales, se tiene entonces una función de correlación cruzada. En el tratamiento de imágenes digitales, se analizan las señales promedio de intensidad de los píxeles en escala de grises, entre dos instantes de tiempo. Al correlacionar cada región de interés, se obtiene la magnitud y dirección del vector desplazamiento. Conociendo el tiempo entre imágenes, se calcula el campo de velocidad promedio en el lapso referido (fig. 3.4). Para el experimento presente, las áreas de interrogación se componen de  $16 \times 16$  píxeles, con lo cual se tienen mapas de 1024 vectores sobre una imagen de  $512 \times 512$  píxeles.

Los vectores estimados con la correlación necesitan ser procesados estadísticamente. Las condiciones de obtención de imágenes así como los parámetros requeridos para su validación, no siempre pueden controlarse enteramente. Por esta razón pueden emerger errores en el dimensionamiento o la orientación de los vectores. Para validar las mediciones que arroja el método, existe una serie de algoritmos estadísticos descritos con detalle en la literatura que ofrecen los fabricantes [47, 51]. La tarea primordial de estos procedimientos, es retirar los datos que se hallen fuera de un rango y colocar en su lugar, otros obtenidos por ajuste de los valores circundantes aprobados. Una secuencia típica de filtrado incluye la verificación del valor puntual con respecto a un rango de velocidad, una validación de máximos (picos), seguida de un promedio de movimiento local antes de una verificación del campo completo.

### 3.4. Procesamiento de Datos

Una vez que se ha efectuado la captura fotográfica, se emplea paquetería especializada en el tratamiento de imágenes y la aplicación de la técnica PIV. Este procedimiento aplica el algoritmo de correlación a todas las imágenes de la secuencia. En este experimento las imágenes, con una resolución de 512 x 512 pixeles, se dividen en áreas de interrogación cada una de las cuales producirá un valor de velocidad. Tras la comparación y promediado entre pares de imágenes de la secuencia mencionada, se obtiene una lista con datos provenientes de cada área de interés. Dichas variables incluyen información sobre las componentes de velocidad en cada dirección, en m/s, y la ubicación del vector resultante, en escala de pixeles y milímetros (escaladas según un factor de aspecto); así mismo se registran valores estadísticos de estas cantidades. Estas listas contienen alrededor de 1000 entradas, dependiendo de la resolución de la rejilla de interrogación.

De los datos que arroja el algoritmo de correlación, se toman los valores para las componentes del vector velocidad,  $u$  y  $v$  en cada punto, mismas que revelan la magnitud de dicho ente a través de  $v_p = \sqrt{u^2 + v^2}$ . Estas cantidades deben ser adimensionalizadas en función de los parámetros característicos del experimento, concretamente, la velocidad media de descarga,  $U_\infty$ , calculada según la expresión (3.1). Usando la longitud de la placa  $L_p$ , como factor de escala, se define la longitud adimensional,  $L^* = x/L_p$  y la altura adimensional,  $H^* = y/L_p$ , así como la velocidad adimensional,  $V^* = v_p/U_\infty$ .

Con los valores de  $v_p$ , se construye un mapa escalar de la magnitud de la velocidad en la zona de estancamiento, según sea el caso experimental. Una vez escalada, la lista generada por el programa para análisis PIV, se reorganiza en un arreglo matricial con dimensiones iguales a las de la plantilla de regiones de interrogación, que puede visualizarse como una superficie de magnitud de velocidad. Véase que estas “superficies de respuesta” pueden interpretarse con la ayuda de las variables adimensionales previamente definidas. Para una posición  $[L^*, H^*]$  existe una magnitud de velocidad,  $V^*$ . Cada una de estas variables define uno de los ejes de la superficie mencionada anteriormente (ver fig. 3.5). El siguiente paso para la obtención de valores, consiste en realizar la estimación de las velocidades correspondientes a una serie de ubicaciones determinadas. Para ello es necesario realizar una interpolación entre datos de la matriz de  $V^*$ . Puesto que este arreglo está coordinado en números de renglones y columnas correspondientes a las zonas de interrogación, es necesario transformar las ubicaciones deseadas,  $[L^*, H^*]$ , en valores renglón-columna,  $[N_x, N_y]$ .

Para analizar el comportamiento de la velocidad en función de la posición, se extraen de estos mapas, los valores de  $V^*$  sobre ubicaciones de interés, siendo la principal, la línea de flujo para cada experimento. En



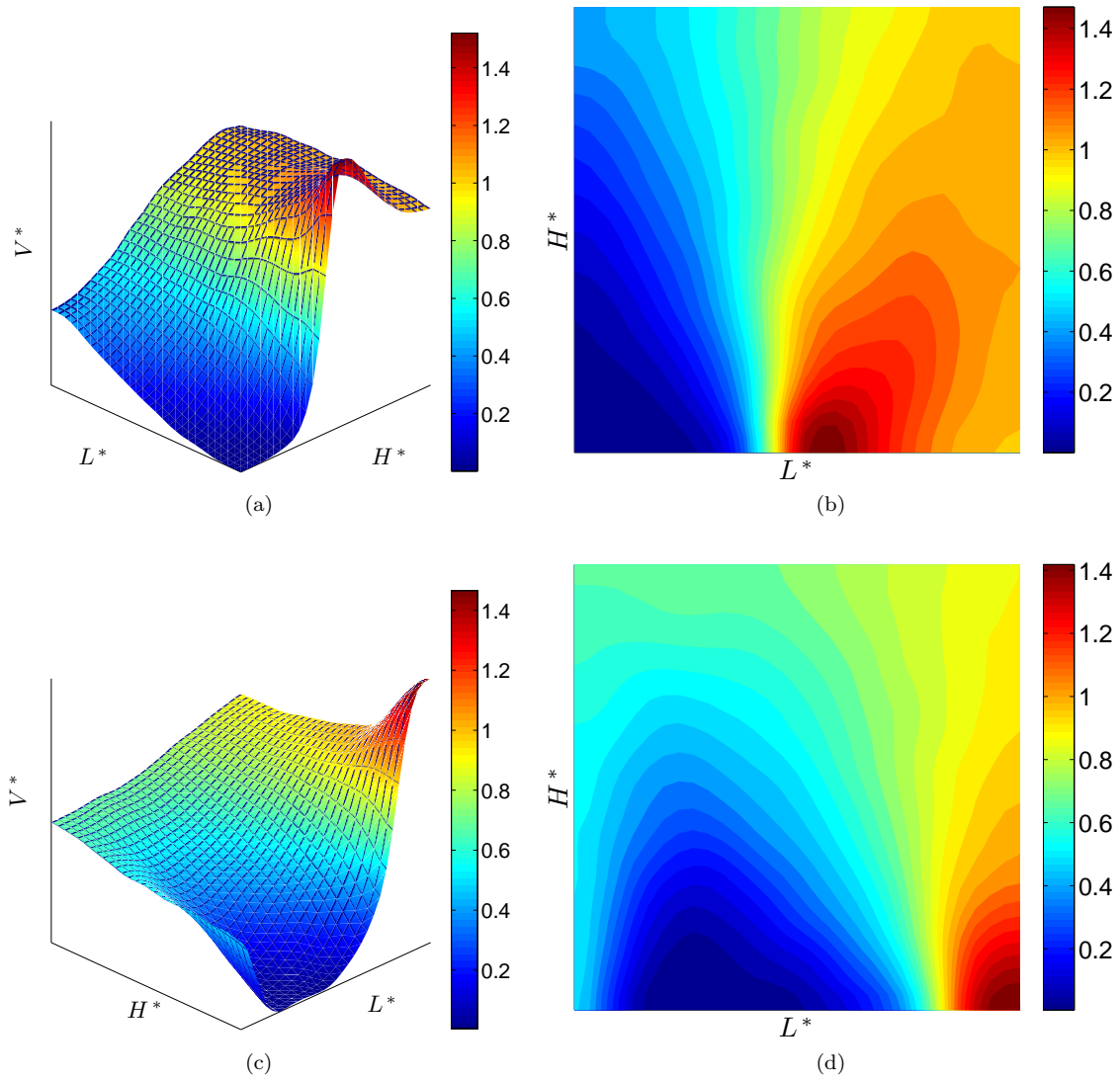


Figura 3.5: Forma típica de los mapas escalares, observados en modo (a) superficie y (b) contorno para un ensayo de las fases experimentales I y II.

los ensayos con la placa horizontal, dicha línea es colineal con la imagen, y se ubica en uno de los extremos del mapa de velocidades. Dada la alineación que se indujo tanto a la placa como a la cámara en la segunda fase de experimentos, la línea de flujo se sitúa en una recta que pasa sobre el centro de la placa con una alineación de  $90-\alpha$ °, donde  $\alpha$  corresponde a su orientación angular. Con ayuda de *software* especializado, se ejecuta un tratamiento de imágenes a cada orientación, en caso necesario, con el fin de ubicar los puntos sobre el mapa que componen la línea de interés.

Para los datos obtenidos de las secuencias fotográficas de la parte (I), el proceso consiste en tomar valores de velocidad en líneas paralelas a la placa (véase fig. 3.7a). En una superficie de magnitud de velocidad (fig. 3.5a) dichas líneas corresponden a planos que la intersecan a determinadas alturas (fig. 3.7b). Las ubicaciones de éstos, se calculan en función de la dimensión de la placa en la fotografía de origen, definiendo una serie de valores de  $H^*$ . Una vez que se conocen estas cantidades, se realiza la estimación de las velocidades para los planos deseados. Dado que su posición puede no corresponder a un valor en un renglón de la matriz, se debe



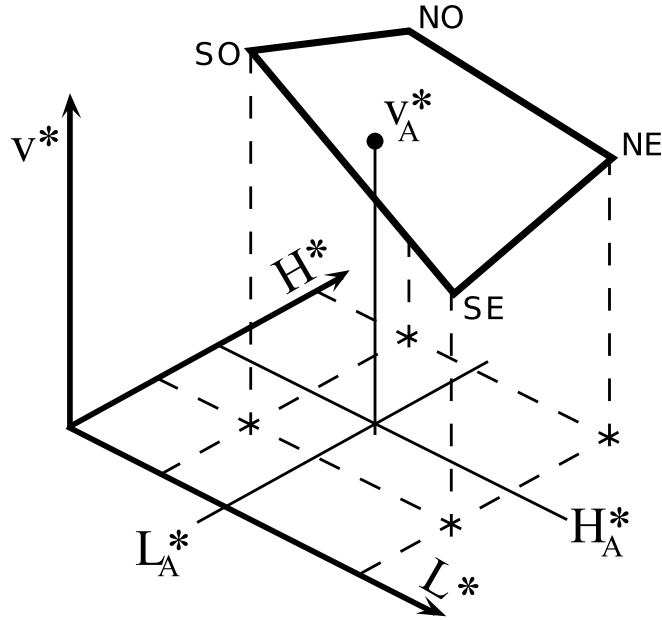


Figura 3.6: Esquema del procedimiento de doble interpolación lineal en torno del punto A.

interpolarse linealmente entre los puntos que sí se conocen. Así pues, las alturas adimensionales, se transforman en valores de renglón y se usan los datos vecinos para realizar la interpolación. Hecho lo anterior, se grafican las curvas del tipo  $V^* = V^*(L^*)$ , para distintos valores de  $H^*$ , mostradas en la figura (3.7c). La tendencia de estos valores puede apreciarse también en un eje logarítmico (fig. 3.7d). Dado que se analiza lo que sucede en el ámbito de la placa, los valores de velocidad que corresponden a posiciones de longitud mayores que el tamaño de ésta ( $L^* > 1$ ) son irrelevantes para la siguiente etapa. Para investigar el comportamiento de la velocidad en la zona estancada, se realiza un ajuste exponencial de los datos comprendidos en el dominio de la placa (fig. 3.7e), del tipo

$$V^*(L^*) = \mathbf{b} e^{\mathbf{A} L^*} \quad (3.2)$$

De este análisis surgen dos parámetros de interés: la velocidad en el centro de la placa  $\mathbf{b} = v^*(0)$  y el coeficiente de decaimiento de la velocidad,  $\mathbf{A}$ . Estas variables pueden obtenerse como la *ordenada al origen* y la *pendiente* para la “recta” de ajuste exponencial de cada valor de  $H^*$  (fig. 3.7f).

Los experimentos con la placa oblicua siguen un proceso de adquisición distinto. Empleando una rutina de programación semejante a la descrita anteriormente, es posible determinar en base a los datos de velocimetría, valores de velocidad en posiciones deseadas sobre una región de interés. En primer lugar, se importa la fotografía origen de la secuencia a través de la que se obtuvo el mapa de velocidades. Sobre la imagen, se eligen los puntos que corresponden a la posición del borde de ataque,  $x_a$ , y el de salida,  $x_b$ . Con estos valores, se puede estimar la ubicación del centro de la placa, a partir del cual se genera la línea que contiene los puntos de los que se extraen los valores de velocidad (ver fig. 3.8a). Estos puntos representan un valor de velocidad adimensional y corresponden a una ubicación sobre la línea central a una determinada altura adimensional,  $H^*$  (ver fig. 3.8b).



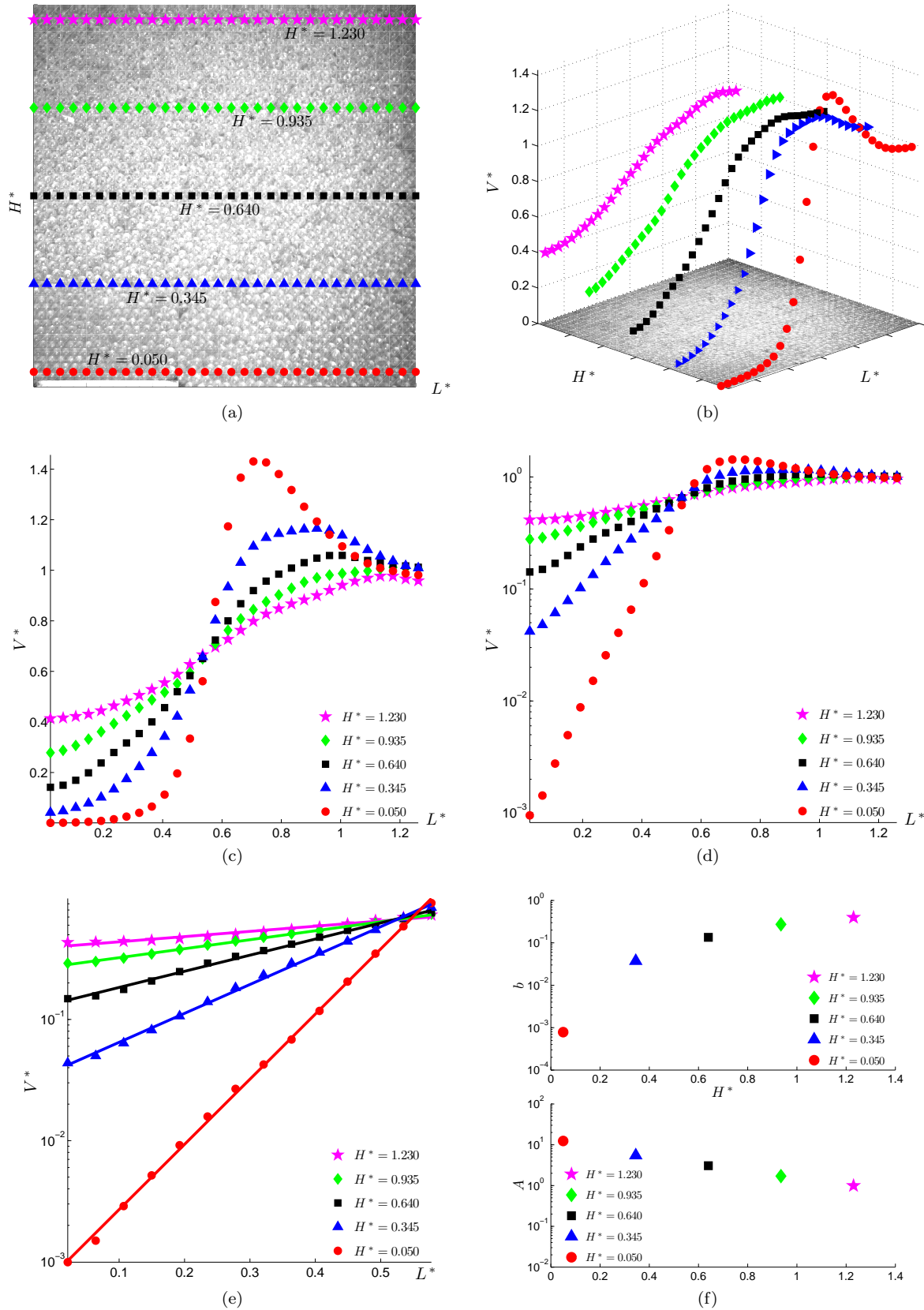


Figura 3.7: Proceso para estimación de curvas de velocidad adimensional vs altura adimensional.



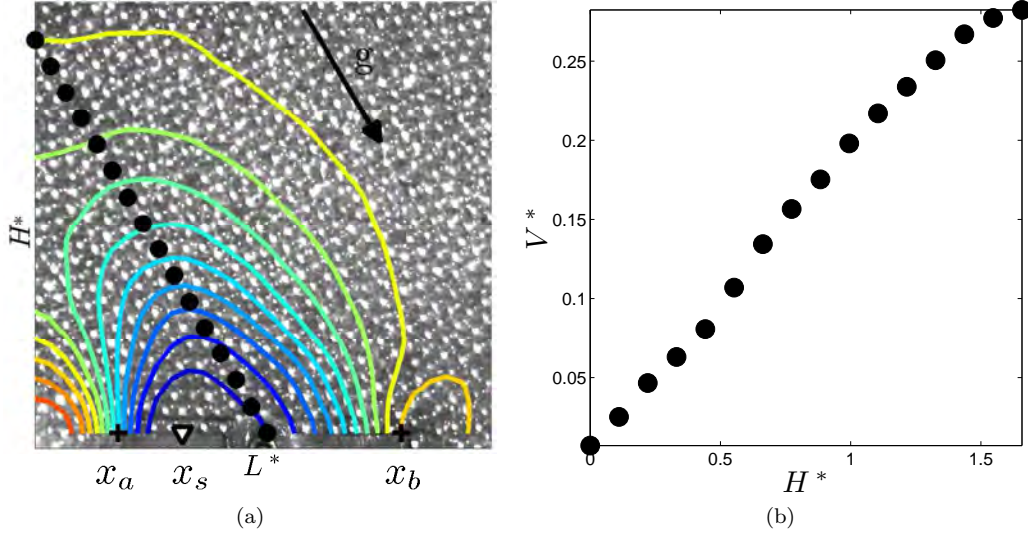


Figura 3.8: Procedimiento de adquisición de datos para las secuencias no horizontales.

Estos datos contienen un valor en píxeles, el cual se traduce, haciendo el escalamiento adecuado entre píxeles y milímetros, al valor renglón-columna que le corresponde en la matriz de datos. Dado que la posición en píxeles puede no coincidir exactamente con la posición en la matriz de datos, el valor de la velocidad al que corresponde una determinada ubicación, se obtiene a través de una interpolación doble usando los valores circundantes. Este procedimiento consiste en identificar cuatro puntos vecinos a la posición en cuestión, denominados noreste (NE), noroeste (NO), suroeste (SO) y sureste (SE), correspondientes a los renglones y columnas precedentes y siguientes al sitio buscado (ver fig. 3.6). Ya que estas posiciones poseen un valor de  $V^*$  conocido, se puede realizar una interpolación bilineal a partir de la ubicación incógnita. Una vez conocida dicha cantidad, se traduce entonces la posición renglón-columna a su respectivo valor  $L^*$  y  $H^*$ .

Además de observar el comportamiento de la magnitud de la velocidad sobre una determinada línea sobre el flujo, es de importancia estimar la colocación del punto de mínima rapidez con respecto a la placa. Para ello se localiza el punto mínimo en el plano más cercano. Tomando dos valores conocidos adyacentes a cada lado del mismo, se puede construir una curva de ajuste que ofrecerá un valor y una ubicación certera. Considerando que la placa posee una longitud,  $L_p$ , y que el punto de estancamiento tendrá una posición  $x_s$ , la razón entre estas dos cantidades se estima como

$$p_s = \frac{L_p - x_s}{L_p} \quad (3.3)$$

El valor de  $p_s$  se evalúa para cada ensayo experimental, es decir, para cada velocidad de descarga,  $U_\infty$  y ángulo de ataque de la placa,  $\alpha_p$ . Por otro lado se calculó, a través del manejo de rutinas computacionales, la forma y el tamaño aproximados del área de estancamiento, para diversos valores de velocidad de descarga,  $U_\infty$ , y ángulo de oposición,  $\alpha_p$ , considerando fracciones de la velocidad adimensional,  $V^*$ . Con estas cantidades se construyen curvas que muestran al tamaño de la zona de estancamiento como una función de la orientación de la placa, como se muestra en la fig. 3.9a. Para comparar cualitativamente dicho atributo, se representa con una línea punteada, una semicircunferencia de diámetro  $L^*$ . En relación al tamaño de la región, este puede estimarse calculando el área,  $A_{ze}$ , que tiene un perfil, correspondiente a una fracción de la velocidad adimensional,  $V^*$ . El valor de escalamiento para este caso, corresponde al área del semicírculo,  $A_{circ}$ , que representa la línea punteada mencionado anteriormente. Un breve ejemplo del análisis descrito se muestra en la fig. 3.9b.



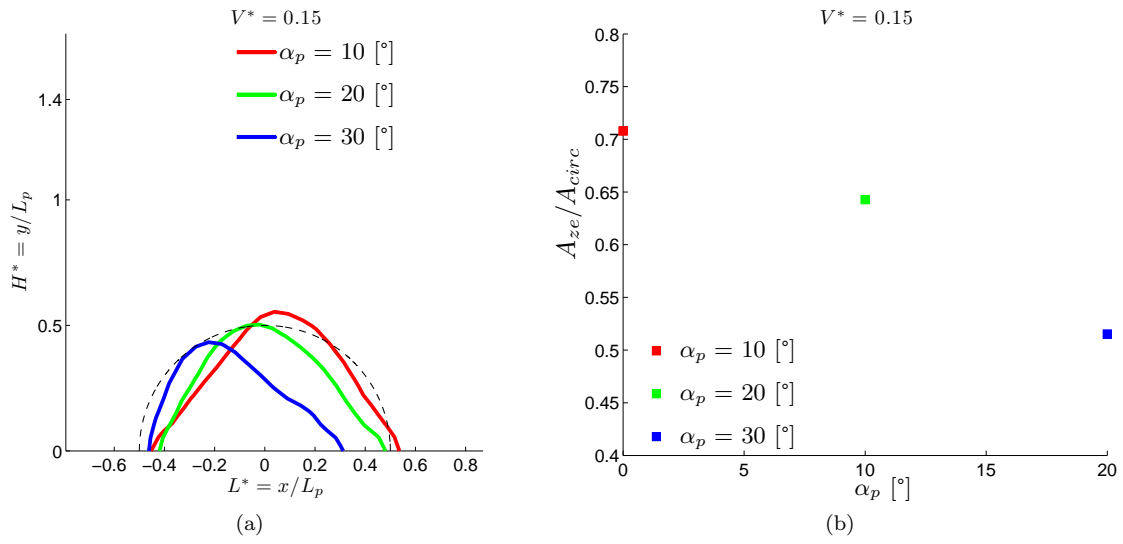


Figura 3.9: Diagrama simplificado mostrando las etapas para la estimación de la forma y el tamaño aproximado de una zona de estancamiento, para una porcentaje de  $V^*$  y una determinada  $U_{infty}$  con diversos ángulos de orientación de la placa,  $\alpha_p$ .



