



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**Decaimiento de fidelidad para perturbaciones
isoespectrales**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

Andrés García Medina

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Francois Alain Leyvraz Waltz

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: Dr. Luis Benet Fernández

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: Dr. Carlos Francisco Pineda Zorrilla



posgrado en ciencias físicas
u n a m

CUERNAVACA, MORELOS

2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicado a
María Elena y los Fridillos

Agradecimientos

Primeramente, quiero agradecer a mi familia y amigos por su apoyo moral y buenos deseos, los momentos que he compartido con ellos durante este tiempo hicieron que esta labor fuera mucho más amena.

Agradezco a las personas que me han guiado durante mi desarrollo científico. Thomas Seligman por su apoyo y paciencia, quien propuso y dirigió prácticamente mi trabajo, a Francois Leyvraz quien aportó las ideas fundamentales para su resolución, así como a Luis Benet y Carlos Pineda quienes me introdujeron en los primeros conceptos y siempre estuvieron pendientes de mi desarrollo y dispuestos a responder cualquier duda que surgiera. A los Dres. Jorge Flores y José Recamier por aceptar ser parte de mi jurado y dar de su tiempo para revisar este trabajo.

Finalmente, agradezco al Instituto de Ciencias Físicas de la UNAM por las facilidades para realizar este trabajo, así como a CONACYT y DGAPA por el apoyo económico aportado para realizar esta tesis.

Resumen

En el presente trabajo se calcula la amplitud de fidelidad para perturbaciones isoespectrales bajo la teoría de matrices aleatorias. Ejemplos de este tipo de perturbaciones son las rotaciones y traslaciones en el espacio fase. Aquí las trataremos desde un punto de vista más general, considerando perturbaciones generadas mediante una transformación de semejanza del hamiltoniano no perturbado, ya que estas transformaciones no varían el espectro de eigenvalores.

Se utilizan sistemas con invariancia ante inversión temporal, es decir, miembros genéricos del *GOE*, así como sistemas en donde la invariancia ante inversión temporal es violada, los cuales pertenecen al *GUE*. Se realizan promedios sobre los ensembles a los que pertenecen los sistemas y se discuten las propiedades encontradas en términos de cantidades estadísticas típicas de la teoría de matrices aleatorias como son el factor de forma y el tiempo de Heisenberg.

Finalmente, se trabaja un modelo de osciladores acoplados a los que se les perturba isoespectralmente mediante una rotación en el espacio fase y se mide su fidelidad. Se discuten los resultados obtenidos y se analiza la relación con el resultado de matrices aleatorias desarrollado aquí.

Abstract

In the present work we calculate the fidelity amplitude for isospectral perturbations under framework of random matrix theory. Rotations and translations in phase space are examples of this kind of perturbations. Here we adopt a more general point of view, using perturbations generated through a similarity transformation of the unperturbed hamiltonian, since this perturbations do not change the eigenvalue spectrum.

We use time-reversal invariant systems, namely, generic members of GOE , as well as systems in which time-reversal invariance is violated, which belong to GUE , and focus on the ensemble average results. The properties found are discussed in terms of typical statistical quantities belonging to random matrix theory such as the form factor and Heisenberg time.

Finally, a model of coupled oscillators which is perturbed in isospectral form through a rotation in a phase space is worked and we compute its fidelity. Results are discussed and compared with the random matrix model developed here.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Isoespectralidad	3
1.2. Fidelidad	4
1.3. Teoría de matrices aleatorias	6
1.3.1. Estadística de eigenvectores	8
1.3.2. Estadística de eigenvalores	9
2. Hamiltonianos del GUE	11
2.1. Definición de la perturbación	11
2.2. Amplitud de fidelidad	12
2.3. Amplitud de fidelidad para $N \gg 1$	14
2.4. Amplitud de fidelidad para dimensiones pequeñas	18
3. Hamiltonianos del GOE perturbados con el grupo unitario	21
3.1. Definición de la perturbación	21
3.2. Amplitud de fidelidad	22
3.3. Amplitud de fidelidad para $N \gg 1$	23
3.4. Amplitud de fidelidad para dimensiones pequeñas	23
4. Hamiltonianos del GOE	27
4.1. Definición de la perturbación	27
4.2. Amplitud de fidelidad	28
4.3. Amplitud de fidelidad para $N \gg 1$	33
4.4. Amplitud de fidelidad para dimensiones pequeñas	36
5. Modelo Dinámico	39
5.1. Definición del sistema y la perturbación	39

5.2. Análisis de Fidelidad	42
6. Conclusión	47
Apéndice:	51
A. Aspectos de RMT	51
B. Integrales del grupo ortogonal con la función de Weingarten	53
C. Factor de forma para matrices hermitianas antisimétricas	55
Bibliografía	57

“...If we allowed this equalization to proceed for a certain time, and then reversed the motions of all the molecules, we would observe a disequalization. However, if the number of molecules is very large, as it is in a gas, any slight deviation from absolute precision in the reversal will greatly shorten the time during which disequalization occurs ... Furthermore, if we take account of the fact that no physical system can be completely isolated from its surroundings but is in principle interacting with all other molecules in the universe, and if we believe that the number of these latter molecules is infinite, then we may conclude that is impossible for temperature-differences to arise spontaneously ...”.

William Thompson, 1874

Capítulo 1

Introducción

La fidelidad surge como una cantidad importante en relación a la paradoja de la reversibilidad del tiempo en mecánica estadística, ya que mide que tan diferente es la evolución hacia atrás en el tiempo con respecto al estado inicial después de que el sistema interactuó con el medio ambiente. Actualmente sus aplicaciones van más allá de este problema, convirtiéndose en los últimos años en un concepto muy importante en caos cuántico, así como en un área muy prolífica en teoría de la información cuántica debido a que su estudio es crucial para el desarrollo de exitosos dispositivos que harán posible la computadora cuántica.

Por otra parte, debido a que los modelos de matrices aleatorias han tenido bastante éxito en describir un extenso campo de fenómenos en física, desde elasticidad hasta física de partículas [1, 2], asociados en cierto sentido con caos, han surgido numerosos trabajos que han intentado hacer una formulación de la fidelidad desde este marco de referencia [3, 4].

La motivación para estudiar las perturbaciones isoespectrales surge de trabajar con un sistema de dos osciladores con potencial de acoplamiento cuántico, previamente estudiado en [5, 6], cuya energía no cambia al perturbarlo mediante rotaciones en el espacio de configuración. Lo que nosotros observamos es que la fidelidad decae a tiempos muy cortos comparado con el tiempo de Heisenberg, lo cual no es lo típico en los sistemas que han sido estudiados mediante esta cantidad [4].

Al revisar los trabajos previos, se encuentra que sólo en [7, 8] se han aplicado perturbaciones isoespectrales a una cantidad similar a la fidelidad. En [7] se interesaron en medir la sensibilidad de los estados iniciales mediante el traslape de estados desplazados en el espacio fase respecto a los mismos estados sin desplazar, mientras que en [8] se investigó el decaimiento de fidelidad en el límite semiclásico para un paquete de onda que es reconstruido después de perturbar el sistema mediante una traslación en el espacio fase. En ambos casos la traslación del espacio fase deja invariante el espectro de energías, pero como ellos utilizan el rotor pateado como hamiltoniano de prueba es difícil comparar cuantitativamente los resultados obtenidos con los nuestros, ya que miden la fidelidad como función del número de patadas aplicadas al sistema.

Dado que no existen resultados universales para el decaimiento de fidelidad ante perturbaciones isoespectrales y con la intención de explicar el decaimiento a tiempos tan cortos para el oscilador cuártico, en este trabajo se analiza la amplitud de fidelidad para este tipo de perturbaciones desde el formalismo de la teoría de matrices aleatorias, para lo cual se utilizan hamiltonianos invariantes ante inversión temporal y rotaciones (*GOE*), así como aquellos en que la invariancia temporal es violada (*GUE*), obteniendo resultados válidos para estados iniciales aleatorios.

En lo que resta de este capítulo se menciona en forma somera el trabajo previo realizado por los matemáticos en el área de las perturbaciones isoespectrales. Enseguida se define lo que es la fidelidad y se mencionan algunos comportamientos universales importantes. Finalmente se relata brevemente la historia de las matrices aleatorias y se introducen algunas cantidades importantes para la estadística de eigenvalores y eigenvectores de los grupos clásicos.

En el **capítulo 2** se calcula la amplitud de fidelidad para perturbaciones isoespectrales utilizando hamiltonianos genéricos del *GUE*, es decir, sistemas en donde la invariancia temporal se ha violado. Se realiza un promedio sobre todo el ensemble y se encuentra una fórmula asintótica para dimensiones $N \gg 1$. Al final del capítulo se compara numéricamente el comportamiento para dimensiones pequeñas con la fórmula asintótica.

En el **capítulo 3** se calcula la amplitud de fidelidad utilizando hamiltonianos cuya representación matricial es real y simétrica, es decir, miembros genéricos del *GOE*, y que mediante una transformación de semejanza unitaria su representación se vuelve hermitiana. Se realiza un promedio sobre el *GOE* y *GUE*, y se encuentra una fórmula asintótica para dimensiones $N \gg 1$. De nuevo, al final del capítulo se compara numéricamente el comportamiento para dimensiones pequeñas con la fórmula asintótica.

En el **capítulo 4** se calcula la amplitud de fidelidad utilizando hamiltonianos genéricos del *GOE*, pero ahora con perturbaciones isoespectrales dadas por una transformación de semejanza ortogonal del hamiltoniano inicial. Asimismo se realiza un promedio sobre el ensemble y se encuentra una fórmula asintótica para $N \gg 1$, cuyo comportamiento es muy similar al del capítulo 3. Enseguida se compara numéricamente el comportamiento para dimensiones pequeñas con la fórmula asintótica.

En el **capítulo 5** se mide la fidelidad de un sistema compuesto de dos osciladores acoplados mediante un potencial cuártico, aplicando perturbaciones que rotan el espacio de configuración. Se obtienen resultados para el régimen caótico del sistema y se comparan estos resultados con lo obtenido mediante la teoría desarrollada aquí para los sistemas *GOE*, encontrando de forma heurística concordancia en el valor del tiempo al cual decae la fidelidad, así como con su valor estacionario.

Finalmente en el **capítulo 6** se hace un breve resumen de los principales resultados y se formulan algunas conclusiones, así como el posible trabajo futuro.

1.1. Isoespectralidad

Las perturbaciones isoespectrales son aquellas que no varían el espectro de eigenvalores. En general desde el punto de vista físico, la isoespectralidad se presenta entre hamiltonianos relacionados por una transformación de semejanza.

Entre los matemáticos ha sido de interés buscar superficies no isométricas

que presentaran isoespectralidad desde que Kac [9] formulara la pregunta en 1966: *Can you hear the shape of a drum?* Es decir, ¿existen dos dominios con el mismo espectro de eigenvalores necesariamente congruentes ó isométricos? Numerosos trabajos surgieron intentando dar respuesta sobre variedades muy particulares, de interés puramente matemático, hasta que Gordon [10] respondió la pregunta negativamente para el caso de superficies en forma de tambor, es decir, superficies euclidianas de dos dimensiones con condiciones de frontera de Dirichlet y operador de Laplace en la membrana. De esta manera quedó demostrado que no se puede oír la forma de un tambor, ya que pueden existir dos superficies de distinta forma que generen el mismo espectro.

La única evidencia física para verificar el resultado de Gordon se debe a dos experimentos de Sridhar et al. En el primero [11], analizan dos billares no isométricos, de los que se proponen en [10], mientras que en [12] se sitúan algunos dispersores para así lograr que la dinámica sea caótica. Sin embargo, los resultados de esta tesis estarán enfocados a perturbaciones que rotan ó trasladan el sistema, es decir, a perturbaciones isoespectrales isométricas.

1.2. Fidelidad

La inestabilidad clásica se define usualmente como la separación exponencial en el tiempo de dos trayectorias cercanas. En mecánica cuántica uno podría intentar medir la sensibilidad del sistema ante variaciones de la función de onda inicial; sin embargo, el operador de evolución es unitario y por lo tanto preserva el producto interno (*i.e.* la distancia) entre dos estados, por lo que no hay separación exponencial respecto a la variación del estado inicial. Por otro, lado existe una cantidad alternativa que nos permite medir la sensibilidad de la dinámica ante perturbaciones del hamiltoniano; esta es la fidelidad.

En términos generales, la fidelidad mide la desviación de un estado inicial que se evoluciona bajo la acción de un hamiltoniano H_0 y se regresa en el tiempo con un hamiltoniano perturbado H_ϵ . Si la perturbación es pequeña podemos suponer que la dependencia en el parámetro de perturbación ϵ es

lineal:

$$H_\epsilon(t) = H_0(t) + \epsilon V(t), \quad (1.1)$$

en donde $V(t)$ es la perturbación aplicada a H_0 . Por otro lado el operador de evolución asociado a los hamiltonianos es:

$$U_\epsilon = \hat{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H_\epsilon(t') \right), \quad (1.2)$$

siendo \hat{T} el operador de orden en el tiempo. De esta manera, la amplitud de fidelidad para algún estado inicial arbitrario $|\Psi\rangle$ se define como [3]:

$$f(t) = \langle \Psi_0(t) | \Psi_\epsilon(t) \rangle = \langle \Psi | U_0(-t) U_\epsilon(t) | \Psi \rangle = \langle M_\epsilon(t) \rangle, \quad (1.3)$$

donde $M_\epsilon(t)$ es conocido como operador eco. La fidelidad es simplemente el módulo al cuadrado de la amplitud de fidelidad

$$F_\epsilon(t) = |f_\epsilon(t)|^2. \quad (1.4)$$

La sensibilidad a las perturbaciones medida mediante la fidelidad nos permite naturalmente hacer comparaciones entre la situación cuántica y la clásica. Para sistemas clásicos la fidelidad da la misma sensibilidad exponencial bajo perturbaciones en el hamiltoniano que las obtenidas ante variaciones de las condiciones iniciales [4].

La fidelidad cuántica puede comportarse de una manera muy diferente a la clásica, mostrando una rica variedad de regímenes. Por ejemplo, para tiempos cortos comparado con el tiempo de Heisenberg t_H (ver apéndice A), se puede escribir la serie de Born para el operador eco y quedarse a segundo orden, con lo que se obtiene la respuesta lineal de la fidelidad:

$$\begin{aligned} F_\epsilon(t) &= |\langle M_\epsilon(t) \rangle|^2 = \left| \langle \hat{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \epsilon \int_0^t dt' \tilde{V}(t') \right) \rangle \right|^2 = \\ &= 1 - \frac{\epsilon^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \left(\langle \tilde{V}(t') \tilde{V}(t'') \rangle - \langle \tilde{V}(t') \rangle \langle \tilde{V}(t'') \rangle \right) + O(\epsilon^4), \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde $\tilde{V}(t) = U_0(-t)V(t)U_0(t)$, está en la representación de interacción. Ahora, si definimos $\Sigma = \int_0^t dt' \tilde{V}(t')$, la fidelidad adquiere la forma:

$$F_\epsilon(t) = 1 - \frac{\epsilon^2}{\hbar^2} \{ \langle \Sigma^2(t) \rangle - \langle \Sigma(t) \rangle^2 \} + O(\epsilon^4), \quad (1.6)$$

y al considerar que en sistemas con límite clásico caótico la varianza de $\Sigma(t)$ va como $\langle \Sigma^2(t) \rangle - \langle \Sigma(t) \rangle^2 \propto t$, mientras que para sistemas con límite clásico integrable es proporcional a t^2 , resultado que se puede deducir clásicamente mediante la ecuación de difusión e intuitivamente se entiende que en la dinámica regular las variables tienen menos obstáculos en su camino comparado con la caótica; se encuentra que la fidelidad decae como una función lineal en el tiempo para dinámicas caóticas, y como una función cuadrática para regulares.

Por otro lado, para tiempos aún más cortos, del orden del tiempo de Zeno, la fidelidad siempre decae cuadráticamente, sin importar si la dinámica es caótica o regular [13].

1.3. Teoría de matrices aleatorias

La teoría de matrices aleatorias (RMT, por sus siglas en inglés) es un nuevo tipo de mecánica estadística, donde en vez de tener un ensemble de estados gobernados por el mismo hamiltoniano, se tiene un ensemble de hamiltonianos gobernados por la misma simetría.

Esta teoría fue introducida en estadística matemática por Wishart en 1928 [14]. Muchos matemáticos trabajaron después en esta área por interés puramente teórico. En 1935 Elie Cartan clasifica los ensembles según la simetría que se conserva [15] y el primer libro que contiene los resultados matemáticos más relevantes lo publicó L. K. Hua en 1959 [16]. En la década de 1950 Wigner la utiliza para tratar con los eigenvalores y eigenvectores de sistemas cuánticos complejos de muchos cuerpos. En ese dominio, RMT ha tenido aplicaciones exitosas para la descripción de las fluctuaciones espectrales de los núcleos atómicos, así como de átomos y moléculas complejas [17]. F.J. Dyson y M.L. Mehta hicieron cálculos analíticos detallados en la década de 1960, Mehta publicó en 1967 un libro en donde describe las principales

técnicas desarrolladas hasta ese momento [18].

El interés en la teoría de matrices aleatorias se renovó enormemente cuando Casati et al., guiados por las ideas de Michael Berry, publican la primera evidencia de que las ideas de RMT pueden ser aplicables a los espectros de todos los sistemas caóticos [19]. Sin embargo, la formulación mas aceptada y general de este resultado, conocida como conjetura de caos cuántico, se publicó en un artículo de Bohigas, Giannoni y Schmidt en 1984 [20].

En lo que ahora se conoce como la versión clásica, la teoría de matrices aleatorias maneja tres ensembles gaussianos de matrices hermitianas, cada uno para un distinto grupo de transformaciones canónicas. Estos ensembles se definen en términos de las propiedades de simetría del hamiltoniano [2]:

- Para sistemas con invariancia ante inversión temporal y con simetría rotacional, la matriz hamiltoniana H se puede elegir real y simétrica

$$H = H^T. \quad (1.7)$$

- Para los sistemas sin invariancia ante inversión temporal las matrices H son hermitianas:

$$H = H^\dagger. \quad (1.8)$$

- Para los sistemas con invariancia ante inversión temporal con spin 1/2 y sin simetría rotacional, el hamiltoniano se escribe en términos de las matrices de Pauli σ_γ

$$H_{mn}^0 1_2 - i \sum_{\gamma=1}^3 H_{nm}^{(\gamma)} \sigma_\gamma, \quad (1.9)$$

donde H^0 es simétrica y H^γ son antisimétricas.

En los tres casos, la densidad de probabilidad de encontrar una matriz particular dentro del ensemble está dada, en general, por la función gaussiana:

$$P_{N\beta}(H) \propto \exp\left(-\frac{\beta N}{\lambda^2} \text{tr} H^2\right). \quad (1.10)$$

Las propiedades de simetría y las funciones de peso $P_{N\beta}(H)$ son invariantes bajo transformaciones ortogonales, unitarias y simplécticas del hamiltoniano, para $\beta = 1, 2$ y 4 , respectivamente. Es por ello que a estos ensembles se les conoce como *GOE*, *GUE* y *GSE* (por sus siglas en inglés: Gaussian Orthogonal, Unitary y Symplectic Ensemble, respectivamente).

Por otro lado, cada miembro H_β de estos ensembles puede representarse en la forma:

$$H_\beta = WEW^{-1}, \quad (1.11)$$

donde E son matrices diagonales que contienen los eigenvalores de H , y W son matrices ortogonales, unitarias ó simplecticas (dependiendo de si $\beta = 1, 2$ ó 4), las cuales contienen los eigenvectores de H_β . Esto y el hecho de que la distribución de probabilidad (1.10) depende explícitamente de los eigenvalores de H_β , implica que la distribución de los eigenvalores debe ser independiente de la de sus eigenvectores, es decir, al medir propiedades estadísticas de los ensembles podemos tratar por separado los eigenvalores y eigenvectores de dichos ensembles.

1.3.1. Estadística de eigenvectores

La estadística de los eigenvectores de los ensembles definidos en la sección anterior es la estadística de los elementos de los grupos ortogonales, unitarios ó simplécticos, con su respectiva medida, que en este caso al ser grupos compactos de Lie, poseen una única medida invariante, que es la medida de Haar.

En general es de interés calcular promedios de productos de elementos de eigenvectores sobre todo el ensemble. Estos promedios se pueden ver también como integrales sobre dichos grupos bajo la medida de Haar. En general los elementos de un eigenvector están correlacionados con los elementos de cualquier otro; sin embargo, cuando trabajamos con matrices de dimensión $N \rightarrow \infty$, estos elementos se vuelven variables gaussianas con varianza $1/N$ y las correlaciones desaparecen, lo que hace mucho más sencillo el cálculo de los promedios.

En este trabajo estaremos interesados en calcular promedios de produc-

tos de elementos de dos columnas sobre el grupo ortogonal, así como sobre el grupo unitario. Las técnicas que se siguen para este cálculo fueron desarrolladas primeramente por Ullah y Porter [22, 23]; sin embargo, en nuestro análisis estos promedios se tomaron de los trabajos de Gorin [24, 25] y de Collins et al. [26], por ser mas sencilla el álgebra.

1.3.2. Estadística de eigenvalores

La distribución de eigenvalores a primeros vecinos $P(s)$ es una de las cantidades más importantes en RMT que se emplea para estudiar propiedades estadísticas de los eigenvalores. Esta distribución consiste en medir los espaciamientos $s_n = E_n - E_{n-1}$ de energías adyacentes.

En 1977 en un artículo de Berry y Tabor [27], se muestra que genéricamente para sistemas de dos o más dimensiones cuya dinámica clásica es completamente integrable, la función de distribución es poissoniana $P(s) = e^{-s}$, es decir, muestran un espectro aleatorio. La excepción más importante es el oscilador armónico, cuya distribución de espaciamiento a primeros vecinos encuentran que es $P(s) = \delta(s - 1)$, cuando las frecuencias son inconmensurables.

Por otro lado, en un artículo de Casati et al. de 1980 [19], se da la primera evidencia de que los sistemas clásicamente no integrables que tienen las mismas simetrías que el *GOE*, *GUE* y *GSE*, siguen la misma distribución de eigenvalores que el correspondiente ensemble.

Estas distribuciones adquieren la forma dada en la ecuación (1.12) para matrices de $2X2$. Sin embargo, se ha encontrado que describen con alta precisión el espectro de matrices aleatorias para dimensiones arbitrarias. Este resultado se debe a Wigner y se le conoce como *Wigner surmise* [28]. En la figura (1.1) se grafican estas distribuciones para los ensembles clásicos.

$$P(s) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4} s^2} & GOE \\ \frac{32}{\pi} s^2 e^{-\frac{4}{\pi} s^2} & GUE \\ \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 e^{-\frac{64}{9\pi} s^2} & GSE \end{cases} \quad (1.12)$$

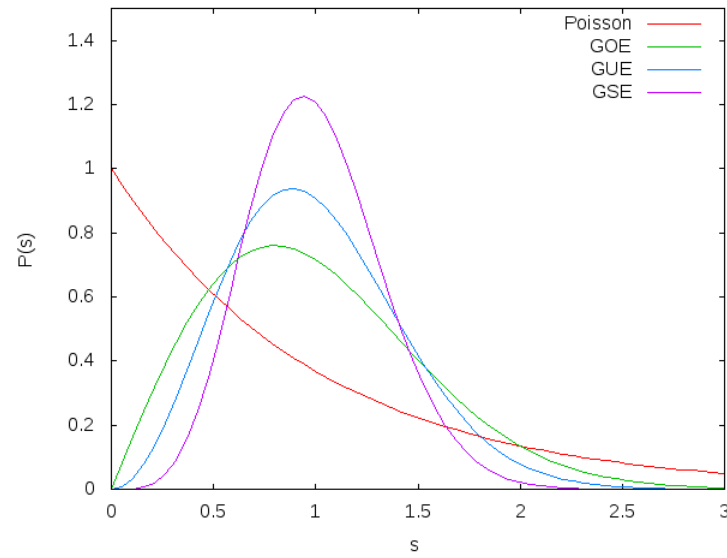


Figura 1.1: Distribución de eigenvalores a primeros vecinos para los ensembles GOE , GUE y GSE de dimensión $N = 2$.

Capítulo 2

Hamiltonianos del GUE

En este capítulo se obtiene una expresión de la amplitud de fidelidad bajo perturbaciones isoespectrales, válida para hamiltonianos genéricos del *GUE*. Primero, se define la forma de realizar la perturbación isoespectral y después se mide la amplitud de fidelidad al aplicar este tipo de perturbación al hamiltoniano. Posteriormente, el cálculo se restringe al caso en que la dimensión $N \gg 1$ para poder así llegar a una expresión asintótica sencilla. Al final del capítulo se calcula numéricamente la amplitud de fidelidad para dimensiones pequeñas y se compara el resultado con la fórmula asintótica encontrada previamente.

2.1. Definición de la perturbación

Sea H_0 la representación matricial de dimensión N de un hamiltoniano cuya invariancia ante inversión temporal se viola, es decir, un miembro del *GUE*, el cual se puede representar por una matriz hermitiana compleja. Definimos H_a como la matriz semejante de H_0

$$H_a = U_a^{-1} H_0 U_a, \tag{2.1}$$

donde U_a es la transformación de semejanza tal que $U_a \in \mathcal{U}(N)$, es decir, es una matriz unitaria de dimensión N . Se define U_a como la exponenciación de una matriz hermitiana compleja h de la misma dimensión que H_0 :

$$U_a = e^{iah} \quad (2.2)$$

donde a es un parámetro real. Además

$$E = V_0^{-1}H_0V_0 \quad y \quad \Delta = V^{-1}hV \quad (2.3)$$

donde E, Δ son matrices diagonales y reales de dimensión N , las cuales contienen los eigenvalores de H_0, h , respectivamente; $V_0, V \in \mathcal{U}(N)$, son las matrices que contienen sus eigenvectores.

2.2. Amplitud de fidelidad

Con las definiciones dadas en la sección anterior, la amplitud de fidelidad para perturbaciones isoenergéticas en sistemas que no son invariantes ante inversión temporal, se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_a(t) &= \langle \Psi | e^{iH_0t} e^{-iH_a t} | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | V_0^{-1} e^{iEt} V_0 U_a^{-1} V_0^{-1} e^{-iEt} V_0 U_a | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | V_0^{-1} e^{iEt} V_0 V e^{-i\Delta a} V^{-1} V_0^{-1} e^{-iEt} V_0 V e^{i\Delta a} V^{-1} V_0^{-1} V_0 | \Psi \rangle, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde en la última igualdad hemos multiplicado por la unidad $V_0^{-1}V_0$. Si se define

$$|\Phi\rangle = V_0|\Psi\rangle \quad y \quad W = V_0V \in \mathcal{U}(N),$$

la amplitud de fidelidad toma la forma

$$f_a(t) = \langle \Phi | e^{iEt} W e^{-i\Delta a} W^{-1} e^{-iEt} W e^{i\Delta a} W^{-1} | \Phi \rangle. \quad (2.5)$$

Si se escribe el operador eco resultante en términos de sus elementos de matriz y se desarrolla el estado inicial $|\Phi\rangle$ en la base de W , se obtiene

$$f_a(t) = \sum_{ijklm} c_i^* c_m e^{i(E_i - E_k)t} e^{i(\Delta_l - \Delta_j)a} W_{ij} W_{kj}^* W_{kl} W_{ml}^*$$

donde c_i , para $i \in \{1, \dots, n\}$ son los coeficientes de expansión de $|\Phi\rangle$. Además, se utilizó el hecho de que la matriz W es unitaria, por lo que $W_{nm}^{-1} = W_{mn}^*$. Denotando los promedios sobre el GUE por $\langle \bullet \rangle_2$, la amplitud de fidelidad promediada sobre este ensemble toma la forma:

$$\langle f_a(t) \rangle_{2,2} = \frac{1}{N} \sum_{ijkl} \langle e^{i(E_i - E_k)t} \rangle_2 \langle e^{i(\Delta_l - \Delta_j)a} \rangle_2 \langle W_{ij} W_{kj}^* W_{kl} W_{il}^* \rangle_2, \quad (2.6)$$

donde se utilizó un doble índice en el promedio de la amplitud de fidelidad para enfatizar que se ha realizado un promedio para h independiente del promedio para H_0 . Además, se utilizó el hecho de que $\langle c_i^* c_m \rangle_2 = \delta_{im}/N$ [24], dado que al promediar H_0 sobre el *GOE* implica que V_0 recorre todo el grupo unitario $U(N)$, por lo que sin importar la forma específica de $|\Psi\rangle$, automáticamente se está realizando un promedio sobre estados iniciales aleatorios $|\Phi\rangle = V_0|\Psi\rangle$. Por otro lado, con ayuda de [24, 25], se obtiene que los promedios sobre el grupo unitario $U(N)$ para los elementos de la matriz W están dados por:

$$\langle W_{ij} W_{kj}^* W_{kl} W_{il}^* \rangle_2 = \begin{cases} \frac{2}{N(N+1)} & \text{si } (i = k) \text{ y } (j = l) \\ \frac{1}{N(N+1)} & \text{si } (i = k) \text{ y } (j \neq l) \\ \frac{1}{N(N+1)} & \text{si } (i \neq k) \text{ y } (j = l) \\ \frac{-1}{(N-1)N(N+1)} & \text{si } (i \neq k) \text{ y } (j \neq l). \end{cases} \quad (2.7)$$

Este resultado se puede escribir en términos de deltas de Kronecker,

$$\langle W_{ij} W_{kj}^* W_{kl} W_{il}^* \rangle_2 = \frac{1}{N(N+1)} \left[\delta_{ik} + \delta_{jl} - \frac{(1 - \delta_{ik})(1 - \delta_{jl})}{N-1} \right]. \quad (2.8)$$