### 3.5. Validación experimental de la velocidad de descarga

Considerando que la interacción de la placa en posición paralela al flujo ( $\alpha_p = 90^\circ$ ) es poco significativa, la velocidad media de descarga puede estimarse de forma alternativa a partir del análisis de imágenes de dichas pruebas experimentales. Para ello, es posible emplear las secuencias de la placa de tamaño intermedio, colocada en dirección del flujo, y sometida a todas las aperturas de descarga, de la fase experimental **(II)** (ver tabla 3.1). Con el fin de garantizar la validez de los datos empleados, se requiere comparar los valores de velocidad obtenidos mediante la técnica de PIV con los estimados mediante el modelo analítico que se propone.

Como se mencionó previamente, las fotografías con resolución de 512 x 512 píxeles se dividen en 1024 regiones de 16 x 16 píxeles, cada una de las cuales contendrá un dato de  $v_p$ . Si se asume que la velocidad de descarga en un flujo no perturbado es homogénea en todo el campo, un valor medio puede obtenerse observando un histograma de dicha variable. En la fig. (3.10) se muestran dichas construcciones estadísticas para las cuatro aperturas de descarga empleadas, considerando 1024 datos. La medida de tendencia central elegida para determinar el valor de velocidad de descarga del flujo según los datos de PIV es la media. Este dato se asume entonces como la magnitud de la velocidad del flujo. Estos resultados se usarán como referencia para el seguimiento de este experimento y se muestran en la tabla 3.2. Una versión gráfica de la comparación de estos valores con los obtenidos por la aplicación del modelo analítico se muestra en la fig. (3.11).

$A_h$ [m]	$t_d$ [s]	$U_\infty$ [m/s] [52]	$U_\infty PIV$ [m/s]
0.01	268.96	0.006	
0.02	66.62	0.025	
0.03	31.15	0.053	
0.04	19.56	0.085	
0.05	13.92	0.120	0.121
0.06	10.52	0.159	
0.07	8.16	0.205	
0.08	6.28	0.266	0.232
0.09	5.36	0.312	
0.10	4.51	0.371	
0.11	3.98	0.420	0.429
0.12	3.55	0.471	
0.13	2.79	0.600	
0.14	2.56	0.654	0.652

Tabla 3.2: Tiempos de descarga para diversas aperturas de compuerta mostrando las velocidades respectivas. Resultados para la rapidez promedio de descarga del canal,  $U_\infty$ , estimados a partir del análisis estadístico de los datos numéricos obtenidos por medio de la técnica de PIV.





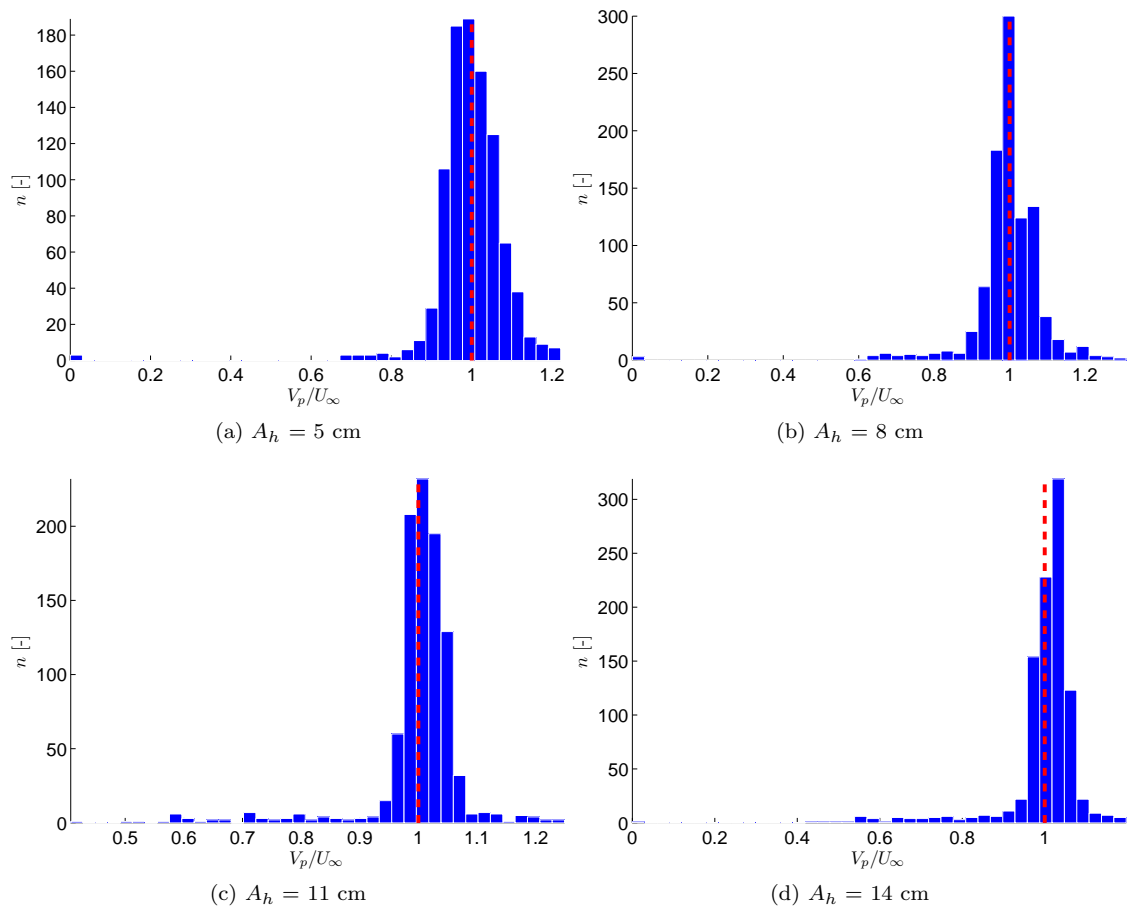


Figura 3.10: Histogramas para la magnitud de la velocidad sobre un área de interrogación de  $31 \times 31$  regiones, para la secuencia fotográfica de la placa colocada a  $\alpha_p = 90^\circ$ , sometida a cada una de las aperturas de descarga,  $A_h$ .

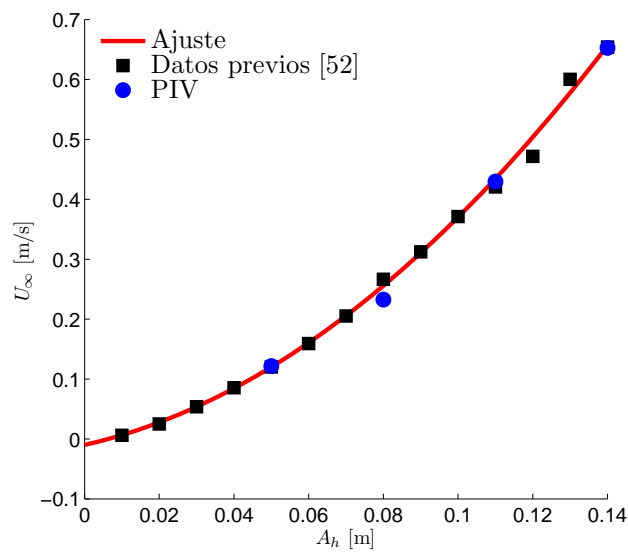


Figura 3.11: Comparación de los datos de PIV con los datos obtenidos [52], a través del modelo teórico propuesto (ec. 3.1)



# 4

## *Resultados*

En esta sección se muestran los resultados del procesamiento digital de imágenes aplicando el algoritmo de correlación a las secuencias fotográficas obtenidas en cada una de las etapas de experimentación. Como se ha descrito, la primera fase considera pruebas de velocidad sobre tres placas de diferente tamaño dispuestas en posición transversal al flujo. El objetivo de esta fase es describir la influencia dimensional del obstáculo para diferentes condiciones dinámicas. Se describen los mapas de escalares de la magnitud de la velocidad y la temperatura granular, para las tres placas y las cuatro velocidades de flujo empleadas. Del tratamiento de dichos datos se desprende el análisis de la velocidad sobre la línea central del canal y la descripción de los parámetros de estructura.

El segundo escenario experimental reseña la influencia de la orientación de la placa con respecto al flujo. Se muestran los mapas escalares de magnitud de velocidad y temperatura granular para la placa de tamaño intermedio sometida a diversas orientaciones angulares y rapidezces de vaciado del canal. Se expone también la variación de la magnitud de la velocidad sobre la línea central de canal, para diferentes posiciones angulares y aperturas de descarga. Se describe la posición del punto de mínima velocidad como función del ángulo de la placa respecto al flujo y su velocidad promedio.

Se estudia también la morfología de la zona de estancamiento como una función de la posición angular, la rapidez media de desalojo y el porcentaje respecto a la velocidad adimensional. Finalmente, se detalla la evaluación del tamaño de esta estructura y su comparación con un valor de área definido por la longitud de la placa. Se analiza el comportamiento de estos dos parámetros a través de un modelo geométrico sencillo y se compara con los datos experimentales. El desarrollo de dicho modelo se detalla en los apéndices de este trabajo.

## 4.1. Fase I: Efecto del tamaño de la placa

De acuerdo a lo establecido en las condiciones del experimento, la primera fase incluyó pruebas para flujo frontal, usando placas de longitudes,  $L_p$ , de 3, 5 y 10 cm y aperturas de descarga,  $A_h$ , de 5, 8, 11 y 14 cm. En las figs. 4.1 y 4.2 se presenta el aspecto de los campos adimensionales de velocidad y temperatura granular correspondientes a la placa de menor y mayor tamaño,  $L_p = 3$  y 10 cm, sometidas a la velocidad mínima y máxima del flujo. Estos datos se obtuvieron a partir de secuencias de imágenes que visualizan la mitad de la placa, asumiendo simetría en el flujo. La suma de las imágenes de analizadas se observa en la fila inferior de dichas figuras.

Puede verse en general que los campos de magnitud de velocidad muestran una región de baja intensidad (evidenciada por los colores fríos) encima de la placa. Por otra parte, en el extremo de ésta se observa una zona de alta velocidad, superando la velocidad de desalojo en cerca de 30 %. La zona de estancamiento exhibe una forma triangular en sus capas más internas y muestra un perfil que se aproxima a una parábola a medida que transita hacia valores más altos de velocidad. La influencia del obstáculo es significativa en la región observada en ambos casos e induce importantes gradientes de velocidad. El tamaño de la región de alta rapidez, apreciable en el extremo de la placa, se incrementa conforme aumenta la velocidad de descarga. Esta variación morfológica no se observa en la región de estancamiento.

En la fig. 4.3, se muestra el valor de los parámetros de estructura,  $\mathbf{b}(H^*)$ , la velocidad en la línea central de flujo y  $\mathbf{A}(H^*)$ , el coeficiente de decaimiento de la velocidad, calculados para los tres tamaños de placa. La velocidad en el centro de la placa (fig. 4.3a) muestra crecimiento con la altura, tendiendo a un valor aparentemente constante a alturas mayores. En los tres casos, la tendencia de crecimiento de este valor se modifica para una altura crítica, a partir de la cual el efecto del tamaño del obstáculo es menor. Para cada valor de  $L_p$ , la tendencia de todas las curvas es semejante sin importar la rapidez del flujo empleada. Los cambios en la tendencia de crecimiento, así como la magnitud de las variaciones son mayores si la placa es más larga ( $L_p = 100$  mm).

Por otro lado, en la fig. 4.3b se muestra el cálculo del coeficiente de decaimiento de la velocidad,  $\mathbf{A}$ . Cabe recordar que esta cantidad representa la variación transversal de la velocidad en planos paralelos a la placa, entre el centro y el extremo de ésta. Esta variable muestra una relación exponencial decreciente con la altura respecto a la placa y exhibe un comportamiento aparentemente ajeno a la velocidad del flujo. En un plano cercano a la placa, el decaimiento de la velocidad muestra una variación mayor. Para este valor no es posible apreciar un cambio de tendencia a partir de una altura crítica. Al igual que el parámetro anterior, las variaciones más dramáticas se presentan para la placa de mayor tamaño ( $L_p = 100$  mm).

Cabe señalar que en todos los casos,  $\mathbf{b}$  tiende al valor de 1 conforme se incrementa la altura. Este comportamiento sugiere la existencia un valor de altura crítico para el cual el flujo no se ve perturbado por la presencia del obstáculo. De la misma manera, el coeficiente de decaimiento,  $\mathbf{A}(H^*)$ , se aproxima a cero para un valor determinado de altura respecto a la placa, evidenciando el mismo fenómeno. A partir de los datos mostrados, para  $H^* > 1$  no hay alteración significativa en las características iniciales del flujo.



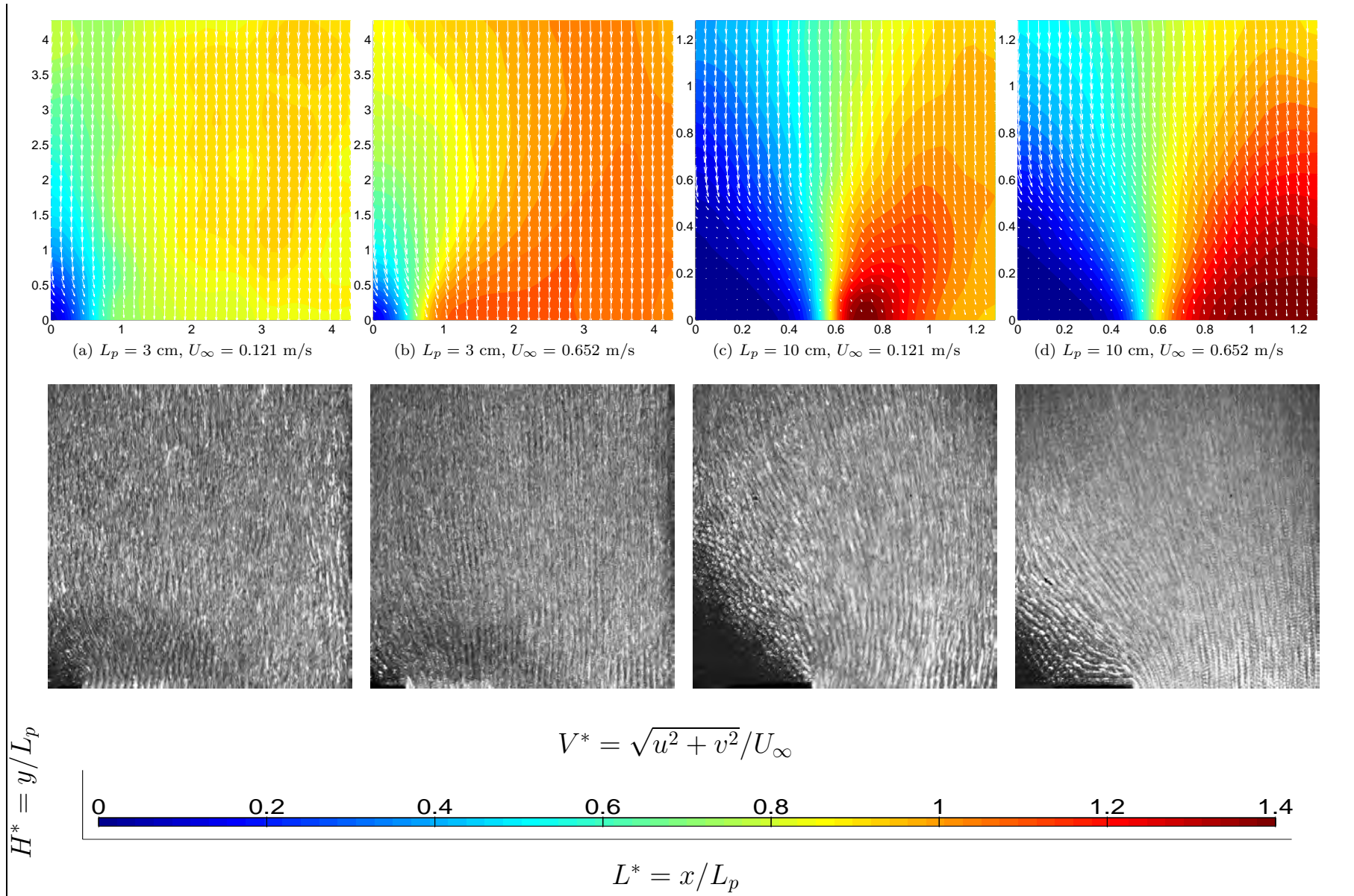


Figura 4.1: Mapas de magnitud de velocidad para las diferentes aperturas de descarga,  $A_h$  y tamaños de placa  $L_p$ .

$H^* = y/L_p$

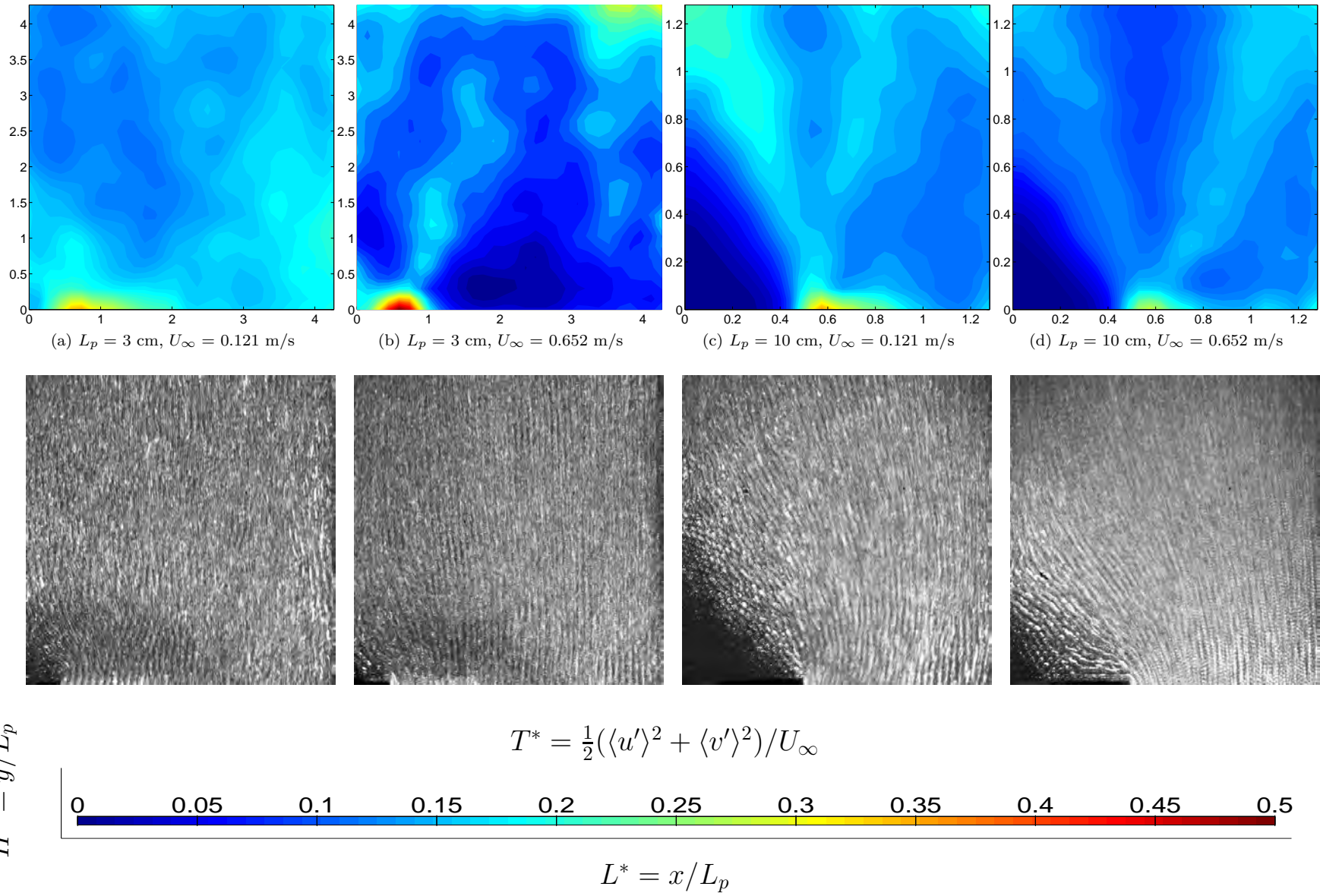


Figura 4.2: Mapas de temperatura granular para las diferentes aperturas de descarga,  $A_h$  y tamaños de placa  $L_p$ .



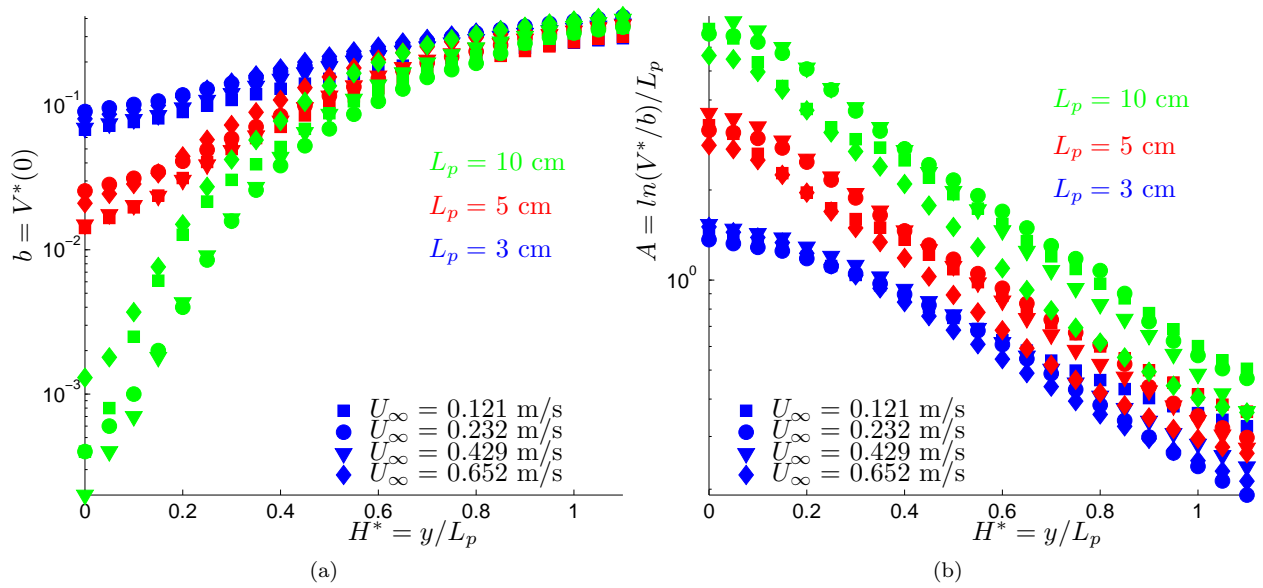


Figura 4.3: Curvas de velocidad central (ordenada al origen) y decaimiento exponencial (pendiente) para los tres tamaños de placa y las cuatro velocidades de descarga del canal.