Utilizando esta última expresión, la ecuación (2.6) se convierte en:

$$\begin{aligned} \langle f_a(t) \rangle_{2,2} &= \frac{1}{N^2(N+1)} \sum_{ijkl} \langle e^{i(E_i - E_k)t} \rangle_2 \langle e^{i(\Delta_l - \Delta_j)a} \rangle_2 \left[\delta_{ik} + \delta_{jl} - \frac{(1 - \delta_{ik})(1 - \delta_{jl})}{N-1} \right] \\ &= \frac{1}{N(N+1)} \left\langle \sum_{jl} e^{i(\Delta_l - \Delta_j)a} \right\rangle_2 + \frac{1}{N(N+1)} \left\langle \sum_{ik} e^{i(E_i - E_k)t} \right\rangle_2 \\ &\quad - \frac{1}{(N-1)N^2(N+1)} \left\langle \sum_{i \neq k} e^{i(E_i - E_k)t} \right\rangle_2 \left\langle \sum_{j \neq l} e^{i(\Delta_l - \Delta_j)a} \right\rangle_2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Por otro lado, introduciendo el factor de forma

$$K_{\beta}^N(\tau) = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{ij}^N e^{i\tau(\varepsilon_i - \varepsilon_j)} \right\rangle_{\beta} = \frac{1}{N} \left\langle \left| \sum_i^N e^{i\tau\varepsilon_i} \right|^2 \right\rangle_{\beta} \quad (2.10)$$

donde el superíndice N se utiliza para denotar que el orden del factor de forma varía con la dimensión del espacio de Hilbert, y el subíndice hace referencia al ensemble sobre el cual estamos promediando, que en este caso es $\beta = 2$. De esta manera podemos escribir

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq k} e^{i(E_i - E_k)t} &= NK_2^N(t) - N \quad \text{y} \\ \sum_{j \neq l} e^{i(\Delta_l - \Delta_j)a} &= NK_2^N(a) - N. \end{aligned} \quad (2.11)$$

En términos del factor de forma se obtiene funcionalmente la siguiente expresión para la amplitud de fidelidad:

$$\langle f_a(t) \rangle_2 = \frac{K_2^N(a) + K_2^N(t)}{N + 1} - \frac{K_2^N(a)K_2^N(t) - K_2^N(a) - K_2^N(t) + 1}{(N - 1)(N + 1)}. \quad (2.12)$$

2.3. Amplitud de fidelidad para $N \gg 1$

Si nos restringimos al caso en que $N \gg 1$, podemos expresar el factor de forma en una manera sencilla:

$$K_{\beta}(\tau) = 1 + \delta(\tau) - b_2^{\beta}, \quad (2.13)$$

donde $\delta(\tau)$ es la delta de Dirac, y a b_2^{β} se le conoce como factor de forma espectral, el cual tiene una forma particular para cada valor de β , es decir, para cada simetría (ver el apéndice A). De esta manera, al sustituir el resultado asintótico (con $\beta = 2$) dado en la Ec. (2.13) para el factor de forma espectral, se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle f_a(\tau) \rangle_{2,2} &= \frac{1}{N} (2 + \delta(\tau) + \delta(\alpha) - b_2^2(\tau) - b_2^2(\alpha)) - \\
&\frac{1}{N^2} [(1 + \delta(\alpha) - b_2^2(\alpha))(1 + \delta(\tau) - b_2^2(\tau)) + b_2^2(\alpha) + b_2^2(\tau) - \delta(\tau) - \delta(\alpha) - 1] = \\
&\frac{1}{N} [2 + \delta(\tau) + \delta(\alpha) - b_2^2(\tau) - b_2^2(\alpha)] - \frac{1}{N^2} (\delta(\alpha) - b_2^2(\alpha)) (\delta(\tau) - b_2^2(\tau)),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

donde ahora el tiempo y la magnitud de la perturbación están en unidades de su respectivo tiempo de Heisenberg: $\tau = t/t_H$ y $\alpha = a/a_H$.

Para satisfacer la condición $N \gg 1$ se mantuvieron solamente los términos de orden $O(1)$ y $O(1/N)$. Para esto, primero se reescribieron las funciones delta de Dirac que aparecen en la Ec. (2.14), usando una función S_N escalable con N , que cumpliera con las condiciones de que asintóticamente tienda a la delta de Dirac y que sea una función normalizada:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} NS_N(x) = \delta(x) \quad \text{tal que} \quad \int_{-\infty}^{\infty} NS_N(x) dx = 1 \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Ademas, dado que estamos en el límite de dimensiones N grandes, la densidad de niveles de energías $\rho(E)$ se vuelve prácticamente constante (ver apéndice A), y puesto que el factor de forma esta relacionado con el módulo al cuadrado de la integral de $\rho(E)$ [29], una buena elección para la función S_N es

$$S_N(x) = \left| \frac{\sin(N\pi x)}{N\pi x} \right|^2. \tag{2.15}$$

De esta manera, la aproximación para la amplitud de fidelidad promediada sobre hamiltonianos $H_0, h \in GUE$, cuya dimensión $N \gg 1$, resulta ser

$$\begin{aligned}
\langle f_a(\tau) \rangle_{2,2} &\approx S_N(\tau) + S_N(a) - S_N(\tau)S_N(a) + \\
&\frac{1}{N} [2 + b_2^2(\tau) (S_N(\alpha) - 1) + b_2^2(\alpha)(S_N(\tau) - 1)]
\end{aligned} \tag{2.16}$$

En la figura 2.1 se grafica esta expresión, para $\tau, \alpha \in [0, 1.5]$, con $N = 100$. Además en la figura 2.2 se graficaron cortes en dos dimensiones para $\alpha \in \{0.01, 0.5, 1\}$.

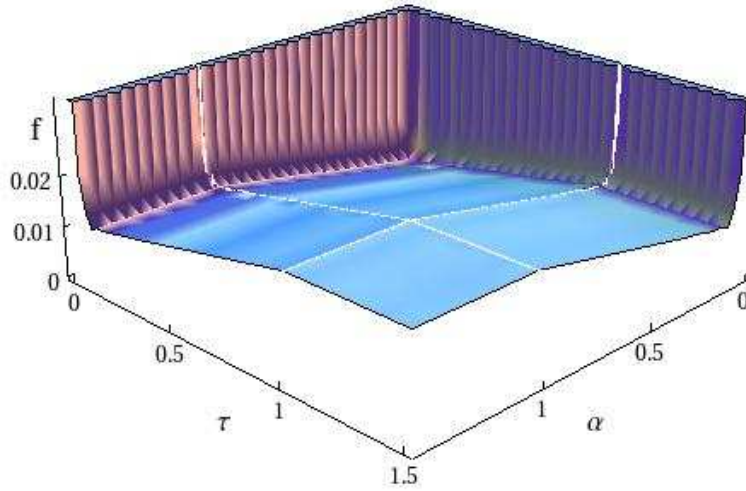


Figura 2.1: Aproximación de $\langle f_\alpha(\tau) \rangle_{2,2}$ para $N \gg 1$ al variar los parámetros $\tau, \alpha \in [0, 1.5]$. Se fijó $N = 100$.

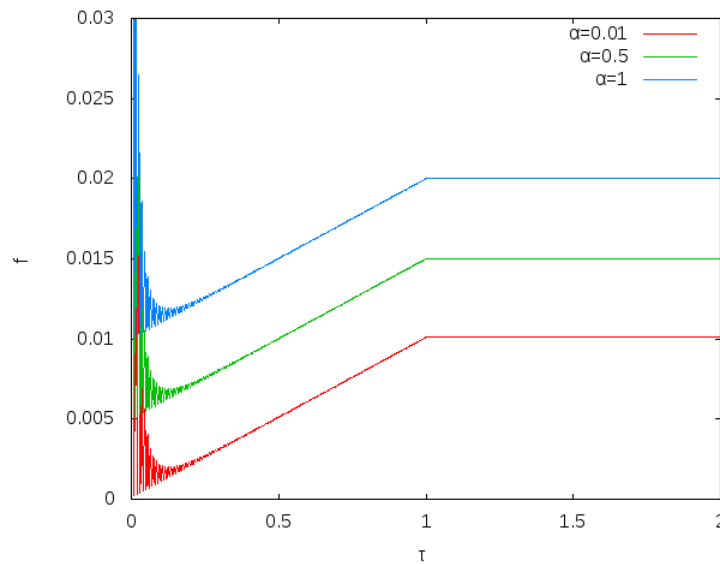


Figura 2.2: Aproximación de $\langle f_\alpha(\tau) \rangle_{2,2}$ para $N \gg 1$ al variar $\tau \in [0, 1.5]$ y $\alpha \in \{0.01, 0.5, 1\}$. Se fijó $N = 100$.

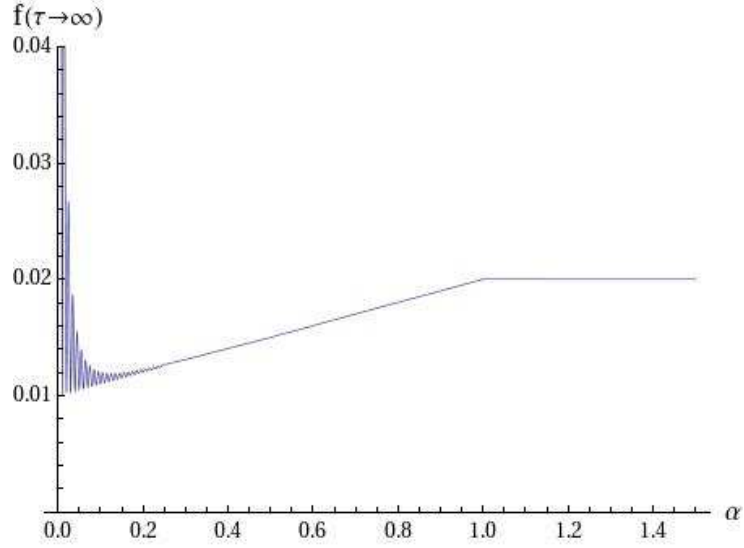


Figura 2.3: Valor asintótico de $\langle f_\alpha(\tau \rightarrow \infty) \rangle_{2,2}$. Se fijó $N = 100$.

Si nos fijamos en el valor asintótico de (2.16), es decir cuando $\tau \rightarrow \infty$, encontramos que:

$$\langle f_\alpha(t) \rangle_{2,2} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} S_N(\alpha) + \frac{2 - b_2^2(\alpha)}{N}. \quad (2.17)$$

En la figura 2.3 se grafica este valor asintótico. Podemos ahora entender el comportamiento de la Ec. (2.16). Vemos que para valores de $\alpha \geq \frac{1}{N}$ el valor estacionario de $\langle f_\alpha(t) \rangle_{2,2}$ está en el rango $[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}]$, con la condición de que si α es de orden $\mathcal{O}(1/N)$, la función $S_N(\alpha)$ debe estar en su mínimo, lo cual ocurre para $\alpha = \frac{k}{N}$ con $k \in \{1, \dots, N\}$. Además, el mínimo de la Ec. (2.16) como función solamente del tiempo, está en $\tau = 1/N$ y se encuentra que para $\alpha \geq \frac{1}{N}$ este valor es función de $\frac{1 - b_2^2(\alpha)}{N}$. Es por esto que, por ejemplo, en la figura 2.2 el mínimo de la amplitud de fidelidad para $\alpha = 0.5$ es $\frac{1 - b_2^2(\alpha=0.5)}{N} = 0.005$, mientras que su valor estacionario, dado por la Ec. (2.17), está en $\frac{1.5}{N}$, el cual cae en el rango $[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}]$ como es de esperarse por el análisis hecho.

2.4. Amplitud de fidelidad para dimensiones pequeñas

Si el espacio de Hilbert generado por H_0 es pequeño no podemos utilizar la aproximación de la Ec. (2.16) para la amplitud de fidelidad, ya que en esa expresión se utiliza el factor de forma espectral b_2^β , que es un resultado válido solamente cuando $N \rightarrow \infty$. En este caso se debe utilizar la expresión (2.12); sin embargo, aunque para dimensiones pequeñas existe una forma funcional del factor de forma [18], esta es algebraicamente difícil de manipular, por lo que se obtuvo numéricamente diagonalizando matrices hermitianas y promediando distintas realizaciones sobre el GUE .

En la figura 2.4 las líneas punteadas muestran la amplitud de fidelidad para $N = 10$ y $\alpha = 0.1, 0.5, 1$, al haber promediado H_0 y h sobre 5000 miembros del GUE , mientras que las líneas continuas son el resultado obtenido con la fórmula asintótica, dada por la Ec. (2.16). Se puede observar que ambos comportamientos son muy similares; el promedio del error relativo, considerando sólo los puntos después del mínimo de la amplitud de fidelidad, es de: 0.83, 0.11 y 0.62 para $\alpha = 0.1, 0.5$ y 1 , respectivamente. Estos valores concuerdan con lo esperado, ya que el error debe de ser del orden $\mathcal{O}(1/N)$. Lo anterior se debe fundamentalmente a que los promedios de los elementos de matriz W sobre $U(N)$, dados por la Ec. (2.7), difieren en el orden de $1/N$ entre los primeros 3 casos y el último, que viene a ser el caso de las correlaciones entre dos vectores de W . Sin embargo, estas correlaciones no se presentan cuando $N \rightarrow \infty$, mientras que para el caso de dimensión pequeña sí. Es por ello que se hereda esta diferencia de orden $1/N$ entre la Ec. (2.4) y la (2.16).

Finalmente, antes de cerrar este capítulo, es necesario mencionar que el promedio de la fidelidad (ver Ec. (1.4)) para H_0 y h sobre GUE es igual al módulo al cuadrado del promedio de la amplitud de fidelidad: $\langle F_\alpha(t) \rangle_{2,2} = |\langle f_\alpha(\tau) \rangle_{2,2}|^2$, con un error de $1/N$. Esto se debe al resultado encontrado en [4], donde se demuestra que:

$$\langle\langle F(t) \rangle\rangle = \frac{|\langle\langle f \rangle\rangle|^2 + 1/N}{1 + 1/N}. \quad (2.18)$$

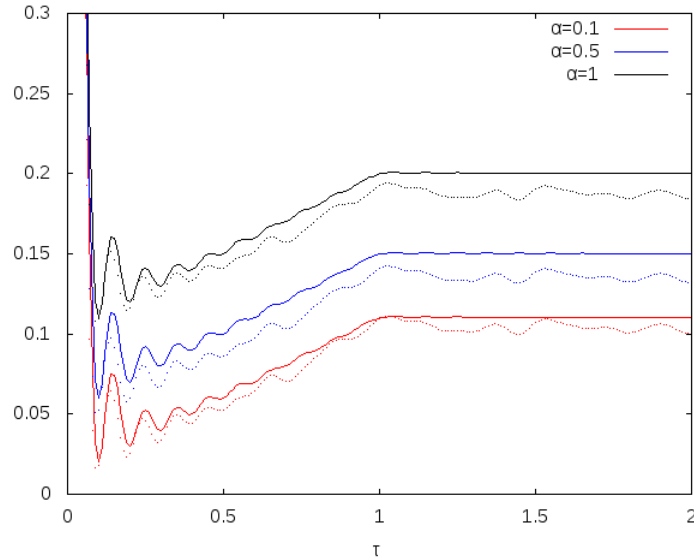


Figura 2.4: Promedio de amplitud de fidelidad para $N = 10$ y $\alpha = 0.1, 0.5, 1$. La línea continua es el resultado asintótico dado por la Ec. (2.16) y la línea punteada el resultado numérico de (2.12).

En este caso $\langle\langle \bullet \rangle\rangle$ denota un promedio sobre estados aleatorios. Dado que en nuestro caso el promedio sobre el ensemble implica automáticamente un promedio sobre estados aleatorios, tenemos que $\langle\langle \bullet \rangle\rangle \sim \langle \bullet \rangle_{2,2}$, por lo que la diferencia de orden $1/N$ entre el promedio de la amplitud de fidelidad y la fidelidad, se sigue conservando.