## 4.2. Fase II: Efecto de la orientación de la placa

En la segunda parte del experimento, se utilizó la placa de tamaño intermedio ( $L_p = 5$  cm) para analizar el efecto del ángulo de ataque de la placa, en la forma y magnitud de los campos de velocidad y temperatura granular. Para esta parte del análisis se usaron las mismas aperturas del canal,  $A_h$  (5, 8, 11 y 14 cm) para varios ángulos,  $\alpha_p$  (0, 10, 20, 30, 45, 60, 75 y 90°). En las figs. 4.4 y 4.5 se muestran los mapas de magnitud de velocidad y temperatura granular para la mínima velocidad de descarga y algunos valores seleccionados de orientación. En la fila inferior de las figuras mencionadas se observa la suma de imágenes de las secuencias empleadas.

Se observa en las figs. 4.4a a 4.4d que el perfil de la zona estancada, cambia su forma y tamaño conforme varía el ángulo de ataque. Como se describió antes para una posición horizontal, el estancamiento tiene una apariencia triangular con un reborde redondo. A medida que crece el ángulo de oposición, la cúspide se orienta hacia el borde de ataque. El contorno preserva su tamaño hasta un determinado valor de orientación, a partir del cual la velocidad del flujo comienza a hacerse homogénea. La forma del campo de flujo se altera de manera significativa ante la presencia del obstáculo. Este efecto puede verse tanto en las fotografías de larga exposición, como en los campos de vectores superpuestos a los contornos cromáticos. Los mapas de velocidad muestran un descenso significativo de dicha magnitud encima del obstáculo. A partir de la magnitud de la velocidad en el estancamiento se deduce que la movilidad de las partículas aumenta como función del ángulo de oposición. Se observan importantes gradientes de velocidad en los extremos de la placa ( $L^* = -0.5$  y  $0.5$ ), donde existen zonas con valores de velocidad superiores en 30 % a  $U_\infty$ , para  $\alpha_p$  pequeños. La reducción en la velocidad se atenúa para valores de  $\alpha_p$  mayores a 45°.

En los mapas de temperatura granular (figs. 4.5a a 4.5d) se observa la presencia de una zona de baja intensidad en la vecindad de la placa. Se aprecian puntos con alto valor de temperatura en los extremos del obstáculo. A diferencia de la magnitud de velocidad, la temperatura granular muestra un aspecto fluctuante. La intensidad en las fluctuaciones de  $T^*$  se reduce con el incremento en el ángulo de oposición. A partir de este hecho, se evidencia la desaparición de la zona de estancamiento para un ángulo de oposición crítico, que produce un campo de temperatura granular homogéneo. En cuanto a la morfología, las regiones de menor intensidad muestran un perfil irregular, aunque preservan una base ancha que se reduce con la altura como los perfiles de magnitud de velocidad.





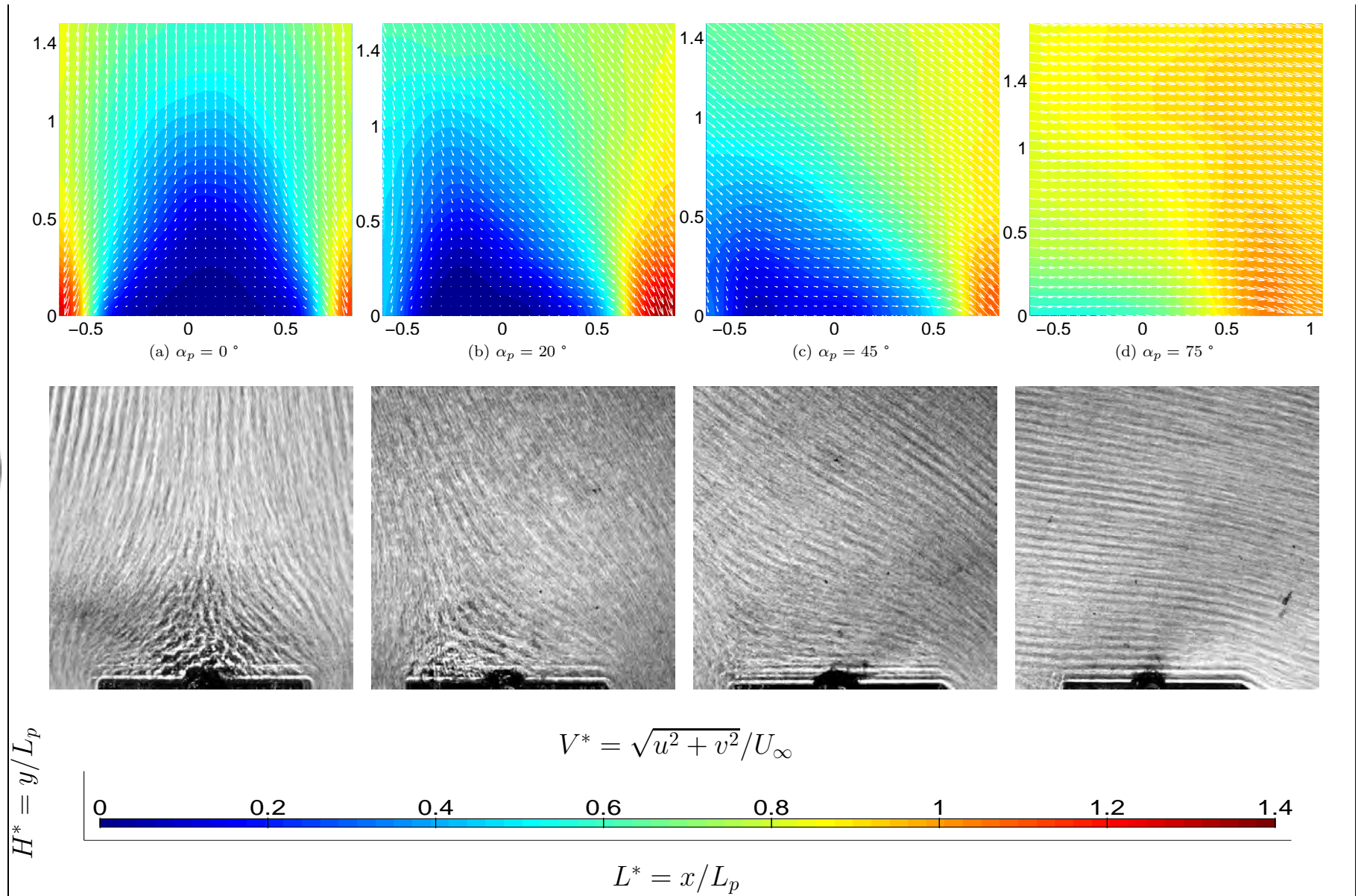


Figura 4.4: Mapas de magnitud de velocidad para las diferentes orientaciones angulares,  $\alpha_p$ , y una velocidad de descarga,  $U_\infty = 0.121$  m/s.



$H^* = y/L_p$

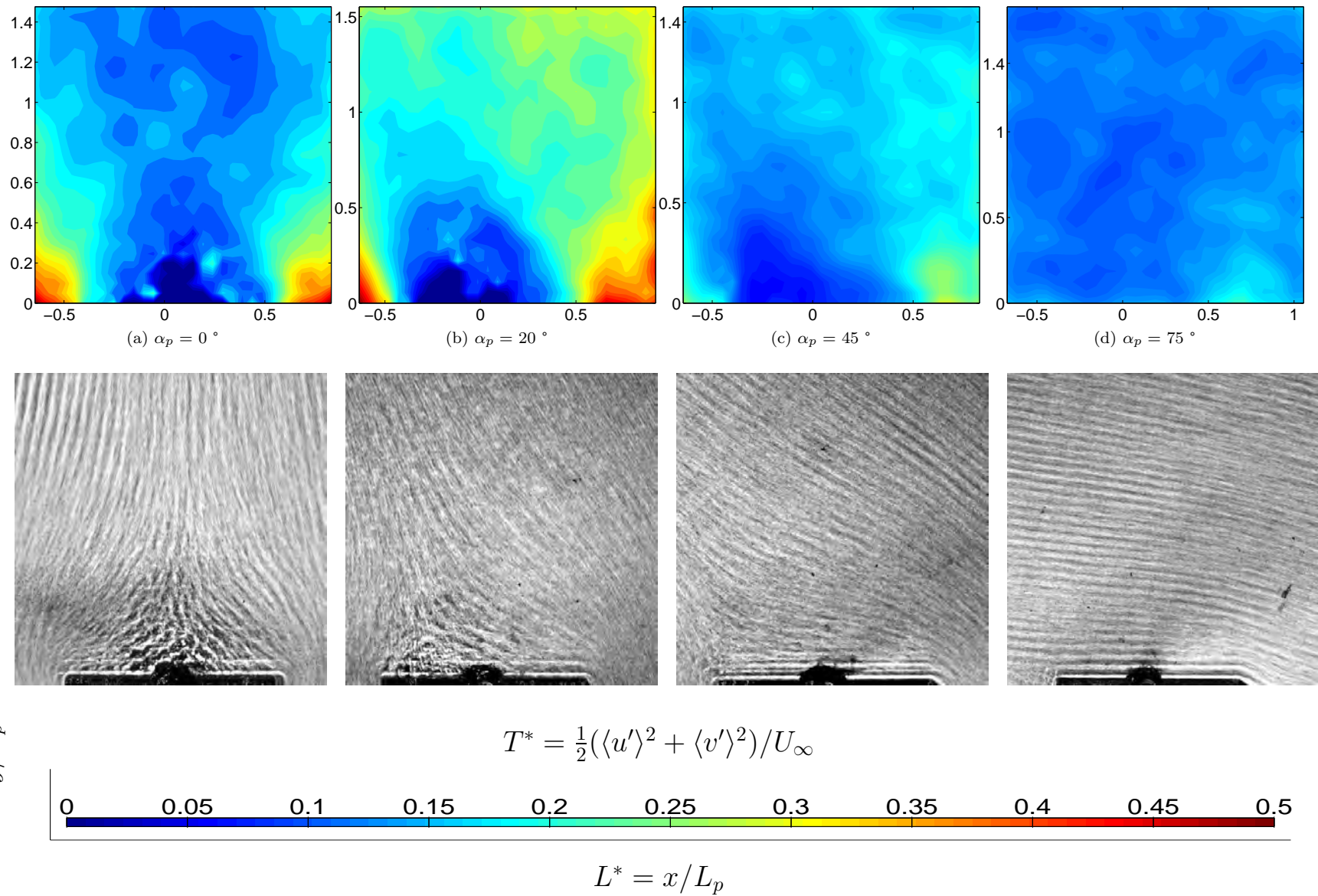


Figura 4.5: Mapas de temperatura granular para las diferentes orientaciones angulares,  $\alpha_p$ , y una velocidad de descarga,  $U_\infty = 0.121$  m/s.



En la fig. 4.6 se observan las curvas de velocidad vs altura adimensional. Se muestran los datos para las cuatro tasas de flujo de masa y orientaciones de placa seleccionadas. Cabe mencionar que estos valores se toman sobre la línea central del flujo. Se aprecia que la velocidad crece con la altura sobre la placa. Este aumento muestra dos tendencias a partir de una altura crítica, comportamiento que es más notable para valores pequeños de  $\alpha_p$ . La orientación de la placa tiene un efecto sobre la variación de la magnitud de la velocidad. Mientras más cercano a cero es el ángulo, más dramática será la reducción. Al igual que en el caso de flujo frontal, las perturbaciones más notorias se encuentran para una altura crítica. A partir de los datos que se analizan, puede estimarse que dicha altura corresponde a  $1.5 L_p$  aproximadamente. Para todas las ensayos experimentales mostrados, la influencia de la velocidad del flujo es menor.

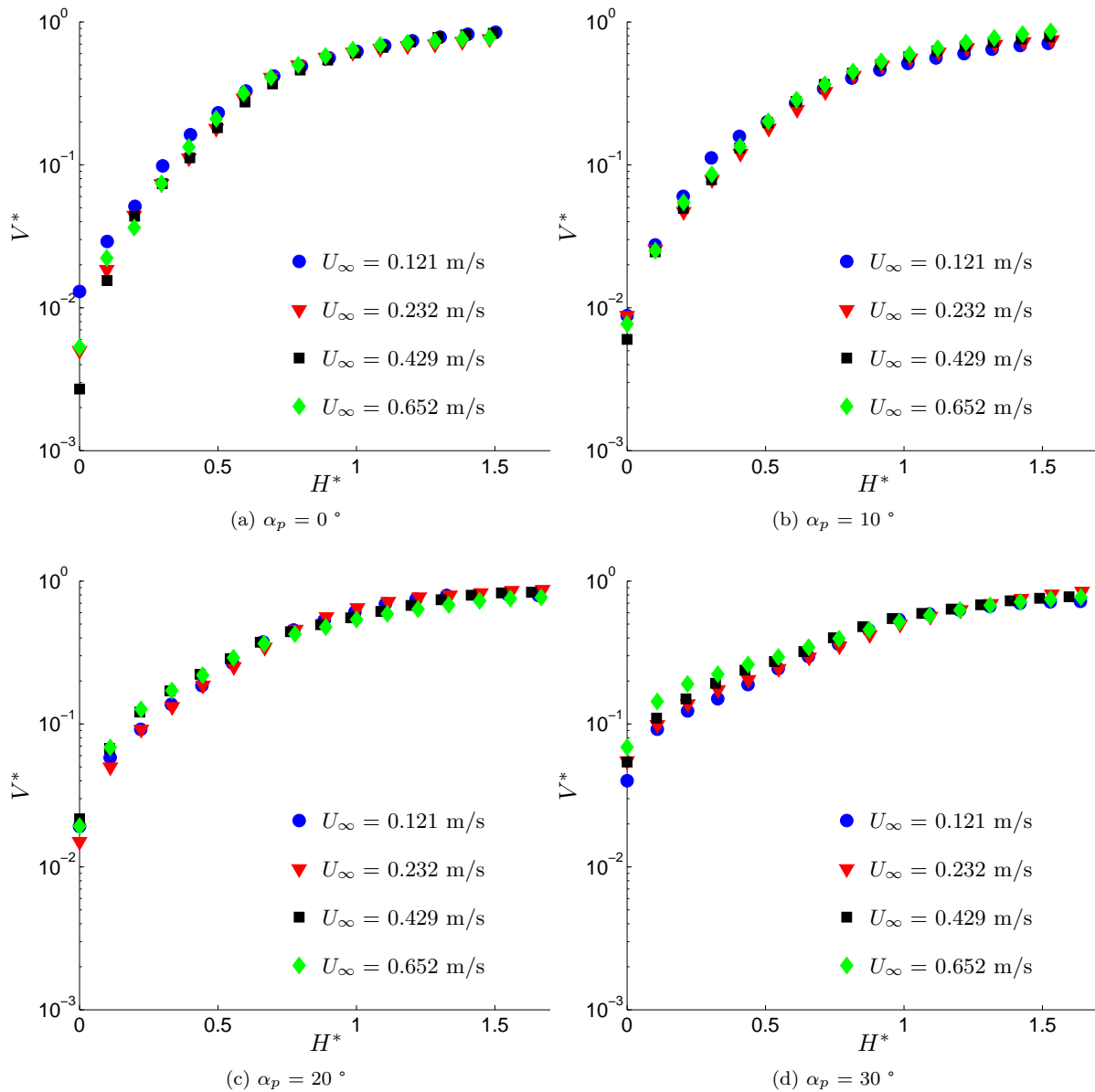


Figura 4.6: Curvas de altura adimensional,  $H^*$ , contra velocidad adimensional,  $V^*$ , para cuatro diferentes orientaciones angulares,  $\alpha_p$ . En todos los casos se muestra poca influencia de la velocidad de descarga y la tendencia de decaimiento para posiciones cercanas a la placa. A medida que el ángulo crece, el decaimiento desaparece, tendiendo a la velocidad media de descarga ( $V^* \sim 1$ ).



### 4.3. Morfología del estancamiento

En la fig. 4.7 se muestra el comportamiento del punto de mínima velocidad como función de la orientación y el flujo de masa. Se observa en general un crecimiento en la ubicación sobre la placa, migrando desde el centro hacia el borde de ataque a medida que la inclinación de la placa tiende a la vertical. La ubicación del punto de estancamiento sigue dos tendencias de crecimiento, diferenciables a partir de un valor crítico de posición angular. Por debajo de este valor se aprecia un pronunciado desplazamiento del punto de estancamiento. Para ángulos mayores al valor crítico, la proporción de desplazamiento se atenúa y los datos muestran una mayor dispersión. Este cambio en el ritmo de crecimiento se sitúa en torno del rango típico del ángulo de estabilidad dinámica del material usado. Nuevamente se observa independencia de la tasa de desalojo del canal. La tendencia de crecimiento en la posición relativa del punto de estancamiento se aproxima al comportamiento descrito por el modelo de posición del punto de estancamiento (ver apéndice A).

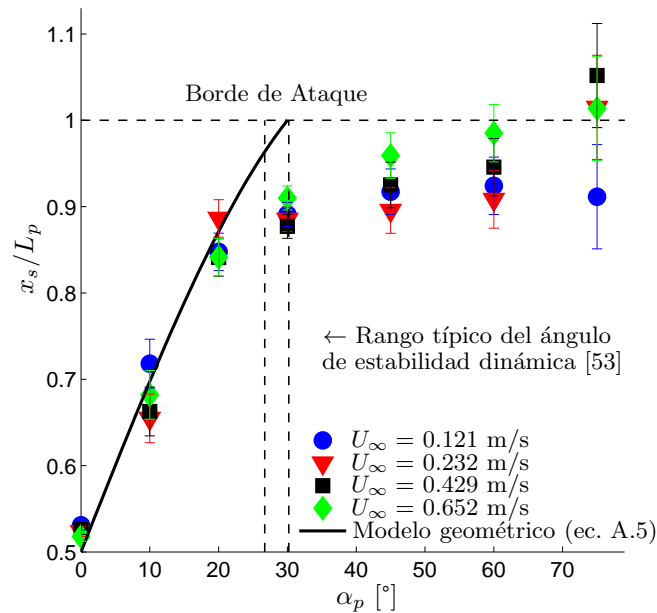


Figura 4.7: Ubicación del punto de estancamiento para diversos ángulos de inclinación de la placa,  $\alpha_p$ , y diferentes velocidades,  $U_\infty$ . El punto de menor velocidad se desplaza hacia el borde de ataque mientras la placa se alinea con el flujo.

La fig. 4.8 muestra el aspecto de la zona de estancamiento, representado por un perfil de isovelocidad correspondiente al 10 % (fila superior, figs. 4.8a a 4.8d) y 20 % (fila inferior, figs. 4.8e a 4.8h) de la velocidad de descarga adimensional,  $V^*$ , para los cuatro valores empleados y orientaciones seleccionadas de la placa. En general se aprecia que la forma de la zona de estancamiento se modifica con el aumento en el ángulo de oposición. Según los gráficos mostrados, el perfil se asemeja a un triángulo con una punta redonda, cuya base es la placa misma. Esta cúspide apunta hacia el borde de ataque a medida que se incrementa la inclinación de la placa. El área bajo esta curva se reduce como resultado del aumento en el valor de  $\alpha_p$ . De manera comparativa, se representa con una línea punteada el área de un semicírculo de diámetro  $L_p$ . En la fig. A.4 se muestra la dependencia del tamaño del estancamiento,  $A_{ze}$ , respecto al ángulo de inclinación del obstáculo,  $\alpha_p$ , para las cuatro tasas de flujo de masa,  $U_\infty$ . Este valor se encuentra escalado por el área del semicírculo de diámetro  $L_p$ , denotado por  $A_{circ}$ . El área bajo la curva de isovelocidad,  $V^*$ , muestra un decremento con el ángulo de oposición y aunque mínima, se observa predominancia de la velocidad de flujo.



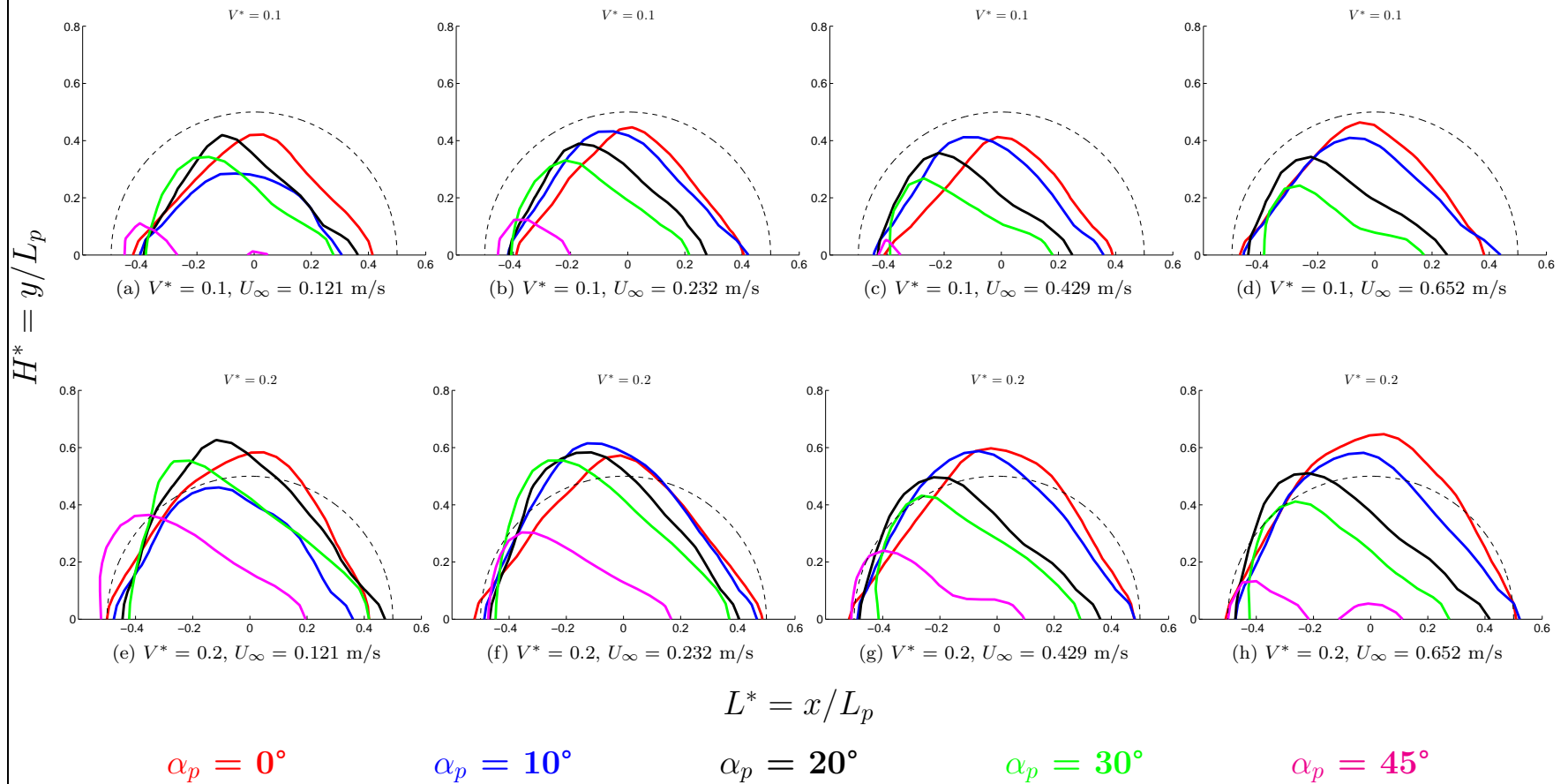


Figura 4.8: Aspecto del área de estancamiento de tamaño  $V^*$ , a diferentes ángulos de inclinación  $\alpha_p$  y velocidades de descarga,  $U_\infty$ . La línea punteada representa una semicircunferencia de diámetro  $L_p$ .

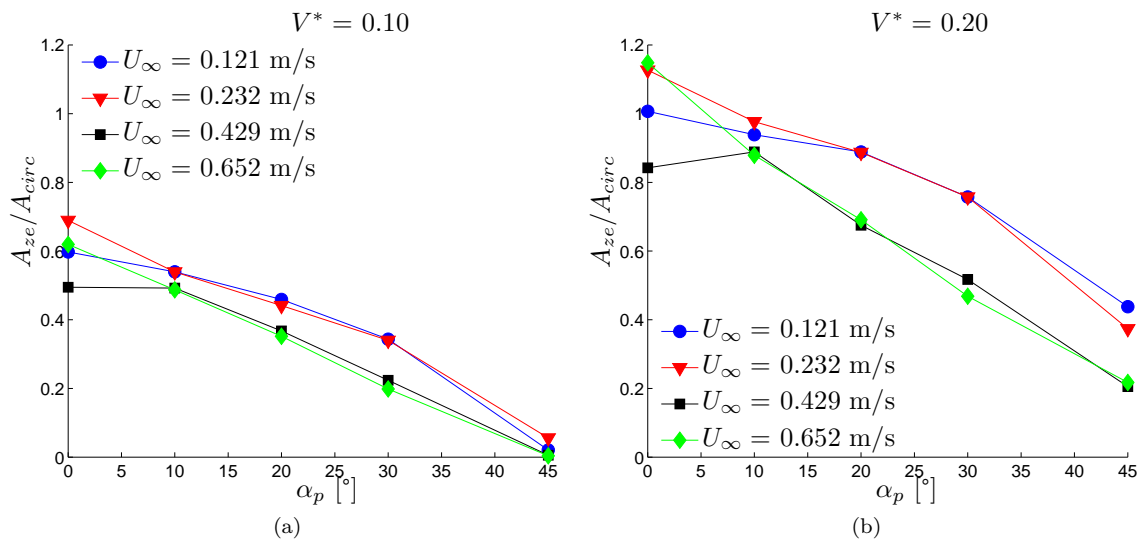


Figura 4.9: Área de la región de estancamiento,  $A_{ze}$ , como función del ángulo de oposición,  $\alpha_p$ , para las diferentes velocidades de descarga,  $U_\infty$ , para 10 y 20% de  $V^*$ .



# 5

## Discusión

Los gráficos de velocidad tanto para flujo frontal como angular, muestran una marcada disminución en la magnitud de la velocidad en una zona aguas arriba de la placa de tamaño comparable con ésta. La movilidad se ve inhibida por el flujo que circula alrededor. El flujo rápido generado por la alta tasa de corte aglomera fuertemente a las partículas en la región de estancamiento. El comportamiento de la variación de la velocidad en la zona de estancamiento puede explicarse si se piensa en un mecanismo de formación y ocupación de huecos en la estructura de estancamiento, tal como lo exponen *Komatsu et al.* [41]. Supóngase que sobre la placa hay un número  $n$  de capas del grosor de una partícula. Si se crea un hueco en la capa más profunda, el espacio será ocupado por una partícula de la capa inmediatamente adyacente. Este nuevo vacío dejará un lugar libre para una partícula de la capa superior, y así sucesivamente. Las capas de mayor velocidad forman vacíos más rápidamente y las partículas que ocupan lugares en capas de mayor profundidad, encontrarán una movilidad menor. Así que la velocidad promedio de una partícula,  $v_p$  es una función de la posición  $n$ , dependiente a su vez de la tasa de generación de espacios en  $n-1$ . De esta forma puede verse que  $v_p$  decae exponencialmente con la profundidad medida desde una superficie de velocidad uniforme. A través de la misma idealización es posible explicar la influencia del tamaño en los resultados mostrados. Es evidente la influencia de la placa en el flujo y que la reducción de velocidad es más dramática para un tamaño mayor. Una placa más grande puede alojar una mayor cantidad de partículas en su base, las cuales formarán un arreglo de capas más profundo.

Es notable el cambio del ritmo de crecimiento de la velocidad (4.3a) a un valor crítico de altura adimensional sobre la placa. Este comportamiento parece independiente del tamaño  $L_p$  de la placa. Este atributo puede deberse a que la altura crítica corresponde al número máximo de capas de poca movilidad que puede producir el objeto. Como se explico anteriormente, el decaimiento de la velocidad medido desde una capa con movimiento uniforme tiene una forma exponencial, dada la naturaleza del mecanismo de transferencia de partículas entre capas.

Por otro lado, la magnitud del incremento en la velocidad con respecto al valor medio puede explicarse a través de la conservación del flujo de masa. Es evidente que la presencia de la placa implica una reducción en el área de la sección transversal del canal. Si no hay obstáculo, la sección del canal tiene un área rectangular dada por  $A_1 = LW$ . Al colocar la placa en el canal, el área disponible se calcula en general, como  $A_2 = L - L_p \cos \alpha_p$ . Observando la ecuación de continuidad se expone el comportamiento por efecto de las dimensiones del obstáculo. Para cada apertura del canal se generará un flujo másico determinado,  $\dot{m}$ . Esta cantidad debe ser la misma para cada apertura,  $A_h$ , por lo tanto  $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ . Esto implica a su vez que  $v_1 A_1 = v_2 A_2$ . En un canal libre de obstrucciones, la velocidad del flujo uniforme se representa como  $v_1$ . El incremento en la velocidad,  $v_2$ , producida por la inclusión de la placa viene dado por la siguiente expresión y se aprecia gráficamente en la fig. 5.1

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{L}{L - L_p \cos \alpha_p} \quad (5.1)$$

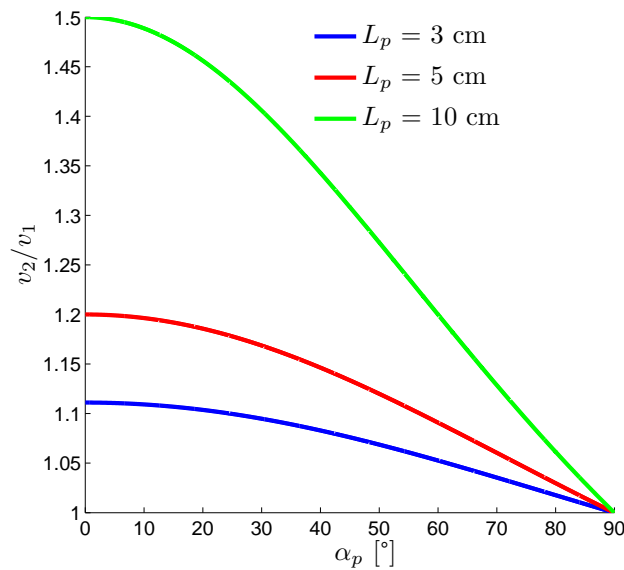


Figura 5.1: Relaciones de velocidad adimensional por tamaño de placa. La reducción del área transversal del canal produce un incremento en la velocidad por efecto del tamaño y la posición de la placa.

Como se observa experimentalmente, los cambios más pronunciados ocurren para una placa más grande. Mientras para una placa de 3 cm de largo, la velocidad para una posición horizontal supera la velocidad uniforme en cerca de 10 %, la placa de mayor tamaño produce incrementos de 1.5 veces la rapidez de vaciado. Dado que el flujo de masa depende de la apertura en la parte inferior del canal, un obstáculo pequeño no obliga al flujo a acelerarse significativamente. Considerando que el grosor de la placa es infinitesimal, una placa orientada a 90° no genera perturbación en el flujo uniforme. Este comportamiento puede observarse en las regiones de alta rapidez de los mapas de velocidad de las figuras 4.1 y 4.4.



La influencia del ángulo en las propiedades del flujo se observa principalmente en la variación morfológica del estancamiento. A su vez, esta deformación produce un cambio gradual en los valores de velocidad sobre la línea central del canal y la posición del punto de estancamiento.

Las curvas de velocidad vs altura para la placa angulada (fig. 4.6) muestran que la magnitud de la velocidad local crece exponencialmente con la ubicación sobre la placa, hasta un valor crítico de  $H^*$ . La pendiente de este crecimiento se reduce como función del ángulo de inclinación de la placa,  $\alpha_p$ . Superado este valor crítico de altura, la magnitud de la velocidad tiende al valor medio de descarga, es decir,  $V^* = 1$ . La altura media a la que no percibe una perturbación significativa del flujo es aproximadamente 1.5 veces  $L_p$ . Esto muestra la existencia de dos regiones de relevancia en el campo de flujo. Por un lado se observa un crecimiento sustancial de la velocidad en una región cercana a la placa. Posteriormente se suaviza la intensidad de este comportamiento, marcando una transición hacia una zona del flujo donde las variaciones no son tan representativas.

El punto de mínima velocidad muestra desplazamiento desde el centro hacia el borde de ataque. Esta ubicación exhibe un cambio en la tendencia de traslado a partir de un valor crítico de  $\alpha_p$ . Este valor está en torno del rango típico del ángulo de estabilidad dinámica para partículas esféricas de vidrio, observado en configuraciones de tambor giratorio [53]. Así mismo, el área bajo los perfiles de velocidad umbral se reduce, modificando también el aspecto del contorno a medida que crece la inclinación del obstáculo.

Las propiedades anteriores pueden explicarse con la siguiente idealización. Al verter un material granular sobre una superficie plana, se producirá una pila cónica, cuyo ángulo con respecto a la horizontal se conoce como ángulo de reposo. Como se ha detallado en la introducción, el equivalente dinámico de este fenómeno es una zona de estancamiento. En la condición de movimiento, el ángulo que tiene la superficie deslizante de una pila de material se conoce como ángulo de estabilidad dinámica,  $\theta_d$ .

A partir de un modelo geométrico sencillo (desarrollado en el apéndice A), se pueden analizar las propiedades morfológicas de una zona de estancamiento triangular. Dado que la pendiente del montículo debe preservarse, la región se deformará para cada valor de inclinación de la placa,  $\alpha_p$ . Consecuentemente, el vértice libre del triángulo se desplazará hacia el extremo de ataque de la placa. El punto de mínima velocidad dentro de la zona triangular se moverá también hacia el extremo de la placa, siguiendo una curva creciente senoidal según el modelo propuesto. Lo anterior provoca la reducción del área bajo el perfil límite que impone el ángulo de estabilidad dinámica, cuyo valor se acercará a cero a medida que la inclinación de la placa tienda a  $\theta_d$ . Según este modelo la caída del valor de área sigue una curva cosenoidal.

Como se aprecia en la sección de resultados correspondiente, la migración del punto de estancamiento se ajusta a lo previsto por el modelo geométrico en valores menores que  $\theta_d$ . No obstante, lo anterior no ocurre para la condición en que  $\alpha_d = \theta_p$ , es decir,  $x_s/L_p = 1$ . Esto se debe a que si la inclinación de la placa es muy cercana al ángulo de estabilidad dinámica, el área de estancamiento será casi nula. En otras palabras, la cantidad de partículas que forman el estancamiento es muy pequeña, por lo que la capacidad de estructuración desaparece. Además, a una mayor inclinación el tiempo de residencia en una zona estancamiento se reduce, con lo que hacer una estimación de la posición con menor velocidad se vuelve complejo. Este mismo fenómeno se observa para valores de  $\alpha_p$  mayores que  $\theta_d$ .





Cabe hacer notar que en este procedimiento únicamente se mide la posición de menor velocidad, no así su magnitud. Por lo tanto, como se describió en la sección de los mapas y curvas de magnitud de velocidad, los valores de estancamiento para ángulos mayores pueden no ser comparables con los que producen inclinaciones pequeñas. Adicionalmente debe tomarse en cuenta que en las mediciones para orientaciones pronunciadas, el espesor de la placa tiene injerencia en la deformación del campo de flujo.

En todos los parámetros estudiados se aprecia que la influencia en su magnitud es mínimamente dependiente de la velocidad de descarga del canal,  $U_\infty$ . Es importante hacer notar que en la zona de estancamiento, predomina un régimen inercial altamente dominado por la fricción y las propiedades de contacto de las partículas. Dado que el rozamiento es un mecanismo independiente de la velocidad relativa entre las partículas, esto explica el débil efecto de la tasa de descarga en las propiedades del estancamiento.





## *Conclusiones*

Se analizó la zona de estancamiento que produce la oposición de una placa plana al flujo de material granular. Se encontró que dicha región no se encuentra completamente inmóvil. En efecto, hay movimiento lento y constante de todas las partículas que la conforman. La cantidad de movimiento que experimenta un elemento depende de la profundidad a la que se encuentra en la región de baja velocidad.

Cualitativamente, se observaron los patrones de formación de zonas de estancamiento y la variación de la forma y el tamaño con respecto a las condiciones geométricas de la obstrucción. Se apreció que estas propiedades dimensionales son semejantes para condiciones distintas de flujo, no así para variaciones en la disposición del objeto con respecto al flujo. Se realizó un análisis de la estructura de las regiones de estancamiento granular sobre la placa plana, para diferentes longitudes y orientaciones del obstáculo y velocidades de la corriente granular. A través de la manipulación de datos provenientes de técnicas de visualización, fue posible establecer de manera cuantitativa, parámetros de caracterización para dicho fenómeno, que respaldan lo anterior.

Se estudió la prevalencia de una zona de estancamiento como función de la orientación del obstáculo con respecto a la corriente. A medida que el ángulo de ataque se incrementa es posible observar una disminución en la región influenciada por la placa. La zona de menor movilidad pierde relevancia para ángulo cercanos al ángulo de estabilidad dinámica del material empleado. También fue posible analizar la posición del punto de menor velocidad en la zona de estancamiento. Dicha ubicación muestra desplazamiento, desde el centro de la placa para una posición transversal, hasta el borde de ataque para una orientación límite. Estas mediciones, muestran también ser mínimamente dependientes de la velocidad de descarga. Respecto al tamaño del estancamiento, su extensión disminuye como función de la orientación del intruso y aunque menor, muestra dependencia de la velocidad de descarga. Para los experimentos efectuados, se encontró que la región de estancamiento muestra una altura cercana a la mitad de la longitud de la placa, en posición horizontal,

considerando una relación de velocidad del 10 %.

Además de evaluar el comportamiento de la rapidez relativa de las partículas, se analizaron los campos de temperatura granular en todos los casos experimentales. Esta magnitud es una representación energética del flujo y permite comparar la dinámica en la zona de estancamiento en términos de la transición entre un flujo rápido y uno cuasiestático. Este criterio permite discernir la formación de una región de menor velocidad a partir de una consideración energética.

## 6.1. Forma y Tamaño

Se exploraron tres maneras de definir el tamaño de la región de estancamiento. La primera consiste en la elección arbitraria de curvas de velocidad adimensional, de tamaño  $V^*$ . Una segunda alternativa proviene del análisis de las tendencias de crecimiento de velocidad sobre la línea central del canal. Finalmente, la definición de la temperatura granular proporciona un criterio energético en la localización de un umbral, marcando la transición entre flujo rápido y lento.

Según lo observado en los mapas de magnitud de velocidad, la forma y el tamaño de la zona de estancamiento están en función de la geometría y la orientación del objeto. Estas propiedades exhiben variaciones significativas cuando se cambia el ángulo de oposición al flujo. Se emplearon ajustes de tipo exponencial para caracterizar las propiedades de la estructura de estancamiento. Es destacable que la tendencia dentro de la zona de poca movilidad presenta crecimiento exponencial, como lo revela el coeficiente de decaimiento. Con base en estos resultados es posible mencionar que la influencia del objeto transversal al flujo, se extiende por encima de este en aproximadamente una y media veces el largo del intruso. Estos valores muestran ser mayormente dependientes de la orientación y el tamaño del obstáculo.

Usando los perfiles de isovelocidad, se analizó la variación en el tamaño y forma de la región de estancamiento, como una función de la inclinación de la placa. Para estudiar estas propiedades se propuso un modelo geométrico, basado en la consideración de que la zona de estancamiento tiene una forma triangular (o cónica, en tres dimensiones) cuya inclinación máxima está gobernada por el ángulo de estabilidad dinámica. La preservación de dicha pendiente provoca que el punto de menor velocidad se desplace hacia el extremo incidente de la placa siguiendo una curva de forma sinusoidal.

La presencia de un obstáculo que guarda una inclinación igual al ángulo  $\theta_d$ , impide que se forme una zona de estancamiento. Es evidente que si bien la orientación de la placa puede inhibir la formación de estructuras, inherentemente habrá una modificación en las propiedades del flujo por la sola presencia del objeto.

## 6.2. Arreglo y técnicas experimentales

La configuración actual del arreglo experimental permite obtener variaciones en la velocidad de descarga y permite analizar la influencia de objetos de variadas geometrías y dimensiones. A diferencia de otros arreglos semejantes que usan como intruso un cilindro, el empleo de un obstáculo plano ofrece un panorama amplio



---

respecto a la influencia de su orientación en el flujo, atributo que los objetos cilíndricos no inducen. Con esta configuración fue posible estudiar las propiedades del campo de flujo y la zona de estancamiento en orientaciones diversas del obstáculo.

Sin embargo, el arreglo experimental posee áreas de oportunidad en mejoras que permitan extender los tiempos de observación del fenómeno. Las dimensiones del canal ofrecen lapsos de observación suficientemente largos ante flujos de masa pequeños. No obstante, para grandes valores de apertura de salida, el tiempo de vaciado es muy corto (del orden de unos pocos segundos), lo cual genera periodos de observación limitados. Una alternativa a este inconveniente puede ser incrementar la altura -y con ello la masa de partículas- de material.

Se empleó una técnica experimental que es competente para medir variaciones pequeñas de velocidad en flujos de partículas individuales. El método empleado para la calificación de las variables registradas es confiable, pues muestra correspondencia con el modelo experimental propuesto.

### 6.3. Prospección

Sería deseable efectuar un experimento semejante con un material de propiedades físicas y geométricas distintas al empleado. Las esferas de vidrio tienden a empaquetarse de manera que pueden inhibir la deformación producida por el flujo circundante, aún si poseen un bajo coeficiente de fricción, causando que el movimiento de las partículas se restrinja por el efecto de la cristalización. Materiales con un perfil geométrico menos ordenado pueden proveer una lectura distinta sobre las estructuras y propiedades características de este fenómeno.

Como se mencionó en la parte introductoria, el experimento estudiado presenta dos fenómenos de relevancia: la formación de un estancamiento y la aparición de un vacío aguas abajo del obstáculo. Por la naturaleza de las mediciones que se estudiaron, el análisis de la estela de vacío creada tras el objeto intruso representa un área de oportunidad. Es notable mencionar que ambos fenómenos son complementarios y que una explicación satisfactoria del evento citado, debe provenir de una formulación en conjunto.



# Apéndices



## *Ubicación del punto de estancamiento*

Uno de los resultados presentados en este trabajo sugiere que la migración del punto de mínima velocidad es una función creciente de la inclinación de la placa. La morfología y las propiedades del estancamiento pueden explicarse utilizando una idealización de la configuración empleada en el experimento. Con algunas consideraciones geométricas se puede determinar un modelo que describe el desplazamiento del punto de estancamiento como una función de dos parámetros: el ángulo de estabilidad dinámica,  $\theta_d$  y la inclinación de la placa,  $\alpha_p$ .

Considérese una placa de tamaño  $L_p$ , orientada a un ángulo  $\alpha_p$  y sometida a un flujo granular denso. La interacción generará una zona de estancamiento de forma triangular con una base de tamaño  $L_p$ , cuyo ángulo máximo es  $\theta_d$ . Dado que la pendiente del montículo debe preservarse, el ángulo de su cúspide se mantiene constante. Esta condición implica que la zona triangular modifique su forma, reduciendo su altura y desplazando su cúspide hacia el borde de ataque a medida que se incrementa la inclinación. Para determinar la posición del punto de estancamiento se pueden hacer dos consideraciones: la primera es que su posición coincide con el lugar en que la línea de altura corta a la placa; la otra situación implica que la mínima velocidad se sitúa en la intersección de la placa con una línea vertical que pasa por la punta del triángulo. A continuación se detalla el procedimiento para el cálculo de la posición relativa del punto de menor velocidad y sus implicaciones en la morfología de la zona estancada.

### A.1. Punto coincidente con la línea de altura

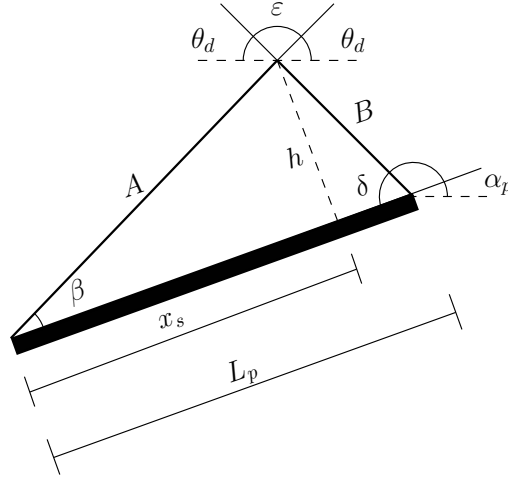


Figura A.1: Esquema de una placa de longitud  $L_p$ , orientada a un ángulo de inclinación  $\alpha_p$ , cuyo punto de estancamiento,  $x_s$ , coincide con la línea de altura.

Por las propiedades métricas de los triángulos se pueden establecer las siguientes relaciones, válidas para los casos que se estudiarán:

$$\beta = \theta_d - \alpha_p \quad (\text{A.1})$$

$$\delta = \theta_d + \alpha_p \quad (\text{A.2})$$

$$\varepsilon = 180 - \beta - \delta = 180 - 2\theta_d \quad (\text{A.3})$$

Para un triángulo oblicuángulo mostrado en la fig. A.1 se cumple la siguiente relación<sup>1</sup>

$$B^2 = A^2 + L_p^2 - 2 L_p x_s \quad (\text{A.4})$$

Por la ley de senos se tiene que

$$\frac{L_p}{\text{sen } \varepsilon} = \frac{B}{\text{sen } \beta} = \frac{A}{\text{sen } \delta}$$

de donde

$$A = \frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } \varepsilon} L_p \quad A = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \varepsilon} L_p$$

que al ser sustituidas en la ec. (A.4) y después de reordenar

$$x_s = \frac{L_p}{2} \left( 1 + \frac{\text{sen}^2 \delta - \text{sen}^2 \beta}{\text{sen}^2 \varepsilon} \right) = \frac{L_p}{2} \left( 1 + \frac{\text{sen}(\delta + \beta) \text{sen}(\delta - \beta)}{\text{sen}^2 \varepsilon} \right)$$

finalmente, aplicando las igualdades (A.1) a (A.3)

$$\frac{x_s}{L_p} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\text{sen } 2\alpha_p}{\text{sen } 2\theta_d} \right) \quad (\text{A.5})$$

<sup>1</sup>El llamado *Primer teorema de Euclides* establece que el cuadrado de uno de los lados de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del lado relativo a la altura por la proyección del lado opuesto al que se quiere hallar.