Capítulo 3

Hamiltonianos del GOE perturbados con el grupo unitario

En este capítulo se realizan el mismo tipo de cálculos hechos en el capítulo 2, pero ahora utilizando hamiltonianos reales simétricos del *GOE* cuya perturbación los convierte en hermitianos complejos. Primero se define la forma de realizar la perturbación isoespectral y después se aplica la perturbación para medir la amplitud de fidelidad. Posteriormente, el cálculo se restringe al caso en que la dimensión $N \gg 1$, para así llegar a una expresión asintótica sencilla. Al final del capítulo se calcula la amplitud de fidelidad para dimensiones pequeñas y se compara el resultado con la versión asintótica.

3.1. Definición de la perturbación

Sea H_0 la representación matricial de dimensión N de un hamiltoniano invariante ante inversión temporal, es decir, una matriz real y simétrica. Definimos H_a como la matriz semejante de H_0

$$H_a = U_a^{-1} H_0 U_a \tag{3.1}$$

donde U_a es la transformación de semejanza, tal que $U_a \in \mathcal{U}(N)$, es decir, son matrices unitarias de dimensión N y además H_a es ahora una matriz

22 3. Hamiltonianos del GOE perturbados con el grupo unitario

hermitiana. Se define U_a como la exponenciación de una matriz hermitiana h de la misma dimensión que H_0

$$U_a = e^{iah} \quad (3.2)$$

donde a es un parámetro real. Además

$$E = V_0^{-1}H_0V_0 \quad y \quad \Delta = V^{-1}hV \quad (3.3)$$

donde Δ, E son matrices diagonales y reales de dimensión N , las cuales contienen los eigenvalores de H_0, h , respectivamente, mientras que $V_0 \in \mathcal{O}(N)$ y $V \in \mathcal{U}(N)$ son las matrices que contienen sus eigenvectores.

3.2. Amplitud de fidelidad

Con las definiciones dadas en la sección anterior, la amplitud de fidelidad para perturbaciones isoespectrales en sistemas invariantes ante inversión temporal, se obtiene de la siguiente manera:

$$f_a(t) = \langle \Phi | e^{iEt} W e^{-i\Delta a} W^{-1} e^{-iEt} W e^{i\Delta a} W^{-1} | \Phi \rangle,$$

donde se ha renombrado de nuevo $|\Phi\rangle = V_0|\Psi\rangle$ y $W = V_0V$, tal que $W \in \mathcal{U}(N)$. Al hacer el mismo análisis que en el capítulo anterior y utilizado la definición del factor de forma dado en la Ec. (2.10) se obtiene la siguiente expresión para la amplitud de fidelidad promediada sobre miembros H_0 del *GOE* y h del *GUE*:

$$\langle f_a(t) \rangle_{2,2} = \frac{K_2^N(a) + K_1^N(t)}{N+1} - \frac{K_2^N(a)K_1^N(t) - K_2^N(a) - K_1^N(t) + 1}{(N-1)(N+1)}, \quad (3.4)$$

donde ahora $K_1^N(t), K_2(a)$ son los factores de forma para los elementos E del *GOE* y Δ del *GUE*, respectivamente.

3.3. Amplitud de fidelidad para $N \gg 1$

El procedimiento para encontrar el promedio de la amplitud de fidelidad para $N \gg 1$, es el mismo que el del capítulo anterior, sólo que ahora necesitamos sustituir el valor asintótico del factor de forma para la simetría correspondiente. Al hacer esto, se encuentra que la aproximación de la amplitud de fidelidad es

$$\langle f_\alpha(\tau) \rangle_{1,2} \approx S_N(\tau) + S_N(a) - S_N(\tau)S_N(a) + \frac{1}{N} [2 + b_2^1(\tau)(S_N(\alpha) - 1) + b_2^2(\alpha)(S_N(\tau) - 1)], \quad (3.5)$$

donde los subíndices 1,2, se utilizan para expresar que se hizo un promedio para H_0 sobre GOE ($\beta = 1$) y otro promedio independiente para h sobre GUE ($\beta = 2$).

En la figura 3.1 se grafica este resultado para $\tau \in [0, 1.5]$ y $\alpha \in \{0.01, 0.5, 1\}$, al dejar fijo $N = 100$. Asimismo, el análisis hecho en la sección anterior para el valor asintótico se cumple también en este caso (ver Ec. (2.17)), pero, dado que el comportamiento temporal es ahora función de b_2^1 (que a su vez está dado en función de logaritmos), este valor se alcanza a tiempos mucho más largos. Además el mínimo en la amplitud de fidelidad también viene dado por $\frac{1-b_2^2(\alpha)}{N}$, lo cual se puede verificar al observar la figura 3.1.

3.4. Amplitud de fidelidad para dimensiones pequeñas

Si el espacio de Hilbert generado por H_0 es pequeño debemos utilizar la aproximación de la Ec. (3.4) para la amplitud de fidelidad, ya que en esta expresión se utiliza el factor de forma espectral b_2^β , que como mencionamos en el capítulo anterior, es un resultado válido solamente cuando $N \rightarrow \infty$. En este caso el factor de forma se obtuvo numéricamente diagonalizando matrices reales simétricas para K_2^1 y hermitianas complejas para K_2^2 ; promediando distintas realizaciones sobre el GOE y GUE , respectivamente. En la figura 3.2 se grafica la amplitud de fidelidad dada por (3.4), fijando $N = 10$, así como utilizando los valores de $\alpha = 0.1, 0.5$ y 1 . Las líneas

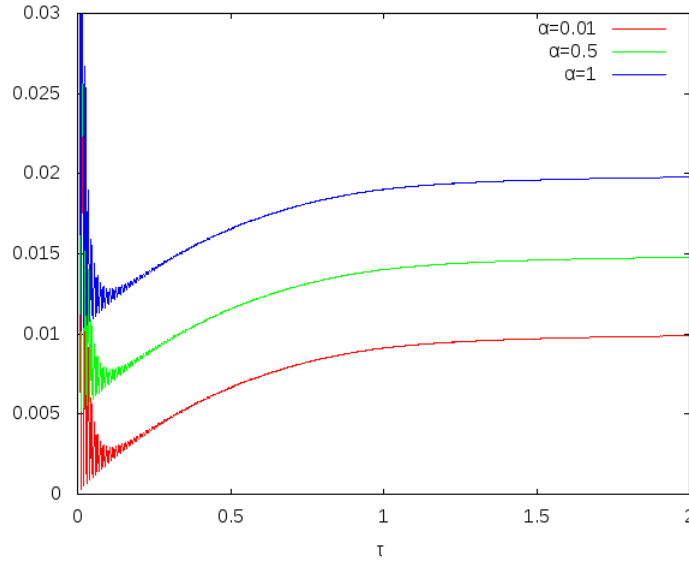


Figura 3.1: Aproximación de $\langle f_\alpha(\tau) \rangle_{1,2}$ para $N \gg 1$ al variar $\tau \in [0, 1.5]$ y $\alpha \in \{0.01, 0.5, 1\}$. Se fijó $N = 100$.

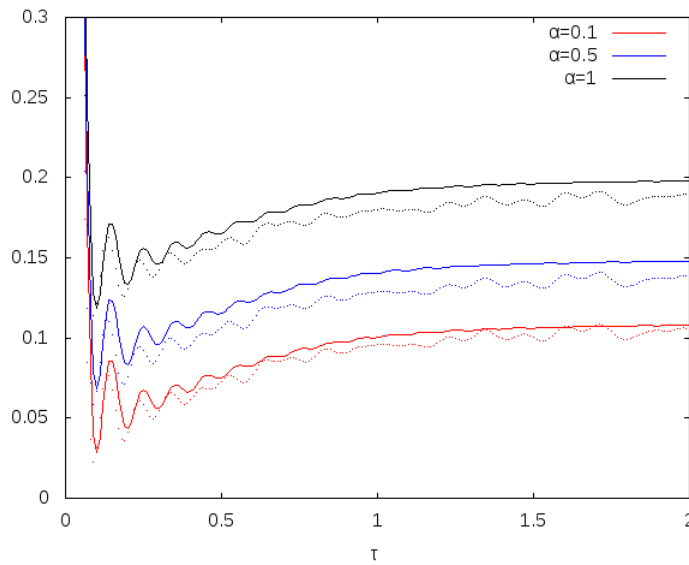


Figura 3.2: Promedio de amplitud de fidelidad para $N = 10$ y $\alpha = 0.1, 0.5, 1$. La línea continua es el resultado asintótico dado por la Ec. (3.5) y la línea punteada el resultado numérico de (3.4).

punteadas muestran este resultado al haber promediado H_0 y h sobre 5000 miembros del GOE , GUE , respectivamente; las líneas continuas son el resultado dado por la ecuación asintótica (3.5). Se puede observar que ambos comportamientos son muy similares; el promedio del error relativo, considerando sólo los puntos después del mínimo de la amplitud de fidelidad, es de: 0.727, 0.612 y 0.968, para $\alpha = 0.1, 0.5$ y 1 , respectivamente. Este error es del orden $\mathcal{O}(1/N)$, como era de esperarse por la discusión hecha en la sección 2.4, ya que en este caso también $W \in \mathcal{U}$.

Finalmente, por el mismo argumento que el dado al final de la sección 2.4, se cumple también que el promedio de la fidelidad es igual al modulo al cuadrado de la amplitud de fidelidad: $\langle F_\alpha(t) \rangle_{1,2} = |\langle f_\alpha(\tau) \rangle_{1,2}|^2$, con un error de orden $1/N$.

Capítulo 4

Hamiltonianos del GOE

En este capítulo se obtiene de nuevo una expresión de la amplitud de fidelidad bajo perturbaciones isoespectrales, pero ahora válida para hamiltonianos genéricos del *GOE* cuya perturbación no cambia su representación matricial. Primero, se define la forma de realizar la perturbación isoespectral y después se aplica la perturbación para medir la amplitud de fidelidad. Posteriormente el cálculo se restringe al caso en que la dimensión $N \gg 1$ para poder así llegar a una expresión asintótica sencilla. Al final del capítulo se calcula la amplitud de fidelidad para dimensiones pequeñas y se compara el resultado con la versión asintótica.

4.1. Definición de la perturbación

Sea H_0 la representación matricial de dimensión N de un hamiltoniano invariante ante inversión temporal, es decir, una matriz real y simétrica. Definimos H_a como la matriz semejante de H_0

$$H_a = O_a^{-1} H_0 O_a \quad (4.1)$$

donde O_a es la transformación de semejanza, tal que $O_a \in O(N)$, es decir, son matrices ortogonales de dimensión N . Se define O_a como la exponenciación de una matriz hermitiana antisimétrica h del mismo rango que H_0 :

$$O_a = e^{iah} \quad (4.2)$$

donde en la última igualdad hemos multiplicado por la unidad $V_0^{-1}V_0$. Además, si se define

$$|\Phi\rangle = V_0|\Psi\rangle \quad \text{y} \quad W = V_0V \in O(N),$$

la amplitud de fidelidad toma la forma

$$f_a(t) = \langle \Phi | e^{iEt} W e^{-\Delta a} W^{-1} e^{-iEt} W e^{\Delta a} W^{-1} | \Phi \rangle. \quad (4.6)$$

Queremos escribir el operador eco resultante en términos de sus elementos de matriz. Para lograr esto, primero observamos que

$$e^{\pm\Delta a} = \begin{pmatrix} \cos(a\lambda_1) & \pm \sin(a\lambda_1) & & & 0 \\ \mp \sin(a\lambda_1) & \cos(a\lambda_1) & \cdots & & 0 \\ & 0 & & & 0 \\ & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & \cos(a\lambda_{\frac{N}{2}}) & \pm \sin(a\lambda_{\frac{N}{2}}) \\ & & & \mp \sin(a\lambda_{\frac{N}{2}}) & \cos(a\lambda_{\frac{N}{2}}) \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

donde hemos considerado el caso en que Δ es de dimensión par y que $2r = N$, es decir, no hay eigenvalores iguales a cero. De esta manera, podemos escribir el operador (4.7) como

$$(e^{\pm\Delta a})_{k\mu, l\nu} = \delta_{kl} \delta_{\mu\nu} \cos(a\lambda_k) \pm (-1)^\mu \delta_{kl} (1 - \delta_{\mu\nu}) \sin(a\lambda_k), \quad (4.8)$$

donde los subíndices latinos recorren la matriz en bloques de 2×2 , por lo que van de 1 hasta $N/2$, mientras que los subíndices griegos recorren los elementos de los bloques, por lo que sólo adquieren el valor 1 ó 2. Siguiendo esta misma notación de índices dobles, podemos ahora escribir los elementos de matriz del lado derecho de (4.6) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \langle \Phi | e^{iEt} W e^{-\Delta a} W^{-1} e^{-iEt} W e^{\Delta a} W^{-1} | \Phi \rangle = \\ & = \sum_{\substack{\mu\nu\xi\rho \\ \sigma\tau\phi\chi\psi}}^2 \sum_{\substack{ijkl \\ mnopq}}^{N/2} c_{i\mu}^* c_{q\psi} (e^{iEt})_{i\mu, j\nu} W_{j\nu, k\xi} (e^{-\Delta a})_{k\xi, l\rho} W_{l\rho, m\sigma}^{-1} \\ & \quad \times (e^{-iEt})_{m\sigma, n\tau} W_{n\tau, o\phi} (e^{\Delta a})_{o\phi, p\chi} W_{p\chi, q\psi}^{-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{2 \\ \mu\nu\xi\rho \\ \sigma\tau\phi\chi\psi}} \sum_{\substack{N/2 \\ ijkl \\ mnopq}} c_{i\mu}^* c_{q\psi} e^{iE_{i\mu}t} \delta_{ij} \delta_{\mu\nu} W_{j\nu,k\xi} \\
&\times (\delta_{kl} \delta_{\xi\rho} \cos(a\lambda_k) - (-1)^\xi \delta_{kl} (1 - \delta_{\xi\rho}) \sin(a\lambda_k)) \\
&\times W_{m\sigma,l\rho} e^{-iE_{m\sigma}t} \delta_{mn} \delta_{\sigma\tau} W_{n\tau,o\phi} \\
&\times (\delta_{op} \delta_{\phi\chi} \cos(a\lambda_o) + (-1)^\phi \delta_{op} (1 - \delta_{\phi\chi}) \sin(a\lambda_o)) W_{q\psi,p\chi} = \\
&= \sum_{\substack{2 \\ \mu\xi\rho \\ \sigma\phi\chi\psi}} \sum_{\substack{N/2 \\ ik \\ moq}} c_{i\mu}^* c_{q\psi} e^{i(E_{i\mu} - E_{m\sigma})t} (\delta_{\xi\rho} \cos(a\lambda_k) - (-1)^\xi (1 - \delta_{\xi\rho}) \sin(a\lambda_k)) \\
&\times (\delta_{\phi\chi} \cos(a\lambda_o) + (-1)^\phi (1 - \delta_{\phi\chi}) \sin(a\lambda_o)) W_{i\mu,k\xi} W_{m\sigma,k\rho} W_{m\sigma,o\phi} W_{q\psi,o\chi},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

donde $c_{i\mu}$ son los coeficientes de desarrollo de $|\Phi\rangle$ en la base de W . Además se utilizó el hecho de que la matriz W es ortogonal, por lo que $W_{i\mu,j\nu}^{-1} = W_{j\nu,i\mu}$.