## A.2. Punto coincidente con la línea bisectriz

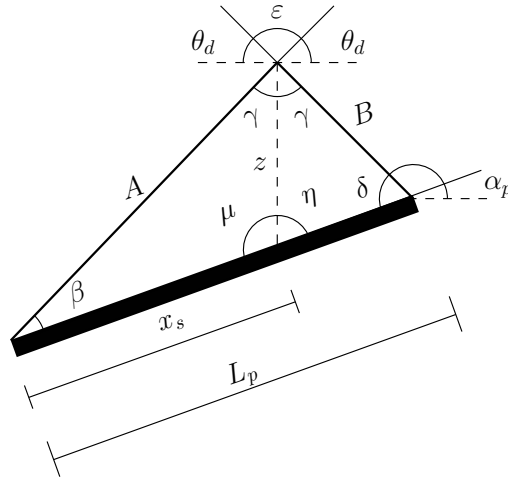


Figura A.2: Esquema de una placa de longitud  $L_p$ , orientada a un ángulo de inclinación  $\alpha_p$ , cuyo punto de estancamiento,  $x_s$ , coincide con la bisectriz.

Para este caso se aplica la ley de senos en los triángulos que comparten la bisectriz como uno de sus lados.

En el triángulo izquierdo,

$$\frac{z}{\text{sen } \beta} = \frac{x_s}{\text{sen } \gamma} = \frac{A}{\text{sen } \mu}$$

y en el triángulo derecho,

$$\frac{z}{\text{sen } \delta} = \frac{L_p - x_s}{\text{sen } \gamma} = \frac{B}{\text{sen } \eta}$$

De las expresiones anteriores, se seleccionan aquellas que son útiles para encontrar la posición relativa de  $x_s$ , es decir

$$\frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma} x_s = z = \frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } \gamma} (L_p - x_s)$$

de esta igualdad resulta

$$\frac{L_p - x_s}{x_s} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \delta}$$

y finalmente al reordenar e introducir las expresiones (A.1) y (A.2),

$$\frac{x_s}{L_p} = \left( 1 + \frac{\text{sen } (\theta_d - \alpha_p)}{\text{sen } (\theta_d + \alpha_p)} \right)^{-1} \quad (\text{A.6})$$





Véase que tanto para la ecuación (A.5) como (A.6) se cumple que si  $\alpha_p = 0$ ,  $x_s/L_p = 1/2$  y  $\alpha_p = \theta_d$ ,  $x_s/L_p = 1$ . Nótese también que según estos modelos, el mayor valor de  $\theta_d$  es  $45^\circ$ . Por otro lado, se puede demostrar que para la ec. (A.5)  $x_s/L_p(\theta_d = \pi/4 + m) = x_s/L_p(\theta_d = \pi/4 - m)$ , con  $0^\circ < m < 45^\circ$ . En otras palabras, existen dos valores del ángulo de estabilidad dinámica que causarán el mismo comportamiento en la posición relativa del punto de estancamiento. A continuación se analiza la forma de las expresiones mencionadas para valores seleccionados de los parámetros  $\alpha_p$  y  $\theta_d$ .

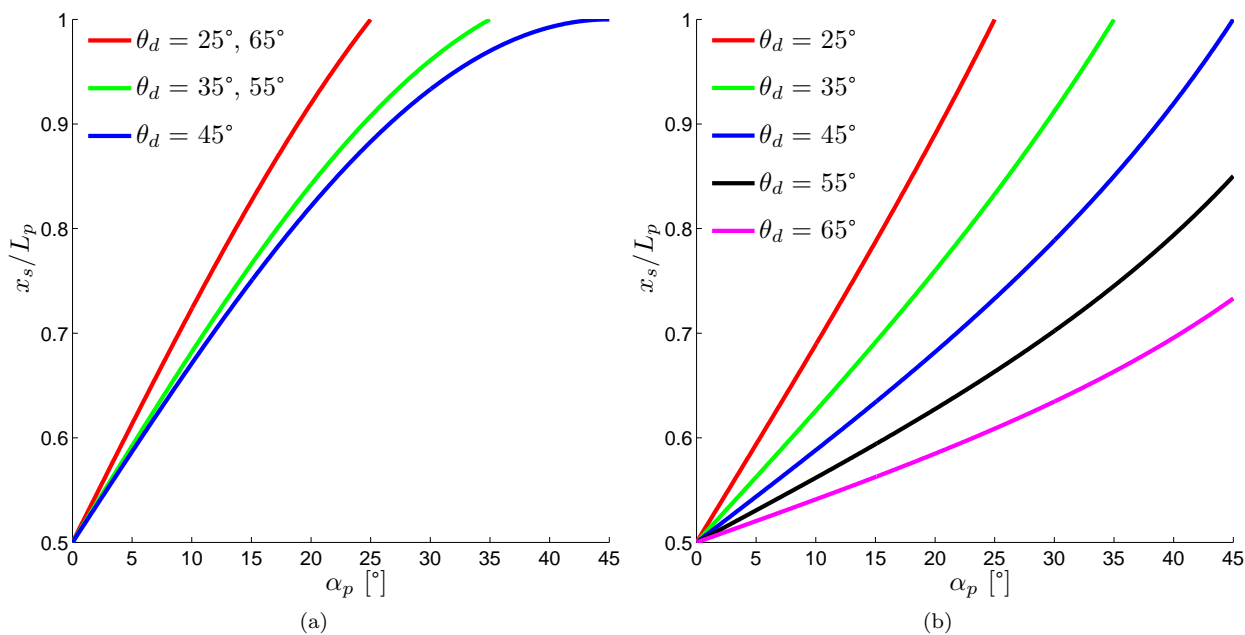


Figura A.3: Ubicación relativa del punto de estancamiento situado en la intersección de (a) la línea de altura y (b) la bisectriz.

En la fig. A.3a se muestran el desarrollo de la ec. (A.5), para distintos valores del ángulo de estabilidad dinámica,  $\theta_d$ . Se observa que el punto de estancamiento se desplaza desde el centro hacia el borde de la placa ( $x_s/L_p = 1$ ). La intensidad del crecimiento en la ubicación cambia con el valor de  $\theta_d$ . Como se mencionó anteriormente, hay dos valores del ángulo de estabilidad dinámica que provocarán el mismo comportamiento en el desarrollo de  $x_s/L_p$ .

Por otra parte la fig. A.4a se expone el comportamiento de la posición relativa del punto de mínima velocidad, según la ec. (A.6). Las curvas muestran también un comportamiento creciente, desde el centro de la placa hacia el extremo. Sin embargo, el modelo no es capaz de reproducir la existencia de dos valores de  $\theta_d$  para los cuales  $x_s$  sea igual. Por otra parte, las curvas no muestran el ritmo de crecimiento que se observa en los experimentos.

Como puede verse, el comportamiento del modelo descrito por la ec. A.5 coincide con lo observado en la experimentación y satisface además las premisas teóricas que gobiernan la morfología de la zona de estancamiento. De lo anterior se concluye que la idealización de la que deriva la expresión (A.5) es adecuada para la comparación de los resultados obtenidos.



### A.3. Área del estancamiento

Otra de las propiedades morfológicas de la zona estancada es el valor de su área. Con las expresiones obtenidas antes es posible estimar su variación como función de la inclinación de la placa. Se sabe que el área de un triángulo puede calcularse como  $A = b h/2$ . De la fig. A.1 se observa que  $h = \tan \beta x_s$ , de modo que introduciendo la ec. (A.5) y reordenando con las expresiones (A.1) y (A.2)

$$A_{ze} = \frac{L_p^2}{4} \tan(\theta_d - \alpha_p) \left( 1 + \frac{\text{sen } 2\alpha_p}{\text{sen } 2\theta_d} \right) \quad (\text{A.7})$$

A manera de comparación, este parámetro se escala con el área de un semicírculo de diámetro  $L_p$ , es decir,  $A_{circ} = \pi L_p^2/8$ . Bajo esta suposición se tiene que el área de la zona de estancamiento adimensional toma la forma

$$A^* = \frac{A_{ze}}{A_{circ}} = \frac{2}{\pi} \tan(\theta_d - \alpha_p) \left( 1 + \frac{\text{sen } 2\alpha_p}{\text{sen } 2\theta_d} \right) \quad (\text{A.8})$$

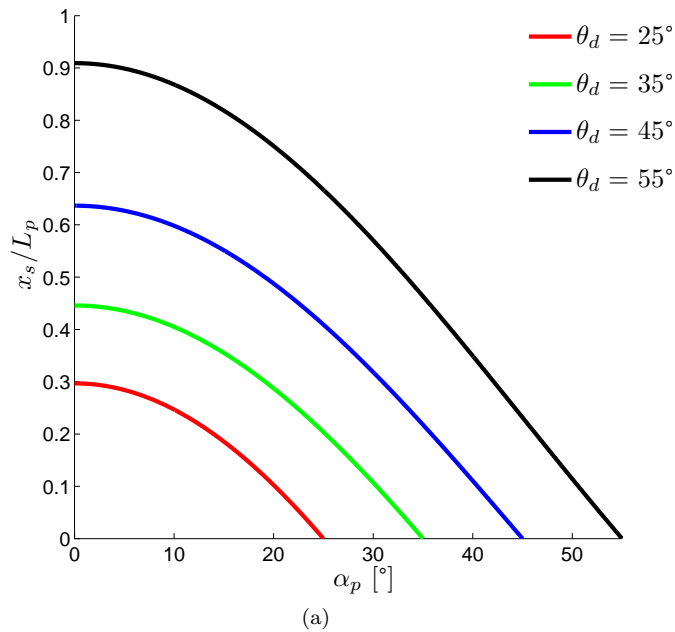


Figura A.4: Área de la zona de estancamiento como función de la inclinación de la placa,  $\alpha_p$  y el ángulo de estabilidad dinámica,  $\theta_d$ .



# B

## *Dinámica de flotadores en una superficie oscilante*

### **B.1. Introducción**

La formación de cúmulos de partículas en una interfaz estática entre dos fluidos es un fenómeno que se encuentra con frecuencia. Muchos ejemplos pueden encontrarse cotidianamente, como los granos de cereal en la leche de las mañanas o las burbujas que bailan juntas en la superficie de una bebida. Más allá de su belleza y curiosidad, estos grupos de partículas que interactúan con un fluido han despertado el interés en las implicaciones físicas que generan dichos fenómenos [54]. Además, la acumulación de partículas en la entrecara entre fluidos se puede hallar en muchas aplicaciones industriales de interés [55].

Sin embargo, muchos de estos eventos tiene lugar en una interfaz en reposo, donde las partículas interactúan principalmente dirigidas por la fuerza de capilaridad inducida por la gravedad. De cualquier forma, el desempeño colectivo de estos arreglos en sistemas que se perturban de manera sistemática es aún un campo que no se ha explorado con profundidad. Intentando comprender los mecanismos físicos que intervienen en estos sistemas, se analizó el comportamiento de un grupo de flotadores dispuestos en una interfaz líquida sometida a movimiento ondulatorio de Faraday. Para ello un contenedor rectangular se llena con agua purificada, mientras que un grupo de partículas esféricas se depositan en la superficie, antes de someter el sistema a agitación.

Bajo ciertas condiciones, la flotación es principalmente dominada por las condiciones físicas de las partículas, de manera que la formación de estructuras se da en posiciones específicas sobre el perfil de la onda [56]. Estos cúmulos pueden presentarse en los nodos (puntos de mínima amplitud) o en los antinodos (puntos de máxima amplitud). Es importante hacer notar que este es un fenómeno que depende de la concentración de flotadores

presentes en la superficie. Para una baja cantidad de partículas, se observa la formación de cúmulos en los antinodos, colapsando y saliendo del punto con cada ciclo de la onda en un mecanismo conocido como “respiración”. Por el otro lado, para una concentración alta, no se observan cúmulos sino agujeros entre la cama de partículas, colocados en los nodos de la onda (fig. B.2). ¿Qué mecanismos gobiernan la formación de estas diferentes estructuras? ¿Qué puede esperarse para concentraciones intermedias?

## B.2. Objetivo

El objetivo primordial del presente estudio es analizar la dinámica de la aglomeración en términos de las interacciones de los flotadores en presencia de un fluido, donde la concentración de partículas es un parámetro de interés. Para lograr dicha tarea, se efectuó un análisis estadístico de los datos de la velocidad, obtenidos a partir de la implementación de rutinas numéricas empleadas para simular el movimiento de flotadores esféricos en una interfaz de fluido sujeta a una onda estacionaria.

El punto central de esta investigación es la estadística de la velocidad de los flotadores para sistemas de concentración intermedia, con el propósito de entender mejor la transición de la aglomeración, desde la formación de cúmulos antinodales hasta la generación de agujeros en los nodos de la onda, generando con ello el código que reproduzca de manera satisfactoria las observaciones experimentales. Modificando tanto los parámetros físicos de la onda como de los flotadores, se efectuaron simulaciones para una variedad de escenarios. Para cada situación, se obtienen -entre otras variables- las velocidades Lagrangianas en dos dimensiones de cada flotador. Tomando el promedio temporal sobre un lapso suficientemente grande comparado con el tiempo característico de la onda, se calculan entonces las funciones de densidad de probabilidad (PDF) de los componentes de la velocidad.

Adicionalmente, se propone un modelo cinemático sencillo, con el fin de analizar el mecanismo de respiración que muestran los flotadores en las posiciones antinodales del perfil ondulante para bajas concentraciones. Este modelo considera un único flotador en la superficie de una onda estacionaria de gran longitud de onda, que se desplaza a lo largo de una línea recta cuya posición y orientación pueden modificarse. Tal idealización reside en que la observación experimental sugiere que los flotadores se encuentran sometidos a fuerzas dependientes del tiempo cuyas magnitudes varían durante un ciclo de la onda. Esto genera que los patrones dinámicos no sean iguales en el lapso positivo y negativo de la onda, lo cual produce un movimiento desigual del flotador.

## B.3. Arreglo experimental y técnicas de análisis

El dispositivo experimental consiste en un contenedor rectangular, de 81 x 45 mm y una altura de 9 mm, el cual se llena con agua destilada hasta el borde. Posteriormente, se depositan cuidadosamente esferas de poliestireno de radio  $R_p = 0.35$  mm, con un ángulo de contacto de  $\theta_c = 74^\circ$ . El contenedor se encuentra acoplado a un agitador vertical controlado electrónicamente que le imprime una oscilación periódica hasta lograr una onda de Faraday con una frecuencia resonante cercana a 35 Hz y una longitud de onda de unos 20 mm. Sobre dicho arreglo se coloca una cámara de alta velocidad que obtiene capturas fotográficas a una tasa media de 500 cuadros por segundo, que se almacenan en un equipo de cómputo para su posterior análisis.

Las simulaciones para este dispositivo experimental consideran una vista de planta del contenedor, en la que



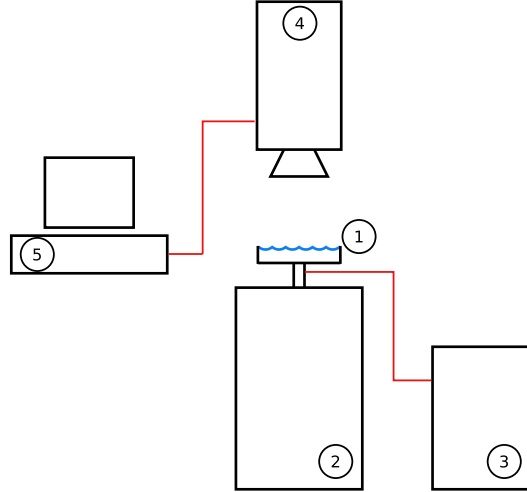


Figura B.1: Dispositivo experimental. El contenedor (1) se encuentra acoplado a un agitador vertical (2) controlado electrónicamente (3). Con una cámara de alta velocidad se graban secuencias fotográficas (4) que son almacenadas para el análisis de imágenes (5).

se observan los flotadores sujetos a la acción oscilatoria de la onda estacionaria. La configuración elegida para estas simulaciones es una tal que el contenedor y el perfil de la onda tienen la misma longitud,  $L$ . Con el fin de reproducir el comportamiento de este sistema, se desarrolló un código computacional basado en un balance de fuerzas, empleando una combinación de modelos que incorporan fuerzas de flotación, arrastre viscoso [57] y fuerza de capilaridad [56, 58] así como un modelo de contacto de partícula suave.

La rutina numérica comienza por la definición de la ubicación de las paredes del contenedor. Posteriormente, una subrutina genera aleatoriamente las posiciones iniciales de los flotadores, distribuyéndolos de manera uniforme sobre el dominio computacional que representa la superficie del fluido. Este código genera una serie de archivos como resultado del cálculo del balance de fuerza, para cada paso de tiempo en que se divide el tiempo de observación. En un archivo auxiliar se declaran los parámetros físicos tanto de la onda -la longitud de onda,  $\lambda_w$ , la amplitud,  $a$ , y la frecuencia,  $\omega$ - como de las partículas -la población,  $N$ , el radio,  $R_p$ , la densidad,  $\rho_s$ , y el ángulo de contacto,  $\theta_c$ . Los archivos resultantes contienen las posiciones y las velocidades instantáneas para cada flotador.

Con el fin de evaluar el desempeño de este código, se pueden modificar un conjunto de parámetros de interés en el código, como el coeficiente de restitución,  $e_R$  y la constante elástica,  $k_H$ . Por otro lado, la concentración de flotadores se define como el cociente entre el área que ocupan los flotadores y la superficie total que ofrece el contenedor (ver ec. B.1). Para cada cálculo de la rutina numérica, se emplearon diversos valores de concentración, como se muestra en la tabla B.1.

$$\phi = \frac{N \pi R_p^2}{L^2} \quad (\text{B.1})$$

El esquema que se muestra en la tabla anterior, se ejecutó usando cuatro combinaciones de las propiedades de contacto,  $e_R$  y  $k_H$ , como se muestra en la tabla B.2.

Una vez que se describió la sección experimental y numérica, se detalla en la sección siguiente el balance de



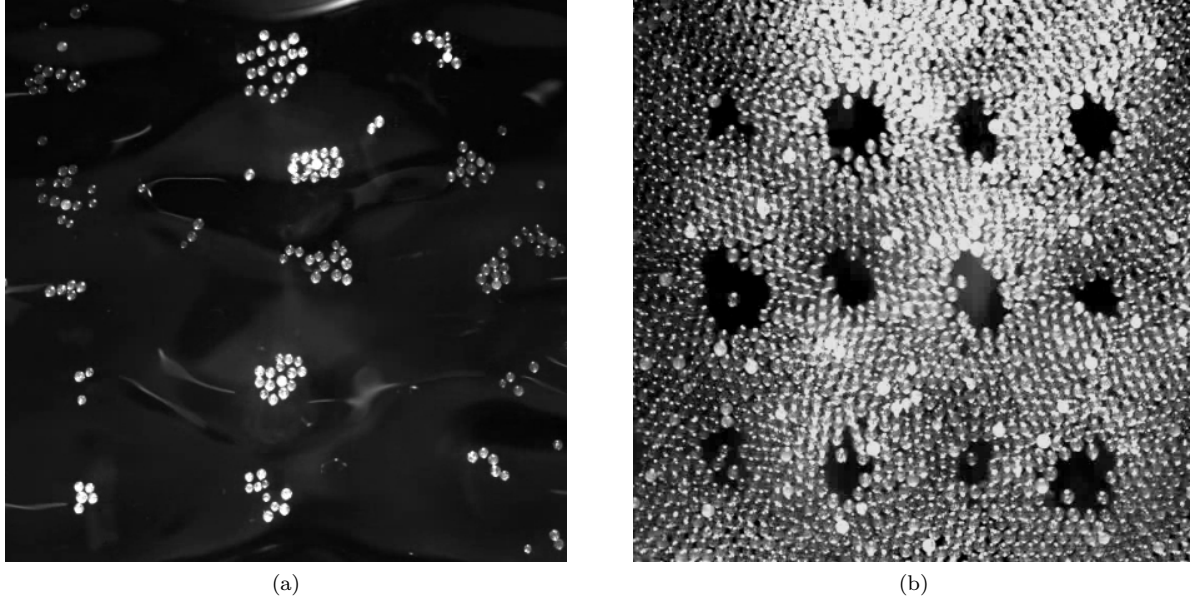


Figura B.2: Aspecto de las estructuras formadas por los flotadores en la superficie de la onda estacionaria de Faraday: (a) cúmulos antinodales en el régimen diluido y (b) los agujeros nodales observados en alta concentración de flotadores. *Con permiso de C. Sanli y D. van der Meer, 2010.*

$\phi$	$N$
0,10	75
0,25	185
0,40	295
0,55	405
0,70	515

Tabla B.1: La concentración,  $\phi$ , y el correspondiente número de flotadores,  $N$ .

$e_R$	$k_H$
0,20	0,20
0,50	0,60

Tabla B.2: Propiedades de contacto empleadas en las simulaciones: el coeficiente de restitución,  $e_R$  y la constante elástica,  $k_H$  in [N/m].

fuerza en el que se sustenta el código empleado en las simulaciones.



## B.4. Balance de Fuerza

Cuando el flotador se somete a la oscilación de una onda, experimenta una serie de imposiciones dinámicas, debidas a su propia naturaleza y la interacción con el fluido. Además, los choques con otras partículas afectan el movimiento de cada flotador. A continuación se reseña cada contribución de fuerza en términos de la geometría del flotador sus características físicas así como las propiedades del fluido. La fuerza de atracción capilar, debida a las propiedades de contacto de las partículas, así como la fuerza de de la onda, producto de la posición relativa del flotador respecto al perfil ondulante, son las contribuciones de mayor relevancia para el movimiento de la partícula. La fuerza de arrastre viscoso se considera también en el análisis ya que el flotador se opone al movimiento horizontal. Finalmente, las interacciones por colisión se evalúan empleando un modelo de contacto de partícula suave.