Ahora se promedia la amplitud de fidelidad para H_0 sobre GOE , y h sobre un ensemble de matrices hermitianas antisimétricas con la medida de Haar. Se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\langle f_a(t) \rangle_{1,A} &= \frac{1}{N} \sum_{\mu\nu\xi\rho\sigma\tau} \sum_{ijkl} \left\langle e^{i(E_{i\mu} - E_{k\rho})t} \right\rangle_1 \langle \delta_{\nu\xi} \delta_{\sigma\tau} \cos(a\lambda_j) \cos(a\lambda_l) + \\
&(-1)^\sigma \delta_{\nu\xi} (1 - \delta_{\sigma\tau}) \cos(a\lambda_j) \sin(a\lambda_l) - (-1)^\nu \delta_{\sigma\tau} (1 - \delta_{\nu\xi}) \sin(a\lambda_j) \cos(a\lambda_l) - \\
&(-1)^\nu (-1)^\sigma (1 - \delta_{\nu\xi}) (1 - \delta_{\sigma\tau}) \sin(a\lambda_j) \sin(a\lambda_l) \rangle_A \langle W_{i\mu,j\nu} W_{k\rho,j\xi} W_{k\rho,l\sigma} W_{i\mu,l\tau} \rangle_1,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde ahora denotamos los promedios sobre el GOE por $\langle \bullet \rangle_1$, mientras que $\langle \bullet \rangle_A$ denota un promedio al recorrer un ensemble de matrices antisimétricas. El doble índice en el promedio de la amplitud de fidelidad $\langle \bullet \rangle_{1,A}$ se refiere a que se ha realizado un promedio sobre H_0 independiente del de h . Además, por el mismo argumento dado en el capítulo 2, el promedio sobre $O(N)$ implica un promedio sobre estados aleatorios, por lo que los coeficientes $c_{i\mu}$ de nuevo cumplen que $\langle c_i^* c_m \rangle_2 = \delta_{im}/N$ [24].

Para volver más transparente el cálculo de los promedios de productos de elementos W sobre el grupo ortogonal, podemos primero recorrer la

matriz W por bloques de $2X2$, para la cual el conjunto de subíndices $\{i\mu, j\nu, j\xi, k\rho, l\sigma, l\tau\}$ los renombramos como $\{a, b, c, d, e, f\}$, tal que

$$\langle W_{i\mu, j\nu} W_{k\rho, j\xi} W_{k\rho, l\sigma} W_{i\mu, l\tau} \rangle_1 \rightarrow \langle W_{ab} W_{dc} W_{de} W_{af} \rangle_1. \quad (4.11)$$

Los diferentes valores de los promedios para el operador de la derecha en (4.11) se puede obtener de forma compacta con ayuda de la fórmula de Weingarten[26] (Ver apéndice B)

$$\begin{aligned} \langle W_{ab} W_{dc} W_{de} W_{af} \rangle_1 &= \frac{n+1}{(n-1)n(n+2)} [\delta_{bf}\delta_{ce} + \delta_{ad}(\delta_{bc}\delta_{ef} + \delta_{be}\delta_{cf})] + \\ &\frac{-1}{(n-1)n(n+2)} [\delta_{bc}\delta_{ef}(1 + \delta_{ad}) + \delta_{be}\delta_{cf}(1 + \delta_{ad}) + 2\delta_{ad}\delta_{bf}\delta_{ce}], \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde δ , son las deltas de Kronecker y $n = N/2$. De esta manera, al recorrer también las submatrices de $2X2$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle W_{i\mu, j\nu} W_{k\rho, j\xi} W_{k\rho, l\sigma} W_{i\mu, l\tau} \rangle_1 &= \frac{N+1}{(N-1)N(N+2)} [\delta_{j\nu\xi}^{l\tau\sigma} + \delta_{i\mu}^{k\rho}(\delta_{\nu\sigma}^{\xi\tau} + \delta_{j\nu\xi}^{l\sigma\tau})] + \\ &\frac{-1}{(N-1)N(N+2)} [\delta_{\nu\sigma}^{\xi\tau}(1 + \delta_{i\mu}^{k\rho}) + \delta_{j\nu\xi}^{l\sigma\tau}(1 + \delta_{i\mu}^{k\rho}) + 2\delta_{i\mu}^{k\rho}\delta_{j\nu\xi}^{l\tau\sigma}]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Aquí $\delta_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_n} = \prod_{k=1}^n \delta_{i_k j_k}$. Al sustituir el resultado anterior en (4.10), encontramos que en este caso el promedio de la amplitud de fidelidad adquiere la forma

$$\begin{aligned} \langle f_a(t) \rangle_{1,A} &= \frac{-2}{(N-1)(N+2)} + \frac{N+1}{(N-1)N(N+2)} \left\langle \sum_{ik}^N e^{i(E_i - E_k)t} \right\rangle_1 + \\ &\frac{2}{(N-1)N^2(N+2)} \left(N^2 - \left\langle \sum_{ik}^N e^{i(E_i - E_k)t} \right\rangle_1 \right) \left(\left\langle \sum_j^{N/2} \cos^2(a\lambda_j) \right\rangle_A - \left\langle \sum_j^{N/2} \sin^2(a\lambda_j) \right\rangle_A \right) \\ &+ 2 \left\langle \sum_{jl}^{N/2} \cos(a\lambda_j) \cos(a\lambda_l) \right\rangle_A \end{aligned} \quad (4.14)$$

Teniendo ahora en cuenta las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}\cos^2(\theta) &= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \\ \sin^2(\theta) &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \\ \cos(\theta) \cos(\phi) &= \frac{1}{4} (e^{i(\theta+\phi)} + e^{-i(\theta+\phi)} + e^{i(\theta-\phi)} + e^{-i(\theta-\phi)}),\end{aligned}\tag{4.15}$$

podemos escribir la Ec. (4.14) como

$$\begin{aligned}\langle f_a(t) \rangle_{1,A} &= \frac{-2}{(N-1)(N+2)} + \frac{N+1}{(N-1)N(N+2)} \left\langle \sum_{ik}^N e^{i(E_i - E_k)t} \right\rangle_1 + \\ &\frac{1}{(N-1)N^2(N+2)} \left(N^2 - \left\langle \sum_{ik}^N e^{i(E_i - E_k)t} \right\rangle_1 \right) \left\langle \sum_j^{N/2} (e^{2ia\lambda_j} + e^{-2ia\lambda_j}) + \right. \\ &\left. \sum_{jl}^{N/2} (e^{ia(\lambda_j + \lambda_l)} + e^{-ia(\lambda_j + \lambda_l)} + e^{ia(\lambda_j - \lambda_l)} + e^{-ia(\lambda_j - \lambda_l)}) \right\rangle_A.\end{aligned}\tag{4.16}$$

De manera similar a los capítulos 2 y 3, se define el factor de forma para el ensemble de matrices hermitianas antisimétricas de la siguiente manera:

$$K_A^{N/2}(a) = \frac{1}{N/2} \left\langle \sum_{j=1}^{N/2} e^{ia(\lambda_j - \lambda_l)} \right\rangle_A\tag{4.17}$$

Con esta definición y la dada para $K_1^N(t)$ en (2.10), la Ec. (4.16) se ve de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\langle \overline{f_a(t)} \rangle_{1,A} &= \frac{-2}{(N-1)(N+2)} + \frac{(N+1)K_1^N(t)}{(N-1)(N+2)} + \frac{N - K_1^N(t)}{(N-1)N(N+2)} \left(NK_A^{N/2}(a) \right. \\ &\left. + \left\langle \sum_j^{N/2} (e^{2ia\lambda_j} + e^{-2ia\lambda_j}) + \sum_{jl}^{N/2} (e^{ia(\lambda_j + \lambda_l)} + e^{-ia(\lambda_j + \lambda_l)}) \right\rangle_A \right).\end{aligned}\tag{4.18}$$

4.3. Amplitud de fidelidad para $N \gg 1$

Para encontrar una expresión sencilla de la amplitud de fidelidad nos restringiremos al caso en que $N \gg 1$. En este límite las correlaciones de m puntos para el ensemble de matrices hermitianas antisimétricas son las mismas que las correlaciones del *GUE* [30] (Ver apéndice C). Por lo tanto $K_A^{N/2}(a) = K_2^{N/2}(a)$. Además, debido a que las correlaciones de un punto siguen el comportamiento de una delta de Dirac, las podemos representar por la función S que definimos en la sección 2.3

$$\left\langle \sum_j^n e^{ia\lambda_j} \right\rangle_A \approx nS_n(a). \quad (4.19)$$

Sustituyendo ahora las correlaciones de un punto en (4.18) por la función S apropiada, obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} \langle f_a(t) \rangle_{1,A} &= \frac{-2}{(N-1)(N+2)} + \frac{(N+1)K_{2_1}^N(t)}{(N-1)(N+2)} + \\ &\frac{N - K_{2_1}^N(t)}{(N-1)(N+2)} \left(S_{N/2}(2a) + \frac{N}{2} S_{N/2}^2(a) + K_{2_A}^{N/2}(a) \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde se usó del hecho que $S_n(-a) = S_n(a)$, ya que es una función simétrica por definición. Ahora, ya que estamos en el caso en que $N \gg 1$, podemos sustituir los factores de forma en términos de las funciones $b_2^1(a)$ y b_2^2 (ver Apéndice A), dando como resultado

$$\begin{aligned} \langle f_a(t) \rangle_{1,A} &= -\frac{2}{N^2} + \frac{1}{N} [1 + NS_N(\tau) - b_2^1(\tau)] + \frac{1}{N^2} [N - NS_N(\tau) + b_2^1(\tau)] \times \\ &[S_{N/2}(2\alpha) + \frac{N}{2} S_{N/2}^2(\alpha) + 1 + \frac{N}{2} S_{N/2}(\alpha) - b_2^2(\alpha)], \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde ahora $\tau = t/t_H$ y $\alpha = a/a_H$, es decir, el tiempo y la magnitud de la perturbación están en unidades de su respectivo tiempo de Heisenberg. Asimismo, al igual que en el caso *GUE*, las deltas de Dirac que aparecen en la expresión asintótica del factor de fueron sustituidas por la función S . Finalmente, quedándonos solamente con los términos de orden $\mathcal{O}(1)$ y $\mathcal{O}(N^{-1})$ obtenemos que la amplitud de fidelidad para $N \gg 1$, promediada

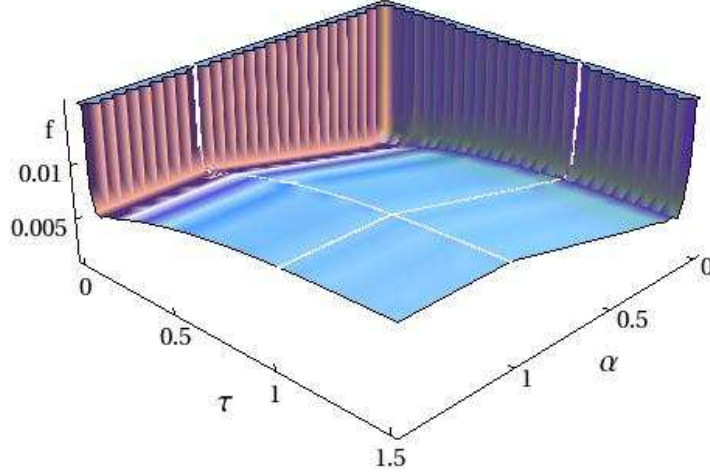


Figura 4.1: Aproximación de $\langle f_\alpha(\tau) \rangle_{1,A}$ para $N \gg 1$ al variar los parámetros $\tau, \alpha \in [0, 1.5]$. Se fijó $N = 200$.

sobre hamiltonianos H_0 miembros del *GOE* y hamiltonianos h que recorren un ensemble de matrices antisimétricas es:

$$\begin{aligned} \langle f_\alpha(t) \rangle_{1,A} &\approx S_N(\tau) + \frac{1}{2}S_{N/2}(\alpha)(1 + S_{N/2}(\alpha)) - \frac{1}{2}S_N(\tau)S_{N/2}(\alpha)(1 + S_{N/2}(\alpha)) \\ &+ \frac{1}{N} \left[2 + b_2^1(\tau) \left(\frac{1}{2}S_{N/2}(\alpha)(1 + S_{N/2}(\alpha)) - 1 \right) + (b_2^2(\alpha) - S_{N/2}(2\alpha))(S_N(\tau) - 1) \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Con la misma S definida en la Ec. (2.15), en la figura 4.1 se graficó la ecuación anterior (4.22) para $\tau, \alpha \in [0, 1.5]$, dejando fijo $N = 200$. Además en la figura 4.2 se graficaron cortes para $\alpha = \{0.01, 0.5, 1\}$, donde se puede observar más claramente que el decaimiento de fidelidad es similar al caso en que se mezclan simetrías (ver figura 3.1).

Si nos fijamos en el valor asintótico de (4.22), es decir cuando $\tau \rightarrow \infty$, encontramos que:

$$\langle f_\alpha(t) \rangle_{1,A} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2}S_{N/2}(\alpha)(1 + S_{N/2}(\alpha)) + \frac{2 - b_2^2(\alpha) + S_{N/2}(2\alpha)}{N}. \quad (4.23)$$

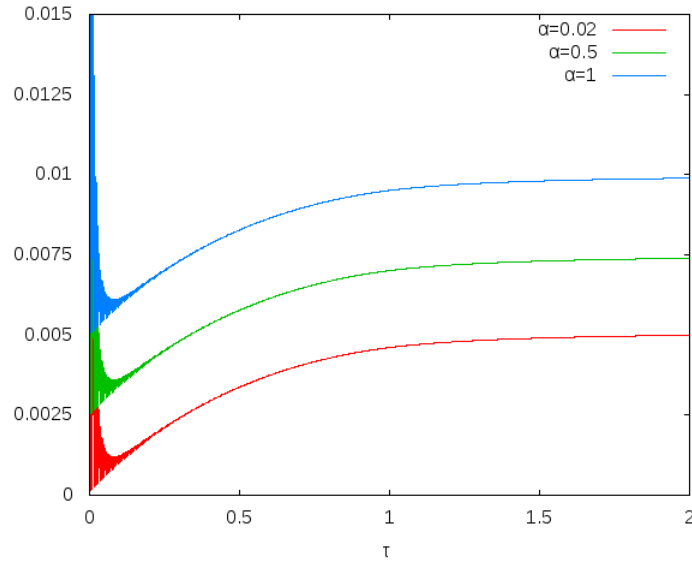


Figura 4.2: Aproximación de $\langle f_\alpha(\tau) \rangle_{1,A}$ para $N \gg 1$ al variar $\tau \in [0, 1.5]$ y $\alpha \in \{0.01, 0.5, 1\}$. Se fijó $N = 200$.

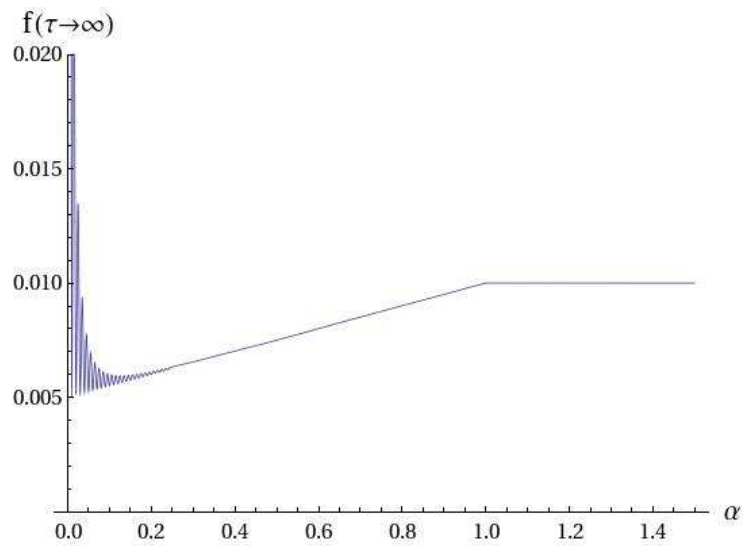


Figura 4.3: Valor asintótico de $\langle f_\alpha(\tau \rightarrow \infty) \rangle_{1,A}$. Se fijó $N = 200$.