### B.4.1. Fuerza de atracción capilar entre dos flotadores idénticos

Considérense dos flotadores esféricos del mismo radio,  $R_p$ , y densidad,  $\rho_s$  flotando en la superficie de un líquido de una determinada densidad,  $\rho_l$  y tensión superficial,  $\gamma$ , separadas una distancia,  $d$ . La fuerza debida a la interacción capilar está dada por [59]:

$$F_c(d/l_c) = -2 \pi \gamma R_p Bo^{5/2} S^2 K_1(d/l_c) \quad (\text{B.2})$$

donde  $K_1$  es la función modificada de Bessel de segunda clase de orden 1,  $Bo = \rho_l g R^2 / \gamma$  es el número de Bond y  $S$  es un parámetro adimensional que depende de las condiciones de mojado a través del ángulo de contacto,  $\theta_c$ , definido como

$$S = \frac{2 \rho_s}{3 \rho_l} - \frac{1}{3} - \frac{\cos \theta_c}{2} + \frac{\cos^3 \theta_c}{6}$$

Con el fin de adimensionalizar la fuerza de capilaridad, se define la longitud capilar como

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_l g}} \quad (\text{B.3})$$

empleando la aceleración gravitatoria,  $g$  es posible derivar una escala temporal

$$\tau_c = \sqrt{\frac{l_c}{g}} = \sqrt[4]{\frac{\gamma}{\rho_l g^3}} \quad (\text{B.4})$$

y finalmente, usando la tensión superficial  $\gamma$ , se deduce una escala de fuerza

$$f_c = \gamma l_c = \sqrt{\frac{\gamma^3}{\rho_l g}} \quad (\text{B.5})$$

ahora, a través de la manipulación de las ecuaciones (B.3), (B.4) y (B.5), la masa, la velocidad y aceleración basadas en estos factores de escalamiento se definen como sigue

$$v_c = \frac{l_c}{\tau_c} = \sqrt{\frac{\gamma g}{\rho_l}} \quad (\text{B.6})$$



$$\alpha_c = \frac{l_c}{\tau_c^2} = g \quad (\text{B.7})$$

$$m_c = \frac{f_c}{\alpha_c} = \sqrt{\frac{\gamma^3}{\rho_l g^3}} \quad (\text{B.8})$$

Las escalas características de este sistema, a saber,  $d$  y  $R$ , se adimensionalizan a través del uso de la longitud capilar,  $l_c$ ,

$$\tilde{d} = d/l_c \quad (\text{B.9})$$

$$\tilde{R}_p = R_p/l_c = \sqrt{Bo} \quad (\text{B.10})$$

incorporando estos nuevos factores en la ecuación (B.2), resulta

$$\tilde{F}_c(\tilde{d}) = \frac{F_c}{\gamma l_c} = -\frac{2 \pi \gamma R_p Bo^{5/2} S^2 K_1(\tilde{d})}{\gamma l_c} = -2 \pi Bo^3 S^2 K_1(\tilde{d})$$

o de manera alternativa, recordando que según la ecuación (B.10),  $\tilde{R}_p = \sqrt{Bo}$ , la expresión anterior toma la forma

$$\tilde{F}_c(\tilde{d}) = -2 \pi \tilde{R}_p^6 S^2 K_1(\tilde{d}) \quad (\text{B.11})$$

La forma adimensional de la masa del flotador, empleando la ecuación (B.8), es la siguiente

$$\tilde{M} = M/m_c = 4/3 \pi R_p^3 \rho_s \sqrt{\frac{\gamma^3}{\rho_l g^3}} = 4/3 \pi \frac{\rho_s}{\rho_l} \left[ R_p^3 \left( \sqrt[3]{\frac{\rho_l g}{\gamma}} \right) \right] = 4/3 \pi \frac{\rho_s}{\rho_l} Bo^{3/2} = 4/3 \pi \frac{\rho_s}{\rho_l} \tilde{R}_p^3 \quad (\text{B.12})$$

#### B.4.2. Fuerza debida a una onda estacionaria

Según un modelo dinámico [56], la fuerza que el flotador experimenta debida a la onda, puede estimarse a través de cuatro parámetros: la longitud de la onda,  $\lambda_w$ , la amplitud,  $a$ , la tensión superficial en la interfaz,  $\gamma$ , y la masa del flotador,  $M$ . Además, la fuerza de arrastre de la onda puede entenderse como una combinación de dos contribuciones [60]. La primera es resultado de la posición relativa del flotador respecto al perfil de la onda. Cerca de los nodos, la pendiente de la superficie de la onda es mayor. Mientras mayor es la pendiente, mayor será la fuerza que empuje al flotador. La segunda aportación es un desplazamiento vertical debido a la inercia. La fuerza neta que actúa sobre el flotador es el resultado de la flotación efectiva debida a [véanse las ecs. (B.3) a (B.8)] la aceleración de la partícula de fluido equivalente en la interfaz, la fuerza de arrastre viscoso (descrita a detalle en el siguiente apartado) y la fuerza de la tensión superficial. Así, todas las fuerzas producen una fuerza neta en el flotador por efecto de la oscilación, y por lo tanto, el flotador presentará movimiento relativo con respecto a una partícula de fluido, de masa  $m_{ad}$ , en la superficie de la onda estacionaria, según el siguiente balance de fuerza

$$\left( \tilde{M} + \tilde{m}_{ad} \right) \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \left( \tilde{M} + \tilde{m}_{ad} \right) \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right) - \tilde{M} \gamma_h (\vec{v}_p - \vec{u}) + \langle \vec{f}(\vec{x}, t) \rangle_{\vec{i}} \quad (\text{B.13})$$

donde  $\gamma_h = 3 \pi \delta \eta / M$  es la tasa de fricción horizontal.





En dos dimensiones, el promedio temporal de la fuerza de deslizamiento calculada sobre un periodo de la onda, se da de manera adimensional a través de la siguiente relación,

$$\langle \vec{f} \rangle = \begin{pmatrix} \langle \tilde{f}_x \rangle \\ \langle \tilde{f}_y \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \tilde{k} \tilde{a}^2 \tilde{\omega}^2 (\tilde{M} - \tilde{m}_d) \begin{pmatrix} \sin 2\tilde{k} \tilde{x} (1 - \cos 2\tilde{k} \tilde{y}) \\ \sin 2\tilde{k} \tilde{y} (1 - \cos 2\tilde{k} \tilde{x}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

donde  $\tilde{M}$  es la masa del flotador,  $\tilde{m}_d$  es la masa del líquido desplazado y  $\tilde{m}_{ad}$  es una masa virtual equivalente a la partícula de fluido en la interfaz. Los factores de escala previamente definidos [véanse las ecs. (B.3) a (B.8)] se usan para adimensionalizar la ecuación anterior.

### B.4.3. Arrastre Viscoso

El flotador experimenta también una fuerza de arrastre puesto que está parcialmente sumergida en el fluido. Considerando que la línea de flotación se ubica en el ecuador de la partícula, esta fuerza puede estimarse, usando los factores de escala que se dedujeron previamente [véanse las ecs. (B.3) a (B.8)], como

$$\tilde{F}_{St} = 3 \pi \tilde{\delta} \tilde{\eta} (\vec{v}_p - \vec{u}) \quad (\text{B.15})$$

siendo  $\vec{u}$ , la velocidad horizontal de la superficie de la onda estacionaria, dada por

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \end{pmatrix} = \tilde{a} \tilde{\omega} \sin \tilde{\omega} \tilde{t} \begin{pmatrix} \cos \tilde{k} \tilde{x} \sin \tilde{k} \tilde{y} \\ \sin \tilde{k} \tilde{x} \cos \tilde{k} \tilde{y} \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

donde  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{\omega}$ ,  $\tilde{k}$  y  $\tilde{t}$  son las versiones adimensionales para la amplitud, la frecuencia, el número de onda y el tiempo, respectivamente, escaladas a su vez empleando las ecs. (B.3) a (B.5).

### B.4.4. Fuerzas de contacto

Para estas simulaciones, se emplea un modelo de contacto de partículas suaves. Este algoritmo considera que el traslape entre dos partículas  $i$  y  $j$ , es proporcional a una fuerza repulsiva [61]. El principal objetivo de esta técnica es calcular la fuerza de repulsión cuando la distancia entre los centros de las partículas,  $d_{ij}$ , es menor a la suma de los radios ( $R_i + R_j$ ). Añadiendo al análisis la interacción friccional a través del amortiguamiento, la fuerza de contacto resulta la suma de la fuerza de repulsión y la fuerza de amortiguamiento. En este caso, la fuerza repulsiva se calcula empleando un resorte ideal de Hooke, en el que la fuerza es lineal al traslape. Por otro lado, la fuerza de fricción se estima empleando un amortiguador también lineal. Usando las ecuaciones (B.3) a (B.8), la fuerza elástica de repulsión se define como

$$\tilde{F}_H = \tilde{K}_H (2 \tilde{R}_p - 2 \tilde{d}_{ij}) \quad (\text{B.17})$$

donde  $\tilde{k}_H = k_H/\gamma$ . Análogamente, en el modelo del amortiguador lineal, la fuerza es proporcional a la velocidad relativa de dos partículas que colisionan,  $V_{ij}$

$$\tilde{F}_D = -\tilde{\alpha} V_{ij} \quad (\text{B.18})$$

siendo  $\tilde{\alpha} = \alpha/(\gamma \tau_c)$ , el coeficiente de amortiguamiento, que a su vez se calcula por medio del coeficiente de



restitución,  $e_R$ , y  $V_{ij}$  la velocidad relativa de las partículas  $i$  y  $j$  antes del impacto.

Finalmente, es necesario calcular el tiempo de contacto entre las partículas, usando la escala de tiempo basada en la constante del resorte ideal de Hooke, calculada como

$$\tau_{Hooke} = \sqrt{\frac{R_p}{a_{Hooke}}} = \sqrt{\frac{R_p M}{k_H R_p}} = \sqrt{\frac{M}{k_H}} \quad (\text{B.19})$$

Definidos los parámetros adimensionales, se muestra a continuación una tabla con los valores dimensionales típicos empleados en las simulaciones de este análisis.

Propiedades Dimensionales			
Número de Flotadores	$N = 10$	Radio de los flotadores	$R_p = 0.35 \times 10^{-3} \text{ [m]}$
Ángulo de contacto	$\theta_c = 74 \text{ [}^\circ\text{]}$	Coefficiente de restitución	$e_R = 0.5$
Constante elástica	$k_H = 0.5 \text{ [N/m]}$	Amplitud de oscilación	$a = 1 \times 10^{-3} \text{ [m]}$
Frecuencia de oscilación	$\omega = 35 \text{ [Hz]}$	Intervalo de tiempo	$\Delta t = 1 \times 10^{-3} \text{ [s]}$
Tiempo de simulación	$t_{end} = 0.5 \text{ [s]}$	Longitud de onda (dirección x)	$\lambda_{wx} = 16.8 \times 10^{-3} \text{ [m]}$
Longitud de onda (dirección y)	$\lambda_{wy} = 16.8 \times 10^{-3} \text{ [m]}$	Posición de la pared izquierda	$x_L = 0 \text{ [m]}$
Posición de la pared derecha	$x_R = 16.8 \times 10^{-3} \text{ [m]}$	Posición de la pared inferior	$y_B = 0 \text{ [m]}$
Posición de la pared superior	$y_T = 16.8 \times 10^{-3} \text{ [m]}$	Tensión superficial de la interfaz	$\gamma = 0.073 \text{ [N/m]}$
Densidad del líquido	$\rho_l = 1000 \text{ [kg/m}^3\text{]}$	Viscosidad dinámica	$\eta = 0.89 \times 10^{-3} \text{ [Pa} \cdot \text{s]}$
Densidad del flotador	$\rho_s = 1050 \text{ [kg/m}^3\text{]}$	Aceleración de la gravedad	$g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}$

Tabla B.3: Parámetros típicos empleados en las simulaciones.



## B.5. Resultados

### B.5.1. Dinámica de un flotador único

Las simulaciones del movimiento de un flotador unitario se realizaron empleando un modelo cinemático simple, mostrado esquemáticamente en la fig. B.3, con el fin de analizar la no uniformidad temporal en el movimiento de la partícula durante un periodo de la onda. Dicha simulación reproduce la mecánica de un flotador cuya posición relativa respecto al perfil de la onda puede modificarse. La posición, la velocidad y la aceleración del flotador se analizan tanto en la dirección horizontal como vertical, al considerar que el flotador se desplaza a lo largo de una línea recta a través de la onda. Esta es una suposición razonable cuando la longitud de onda es varias veces mayor en comparación con el tamaño flotador, como en el caso de este experimento.

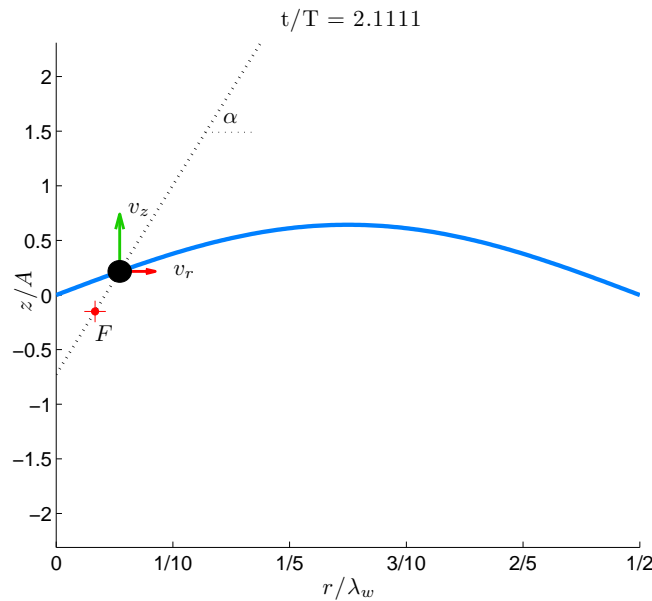


Figura B.3: Diagrama de un modelo dinámico de un flotador único.

La posición y la orientación de la línea puede alterarse, cambiando la ubicación del foco,  $F$ , así como el ángulo,  $\alpha$ , que en conjunto definen el lugar geométrico de la recta. Considérese un sistema de referencia cilíndrico cuyo origen se ubica en un nodo de la onda estacionaria, en una vista lateral. Variando las propiedades geométricas de la línea, pueden observarse diferentes patrones de onda en el movimiento del flotador, que presenta una dinámica distinta para la mitad negativa y positiva del ciclo. Un ejemplo del desempeño del modelo se observa en la fig. B.4.

La posición inicial del flotador es el punto de intersección de la línea recta y el perfil no perturbado de la oscilación. Las variaciones en la velocidad vertical y horizontal se miden desde este punto, en las direcciones  $z$  y  $r$ , referidas a la longitud de onda,  $\lambda_w$ , la amplitud,  $A$ , y el periodo,  $\tau$ . La posición ( $p_i/\lambda_w$ ), velocidad ( $p_i \tau/\lambda_w t$ ) y aceleración ( $p_i \tau^2/\lambda_w t^2$ ) adimensionales del flotador se miden para diferentes condiciones, a lo largo de un periodo de tiempo definido. El aspecto de los perfiles de las cantidades mencionadas se observan en la figura B.5.



Como es evidente, durante ambas fases del ciclo, el flotador se mueve hacia arriba y hacia abajo. La importancia de la no uniformidad del movimiento aparece cuando se analiza cada una de las etapas. En la mitad positiva, el flotador se alza siguiendo el perfil de la onda (a). El flotador alcanzará entonces la cima y caerá nuevamente como resultado del cambio de fase en el ciclo (b). Cuando el flotador está en un valle, el flotador sigue bajando hasta el fondo del perfil de la onda (c). Finalmente, cuando el perfil comienza a crecer, el flotador cambia el sentido de su movimiento (d).

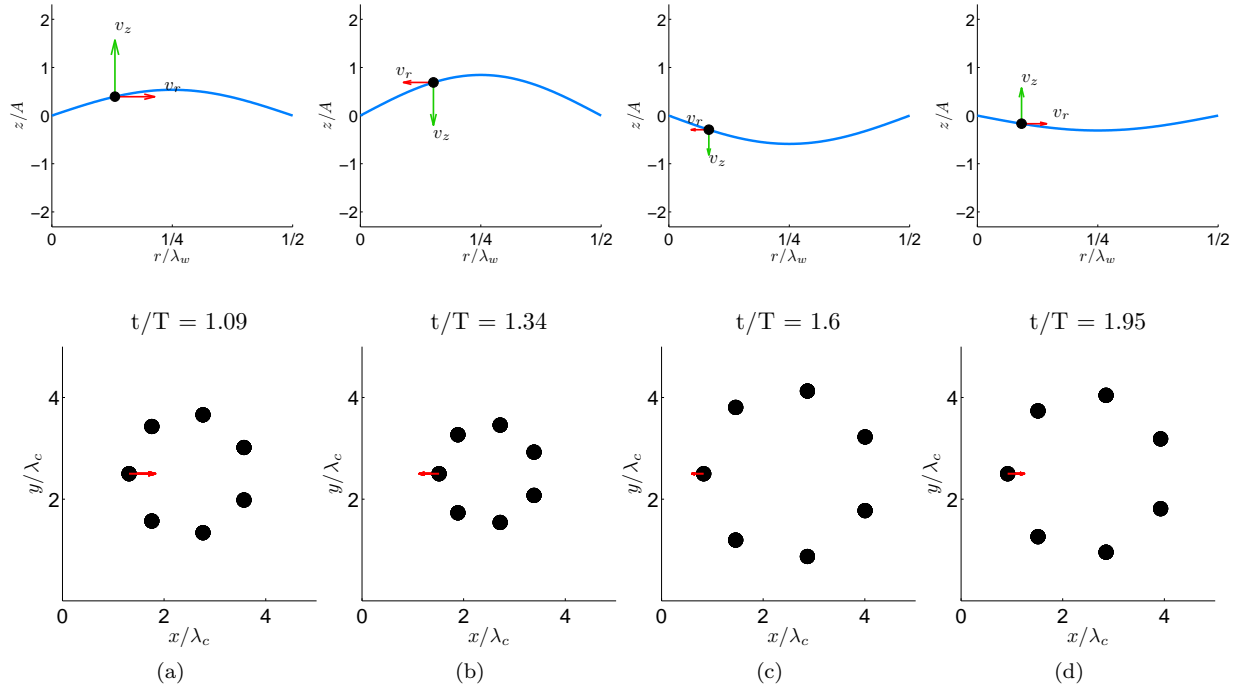


Figura B.4: Las diferentes etapas de una simulación del movimiento de un flotador individual (fila superior). El flotador sube y baja con una aceleración diferente durante cada mitad del ciclo, en consecuencia, la formación de cúmulos muestra *respiración* desigual. En una vista superior, los cúmulos parecen colapsarse hacia el antinodo más rápido de lo que hacen al abrirse, durante la mitad negativa del ciclo. La dirección y la magnitud de la velocidad radial del flotador se representan con una flecha roja.

Es claro que si la línea recta que restringe el desplazamiento del flotador es totalmente vertical, éste se moverá hacia arriba y abajo sin tener componente radial. Así, la posición, la velocidad y la aceleración de un flotador en movimiento bajo tales condiciones sigue el mismo perfil sinusoidal de la onda. Una sutil variación del ángulo o la posición de la línea, pueden producir diferentes valores en la cinemática del flotador. Lo primero a notar es que la elevación y declinación se ven favorecidas durante la mitad positiva del ciclo, si el ángulo de la línea es agudo. Por otro lado, durante la fase negativa, la distancia que el flotador puede recorrer es menor que la de la parte positiva. Por lo tanto, los perfiles de velocidad y aceleración mostrarán un perfil diferente.

Derivado de este movimiento idealizado, el mecanismo de dispersión/colapso de las partículas que forman un cúmulo puede ser descrito cualitativamente. Según lo indicado antes, la distancia que el flotador es capaz de viajar en cada mitad del ciclo es diferente. Puesto que la velocidad del flotador es la misma tanto en el medio positivo como negativo del ciclo (ver fig. B.5b), y la distancia es mayor durante la mitad positiva, una distancia diferente debe cubrirse en la misma cantidad de tiempo, de modo que la aceleración en la parte



positiva es mayor. Así, las partículas que suben durante la mitad positiva del ciclo llegan a la cima del perfil de la onda más rápidamente.

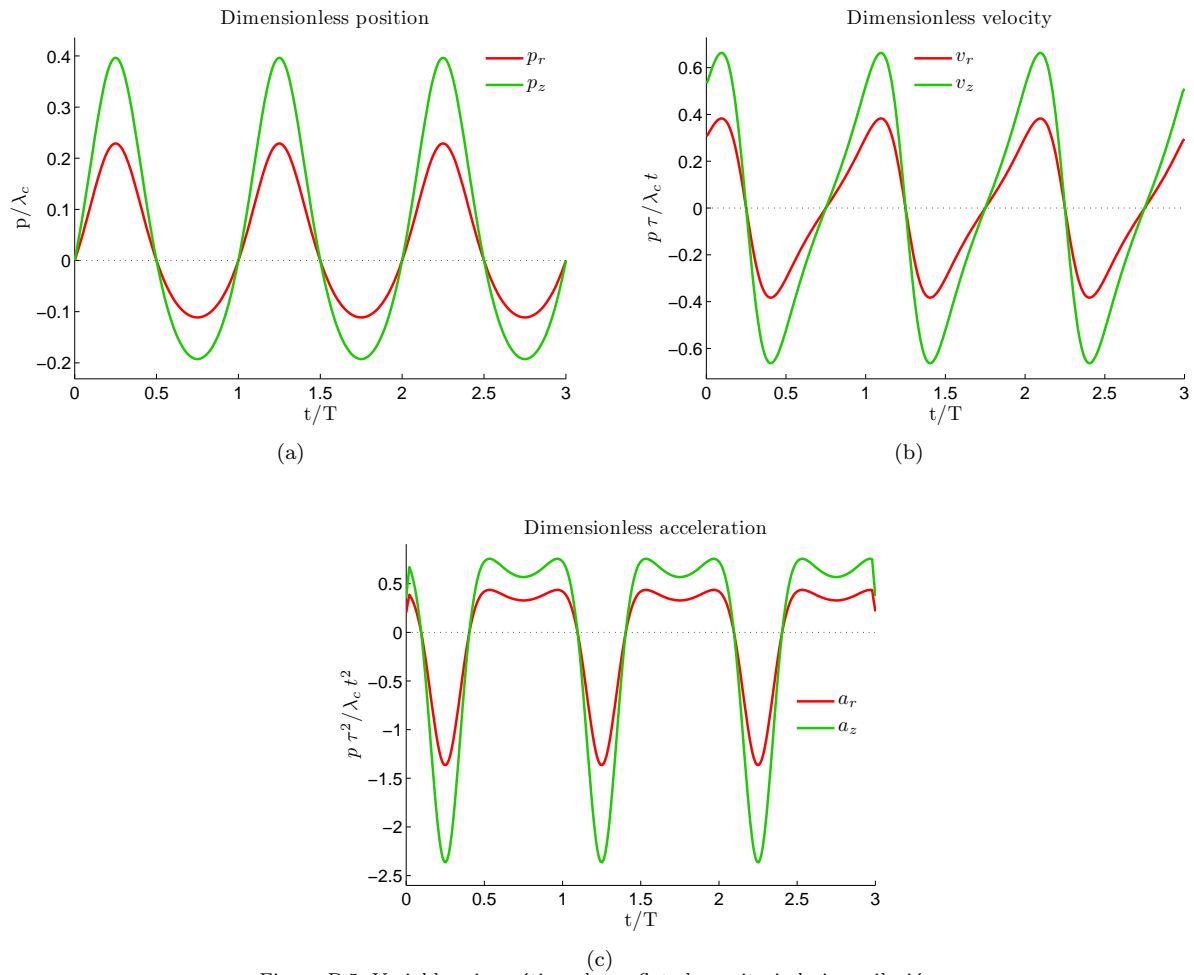


Figura B.5: Variables cinemáticas de un flotador unitario bajo oscilación.



## B.5.2. Simulaciones

El desempeño de un modelo dinámico simple para un flotador ha sido analizado previamente. La presente sección muestra los resultados de simulaciones numéricas utilizando el modelo descrito antes en el análisis del balance de fuerza. En la primera parte, se analiza la dinámica de un flotador al azar en un sistema de concentración cada vez mayor, de acuerdo a los valores indicados en la tabla B.1, con una combinación única de los parámetros de contacto. Posteriormente, se estudia el comportamiento global de la velocidad de todos los flotadores del sistema, las componentes horizontales y verticales, y la magnitud de dicha variable. Para estimar la influencia de los parámetros de contacto sobre la movilidad flotador, estas simulaciones se realizaron variando la concentración de partículas en cada caso y utilizando las combinaciones de la tabla B.2.