En la figura 4.3 se grafica este valor asintótico. Podemos ahora entender que la principal diferencia entre (3.5) y (4.22), se debe a que para valores de $\alpha \in [0, \frac{1}{N/2}]$ el valor estacionario de (4.2) varía con $\frac{1}{2}S_{N/2}(\alpha)(1 + S_{N/2}(\alpha))$, mientras que para (3.5) va como $S_N(\alpha)$. Asimismo tenemos que para $\alpha \geq \frac{1}{N/2}$ el valor estacionario de $\langle f_\alpha(t) \rangle_{1,A}$ está en el rango $[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}]$, con la condición de que si α es de orden $\mathcal{O}(\frac{1}{N/2})$, la función $S_{N/2}(\alpha)$ esté en su mínimo, lo cual sucede para $\alpha = \frac{k}{N/2}$ con $k \in \{1, \dots, N/2\}$ y al igual que en el caso en que se mezclan simetrías, este valor se alcanza a tiempos mucho más largos debido a que el comportamiento temporal de la amplitud de fidelidad está determinado por $b_2^1(\tau)$. Además, se sigue cumpliendo que el mínimo de la amplitud de fidelidad, para $\alpha \geq \frac{1}{N/2}$, es función de $\frac{1-b_2^2(\alpha)}{N}$ y se alcanza al tiempo $\tau = 1/N$.

4.4. Amplitud de fidelidad para dimensiones pequeñas

Al igual que en el caso *GUE*, si el espacio de Hilbert generado por H_0 es pequeño no podemos utilizar la aproximación de la Ec. (4.22), ya que en esa expresión se utilizan los factores de forma espectral b_1^β y b_2^β , que son resultados válidos solamente cuando $N \rightarrow \infty$. En este caso se debe utilizar la expresión (4.14) ó (4.16); sin embargo, como ya se menciona en el capítulo 2, aunque para dimensiones pequeñas existe una forma funcional del factor de forma, esta es difícil de manipular, por lo que nuevamente se obtuvo numéricamente diagonalizando matrices reales simétricas, así como matrices ortogonales, utilizando los eigenvalores de las primeras y las eigenfases de las segundas; promediando distintas realizaciones sobre el *GOE* y el grupo ortogonal O .

En la figura 4.4 las líneas punteadas muestra la amplitud de fidelidad para $N/2 = 10$ y $\alpha = 0.2, 0.5, 1$, al haber promediado H_0 sobre un ensemble de $m = 5000$ miembros del *GOE*, así como h sobre un ensemble de matrices hermitianas antisimétricas del mismo número de miembros m ; las líneas continuas muestran el resultado con la fórmula asintótica, dada por la Ec. (4.22). Se puede observar que ambos comportamientos son muy similares, con un error relativo de: 0.108, 0.036 y 0.047, para $\alpha = 0.2, 0.5$ y 1, res-

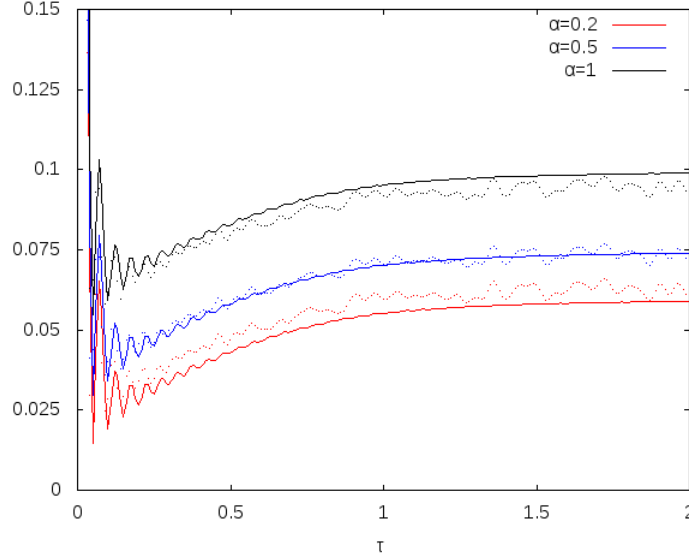


Figura 4.4: Promedio de amplitud de fidelidad para $N = 20$ y $\alpha = 0.2, 0.5, 1$. La línea continua es el resultado asintótico dado por la Ec. (4.22), y la línea punteada el resultado numérico (4.14)

pectivamente. Estos valores concuerdan con lo esperado, ya que al igual que en el caso GUE , el error debe de ser del orden $\mathcal{O}(1/N)$, debido a que los promedios de los elementos de matriz W sobre $\mathcal{O}(N)$, dados por la Ec. (4.13), también varían en un orden $1/N$ entre las correlaciones de un vector y la de dos vectores. Las últimas correlaciones no aparecen cuando $N \rightarrow \infty$, heredándose esta diferencia de orden entre las ecuaciones (4.14) y (4.22).

Finalmente, es necesario mencionar que el promedio de la fidelidad es igual al módulo al cuadrado del promedio de la amplitud de fidelidad $\langle F_\alpha(t) \rangle_{1,A} = |\langle f_\alpha(t) \rangle_{1,A}|^2$, con un error de orden $1/N$ [4]. Esto es válido solamente cuando los estados iniciales $|\Psi\rangle$ son reales, ya que para en el GOE los operadores que involucran al estado en un orden mayor que bilineal (como es el caso de la fidelidad), hacer el promedio sobre el ensemble no implica un promedio sobre estados aleatorios complejos[31]. Por ello, en el caso de estados iniciales complejos no podemos aplicar el resultado (2.18) mencionado al final del capítulo 2.

Capítulo 5

Modelo Dinámico

En este capítulo se desarrolla el sistema estudiado en [5, 6] que consiste de dos osciladores con potencial de acoplamiento cuártico. Primero se explica cómo construir su matriz hamiltoniana y después se mide la fidelidad perturbando el sistema con rotaciones en el espacio de configuración. La perturbación hecha a este sistema es isoespectral, por lo que al final del capítulo se compara el decaimiento de fidelidad de este sistema con lo obtenido mediante el formalismo de matrices aleatorias, discutiendo así la validez y alcance de los modelos encontrados en los capítulos anteriores.

5.1. Definición del sistema y la perturbación

Se construyó la matriz hamiltoniana de dos osciladores cuánticos acoplados

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \alpha_1 q_1^4 + \alpha_2 q_2^4 + \alpha_3 (q_1 - q_2)^4, \quad (5.1)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Este sistema es clásicamente integrable cuando $\alpha_3 = 0$, mientras que casi la totalidad del volumen del espacio fase corresponde a dinámica caótica para valores negativos de α_3 . Para que el sistema no se disocie se debe cumplir que [5]:

$$|\alpha_3| < \frac{1}{16}(\alpha_1 + \alpha_2). \quad (5.2)$$

Debido a que (5.1) es un polinomio de grado par, se conserva la paridad,

es decir, el operador de paridad P conmuta con el hamiltoniano: $[P, H] = 0$. Por eso, si hacemos uso de esta simetría, la representación matricial de H en la eigenbase de P se reduce a la forma de bloque

$$H = \begin{pmatrix} H^{(p)} & 0 \\ 0 & H^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

donde los eigenestados de $H^{(p)}$ serán pares y los de $H^{(i)}$ impares. Para construir las submatrices $H^{(p)}$ y $H^{(i)}$ se utilizó la base de dos osciladores armónicos en segunda cuantización, con un par de operadores de ascenso y descenso independientes para cada grado de libertad:

$$q_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2mw_k}}(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger), \quad p_k = i\sqrt{\frac{mw_k\hbar}{2}}(\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k). \quad (5.4)$$

Se cumple así que $[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \delta_{k,l}$, para $k = 1, 2$. Los elementos de matriz de H son de la forma

$$\begin{aligned} H_{m_1 m_2, n_1 n_2} = & -\frac{mw\hbar}{4} \langle m_1, m_2 | (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger)^2 + (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger)^2 | n_1, n_2 \rangle + \\ & \frac{\hbar^2}{2mw} \langle m_1, m_2 | \alpha_1 (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger)^4 + \alpha_2 (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger)^4 + \alpha_3 (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger)^4 | n_1, n_2 \rangle, \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde se consideró el caso en que las frecuencias de oscilación fueran iguales $w_1 = w_2 = w$.

La metodología para construir $H^{(p)}$ y $H^{(i)}$ es la siguiente: primero se fijó el número máximo de cuantas $N_c = n_1 + n_2$ y después se contaron todas las combinaciones de n_1 y n_2 que dan la paridad deseada. Por ejemplo, la matriz $H^{(p)}$ para $N_c = 2$, toma la siguiente forma

$$H^{(p)} = \begin{pmatrix} \langle 00 | H^{(p)} | 00 \rangle & \langle 00 | H^{(p)} | 02 \rangle & \langle 00 | H^{(p)} | 11 \rangle & \langle 00 | H^{(p)} | 20 \rangle \\ \langle 02 | H^{(p)} | 00 \rangle & \langle 02 | H^{(p)} | 02 \rangle & \langle 02 | H^{(p)} | 11 \rangle & \langle 02 | H^{(p)} | 20 \rangle \\ \langle 11 | H^{(p)} | 00 \rangle & \langle 11 | H^{(p)} | 02 \rangle & \langle 11 | H^{(p)} | 11 \rangle & \langle 11 | H^{(p)} | 20 \rangle \\ \langle 20 | H^{(p)} | 00 \rangle & \langle 20 | H^{(p)} | 02 \rangle & \langle 20 | H^{(p)} | 11 \rangle & \langle 20 | H^{(p)} | 20 \rangle \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Para este mismo valor de N_c , la matriz $H^{(i)}$, es

$$H^{(i)} = \begin{pmatrix} \langle 01|H^{(p)}|01\rangle & \langle 01|H^{(p)}|10\rangle \\ \langle 10|H^{(p)}|01\rangle & \langle 10|H^{(p)}|10\rangle \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Nótese que, en general las matrices $H^{(p)}$ y $H^{(i)}$ son de dimensión distinta. Ahora, para poder comparar resultados estadísticos con la teoría de matrices aleatorias es necesario que no se mezclen eigenvalores de distinta simetría, por lo que es indistinto si trabajamos con $H^{(i)}$ ó $H^{(p)}$, siempre y cuando trabajemos con una paridad definida, por lo que de aquí en adelante cuando nos refiramos a H sera a alguno de estos bloques.

Consideremos ahora una perturbación isoespectral dada por una rotación en el plano q_1q_2 . Para hacer esto se puede utilizar la transformación de coordenadas

$$\begin{pmatrix} q'_1(\gamma) \\ q'_2(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

donde q'_1 y q'_2 son las coordenadas del hamiltoniano perturbado $H' = H + \delta H$. Explícitamente el hamiltoniano rotado como función de γ es de la forma

$$\begin{aligned} H'(\gamma) = & \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + [\alpha_1 \cos(\gamma)^4 + \alpha_2 \sin(\gamma)^4 + \alpha_3(\cos(\gamma) - \sin(\gamma))^4]q_1^4 \\ & + [-4\alpha_1 \cos(\gamma)^3 \sin(\gamma) + 4\alpha_2 \cos(\gamma) \sin(\gamma)^3 - 2\alpha_3(2 \cos(2\gamma) - \sin(4\gamma))]q_1^3 q_2 \\ & + [6(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\gamma)^2 \sin(\gamma)^2 + 6\alpha_3 \cos(2\gamma)^2]q_1^2 q_2^2 \\ & + [-4\alpha_1 \cos(\gamma) \sin(\gamma)^3 + 4\alpha_2 \cos(\gamma)^3 \sin(\gamma) - 2\alpha_3(2 \cos(2\gamma) + \sin(4\gamma))]q_1 q_2^3 \\ & + [\alpha_1 \sin(\gamma)^4 + \alpha_2 \cos(\gamma)^4 + \alpha_3(\cos(\gamma) + \sin(\gamma))^4]q_2^4. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Como las funciones trigonométricas dadas en (5.9) no dependen de la posición, la representación matricial de $H'(\gamma)$ es muy similar a la de H . Para obtener $H'(\gamma)$, sólo se deben modificar los elementos diferente de cero en la matriz H (Ec. (5.5)) por el factor trigonométrico adecuado.

5.2. Análisis de Fidelidad

Nos interesa ahora obtener la fidelidad en el régimen caótico del sistema, ya que la teoría desarrollada en los capítulos anteriores aplica solamente para esta dinámica. Para obtener numéricamente la matriz hamiltoniana (5.9) se utilizaron los parámetros $\alpha_1=35.15$, $\alpha_2=76.2$ y $\alpha_3=-5.0$, que son los mismos utilizados en [6] para la dinámica caótica. Asimismo, se fijó el número de cuantas en $N_c = 80$, siendo la dimensión de la matriz H resultante de $N = 1681$; esta se eligió que fuese par. Una vez construida la matriz se diagonalizó para encontrar sus eigenvalores $\{E_k^\gamma\}_{k=1}^N$ y eigenvectores $\{|\phi_k^\gamma\rangle\}_{k=1}^N$ para distintos ángulos γ , observando que efectivamente el espectro de eigenvalores permanece invariante al perturbar el sistema con rotaciones arbitrarias. De esta manera, utilizando el estado inicial

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=101}^{200} c_k^0 |\phi_k^0\rangle, \quad (5.10)$$

donde los c_k^0 son coeficientes aleatorios reales, se calculó la fidelidad como función de γ con ayuda de las ecuaciones (1.3) y (1.4))

$$F_\gamma(\tau) = \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=101}^{200} c_j^\gamma c_k^0 e^{i(E_j - E_k)\tau} \langle \phi_j^\gamma | \phi_k^0 \rangle \right|^2, \quad (5.11)$$

los c_k^γ son los coeficientes de desarrollo del estado $|\Psi\rangle$ en la base de $\{|\phi_k^\gamma\rangle\}_{k=1}^N$. En la figura 5.1 se muestran los resultados obtenidos para $\gamma=1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ$ y 6° grados (ó lo que es lo mismo $\pi/180, \pi/90, \pi/60, \pi/45, \pi/36$ y $\pi/30$ radianes, respectivamente), donde se midió el tiempo τ en unidades del tiempo de Heisenberg t_H (ver apéndice A), calculado sobre el rango de energías donde esta definido $|\Psi\rangle$. Se observa que, independientemente del ángulo de perturbación, la fidelidad decae aproximadamente a $\tau \approx 0.05$, esto se puede ver mas claramente en la figura 5.2, donde se graficó la fidelidad para tiempos mas cortos. También se hicieron pruebas con otros estados iniciales combinación lineal de distinto rango de eigenestados, observando que el mínimo varía ligeramente al variar el estado inicial, pero su valor se mantiene cercano a 0.05 y dentro del orden de magnitud $\mathcal{O}(10^{-2})$.

Queremos ahora comparar los resultados obtenidos aquí, con el modelo de fidelidad obtenido mediante la teoría de matrices aleatorias en los capítulos

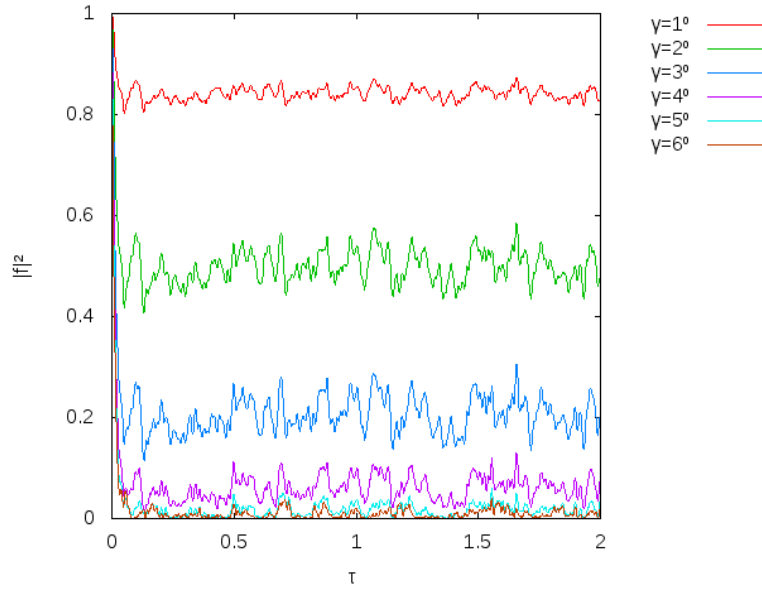


Figura 5.1: Fidelidad del sistema (5.1) al perturbarlo con rotaciones de ángulo $\gamma = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ$ y 6° . Se utilizó el estado inicial dado en la Ec. (5.10).

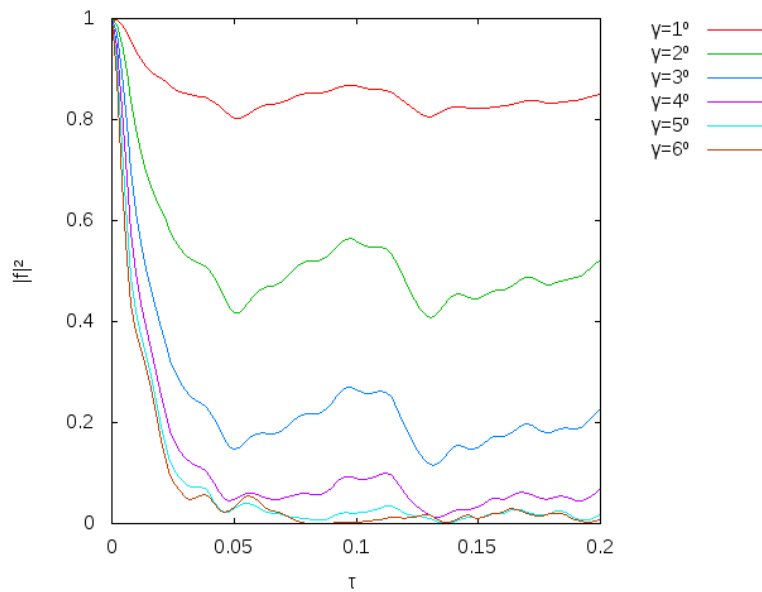


Figura 5.2: Ampliación de la figura 5.1 para tiempos pequeños.

anteriores. Primero notamos que nuestro sistema es invariante ante inversión temporal [5], por lo que debemos utilizar los resultados obtenidos en el capítulo 4 para sistemas *GOE*. Además, debido a que en el modelo RMT, la amplitud de fidelidad decae a tiempos $\tau_m = 1/N$ para perturbaciones $\alpha \geq 2/N$, podemos suponer que existe cierta dimensión asociada al sistema N_a y que, si consideramos $\tau_m = 0.05$, ésta es aproximadamente $N_a \approx 1/\tau_m = 20$. Por otro lado, para $\alpha \geq 2/N$ el valor estacionario de la amplitud de fidelidad se debe encontrar en $[1/N_a, 2/N_a]$, mientras que el de la fidelidad, al ser el módulo al cuadrado de la amplitud de fidelidad, debe estar en el rango $[1/N_a^2, 4/N_a^2]$. Por ello, si es válido que $N_a = 20$, en nuestro caso el valor estacionario de la fidelidad, que llamaremos F_e , se debe encontrar entre los valores $[0.0025, 0.0100]$. En el cuadro 5.1 se escribe el promedio de F_e para las perturbaciones estudiadas anteriormente, así como para los ángulos $\gamma = 10^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ y 90° . Éste promedio se realizó en el dominio de $\tau \in [1, 2]$, ya que en el modelo de RMT el valor estacionario se alcanza para valores $\tau > 1$ (ver figura 4.2).

γ°	γ rad.	$\overline{F_e}$
1	0.0175	0.8419
2	0.0349	0.5000
3	0.0524	0.2080
4	0.0698	0.0631
5	0.0873	0.0184
6	0.1047	0.0099
10	0.1745	0.0099
30	0.5236	0.0044
45	0.7854	0.0031
57	0.9948	0.0033
90	1.5708	0.0031

Cuadro 5.1: Promedio de F_e en el rango $\tau \in [1, 2]$ para distintos valores de γ . En la primera columna se escribe γ en grados y en la segunda en radianes.

Se puede observar en el cuadro superior que para $\gamma \geq 6^\circ$, valor que denotaremos como γ_c , el promedio de F_e está dentro del rango esperado por el modelo RMT, sin que este valor disminuya más allá de la cota inferior de

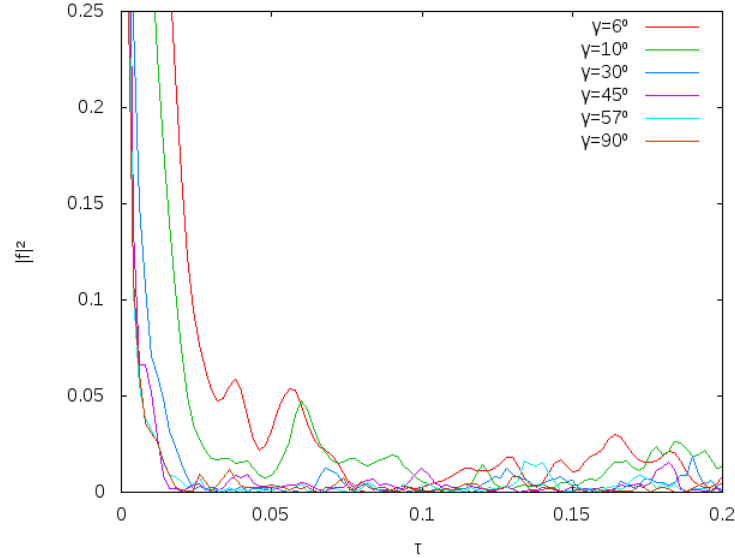


Figura 5.3: Decaimiento de fidelidad para sistema (5.1) al perturbarlo con rotaciones de ángulo $\gamma = 6^\circ, 10^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 57^\circ$ y 90° . Se utilizó el mismo estado inicial que en la figura 5.1.

0.0025, al perturbar el sistema con ángulos mayores. Sin embargo, se puede ver en la figura 5.3 que el valor τ al cual decae la fidelidad se vuelve más pequeño conforme se perturba el sistema con ángulos más grandes, lo que no se puede justificar con el modelo RMT.

Un hecho muy sorprendente es que al medir en radianes los ángulos de perturbación se encuentra que $\gamma_c \approx 0.10 \text{ rad} = 2/N_a$, lo que coincide en magnitud con el valor mínimo α predicho por el modelo RMT para el cual se cumple que $\tau_m = 1/N_a$ y que $F_e \in [1/N_a^2, 4/N_a^2]$. De esta manera parece ser que podemos identificar $\alpha = \gamma$, cuando el ángulo de perturbación se mide en radianes.

Finalmente en la figura 5.4 se compara la fidelidad de este sistema con lo obtenido por el modelo RMT para sistemas *GOE*. Ahí se consideró $N = N_a$ y se graficó el módulo al cuadrado de la Ec. (4.22) para $\alpha = 0.1$ y 1, así como la fidelidad para el modelo dinámico con $\gamma = 0.1047$ y 0.9948 . Se observa que para $\gamma = 0.1047, 0.9948$ la fidelidad del sistema dinámico fluctúa alrededor del valor estacionario del modelo RMT para $\alpha = 1, 0.1$, respectivamente,

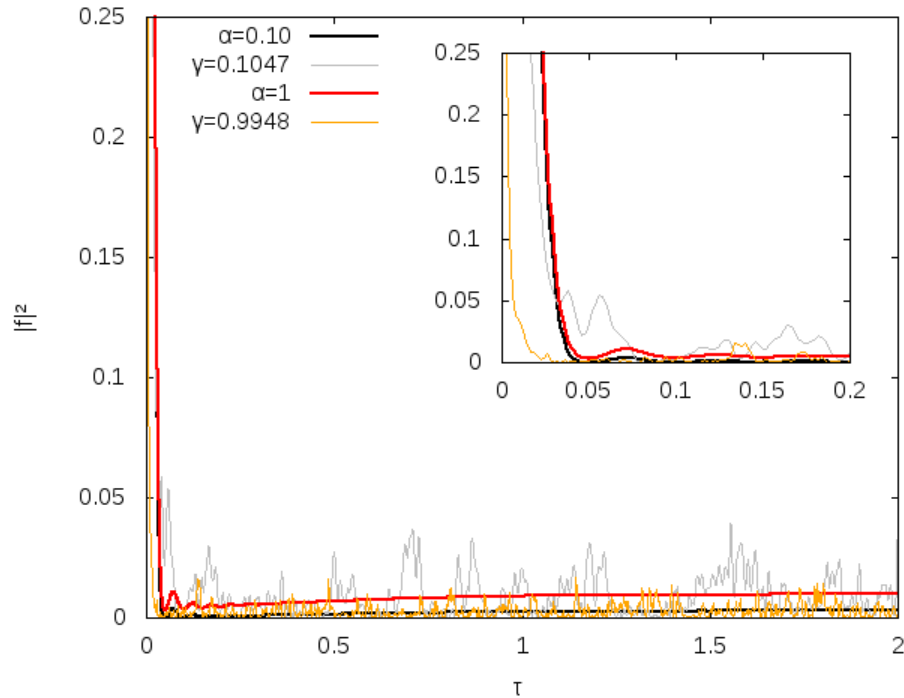


Figura 5.4: Se compara el decaimiento de fidelidad del modelo RMT con el modelo estudiado aquí. Las líneas gruesas muestran el módulo al cuadrado de la Ec. (4.22) para $\alpha = 0.1$ y 1 . Las líneas delgadas son el resultado del modelo dinámico dado en la Ec. (5.1) para $\gamma = 0.1047$ y 0.9948 , utilizando el estado inicial (5.10).

es decir, aunque los promedios de F_e del sistema dinámico caen dentro del rango esperado, se ve que no siguen apropiadamente los valores predichos. Además, en el cuadro pequeño de esta misma figura se puede observar que el valor τ al cual decae la fidelidad difiere ligeramente del modelo RMT.

Capítulo 6

Conclusión

En este capítulo se darán las conclusiones de este trabajo. Empezaremos generando las conclusiones particulares de cada capítulo, para finalmente dar una conclusión general del trabajo.

En el **capítulo 2** se desarrolló el modelo de matrices aleatorias para la amplitud de fidelidad bajo perturbaciones isoespectrales utilizando miembros del *GUE*. Ahí se encontró una expresión analítica para dimensiones grandes. Se observa que el decaimiento a tiempos cortos está determinado por los términos resultantes de la aproximación a la delta de Dirac, mientras que para valores del orden del tiempo de Heisenberg la fidelidad sigue el comportamiento del factor de forma espectral $b_2(\tau)$, con un orden de magnitud menor que el correspondiente a tiempos cortos. Al evaluar numéricamente la fórmula para dimensiones pequeñas y comparar los resultados con la encontrada para dimensiones grandes, se observó que ambas coinciden con un error relativo menor al 10%, para el caso en que $N = 10$.

En el **capítulo 3** se desarrolló de nuevo el modelo de matrices aleatorias para la amplitud de fidelidad, pero ahora utilizando matrices simétricas reales del *GOE* que al ser perturbadas mediante una transformación de semejanza unitaria se convierten en matrices hermitianas. La diferencia observada respecto al caso anterior es que para tiempos del orden del tiempo de Heisenberg, la fidelidad sigue el comportamiento del factor de forma espectral del *GOE*, es decir, su comportamiento está determinado básicamente por $b_1(\tau)$.

En el **capítulo 4** se desarrolló de nuevo este modelo pero utilizando miembros del *GOE* como hamiltonianos no perturbados. En este caso el hamiltoniano fue perturbado mediante una transformación de semejanza ortogonal, lo que hizo que el álgebra fuera más complicada, debido principalmente a que fue necesario utilizar un ensemble de matrices hermitianas antisimétricas para generar las matrices ortogonales que transforman al hamiltoniano. Gracias al sorprendente resultado de que las correlaciones de las matrices hermitianas antisimétricas son las mismas que las del *GUE*, es que fue posible concluir el desarrollo algebraico para este caso. En lo demás, para tiempos del orden del tiempo de Heisenberg, los resultados sólo difieren del caso *GUE* en que la dinámica está determinada por $b_1(\tau)$, mientras que para tiempos cortos la forma del decaimiento de la fidelidad es distinta a los dos casos anteriores, sin embargo se sigue cumpliendo que decae al tiempo $\tau = 1/N$.

Finalmente, en el **capítulo 5** se midió la fidelidad para un sistema compuesto de dos osciladores con potencial de acoplamiento cuártico, el cual se perturbó isoespectralmente mediante una rotación en el espacio de configuración. Se encontró en el régimen caótico del sistema que, independientemente del ángulo de perturbación, la fidelidad decae a $\tau_m = 0.05$. De esta manera, al comparar con el modelo de RMT para sistemas *GOE* desarrollado en el capítulo 4, se asoció una dimensión $N_a = 1/\tau_m = 20$ al sistema. Con esta dimensión, el valor estacionario de la fidelidad permanece en el rango $[1/N_a^2, 4/N_a^2]$ predicho por el modelo RMT. Además, se encontró que si se mide el ángulo de perturbación γ en radianes, se puede asociar la magnitud de este parámetro con la del modelo RMT, es decir, se observa que $\gamma \approx \alpha$. Lo que no se observó fue el comportamiento creciente, dado por el modelo RMT, como función del factor de forma espectral.

En suma, hemos encontrado una expresión bastante simple para la amplitud de fidelidad bajo perturbaciones isoespectrales dentro del marco de referencia de la teoría de matrices aleatorias. Para los dos simetrías estudiadas, el decaimiento a tiempos cortos va como una delta Dirac, mientras que para valores del tiempo de Heisenberg sigue el comportamiento del correspondiente factor de forma espectral $b_\beta(\tau)$. Asimismo, la comparación con el modelo dinámico nos da indicios de cierta correspondencia con el modelo.

Sin embargo, estos resultados se obtuvieron de forma heurística, por lo que queda pendiente hacer un análisis más sistemático, así como buscar un significado físico de la dimensión asociada al sistema N_a .