### B.5.2.1. Cinemática de un flotador que interactúa con otros

El seguimiento de un flotador individual se realiza a través de la manipulación de los datos de salida producidos por las simulaciones, que se realizan durante un tiempo total de aproximadamente 80 períodos de onda. Usando rutinas numéricas, los datos de posición, velocidad y aceleración pueden obtenerse simultáneamente para un flotador elegido. Estas cantidades se escalan tomando como factores el periodo de la onda,  $\tau$  y la longitud capilar,  $\lambda_c$ . Dado que la simulación considera una vista superior del recipiente, el movimiento del flotador está representado tanto en la dirección  $X$  como  $Y$ . El seguimiento temporal para un flotador aleatorio en sistemas de concentración diferente se representa en la fig. (B.6), mostrando las componentes adimensionales de la posición, (medida desde su ubicación inicial), velocidad y aceleración.

La primero que puede advertirse, es que a medida que la concentración del sistema aumenta, los perfiles para los componentes de la posición del flotador, exhiben picos más agudos. Del mismo modo, las señales de velocidad son más agudas en concentraciones más altas, donde el efecto de las colisiones entre los flotadores modifica el perfil de onda. Para las concentraciones extremas ( $\phi = 0,10, 0,25$  y  $0,70$ ), la velocidad senoidal de velocidad conserva su carácter, sin embargo, para un gran número de flotadores, las repetidas colisiones inducen cambios de velocidad. En los sistemas de baja concentración, un flotador no se verá influido por los demás y su movimiento global estará dominado principalmente por la propia onda. En un sistema muy denso, la interacción entre flotadores es visible en la señal de velocidad. Sin embargo, la gran cantidad de flotadores limita el movimiento mutuo y en consecuencia, también está dominado por la onda.

Los sistemas de concentración intermedia ( $\phi = 0,40$  y  $0,55$ ) muestran flotadores que siguen el movimiento de la onda en una sola dirección. La cantidad de flotadores no es suficiente para limitar la movilidad del flotador, sin embargo las colisiones pueden modificar la ruta del flotador. Esta transición entre un régimen de concentración alta y baja se puede observar en las gráficas de aceleración. Estas señales exhiben un rápido cambio en la dirección del flotador debido a la alta cantidad de colisiones.

Por supuesto este análisis no es representativo de todo el sistema. Es por eso que, el comportamiento de la velocidad se estudia globalmente para todos los flotadores de un sistema, como se muestra en la siguiente sección.



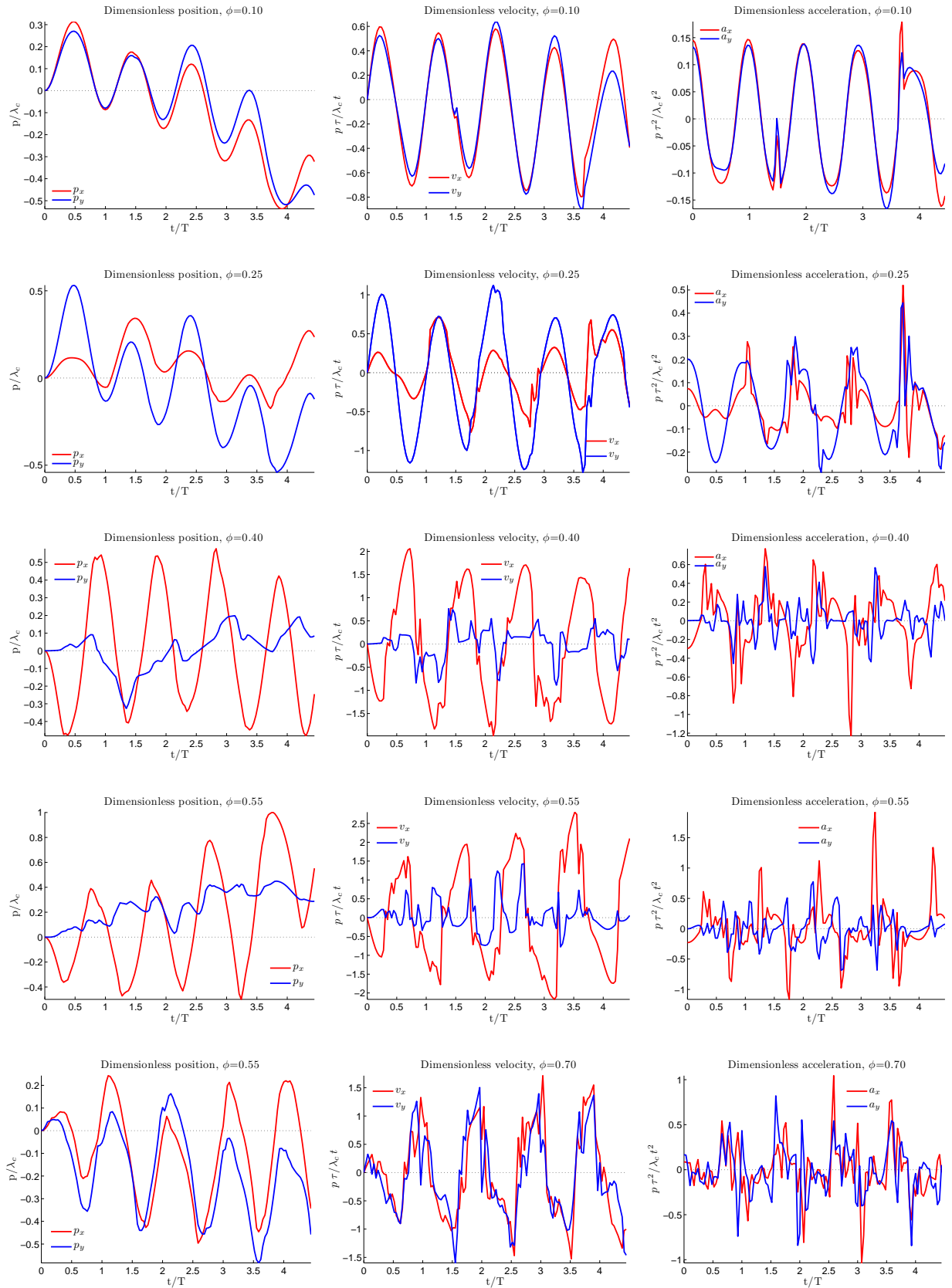


Figura B.6: Perfiles para la posición, velocidad y aceleración de un flotador dentro de un sistema de concentración variable (aumentando hacia abajo). A medida que crece la concentración, los picos de señales resultantes son más agudas. Para una  $\phi$  elevada, el movimiento local del flotador está influenciado por la gran cantidad de colisiones con otros, no obstante, está todavía fuertemente impulsado por la fuerza de la onda.



### B.5.2.2. Cinemática colectiva de flotadores en sistemas de concentración variable

El resultado de las simulaciones para sistemas con los parámetros mostrados anteriormente (tablas B.1 y B.2) se describe a continuación. Se observa en los sistemas de baja concentración (ver fig. B.7), los flotadores forman cúmulos en los antinodos como se esperaba a partir de la observación de los experimentos, una vez que las interacciones han llegado a un estado estacionario. En un primer momento, las colisiones de los flotadores parecen ser aleatorias y desordenadas (a), después de un tiempo, algunos de ellos se reúnen en estructuras apenas definidas en torno al antinodo de la onda (b). Estos grupos ahora obedecen a las imposiciones de movimiento de onda, expandiéndose y colapsando de vuelta hacia el antinodo (c) en cada parte del ciclo, mientras que un grupo se abre, el adyacente se cierra (d), en un mecanismo conocido como *respiración*.

Por otro lado, los sistemas con un alto número de integrantes (ver fig. B.8) muestran propiedades diferentes, producto de la elevada cantidad de colisiones y la influencia de las propiedades de contacto de las partículas. En el inicio de las simulaciones, los flotadores chocan con mayor frecuencia y por lo tanto, su velocidad así como la distancia media que recorren es menor que en el caso diluido (a). Si la concentración y los valores de contacto son lo suficientemente altos, no se observa la formación de cúmulos y por el contrario, se presenta cristalización. Tal como se vio en los experimentos, se forman agujeros en los antinodos (b), sin embargo los generados por el código numérico, no permanecen durante todo el ciclo. Estas estructuras aparecen en los valles de la onda, mientras que los picos muestran una alta densidad de flotadores. Cuando el ciclo se invierte, las posiciones de los agujeros cambian su posición a la diagonal opuesta (c,d).

En todos los casos simulados, se realizó un análisis estadístico con el fin de examinar el efecto de la concentración, estudiando los datos de velocidad media de todos los flotadores del sistema. En cada caso, los componentes de la velocidad,  $v_x$ ,  $v_y$ , y la magnitud,  $v_m$ , se obtienen flotador por flotador, a lo largo del tiempo de simulación. El conjunto de datos resultante se escala con el valor cuadrático medio ( $v_{rms}$ ). Por último, el promedio se toma sobre todas las partículas del sistema. Este procedimiento se ejecuta para cada valor de concentración, y la combinación del coeficiente de restitución y la constante de resorte. La distribución de la velocidad promedio se compara con un ajuste gaussiano, en el caso de componentes de la velocidad, y para un ajuste de Rayleigh en el caso de la magnitud. Los resultados para cada conjunto de condiciones ( $\phi$ ,  $e_R$  y  $k_H$ ) se muestra en la fig. B.9.

Como se mencionó antes, las fuerzas de restitución y de amortiguamiento no son relevantes para el movimiento de los flotadores, ya que los contactos entre ellos no son duraderos. Como se muestra en las gráficas de las distribuciones, estos datos parecen ser independientes de los parámetros de contacto, lo que demuestra este argumento. El comportamiento relevante aparece al observar los datos que se extienden alrededor de la curva ajustada. Para concentraciones bajas, las distribuciones normales -que representan los componentes de velocidad,  $v_x$  y  $v_y$ , muestran una punta. Asimismo, la distribución de la magnitud de la velocidad muestra una meseta con respecto a la curva ajustada. Estas características desaparecen a medida que la concentración aumenta.





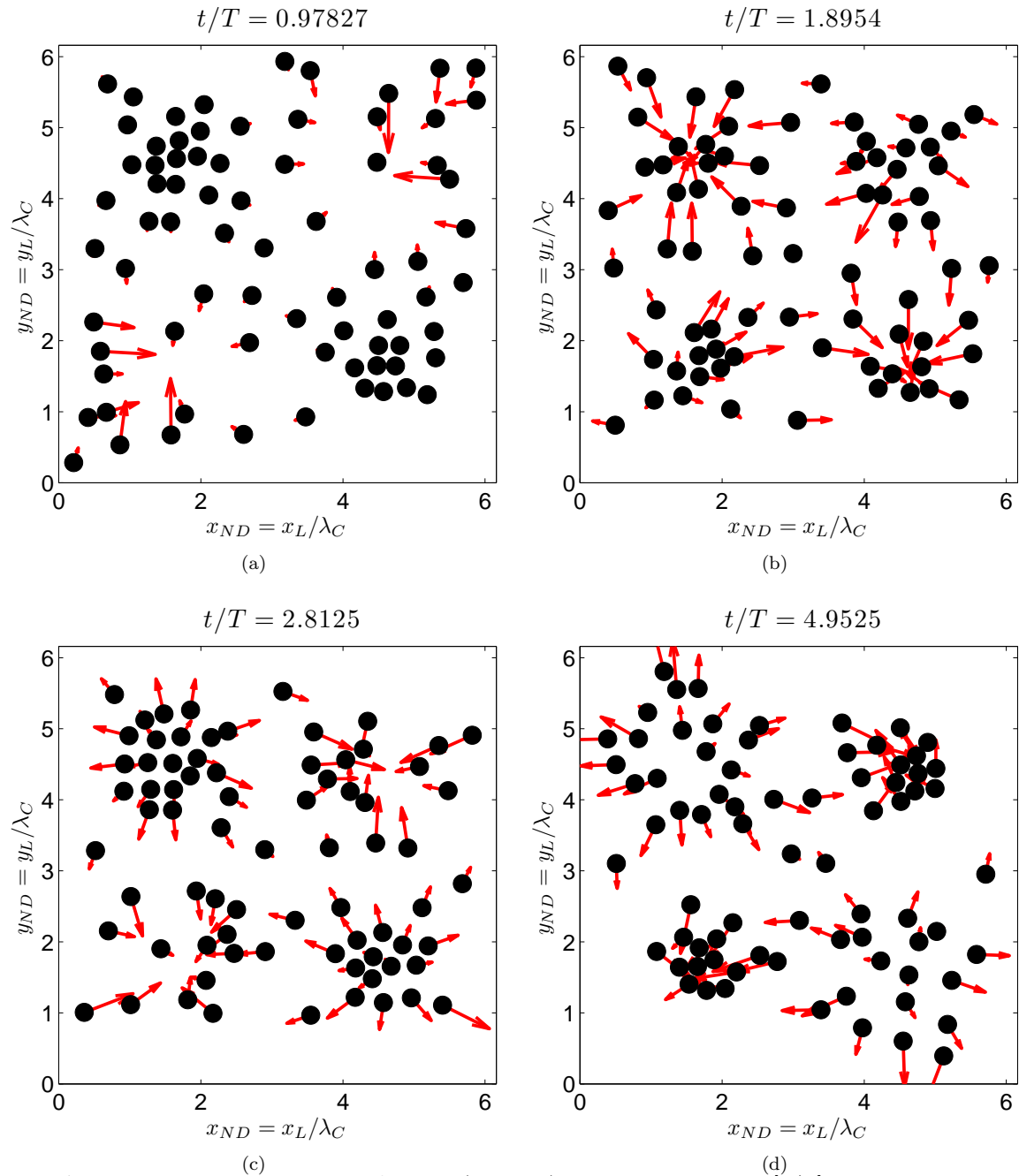


Figura B.7: Aspecto de una simulación usando 75 flotadores ( $\phi = 0.102$ ) con  $e_R = 0.2$  y  $k_H = 0.2$  [N/m]. La dirección del movimiento así como la velocidad horizontal de cada partícula se indica con una flecha roja.



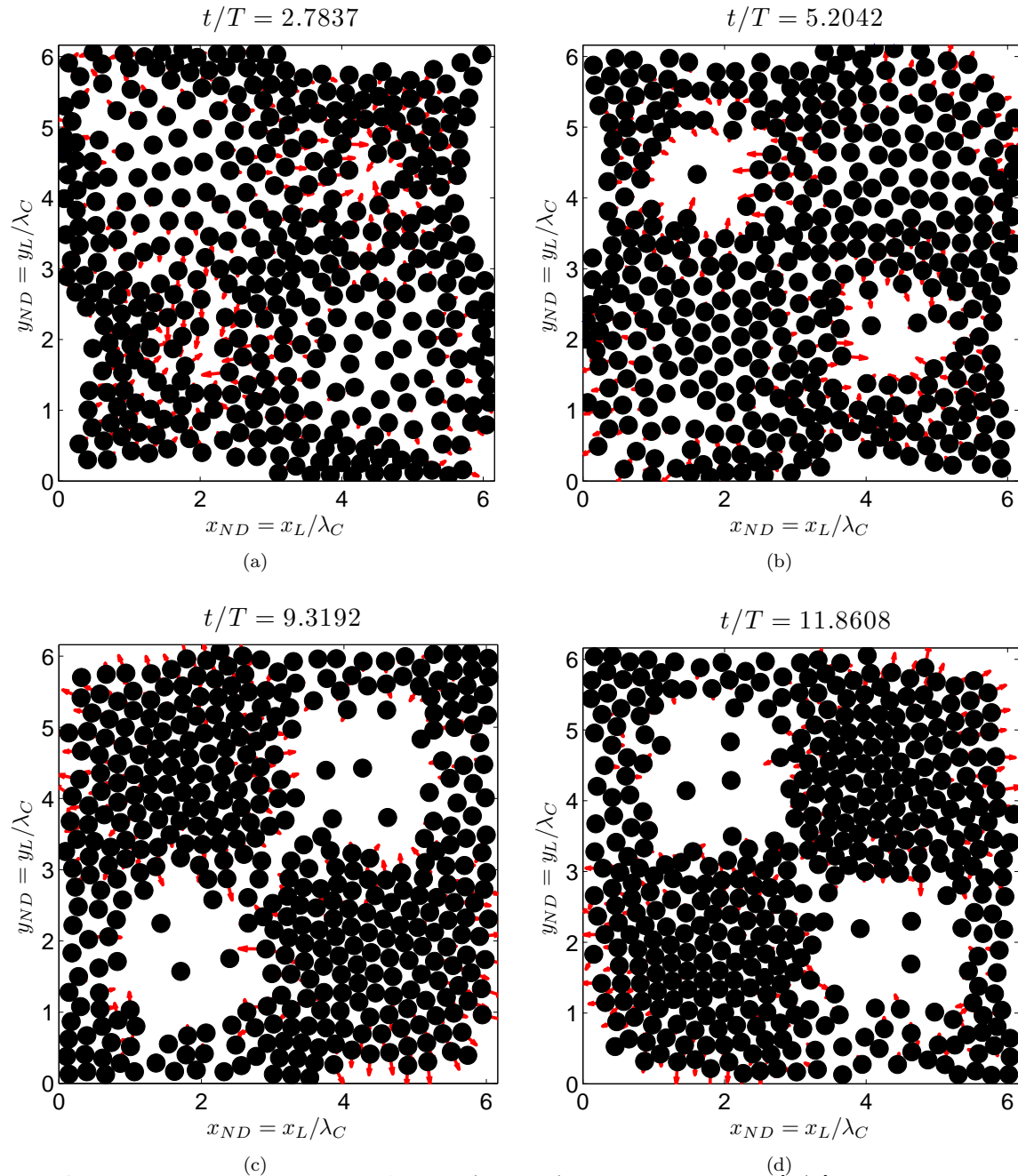


Figura B.8: Aspecto de una simulación usando 405 flotadores ( $\phi = 0.552$ ) con  $e_R = 0.5$  y  $k_H = 0.6$  [N/m]. La dirección del movimiento así como la velocidad horizontal de cada partícula se indica con una flecha roja.



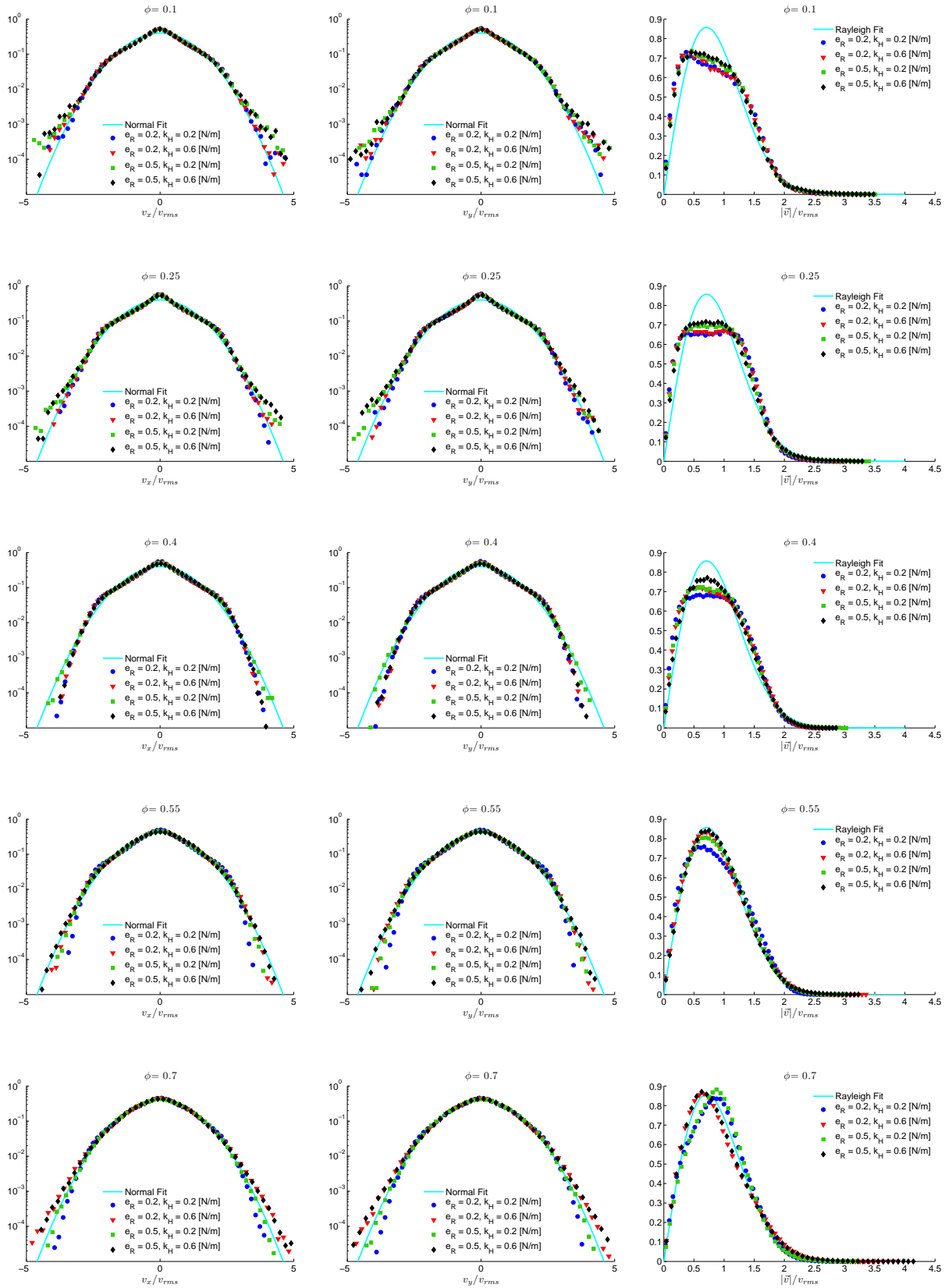


Figura B.9: Distribuciones para los componentes y la magnitud de la velocidad para varios valores de  $\phi$  y los parámetros de contacto. Como se esperaba, estos resultados muestran independencia de las interacciones entre partículas. A medida que la concentración se incrementa los datos colapsan a los ajustes.



## B.6. Conclusiones

La dinámica de los sistemas de flotadores en la superficie de una onda estacionaria está principalmente dominada por dos fuerzas: la capilaridad y la fuerza de la onda. Puesto que la velocidad de los flotadores y la viscosidad del líquido no son lo suficientemente altas, la fuerza de arrastre no es relevante para el movimiento global de grupos de flotadores. Asimismo, la repulsión y las fuerzas de amortiguación entre los flotadores son significativas durante períodos cortos. Así, la cantidad de flotadores sometidos al movimiento de las ondas favorece la acción de una u otra fuerza que afecte a los flotadores y la formación de estructuras definidas. En un régimen diluido, la fuerza capilar entre los flotadores no puede hacer que permanezcan juntos, siendo la fuerza más importante aquella debida al movimiento de la onda. Para un gran número de flotadores, las interacciones debido a la capilaridad y la misma concentración evitan que las partículas se esparzan. Por lo tanto, se espera que la magnitud de las fuerzas capilares y de la onda sea comparable en los valores de concentración intermedia.

A fin de comprender la transición entre estos regímenes, se realizaron análisis de flotador simple y múltiple para sistemas de concentración variable. Cinco valores de concentración, y cuatro combinaciones de coeficiente de restitución y constante de resorte de los flotadores fueron empleadas en las simulaciones numéricas. Para el flotador único, las mediciones de su posición, velocidad y la aceleración se realizaron tanto para una vista lateral como una superior del flotador en un perfil de onda. El análisis estadístico de flotadores múltiples se realizó sobre los datos de velocidad del total de partículas que conforman el sistema bajo estudio.