El posible trabajo futuro será encontrar una expresión de la fidelidad para estados coherentes, para así poder comparar los resultados de RMT con los obtenidos en [7, 8], pues ahí utilizan estos tipos de estados iniciales en su expresión de fidelidad. Cabe mencionar que el grupo de Fabrice Mortesagne en Niza, Francia [33] intenta realizar experimentos en relación con nuestro trabajo. Ellos utilizarán un interferómetro de Mach-Zender para medir la fidelidad después de mandar un haz de microondas a través de dos fibras ópticas caóticas, rotando cierto ángulo una respecto a la otra. Por ello los resultados obtenidos ahí podrán servir para validar experimentalmente nuestro modelo.

Apéndice A

Aspectos de RMT

A continuación se definen algunas cantidades tomadas de la teoría de matrices aleatorias que han sido utilizadas a lo largo de la tesis.

El promedio de la densidad de niveles, algunas veces llamada densidad de estados, es el promedio del número de eigenvalores por unidad de energía en un ensemble dado. Para dimensiones grandes, el promedio de la densidad de niveles para los ensembles clásicos está dado por

$$\langle \rho(E) \rangle = \begin{cases} \sqrt{1 - (\frac{\pi E}{2N})^2} & |E| < \frac{2N}{\pi} \\ 0 & |E| > \frac{2N}{\pi} \end{cases},$$

a la que se conoce como ley del semicírculo de Wigner. En el límite $E \rightarrow 0$ la densidad de niveles se vuelve constante $\langle \rho(E) \rangle = 1$, siempre y cuando la energía se mida en unidades $2N/\pi$.

Una cantidad relacionada con la densidad de niveles es el tiempo de Heisenberg τ_H , que viene a ser el tiempo aproximado en que dos eigenvalores vecinos cruzan el círculo unitario

$$(E_{i+1} - E_i)\tau_H/\hbar \approx 2\pi. \tag{A.1}$$

Unas características importantes de los espectros de matrices aleatorias son sus correlaciones. El factor de forma, que hemos definido en el desarrollo de la tesis, es una cantidad que mide correlaciones entre dos eigenvalores

distintos, también llamadas correlaciones de dos puntos. En el límite de dimensiones grandes esta cantidad se puede escribir como

$$K_{2\beta}(\tau) = 1 + \delta(\tau) - b_2^\beta(\tau) \quad (\text{A.2})$$

donde el índice β caracteriza el ensemble, $\beta = 1$ para *GOE* y $\beta = 2$ para *GUE*. A la función b_2^β se le conoce como factor de forma espectral, y está dada por

$$b_2^1(\tau) = \begin{cases} 1 - 2|\tau| + |\tau| \log(2|\tau| + 1) & \text{si } |\tau| \leq 1 \\ -1 + |\tau| \log\left(\frac{2|\tau|+1}{2|\tau|-1}\right) & \text{si } |\tau| > 1 \end{cases}, \quad (\text{A.3})$$

y

$$b_2^2(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| & \text{si } |\tau| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\tau| > 1 \end{cases}, \quad (\text{A.4})$$

para el ensemble *GOE* y *GUE*, respectivamente.

Apéndice B

Integrales del grupo ortogonal con la función de Weingarten

En el artículo de Collins et. al[26] encuentran una expresión compacta para los distintos valores de las integrales de monomios $u_{i_1 j_1} \dots u_{i_n j_n} \in O(n)$ bajo la medida de Haar. Ellos llegan a que

$$\langle u_{i_1 j_1} \dots u_{i_{2k} j_{2k}} \rangle_{O(n)} = \int_{O(n)} u_{i_1 j_1} \dots u_{i_{2k} j_{2k}} du = \sum_{\pi, \sigma \in D_k} \delta_\pi(\mathbb{I}) \delta_\sigma(\mathbb{J}) W_{kn}(\pi, \sigma), \quad (\text{B.1})$$

donde los objetos del lado derecho son:

- $\mathbb{I} = (i_1, \dots, i_{2k})$ y $\mathbb{J} = (j_1, \dots, j_{2k})$.
- D_k es el conjunto de parejas formadas con los índices $\{1, \dots, 2k\}$.
- $W_{kn}(\pi, \sigma)$ es la matriz de Weingarten dada por G_{kn}^{-1} , tal que $G_{kn}(\pi, \sigma) = n^{|\pi \vee \sigma|}$

Para $k = 2$, que es el caso que se utilizó en el capítulo 4, la matriz de Weingarten está dada por

$$W_{2n} = \begin{pmatrix} n^2 & n & n \\ n & n^2 & n \\ n & n & n^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(n-1)n(n+2)} \begin{pmatrix} n+1 & -1 & -1 \\ -1 & n+1 & -1 \\ -1 & -1 & n+1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

54 B. Integrales del grupo ortogonal con la función de Weingarten

por lo que

$$\begin{aligned}
 \langle u_{i_1 j_1} u_{i_2 j_2} u_{i_3 j_3} u_{i_4 j_4} \rangle_{O(n)} &= \sum_{\pi, \sigma \in D_2} \delta_\pi(i_1, i_2, i_3, i_4) \delta_\sigma(j_1, j_2, j_3, j_4) W_{2n}(\pi, \sigma) = \\
 &\frac{n+1}{(n-1)n(n+2)} (\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \delta_{j_1 j_3} \delta_{j_2 j_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} \delta_{j_1 j_4} \delta_{j_2 j_3}) + \\
 &\frac{-1}{(n-1)n(n+2)} (\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \delta_{j_1 j_3} \delta_{j_2 j_4} + \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \delta_{j_1 j_4} \delta_{j_2 j_3} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} + \\
 &\quad \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \delta_{j_1 j_4} \delta_{j_2 j_3} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} \delta_{j_1 j_3} \delta_{j_2 j_4}).
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Renombrando los subíndices de las deltas de Kronecker por los de (4.11), y observando que dos de ellos se repiten, se llega automáticamente a la expresión (4.12) de la sección 4.2.

Apéndice C

Factor de forma para matrices hermitianas antisimétricas

Para verificar la validez del resultado $K_A(a) = K_2(a)$ (utilizado en la sección 4.3), es decir, que el factor de forma para un ensemble de matrices hermitianas antisimétricas es el mismo que el del *GUE* en el límite cuando $N \rightarrow \infty$ [30], se calculó numéricamente el factor de forma para matrices hermitianas antisimétricas, así como para matrices hermitianas complejas, y se comparó el resultado con la fórmula asintótica del factor de forma para el *GUE* (ver apéndice A).

En la parte superior de la figura C.1 la línea con puntos muestra el factor de forma para un ensemble de 2000 matrices hermitianas antisimétricas de dimensión $N = 200$, mientras que la línea punteada de la figura inferior muestra el factor de forma del *GUE* utilizando 2000 matrices hermitianas complejas de la misma dimensión que en el caso anterior. En ambas figuras, la línea continua muestra el factor de forma del *GUE* en el límite asintótico $N \rightarrow \infty$. Para el primer caso el error relativo, entre la realización numérica y el valor asintótico del *GUE* es menor al 5%, mientras que en el segundo caso es menor al 3%. De esta manera se comprueba numéricamente que las correlaciones son las mismas para ambos ensembles.

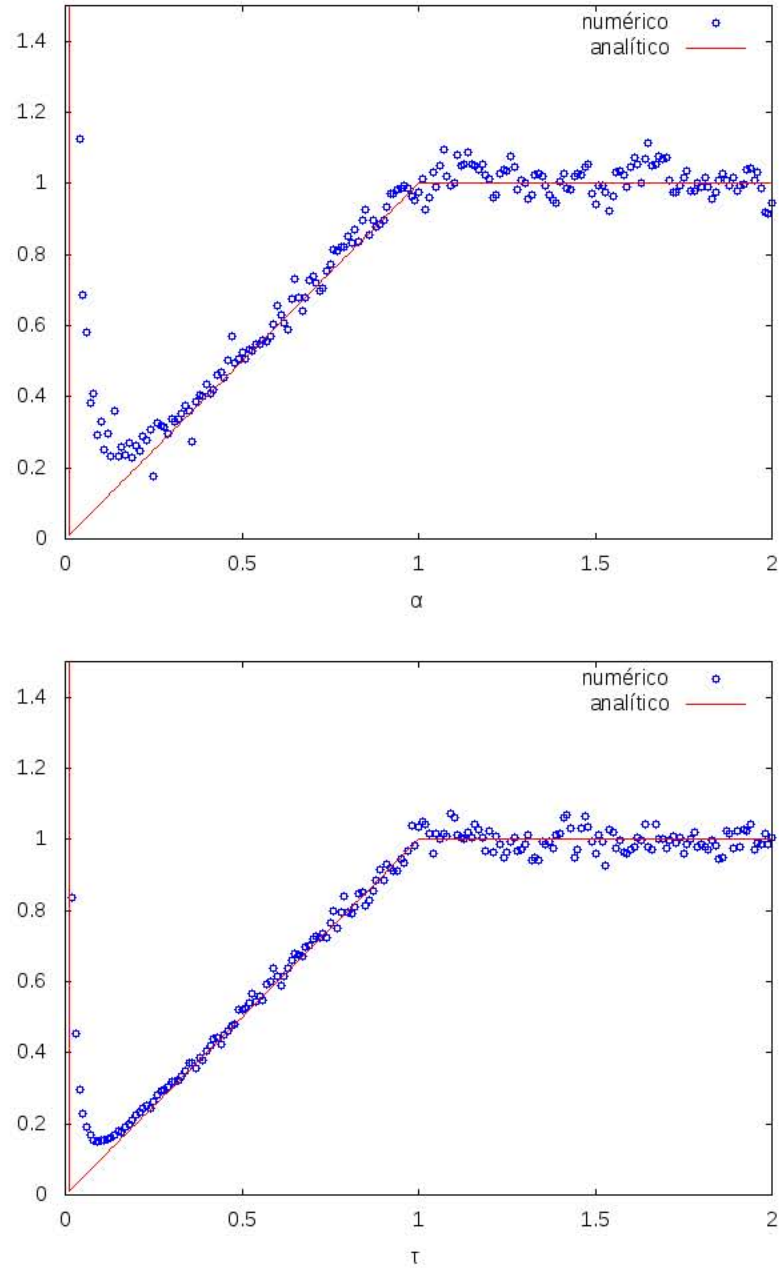


Figura C.1: Las líneas continuas representan el valor asintótico del factor de forma para el *GUE*. Los puntos de arriba muestran el Factor de forma para un ensemble de 2000 matrices hermitianas antisimétricas; mientras que los de abajo son el factor de forma para el mismo número de miembros del *GUE*. En ambos casos la dimensión de las matrices utilizadas es de $N = 200$.

Bibliografía

- [1] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey and S. S. M. Wong. Random-matrix physics: spectrum and strength fluctuations. *Rev. Mod. Phys.* **53**, 3 (1981).
- [2] Thomas Guhr, Axel Müller-Groeling and Hans A. Weidenmüller. Random-matrix theories in quantum physics: common concepts. *Phys. Rep.* **299**, 189 (1998).
- [3] T. Gorin, T. Prosen and T.H. Seligman. A random matrix formulation of fidelity decay. *New J. Phys.* **6**, 20 (2004).
- [4] Thomas Gorin, Tomaž Prosen, Thomas H. Seligman and Marko Žnidarič. Dynamics of Loschmidt echoes and fidelity decay. *Phys. Rep.* **435**, 33 (2006).
- [5] T. H. Seligman, J. J. V. Verbaarschot and M. Zirnbauer. Spectral fluctuation properties of Hamiltonian systems: the transition region between order and chaos. *Phys. Lett.* **18**, 2751 (1985).
- [6] L. Benet, T. H. Seligman and H. A. Weindenmüller. Quantum signatures of classical chaos: Sensitivity of wave functions to perturbations. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4 (1993).
- [7] L. E. Ballentine and J. P. Zibin. Classical state sensitivity from quantum mechanics. *Phys. Rev. A* **54**, 5 (1996).
- [8] Cyril Petitjean, Diego V. Bevilaqua, Eric J. Heller and Philippe Jacquod. Displacement Echoes: Classical Decay and Quantum Freeze. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 16 (2007).

-
- [9] M. Kac. Can One Hear the Shape of a Drum?. *Am. Math. Mon.* **73**, 4 (1966).
- [10] C. Gordon, D. Webb and S. Wolpert. Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds. *Invent. math.* **10**, 1 (1992).
- [11] S. Sridhar and A. Kudrolli. Experiments on Not Hearing the Shape of Drums. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 14 (1994).
- [12] Abhishek Dhar, D. Madhusudhana Rao, Udaya Shankar N. and S. Sridhar. Isospectrality in chaotic billiards. *Phys. Rev. E* **68**, 2 (2003).
- [13] A. Peres. Stability of quantum motion in chaotic and regular systems. *Phys. Rev. A* **30**, 1610 (1984).
- [14] J. Wishart. Generalized product moment distribution in samples. *Biometrika* **20A**, 32 (1928).
- [15] Cartan E. Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes. *Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ.* Vol. **11**, 116 (1935)
- [16] L.K. Hua. Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains. *American Mathematical Society* (1963). Texto original en chino por *Science Press*, Pekin (1958)
- [17] O. Bohigas, R.U. Haq, and A. Pandey. In Nuclear Data for Science and Technology. *K.H. Böchhoff edition*. Reidel, Dordrecht (1983).
- [18] M.L. Mehta. Random matrices and the statistical theory of energy levels. *Academic Press*, New York (1967).
- [19] G. Casati, F. Valz-Gris and I. Guarnieri. On the connection between quantization of non-integrable systems and statistical-theory of spectra. *Lett. Nuovo Cim.* **28**, 8 (1980).
- [20] O. Bohigas, M.J. Giannoni y C. Schmit. Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).
- [21] F. J. Dyson. *J. Math. Phys.* **3** No. 1, 140, 157, 166 (1962)

-
- [22] N. Ullah and C. E. Porter. *Phys. Rev.* **132**, 948 (1963).
- [23] N. Ullah. *Nucl. Phys.* **58**, 65 (1964).
- [24] T. Gorin. Integrals of monomials over the orthogonal group. *J. Math. Phys.* **43**, 6 (2002).
- [25] T. Gorin and G. V. Lpez. Monomial integrals on the classical groups. *J. Math. Phys.* **49**, 1 (2008).
- [26] T. Banica, B. Collins and J.-M. Schlenker. On polynomial integrals over the orthogonal group. *J. Combin. Theory Ser. A* **118**, 778 (2011).
- [27] M. V. Berry, M. Tabor. Level clustering in the regular spectrum. *Proc. R. Soc. A* **356**, 375 (1977).
- [28] E.P. Wigner. Statistical properties of real symmetric matrices with many dimensions. *Can. Math. Congr. Proc., University of Toronto Press* **p. 174**. Toronto (1957)
- [29] Hans-Jürgen Stöckmann. Quantum Chaos, an introduction. *Cambridge University Press*, UK (1999)
- [30] Nicholas M. Katz and Peter Sarnak. Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy. *American Mathematical Society, Colloquium Publications Vol. 45*. Providence, RI (1999).
- [31] L. Kaplan, F. Leyvraz, C. Pineda and T. H. Seligman. A trivial observation on time reversal in random matrix theory. *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 1063 (2007).
- [32] A. Bohr and B. R. Mottelson. Single-Particle Motion. *Nucl. Struct.* **1**, 304 (1969).
- [33] Gros Jean-Baptiste. Comunicación privada.