Utilizando un modelo cinemático sencillo, puede estudiarse el comportamiento de un flotador único en relación con el perfil, modificando la posición de la línea a través de la que se mueve el flotador. Un análisis con este modelo ofrece un escenario idealizado para el movimiento de un flotador en un sistema de baja concentración considerando una situación de estado estacionario en el que los cúmulos están estructurados entre el flujo. Aún cuando el modelo está basado en características geométricas simples y no incluye colisiones ni influencia inercial, permite observar la falta de uniformidad en el movimiento de un flotador como resultado de su posición relativa respecto al perfil de onda.

Se realizaron simulaciones para sistemas de diversas concentraciones y tamaños, los cuales se efectuaron considerando un flotador único y el total de integrantes en la simulación. Con estos datos se construyeron las distribuciones de velocidad resultantes de cada valor de concentración. Estas funciones de distribución para cada componente de la velocidad muestran un mejor ajuste a la distribución normal a medida que aumenta la concentración, lo que implica que la velocidad de los flotadores individuales es menos aleatoria que en un régimen diluido.



# UNIVERSITEIT TWENTE.

Faculty of Science and Technology  
Chair Physics of Fluids

**Enrique Sandoval Nava**

Departamento de Reología del Instituto de Investigaciones en Materiales (IIM)  
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)  
Ciudad Universitaria  
Coyoacán  
04510, Distrito Federal  
Estados Unidos de México

Your reference	—	phone	053-4892387
Our reference	4700.00A.11/DM	fax	053-4898068
Date	February 18, 2011	e-mail	d.vandemeer@utwente.nl


cc. Prof. dr. Detlef Lohse (group leader Physics of Fluids)  
Prof. dr. José Roberto Zenit Camacho (UNAM)

subject Invitation exchange student at the University of Twente, the Netherlands

Dear Enrique,

It is a great pleasure to formally invite you, Enrique Sandoval Nava, to study as an exchange student in our group, Physics of Fluids, at the University of Twente during the period starting from March 30, 2011 and ending at June 30, 2011. As we have discussed previously you will be participating in a project on the clustering of particles on Faraday waves, supervised by Ceyda Sanli MSc and myself.

Sincerely,



Devaraj van der Meer  
Associate Professor  
Physics of Fluids group  
University of Twente

CC. Prof. dr. Detlef Lohse (group leader Physics of Fluids); Prof. dr. José Roberto Zenit Camacho (UNAM)

# UNIVERSITEIT TWENTE.

Faculty of Science and Technology  
Chair Physics of Fluids

Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)  
Ciudad Universitaria  
Coyoacán  
04510, Distrito Federal  
Estados Unidos Mexicanos

Your reference	—	phone	053-4892387
Our reference		fax	053-4898068
Date	July 3, 2011	e-mail	d.vandermeer@utwente.nl
cc.	Prof. dr. Detlef Lohse (group leader Physics of Fluids) Prof. dr. José Roberto Zenit Camacho (UNAM)		
subject	Exchange student Enrique Sandoval Nava		

To Whom It May Concern,

This is to attest that Enrique Sandoval Nava has successfully studied as an exchange student in our group, Physics of Fluids, at the University of Twente during the period starting from March 30, 2011 and ending at June 30, 2011. He has been working on simulations of the clustering of particles on Faraday waves, supervised by Ceyda Sanli MSc and myself. His commitment to his studies has been exemplary during this period.

Sincerely,



Devars van der Meer  
Associate Professor  
Physics of Fluids group  
University of Twente

CC. Prof. dr. Detlef Lohse (group leader Physics of Fluids); Prof. dr. José Roberto Zenit Camacho (UNAM)



*Presentaciones en congresos*

8 de septiembre de 2009

**Enrique Sandoval**  
**Instituto de Investigaciones en Materiales, UNAM**  
**Ciudad de México**

Estimado Enrique:

Gracias por enviar su trabajo,

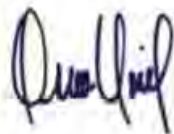
*Campo de velocidad dentro de una zona estancada en un flujo granular.,*

para ser considerado por el comité organizador del XV Congreso. Me es grato informarle que hemos decidido aceptarlo para su presentación en la modalidad de conferencia de 15 minutos. Por favor visite la página web del congreso,

<http://www.smf.mx/~ddf-smf/congreso.html>,

para obtener más información acerca del registro, las reservaciones de hotel, etcétera.

Esperando verlo en Acapulco, le envío un saludo cordial.



Oscar Velasco Fuentes



DFD09-2009-000975

Abstract Submitted  
for the DFD09 Meeting of  
The American Physical Society

Sorting Category: 20. (E)

**Velocity field within a *stagnant zone* in a granular flow**

ENRIQUE SANDOVAL, ROBERTO ZENIT, Universidad Nacional Autonoma de Mexico — It is known that in granular flows stagnant zones may appear. It has been usually thought that these regions remain immobile; however creep-like motion has been observed. The objective of this study is to measure the velocity field within the stagnant zone. Are the flow properties of such zone determined by the material (particle size, maximum solid fraction, roughness) or the flow (velocity)? We hope to answer this question. A gravity-driven granular flow was produced with a vertical channel filled with glass beads. The mean speed was controlled with discharge hopper. A solid plate is positioned in the center of the chute; its interaction with the flow produces a stagnant region in its upstream side. Using an image correlation technique (normally used in the PIV method), velocity profiles were measured for different angles, mean discharge velocities and plate sizes. For the case in which plate is perpendicular to flow, the velocity was found to decay exponentially within stagnant region. The exponential decay ratio is proportional to the distance from the plate. In this talk the nature of this behavior and its implications for granular media rheology will be discussed.

- Prefer Oral Session  
 Prefer Poster Session

Roberto Zenit  
zenit@unam.mx  
Universidad Nacional Autonoma de Mexico

Date submitted: 06 Aug 2009

Electronic form version 1.4



## *División de Dinámica de Fluidos*

Guadalajara, Jal., a 28 de septiembre de 2011

El Comité Organizador del XVII Congreso de Dinámica de Fluidos de la División de Dinámica de Fluidos de la Sociedad Mexicana de Física, que se celebrará en Guadalajara, Jalisco, del 8 al 11 de noviembre de 2011, tiene el agrado de informarle que su trabajo titulado

**Zona de estancamiento granular sobre una placa plana**, de Enrique Sandoval, Roberto Zenit.

ha sido aceptado para su presentación oral.

Para información acerca del registro, reservaciones de hotel, programa, etcétera, favor de visitar la siguiente página web del congreso:

<http://www.iam.udg.mx/XVII-CDDF/>

Esperando verlo en Guadalajara, Jalisco, le envío un saludo cordial.

Por el Comité Organizador

Dra. Anne Cros  
Presidente de la División de Dinámica Fluidos de la SMF

Sociedad Mexicana de Física  
Facultad de Ciencias, UNAM  
2º piso, Departamento de Física  
[smf@ciencias.unam.mx](mailto:smf@ciencias.unam.mx)

# Índice de figuras

1.1. Materia granular en la vida diaria. . . . .	9
1.2. La peculiar física de los materiales granulares. . . . .	11
1.3. Ángulo de reposo y fricción interna. . . . .	12
1.4. Ángulo de estabilidad dinámica. . . . .	13
1.5. Dispositivos comunes de flujo granular denso. . . . .	14
1.6. Patrones de flujo. . . . .	16
1.7. Marco de referencia. . . . .	19
1.8. Partículas esféricas en contacto. . . . .	22
1.9. Esquema del modelo de partícula suave. . . . .	23
1.10. Flujo frontal sobre una placa plana. . . . .	25
1.11. Zona de estancamiento sobre un cilindro. . . . .	26
3.1. Dispositivo experimental. . . . .	30
3.2. Tiempo de descarga y velocidad media. . . . .	31
3.3. Regiones de observación. . . . .	32
3.4. Campo vectorial en escala cromática. . . . .	34
3.5. Mapas escalares en modalidad superficie y contorno. . . . .	36
3.6. Interpolación bilineal en torno a un punto. . . . .	37
3.7. Proceso para estimación de curvas en flujo frontal. . . . .	38
3.8. Proceso para adquisición de datos en flujo angular. . . . .	39
3.9. Forma y tamaño de la zona estancada. . . . .	40
3.10. Histogramas de velocidad de descarga. . . . .	42
3.11. Comparativo de velocidad experimental. . . . .	42
4.1. Mapas de velocidad para flujo frontal. . . . .	45
4.2. Mapas de temperatura granular para flujo frontal. . . . .	46
4.3. Parámetros de estructura. . . . .	47
4.4. Mapas de velocidad para flujo angular. . . . .	49

4.5. Mapas de temperatura granular para flujo angular. . . . .	50
4.6. Velocidad central para flujo angular. . . . .	51
4.7. Ubicación del punto de estancamiento. . . . .	52
4.8. Morfología de la región de estancamiento. . . . .	53
4.9. Tamaño de la región de estancamiento. . . . .	54
5.1. Relaciones de velocidad por tamaño de placa. . . . .	56
A.1. Esquema de una placa inclinada. . . . .	66
A.2. Esquema de una placa inclinada. . . . .	67
A.3. Modelos para el punto de estancamiento. . . . .	68
A.4. Área de la región de estancamiento. . . . .	69
B.1. Dispositivo experimental. . . . .	73
B.2. Cúmulos antinodales y agujeros nodales. . . . .	74
B.3. Diagrama de un modelo dinámico de un flotador único. . . . .	79
B.4. Diferentes etapas del movimiento de un flotador. . . . .	80
B.5. Variables cinemáticas de un flotador unitario bajo oscilación . . . . .	81
B.6. Perfiles cinemáticos de un flotador. . . . .	83
B.7. Simulación de un sistema de baja concentración. . . . .	85
B.8. Simulación de un sistema de alta concentración. . . . .	86
B.9. Funciones de distribuciones de probabilidad para la velocidad. . . . .	87

# Índice de cuadros

3.1. Diseño experimental. . . . .	31
3.2. Tiempo y velocidad de descarga del canal. . . . .	41
B.1. Número de flotadores y la concentración del sistema. . . . .	74
B.2. Propiedades de contacto entre partículas. . . . .	74
B.3. Parámetros típicos de simulación. . . . .	78

# Bibliografía

- [1] J. Duran and A. Reisinger. *Sands, Powders, and Grains: An Introduction to the Physics of Granular Materials*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1999.
- [2] R. Kühne M. Schreckenberg A. Schadschneider, T. Pöschel and D. E.Wolf. *TRAFFIC AND GRANULAR FLOW'05*. Springer, Berlin, 2005.
- [3] H.J. Herrmann. Granular matter. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 313(1-2):188 – 210, 2002. Fundamental Problems in Statistical Physics.
- [4] G. D. Scott and D. M. Kilgour. The density of random close packing of spheres. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2(6):863, 1969.
- [5] K. K. Rao and P. R. Nott. *An Introduction to Granular Flow*. Cambridge University Press, New York, 2008.
- [6] R. M. Nedderman. *Statics and Kinematics of Granular Materials*. Cambridge University Press, New York, second edition, 1992.
- [7] H. Swinney T. Senden M .Saadatfar M. Jerkins, M. Schröter and T. Aste. Onset of mechanical stability in random packings of frictional spheres. *Phys. Rev. Lett.*, 101:018301, Jul 2008.
- [8] J. F. Hernández Sánchez. Estudio numérico de segregación en medios granulares. Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D. F., 2010.
- [9] F. Prinz A. Rosato, K. J. Strandburg and R. H. Swendsen. Why the brazil nuts are on top: Size segregation of particulate matter by shaking. *Phys. Rev. Lett.*, 58(10):1038–1040, Mar 1987.
- [10] M. Benderoth C. Fischer S. Utermann, P. Aurin and M. Schröter. Tailoring the frictional properties of granular media. *Physical Review E*, 84(3):10, 2011.
- [11] C. Kuo-Ching and L. Jeng-Yin. Micromorphic modeling of granular dynamics. *International Journal of Solids and Structures*, 46(6):1554–1563, 2009.

- [12] M. Sazzad and S. Islam. Macro and micro mechanical responses of granular material under varying interparticle friction. *Journal of Civil Engineering (IEB)*, 36(2):87–96, 2008.
- [13] S. Longo and A. Lamberti. Granular streams rheology and mechanics. *Physics and Chemistry of the Earth, Part B: Hydrology, Oceans and Atmosphere*, 25(4):375 – 380, 2000.
- [14] C. R. Wassgren. *Vibration of Granular Materials*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1997.
- [15] C. Denniston and H. Li. Dynamics and stress in gravity-driven granular flow. *Phys. Rev. E*, 59:3289–3292, Mar 1999.
- [16] T. G. Drake. Structural features in granular flows. *Journal of Geophysical Research*, 95:8681–8696, June 1990.
- [17] CNRS Groupement De Recherche Milieux Divisés. On dense granular flows. *The European Physical Journal E: Soft Matter and Biological Physics*, 14:341–365, 2004. 10.1140/epje/i2003-10153-0.
- [18] O. Pouliquen and F. Chevoir. Dense flows of dry granular material. *Comptes Rendus Physique*, 3(2):163 – 175, 2002.
- [19] J. Rajchenbach E. Clément and J. Duran. Mixing of a granular material in a bidimensional rotating drum. *EPL (Europhysics Letters)*, 30(1):7, 1995.
- [20] M. Sperl. Experiments on Corn Pressure in Silo Cells – Translation and Comment of Janssen’s Paper from 1895. *eprint arXiv:cond-mat/0511618*, November 2005.
- [21] O. Millet J. Rahmoun and J. Fortin. Friction effect on stresses in ensiled granular media. *Computers and Geotechnics*, 36(7):1113 – 1124, 2009.
- [22] C. E. Brennen T. V. Nguyen and R. H. Sabersky. Funnel flow in hoppers. *Journal of Applied Mechanics*, 47(4):729–735, 1980.
- [23] C. Truesdell and R.G. Muncaster. *Fundamentals of Maxwell’s Kinetic Theory of a Simple Monoatomic Gas*. Academic Press, New York, 1980.
- [24] A. Zippelius. Granular gases. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 369(1):143 – 158, 2006.
- [25] S. Chapman and T. G. Cowling. *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases*. Second edition.
- [26] A. Mehta. *Granular Physics*. Cambridge University Press, New York, 2002.
- [27] I. Goldhirsch. Introduction to granular temperature. *Powder Technology*, 182(2):130–136, 2008.
- [28] D. Lhuillier. Constitutive relations for steady flows of dense granular liquids. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 383(2):267 – 275, 2007.
- [29] T. Lubensky W. Losert, L. Bocquet and J.P. Gollub. Particle dynamics in sheared granular matter. *Physical Review Letters*, 85(7):1428–31, 2000.
- [30] S. F. Edwards. The equations of stress in a granular material. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, 249(1-4):–231.

- [31] Y. Forterre P. Jop and O. Pouliquen. A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 441(7094):727–730, 2006.
- [32] Gray J. M. N. T. Granular flow in partially filled slowly rotating drums. *Journal of Fluid Mechanics*, 441:1–29, 2010.
- [33] S. Taneda. *Flow Visualization: Scientific Images*. SciPress, Physical Society of Japan, Japan, 2000.
- [34] M. J. Izzard T. D. Atkinson, J. C. Butcher and R. M. Nedderman. The Forces on Obstacles Suspended in Flowing Granular Materials. *Chemical Engineering Progress*, 38(1):91–105, 1983.
- [35] U. Tüzün and R.M. Nedderman. Gravity flow of granular materials round obstacles—ii: Investigation of the stress profiles at the wall of a silo with inserts. *Chemical Engineering Science*, 40(3):337 – 351, 1985.
- [36] R. Zenit C. R. Wassgren, J. A. Cordova and A. Karion. Dilute granular flow around an immersed cylinder. *Physics of Fluids*, 15(11):3318–3330, 2003.
- [37] V. Buchholtz and T. Poeschel. Interaction of a granular stream with an obstacle. *Granular Matter*, 1:26, 1997.
- [38] A. Levy and M. Sayed. Numerical simulations of the flow of dilute granular materials around obstacles. *Update*, 181(2):137–148, 2008.
- [39] P. Jalali. Flow characteristics and stresses on cylindrical objects immersed in a flow of inelastic hard disks. *Powder Technology*, (0):–, 2011.
- [40] C. Brennen. and J.C. Pearce. Granular media flow in two-dimensional hoppers. *ASME J. Appl. Mech.*, 45(1).
- [41] N.Nakagawa T. Komatsu, S. Inagaki and S. Nasuno. Creep motion in a granular pile exhibiting steady surface flow. *Physical Review Letters*, 86(9):3, 2001.
- [42] J. F. Boudet Y. Amarouchene and H. Kellay. Dynamic sand dunes. *Physical Review Letters*, 86(19):4286–4289, 2001.
- [43] S. Mirzaei P. Knoll and H. Köhn. Numerical simulation of dynamic sand dunes. *Applied Mathematics and Computation*, 190(2):1747 – 1753, 2007.
- [44] A. Valance W. Losert J. M. Pasini J. Jenkins T. James N. Taberlet, P. Richard and R. Delannay. Superstable granular heap in a thin channel. *Physical Review Letters*, 91(26 Pt 1):264301, 2003.
- [45] R. Zenit D. Chehata and C. R. Wassgren. Dense granular flow around an immersed cylinder. *Physics of Fluids*, 15(6):1622, 2003.
- [46] S. Douady L. Quartier, B. Andreotti and A. Daerr. Dynamics of a grain on a sandpile model. *Phys. Rev. E*, 62:8299–8307, Dec 2000.
- [47] Dantec Dynamics A/S. Flow field diagnostics particle image velocimetry solutions.
- [48] A. Akonur R. M. Lueptow and T. Shinbrot. Piv for granular flows. *Experiments in Fluids*, 28:183–186, 2000.



- [49] Y. Wang S. P. Pudasaini, S. Hsiau and K. Hutter. Velocity measurements in dry granular avalanches using particle image velocimetry technique and comparison with theoretical predictions. *Physics of Fluids*, 17(9):093301, 2005.
- [50] I. Ippolito F. Ulissi and A. Calvo. Piv technique applied to granular flows in hoppers. *Journal of Physics: Conference Series*, 166(1):012004, 2009.
- [51] C. E. Willert M. Raffel and J. Kompenhans. *Particle image velocimetry: a practical guide*. Experimental fluid mechanics. Springer, 1998.
- [52] L. J. Castañeda Zigala. *Fuerzas de arrastre y sustentacion sobre una placa plana inmersa en un flujo granular*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D. F., 2006.
- [53] J. Mellmann X. Liu, E. Specht. Experimental study of the lower and upper angles of repose of granular materials in rotating drums. *Powder Technology*, 154(2-3):125–131, 2005.
- [54] H. Lopes M. Lage and M. S. Carvalho. Flows with suspended and floating particles. *Journal of Computational Physics*, 230(20):7736 – 7754, 2011.
- [55] P. Singh and D. D. Joseph. Fluid dynamics of floating particles. *Journal of Fluid Mechanics*, 530:31–80, 2005.
- [56] P. Denissenko S. Lukaschuk and G. Falkovich. Nodal patterns of floaters in surface waves. *The European Physical Journal - Special Topics*, 145:125–136, 2007.
- [57] D. Y. C. Chan, J. D. Henry, and L. R. White. The interaction of colloidal particles collected at fluid interfaces. *Journal of Colloid and Interface Science*, 79(2):410 – 418, 1981.
- [58] M. Maxey and J. Riley. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Physics of Fluids*, 26(4):883–889, 1983.
- [59] D. Vella and L. Mahadevan. The “cheerios effect”. *American Journal of Physics*, 73(9):817–825, 2005.
- [60] K. Law G. Huang, A. Wing and Z. Huang. Wave-induced drift of small floating objects in regular waves. *Ocean Engineering*, 38(4):712 – 718, 2011.
- [61] P.A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1):47–65, 1979.

Una vez finalizada la redacción de este documento, deseo expresar mi gratitud hacia un número significativo de personas, entidades virtuales, organismos e instituciones, sin cuya existencia este escrito no tendría validez alguna.

## A G R A D E Z C O

A mis compañeros de la Facultad de Ingeniería y la UNAM en su conjunto, por los recuerdos de nuestra *niñez* que acuñamos en ese recinto de formación y donde aprendimos el sentido del placer, del llanto, del hambre, del triunfo, del frío y del dolor.

A Roberto Zenit, profesor, instructor, guía moral y benefactor, amo del sarcasmo científico, pero sobre todo y más importante, sincero amigo. Con profunda admiración, cariño y respeto. A los miembros del sínodo por su crítica y oportuna corrección de la versión escrita de este documento.

A mis compañer@s del Laboratorio de Flujos Multifásicos del Instituto de Investigaciones en Materiales, bendito refugio para desahuciados sociales; en estricto orden alfabético:

Adriana, porque el silencio puede ser la más potente elocuencia;

Bárbara, porque no hay organismo o suceso tan pequeño indigno de ser investigado;

Carolina, porque todo es cuestión de estilos;

Carlos, todo se lo debo a mi *manayer*, a mi *Flou Manayer*;

Diego, por enseñarme a no comprar cosas inútiles antes de un viaje, o bien, ponerlas en la maleta documentada;

Enrique Guzmán, porque la vida es un ente no lineal que sólo se disfruta experimentándola;

Ernesto, porque aún la más implacable turbulencia debe ser más dócil que el deseo de triunfo;

Esli, por resguardar violentamente la salud ósea de mis manos;

Federico, porque nada está más lejos que lo que no se ambiciona;

Horacio, porque un mago puede revelar sus secretos pero nunca prestar sus rutinas de *Maltab*;

Julián, porque sólo se consigue una meta con decisión y seguridad...o no;

Mónica, porque un anhelo ferviente vence cualquier distancia. Y gracias por la sala verde.

Oscar, teórico del taco al pastor, imitador consagrado y cantante original;

*Paco*, porque ante el castigo la única opción es la insistencia;

René, porque la humildad es la base en la que descansan la brillantez y la grandeza;

Roger, porque la gloria y la fama, no se piden, se arrebatan, aún si por ello deba prescindirse de las entrañas;

Rodrigo, porque una meta que no se persigue con fe es como viajar en un tren sin ventanas;

Santos, porque se puede sufrir, fracasar, padecer... pero nunca claudicar,

y en su modalidad satelital, Isaías, el *poderosísimo Rey del Chat*, en su eterna sesión de invitado; Alfredo, gran conocedor del canal de videos más famoso de la red; Natanael, férreo defensa central y amante de las canciones de quinceañeras de lengua inglesa. Mención particular para el Dr. Juan Hernández Cordero cuyos centros al área y mordaces chistes parecen dirigidos por un láser. Al capítulo holandés: Oscar Enríquez, Daniela Flores Magón, Daniela Narezo, Julián Martínez, Nayeli Arias y Eduardo Gonçalves, sin cuya intervención los nebulosos días en el paralelo 50°N hubieran sido insufribles.

Finalmente y no menos importante, a toda la gente buena de mi País quienes a través de su **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología**, vía el **Proyecto 332163/233511** patrocinaron la generación de este documento, porque Muy profundo amarÉ siempre la grandeza eXquisita y mágica efigIe de la polícroma Cuna en que brotó mi sueñO.

*K<sup>i</sup><sub>e</sub>*